Séance 7 du 12.02. - Variations et signes

Méthodes

Un tableau de variations (ou une courbe) permet de :
- déterminer un maximum, un minimum : valeurs Max et min de la L2 du tdv;
- déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$: on « place » k sur les flèches;
- déterminer le tds (sans passer par la courbe) : on place les « 0 » et on « suit les flèches ».

Illustration

On donne le tdv d'une fonction f :

x	-5		a	-2	b		3		c	5	10
f	2	1,75	0	-5	0	1,75	4	1,75	0	-3	-1

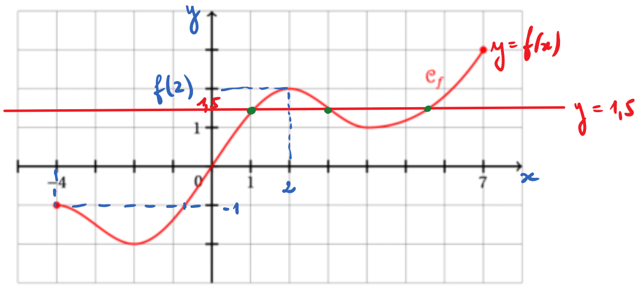
▷ le maximum de f est 4, atteint en $x = 3$;
▷ le minimum de f est -5, atteint en $x = -2$;
▷ l'équation $f(x) = 1,75$ admet 3 solutions;
▷ l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions (notées a, b et c).

On peut donc en déduire le tds de $f(x)$:

x	-5		a		b		c		10
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Exercice 4

Soit f la fonction définie par la courbe suivante.



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. f est définie sur $[-4 ; 7]$
2. Lire graphiquement $f(2)$ puis l'image de -4 par f. $f(2) = 2$; $f(-4) = -1$
3. Déterminer les éventuels antécédents de 1,5 par f. $f(x) = 1,5$ pour $x = 1$; $x = 3$ ou $x = 5,5$
4. Résoudre graphiquement :

   a. $f(x) = 0$; $\mathcal{S} = \{0\}$ b. $f(x) > 1,5$; $\mathcal{S} =]1 ; 3[\cup]5,5 ; 7]$ c. $f(x) \leqslant -1$. $\mathcal{S} = [-4 ; -0,8]$

5. a. Décrire par des phrases les variations de f.

   b. Dresser le tableau de variations de f.

a. • f est décroissante sur $[-4 ; -2]$.
• f est croissante sur $[-2 ; 2]$.
• f est décroissante sur $[2 ; 4]$.
• f est croissante sur $[4 ; 7]$.

b.

x	-4	-2	2	4	7
f	-1	-2	2	1	3

Exercice 5

On considère une fonction dont le tableau de variations est le suivant :

x	-5	a	-2	1	4	b	6	c	10
f	-4		7	2	6		-1		1

1. Déterminer :

   a. l'ensemble de définition de f ; $\mathcal{D}_f = [-5 ; 10]$

1. Déterminer :
   a. l'ensemble de définition de f ; $D_f = [-5 ; 10]$
   b. le maximum de f sur son ensemble de définition ; le maximum est $7 = f(-2)$.
   c. le minimum de f sur son ensemble de définition ; le minimum est $f(-5) = -4$.
   d. le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$; 3 solutions.
   e. le tableau de signes de f sur son ensemble de définition.

2. Comparer, si possible :
   a. $f(3)$ et $f(4)$
   b. $f(5{,}5)$ et $f(5{,}7)$
   c. $f(2)$ et $f(7)$
   d. $f(-4)$ et $f(0)$

1. e.

x	-5		a		b		c		10
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a. $f(3) < f(4)$
car f est strict. croissante sur $[1;4]$

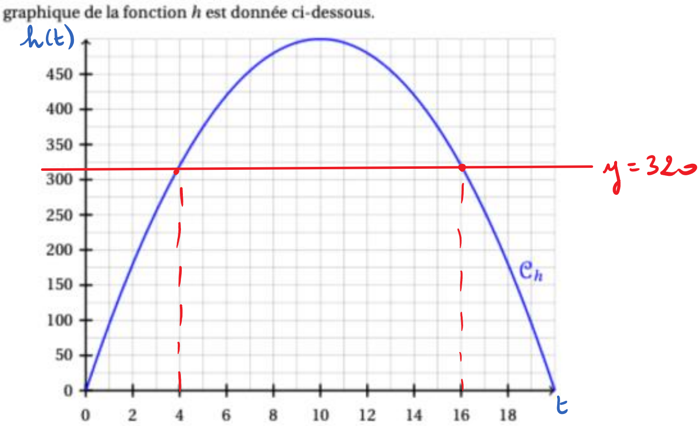
b. $f(5{,}5) > f(5{,}7)$
f est strict. décroissante sur $[5;6]$

c. $f(2) > f(7)$
car $2 < f(2) < 6$
et $-1 < f(7) < 1$

d. $-4 < f(-4) < 7$
$2 < f(0) < 7$
On ne peut pas savoir

Exercice 6

Pendant une expérience, l'altitude (en mètres) d'un projectile lancé à partir du sol est donnée par la formule
$$h(t) = -5t^2 + 100t \text{ avec } t \geqslant 0.$$
La représentation graphique de la fonction h est donnée ci-dessous.



