UF2/DOC 04

Stats à deux variables - Exercices

Exercice 1

Lors d'une enquête réalisée auprès de 500 personnes, on a estimé le nombre de personnes prêtes à acheter un nouveau produit en fonction du prix de ce produit :

Prix proposé en euros (x_i)	52	47	44	38,5	35,5	32	31	28
Nombre d'acheteurs potentiels (y_i)	80	125	145	200	225	250	265	280

1. Représenter le nuage de points (x_i ; y_i) en prenant 1 cm pour 5 euros en abscisse (de 15 à 60) et 1 cm pour 50 personnes en ordonnée (de 0 à 400).

2. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$ en arrondissant a à 2 décimales et b à l'entier, ainsi que le coefficient de corrélation associé arrondi à 4 décimales.

   Cet ajustement linéaire vous parait-il raisonnable?

3. Tracer cette droite sur le graphique et placer le point moyen de ce nuage.

4. En utilisant cet ajustement :
   - Quel prix maximal doit-on proposer pour que plus de 60 % des personnes interrogées soit prêtes à l'acheter?
   - Au-delà de quel prix le taux d'acheteurs potentiels tombe-t-il sous les 10 %?

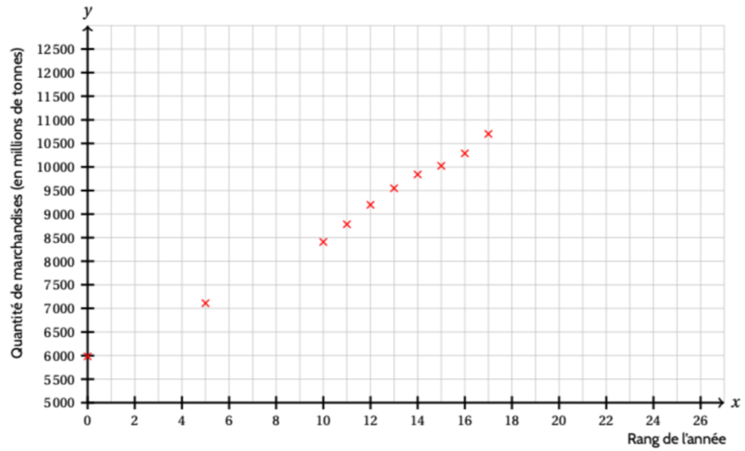
Exercice 2

Le tableau ci-dessous donne les quantités de marchandises transportées dans le monde par voie maritime entre 2000 et 2017, exprimées en millions de tonnes.

Année	2000	2005	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Rang de l'année : x_i	0	5	10	11	12	13	14	15	16	17
Quantité de marchandises en millions de tonnes y_i	5984	7109	8409	8784	9197	9548	9842	10024	10289	10702

Source : Nations Unies, (UNCTAD)

Le nuage de points de coordonnées (x_i ; y_i) est donné ci-dessous :



1. Expliquer pourquoi ce nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième.
3. On décide de modéliser la quantité de marchandises y en fonction du rang de l'année x par l'expression $y = 280x + 5800$.

   Tracer la droite D d'équation $y = 280x + 5800$ dans le repère donné précédemment.
4. Estimer, selon le modèle de la question **3.**, la quantité de marchandises transportées par voie maritime en 2025, en expliquant la démarche suivie.

Exercice 3

Un artisan calcule le coût de fabrication d'un objet en fonction du nombre de pièces produites par jour :

Qté produite par jour (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = 1/x_i$										
Coût unitaire en euros (y_i)	15,04	8,09	5,40	4,38	3,75	3,20	2,90	2,54	2,31	2,12

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ en prenant 1 cm d'unité sur les deux axes.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$ en arrondissant a à 2 décimales et b à 1 décimale, ainsi que le coefficient de corrélation associé arrondi à 3 décimales. Cet ajustement linéaire vous parait-il raisonnable?
3. On pose : $z_i = \dfrac{1}{x_i}$.
   - **a.** Compléter le tableau avec la ligne des z_i.
   - **b.** Déterminer l'équation de la droite de régression de y en z cette fois-ci sous la forme $y = a_0 z + b_0$ en arrondissant a_0 à 1 décimale et b_0 à 2 décimales, ainsi que le coefficient de corrélation associé arrondi à 4 décimales.
     Que pensez-vous de cet ajustement?
   - **c.** Déduire de la question précédente une expression de y en fonction de x et tracer la courbe correspondante sur le graphique.

