Séance 10 du 18.03. - Signes avec ln

Pour le 18.03.

$g(x) = (2x^2 - 5x + 8)(7 - x)$
$h(x) = (4x - 8)e^{5x^2 - 8x + 1}$
$k(x) = \dfrac{-3x + 12}{x^2 + x - 6}$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 8$		+		+	
$7 - x$		+	0	−	
$g(x)$		+	0	−	

$\Delta < 0$

$h(x) = (4x - 8)e^{5x^2 - 8x + 1}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$4x - 8$		−	0	+	
$e^{5x^2 - 8x + 1}$		+		+	
$h(x)$		−	0	+	

$k(x) = \dfrac{-3x + 12}{x^2 + x - 6}$

x	$-\infty$		-3		2		4		$+\infty$
$-3x + 12$		+		+		+	0	−	
$x^2 + x - 6$		+	0	−	0	+		+	
$k(x)$		+	||	−	||	+	0	−	

$\Delta = 25 > 0$: $x = -3$ ou $x = 2$

- Etudier le signe de :

a) $f(x) = (5x - 10)(x^2 - 3x) = (5x - 10)x(x - 3)$

b) $g(x) = (4x - 7)e^{-x} - e^{-x}(6x + 12)$

a)

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$5x - 10$		−		−	0	+		+	
$x^2 - 3x$		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

b) $g(x) = (4x - 7)e^{-x} - e^{-x}(6x + 12)$
$= e^{-x}(4x - 7 - (6x + 12))$
$= e^{-x}(4x - 7 - 6x - 12)$
$= e^{-x}(-2x - 19)$

$= e^{-x}(-2x-19)$

x	$-\infty$		$-9{,}5$		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$-2x-19$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

$-2x-19=0$
$-2x=19$
$x=-\frac{19}{2}=-9{,}5$

Rappels (factorisation):

Factoriser ou réduire au même dénominateur:

a) $f(x)=(5x-8)(e^x+1)-5x+8$

b) $g(x)=\frac{7x+1}{x+2}-3(x+1)$

c) $h(x)=e^{-x}(7x+1)+\frac{1}{e^x}$

a) $f(x)=(5x-8)(e^x+1)-(5x-8)\times 1$

$=(5x-8)(e^x+1-1)$

$=(5x-8)e^x$

b) $g(x)=\frac{7x+1}{x+2}-\frac{3(x+1)(x+2)}{x+2}$

$=\frac{7x+1-3(x+1)(x+2)}{x+2}$

$=\frac{7x+1-3(x^2+2x+x+2)}{x+2}$

$=\frac{7x+1-3(x^2+3x+2)}{x+2}$

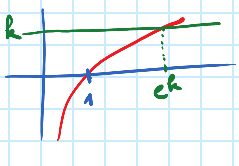
$=\frac{7x+1-3x^2-9x-6}{x+2}=\frac{-3x^2-2x-5}{x+2}$

Règles utilisées: $ab+ac=a(b+c)$

$\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Rappel sur la fonction ln:



- $\ln x$ existe pour $x>0$
- $\ln 1=0$
- Pour $0<x<1$, $\ln x<0$
- $\ln x=k$
  $x=e^k$

· Pour $0 < x < 1$, $\ln x < 0$

Pour $x > 1$, $\ln x > 0$

· $\ln x = k$

$x = e^k$

· Signe de $\ln x - k$

$\ln x - k = 0$	$\ln x - k > 0$	$\ln x - k < 0$
$\ln x = k$	$\ln x > k$	$\ln x < k$
$x = e^k$	$x > e^k$	$0 < x < e^k$

Etudier le signe de : $(x > 0)$

· $f(x) = (3x+9)(\ln x + 2) - (x-7)(\ln x + 2)$

$= (\ln x + 2)\big((3x+9) - (x-7)\big)$

$= (\ln x + 2)(3x + 9 - x + 7)$

$= (\ln x + 2)(2x + 16)$

$\ln x + 2 = 0$
$\ln x = -2$
$x = e^{-2} \approx 0,14$

$\ln x + 2 > 0$
$\ln x > -2$
$x > e^{-2}$

x	$-\infty$		-8		0		$0,14$		$+\infty$
$\ln x + 2$					$\|\|$	$-$	0	$+$	
$2x + 16$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(\ln x + 2)(2x+16)$					$\|\|$	$-$	0	$+$	

