Séance du 20.02. - DS

DS le 20.02. : congruences et logique

Exercice 1

1) Compléter les égalités de congruences suivantes avec les plus petits entiers naturels possible :

a) $7541 \equiv$ _1_ $[2]$ b) $1753 \equiv$ __3_ $[10]$ c) $152 \equiv$ _5__ $[7]$

2) Montrer que $15^5 - 27^5$ est un multiple de 12.

$15^5 - 27^5 \equiv 3^5 - 3^5 \equiv 0\ [12]$ donc $15^5 - 27^5$ est un multiple de 12.

3) Montrer que $8^8 - 6^8$ est un multiple de 7.

$8^8 - 6^8 \equiv 1^8 - (-1)^8 \equiv 1^8 - 1^8 \equiv 0\ [7]$ donc $8^8 - 6^8$ est un multiple de 7.

4) Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 de :

a) 12

$12 = 1 \times 11 + 1$ donc le reste est 1.

b) 78

$78 = 11 \times 7 + 1$ donc le reste est 1.

c) 12^{15}

$12^{15} \equiv 1^{15} \equiv 1\ [11]$ donc le reste est 1.

d) 78^{15}

$78^{15} \equiv 1^{15} \equiv 1\ [11]$ donc le reste est 1.

5) Quel est le reste de la division euclidienne de 57383^{114} par 19 ?

$57383^{114} \equiv 3^{114} \equiv 3^{18\times 6+6} \equiv (3^{18})^6 \times 3^6 \equiv 1^6 \times 729 \equiv 7\ [19]$

Exercice 2

En informatique, le connecteur logique « xor », appelé « ou exclusif » est très utile. Le « xor » est défini par la table de vérité suivante :

P	Q	$P\ xor\ Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Par exemple les deux premières lignes signifient que $0\ xor\ 0 = 0$ et que $0\ xor 1 = 1$.

1. Compléter la table de vérité ci-dessous :

P	Q	$P\ xor\ Q$	$(P\ xor\ Q)\ xor\ Q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1

2. Parmi les quatre propositions P, Q, $(P \text{ } xor \text{ } Q)$ et $((P \text{ } xor \text{ } Q) xor \text{ } Q)$, deux sont équivalentes. Déterminer lesquelles en expliquant la réponse.

$\left((P \text{ } xor \text{ } Q) xor \text{ } Q\right) \Leftrightarrow P$

Exercice 3

L'implication et sa contraposée

1) Grâce à une table de vérité, montrer que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\bar{Q}$	$\bar{P}$	$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

2) Appliquer le résultat pour écrire des propositions équivalentes aux propositions suivantes :
a) "Si la télévision est allumée, alors quelqu'un la regarde".

Si quelqu'un ne regarde pas la télévision alors le télévision n'est pas allumée.

b) $(x > 1) \Rightarrow (x^2 > 1)$.

$(x^2 \leq 1) \Rightarrow (x \leq 1)$

Exercice 4

Donner la traduction en français des propositions suivantes :
On rappelle que $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et que $\mathbb{N}$ représente l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \dots \dots \dots\}$
1) A : « $\exists x \in \mathbb{R}, 2x = 5$ »

Il existe x reel tel que $2x = 5$.

2) B : « $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$ »

Pour tout x entier naturel, on a $x \geq 0$.

3) Donner les négations (en écriture symbolique) des propositions A et B, notées respectivement $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

$\bar{A}$: $\forall x \in \mathbb{R}, 2x \neq 5$

$\bar{B}$: $\exists x \in \mathbb{N}, x < 0$

Exercices

Exercice 64

En utilisant les tables de vérités, montrer que, quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q, on a

$$\overline{P} \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow \overline{P \vee Q}$$

Compléter

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$ (A)	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$ (B)
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Indiquer les colonnes identiques qui permettent de conclure.

les colonnes A et B sont identiques donc

$\overline{P} \wedge \overline{Q} \iff \overline{P \vee Q}$

Exercice 65

En utilisant les tables de vérités, montrer que, quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q, on a

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q}) \Leftrightarrow P$$

Compléter

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \vee Q$	$P \vee \overline{Q}$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Indiquer les colonnes identiques qui permettent de conclure.

$\left(\left(P \vee Q\right) \wedge \left(P \vee \overline{Q}\right)\right) \iff P$

Autre démonstration possible :

$(P \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q}) \iff P \vee (Q \wedge \overline{Q})$

$\iff P \vee 0$

$\iff P$

Q	$\overline{Q}$	$Q \wedge \overline{Q}$
0	1	0
1	0	0

Pour mardi 12.03.

Exercice 67 : on peut retrouver tous les opérateurs à partir du nor

Pour toutes propositions A et B on définit l'opération « nor », notée $\downarrow$ par :

$$A \downarrow B \Longleftrightarrow \overline{A \vee B}$$

Cette opération est dite *universelle* car elle permet de retrouver toutes les autres opérations.

1. Montrer que $A \downarrow A \Longleftrightarrow \overline{A}$ (on peut donc retrouver l'opération « non »).
2. En déduire que l'on peut retrouver l'opération « et » ainsi :

$$(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) = A \vee B$$

3. Comment à partir de A, B et $\downarrow$ obtenir $A \wedge B$ (penser aux lois de De Morgan) ?

Exercice 68

Sans chercher à démontrer quoi que ce soit, donner les négations des propositions suivantes

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \exists z \in \mathbf{R}, x < z < y$
2. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 3$
3. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists p \in \mathbf{N}^*$ n divise p ou p divise n.

Exercice 69

1. A : $\forall n \in \mathbf{N}$ 3 divise n ou 2 divise n
   Montrer que A est fausse
2. B : $\exists n \in \mathbf{N}$, 3 divise n et 4 divise n
   Montrer que B est vraie
3. C : « Quand on prend trois nombres entiers qui se suivent, leur somme est toujours un multiple de 3 » .
   Montrer que C est vraie.
4. D : « Quand on prend quatre nombres entiers qui se suivent, leur somme est toujours un multiple de 4 » .
   Montrer que D est fausse.
5. E : « Il existe deux entiers k et n plus grands que 1 tels que k divise à la fois n et n+1.
   Montrer que E est fausse.