Avril - Séance du 02.04. - Matrices et systèmes

Opérations sur les matrices en Python

```
from random import *

def Affiche_Matrice(mat):   # Affichage d'une matrice
    for i in range(len(mat)):
        print(mat[i])

def Remplir_Matrice():  # Créer une matrice en donnant sa taille
    n = int(input("Donner le nombre de lignes : "))
    p = int(input("Donner le nombre de colonnes : "))

    tab = []
    for line in range(n):
        ligne = []
        for colonne in range(p):
            ligne = ligne + [int(input("Coefficient : "))]
        tab.append(ligne)
    print("Matrice saisie : ")
    Affiche_Matrice(tab)
    return(tab)
def Test_Dimension_Som(mat1,mat2):  # Test validité pour additionner
    ligne1 = len(mat1)
    ligne2 = len(mat2)
    colonne1 = len(mat1[0])
    colonne2 = len(mat2[0])
    if ligne1 != ligne2 or colonne1 != colonne2 :
        return(False)
    else :
        return(True)

def Init_Mat(n,p):  # Création d'une matrice nulle n x p
    mat = []
    for i in range(n):
        ligne = []
        for j in range(p):
            ligne = ligne + [0]
        mat = mat + [ligne]
    return(mat)
def Somme_Matrice(mat1,mat2):   # Somme de 2 matrices compatibles
    ligne1 = len(mat1)
    colonne1 = len(mat1[0])
    mat_som = Init_Mat(ligne1,colonne1)
    for lig in range(len(mat1)):
        for col in range(len(mat1[0])):
            mat_som[lig][col] = mat1[lig][col] + mat2[lig][col]
    return(mat_som)

def Mult_Matrice_Reel(mat,k): # Multiplication d'un réel et d'une matrice
    ligne1 = len(mat)
    colonne1 = len(mat[0])
    mat_prod = Init_Mat(ligne1,colonne1)
    for lig in range(ligne1):
        for col in range(colonne1):
            mat_prod[lig][col] = k * mat[lig][col]
    return(mat_prod)
def Test_Dimension_Prod(mat1,mat2): # Test validité pour multiplier
    ligne2 = len(mat2)
    colonne1 = len(mat1[0])
    if ligne2 != colonne1 :
        return(False)
    else :
        return(True)


def Mult_Matrices(mat1,mat2): # Multiplication de 2 matrices compatibles
    ligne1 = len(mat1)
    ligne2 = len(mat2)
    colonne1 = len(mat1[0])
    colonne2 = len(mat2[0])
    mat_res = Init_Mat(ligne1,colonne2)
    for i in range(ligne1):
        for j in range(colonne2):
            coeff = 0
            for k in range(colonne1):
                coeff = coeff + mat1[i][k]*mat2[k][i]
            print(coeff)
            mat_res[i][j] = coeff
    return(mat_res)
```

```python
def Test_Dimension_Prod(mat1,mat2): # Test validité pour multiplier
    ligne2 = len(mat2)
    colonne1 = len(mat1[0])
    if ligne2 != colonne1 :
        return(False)
    else :
        return(True)


def Mult_Matrices(mat1,mat2): # Multiplication de 2 matrices compatibles
    ligne1 = len(mat1)
    ligne2 = len(mat2)
    colonne1 = len(mat1[0])
    colonne2 = len(mat2[0])
    mat_res = Init_Mat(ligne1,colonne2)
    for i in range(ligne1):
        for j in range(colonne2):
            coeff = 0
            print(coeff)
            for k in range(colonne1):
                coeff = coeff + mat1[i][k]*mat2[k][j]
            print(coeff)
            mat_res[i][j] = coeff
    return(mat_res)
####### DEBUT PROGRAMME #######
print("0 pour quitter")
print("1 pour somme de deux matrices")
print("2 pour produit matrice et réel")
print("3 pour produit de deux matrices")
saisie = int(input("Que voulez-vous faire ? "))
while saisie == 1 or saisie == 2 or saisie == 3 :
    if saisie == 1 :
        Matrice1 = Remplir_Matrice()
        Matrice2 = Remplir_Matrice()
        if Test_Dimension_Som(Matrice1,Matrice2) :
            Matrice_Som = Somme_Matrice(Matrice1,Matrice2)
            print("Matrice somme des deux matrices saisies : ")
            Affiche_Matrice(Matrice_Som)
        else :
            print("Les deux matrices n'ont pas le même dimension")
    elif saisie == 2 :
        Matrice = Remplir_Matrice()
        Reel = eval(input("Saisir réel : "))
        Matrice_Result = Mult_Matrice_Reel(Matrice,Reel)
        Affiche_Matrice(Matrice_Result)
```

