Séance du 16.01. - Corrigé DS

mardi 9 janvier 2024 08:48

Corrigé du DS

SIO1 DEVOIR SURVEILLE

Nom : ______________

Prénom : ______________

Exercice 1

1. Compléter les congruences suivantes par un entier compris entre 100 et 110 :

57 ≡ 107 [10] **144** ≡ 104 [5] **99** ≡ 106 [7]

≡ 109 [5]

2. Compléter les congruences suivantes par un entier naturel le plus petit possible :

57 ≡ 7 [10] **144** ≡ 4 [5] **99** ≡ 1 [7]

Exercice 2

1. a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

$2009 \equiv 9 \; [16]$

$2009^2 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 1 \; [16]$

Le reste cherché est égal à 1.

$$\begin{array}{r|l} 2009 & 16 \\ 40 & 125 \\ 89 & \\ 9 & \end{array}$$

b) Compléter le résultat suivant : $\mathbf{2009^2} \equiv$ 1 [16]

2. On rappelle que $2009^{8001} = (2009^2)^{4000} \times 2009$.

Déduire de ce qui précède, **en justifiant chaque étape**, que : $2009^{8001} \equiv 2009 \; [16]$

$2009^{8001} = 2009^{2\times 4000 + 1} = 2009^{2\times 4000} \times 2009^1 = (2009^2)^{4000} \times 2009$

$2009^{8001} \equiv (2009^2)^{4000} \times 2009 \equiv 1^{4000} \times 2009 \equiv 1 \times 2009 \equiv 2009 \; [16]$

3. En déduire le reste de la division euclidienne de 2009^{8001} par 16.

$2009^{8001} \equiv 2009 \equiv 9 \; [16]$: 9 est le reste cherché ici

Exercice 3

On écrit les unes à la suite des autres les 26 lettres de l'alphabet. Arrivé à Z, on recommence à A et ainsi de suite.

Quelle est la 10 000^e lettre écrite et combien d'alphabets entiers ont été écrits ?

$10\,000 = 384 \times 26 + 16$

$10\,000 \equiv 16 \; [26]$

La 16^e lettre est P.

$$\begin{array}{r|l} 10\,000 & 26 \\ 220 & 384 \\ 208 & \\ 120 & \\ 16 & \end{array}$$

Exercice 4

1. Donner les 10 premiers chiffres après la virgule de 0,9 en binaire.

$0,9 \times 2 = 1,8$
$0,8 \times 2 = 1,6$
$0,6 \times 2 = 1,2$
$0,2 \times 2 = 0,4$
$0,4 \times 2 = 0,8$
$0,8$

$0,1\,\underbrace{1100}\,\underbrace{1100}\,1$

1 chiffre $\quad 49 \equiv 1\ [4]$

2. Quel est le 50^e chiffre ? Le 100^e ?

$0,1\,\underbrace{1100}\,\underbrace{1100}\,\dots\,\underbrace{1100}\,\boxed{1}$ $\quad 49 \equiv 1\ [4]$

50^e chiffre est un 1.

$0,1\,\underbrace{1100}\,\dots\,\underbrace{1100}\,11\boxed{0}$ $\quad 99 \equiv 3\ [4]$

100^e chiffre est un 0.

Exercice 5

Écrire dans le système hexadécimal les nombres suivants :

a. 541

$541 = 16 \times 33 + 13$, $\quad 33 = 16 \times 2 + 1$, $\quad 2 = 16 \times 0 + 2$

$541_{10} = 21D_{16}$

b. 1620

$1620 = 16 \times 101 + 4$, $\quad 101 = 16 \times 6 + 5$, $\quad 6 = 16 \times 0 + 6$

$1620_{10} = 654_{16}$

c. 2199

$$\begin{array}{r|l} 2199 & 16 \\ 7 & 137 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 137 & 16 \\ 9 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 16 \\ 8 & 0 \end{array}$$

$2199_{10} = 897_{16}$

d. 10^4 = 10000

$$\begin{array}{r|l} 10\,000 & 16 \\ 0 & 625 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 625 & 16 \\ 1 & 39 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 39 & 16 \\ 7 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 16 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$10^4_{10} = 2710_{16}$

Exercice 6

1. 444 et 1961 sont-ils premiers ? Justifier votre réponse.

444 est pair donc divisible par 2 donc 444 non premier.

$1961 = 37 \times 53$ donc 1961 n'est pas premier

2. On veut répartir la totalité de 760 dragées au chocolat et de 1045 dragées aux amandes dans des sachets ayant la même répartition de dragées de chaque sorte.

a. Peut-on faire 76 sachets ? Justifier la réponse.

$760 = 76 \times 10$: 10 dragées au chocolat

$1045 = 76 \times 13 + 57$: Il reste 57 dragées aux amandes

Donc : Pas possible.

b. Quel nombre maximal de sachets peut-on réaliser ?

PGCD (760 ; 1045) = 95

95 sachets.

c. Combien de dragées de chaque sorte y a-t-il alors dans chaque sachet ?

$760 = 8 \times 95$ donc 8 dragées au chocolat.

$1045 = 11 \times 95$ donc 11 dragées aux amandes.

