# Séance du 13.02. - Prédicats

Terminer Exercice 4 - Question 4

La barre de Sheffer est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P, Q associe la proposition, notée P | Q, équivalente à $\neg(P \wedge Q)$.
Ce connecteur est aussi appelé "nand", contraction de "no and" soit "non et".

1. Etablir la table de vérité de P | Q.
2. Démontrer que pour toute proposition P, $\neg P \Leftrightarrow P \mid P$.
3. Déduire de la définition de P | Q et du résultat du 2 une proposition équivalente à $P \wedge Q$ dans laquelle seul le connecteur | apparaît.
4. Démontrer à l'aide d'une loi de Morgan que, pour toutes propositions P, Q, $P \vee Q \Leftrightarrow ((P \mid P) \mid (Q \mid Q))$.
Ainsi tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur "nand".

4. $P \vee Q \iff \overline{\overline{P}} \vee \overline{\overline{Q}}$

$\iff \overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}}$

$\iff \overline{P} \mid \overline{Q}$

$\iff (P|P) \mid (Q|Q)$

Loi de Morgan ;

$\overline{A \vee B} \iff \bar{A} \wedge \bar{B}$

$\overline{A \wedge B} \iff \bar{A} \vee \bar{B}$

$A \mid B \iff \overline{A \wedge B}$

Ou

$(P|P) \mid (Q|Q) \iff \bar{P} \mid \bar{Q} \iff \overline{\bar{P} \wedge \bar{Q}}$

$\iff \bar{\bar{P}} \vee \bar{\bar{Q}}$ $\quad (\bar{\bar{P}} \iff P)$

$\iff P \vee Q$

Exercice 5

1. P, Q, R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :
a) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ b) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ c) $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$
2. En déduire une équivalence entre deux des trois propositions ci-dessus.

| P | Q | R | $P \wedge Q$ | $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| P | Q | R | $P \Rightarrow R$ | $Q \Rightarrow R$ | $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \Rightarrow R$ | $Q \Rightarrow R$ | $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

donc : $\big((P \wedge Q) \Rightarrow R\big) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)\big)$

## 3 Calcul des prédicats

### Définitions : quantificateurs, variables, prédicats

Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » et s'appelle *quantificateur universel*.
Le symbole $\exists$ se lit « il existe » et s'appelle *quantificateur existentiel*.

Une *variable* est un symbole qui peut prendre plusieurs valeurs.
Un *prédicat* est un énoncé sans valeur de vérité qui contient au moins une variable, et qui devient une proposition en ajoutant un ou des quantificateurs.

### Exemples

- « $x < 1$ » est un prédicat comportant une variable $x$.
- $\exists x \in \mathbb{R}$, $x < 1$ est une proposition. Cette proposition est vraie : il existe un nombre réel strictement plus petit que 1 (et même une infinité) : 0 par exemple.
- $\forall x \in \mathbf{R}$, $x < 1$ est une autre proposition… fausse ! Tout nombre réel n'est pas strictement plus petit que 1 : 2 par exemple.

### Propriété : ordre des quantificateurs

Dans un prédicat à plusieurs variables, quand plusieurs quantificateurs de la même catégorie se suivent, on peut les échanger librement.
On *ne peut pas* échanger un quantificateur $\exists$ et un quantificateur $\forall$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $y \geq x$ : Vrai

  Par exemple $y = x + 1$

- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y \geq x$ : Faux

  "Il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $y$ réel, $y \geq x$"

  Supposons que $x$ existe :

  Or $x - 1 < x$ donc $x$ n'est pas plus petit que tout réel $y$

  donc $x$ n'existe pas.

Traduction puis démonstration :

- Il existe $x$ réel tel que $x^2 > 4$.

  prédicat

  $A$ : $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 4$

  $A$ est vrai, par exemple $x = 3$ : $x^2 = 9 > 4$

• B : "Pour tout $x$ réel, $x^2 > 0$"

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$

B est fausse car pour $x = 0$, $x^2 = 0$

Pour tous $x$ et $z$ réels, il existe $y$ réel tel que $x+y<z$

Exemples

- $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ \exists z \in \mathbf{R}, x+y<z$ est une proposition vraie : pour tous réels x et y on peut prendre z égal à $x+y+1$.
  On peut échanger les quantificateurs universels : $\forall y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ \exists z \in \mathbf{R}, x+y<z$ est équivalent à la proposition précédente.
- $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R}, x<y$ est une proposition vraie mais on ne peut pas échanger les quantificateurs : on obtient : $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}, x<y$ est fausse : cela voudrait dire qu'il existe un réel $y$ plus grand que tous les autres !

**Propriété : négation d'une proposition quantifiée**

On obtient la négation d'une proposition quantifiée en changeant les $\exists$ en $\forall$, les $\forall$ en $\exists$ et en changeant le prédicat final par sa négation.

