导学

先修课程
①随机过程：随机过程的基本概念、平稳随机过程、均方遍历（各态历经）、功率谱密度（维纳辛钦公式）、平稳随机过程通过线性系统、带通随机过程

②概率论：连续型随机变量（概率密度、分布函数）、贝叶斯公式、正态分布和多维正态分布、数字特征（数学期望、方差、协方差）

③数理统计：二元假设检验、矩估计、最大似然估计、估计量的评价（无偏估计、最优估计、克拉美罗界）

课程框架
①信号检测与估计基础：信号传输模型、噪声类型、信号检测、信号估计

②高斯白噪声下的单样本二元信号检测：最大后验准则、最大似然准则、贝叶斯准则、NP准则、极大极小准则、序贯检测

③高斯白噪声下的多样本多元信号检测：最大后验准则、最大似然准则、贝叶斯准则、最佳接收机设计

④非高斯白噪声中的信号检测：高斯色噪声下的信号检测、参量检测和非参量检测

⑤信号参数估计：最大似然估计、贝叶斯估计、最大后验估计、估计量的评价（无偏估计、最优估计、克拉美罗界）

⑥波形估计（选修）：维纳滤波、卡尔曼滤波

信号检测与估计理论的发展
①微弱信号检测理论
②盲信号检测
③稀疏信号检测
④基于深度学习的信号检测
⑤非线性信号检测

概率论基础

随机事件	抛两次硬币，正面记为H，反面记为T，则出现的结果为：HH,HT,TH,TT ①样本空间：HH,HT,TH,TT ②基本事件：HH 必然事件：太阳从东边升起 不可能事件：太阳从西边升起
事件的运算	假设有A,B两个事件 ①差事件：$A-B$（A发生，B不发生）$A\bar{B}$ ②和事件：$A+B$（A发生或者B发生）$A\cup B$ ③积事件：AB（A,B同时发生）（雨夹雪）$A\cap B$ ④对立事件（逆事件）：下雨A、不下雨$\bar{A}$ ⑤互斥事件：一定不同时发生的两个事件称为互斥事件，即$P(AB)=0$ ⑥定理：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$ $P(A-B)=P(A)-P(AB)$
事件运算的性质	①交换律：$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$ ②结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ ③分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ④德摩根律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

题型一：写出事件的表达式以及事件的运算

①设A,B,C为三个事件，试写出下列事件的表达式

（1）A,B,C都不发生（2）A,B,C不都发生（3）A,B,C至少一个发生

解：

（1）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}$

（2）$\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

（3）$A\cup B\cup C$

题型二：利用事件运算计算概率

①设A,B互斥，$P(A)=0.5$，$P(A\cup B)=0.9$，求$P(B)$，$P(A-B)$

解：

$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.4$,$P(A-B)=P(A)=0.5$

②设$P(A)=0.4,P(B)=0.3,P(AB)=0.1$，则$P(A\cup B)=$

解：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-0.1=0.6$

③已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{7},P(AB)=P(BC)=\frac{1}{14},P(AC)=0$，$P(ABC)=0$，则A、B、C至少有一个发生的概率为

解：

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{14}-0-0=\frac{2}{7}$$

对于复杂事件，可以考虑用对立事件解题

④若$P(A)=0.4,P(B)=0.5$，A、B互斥，求$P(\bar{A}\bar{B})$
解：
$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-0.4-0.5+0=0.1$$

题型三：拿球问题

①袋中有a个白球，b个红球，k个人依次在袋子中取一个球，
（1）放回抽样时，求第i个人取到白球的概率
（2）不放回抽样，求第i个人取到白球的概率
解：
（1）
$$P(\text{第i个人取到白球})=\frac{a}{a+b}$$
（2）
$$P(\text{第i个人取到白球})=\frac{a}{a+b}$$

②将一枚硬币抛三次：
（1）求恰有一次正面出现的概率
（2）求至少出现一次正面的概率
解：
（1）
$$P(\text{恰有一次正面出现})=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$
（2）
$$P(\text{至少出现一次正面})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

③袋中有4个黄球，6个白球，在袋中任取两球，求
（1）取到两个黄球的概率
（2）取到一个黄球和一个白球的概率
解：
（1）
$$P=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$$
（2）
$$P=\frac{C_4^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$$

题型四：古典概型和几何概型

古典概型（等可能概型）------ 抛骰子	①样本空间只包含有限个元素 ②基本事件发生的可能性相同
几何概型	①样本空间包含无数个元素 ②基本事件发生的可能性相同

①设x的取值范围为[1,6]，问$2<x<5$的概率为

解：

$P(2<x<5)=\frac{3}{5}$

全概率公式和贝叶斯公式

条件概率	$P(B\|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ $P(B\|A)=1-P(\bar{B}\|A)$ 定理：对于必然事件B，$P(B\|A)=1$
乘法公式	$P(AB)=P(B\|A)P(A)$ $P(ABC)=P(C\|AB)P(B\|A)P(A)$
独立性	$P(AB)=P(A)\cdot P(B)\Leftrightarrow$ 事件A,B相互独立 定理：若事件A,B相互独立，则A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，$\bar{A}$与$\bar{B}$相互独立 定理：若A,B互为独立事件，则$P(B\|A)=P(B)$
	$P((A_1+A_2)\|B)=P(A_1\|B)+P(A_2\|B)-P(A_1A_2\|B)$

题型一：考查条件概率、独立性的概念、乘法公式

①设$P(A)=0.5, P(B)=0.6$，$P(A|B)=0.5$，求$P(A\cup B)$，$P(A\bar{B})$

解：

$P(AB)=P(B)P(A|B)=0.3$，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8$

$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.2$

②设A,B为两个相互独立的随机事件，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，求$P(A\cup B)$，$P(A-B)$，$P(A|B)$

解：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.76$

$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.16$

$P(A|B)=P(A)=0.4$

③设A,B,C独立且$P(A)=0.9$，$P(B)=0.8$，$P(C)=0.7$，求$P(A\cup B\cup \mathrm{C})$

解：

$P(A\cup B\cup \mathrm{C})=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=0.994$

④A、B相互独立，$P(A)=0.3, P(A\cup B)=0.6, P(B)=$________

解：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0.6$

$0.3+P(B)-0.3P(B)=0.6\Rightarrow P(B)=\frac{3}{7}$

⑤若$P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.4$，则$P(A\cdot\bar{B})=$________

解：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+P(A)-P(AB)=0.4$

$P(A\cdot\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.3=0.1$

⑥已知$P(A)=0.6$，$P(B|A)=0.3$，则$P(AB)=$_______

解：

$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.6\times 0.3=0.18$

⑦投一颗骰子，事件A为“点数大于3”事件B为“点数为5”，则$P(B|A)=$________

解：

$$P(AB)=P(B)=\frac{1}{6},P(A)=\frac{1}{2}$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

⑧已知$P(A\cup B)=0.8,P(B)=0.4$，则$P\left(A|\bar{B}\right)=$_______

解：

$$P\left(A|\bar{B}\right)=\frac{P\left(A\cdot\bar{B}\right)}{P\left(\bar{B}\right)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P\left(\bar{B}\right)}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+P(A)-P(AB)=0.8$$

得$P(A)-P(AB)=0.4$

$$P\left(\bar{B}\right)=1-P(B)=1-0.4=0.6$$

$$P\left(A|\bar{B}\right)=\frac{P(A)-P(AB)}{P\left(\bar{B}\right)}=\frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3}$$

题型二：考查全概率公式和贝叶斯公式

1. 全概率公式	$P(A)=P\left(A|B_1\right)P\left(B_1\right)+P\left(A|B_2\right)P\left(B_2\right)+\cdots+P\left(A|B_n\right)P\left(B_n\right)$（执因索果） A是结果，$B_1,B_2,\cdots,B_n$是引发这个结果的原因 $P\left(B_1\right)$、…、$P\left(B_n\right)$可以认为是权重系数，即每个原因导致这个结果的可能性不一样（比如：抽烟、喝酒都可能导致肺癌，但是明显抽烟导致肺癌的可能性更高）
2. 贝叶斯公式	$P\left(B_i|A\right)=\frac{P\left(B_iA\right)}{P(A)}=\frac{P\left(A|B_i\right)P\left(B_i\right)}{\sum_{j=1}^{n}P\left(A|B_j\right)P\left(B_j\right)}$（执果索因） 贝叶斯公式就是，结果已经发生了，求结果是由某个因素引起的概率

①根据数据对比表明，当机器调整良好时，产品的合格率为98%，而当机器发生故障时，合格率为55%。每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为95%。试求已知某天早上第一件产品为合格品时，机器调整良好的概率

解：

执果索因

令：$A=$产品合格（结果）

$B=$机器调整良好（原因）

已知：$P(A|B)=0.98$，$P(B)=0.95$，$P\left(\bar{B}\right)=0.05$，$P\left(A|\bar{B}\right)=0.55$

需要求$P(B|A)$

根据贝叶斯公式：

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P\left(A|\bar{B}\right)P\left(\bar{B}\right)}=0.97$$

