Séance du 28.11. - DS - Congruences

Prochain cours de Maths approfondies : 11 décembre

DS - Arithmétique

SIO1 DEVOIR

Nom : ____________________

Prénom : ____________________

Exercice 1

1. Effectuer les divisions euclidiennes suivantes et écrire l'égalité obtenue. Donner le quotient et le reste.

a. 185 par 13

$185 = 13 \times 14 + 3$

quotient : 14 reste : 3

b. 600 par 24

$600 = 24 \times 25 + 0$

$q = 25$ $r = 0$

c. 12345 par 678

$12\,345 = 678 \times 18 + 141$

$q = 18$ $r = 141$

2. Si a divise b, que peut-on dire :

a. du reste de la division euclidienne de b par a ?

$ka = b$ reste 0

a. du reste de la division euclidienne de a par b ?

$b \geq a$ Si $a = b$ alors $r = 0$

sinon $r = a$

Exercice 2

1. 2719 est-il premier ? Justifier votre réponse.

$\sqrt{2719} \approx 52$

2719 n'est pas divisible par un nombre premier inférieur à 52. Donc 2719 est un nombre premier.

2. Décomposer 22440 en produits de facteurs premiers.

22 440	2
11 220	2
5 610	2
2 805	3
935	5
187	11
17	17
1	

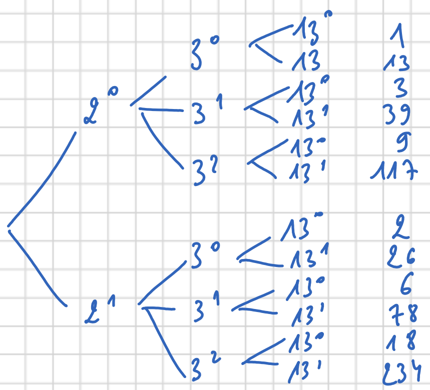
$$22\,440 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 17$$

3. Donner tous les diviseurs de 234 en justifiant par une méthode bien choisie.

234	2
117	3
39	3
13	13
1	

$234 = 2 \times 3^2 \times 13$

12 diviseurs.



$$D_{234} = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 13 ; 18 , 26 , 39 ; 78 ; 117 ; 234\}$$

4. Déterminer le PGCD de 2442 et de 1295 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

a	b	r
2442	1295	1147
1295	1147	148
1147	148	111

1295	1147	148
1147	148	111
148	111	37
111	37	0

PGCD (2442 ; 1295) = 37

Exercice 3

On considère l'algorithme ci-contre.

```
Tant que n > 0
    r ← reste de n par 10
    n ← quotient de n par 10
    Afficher r
Fin Tant Que
```

Grâce au tableau suivant, l'exécuter avec $n = 2547$.

$n > 0$		oui	oui	oui	oui	
r		7	4	5	2	
n	2547	254	25	2	0	

Que retourne l'algorithme ?

Affichage : 7 4 5 2

Inversion des chiffres

Exercice 4

Un texte saisi avec un logiciel comporte 5070 lignes. L'éditeur étudie quelques possibilités de mise en page du texte :

a. Si l'éditeur décide de mettre 64 lignes par page, combien de lignes comporte la dernière page sachant que toutes les autres sont complètes ?

$5070 = 64 \times 79 + 14$

14 lignes sur la dernière page.

b. Si l'éditeur décide de mettre 81 pages, combien de lignes comporte chaque page sachant que la dernière en comporte 48 ?

$5070 = 81 \times x + 48 \qquad 0 \leq 48 < 81$

$5070 - 48 = 81x$

$5022 = 81x$

$\frac{5022}{81} = x = 62$

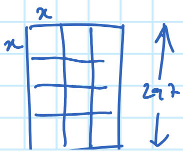
Il y a 62 lignes par page complète.

Exercice 47

Une feuille A4 a pour dimensions 21 cm et 29,7 cm. Alice cherche à savoir comment elle peut quadriller sa feuille à l'aide de carrés de mêmes dimensions, qui soient les plus gros possibles. Quelle sera la taille des carrés ? Combien en fera-t-elle ?

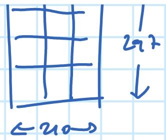
A4 : 210 mm × 297 mm

x : côté des carrés.



x : côté des carrés.

x est un diviseur de 210



et de 297 et comme Alice veut les plus grands carrés possibles : $x = PGCD(210 ; 297) = 3$

a	b	r
297	210	87
210	87	36
87	36	15
36	15	6
15	6	3
6	3	0

Taille des carrés : 3 mm

4 Congruences

Définition

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers naturels.
On dit que a et b sont *congrus modulo n* si les divisions euclidiennes de a et b par n donnent le même reste.
On écrit cela

$$a \equiv b \quad [n]$$

Exemples :

$12 \equiv 22 \equiv 2 \; [10]$

$47 \not\equiv 9 \; [5]$

$47 \equiv 12 \equiv 7 \equiv 2 \; [5]$

Exemple

a. Prenons deux multiples de 5, ils sont tous congrus modulo 5 puisque lorsqu'on les divise par 5 le reste est nul.

$$15 \equiv 20 \quad [5]$$

b. Ajoutons leur 2 à tous les deux, ils sont encore congrus modulo 5 puisque lorsqu'on les divise par 5 le reste est 2.

$$17 \equiv 22 \quad [5]$$

c. Dans la vie courante, on raisonne parfois *modulo 12* :

$16 = 1 \times 12 + 4$
$16 \equiv 4 \quad [12]$

Et de même $17 \equiv 5 \quad [12]$ et $18 \equiv 6 \quad [12]$: « 5 heures de l'après-midi, c'est 17 :00 » et cætera.

Exemples :

$53 \equiv 4 \; [7]$ car $53 = 7 \times 7 + 4$

$142 \equiv 10 \; [11]$ car $142 = 11 \times 12 + 10$

$78 \equiv 0 \; [13]$ car $78 = 13 \times 6 + 0$