4 Matrices inversibles et systèmes

Définition et propriété : Matrice inversible, inverse d'une matrice

Soit A une matrice **carrée d'ordre** n. S'il existe une matrice B d'ordre n telle que

$$AB = I_n \quad \text{ou} \quad BA = I_n$$

alors automatiquement les deux égalités sont vérifiées, B est nécessairement *unique* et on dit alors que B *est l'inverse de* A. De manière symétrique A est également l'inverse de B si bien qu'on dit que A et B sont inverses l'une de l'autre.
On note ceci $A = B^{-1}$ ou, ce qui revient au même, $B = A^{-1}$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 74

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont inverses.

Pour montrer que B est l'inverse de A,

Pour montrer que B est l'inverse de A,
calculons $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

donc : $B = A^{-1}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

Remarque

Il existe des matrices non inversibles, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Remarque</u> : Pour les matrices 2×2 :

Hors prog.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det(A) = ad - cb$.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Ici : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$: $\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$

donc A n'est pas inversible.

<u>Exercice (Calculatrice)</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

<u>Déterminer A^{-1} et B^{-1} :</u>

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-1}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} -12 & 11 & 7 \\ -2 & -10 & 13 \\ 29 & 3 & -11 \end{pmatrix}$

Méthode : résoudre des systèmes avec des matrices

On considère un *système de n équations à n inconnues* :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On connaît tous les nombres a_{ij} et tous les b_i, et on veut trouver les valeurs des inconnues x_i.

Ce système peut se réécrire de manière matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$AX = B$$

Si la matrice A est inversible (en pratique ce sera toujours le cas parce qu'on nous donnera sa matrice inverse ou bien parce qu'on l'aura déterminée à l'aide de la calculatrice) alors, on peut reprendre l'égalité précédente et écrire : $A^{-1}AX = A^{-1}B$, ce qui donne $I_nX = A^{-1}B$. En définitive on a

$$X = A^{-1}B$$

Ainsi pour trouver les valeurs des inconnues x_i, on effectue simplement le produit matriciel $A^{-1}B$: chacune de ses lignes nous donne la valeur du x_i correspondant.

Exemple : $(S) \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + y = -2 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A.X = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 5x + y \end{pmatrix}$ Le système (S) s'écrit

$A.X = B$: écriture matricielle du système

- Si A n'est pas inversible, le système n'a pas une solution unique.
- Si A est inversible : A^{-1} existe.

A savoir refaire

$$A.X = B$$
$$\underbrace{A^{-1}.A}_{I}.X = A^{-1}B$$
$$I.X = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}B$$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

car $I.X = X$

Ici : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ et $\underbrace{X}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} . \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{-39}{7} \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} . B$

donc $\begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = \frac{-39}{7} \end{cases}$ $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{5}{7}, \frac{-39}{7} \right) \right\}$

x y

Autre exemple : $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - 5y = -6 \end{cases}$

1ère étape : Déterminer A, B et X tel que

Le système s'écrit $A.X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

<u>2e étape :</u> Montrer que $X = A^{-1}.B$.

On a : $A.X = B$

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

$$I.X = A^{-1}.B \quad \text{car } A^{-1}.A = I$$

$$X = A^{-1}.B \quad \text{car } I.X = X$$

<u>3e étape :</u> Déterminer A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{2}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix}$$

<u>4e étape :</u> Calcul de la solution : (calculatrice)

$$X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour savoir comment utiliser la calculatrice, regarder ici :

- modèles CASIO `https://youtu.be/yjvQx13Vhlk`
- modèles TEXAS INSTRUMENT `https://youtu.be/rxDxBnIwaGo`

Exemple

On considère le système suivant : $\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1 \\ 5x - 3y - 2z = 2 \\ -x + 2y + z = -3 \end{cases}$

Il peut se réécrire de manière matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Appelons A la matrice carrée du membre de gauche. On détermine que A est inversible avec la calculatrice et que son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -3 & 4 & 14 \\ 7 & -9 & -31 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$X = A^{-1}.B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -3 & 4 & 14 \\ 7 & -9 & -31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

C'est à dire, en effectuant le produit dans le membre de droite

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -37 \\ 82 \end{pmatrix}$$

On a donc résolu le système : $\begin{cases} x = 11 \\ y = -37 \\ z = 82 \end{cases}$