②某大卖场供应的微波炉中，甲、乙、丙三厂产品各占50%、40%、10%，而三厂产品合格的概率为95%、85%、80%，求

（1）买到的微波炉是合格品的概率

（2）已知买到的微波炉是合格品，则它是由甲厂生产的概率为多大

解：

（1）

执因索果

设B_1,B_2,B_3分别表示买到的微波炉由甲、乙、丙厂生产（原因），A表示买到合格品（结果），则

$P(B_1)=0.5$，$P(B_2)=0.4$，$P(B_3)=0.1$，$P(A|B_1)=0.95$，$P(A|B_2)=0.85$，$P(A|B_3)=0.8$

由全概率公式得：

$$P(A)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.895$$

（2）

执果索因

$$\mathrm{P}(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{95}{179}$$

一维离散型随机变量

<table>
<tr><td>分布律</td><td>①连续抛两次硬币，以X表示硬币正面朝上的次数，求X的分布律
<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>p</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>分布律的性质</td><td>$p_k \geq 0$
$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ———求参数</td></tr>
<tr><td>分布函数</td><td>设X是一个随机变量，x是任意实数，函数$F(x) = p\{X \leq x\}$，$-\infty < x < +\infty$，称为X的分布函数
例①中的分布函数可以写为：
$F(x) = \begin{cases} 0\ , x < 0 \\ \frac{1}{4}, 0 < x < 1 \\ \frac{3}{4}, 1 < x < 2 \\ 1\ , 2 < x \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>分布函数的性质</td><td>$F(x)$是一个不减函数
$0 \leq F(x) \leq 1$
$P\{a < x \leqslant b\}$=$F(b) - F(a)$</td></tr>
</table>

题型一：求参数，求概率

①已知随机变量的分布律如下所示，求参数a

X	-1	0	1
P_k	0.2	a	0.1

解：

$0.2 + a + 0.1 = 1$

$\Rightarrow a = 0.7$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

②设随机变量X的分布函数为$F(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ 0.4, 1 \leqslant x < 2 \\ 0.5, 2 \leqslant x < 3 \\ 1, x \geqslant 3 \end{cases}$，则

P$\{1.5 < x \leqslant 2.5\}$=______

解：$P\{1.5 < x \leqslant 2.5\}$=$F(2.5) - F(1.5)$=0.1

题型二：求分布律、分布函数

①设随机变量X具有如下分布律，试求$Y = (X-1)^2$的分布律

X	-1	0	1	2
P_k	0.2	0.3	0.1	0.4

解：

Y	4	1	0	1
P_k	0.2	0.3	0.1	0.4

Y	0	1	4
P_k	0.1	0.7	0.2

直接代入随机变量取值，然后再合并相同的情况

②设随机变量X的分布律如下：

X	-1	0	1	2
P	0.4	0.3	0.2	0.1

求：

（1）$U = X - 1$的分布律

（2）$W = X^2$的分布律

解：

P	0.4	0.3	0.2	0.1
X	-1	0	1	2
$U = X - 1$	-2	-1	0	1
$W = X^2$	1	0	1	4

（1）$U = X - 1$的分布律

U	-2	-1	0	1
P	0.4	0.3	0.2	0.1

（2）$W = X^2$的分布律

W	0	1	4
P	0.3	0.6	0.1

③设一维离散型随机变量X的分布函数为$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1 \\ 0.4, -1 \leqslant x < 1 \\ 0.8, 1 \leqslant x < 3 \\ 1, 3 \leqslant x \end{cases}$，求$X$的分布律和$P\{-1 < X \leqslant 3\}$

解：

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

$P\{-1 < X \leqslant 3\} = P\{X = 1\} + P\{X = 3\} = 0.4 + 0.2 = 0.6$

用分布函数反推分布律

④盒中有6个球，其中4个白球，2个黑球，从中任取2个球，求：

（1）抽到白球数X的分布律　　（2）随机变量X的分布函数

解：

（1）X可取0,1,2

$$P\{X=0\}=\frac{C_4^0 \cdot C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$
$$P\{X=1\}=\frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$$
$$P\{X=2\}=\frac{C_4^2 \cdot C_2^0}{C_6^2}=\frac{6}{15}$$

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

（2）

$x<0$时，$F(x)=0$

$0\leqslant x<1$时，$F(x)=\frac{1}{15}$

$1\leqslant x<2$时，$F(x)=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{9}{15}$

$2\leqslant x$时，$F(x)=1$

题型三：根据常用分布计算概率

常用分布	分布律	简写
0-1分布	$P\{X=k\}=P^k(1-p)^{1-k}$ ，$k=0,1$	
二项分布	$p\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$ ，$k=0,1,2\ldots$	$X\sim B(n,p)$
泊松分布	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2\ldots$	$X\sim\pi(\lambda)$

①设$X\sim B(3,0.1)$，求$P(X=2),P(X\geq 1)$

解：

$P(X=2)=C_3^2(0.1)^2 0.9=0.027$

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.9^3=0.271$

利用对立事件，简化随机变量取值范围

②设三次独立随机实验中事件A出现的概率相同，已知事件A至少出现一次的概率为$\frac{37}{64}$，求A在一次实验中出现的概率p

解：

三次实验中A出现的次数$X\sim B(3,p)$，

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^3=\frac{37}{64}\Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

③设$X\sim\pi(2)$，求$P(X\geq 2)$

解：

$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-3e^{-2}$

④设$X\sim B(2,p),Y\sim B(3,p)$，若$P\{X\geq 1\}=\frac{5}{9}$，则$P\{Y\geq 1\}=$________

解：

$X\sim B(2,p),P=\{X=k\}=C_2^k p^k(1-p)^{2-k}$

$P\{X\geq 1\}=1-P\{X<1\}=1-P\{X=0\}=1-C_2^0 p^0(1-p)^2$

$$= 1 - (1-p)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$Y \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$$

$$P\{Y = k\} = C_3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y < 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$$

⑤假设某地区年地震发生次数服从参数为$\lambda = 2$的泊松分布，则未来一年，该地区至少发生一次地震的概率________

解：

$$\lambda = 2, P\{X = k\} = \frac{2^k}{k!} e^{-2}$$

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = 1 - e^{-2}$$

一维连续型随机变量（一）

概率密度	$f(x)$ 用来描述一维连续型随机变量的特性，类似于一维离散随机变量的分布律
概率密度的性质	$f(x) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ ———用来计算参数、判断某个函数是否是概率密度
分布函数	设X是一个随机变量，x是任意实数，函数$F(x) = p\{X \leq x\}$， $-\infty < x < +\infty$，称为X的分布函数 分布函数：$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ 用来计算概率（一维连续性随机变量概率可以用定积分计算， 也就是概率密度和横轴所围成的面积）
分布函数的性质	①$F(x)$是一个不减函数 ②$0 \leq F(x) \leq 1$ ③$F(+\infty) = 1$ ④$F(x)$是一个连续函数 ⑤$P\{x_1 < x \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$
分布函数和概率密度的关系	$f(x) = F'(x)$ ———根据分布函数求概率密度

题型一：求参数、分布函数、概率密度、概率

①设连续随机变量X的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-\frac{x^2}{2}}, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$$

求（1）A,B；（2）$P(X > 2)$；（3）概率密度$f(x)$；

解：

（1）$F(+\infty) = 1 \Rightarrow A = 1$

根据$F(x)$一定连续得：

$A + B = 0 \Rightarrow B = -1$

（2）$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-2}$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2}$

（3）$f(x) = F'(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

②设随机变量X具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx, 0 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2}, 3 \leq x \leq 4 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

（1）确定常数k　　（2）求X的分布函数　　（3）求$P\left\{1 < X \leq \frac{7}{2}\right\}$

解：

（1）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_0^3 kxdx + \int_3^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = 1$$

解得$k = \frac{1}{6}$，于是X的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, 0 \le x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2}, 3 \le x \le 4 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

（2）X的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = P\{X \le x\}$$

因为概率密度是分段函数，因此要根据x的取值，确定定积分的上限

$x < 0$

$F(x) = 0$

$0 < x < 3$

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{6}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{12}$$

$3 < x < 4$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 \frac{t}{6}\mathrm{d}t + \int_3^x \left(2 - \frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = -3 + 2x - \frac{x^2}{4}$$

$x > 4$

$F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{x^2}{12}, 0 \le x < 3 \\ -3 + 2x - \frac{x^2}{4}, 3 \le x < 4 \\ 1, x \ge 4 \end{cases}$$

（3）

$$P\left\{1 < X \le \frac{7}{2}\right\} = F\left(\frac{7}{2}\right) - F(1) = \frac{41}{48} = \int_1^{\frac{7}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{x}{6}\mathrm{d}x + \int_3^{\frac{7}{2}} \left(2 - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

题型二：根据常用分布结论求概率或者概率密度

常见分布

	概率密度	简写
均匀分布	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0, x为其他值 \end{cases}$	$X \sim U(a,b)$
指数分布	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, 其他 \end{cases}$	$X \sim E(\lambda)$

正态分布	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，$-\infty<x<+\infty$	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

①某种灯管的寿命X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1000}{x^2},x>1000\\ 0,其他\end{cases}$$

（1）求$P(X>1500)$

（2）任取5个灯管，求其中至少有2个寿命大于1500的概率

解：

（1）

$$P(X>1500)=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

（2）

设个灯管中寿命大于1500的个数为Y, 则$Y\sim B\left(5,\frac{2}{3}\right)$

$$P(Y\geq 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^5-5\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{232}{243}$$

②设X服从$(-1,5)$上的均匀分布，求方程$t^2+Xt+1=0$有实根的概率

解：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6},-1\leq x\leq 5\\ 0,其他\end{cases}$$

$$P\left(X^2-4\geq 0\right)=\int_{2}^{5}\frac{1}{6}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

③若X服从$E(\lambda)$，且$P\{X>3\}=e^{-6}$, 则$\lambda=$________

解：

$$X\sim E(\lambda),f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x>0\\ 0,其他\end{cases}$$

$$P\{X>3\}=\int_{3}^{+\infty}f(x)dx=\int_{3}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{3}^{+\infty}=-e^{-\infty}+e^{-3\lambda}=e^{-6}\Rightarrow\lambda=2$$

