Mars - Séance 9 du 11.03. - Etude de signes

Corrigé du DS

Exemples 4

On peut commencer par rappeler le fait qu'une **exponentielle est toujours strictement positive**!
Pour les équations faisant intervenir « e$^{...}$ » ou « ln(...) », on isole et on utilise la fonction « réciproque » :

- $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5)$.
- $4e^{2x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} = 5 \Leftrightarrow e^{2x} = 1{,}25 \Leftrightarrow 2x = \ln(1{,}25) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1{,}25)}{2}$.
- $\ln(x) = -4 \Leftrightarrow x = e^{-4}$.
- $10\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 10\ln(x) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) = -0{,}1 \Leftrightarrow x = e^{-0{,}1}$.

Applications : Résoudre :

- $9x + 18 = 5x + 14$ ($-5x$; $-5x$)
  $4x + 18 = 14$ (-18 ; -18)
  $\frac{4x}{4} = \frac{-4}{4}$
  $x = -1$ $\quad \mathcal{S} = \{-1\}$

- $\ln x = 12$
  $x = e^{12}$
  $\mathcal{S} = \{e^{12}\}$

- $e^x = -8$
  Pas de solution

- $e^x = 8$
  $x = \ln 8 \approx 2{,}08$
  $\mathcal{S} = \{\ln 8\}$

- $3e^x + 7 = 19$ (-7 ; -7)
  $\frac{3e^x}{3} = \frac{12}{3}$
  $\ln(e^x) = \ln 4$
  $x = \ln 4 \approx 1{,}39$
  $\mathcal{S} = \{\ln 4\}$

- $4 - 8\ln x = -28$ (-4 ; -4)
  $\frac{-8\ln x}{-8} = \frac{-32}{-8}$
  $\exp(\ln x) = \exp 4$
  $x = e^4 \approx 54{,}6$
  $\mathcal{S} = \{e^4\}$

- $e^x = 2$
  $x = \ln 2$
  $\mathcal{S} = \{\ln 2\}$

- $\ln x = -9$
  $x = e^{-9} = \frac{1}{e^9}$
  $\mathcal{S} = \{e^{-9}\}$

- $3e^x + 8 = 12$
  $3e^x = 4$
  $e^x = \frac{4}{3}$
  $x = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$
  $\mathcal{S} = \{\ln(\frac{4}{3})\}$

- $2\ln x - 5 = 7$
  $2\ln x = 12$
  $\ln x = 6$
  $x = e^6$
  $\mathcal{S} = \{e^6\}$

Il faut d'abord isoler e^x ou $\ln x$

- $2e^x - 2 \leq 7$
  $2e^x \leq 9$
  $e^x \leq 4{,}5$
  $x \leq \ln 4{,}5$
  $\mathcal{S} =]-\infty ; \ln 4{,}5]$

- $4\ln x - 8 \geq 4 \quad (x>0)$
  $4\ln x \geq 12$
  $\ln x \geq 3$
  $x \geq e^3$
  $\mathcal{S} = [e^3 ; +\infty[$

- $2\ln x < 6 \quad (x>0)$
  $\ln x < 3 \qquad 0 < x < e^3 \qquad \mathcal{S} =]0 ; e^3[$

II.2. Étude de signes

Rappels tableau de signes

Pour étudier le signe d'une fonction, le plus simple est de travailler sur un tds :
- ⇝ il ne faut avoir que des produits et/ou des quotients ;
  Si besoin on met au même dénominateur, on factorise, etc
- ⇝ on « remplit » une ligne par facteur ;
- ⇝ la dernière ligne repose sur la **règle des signes**.

Les expressions classiques à savoir étudier :
- ⇝ un **carré** est toujours positif (il peut quand même s'annuler...) ;
- ⇝ une **exponentielle** est toujours strictement positive ;
- ⇝ les fonctions affines $mx + p$, pour lesquelles on « utilise » le signe de m après le zéro ;
- ⇝ les trinômes $ax^2 + bx + c$ pour lesquelles le signe de a est à l'extérieur des éventuelles racines ;
- ⇝ les expressions du type $\ln(x) + a$ ou $e^x - a$.

Rappels : 1er degré : $ax + b$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

Signes de : $f(x) = 5x - 8$; $g(x) = -3x + 9$

x	$-\infty$		1,6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$5x - 8 = 0$
$5x = 8$
$x = \frac{8}{5} = 1{,}6$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

$-3x + 9 = 0$
$-3x = -9$
$x = \frac{-9}{-3} = 3$

- Étudier le signe de : $f(x) = 7 - 14x$
  $g(x) = 4x + 12$
  $h(x) = (2 - 6x)(x + 3)$ (produit)

x	$-\infty$		0,5		$+\infty$
$7-14x$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$4x+12$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-6x)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$2-6x=0$
$2=6x$
$\frac{1}{3}=x$

$x+3=0$
$x=-3$

- Pour $x<-3$ ou $x>\frac{1}{3}$, $h(x)<0$
- Pour $-3<x<\frac{1}{3}$, $h(x)>0$
- Pour $x=-3$ ou $x=\frac{1}{3}$, $h(x)=0$

- Etudier le signe de $k(x)=\dfrac{(2x-8)(x+7)}{10-5x}$

x	$-\infty$		-7		2		4		$+\infty$
$2x-8$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$10-5x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{(2x-8)(x+7)}{10-5x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Lorsque 0 se trouve au dénominateur, la valeur de x est une valeur interdite

Rappel : Signe d'une expression du second degré : $f(x)=ax^2+bx+c$

$$\Delta = b^2-4ac$$

Si $\Delta<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

Si $\Delta=0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

Si $\Delta>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

On retient : " Signe de a partout sauf entre les 2 zéros "

Exemples 1

⇝ $3x+18$:

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
expr		$-$	0	$+$	

⇝ $-2x^2+10x+12$:

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
expr		$-$	0	$+$	0	$-$	

⇝ $(5x-2)e^{2x+1}$:

x	$-\infty$		$0{,}4$		$+\infty$
$5x-2$		$-$	0	$+$	

Exemples 1

⇝ $3x+18$:

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
expr		$-$	0	$+$	

⇝ $-2x^2+10x+12$:

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
expr		$-$	0	$+$	0	$-$	

⇝ $(5x-2)e^{2x+1}$:

x	$-\infty$		$0{,}4$		$+\infty$
$5x-2$		$-$	0	$+$	
e^{2x+1}		$+$		$+$	
expr		$-$	0	$+$	

⇝ $\dfrac{x^2-5x+6}{x+3}$:

x	$-\infty$		-3		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
expr		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Application : Etudier le signe de :

$f(x) = x^2 + x - 6$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour le 18.03.

$g(x) = (2x^2 - 5x + 8)(7 - x)$

$h(x) = (4x - 8)\, e^{5x^2 - 8x + 1}$

$k(x) = \dfrac{-3x + 12}{x^2 + x - 6}$