Déc - Séance du 05.12. - Propriétés des congruences

Exercice intrusion dans la matinée - Consignes

Propriété

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.
Dire que $a \equiv b \quad [n]$ revient à dire que $a - b$ est un multiple de n.

Exemple : $123 \stackrel{?}{\equiv} 38 \quad [5]$

$123 - 38 = 85 = 5 \times 17$ donc $123 \equiv 38 \, [5]$

Exemples

a. On a vu que $17 \equiv 22 \quad [5]$, et en effet $22 - 17 = 5$.

b. Partons de 11 et ajoutons lui un multiple de 3 : $11 + 7 \times 3 = 32$.
11 et 32 sont congrus modulo 3 : la différence est $32 - 11 = 7 \times 3$, et en faisant les divisions euclidiennes on trouve : $11 = 3 \times 3 + 2$ et $32 = 10 \times 3 + 2$ donc 11 et 32 on le même reste dans la division euclidienne par 3.

Pour justifier que 11 et 32 sont congrus modulo 3, il y a 2 méthodes :

- $11 = 3 \times 3 + 2 \quad r = 2$
  $32 = 3 \times 10 + 2 \quad r = 2$ donc $11 \equiv 32 \, [3]$
- $32 - 11 = 21 = 3 \times 7$ donc $11 \equiv 32 \, [3]$

Explication : $a = nq + r \quad 0 \leq r < n$

$b > a$. $\quad b = nq' + r' \quad 0 \leq r' < n$

$b - a = nq' + r' - nq + r$

$= n(q' - q) + r' - r$

Lorsque $a \equiv b \, [n]$, $r = r'$ et $r' - r = 0$

donc $b - a = n(q' - q)$

Exercice 48

Ci dessous, il y a 4 congruences. Dire si elles sont vraies ou non :

a. En faisant les « divisions euclidiennes par le modulo » .

b. En regardant si la différence des deux nombres est un « multiple du modulo » .

Quelle est-la méthode la plus rapide ?

a. $19 \equiv 13 \quad [6]$

b. $53 \equiv 29 \quad [5]$

c. $28 \equiv 0 \quad [7]$

d. $257 \equiv 353 \quad [32]$

Exemple : $122 \stackrel{?}{\equiv} 40 \quad [6]$

- $122 = 6 \times 20 + 2 \quad r = 2$

  $40 = 6 \times 6 + 4 \quad r' = 4$

  Comme $r \neq r'$, $122 \not\equiv 40 \, [6]$

- $122 - 40 = 82 = 6 \times 13 + 4$

82 n'est pas un multiple de 6

donc $122 \not\equiv 40$ [6]

a) • $19 - 13 = 6$ donc $19 \equiv 13$ [6]

• $19 = 6 \times 3 + 1$
$13 = 6 \times 2 + 1$ donc $19 \equiv 13$ [6]

b) • $28 - 0 = 28 = 7 \times 4$ donc $28 \equiv 0$ [7]

• $28 = 7 \times 4 + 0$
$0 = 7 \times 0 + 0$ donc $28 \equiv 0$ [7]

c) • $53 - 29 = 24 = 5 \times 4 + 4$ donc $53 \not\equiv 29$ [5]

• $53 = 5 \times 10 + 3$
$29 = 5 \times 5 + 4$ donc $53 \not\equiv 29$ [5]

d) • $353 - 257 = 96 = 32 \times 3 + 0$

donc $353 \equiv 257$ [32]

• $353 = 32 \times 11 + 1$
$257 = 32 \times 8 + 1$

donc $353 \equiv 257$ [32]

Exercice 21.
Compléter les égalités de congruence suivantes avec les plus petit entier naturel possible :
a) $5917 \equiv$ [2] b) $1724 \equiv$ [10] c) $125 \equiv$ [7]

a) $5917 \equiv 1$ [2] car $5917 - 1 = 5916$ est pair.

b) $1724 \equiv 4$ [10] car $1724 = 10 \times 172 + 4$

c) $125 \equiv 6$ [7] car $125 = 7 \times 17 + 6$

Autre exemple :

$14721 \equiv 5$ [13]

car $14721 = 1132 \times 13 + 5$

Propriété : compatibilité avec les opérations

Soient a, b, c, d, n et p 5 entiers naturels, et n non nul.