一维连续型随机变量（二）

题型三：正态分布的参数和概率问题

定理：若$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，$Z$称为$X$的标准化变量

其中$N(0,1)$ 称为标准正态分布标准正态分布的分布函数一般写为$\Phi(x)$

$\Phi(0)=\frac{1}{2}$
如果X服从标准正态分布，则$P\{\lvert X\rvert\le a\}=2\Phi(a)-1$
$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
标准正态分布的概率密度是偶函数
正态分布的特性：概率密度函数关于均值对称；也就是均值两侧的面积相等
若$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ $P\{a<X<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

①设$X\sim N(2,4)$，$P(X<a)=P(X\ge a)$, 则$a=$________

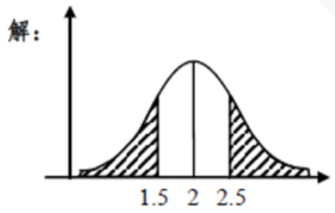
解：$a=2$

$$P(X<a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)\,dx=\int_{a}^{+\infty}f(x)\,dx=P(X<a)$$

②设$X\sim N\left(2,\sigma^2\right)$,已知$P(X\ge 2.5)=a$, 则$P(X<1.5)=$________

解：

$$P(X\ge 2.5)=a=\int_{2.5}^{+\infty}f(x)\,dx=P(X<1.5)$$



③设$X\sim N(1.5,4)$，且$\Phi(1.25)=0.89,\Phi(1.75)=0.96$，则$P\{-2<X<4\}=$________

解：

$P\{x_1<x\le x_2\}=F\left(x_2\right)-F\left(x_1\right)$

$$P\{-2<X<4\}=\Phi\left(\frac{4-1.5}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-2-1.5}{2}\right)$$

$=\Phi(1.25)-\Phi(-1.75)$

$=\Phi(1.25)-[1-\Phi(1.75)]=\Phi(1.25)+\Phi(1.75)-1=0.96+0.89-1=0.85$

④若$X\sim N(2,4)$，则服从$N(0,1)$的随机变量是 D

（A）$\frac{X}{4}$ （B）$\frac{X}{2}$ （C）$\frac{X-2}{4}$ （D）$\frac{X-2}{2}$

⑤已知$X\sim N\left(6,3^2\right)$，若$aX-2\sim N(0,1)$，则$a=$______

解：

$$\frac{X-6}{3}=aX-2,a=\frac{1}{3}$$

题型四：判断给出的函数是否为概率密度、分布函数

①判断下列函数是否是概率密度

$$f(y)=\begin{cases}\frac{y-8}{32},8<y<16\\ 0,其它\end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases}-1,8<y<16\\ 0,其它\end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases}\frac{y-8}{16},8<y<16\\ 0,其它\end{cases}$$

解：

概率密度函数必须大于零，排除第二个

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

②判断函数是否是分布函数

$F(x)$是一个不减函数$--$增减性

$0\le F(x)\le 1\ ---$有界性

$F(+\infty)=1$

$F(x)$是一个连续函数 $---$连续性

注意：概率密度可以是不连续的，但是分布函数一定要连续

③$F_1(x)$、$F_2(x)$为分布函数，判断下列函数是否为分布函数

1.$F_1(x)+F_2(x)$

2.$F_1(x)+F_2(x)X$

3.$F_1(x)F_2(x)$

4.$aF_1(x)+bF_2(x)(a\geqslant 0,b\geqslant 0,a+b=1)$

5.$1-[1-F_1(x)][1-F_2(x)]$

解：

1.否；2.否；3.是；4.是；5.是

数学期望

数学期望的性质	$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ $E(C)=C$ $E(CX)=CE(X)$ $E(XY)=E(X)E(Y)$ ，当X,Y相互独立

常见分布的数字特征：

	$E(X)$	$D(X)$	简写
伯努利分布	np	$np(1-p)$	$X\sim B(n,p)$
均匀分布	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$X\sim U(a,b)$
泊松分布	λ	λ	$X\sim\pi(\lambda)$ $X\sim P(\lambda)$
正态分布	μ	σ^2	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$
指数分布 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},x>0\\0,x为其他值\end{cases}$	θ	θ^2	

题型一：一维离散型随机变量的数学期望

$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$	$Y=g(X)$ $E(Y)=\sum_{k=0}^{\infty}g(x_k)p_k$

方法：套用定义或者利用常用分布的结论

①设$X\sim B(n,p)$，$DX=1.28$，$EX=1.6$，求n,p

解：

$EX=1.6=np$，$DX=1.28=np(1-p)\Rightarrow n=8$，$p=0.2$

②$X\sim U(2,10),Y\sim P(2)$，求$E(3X+2Y)$

解：

$$X\sim U(2,10),E(X)=\frac{2+10}{2}=6,Y\sim P(2),E(Y)=2$$
$$E(3X+2Y)=E(3X)+E(2Y)=3E(X)+2E(Y)=3\times6+2\times2=22$$

③设随机变量X的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

求$E(X)$，$E(X^2)$，$E(3X^2+5)$；

解：

$E(X)=-0.2$

$E(X^2)=2.8$

$E(3X^2+5)=3E(X^2)+5=13.4$

题型二：一维连续型随机变量的数学期望

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$	$Y=g(X)$ $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$

方法：套用定义或者利用常用分布的结论

①已知的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}kx+1,0<x<2\\ 0,\text{else}\end{cases}$$

求k，$P\left(X>\frac{1}{2}\right)$，$EX$

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1\Rightarrow 2k+2=1\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

$$P\left(X>\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{9}{16}$$

$$EX=\int_0^2 x\left(-\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

②设$X\sim U[1,3]$，求$E(X)$，$D(X)$，$E\left(\frac{1}{X}\right)$

解：

$E(X)=2$

$D(X)=\frac{1}{3}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\le x\le 3\\ 0, & else\end{cases}$$

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\int_1^3 \frac{1}{x}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 3$$

题型三：二维离散型随机变量

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

注意p_k是边缘分布律

①设二维随机变量的联合分布律为

Y X	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0.2	0.1	0.1

求数学期望$E(X),E(Y)$，$E(XY)$

解：

关于X的边缘分布律：

X	-1	0	1
	0.5	0.2	0.3

关于Y的边缘分布律

Y	1	2	3
	0.4	0.2	0.4

	0.2	0.1	0.2	0.1	0	0.1	0.1	0.1	0.1
(X,Y)	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(-1,3)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
XY	-1	-2	-3	0	0	0	1	2	3

XY	-1	-2	-3	0	1	2	3
	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

题型四：二维连续型随机变量

$Z=g(X,Y)$，则

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

方法：E的括号里面是什么，就用括号里面的东西和联合概率密度相乘，再做二重积分

①设随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2x^3y^2},\frac{1}{x}<y<x,x>1\\ 0，其它\end{cases}$

求数学期望$E(Y),E\left(\frac{1}{XY}\right)$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^3y}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}[\ln y]_{\frac{1}{x}}^{x}dx=3\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx=\left[-\frac{3}{2}\frac{\ln x}{x^2}\right]_1^{\infty}+\frac{3}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{3}{4}$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}\mathrm{d}y=\frac{3}{5}$$

②设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}12y^2,0\le y\le x\le 1\\ 0,其它\end{cases}$

求$E(X),E(Y)$，$E(XY),E(X^2+Y^2)$

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^2\,\mathrm{d}y=\frac{4}{5}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12y^3\,\mathrm{d}y=\frac{3}{5}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^3\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12(x^2y^2+y^4)\,\mathrm{d}y=\frac{16}{15}$$

方差

方差的定义	离散随机变量：$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2p_k$ 连续随机变量：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\,\mathrm{d}x$ $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E\{[X-E(X)]^2\}$ 有的教材也用$Var(X)$表示方差
方差的性质： C为常数	$D(C)=0$——常数的方差是零 $D(CX)=C^2D(X)$ $D(X+C)=D(X)$ 定理：$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\,cov(X,Y)$ 定理：X,Y相互独立时，则$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

常用分布的数字特征

	$E(X)$	$D(X)$	简写
伯努利分布	np	$np(1-p)$	$X\sim B(n,p)$
均匀分布	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$X\sim U(a,b)$
泊松分布	λ	λ	$X\sim\pi(\lambda)$
正态分布	μ	σ^2	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$
指数分布 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},x>0\\0,x为其他值\end{cases}$	θ	θ^2	

题型一：一维连续型随机变量

①设X,Y独立，且$X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(1,3)$求$E(2X-Y),D(2X-Y)$

解：

$E(2X-Y)=2EX-EY=1$，$D(2X-Y)=4DX+DY=7$

②设$X\sim N(0,4)$，$Y=-2X+3000$，求EY，DY，以及Y的分布

解：

$EY=-2EX+3000=3000$，$DY=4DX=16$，$Y\sim N(3000,16)$

③$X\sim U[-1,2]$，则$E(X^2)=$________

解：

$$E(X)=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2},D(X)=\frac{[2-(-1)]^2}{12}=\frac{3}{4}$$

$$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

④$X\sim N[1,2]$，$Y\sim P(3)$，且X与Y相互独立，则$D(3X-2Y)=$______

解：

$D(3X-2Y)=D(3X)+D(2Y)=9D(X)+4D(Y)=9\times2+4\times3=30$

题型二：一维离散型随机变量

①设随机变量X的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

求$D(X)$

解：

$E(X)=-0.2$

X^2	4	0
P	0.7	0.3

$E(X^2)=2.8$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

题型二：二维离散型随机变量

①已知(X,Y)联合分布律为：

$Y\quad X$	-1	0	2
0	a	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{9}$	b	$\frac{1}{3}$

且X与Y相互独立，求：

（1）a,b的值　（2）X,Y的边缘分布律　（3）EX,EY,DX,DY

解：

（1）

X与Y相互独立，$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$

X	-1	0	2
	$a+\frac{1}{9}$	$b+\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$