1. a. Quelle est l'altitude du projectile au temps $t = 2$ s ? $h(2) = -5 \times 2^2 + 100 \times 2 = 180$ mètres
   b. Quelle est l'altitude du projectile au temps $t = 10$ s ? $h(10) = -5 \times 10^2 + 100 \times 10 = 500$ mètres
2. a. Déterminer les variations de f sur $[0 ; 20]$.
   b. Déterminer la période pendant laquelle l'altitude du projectile est supérieure ou égale à 320 m.

2. a.

x	0		10		20
h	0	$\nearrow$	500	$\searrow$	0

b. Résoudre $h(x) \geq 320$ pour $4 \leq x \leq 16$
$(-5t^2 + 100t \geq 320)$ (pour $x \in [4 ; 16]$)
à voir ci-dessous

II. Rappels et compléments sur les équations et les tds

II.1. Équations classiques

Exemples 1

Pour les équations du 1[er] degré, on « isole » le x : $ax + b = 0$
- $3x + 5 = 10 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = 5/3$.
- $2x + 9 = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + 2x = 4 - 9 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -5/4$.

Pour les équations du 1[er] degré, on « isole » le x : $ax + b = 0$

- $3x+5=10 \Leftrightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=5/3$.
- $2x+9=-2x+4 \Leftrightarrow 2x+2x=4-9 \Leftrightarrow 4x=-5 \Leftrightarrow x=-5/4$.

- $5x \overset{+12}{-12} = 2x \overset{+12}{+3}$

  $5\overset{-2x}{x} = 15 + \overset{-2x}{2x}$

  $3\overset{\div 3}{x} = 15$

  $x = 5 \qquad \mathcal{S} = \{5\}$

- Résoudre $-2\overset{-6x}{x} + 18 > \overset{-6x}{6x} - 24$

  "On change le sens du signe lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif"

  $-8x + \overset{-18}{18} > -\overset{-18}{24}$

  $\overset{\div(-8)}{-8x} > -42$

  $x < \frac{21}{4}$

  $\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{21}{4}\right[$

- Résoudre : a) $8x - 7 = 19 - 4x$

  $12x = 26$

  $x = \frac{26}{12} = \frac{13}{6} \approx 2{,}17 \qquad \mathcal{S} = \left\{\frac{13}{6}\right\}$

  b) $-8x + 17 \geq 5x - 2 \qquad \left(\begin{array}{l} -13x \geq -19 \\ x \leq \frac{19}{13} \end{array}\right)$

  $19 \geq 13x$

  $\frac{19}{13} \geq x \qquad \mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{19}{13}\right]$

  c) $x + 3 < 5x + 19$

  $x < 5x + 16$

  $-4x < 16$ On divise par (-4), donc on change le sens du signe

  $x > -\frac{16}{4}$

  $x > -4 \qquad \mathcal{S} =]-4 ; +\infty[$

Exemples 2 $ax^2 + bx + c = 0$

Pour les équations du 2[d] degré, on utilise Δ (ou la calculatrice et le module `équation`) :

- (1) $x^2-6x+5=0$: $\Delta=16$ et les deux racines sont $x_1=5$ et $x_2=1$.
- $3x^2+7x-10=0$: $\Delta=169$ et les deux racines sont $x_1=1$ et $x_2=-10/3$.

Méthode : $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$: 2 solutions
Pas de solution	1 solution $x = \frac{-b}{2a}$	$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple (1)

$a = 1 ; b = -6 ; c = 5$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16$

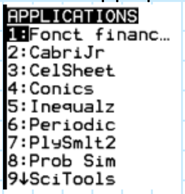
$\Delta > 0$: 2 solutions

$x = \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$

ou

$x = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$

Sur TI - apps puis 7:



Sur Numworks

- Exemple 2 : $3x^2 + 7x - 10 = 0$

  $\Delta = 169 > 0$: 2 solutions :

  $x = \frac{-10}{3}$ ou $x = 1$

Exemples 3

On peut rappeler la méthode liée aux équations-produit (produit nul) :

- $(x-2)(4x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -6/4 = -3/2$.
- $(x+2)(x^2+6x+9) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -3$ (grâce à Δ).

On peut également rappeler la méthode liée aux équations/quotient (produit en croix) :

- $\frac{3}{2x+5} = 7 \Rightarrow 3 \times 1 = (2x+5) \times 7 \Rightarrow 3 = 14x + 32 \Rightarrow 14x = -29 \Rightarrow x = -29/14$.
- $\frac{2x}{x+1} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow (x+1)(x+1) = 2x(x+3) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 6x \Rightarrow -x^2 - 4x + 1 = 0$ et Δ donne $x = -2 \pm \sqrt{5}$.

Résoudre :

- $(2x-6)(5-x) = 0$

  $2x - 6 = 0$ ou $5 - x = 0$

  $x = 3$ $\quad$ $x = 5$

- $(x-3)(x^2 - 6x + 5) = 0$

  $x - 3 = 0$ ou $x^2 - 6x + 5 = 0$

  $x = 3$ ou $\Delta = 16 > 0$: 2 solutions

  $x = 1$ ou $x = 5$

  $\mathcal{S} = \{1 ; 3 ; 5\}$

DS - Stats à 2 variables - Fonctions (Graphiques, variations et signes à partir de graphiques) - Equations simples (1er et second degré)