Exercice 4

Un test sur circuit de distance d'arrêt d'un véhicule en fonction de sa vitesse a livré les résultats suivants :

Vitesse en km/h (v_i)	27	43	62	78	98	115	125	137
$x_i = (v_i)^2$								
Distance d'arrêt en m (d_i)	9	21	36	68	101	136	170	201

1. Représenter le nuage de points $(v_i\,;\,d_i)$ en prenant 1 cm pour 10 km/h en abscisse et 1 cm pour 20 m en ordonnée (de 0 à 160 en abscisse et de 0 à 250 en ordonnée).
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de d en v sous la forme $d = av + b$ en arrondissant a à 2 décimales et b à l'entier, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire correspondant arrondi à 3 décimales.
3. Tracer cette droite sur le graphique et déterminer quelle serait, suivant cette tendance, la distance d'arrêt pour une vitesse de 150 km/h.

Cette modélisation ne semblant pas totalement satisfaisante, on se demande si la distance d'arrêt ne serait pas plutôt corrélée à l'énergie acquise par le véhicule, c'est à dire au carré de la vitesse.

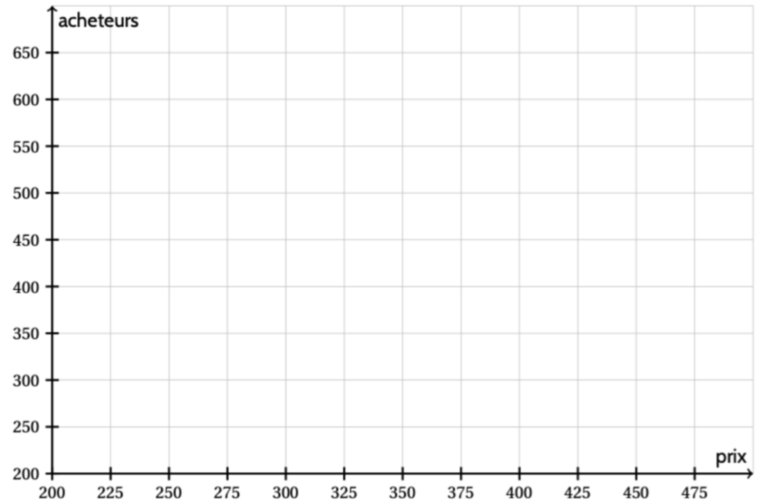
4. On pose $x_i = (v_i)^2$.
   - **a.** Compléter le tableau avec la ligne des x_i.
   - **b.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire du couple $(x\,;\,d)$, arrondi à 4 décimales.
     L'idée de cette nouvelle modélisation vous parait-elle bonne?
   - **c.** Déterminer l'équation de la droite de régression de d en x sous la forme $d = a_0 x + b_0$ où a_0 sera arrondi à 5 décimales et b_0 au centième.
   - **d.** En déduire une nouvelle expression de d en fonction de v et tracer cette courbe $\mathcal{P}$ sur le graphique.
   - **e.** Selon cette modélisation plus ajustée, quelle serait la distance d'arrêt pour une vitesse de 150 km/h?
   - **f.** Lors d'une enquête à la suite d'un accident, on a relevé une distance d'arrêt de 117 mètres.
     À combien peut-on estimer la vitesse du véhicule ?

Exercice 5

Dans le tableau suivant figure une partie des résultats d'une enquête réalisée par une entreprise pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels de ce nouveau produit en fonction de son prix de vente :

Prix de vente x_i (en €)	200	250	300	350	450	500
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	632	475	305	275	266	234

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage et on effectue le changement de variable $z_i = \ln y_i$.