	0	1
Y	$\frac{15}{54}+a$	$\frac{4}{9}+b$

$a=\left(a+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{13}{54}+a\right)$

$b=\left(\mathrm{b}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{4}{9}+\mathrm{b}\right)$

$\Rightarrow$

$b=\frac{2}{9}$

$a=\frac{1}{18}$

（2）

X	-1	0	2
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

（3）

X^2	1	0	4
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Y^2	0	1
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$EX=\frac{5}{6},EX^2=\frac{13}{6},DX=EX^2-(EX)^2=\frac{53}{36}$$
$$EY=\frac{2}{3},EY^2=\frac{2}{3},DY=EY^2-(EY)^2=\frac{2}{9}$$

题型四：二维连续型随机变量

①设随机变量(X,Y)具有概率密度$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y),0\le x\le 2,0\le y\le 2\\ 0,\text{其它}\end{cases}$，

求$D(X),D(Y),Cov(X,Y)$，$D(X+Y)$

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{x}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{y}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{xy}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{x^2}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{y^2}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{11}{36}$$
$$D(Y)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36}$$
$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\,cov(X,Y)=\frac{5}{9}$$

协方差、相关系数

协方差	$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
协方差的性质	线性：$cov(aX,bY)=ab\,cov(X,Y)$ 分配律：$cov(X_1+X_2,Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$ 交换律：$cov(Y,X)=cov(X,Y)$ $cov(X,X)=D(X)$ 如果X,Y相互独立，则$cov(X,Y)=0$
相关系数	$\rho_{XY}=\dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ $\rho_{XY}=0$, 时称随机变量X,Y不相关 $\lvert\rho_{XY}\rvert\le 1$
矩	k阶原点矩：$E(X^k)$ k阶中心矩：$E\{[X-E(X)]^k\}$

题型一：一维离散型、连续型随机变量

①设$X\sim\pi(4)$，$Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，$\rho_{XY}=0.6$，求$D(3X-2Y)$

解：

$$D(3X-2Y)=9DX+4DY-12\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=25.6$$
$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\,cov(X,Y)$$

②设X,Y为随机变量，$D(X)=25$，$D(Y)=16$，$Cov(X,Y)=8$，则$\rho_{XY}=$________

解：

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{8}{\sqrt{25}\times\sqrt{16}}=\frac{2}{5}$$

③X和Y方差分别为4和9，相关系数为0.5，则$D(3X-2Y)=$________

解：

$$D(3X-2Y)=D(3X)+D(2Y)-2Cov(3X,2Y)$$
$$=9D(X)+4D(Y)-12Cov(3X,2Y)$$
$$=9\times4+4\times9-12\cdot\rho\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$$
$$=72-12\times0.5\times2\times3=36$$

题型二：二维连续型随机变量

①设随机变量(X,Y)具有概率密度$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1\\ 0, 其它\end{cases}$，求$E(X),E(Y),Cov(X,Y)$

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}y\,\mathrm{d}y=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}xy\,\mathrm{d}y=0$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

②设随机变量(X,Y)具有概率密度$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y),0\le x\le 2,0\le y\le 2\\ 0,其它\end{cases}$，

求$E(X),E(Y),Cov(X,Y),\rho_{XY},D(X+Y)$

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{x}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{y}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{xy}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{x^2}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2\frac{y^2}{8}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11}$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\,cov(X,Y)=\frac{5}{9}$$

题型三：二维离散型随机变量

①设二维随机变量的联合分布律为

Y　　X	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0.2	0.1	0.1

（1）数学期望$E(X),E(Y)$和方差$D(X)$、$D(Y)$

（2）协方差$Cov(X,Y)$和相关系数ρ_{XY}

解：

（1）

关于X的边缘分布律：

X	-1	0	1
	0.5	0.2	0.3

关于Y的边缘分布律

Y	1	2	3
	0.4	0.2	0.4

$E(X)=-0.2$

$E(Y)=2$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$

X^2	1	0
	0.8	0.2

Y^2	1	4	9
	0.4	0.2	0.4

$E(X^2)=0.8$

$E(Y^2)=4.8$

（2）

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

	0.2	0.1	0.2	0.1	0	0.1	0.1	0.1	0.1
(X,Y)	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(-1,3)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
XY	-1	-2	-3	0	0	0	1	2	3

XY	-1	-2	-3	0	1	2	3
	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

$$\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

参数估计（一）

参数估计	总体分布中有参数不知道，通过样本对这个参数进行估计；利用样本估计总体参数
点估计	矩估计、最大似然估计
矩估计	通过样本的数学期望或者方差估计未知参数

①设总体X在$[a,b]$上服从均匀分布，a,b未知。$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$是来自X的样本，试求a,b的矩估计量

解：

样本均值代替总体均值：

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{a+b}{2}$$

样本方差代替总体方差

$$\bar{s}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

联立上面两个方程可以求得a,b的矩估计量

②设随机变量$X\sim B(n,p)$，其中n已知。$\bar{X}$为样本均值，求p的矩估计量

解：

$$EX=np=\bar{X}\Rightarrow\hat{p}=\frac{\bar{X}}{n}$$

③设总体X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta},\theta<x<1\\ 0,\text{ else}\end{cases}$$

其中θ是未知参数，求θ的矩估计量

解：

$$EX=\frac{1+\theta}{2}=\bar{X}\Rightarrow\hat{\theta}=2\bar{X}-1$$

④设总体x的均值μ和方差σ^2都存在，但是均值μ和方差σ^2未知，设$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$是来自x的样本，试求μ和σ^2的矩估计量

解：

样本均值代替总体均值

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\hat{\mu}$$

样本方差代替总体方差

$$\bar{s}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\hat{\sigma}^2$$

⑤设总体X的样本为$X_1,\cdots,X_n$，易得下列常见分布中有关未知参数的矩估计：

（1)参数为p的两点分布$Bin(1,p)$: $\hat{p}=\bar{X}$

（2)参数为λ的Poisson分布：$\hat{\lambda}=\bar{X}$

（3)均匀分布 ⊙ $X\sim Uniform(a,b)$其中a和b均为未参数，则$\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{3}S_n;\hat{b}=\bar{X}+\sqrt{3}S_n$

⊙ $X\sim Uniform(0,\theta)$，则$\hat{\theta}=2\bar{X}$，

⊙离散型均匀分布$P(X=k)=\frac{1}{M}$,则$\widehat{M}=2\bar{X}-1$

（4）参数为θ的指数分布：$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\cdot 1_{(x>0)}$，$\theta>0$: $\hat{\theta}=\bar{X}$

（5）设$\mu=EX,\sigma^2=DX$，则$\hat{\mu}=\hat{X};\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=S_n^2$

参数估计（二）

最大似然估计	构造似然函数，进而估计未知参数
步骤	①构造关于样本的似然函数 ②对似然函数取对数（对数似然函数），然后求导 ③令导数为零，得到最大似然估计值
	注意：可能存在对数似然函数导数不为零的情况
似然函数	将每一个样本的概率相乘，得到的函数

题型一：对数似然函数的导数存在等于零的情况

①设总体的分布律为

X	1	2	3
P	θ	θ	$1-2\theta$

现有样本：1，1，1，3，1，2，3，2，2，1，2，2，3，1，1，2，求得矩估计量和最大似然估计值

解：

（1）

$$EX=\theta+2\theta+3(1-2\theta)=3-3\theta=\bar{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{3-\bar{X}}{3}$$

（2）

似然函数

$$L=P(x_1=1,\dots,x_{16}=2)=P(x_1=1)P(x_2=1)\dots P(x_{16}=2)=\theta^7\theta^6(1-2\theta)^3$$

对数似然函数

$$\ln L=13\ln\theta+3\ln(1-2\theta)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=0=\frac{13}{\theta}-\frac{6}{1-2\theta}$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{13}{23}$$

②设总体得概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1},0<x<1\\ 0,\text{else}\end{cases}$$

现测得得8个数据为：0.6、0.4、0.8、0.6、0.8、0.7、0.6、0.6，求θ的矩估计量和最大似然估计量

解：

（1）

$$EX=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}\,\mathrm{d}x=\frac{\theta}{\theta+1}=\bar{X}$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}=1.76$$

（2）

似然函数

$$L=\theta^n\left(\prod_{i=1}x_i\right)^{\theta-1},$$

对数似然函数

$$\ln L=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}=0$$
$$\Rightarrow \hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

题型二：对数似然函数的导数不存在等于零的情况

①请求出均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta},0<x<\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

当中的未知参数θ的最大似然估计

解：

似然函数为：

$$L=\frac{1}{\theta^n}\quad,\ 0<x_1,x_2,\cdots x_n\le\theta$$

记：$max(x_1,x_2,\cdots x_n)=x_{(n)}$

$$L=\frac{1}{\theta^n}\ ,\ x_{(n)}\le\theta$$
$$\hat{\theta}=max(x_1,x_2,\cdots x_n)$$

②设总体服从Gamma分布，密度函数$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x},x>0$；$\alpha>0$，$\beta>0$.