Exercice 75

$A.X$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

1. Effectue le produit suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \ldots \end{pmatrix}$

Exercice 75

1. Effectue le produit suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. Á l'aide de la calculatrice détermine l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Résous le système suivant : $\begin{cases} x + 2y = 15 \\ -3x + 3y = -6 \end{cases}$

$A.X$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x + 3y \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

3. On a : $A.X = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$

d'où : $A^{-1}.A\ X = A^{-1}.B$

$I.X = A^{-1}.B$

$X = A^{-1}.B$

donc $X = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = \frac{19}{3} \\ y = \frac{13}{3} \end{cases}$

Exercice 82

À la papeterie :

- 3 stylos, 2 cahiers et 4 gommes coûtent 6,30€ ;
- 5 stylos, 7 cahiers et 1 gomme coûtent 15€ ;
- 10 stylos, 1 cahier et 6 gommes coûtent 6€.

À l'aide de la calculatrice et en expliquant la démarche, déterminer le prix de chaque article.

- Choix des inconnues : x : prix d'un stylo
  y : prix d'un cahier
  z : prix d'une gomme
- Mise en équation du problème :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 6,3 \\ 5x + 7y + z = 15 \\ 10x + y + 6z = 6 \end{cases}$$

- Résolution du système :

Le système s'écrit : $A.X = B$ avec

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 10 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6,3 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 10 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6,3 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On a : $A.X = B$

d'où : $A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$

$I.X = A^{-1}.B$

$X = A^{-1}.B$

donc $X = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

Conclusion : 0,10 € : prix d'un stylo

2 € : prix d'un cahier

0,50 € : prix d'une gomme

Exercice 76

Dans un parc d'une ville, deux marchands ambulants vendent des beignets, des crêpes et des gaufres. On a noté les ventes de chacun pour samedi et dimanche derniers.

Marchand 1

	beignets	crêpes	gaufres
samedi	20	36	12
dimanche	26	40	18

Marchand 2

	beignets	crêpes	gaufres
samedi	30	40	22
dimanche	30	48	38

On peut retenir l'information donnée par un tableau en conservant uniquement les nombres disposés de la même façon. On représente le 1er tableau par la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 36 & 12 \\ 26 & 40 & 18 \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice B représentant le deuxième tableau.
2. Que valent a_{12}, a_{11}, a_{23} et b_{11} ?
3. Calculer A + B et donner la signification de la matrice.

1. $B = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 22 \\ 30 & 48 & 38 \end{pmatrix}$

2. $a_{12} = 36$; $a_{11} = 20$; $a_{23} = 18$; $b_{11} = 30$

3. $A + B = \begin{pmatrix} 50 & 76 & 34 \\ 56 & 88 & 56 \end{pmatrix}$

Vente de beignets, crêpes et gaufres pour le samedi (1ère ligne) et le dimanche (2e ligne) au total (2 marchands)

4. Calculer A — B et donner la signification de la matrice.

5. Samedi et dimanche prochains, weekend de fête, on prévoit que les ventes vont augmenter de 50%.
Par quel nombre k faut-il multiplier chacune des ventes du 1er marchand ? Écrire la matrice kA.
Donner la matrice kB correspondant aux ventes du 2e marchand.

6. Un beignet est vendu 2 euros, une crêpe 1 euro et une gaufre 1,50 euro.
On note V la matrice des prix de vente

$$V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Quelle opération matricielle donne le montant des ventes par jour pour le 1er marchand ? Pour le 2e ?

7. Les deux marchands travaillent pour le compte du même patron, qui leur demande de calculer les coûts d'achats et les revenus pour chaque jour. Le coût d'achat d'un beignet est 0,40 euro, d'une crêpe 0,25 euro, d'une gaufre 0,30 euro. On note T la matrice donnant prix d'achat et prix de vente par catégorie

$$T = \begin{pmatrix} 0,4 & 2 \\ 0,25 & 1 \\ 0,3 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Quelle opération matricielle permet le calcul des coûts d'achat et revenus par jour pour le 1er marchand ?
Calculer, de même, les coûts d'achats et les revenus par jour pour le 2e marchand puis, globalement, pour le patron.

4. $A - B = \begin{pmatrix} -10 & -4 & -10 \\ -4 & -8 & -20 \end{pmatrix}$

A − B représente la différence entre le 1er marchand et le 2e marchand par jour (en ligne) et par produit (en colonne).