Etudier le signe de : $g(x) = (5 - \ln x)(x^2 - 5x + 6)$
$(x > 0)$

x	0		2		3		e^5		$+\infty$
$5 - \ln x$	$\|\|$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x^2 - 5x + 6$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$(5 - \ln x)(x^2 - 5x + 6)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$5 - \ln x = 0$
$5 = \ln x$
$e^5 = x \approx 148,4$

$5 - \ln x > 0$
$-\ln x > -5$
$\ln x < 5$
$x < e^5$

$x^2 - 5x + 6$: $\Delta = 1$
$x = 2$ ou $x = 3$

· Etude du signe de $\ln(x-2)$

$\ln(x-2)$ existe lorsque $x - 2 > 0$
$x > 2$

$\ln(x-2) = 0$
$x - 2 = 1$
$x = 3$

x	2		3		$+\infty$
$\ln(x-2)$		$-$	0	$+$	

$\ln(x-2) > 0$ exp
$x - 2 > 1 = e^0$
$x > 3$

· Etude du signe de $\ln(x-2) - 1$

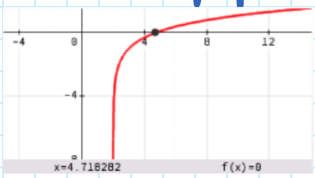
$\ln(x-2) - 1$ existe pour $x - 2 > 0$
$x > 2$

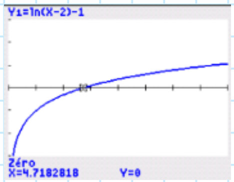
$\ln(x-2)-1=0$
$\ln(x-2)=1$
$x-2=e$
$x=e+2\approx 4{,}7$

$\ln(x-2)-1>0$ $\quad +1$
$\ln(x-2)>1$
$x-2>e$
$x>e+2$

x	2		4,7		$+\infty$
$\ln(x-2)-1$		$-$	0	$+$	

- On peut aussi utiliser l'écran graphique de la calculatrice.





x	2		4,7		$+\infty$
$\ln(x-2)-1$		$-$	0	$+$	

Exemples 2

⇝ $\ln(x+1)-1$ sur $]0;+\infty[$:

▷ on résout $\ln(x+1)-1=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=1 \Leftrightarrow x+1=e^1=e \Leftrightarrow x=e-1\approx 1{,}72$;
▷ on utilise la calculatrice en remplaçant x par une valeur avant $e-1$ et une valeur après $e-1$;
▷ avec $x=1$ on trouve $\ln(1+1)-1\approx -0{,}3<0$ et avec $x=3$ on trouve $\ln(3+1)-1\approx 0{,}4>0$

x	0		$e-1$		$+\infty$
expr		$-$	0	$+$	

⇝ $-4x+20-\dfrac{16}{x}$ sur $]0{,}5;6{,}5]$:

- en mettant au même dénominateur, on obtient $\dfrac{-4x^2}{x}+\dfrac{20x}{x}-\dfrac{16}{x}=\dfrac{-4x^2+20x-16}{x}$;
- le dénominateur (x) est strictement positif sur $]0{,}5;6{,}5]$;
- pour le numérateur, $\Delta=144$ et les deux racines sont 1 et 4;

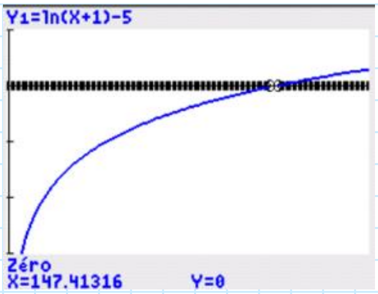
Ainsi on obtient :

x	0,5		1		4		6,5
expr		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	0,5		1		4		6,5
x		$+$		$+$		$+$	
$-4x^2+20x-16$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\dfrac{-4x^2+20x-16}{x}$		$-$	0	$+$	0	$+$	

- Donner le signe de $\ln(x+1)-5$ à l'aide de la calculatrice $(x>-1)$

x	-1		147,4		$+\infty$
$\ln(x+1)-5$		$-$	0	$+$	


Y1=ln(X+1)-5
Zéro
X=147.41316
Y=0