若α是已知常量，求未知参数β的极大似然估计

解：

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x_i^{\alpha-1}e^{-\beta x_i}$$
$$\ln L(\beta)=n\alpha\ln\beta+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\beta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln\Gamma(\alpha)$$

令$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n\alpha}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$得$\hat{\beta}_{MLE}=\frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{\alpha}{\bar{X}}$

特别地取$\alpha=1$即得单参数β的指数分布，$\hat{\beta}_{MLE}=\frac{1}{\bar{X}}$

极大似然估计的性质	（1）不变性性质 定理：总体X的概率函数为$f(x;\theta)$，未知参数$\theta\in\Theta$,$\hat{\theta}$为θ的极大似然估计，函数$u=u(\theta)$具有单值反函数$\theta=\theta(u)$，则$\hat{u}=u(\hat{\theta})$是$u(\theta)$的极大似然估计 说明：①极大似然估计的不变性性质可用于求未知参数的函数的极大似然估计 ②矩估计无不变性性质 （2）渐近正态性（不加证明地给出下列定理） 定理：设X具有概率函数$f(x;\theta)$，未知参数$\theta\in\Theta$，Θ非退化，θ的真值θ_0是Θ的一个内点， 且对任意$\theta\in\Theta$，满足如下条件； 1）$\ln f(x;\theta)$关于θ的1，2，3阶偏导数均存在； 2）$\left\lvert\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}\right\rvert<F_1(x),\left\lvert\frac{\partial^2 f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right\rvert<F_2(x),\left\lvert\frac{\partial^3\ln f(x;\theta)}{\partial\theta^3}\right\rvert<F_3(x)$其中$F_1(x)$和$F_2(x)$黎曼可积， $E[F_3(X)]<M,M$与θ无关； 3）$0<I(\theta)=E\left[\frac{\partial\ln f(X;\theta)}{\partial\theta}\right]^2<+\infty,I(\theta)$称为Fisher信息量.则 （1）$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=0$存在一致解$\hat{\theta}_n^*$，即$\forall\varepsilon>0$有$\lim_{n\to\infty}P\{\lvert\hat{\theta}_n^*-\theta_0\rvert>\varepsilon\}=0$ （2）$\hat{\theta}_n^*$的极限分布为正态分布$N\left[\theta_0,\frac{1}{nI(\theta_0)}\right]$

		设总体X的样本为$X_1,\cdots,X_n$，易得下列常见分布中有关未知参数的极大似然估计： （1)参数为p的两点分布$Bin(1,p)$: $\hat{p}=\bar{X}$ （2)参数为λ的Poisson分布：$\bar{\lambda}=\bar{X}$ （3)参数为θ的指数分布：$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\cdot 1_{(x>0)}$，$\theta>0$: $\hat{\theta}=\bar{X}$ （4)正态分布$N(\mu,\sigma^2)$: $\hat{\mu}=\hat{X};\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=S_n^2$ （5)均匀分布 ⊙ $X\sim Uniform(a,b)$，其中a和b均为未参数，则$\hat{a}=X_{(1)}=\min\{X_1,\cdots,X_n\};\hat{b}=X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ ⊙ $X\sim Uniform(0,\theta)$，则$\hat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$， ⊙离散型均匀分布$P(X=k)=\frac{1}{M}$,则$\widehat{M}=X_{(n)}$

参数估计（三）

估计量的评判标准	
无偏估计	如果估计量$\hat{\theta}$的数学期望存在，且$E(\hat{\theta})=\theta$，则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量 若$E\hat{\theta}\neq\theta$, 则称$\hat{\theta}$为θ的有偏估计（Biased Estimator); 若$\hat{\theta}$为θ的有偏估计，但满足$\lim\limits_{n\to\infty}E\hat{\theta}=\theta$,则称$\hat{\theta}$为$\theta$的渐近无偏估计 无偏性反映了估计量的取值在真值$\theta$周围摆动
有效估计	假设$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$都是无偏估计量，如果$D(\hat{\theta}_1)\leq D(\hat{\theta}_2)$成立，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效 设$\hat{\theta}$是未知参数$\theta$的一个估计，则称$R(\theta,\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2$是$\hat{\theta}$的均方误差（Meas Squqred Error); $b(\theta,\hat{\theta})=E(\hat{\theta})-\theta$是$\hat{\theta}$的偏差.显然有$R(\theta,\hat{\theta})=D(\hat{\theta})+b^2(\theta,\hat{\theta})$ 设$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$为θ的两个无偏估计，且方差均有限，若满足$D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效. 注意：只能在无偏估计中比较哪个更有效
相合估计（一致估计）	假设$\hat{\theta}$为θ的估计量，如果$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\lvert\hat{\theta}-\theta\rvert<\varepsilon\}=1$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的相合估计量(估计量依概率收敛于$\theta$) 设总体$X$具有概率函数$f(x;\theta)$，未知参数$\theta\in\Theta$，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的一个估计 （1）若$\forall\varepsilon>0$有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\lvert\hat{\theta}-\theta\rvert>\varepsilon\}=0$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的弱相合估计， 也称为相合或一致估计 （2）若$P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\theta}=\theta\right\}=1$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的强相合估计 强相合估计必是弱相合估计
优效估计	对于任何一个估计量α，估计量的方差均存在下列不等式： $V(\alpha)\geq\dfrac{1}{E\left\{\left(\dfrac{\partial\ln p(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2\right\}}$ 其中，$\dfrac{1}{E\left\{\left(\frac{\partial\ln p(y,\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2\right\}}$为克拉美罗界（CLRB） 如果存在某个估计量能使得等号成立，则称该估计量为优效估计

定理：样本方差是总体方差的无偏估计，但不是矩估计；总体方差的矩估计为： $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{n}}(X_i-\bar{X})^2$
定理：样本均值是总体均值的无偏估计量 $E(\bar{X})=E\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\mu$
定理：有偏估计一定不是有效估计

题型一：考查无偏估计和有效估计

①设$X_1,X_2,\cdots X_n$均是来自均值为θ的指数分布的样本，其中θ未知。设有估计量

$$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)$$

$$T_2=\frac{1}{5}(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)$$

$$T_3=\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$$

指出哪些估计量是无偏估计；指出哪一个估计量是有效估计

解：

$E(X)=\theta$，$D(X)=\theta^2$

$$E(T_1)=\frac{\theta}{3}+\frac{2}{3}\theta=\theta$$

$$E(T_2)=\frac{1}{5}(\theta+2\theta+3\theta+4\theta)=2\theta$$

$$E(T_3)=\frac{1}{4}(\theta+\theta+\theta+\theta)=\theta$$

有偏估计不能作为有效估计

$$D(T_1)=\frac{1}{36}D(X_1+X_2)+\frac{1}{9}D(X_3+X_4)=\frac{5}{18}\theta^2$$

$$D(T_3)=\frac{1}{16}D(X_1+X_2+X_3+X_4)=\frac{1}{4}\theta^2$$

②设$\hat{\theta}$是θ参数的无偏估计，且有$D(\hat{\theta})>0$，试证明$\hat{\theta}^2$不是θ^2的无偏估计

证明：

$$E(\hat{\theta}^2)=D(\hat{\theta})+\left(E(\hat{\theta})\right)^2=D(\hat{\theta})+\theta^2\neq\theta^2$$

③设从均值为μ，方差为σ^2的总体中分别抽取容量为n_1,n_2的两组独立样本。$\bar{X}_1,\bar{X}_2$分别是两组样本的均值。请证明对于任意常数a,b，$Y=a\bar{X}_1+b\bar{X}_2$都是μ的无偏估计（$a+b=1$），并确定常数a,b的值，使得$D(Y)$达到最小

证明：

$$E(\bar{X}_1)=\mu=E(\bar{X}_2)$$

$$E(Y)=aE(\bar{X}_1)+bE(\bar{X}_2)=(a+b)\mu$$

$$D(\bar{X}_1)=\frac{\sigma^2}{n_1}$$

$$D(\bar{X}_2)=\frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$D(Y)=a^2D(\bar{X}_1)+b^2D(\bar{X}_2)=\left(\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2}\right)\sigma^2=\left(\frac{a^2}{n_1}+\frac{(1-a)^2}{n_2}\right)\sigma^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}D(Y)=\left(\frac{2a}{n_1}+\frac{2(1-a)}{n_2}\right)\sigma^2=0\Rightarrow a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

④设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的样本，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$则 B

A.$X_1+X_2+X_3+X_4$是μ的无偏估计

B.$\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$是$\mu$的无偏估计

C.X_1^2是σ^2的无偏估计

D.$\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}\right)^2$是$\mu$的无偏估计

解：

$$E(X_1^2)=D(X_1)+E^2(X_1)=\sigma^2+\mu^2$$

$$E\left(\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}\right)^2\right)=D\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}\right)+E^2\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}\right)\neq\mu$$

⑤设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，则样本方差S^2是 B

A.μ的无偏估计

B.σ^2的无偏估计

C.μ的矩估计

D.σ^2的矩估计

⑥设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，证明

（1）$\hat{\mu}=\bar{X}$是μ的无偏估计；

（2）$\hat{\sigma}^2=S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$是$\sigma^2$的渐近无偏估计

证明：（1）显然有$E\hat{\mu}=E\bar{X}=\mu$

$(2)\because \frac{nS_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$\therefore E\left(\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\right)=n-1$

因$ES_n^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$，故$S_n^2$不是$\sigma^2$的无偏估计，但$\lim\limits_{n\to\infty}ES_n^2=\sigma^2$，因此$S_n^2$是$\sigma^2$的渐近无偏估计

⑦设总体$X\sim P(\lambda)$，未知参数$\lambda>0$，$X_1,\cdots,X_n$为X的一组样本，求λ^2的无偏估计

解：由$E\bar{X}=D\bar{X}=\lambda$得$E\left[(\bar{X})^2\right]=D\bar{X}+(E\bar{X})^2=\frac{\lambda}{n}+\lambda^2$

$\Rightarrow E\left[(\bar{X})^2\right]-\frac{\lambda}{n}=E\left[(\bar{X})^2\right]-\frac{E\bar{X}}{n}=E\left[(\bar{X})^2-\frac{\bar{X}}{n}\right]$

