Mars - Séance du 12.03. - Les Matrices

A corriger

Exercice 67 : on peut retrouver tous les opérateurs à partir du nor

Pour toutes propositions A et B on définit l'opération « nor » , notée ↓ par :

$$A \downarrow B \iff \overline{A \vee B}$$

Cette opération est dite *universelle* car elle permet de retrouver toutes les autres opérations.

1. Montrer que $A \downarrow A \iff \overline{A}$ (on peut donc retrouver l'opération « non »).
2. En déduire que l'on peut retrouver l'opération « ~~et~~ ou » ainsi :

$$(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) = A \vee B$$

3. Comment à partir de A, B et ↓ obtenir $A \wedge B$ (penser aux lois de De Morgan) ?

A	B	$A \vee B$	$A \downarrow B$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Table de vérité du "nor"

$A \downarrow B \iff \overline{A \vee B}$

1.

A	$A \downarrow A$	$\overline{A}$
0	1	1
1	0	0

$0 \downarrow 0 = 1$
$1 \downarrow 1 = 0$

$A \downarrow A \iff \overline{A \vee A} \iff \overline{A}$

2. 2 méthodes :

① Tables de vérité :

A	B	$A \downarrow B$	$(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$	$A \vee B$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

donc : $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) \iff A \vee B$

② Par calcul.

$(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) \iff \overline{A \downarrow B}$ car $D \downarrow D \iff \overline{D}$

$\iff \overline{\overline{A \vee B}}$ car $A \downarrow B \iff \overline{A \vee B}$

$\iff A \vee B$ car $\overline{\overline{D}} \iff D$

3. $A \wedge B \iff \overline{\overline{A \wedge B}}$

$\iff \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ car $\overline{A \wedge B} \iff \overline{A} \vee \overline{B}$

$\iff \overline{A} \downarrow \overline{B}$ car $\overline{C \vee D} \iff C \downarrow D$

$\iff (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$ car $\overline{A} \iff A \downarrow A$

Exercice 68

Sans chercher à démontrer quoi que ce soit, donner les négations des propositions suivantes

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \exists z \in \mathbf{R}, x < z < y$: A
2. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 3$
3. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists p \in \mathbf{N}^*$ n divise p ou p divise n.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x \geq z \geq y : \bar{A}$

Bonus : Montrons que A est fausse à l'aide d'un contre-exemple :

$x = 2$ et $y = 1$

On veut $x < z < y$ donc $x < y$

or ici $y < x$.

A n'est pas toujours vraie donc A est fausse et $\bar{A}$ est vraie.

2. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 3$: B

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 3$: $\bar{B}$

• $x = 5$ et $y = 0$: $x+y = 5$: Contre exemple

donc $\bar{B}$ est faux.

et B est vraie.

3. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists p \in \mathbf{N}^*$ n divise p ou p divise n. : C

$\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*$, n ne divise pas p et p ne divise pas n : $\bar{C}$

Exercice 69

1. A : $\forall n \in \mathbf{N}$ 3 divise n ou 2 divise n
   Montrer que A est fausse

   Contre-exemple $n = 5$
   5 n'est pas divisible par 3 ou par 2.

2. B : $\exists n \in \mathbf{N}$, 3 divise n et 4 divise n
   Montrer que B est vraie

   $n = 12$

3. C : « Quand on prend trois nombres entiers qui se suivent, leur somme est toujours un multiple de 3 ».
   Montrer que C est vraie.

4. D : « Quand on prend quatre nombres entiers qui se suivent, leur somme est toujours un multiple de 4 ».
   Montrer que D est fausse.

3. $\forall a \in \mathbb{N}, \quad a + (a+1) + (a+2) = 3a + 3$
$= 3(a+1)$

Comme $a+1 \in \mathbb{N}$, $a+(a+1)+(a+2)$ est un multiple de 3.

4. Contre-exemple : $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ n'est pas un multiple de 4.

Matrices

1 Notion de matrice

Définition : matrice

Une matrice A peut être vue comme « un tableau de nombres ».
Supposons qu'elle comporte n lignes et p colonnes (n et p sont des entiers plus grands que 1), on la note ainsi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

a_{23} est l'élément qui se trouve à la 2e ligne, 3e colonne.

