# Séance du 06.02. - Exercices

Applications

Exercice 1

1. Etablir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :
   a) (P ⇒ Q) ⇒ R  b) P ⇒ (Q ⇒ R)
2. Ces deux propositions sont-elles équivalentes ?

| P | Q | R | $P \Rightarrow Q$ | $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ | $Q \Rightarrow R$ | $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

1. Ces deux propositions ne sont pas équivalentes :
   $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \nLeftrightarrow P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

Exercice 2

1. Déterminer une proposition équivalente à P ∧ Q qui ne comporte que les connecteurs ¬ et ∨.
2. Ecrire une proposition équivalente à P ⇒ Q qui ne comporte que les connecteurs ¬ et ∨.
3. En déduire une proposition équivalente à P ⇔ Q qui ne comporte que les connecteurs ¬ et ∨.

Remarque : $\bar{P} \Leftrightarrow \neg P$

1ère démonstration : Table de vérité

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $\bar{P}$ | $\bar{Q}$ | $\bar{P} \vee \bar{Q}$ | $\overline{\bar{P} \vee \bar{Q}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Autre démonstration : $\overline{\bar{P} \vee \bar{Q}} \Leftrightarrow \bar{\bar{P}} \wedge \bar{\bar{Q}} \Leftrightarrow P \wedge Q$
(Loi de Morgan)

2.

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $\bar{P}$ | $\bar{P} \vee Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

On a ainsi démontré que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$

3

On a ainsi démontré que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$

3.

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ | $\bar{P}$ | $\bar{Q}$ | $\overline{P \vee \bar{Q}}$ | $\overline{Q \vee \bar{P}}$ | $(\overline{P \vee \bar{Q}}) \vee (\overline{Q \vee \bar{P}})$ | $\overline{(\overline{P \vee \bar{Q}}) \vee (\overline{Q \vee \bar{P}})}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

On a démontré que : $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{\overline{P \vee \bar{Q}} \vee \overline{Q \vee \bar{P}}}$

Autre démonstration :

$$\overline{\overline{P \vee \bar{Q}} \vee \overline{Q \vee \bar{P}}} \Leftrightarrow \overline{\overline{P \vee \bar{Q}}} \wedge \overline{\overline{Q \vee \bar{P}}}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \bar{Q}) \wedge (Q \vee \bar{P})$$

$$\Leftrightarrow (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}) \wedge (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$$

$$\Leftrightarrow \bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$$

$$\Leftrightarrow P \Leftrightarrow Q$$

Remarque : $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q})$

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ | $\bar{P}$ | $\bar{Q}$ | $\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Exercice 3

1. a) Etablir la table de vérité de la proposition suivante :
   $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
   b) A quelle proposition plus simple cette proposition est-elle équivalente ?
2. Mêmes questions avec $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

1. a)

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \vee Q$ | $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

b) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q)$

$\iff$

$(P \vee Q)$

2. a)

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \wedge Q$ | $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

b) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

$\iff$

$P$

Exercice 4

La barre de Sheffer est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P, Q associe la proposition, notée $P \mid Q$, équivalente à $\neg(P \wedge Q)$.
Ce connecteur est aussi appelé "nand", contraction de "no and" soit "non et".

1. Etablir la table de vérité de $P \mid Q$.
2. Démontrer que pour toute proposition P, $\neg P \Leftrightarrow P \mid P$.
3. Déduire de la définition de $P \mid Q$ et du résultat du 2 une proposition équivalente à $P \wedge Q$ dans laquelle seul le connecteur $\mid$ apparaît.
4. Démontrer à l'aide d'une loi de Morgan que, pour toutes propositions P, Q, $P \vee Q \Leftrightarrow ((P \mid P) \mid (Q \mid Q))$.
   Ainsi tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur "nand".

Remarque : $\neg P \wedge Q \iff \overline{P} \wedge Q$ $\qquad$ $\neg P \iff \overline{P}$

$\neg(P \wedge Q) \iff \overline{P \wedge Q}$

1

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $\overline{P \wedge Q}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

d'où

| $P$ | $Q$ | $P \mid Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

2

| $P$ | $\overline{P}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $P$ | $P$ | $P \mid P$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

donc $\overline{P} \iff P \mid P$

3. $P \wedge Q$ ? $\qquad$ $\boxed{P \mid Q \iff \overline{P \wedge Q}}$

donc $\overline{P} \iff P|P$

3. $P \wedge Q$ ?

$$\boxed{\begin{array}{l} P|Q \iff \overline{P \wedge Q} \\ P|P \iff \overline{P} \end{array}}$$

$$P \wedge Q \iff \overline{\overline{P \wedge Q}} \iff \overline{P|Q}$$

$$\iff (P|Q)|(P|Q)$$

4. A terminer