从而知$(\bar{X})^2-\frac{\bar{X}}{n}$是$\lambda^2$的无偏估计

题型二：考查一致估计

①设总体$X\sim U(\theta,2\theta)$，$\theta>0$未知，$X_1,\cdots,X_n$为样本

（1）证明$\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}}{3}$是$\theta$的无偏估计和相合估计

（2）求θ的极大似然估计，并判断其无偏性和相合性

解：（1）$\because E\hat{\theta}=\frac{2}{3}E\bar{X}=\frac{2}{3}\times\frac{3\theta}{2}=\theta$

$\therefore \hat{\theta}=\frac{2}{3}\bar{X}$是无偏估计

$\because D\hat{\theta}=\frac{4}{9}D\bar{X}=\frac{4}{9}\times\frac{\theta^2}{12n}=\frac{1}{27n}\theta^2\xrightarrow{n\to\infty}0$是相合估计

（2）$L=\theta^{-n}\cdot I_{\{\theta<x_{(1)}\leqslant x_{(n)}<2\theta\}}\Rightarrow\hat{\theta}_{MLE}=X_{(n)}/2$

$\because f_{X_{(n)}}(x)=n\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}=\frac{n}{\theta^n}(x-\theta)^{n-1},(\theta<x<2\theta)$

$\therefore E(\hat{\theta}_{MLE})=\frac{2n+1}{2(n+1)}\theta\to\theta,D(\hat{\theta}_{MLE})=\frac{n\theta^2}{4(n+1)^2(n+2)}\to0$

故θ的极大似然估计不是无偏估计，但它是相合估计

参数估计（四）

充分统计量定义	X是从具有分布族$\{F(x,\theta),\theta\in\Theta\}$的总体中抽取的一组样本， $T(X)$是一个统计量（可以是向量），若给定$T(X)$=t，X的条件分布（离散型变量为条件概率，连续型变量为条件密度）与参数θ无关，则称统计量$T(X)$是分布族$\{F(x,\theta),\theta\in\Theta\}$的充分统计量或称$T(X)$是$\theta$的充分统计量 $\Leftrightarrow f\left(x_1,\cdots,x_n \mid T=t\right)=h\left(x_1,\cdots,x_n\right)$,与$\theta$无关. 即已知$T(X)=t$时，$X$的条件分布中已无$\theta$的剩余信息。 若$\theta$的任意一个充分统计量均可表示为$T(X)$的函数，则称$T(X)$为$\theta$的最小充分统计量（Minimal Sufficient Statistics)
寻找充分统计量的简单而又重要的方法	定理：(因子分解定理，也称Fisher-Neyman准则）
完备统计量	定义：设$\{F(x,\theta),\theta\in\Theta\}$是随机变量$X$的分布族，若任给$\theta\in\Theta$及任意函数$\varphi(x)$, 当$E\left[\varphi(X)\right]=\int\ \varphi(x)\,f(x;\theta)dx=0$时，必有$P\left[\varphi(X)=0\right]=1$， 则称$\{F(x,\theta),\theta\in\Theta\}$是完备分布族， 若统计量T的分布族$\left\{g(t;\theta),\theta\in\Theta\right\}$完备，则称$T$是$\theta$的完备统计量 注:对任意$\varphi(t)$及任意$\theta\in\Theta$，$E\left[\varphi(T)\right]=\int\ \varphi(t)\cdot g(t;\theta)dt=0$ 可理解为$\varphi(t)$与T分布族$\left\{g(t;\theta),\theta\in\Theta\right\}$完全正交.$T$是$\theta$的完备统计量$\Leftrightarrow$若$\int\ \varphi(t)\cdot g(t;\theta)dt=0$，必有$\varphi(t)=0$ 即不存在与T的分布族正交的非零函数， 因此要求T的分布族$\left\{g(t;\theta),\theta\in\Theta\right\}$是一个完全正交系
	定义：设θ为未知参数，总体X具有概率函数$f(x,\ \theta)$. 在θ的具有有限方差的所有无偏估计中方差最小的无偏估计称为θ的最小方差无偏估计，记为MVUE -(Minimum Variance Unbiased Estimator) 定义：设Θ为未知参数θ的空间，若对任意$\theta\in\Theta$，在θ的具有有限方差的所有无偏估计中方差最小的无偏估计称为θ的一致最小方差无偏估计，记为UMVUE -（Uniform Minimum Variance Unbiased Estimator） 最小方差无偏估计和一致最小方差无偏估计都是均方误差意义下的最优估计
	定理：设总体X的数学期望μ和方差σ^2均存在，$X_1,\cdots,X_n$是来自X的样本， 则$\bar{X}$是参数μ的最小方差线性无偏估计 证明：不妨设$Y=\sum_{i=1}^n\alpha_i X_i$，其中$\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$ 则显然Y是μ的线性无偏估计 $DY=\sum_{i=1}^n\alpha_i^2\,DX_i=\sigma^2\sum_{i=1}^n\alpha_i^2\geqslant\sigma^2\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\right)^2=\frac{1}{n}\sigma^2$ 当且仅当$\alpha_i=\frac{1}{n},(i=1,2,\cdots,n)$时等号成立

题型1：利用因子分解定理判定充分统计量（必考）

因子分解定理

（1）连续型情况

设总体X具有分布密度函数$f(x,\theta)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$是一个样本，$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个统计量，则T是θ的充分统计量的充要条件是：样本的联合分布密度函数可以分解为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)g[T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\theta]$$

其中，h是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的非负函数且与θ无关，g仅通过T依赖于$x_1,x_2,\cdots,x_n$。

（2）离散型情况

设总体X的分布律$P\{X=x^{(i)}\}=p\left(x^{(i)},\theta\right),(i=1,2,\cdots)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$是一个样本，$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个统计量，则$T$是$\theta$的充分统计量的充要条件是：样本的联合分布律可表示为

$$\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)g[T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\theta]$$

其中，h是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的非负函数且与θ无关，g仅通过T依赖于$x_1,x_2,\cdots,x_n$。

题型1：利用因子分解定理判定充分统计量（必考）

【T1-1】假设总体X服从正态分布$N(\mu_0,\sigma^2)$，μ_0为已知常数。$(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$为来自总体的样本，试求未知参数σ^2的充分统计量。

解：样本$(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$的联合分布密度为

$$L(\sigma^2)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$$

若取

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$$

$$g[T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\sigma^2]=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n}e^{-\frac{nT}{2\sigma^2}}$$

则有

$$L(\sigma^2)=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)g[T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\sigma^2]$$

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

由因子分解定理知，$T(X_1,X_2,\dots,X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$是参数$\sigma^2$的充分统计量。

型1：利用因子分解定理判定充分统计量（必考）

【T1-2】设总体X服从正态分布$N(\mu,1)$，$(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$为来自总体的样本，试求未知参数μ的充分统计量。

解：样本$(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$的联合分布密度为

$$L(\mu)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu)^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2-\frac{n}{2}(\bar{x}-\mu)^2}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}-\mu)^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

取

$$T(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

$$h(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$g[T(x_1,x_2,\dots,x_n);\mu]=e^{-\frac{n}{2}(T-\mu)^2}$$

有

$$L(\mu)=h(x_1,x_2,\dots,x_n)g[T(x_1,x_2,\dots,x_n);\mu]$$

由因子分解定理知，$T(X_1,X_2,\dots,X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$是参数$\mu$的充分统计量。

题型2：利用指数型分布族判定充分完备统计量（必考）

设总体X的分布密度$f(x;\boldsymbol{\theta})$为指数族分布，即样本的联合分布密度具有如下形式：

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\boldsymbol{\theta}) = C(\boldsymbol{\theta})e^{\sum_{j=1}^{m} b_j(\boldsymbol{\theta})T_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)}h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^T,\boldsymbol{\theta}\in\Theta$。如果$\Theta$中包含一个$m$维矩阵，而且$\boldsymbol{B}=[b_1(\boldsymbol{\theta}),b_2(\boldsymbol{\theta}),\cdots,b_m(\boldsymbol{\theta})]^T$的值域包含有一个$m$维开集，则$\boldsymbol{T}=[T_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),T_2(X_1,X_2,\cdots,X_n),\cdots,T_m(X_1,X_2,\cdots,X_n)]^T$是参数$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^T$的充分完备统计量。

【T1-3】设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自两点分布$B(1,p)$的样本。

（1）试求参数p的充分完备统计量；

（2）试求p^2的极大似然估计量。

$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$　　$\lambda^x=e^{x\ln\lambda}$

解：（1）样本的联合分布律为

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}=(1-p)^n\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}=(1-p)^n e^{\sum_{i=1}^n x_i\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}$$

题型2：利用指数型分布族判定充分完备统计量（必考）

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=(1-p)^n e^{\sum_{i=1}^n x_i\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}$$

若取

$$C(p)=(1-p)^n$$

$C(\boldsymbol{\theta})e^{\sum_{j=1}^{m} b_j(\boldsymbol{\theta})T_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)}h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$$

$$b(p)=n\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

因此，样本均值$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i=\bar{X}$是参数$p$的充分完备统计量。

题型2：利用指数型分布族判定充分完备统计量（必考）

（2）

$$L(p)=p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^n x_i\cdot\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^n x_i\right)\cdot\ln(1-p)$$

令

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{1-p}=0$$

解得

$$\hat{p}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i=\bar{X}$$

根据极大似然估计的函数性，可知p^2的极大似然估计为

$$\hat{p}_L^2=\bar{X}^2$$

假设检验（一）

1. 假设检验：根据样本来判断所提出的假设是否正确
例：一个车间的机器正常运转时，产生的盐的净重，均值为$0.5kg$，标准差为$0.015kg$
某天，根据样本判断机器是否正常运转，一般认为标准差比较稳定，不会变化。
0.497，0.506，0.518，0.52，0.49，0.51，0.515
解：
①原假设：总体均值等于$0.5kg$
②备择假设：总体均值不等于$0.5kg$
③根据样本构造一个标准（统计量），当统计量处于某个区间（拒绝域）时，则拒绝原假设