L'élément qui se situe à la i^e ligne et à la j^e colonne est noté a_{ij}. On l'appelle également *coefficient*.

Attention : les indices des lignes et des colonnes commencent à 1 (et non à zéro comme dans la plupart des langages informatiques).

Pour résumer l'écriture précédente on écrit

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

On dit aussi que A est une matrice $n \times p$. Si $n = p$ on dit que A est une *matrice carrée d'ordre* n.

Exemples

B est une matrice 2×3

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. On a $b_{21} = -3$.
- $C = \begin{pmatrix} 2,4 & 7 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 10,1 & 1 \\ 0,01 & 3 & 12 & 100 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes. On a $c_{33} = 12$.
- $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

matrice 2×2

Exercice 70

On considère $E = \begin{pmatrix} -4 & 7,6 & 4 & -1 & 12 \\ 8 & -3 & 5,7 & 101 & 1 \\ 12 & 0,01 & 3 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. Matrice 3×5

Donne les valeurs de e_{12}, e_{21}, e_{35} et e_{24}.

$e_{12} = 7,6$ $\qquad e_{35} = 1$

$e_{21} = 8$ $\qquad e_{24} = 101$

Le script PYTHON suivant permet de générer une matrice $n \times p$ avec des coefficients entiers aléatoires compris entre -100 et 100.

Python

```python
from random import randint

n = int(input("Entrez le nombre de lignes : "))
p = int(input("Entrez le nombre de colonnes : "))

matrice = []  # une matrice est une liste de lignes

for i in range(n):  # il y a n lignes
    ligne = []  # on construit une ligne vide
    for j in range(p):  # il y a p colonnes
        ligne.append(randint(-100, 100))  # on remplit la ligne
        ↪ aléatoirement
    matrice.append(ligne)  # on ajoute la ligne à la liste de lignes
```

Exercice 71

1. Écris complètement la matrice suivante : $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 5}}$ où $m_{ij} = i$ si i=j et 0 sinon.
2. Écris complètement la matrice suivante : $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 4 \\ 1 \leqslant j \leqslant 5}}$ où $m_{ij} = 0$ si i<j et 1 sinon.
3. Écris complètement la matrice suivante : $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$ où $m_{ij} = 1$ si $i + j$ est pair et 0 sinon.
4. BONUS : écris des programmes PYTHON qui génèrent ces matrices.

1.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```python
from random import *

n = int(input("Donner le nombre de lignes : "))
p = int(input("Donner le nombre de colonnes : "))

tab = []
for i in range(n):
    ligne = []
    for j in range(p):
        if i == j:
            ligne = ligne + [i+1]
        else :
            ligne = ligne + [0]
    tab.append(ligne)

for k in range(n):
    print(tab[k])
```

2.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```python
from random import *

n = int(input("Donner le nombre de lignes : "))
p = int(input("Donner le nombre de colonnes : "))

tab = []
for i in range(n):
    ligne = []
    for j in range(p):
        if i < j:
            ligne = ligne + [0]
        else :
            ligne = ligne + [1]
    tab.append(ligne)

for k in range(n):
    print(tab[k])
```

```
[1, 0, 0, 0, 0]
[1, 1, 0, 0, 0]
[1, 1, 1, 0, 0]
[1, 1, 1, 1, 0]
```

3.

```python
from random import *
```

```python
for k in range(n):
    print(tab[k])
```

3.

```python
from random import *

n = int(input("Donner le nombre de lignes : "))
p = int(input("Donner le nombre de colonnes : "))

tab = []
for i in range(n):
    ligne = []
    for j in range(p):
        if (i+j+2) % 2 == 0:
            ligne = ligne + [1]
        else :
            ligne = ligne + [0]
    tab.append(ligne)

for k in range(n):
    print(tab[k])
```

```
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[1, 0, 1]
```

Définitions : Matrices nulles et identités

- Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est dite *nulle* (c'est « un tableau de zéros »);
- la matrice *carrée d'ordre n* dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la *diagonale* (c'est-à-dire ceux qui s'écrivent a_{ii}) qui valent 1 s'appelle *la matrice identité d'ordre n* et se note I_n.

Exemple

La matrice identité I_3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.