Exemple

On considère la propriété P :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists k \in \mathbf{N},\ n=2k \quad \text{ou } k = \frac{n}{2}$$

Sa négation est $\overline{\mathrm{P}}$ :

$$\exists n \in \mathbf{N},\ \forall k \in \mathbf{N},\ n \neq 2k$$

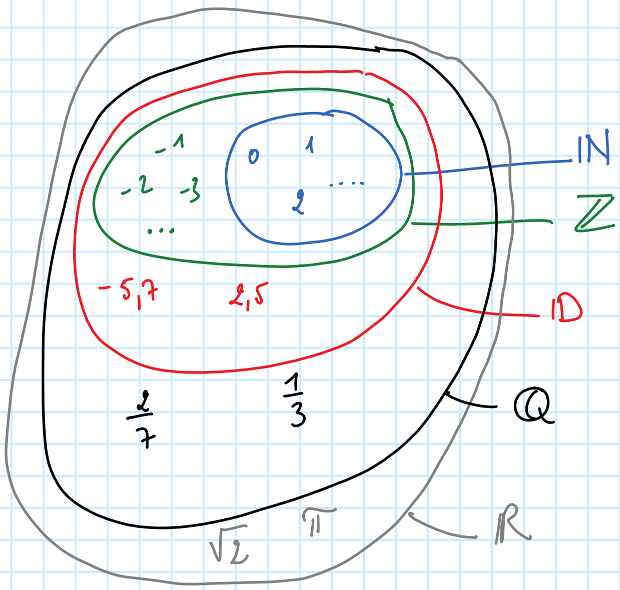
P est fausse puisqu'elle affirme que tout entier naturel est divisible par 2 !
Sa négation est vraie : elle affirme qu'il existe un entier naturel qui n'est pas divisible par 2 (3 par exemple).

**Méthodes : preuve de propositions quantifiées**

- Pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\forall$ est fausse, il suffit de donner un *contre exemple*.
- Pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\exists x$... est vraie, on peut déterminer la valeur de $x$ qui convient.
- Pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\forall$ est vraie on a souvent recours à un raisonnement ou au calcul littéral.
- De même pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\exists x$... est fausse.

Exemples

- Montrons que $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ 3y+1=x$ :
  Soit $x \in \mathbf{R}$ alors $3y+1=x \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}(x-1)$. Donc $\frac{1}{3}(x-1)$ convient.
- Montrons que $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x=y^2$ est fausse :
  Prenons $x=-1$. Il n'existe aucun $y \in \mathbf{R}$ tel que $x=y^2$. En effet d'après la règle des signes, $y^2$ est obligatoirement positif.




**Exercice 62**

Vrai ou faux ? Justifier. $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$

A: $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall p \in \mathbf{N},\ p - n \equiv 0\ [2]$

B: $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists p \in \mathbf{N},\ p - n \equiv 0\ [2]$

C: $\exists n \in \mathbf{N},\ \exists p \in \mathbf{N},\ p - n \equiv 0\ [2]$

D: $\exists n \in \mathbf{N},\ \forall p \in \mathbf{N},\ p - n \equiv 0\ [2]$

- A est faux car $n = 5$ ; $p = 10$
  Contre-exemple : $p - n = 10 - 5 = 5 \equiv 1 \not\equiv 0\ [2]$
- B est vrai car pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $p = n$. Ainsi $p - n = n - n = 0 \equiv 0\ [2]$
- C est vrai car pour $p = 4$ et $n = 2$
  $p - n = 4 - 2 = 2 \equiv 0\ [2]$
- D : $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p - n \equiv 0\ [2]$
  Supposons que $n$ existe : $p - n \equiv 0\ [2]$
  $p + 1 - n \equiv p - n + 1 \equiv 1\ [2]$
  donc D est faux.
- $\bar{D}$ : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p - n \not\equiv 0\ [2]$
  $\forall n \in \mathbb{N}$, pour $p = n + 1$
  on a : $p - n \equiv n + 1 - n \equiv 1 \not\equiv 0\ [2]$
  $\bar{D}$ est vrai

**Exercice 63**

Donner les négations des propositions suivantes et dire laquelle est vraie : la proposition ou sa négation.

A: $\exists x \in \mathbf{R},\ 3x = 2$ : Vraie $x = \frac{2}{3}$ $\bar{A}$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ 3x \neq 2$ : Faux négation.

A: $\exists x \in \mathbf{R},\ 3x = 2$ : Vraie $\quad \overline{A}$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ 3x \neq 2$ : Faux

$x = \frac{2}{3}$

B: $\forall x \in \mathbf{R},\ x = x + 1$ : Faux $\quad \overline{B}$ : $\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq x+1$ : Vraie

$0 \neq 0+1$

C: $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, x \leqslant y$ : Faux $\quad \overline{C}$ : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x > y$ : Vraie

$2 > 1$ $\quad$ $2 > 1$

D: $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ x^2 = y$ : Faux $\quad \overline{D}$ : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 \neq y$ : Vraie

$y = x^2 + 1$

E: $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x^2 = y$ : Vraie $\quad \overline{E}$ : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 \neq y$ : Fausse

DS le 20.02. : congruences et logique
(prédicats comme ex 63)