求解方法：
根据题意写出原假设和备择假设
确定统计量以及拒绝域
根据样本数据判断是否接受原假设

2. 常用统计量（单个正态总体的均值和方差的假设检验）
①总体方差σ^2已知，关于总体均值μ的假设

原假设	备择假设	拒绝域
$\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$z \ge z_\alpha$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$z \le -z_\alpha$
$\mu = \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$	$\lvert z\rvert \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$Z=\frac{\bar X-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$
$\bar X$为样本均值
σ为总体方差
μ_0为假设均值
n为样本个数

②总体方差σ^2未知，关于总体均值μ的假设

原假设	备择假设	拒绝域
$\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$
$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$t \le -t_\alpha(n-1)$
$\mu = \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$	$\lvert t\rvert \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$$t=\frac{\bar X-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$
$\bar X$为样本均值
S为样本标准差
μ_0为假设均值
n为样本个数

③总体均值μ未知，关于总体方差σ^2的假设

原假设	备择假设	拒绝域
$\sigma^2 \le \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$
$\sigma^2 \ge \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \le \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$
S为样本标准差
σ_0为假设方差
n为样本个数

3. 例题
①某糖厂用自动打包机装糖，已知每袋糖的重量服从正态分布$N(\mu,4)$，现随机地抽取了9袋，称出它们的重量如下：
50、48、49、52、51、47、49、50、50
问在显著性水平$\alpha=0.05$下能否认为每袋糖的平均重量为50千克
解：
$H_0:\mu=50$
$H_1:\mu\ne 50$
总体方差σ^2未知，关于总体均值μ的假设
拒绝域：$\left|\frac{\bar X-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \ge z_{\frac{\alpha}{2}}=1.645$
$\bar x=49.5556$
$\mu_0=50$
$\sigma=2$
$n=9$
$$\frac{\bar X-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=-0.6667$$
未落入拒绝域，接受H_0

②某批矿砂得五个样本的含金量为：
3.25、3.27、3.24、3.26、3.24
设含金量服从正态分布，问在显著性水平下$\alpha=0.1$能否认为该批矿砂的含金量的均值为3.25
解：
$H_0:\mu=3.25$
$H_1:\mu\ne 3.25$
总体方差σ^2未知，关于总体均值μ的假设
拒绝域：$\left|\frac{\bar X-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=2.1318$
$\bar x=3.252$
$\mu_0=3.25$
$s=0.013$
$n=5$
$$\frac{\bar X-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=0.344$$
未落入拒绝域，接受H_0

③某种螺丝的直径服从$X\sim N(\mu,64)$，先从一批螺丝中抽取10个测量直径，其样本均值为$\bar x=575.2$，方差$s^2=68.16$。问能否认为这批螺丝的直径的方差仍为64，$\alpha=0.05$。
解：
$H_0:\sigma^2=64$
$H_1:\sigma^2\ne 64$
总体均值μ未知，关于总体方差σ^2的假设
$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$
拒绝域：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)=2.7$
$n=10$
$\chi^2=9.585$
未落入拒绝域，接受H_0

⑧假设检验的两类错误：
H_0为真，H_0否定了，称为第一类错误（弃真）
H_0为假，H_0接受了，称为第二类错误（取伪）

H_0: 患有癌症
H_1: 不患有癌症

在假设检验当中，α,β分别代表第一类错误和第二类错误概率，则当样本容量一定时，下列说法正确的是
A.α减小，β也减小
B.α增大，β也增大
C.α,β一个增大，另外一个减小

假设检验（二）

两个总体的假设检验（比较两个正态总体的均值和方差的大小）

求解方法：
根据题意写出原假设和备择假设
确定统计量以及拒绝域
根据样本数据判断是否接受原假设

1. 总体方差σ_1^2,σ_2^2已知，α为显著性水平，对均值的检验

原假设	备择假设	拒绝域
$\mu_1-\mu_2\le\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$	$z\ge z_\alpha$
$\mu_1-\mu_2\ge\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$	$z\le -z_\alpha$
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\ne\delta$	$\lvert z\rvert\ge z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

n_1,n_2表示样本个数

2. 总体方差σ_1^2,σ_2^2未知，对均值的检验

原假设	备择假设	拒绝域
$\mu_1-\mu_2\le\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$	$t\ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\mu_1-\mu_2\ge\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$	$t\le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\ne\delta$	$\lvert t\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$

$$t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

S_1,S_2为样本标准差

3. 总体均值μ_1,μ_2未知，对方差的检验

原假设	备择假设	拒绝域
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F\ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$	$F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

4. 例题
①用两种方法测得冰的融化热数据如下：

方法A：79.98,80.04,80.02,80.04,80.03,80.03,80.04,79.97,80.05,80.03,80.02,80,80.02
方法B：80.02,79.94,79.98,79.97,79.97,80.03,79.95,79.97
假设两组样本均来自正态总体，且两组样本相互独立。$\alpha = 0.01$，检验：
$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$
$H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$
解：
$n_1 = 13$，$n_2 = 8$，$\alpha = 0.01$
$F = \frac{S_{\mathrm{A}}^2}{S_{\mathrm{B}}^2} = 0.64$
$F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.005}(12,7) = 8.18$
$0.64 < 8.18$
拒绝域为：
$F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
所以接受原假设

假设检验（三）

非参数假设检验：前面章节所涉及的假设检验，都是在正态总体的前提下，进行检验；但是如果总体不是服从正态分布，则假设检验称为非参数假设检验

1. χ^2拟合检验法、秩和检验、P值检验
单个分布的χ^2拟合检验法
①下表列出了某一地区在夏季的一个月中由100个气候站报告的雷暴次数

i	0	1	2	3	4	5	≥ 6
f_i	22	37	20	13	6	2	0

其中f_i是报告雷暴次数为i的气候站个数。试用χ^2拟合检验法检验雷暴的次数X是否服从均值$\lambda = 1$的泊松分布（$\alpha = 0.05$）
解：
第一步：画出χ^2检验表
第二步：比较$\Sigma \frac{f_1^2}{np_\mathrm{i}} - n$和$\chi_\alpha^2(k-1)$

$p\{X = \mathrm{i}\} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{i}!}$

	f_i	p_i	np_i	$f_i^2/n\,p_i$
$\{X=0\}$	22	e^{-1}	36.788	13.16
$\{X=1\}$	37	e^{-1}	36.788	37.21
$\{X=2\}$	20	$\mathrm{e}^{-1}/2$	18.394	21.75
$\{X=3\}$	13	$\mathrm{e}^{-1}/6$	6.131	
$\{X=4\}$	6	$\mathrm{e}^{-1}/24$	1.533	54.92
$\{X=5\}$	2	$\mathrm{e}^{-1}/120$	0.307	
$\{X\geq 6\}$	0	$1-\Sigma p_i$	0.059	

n是气候站的个数

为了确保$np_i \geq 5$，所以合并之后的数据组数为4，$k = 4$
$\Sigma \frac{f_1^2}{np_\mathrm{i}} - n = 127.04 - 100 > \chi_\alpha^2(k-1) = 7.815$
所以拒绝原假设

随机过程基本概念

分类	
随机过程	中国某地区一年中，每时每刻的温度变化（参数集和状态空间取值都是连续的）
随机序列	中国某地区一年中，每一天的最高温度变化（参数集的取值是离散的）
链	不是随机过程也不是随机序列（马尔可夫链）

状态空间：温度取值
参数集：时间

随机过程的分布函数	
①一维分布函数	$F(t,x)=P\{X(t)<x\}$
②二维分布函数	$F(s,t;x,y)=P\{X(s)<x,X(t)<y\}$

随机过程的数字特征	
①均值函数	$m(t)=E(X(t))$
②方差函数	$D(t)=E(X^2(t))-m^2(t)=C(t,t)$
③协方差函数	$C(s,t)=E(X(s)X(t))-m(s)m(t)$
④相关函数	$R(s,t)=E(X(s)X(t))$
⑤互协方差函数	$C_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-E(X(s))E(Y(t))$
⑥互相关函数	$R_{XY}(s,t)=E(X(s)Y(t))$

综上所述：随机过程的数字特征基本都和数学期望相关，具体数学期望怎么展开，需要根据随机过程的表达式来确定

题型一：求随机过程的数字特征

①随机相位正弦波$X(t)=\alpha\cos(\beta t+\theta)$，$-\infty<t<+\infty$

其中，α,β为常数，θ是在$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量，求$X(t)$的均值函数、方差函数、相关函数、协方差函数

解：

θ的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi},0\le\theta\le 2\pi\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

均值函数为：

求均值和相关函数的时候要搞清楚谁是随机变量

$$E(X(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)f(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\alpha\cos(\beta t+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$$

$$R(s,t)=E(X(s)X(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)X(s)f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\alpha^2\cos(\beta t+\theta)\cos(\beta s+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\alpha^2}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\beta(t-s)+\cos(\beta(t+s)+2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\alpha^2}{2}\cos\beta(t-s)$$

$$C(s,t)=E\big(X(s)X(t)\big)-m(s)m(t)=R(s,t)$$

$$D(t)=C(t,t)=\frac{\alpha^2}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\big)$$

