Séance 4 du 22.01. - Changements de variables

Sujet 2023

Exercice 2 : **10 points**

Partie A

Le tableau suivant, où x_i désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2015, donne le nombre y_i d'appareils connectés, exprimé en milliards, dans le monde entre 2015 et 2021.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
x_i : rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6
y_i : nombre d'appareils (en milliards)	15,4	17,7	20,4	23,1	26,7	30,7	35,8

1. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. Arrondir le résultat au centième.

$r \approx 0,99$

b. Expliquer pourquoi le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

r est proche de 1 donc un ajustement affine est adapté.

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$. Les coefficients a et b seront arrondis au dixième.

RégLin
y=ax+b
a=3.339285714
b=14.23928571
r²=0.9806709473
r=0.9902883152

$y = 3,3x + 14,2$

3. À l'aide de l'équation de la droite de régression trouvée précédemment, estimer le nombre d'appareils qui seront connectés en 2023.

En 2023, $x = 8$ et $y = 3,3 \times 8 + 14,2$

$y = 40,6$

En 2023, on estime le nombre d'appareils connectés à 40,6 milliards d'appareils.

III.4. « Transformation » d'un nuage, changement de variable(s)

Idée

On peut « transformer » l'un des deux paramètres (ou les deux) de la série à l'aide d'une certaine fonction :
- on obtient un nouveau nuage de points (généralement de forme *allongée*) ;
- on détermine l'équation de la droite d'ajustement ;
- on revient aux variables initiales (en *retournant* la fonction).

Exemples

On transforme avec « ln », on retourne avec « exp » (et inversement).
On transforme avec « $\sqrt{\ }$ », on retourne avec « ^{2} » (et inversement).

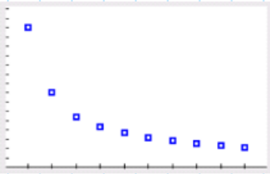
On transforme avec "inverse" $\left(\frac{1}{x}\right)$ et on retourne avec "inverse" $\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 3

Un artisan calcule le coût de fabrication d'un objet en fonction du nombre de pièces produites par jour :

Qté produite par jour (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = 1/x_i$										
Coût unitaire en euros (y_i)	15,04	8,09	5,40	4,38	3,75	3,20	2,90	2,54	2,31	2,12

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ en prenant 1 cm d'unité sur les deux axes.



2. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$ en arrondissant a à 2 décimales et b à 1 décimale, ainsi que le coefficient de corrélation associé arrondi à 3 décimales. Cet ajustement linéaire vous parait-il raisonnable?

```
RégLin
y=ax+b
a=-1.066848485
b=10.84066667
r²=0.6627451646
r=-0.8140916193
```

La calculatrice donne $y = -1{,}07x + 10{,}84$

$r \approx -0{,}81$

L'ajustement affine ne semble pas adapté.

3. On pose : $z_i = \dfrac{1}{x_i}$.

a. Compléter le tableau avec la ligne des z_i.

b. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en z cette fois-ci sous la forme $y = a_0 z + b_0$ en arrondissant a_0 à 1 décimale et b_0 à 2 décimales, ainsi que le coefficient de corrélation associé arrondi à 4 décimales.

Que pensez-vous de cet ajustement?

c. Déduire de la question précédente une expression de y en fonction de x et tracer la courbe correspondante sur le graphique.

a.

L3=1/L1

$z=1/x$

L1	L2	L3
1	15.04	1
2	8.09	0.5
3	5.4	0.3333
4	4.38	0.25
5	3.75	0.2
6	3.2	0.1667
7	2.9	0.1429
8	2.54	0.125
9	2.31	0.1111
10	2.12	0.1

$z = \frac{1}{x}$

entre L3 et L2

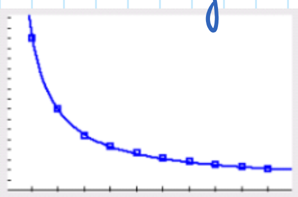
z_i y_i

```
RégLin
y=ax+b
a=14.30594137
b=0.7828351884
r²=0.9994295514
r=0.999714735
```

$y = 14{,}31\,z + 0{,}78$

c. $y = 14{,}31 \times \dfrac{1}{x} + 0{,}78$

$y = \dfrac{14{,}31}{x} + 0{,}78$



Par exemple, on peut estimer y pour $x = 12$:

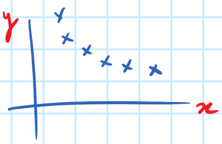
$y = \dfrac{14{,}31}{12} + 0{,}78 \approx 1{,}97$

Qté produite par jour (x_i)	1	2	3	4
× $z_i = 1/x_i$	1	0,5	0,33	0,25
Coût unitaire en euros (y_i)	15,04	8,09	5,40	4,38

→ L1

→ L3

→ L2



Ajustement : entre $y = a\,z + b$ $\left(z = \frac{1}{x}\right)$

Ajustement : autre $y = az + b$ $z = \frac{1}{x}$

$y = a\frac{1}{x} + b$

$\boxed{y = \frac{a}{x} + b}$

$a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

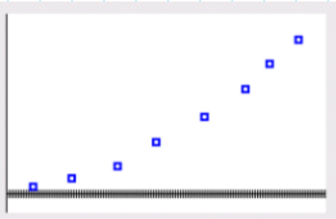
$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Exercice 4

Un test sur circuit de distance d'arrêt d'un véhicule en fonction de sa vitesse a livré les résultats suivants :

L1	Vitesse en km/h (v_i)	27	43	62	78	98	115	125	137
L3	$x_i = (v_i)^2$								
L2	Distance d'arrêt en m (d_i)	9	21	36	68	101	136	170	201

1. Représenter le nuage de points $(v_i\,;d_i)$ en prenant 1 cm pour 10 km/h en abscisse et 1 cm pour 20 m en ordonnée (de 0 à 160 en abscisse et de 0 à 250 en ordonnée).



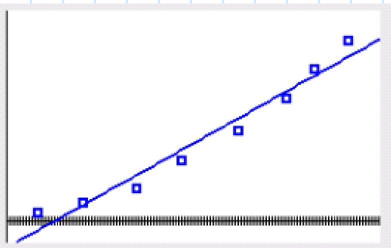
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de d en v sous la forme $d = av + b$ en arrondissant a à 2 décimales et b à l'entier, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire correspondant arrondi à 3 décimales.

```
RégLin
y=ax+b
a=1.758168091
b=-57.79314275
r²=0.9611939182
r=0.9804049766
```

$r_{\delta} \approx 0{,}98$

$d = 1{,}76\,v - 57{,}79$

3. Tracer cette droite sur le graphique et déterminer quelle serait, suivant cette tendance, la distance d'arrêt pour une vitesse de 150 km/h.



Pour 150 km/h : $v = 150$

$d = 1{,}76 \times 150 - 57{,}79 = 206{,}21$

Distance d'arrêt estimée : 206,21 mètres

Cette modélisation ne semblant pas totalement satisfaisante, on se demande si la distance d'arrêt ne serait pas plutôt corrélée à l'énergie acquise par le véhicule, c'est à dire au carré de la vitesse.

4. On pose $x_i = (v_i)^2$.

   a. Compléter le tableau avec la ligne des x_i.

L1	L2	L3
27	9	729
43	21	1849
62	36	3844
78	68	6084
98	101	9604
115	136	13225
125	170	15625
137	201	18769
------	------	------

   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire du couple $(x\,;d)$, arrondi à 4 décimales.
   L'idée de cette nouvelle modélisation vous parait-elle bonne ?

RégLin $r \approx 0{,}9989$

b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire du couple $(x\,;d)$, arrondi à 4 décimales.
L'idée de cette nouvelle modélisation vous parait-elle bonne ?

```
RégLin
y=ax+b
a=0.0106813519
b=-0.3499979667
r²=0.9978430623
r=0.998920949
```

$r_1 \approx 0,9989$

$r_0 < r_1 < 1$

Bonne idée

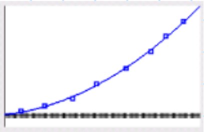
c. Déterminer l'équation de la droite de régression de d en x sous la forme $d = a_0 x + b_0$ où a_0 sera arrondi à 5 décimales et b_0 au centième.

$d = 0,01068\, x - 0,35$

d. En déduire une nouvelle expression de d en fonction de v et tracer cette courbe $\mathcal{P}$ sur le graphique.

