Séance du 30.01. - Applications

Exercice 55

Donner les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- A = $(\pi = 5) \wedge (2+3=5)$ F ∧ V = F
- B = $(\pi = 5) \vee (2+3=5)$ F ∨ V = V
- C = $(\pi \approx 3,14) \Rightarrow (5+6=11)$ V ⇒ V = V
- D = $(\pi = 5) \Rightarrow (2+3=5)$ F ⇒ V = V
- E = $(4=5) \Rightarrow A$ F ⇒ A = V
- G = $(5+5=10) \Leftrightarrow (\pi = 11)$ V ⇔ F = F

Exercice 56

Donner les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- A = $(11 > 0) \wedge (3 < 2)$ = V ∧ F = F
- B = $(11 > 0) \vee (3 < 2)$ = V ∨ F = V
- C = $(3 > 6) \vee (6 > 20)$ = F ∨ F = F
- D = $(3 < 2) \Rightarrow (5 = 5)$ = F ⇒ V = V
- E = $(4 \neq 1) \Rightarrow (4 = 1)$ = V ⇒ F = F
- G = $(4 < 5) \Leftrightarrow (10+1=11)$ = V ⇔ V = V

Question de Tolga : Table de vérité de A ∧ B et A ⇔ B pour comparaison.

A	B	A ∧ B	A ⇔ B
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Méthode : Montrer qu'une proposition est vraie

On peut montrer qu'une proposition composée est vraie en faisant prendre toutes les valeurs de vérités possibles aux propositions qui la compose et en trouvant sa table de vérité :

Montrons que $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ est vraie quelque soient les valeurs de vérité de P et de Q.

P	Q	P ∧ Q	Q ∧ P	(P ∧ Q) ⇔ (Q ∧ P)
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Comme P ∧ Q ⇔ Q ∧ P on dit que le connecteur ∧ est commutatif.

∨ est-il commutatif ? Justifier

A	B	A ∨ B	B ∨ A	A ∨ B ⇔ B ∨ A
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1

0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Le OU est commutatif.

- L'implication est-elle commutative ?

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow B \Leftrightarrow B \Rightarrow A$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Donc : $A \Rightarrow B$ n'est pas équivalent à $B \Rightarrow A$

L'implication n'est pas commutative.

Exercice 57 : l'implication

Vérifier que la table de vérité de $P \Rightarrow Q$ est la même que celle de $\bar{P} \vee Q$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P}$	Q	$\bar{P} \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1

Exercice 58 : l'équivalence comme double implication

Vérifier que la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ est la même que celle de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Donc : $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

Exercice 59 : le ou exclusif

Notons *xor* cet opérateur binaire. P *xor* Q est vraie si (et seulement si) une et une seule des 2 propositions est vraie.

Exercice 59 : le ou exclusif

Notons *xor* cet opérateur binaire. P *xor* Q est vraie si (et seulement si) une et une seule des 2 propositions est vraie.

1. Donner la table de vérité de P xor Q.
2. Vérifier que c'est la même que $(P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$
3. Vérifier que c'est la même que celle de $(P \vee Q) \wedge (\overline{P \wedge Q})$

1.

P	Q	$P \text{ xor } Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.

P	Q	$P \text{ xor } Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge \overline{Q}$	$\overline{P} \wedge Q$	$(P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0

3.

P	Q	$P \text{ xor } Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$(P \vee Q) \wedge (\overline{P \wedge Q})$
0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0

On a montré que : $P \text{ xor } Q \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$

$P \text{ xor } Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\overline{P \wedge Q})$

Exercice 60 : les lois de De Morgan

1. Montrer que $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
2. Montrer que $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$

1.

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

2.

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$	$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Propriété : équivalences classiques

Les propositions suivantes sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R. On dit que ce sont des *tautologies*.

$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$	commutativité de $\wedge$
$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$	commutativité de $\vee$
$((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$	associativité de $\vee$
$((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$	associativité de $\wedge$

Propriété : équivalences classiques

Les propositions suivantes sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R.
On dit que ce sont des *tautologies*.

$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$	commutativité de $\wedge$
$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$	commutativité de $\vee$
$((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$	associativité de $\vee$
$((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$	associativité de $\wedge$
$(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$	distributivité de $\wedge$ sur $\vee$
$(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	distributivité de $\vee$ sur $\wedge$
$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$	
$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$	loi de De Morgan
$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$	loi de De Morgan

Exemple : utilité de le proposition suivante

- « Il viendra mardi et il apportera son PC ou bien il viendra mercredi et il apportera son PC » se simplifie en :
  « Il viendra mardi ou mercredi et il apportera son PC ».

$(A \wedge B) \vee (C \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge B \Leftrightarrow B \wedge (A \vee C)$

- « On n'a pas : Jean est gentil ou Jean est drôle » peut se réécrire :
  « Jean n'est pas gentil et Jean n'est pas drôle ».

$\overline{G \vee D} \Leftrightarrow \overline{G} \wedge \overline{D}$

Exercice 61

Simplifier « On n'a pas : Pierre habite Saint Brieuc et Pierre est brun ».

$\overline{S \wedge B} \Leftrightarrow \overline{S} \vee \overline{B}$

Pierre n'habite pas à Saint Brieuc ou Pierre n'est pas brun

Question de Mathéo B

Faire la table de vérité de $\overline{A \vee B}$ et $\bar{A} \vee \bar{B}$:

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0