74. +++ **Congruences et puissances**

1. a) Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 2012 par 6.

b) En déduire que $3^{2012} \equiv (3^6)^{335} \times 3^2$.

2. a) Compléter les résultats suivants :

$3^2 \equiv 2$ (modulo 7) et $3^6 \equiv 1$. (modulo 7).

b) Déduire de ce qui précède que $3^{2012} \equiv 2$ (modulo 7) et déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7.

1) a) $2012 = 6 \times 335 + 2$

$3^{2012} = 3^{6\times 335+2} = 3^{6\times 335} \times 3^2$

$3^{2012} = (3^6)^{335} \times 3^2$

2) b) $3^{2012} \equiv (3^6)^{335} \times 3^2 \equiv 1^{335} \times 2 \equiv 1 \times 2 \equiv 2\ [7]$

Le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 6 est égal à 2.

• Déterminer le reste de la division euclidienne de 198^{1907} par 7.

$198 \equiv 2\ [7]$ car $198 = 7 \times 27 + 2$

et $2^3 \equiv 8 \equiv 1\ [7]$ et $1907 = 3 \times 635 + 2$

$198^{1907} \equiv 2^{1907} \equiv 2^{3\times 635+2} \equiv (2^3)^{635} \times 2^2 \equiv 1^{635} \times 4 \equiv 4\ [7]$

Le reste est 4.

• Même exercice avec $1905^{13\,025}$ modulo 13

$1905 \equiv 7\ [13]$ et $7^{12} \equiv 1\ [13]$

$(13\,025 = 12 \times 1085 + 5)$

$1905^{13025} \equiv 7^{13025} \equiv 7^{12\times 1085+5}$

$1905^{13025} \equiv (7^{12})^{1085} \times 7^5 \equiv 1^{1085} \times 16\,807\ [13]$

$1905^{13025} \equiv 1 \times 16807 \equiv 1 \times 11 \equiv 11\ [13]$

Exercice 22.

a) Quelles sont les valeurs possibles de 2^n modulo 7 pour n entier naturel ?

b) À quelle condition sur n le nombre $2^n - 1$ est-il un multiple de 7 ?

a) Il semblerait, d'après la calculatrice, que les restes possibles sont 1 ; 2 ou 4.

b) Démontrons-le :

• Si n est un multiple de 3 : $n = 3k$ $(k \in \mathbb{N})$

$2^n \equiv 2^{3k} \equiv (2^3)^k \equiv 8^k \equiv 1^k \equiv 1\ [7]$

car $8 = 7 \times 1 + 1$

$8 \equiv 1\ [7]$

• Si $n = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$

$2^n \equiv 2^{3k+1} \equiv 2^{3k} \times 2 \equiv (2^3)^k \times 2 \equiv 1 \times 2 \equiv 2\ [7]$

• Si $n = 3k+2$

$2^n \equiv 2^{3k+2} \equiv 2^{3k} \times 2^2 \equiv 1 \times 4 \equiv 4\ [7]$

Exercice 23.

a) Montrer que $15^5 - 27^5$ est un multiple de 12.

b) Montrer que $8^8 - 6^8$ est un multiple de 7.

Sans calculatrice

a) $15^5 - 27^5 \equiv 3^5 - 3^5 \equiv 0 \ [12]$ donc $15^5 - 27^5$ est un multiple de 12.

$15 \equiv 3 \ [12]$ et $27 \equiv 3 \ [12]$

b) $8^8 - 6^8 \equiv 1^8 - 6^8 \equiv 1^8 - (-1)^8 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \ [7]$

donc $8^8 - 6^8$ est un multiple de 7.

$15 \equiv 22 \equiv 8 \equiv 1 \equiv -6 \ [7]$

$-6 = 7 \times (-1) + 1$

$-72 \equiv -2 \equiv 5 \ [7]$

- Calculer : 2024^{2024} modulo 13

$2024 \equiv 9 \ [13]$ car $2024 = 13 \times 155 + 9$

$2024^{2024} \equiv 9^{2024}$ et $9^3 \equiv 1 \ [13]$

car $9^3 = 729 = 13 \times 56 + 1$

$2024^{2024} \equiv 9^{2024} \equiv 9^{3 \times 674 + 2} \equiv (9^3)^{674} \times 9^2 \ [13]$

$2024^{2024} \equiv 1^{674} \times 81 \equiv 1 \times 81 \equiv 81 \equiv 3 \ [13]$

- 2676^{2024} modulo 13

$2676^{2024} \equiv 11^{2024} \equiv 11^{6 \times 337 + 2} \equiv (11^6)^{337} \times 11^2 \ [13]$

(car $11^6 \equiv 12 \equiv -1 \ [13]$)

$2676^{2024} \equiv (-1)^{337} \times 11^2 \equiv (-1) \times 121 \equiv -1 \times 4 \ [13]$

$2676^{2024} \equiv -4 \equiv 9 \ [13]$

Autre méthode : $2676^{2024} \equiv 11^{12 \times 168 + 8} \equiv (11^{12})^{168} + 11^8 \ [13]$

$\equiv 1^{168} \times 9 \equiv 9 \ [13]$