On a $x = v^2$ d'où $d = 0,01068\, v^2 - 0,35$

e. Selon cette modélisation plus ajustée, quelle serait la distance d'arrêt pour une vitesse de 150 km/h ?



$d = 0,01068 \times 150^2 - 0,35$

$d \approx 240$ mètres

f. Lors d'une enquête à la suite d'un accident, on a relevé une distance d'arrêt de 117 mètres.
À combien peut-on estimer la vitesse du véhicule ?

$d = 117$ d'où : On cherche v tel que :

$117 = 0,01068\, v^2 - 0,35$

$117,35 = 0,01068\, v^2$

$\dfrac{117,35}{0,01068} = v^2$

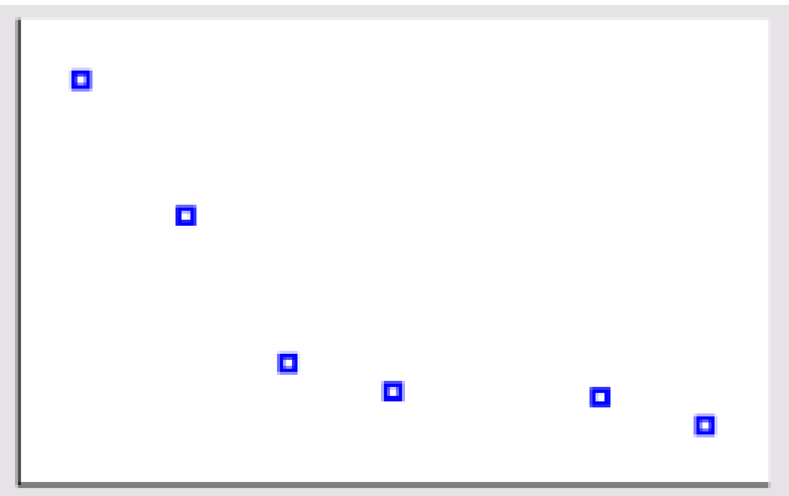
donc $v = \sqrt{\dfrac{117,35}{0,01068}} \approx 104$ km/h

Exercice 5

Dans le tableau suivant figure une partie des résultats d'une enquête réalisée par une entreprise pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels de ce nouveau produit en fonction de son prix de vente :

Prix de vente x_i (en €)	200	250	300	350	450	500
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	632	475	305	275	266	234

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage et on effectue le changement de variable $z_i = \ln y_i$.



1. Compléter le tableau de valeurs suivant (les valeurs demandées seront arrondies au millième) :

1.1	Prix de vente x_i (en €)	200	250	300	350	450	500

1. Compléter le tableau de valeurs suivant (les valeurs demandées seront arrondies au millième) :

	Prix de vente x_i (en €)	200	250	300	350	450	500
L1							
L3	$z_i = \ln y_i$	6,449	6,163				

L1	L2	L3
200	632	6.4489
250	475	6.1633
300	305	5.7203
350	275	5.6168
450	266	5.5835
500	234	5.4553
------	------	------

2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i ; z_i)$.
Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine ?

z

RégLin
y=ax+b
a=-0.0030032071
b=6.857446507
r²=0.8037660233
r=-0.8965299902

$r \approx -0,89$: proche de 1

3. Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de z en x, sous la forme $z = ax + b$ (a sera donné à 10^{-4} près par excès et b à 10^{-2} près par excès).

$z = -0,0030\,x + 6,86$ $\qquad$ $z = \ln y$

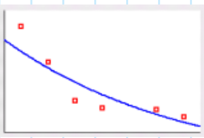
4. En déduire une estimation du nombre d'acheteurs potentiels y_i en fonction de x_i sous la forme $y = ke^{-\lambda x}$ où k et λ sont des constantes (k sera arrondi à l'entier le plus proche).

$\exp(\ln y) = \exp(-0,0030\,x + 6,86)$

$y = e^{-0,003x + 6,86}$

$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \exp(x) \\ &= e^{x} \end{aligned} \right.$

5. Utiliser cette estimation pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels si le prix de vente est fixé à 400 €.



Pour $x = 400$, $y = e^{-0,003 \times 400 + 6,86}$

$y \approx 287$ acheteurs