1. Compléter le tableau de valeurs suivant (les valeurs demandées seront arrondies au millième) :

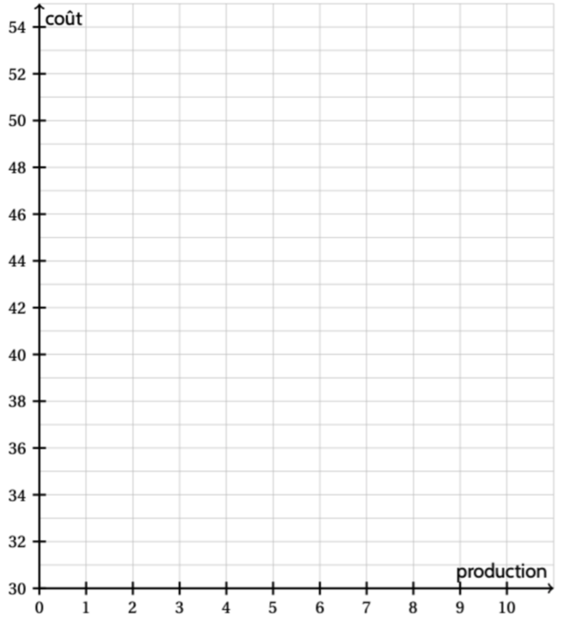
Prix de vente x_i (en €)	200	250	300	350	450	500
$z_i = \ln y_i$	6,449	6,163				

2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\,;\,z_i)$.
   Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine?
3. Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de z en x, sous la forme $z = ax + b$ (a sera donné à 10^{-4} près par excès et b à 10^{-2} près par excès).
4. En déduire une estimation du nombre d'acheteurs potentiels y_i en fonction de x_i sous la forme $y = k\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où k et λ sont des constantes (k sera arrondi à l'entier le plus proche).
5. Utiliser cette estimation pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels si le prix de vente est fixé à 400 €.

Exercice 6

Une entreprise a relevé son coût total de production mensuel (en k€), noté y, en fonction de sa production x (en tonnes) :

x	1	2	4	6	8	10
y	32,5	38,5	44,6	48,4	51,1	53,3



1. Les données ne semblant pas totalement se prêter à un ajustement affine, on décide de poser $z = e^{0,1y}$.
   Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs de z seront arrondies au centième) :

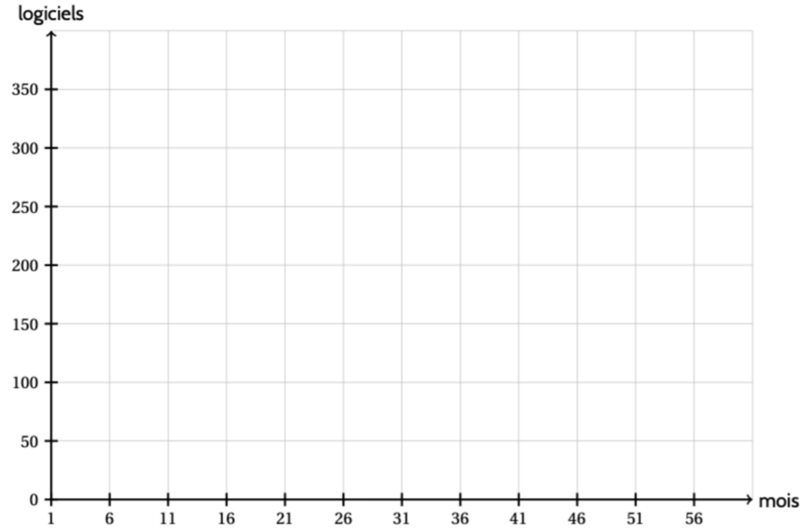
x	1	2	4	6	8	10
z	25,79	46,99				

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à la deuxième décimale). Expliquer pourquoi cet ajustement semble justifié.
3. Utiliser le résultat de la question **2.** pour obtenir une expression de y en fonction de x. En utilisant cette équation, estimer le coût total correspondant à une production de 7 tonnes.

Exercice 7

On s'intéresse au nombre de logiciels vendus chaque mois par une entreprise. Des résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Rang du mois x_i	1	6	11	16	21	26	31	36
Nombre de logiciels vendus z_i	60	250	340	360	320	270	220	200



1. Sans calcul, justifier le fait qu'un ajustement linéaire n'est pas approprié.
2. Reproduire et compléter la table suivante (les valeurs de y_i seront arrondies au centième) :

Rang du mois x_i	1	6	11	16	21	26	31	36
$y_i = \ln\left(\dfrac{z_i}{x_i}\right)$	4,09						1,96	1,71

3. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$.
   Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine?
4. Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$ (a et b seront donnés à 10^{-2} près).
5. Exprimer alors z en fonction de x.
6. En utilisant la question précédente, estimer le nombre de logiciels le mois de rang 51.