Supposons que $a \equiv b$ [n] et $c \equiv d$ [n]. Alors

$$a + p \equiv b + p \quad [n]$$
$$a + c \equiv b + d \quad [n]$$
$$a - c \equiv b - d \quad [n]$$
$$a \times p \equiv b \times p \quad [n]$$
$$a \times c \equiv b \times d \quad [n]$$
$$a^p \equiv b^p \quad [n]$$

On a $14721 \equiv 5$ [13]

on peut dire (sans calculs) $14721^4 \equiv 5^4$ [13]

Exemples

Exemples

a. Par quel nombre se termine 123456789 × 981234567 ?

On cherche ici $123456789 \times 981234567 \equiv ?\ [10]$

$$123456789 \equiv 9\ [10]$$
$$981234567 \equiv 7\ [10]$$

donc $123456789 \times 981234567 \equiv 9 \times 7\ [10]$
$\equiv 63\ [10]$
$\equiv 3$

Pourquoi modulo 10 ici :

$$1437 = 143 \times 10 + 7$$

donc $1437 \equiv 7\ [10]$

Autre exemple :

$1234 \equiv 2\ [7]$ $\quad 724 \equiv 3\ [7]$

car $1234 - 2 = 1232 = 7 \times 176$ $\quad$ car $724 - 3 = 721 = 7 \times 103$

Sans calculatrice, déduire :

$$1234 \times 724 \equiv 2 \times 3 \equiv 6\ [7]$$
$$1234 + 724 \equiv 2 + 3 \equiv 5\ [7]$$
$$1234^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1\ [7]$$

b. Que vaut 1314 modulo 13 ?

$1314 \equiv 13 \times 100 + 14\ [13]$
$\equiv 0 \times 100 + 1$
$\equiv 1\ [13]$

Car $13 \equiv 0\ [13]$

Exercice 49

1. Vérifier que 90 ≡ 6 [7] et que 66 ≡ 3 [7].
2. En utilisant les propriétés des congruences, compléter les résultats suivants en mettant l'entier naturel le plus petit possible :

a. 90 + 66 ≡ $6 + 3 \equiv 9 \equiv 2$ [7] $\quad$ c. 902 ≡ $90 \times 10 + 2 \equiv 6 \times 3 + 2 \equiv 6$ [7]

b. 90 × 66 ≡ $6 \times 3 \equiv 18 \equiv 4$ [7] $\quad$ d. 663 ≡ $66 \times 10 + 3 \equiv 3 \times 3 + 3$ [7]

car $18 = 2 \times 7 + 4$ $\quad$ $\equiv 12 \equiv 5\ [7]$

Exercice 50

1. Faire les divisions euclidiennes de 200 et de 900 par 13 et traduire les résultats en congruences.
2. En utilisant les propriétés des congruences, compléter les résultats suivants en mettant l'entier naturel le plus petit possible :

a. 200 + 900 ≡ $5 + 3 \equiv 8$ [13] $\quad$ d. 9003 ≡ $900 \times 10 + 3 \equiv 3 \times 10 + 3 \equiv 7$ [13]

b. 200 × 900 ≡ $5 \times 3 \equiv 15 \equiv 2$ [13] $\quad$ e. 2900 ≡ .... [13]

c. 2002 ≡ $200 \times 10 + 2 \equiv 5 \times 10 + 2$ [13] $\quad$ f. 9413 ≡ .... [13]

$\equiv 52 \equiv 0\ [13]$

1. Calculatrice autorisée :

$$200 \equiv 5\ [13] \text{ et } 900 \equiv 3\ [13]$$

2. Sans calculatrice.

e. $2900 \equiv 2000 + 900 \equiv 200 \times 10 + 900 \; [13]$

$\equiv 5 \times 10 + 3 \equiv 53 \equiv 1 \; [13]$

f. $9413 \equiv 900 \times 10 + 200 \times 2 + 13 \; [13]$

$\equiv 3 \times 10 + 5 \times 2 + 0 \; [13]$

$\equiv 30 + 10 \equiv 4 + 10 \; [13]$

$\equiv 14 \equiv 1 \; [13]$.