当固定时间，则随机过程退化成了一个随机变量

②设随机过程$X(t)=V\cdot t$，其中V是在$(0,1)$上服从均匀分布的随机变量，求过程$X(t)$的均值和自相关函数

解：

已知随机变量V的概率密度为：

$$f(v)=\begin{cases}1, v\in(0,1)\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$E\big(X(t)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)f(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^1 vt\,\mathrm{d}v=\frac{t}{2}$$

$$R_X(t_1,t_2)=E\left(X(t_1)Y(t_2)\right)=E(Vt_1Vt_2)=\int_0^1 v^2t_1t_2\,\mathrm{d}v=\frac{t_1t_2}{3}$$

③设两个连续时间的随机相位信号

$X(t)=\sin(w_0t+\Phi)$

$Y(t)=cos(w_0t+\Phi)$

其中w_0为常数，Φ在$(-\pi,\pi)$上服从均匀分布，求互协方差函数

解：

$$E\big(X(t)\big)=E\big(\sin(w_0t+\Phi)\big)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(w_0t+\Phi)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\varphi=0$$

$$E\big(Y(t)\big)=E\big(\cos(w_0t+\Phi)\big)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(w_0t+\Phi)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\varphi=0$$

$$C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-E\left(X(t_1)\right)E\left(Y(t_2)\right)$$

$$=R_{XY}(t_1,t_2)=E\left(X(t_1)Y(t_2)\right)=E\big(\sin(w_0t_1+\Phi)\cos(w_0t_2+\Phi)\big)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(w_0t_1+\Phi)\cos(w_0t_2+\Phi)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(w_0(t_2-t_1)\right)+\sin\big(w_0(t_1+t_2)+2\Phi\big)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(w_0(t_2-t_1)\right)+\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\big(w_0(t_1+t_2)+2\Phi\big)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(w_0(t_2-t_1)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

④设随机过程$X(t)$的均值与自相关函数为

$m_X=5\sin t$ ，$R_X(t,s)=3\mathrm{e}^{-0.5(s-t)^2}$

试求$Y(t)=X'(t)$的均值和自相关函数

解：

$E\big(Y(t)\big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E\big(X(t)\big)=5\cos t$

$R_Y(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}R_X(t,s)$

⑤随机过$X(t)=A\cos wt$，$Y(t)=(1-B)\cos wt$，其中A,B同为均值为2，方差为σ^2的高斯随机变量，A,B统计独立，w为非零常数。求两个随机过程的均值、互相关函数、互协方差函数

解：

$E\big(X(t)\big)=E(A\cos wt)=2\cos wt$

$E\big(Y(t)\big)=E\big((1-B)\cos wt\big)=-\cos wt$

$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left(X(t_1)Y(t_2)\right)=E\big(A\cos wt_1\times(1-B)\cos wt_2\big)=-2\cos wt_1\cos wt_2$

$C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-E\big(X(t)\big)E\big(Y(t)\big)=0$

题型二：求随机过程的一维或者高维分布函数

①通过投掷一个硬币定义一个随机过程：

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, 出现正面\\ 2t, 出现反面\end{cases}$$

（1）$F\left(\frac{1}{2},x\right)$，$F(1,x)$

（2）$F\left(\frac{1}{2},1,x,y\right)$

解：

（1）

$F\left(\frac{1}{2},x\right)$相当于是求$X\left(\frac{1}{2}\right)$的分布函数，这里要注意$X\left(\frac{1}{2}\right)$已经是一个随机变量

$$X\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}, 出现正面\\ 1, 出现反面\end{cases}$$

$X\left(\frac{1}{2}\right)$	0	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$F\left(\frac{1}{2},x\right)=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)<x\right\}=\begin{cases}0，\ -\infty<x\le 0\\ \frac{1}{2},0<x\le 1\\ 1，\ 1<x<+\infty\end{cases}$$

（2）

$$F\left(\frac{1}{2},1,x,y\right)=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)<x,X(1)<y\right\}$$

先求$X\left(\frac{1}{2}\right)$、$X(1)$的联合分布律

$X\left(\frac{1}{2}\right)$ $X(1)$	-1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

②随机过程$X(t)=\frac{\pi}{2}\theta t^2$的分布律如下表所示，$\theta$为随机变量

θ	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（1）绘制$X(t)$样本函数草图

（2）求$X(t)$一维分布律

（3）求$X(t)$一维特征函数

解：

（2）

$X(t)$	$-\frac{\pi}{2}t^2$	0	$\frac{\pi}{2}t^2$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（3）$E\left(\mathrm{e}^{juX(t)}\right)=\frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-ju\frac{\pi}{2}t^2}+\mathrm{e}^{ju0}+\mathrm{e}^{ju\frac{\pi}{2}t^2}\right]=\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}ut^2\right)+\frac{1}{3}$

平稳随机过程基础（一）

平稳随机过程	
严平稳	设$X(t)$是一个随机过程，如果对任意的$t_1,t_2,t_3,\cdots t_n$;以及任意的τ n维随机变量$(X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_n))$与$n$维随机变量$(X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\dots,X(t_n+\tau))$有相同的$n$维联合分布函数，则称随机过程$X(t)$为严平稳过程
宽平稳	如果随机过程$X(t)$是一个二阶矩过程，且满足 均值$E\big(X(t)\big)=$常数 自相关函数$R(t,t+\tau)=R(\tau)$ 则称随机过程$X(t)$为宽（广义）平稳随机过程
	一般而言，严平稳随机过程不一定是宽平稳随机过程。这是因为，严平稳随机过程只是涉及有限维分布，而不要求一阶矩和二阶矩存在。 宽平稳随机过程也不一定是严平稳。
	定理：严平稳随机过程$X(t)$是宽平稳的充要条件是二阶矩$E\big(X^2(t)\big)$存在 定理：正态过程是严平稳的充要条件是它为宽平稳过程。即正态过程，严平稳和宽平稳等价
联合平稳	设随机过程$X(t)$和$Y(t)$都是平稳过程，如果其互相关函数满足 $R_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(\tau)$ 则称$X(t)$和$Y(t)$为联合平稳随机过程

宽平稳随机过程的数字特征	①$R(0)\geq 0$ ②$\lvert R(\tau)\rvert\leq R(0)$ ③实宽平稳随机过程的自相关函数是偶函数 ④$R(\tau)$连续的充分必要条件是$R(\tau)$在$\tau=0$连续
	定理：平稳随机过程$X(t)$均方连续的充要条件是其自相关函数$R(\tau)$在$\tau=0$连续 定理：平稳随机过程$X(t)$均方可导的充要条件是$R(\tau)$在$\tau=0$处的二阶导数存在 定理：若$X(t)$是均方可导的平稳过程，则其导过程$X'(t)$也是平稳过程
联合平稳随机过程的数字特征	$X(t)$和$Y(t)$为联合平稳随机过程 ①$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)$

题型一：判断随机过程的平稳性（宽平稳和联合平稳）、均方性质
①考察随机相位正弦波$X(t)=a\cos(wt+\theta)$的平稳性
其中a,w为常数，θ在$[0,2\pi]$上服从均匀分布
解：

$$m(t)=\int_0^{2\pi} a\cos(wt+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$$

$$R(t,t+\tau)=E\Big(X(t)\big(X(t+\tau)\big)\Big)=\int_0^{2\pi} a^2\cos(wt+\theta)\cos(w(t+\tau)+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos w\tau+\cos(w(2t+\tau)+2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\cos w\,\tau$$

因此随机相位正弦波为平稳随机过程

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right)$$

②考察随机相位正弦波$X(t)=a\cos(wt+\theta)$的均方连续、均方可积、均方可导性
其中a,w为常数，θ在$[0,2\pi]$上服从均匀分布
解：
因为随机相位正弦波为平稳随机过程
且$R(\tau)$在$\tau=0$处连续，故均方连续、均方可积
$R(\tau)$在$\tau=0$处的二阶导数存在，因此均方可导

③设有随机过程$X(t)=A\cos\pi t+B\sin\pi t$ ，其中A与B独立且都是均值为零，方差为σ^2的正态随机变量
（1）$X(1)$和$X\left(\frac{1}{4}\right)$的概率密度
（2）$X(t)$是否为平稳过程
解：
（1）

$$X(1)=A\cos\pi=-A\sim N(0,\sigma^2)$$

$$X\left(\frac{1}{4}\right)=A\cos\frac{\pi}{4}+B\sin\frac{\pi}{4}=\frac{A+B}{\sqrt{2}}\sim N(0,\sigma^2)$$

（2）$E\big(X(t)\big)=0$

$$R_X(t,t+\tau)=E\big(X(t)X(t+\tau)\big)=E\big((A\cos\pi t+B\sin\pi t)(A\cos\pi(t+\tau)+B\sin\pi(t+\tau))\big)$$

$$=E\big(A^2\cos\pi t\cos\pi(t+\tau)\big)+E(AB\cos\pi t\sin\pi(t+\tau))+E(BA\sin\pi t\cos\pi(t+\tau))$$

$$+E\big(B^2\sin\pi t\sin\pi(t+\tau)\big)$$

$$=\sigma^2\cos\pi t\cos\pi(t+\tau)+\sigma^2\sin\pi t\sin\pi(t+\tau)=\sigma^2\cos\pi\,\tau$$

因此该随机过程为平稳随机过程

④设有一个随机正弦信号$X(t)=V\cos wt$，其中w为常数，V是在$[0,1]$上服从均匀分布的随机变量
（1）画出该随机过程两条样本函数
（2）该随机信号是否宽平稳或者严平稳
解：
（2）$E\big(X(t)\big)=E(V)\cos wt=\frac{1}{2}\cos wt$
均值不稳定，所以该随机过程不是平稳随机过程

⑤设随机过程$X(n)=\sin(2\pi n+\varphi)$ ，$Y(n)=\cos(2\pi n+\varphi)$，其中$\varphi$为$(0,\pi)$上均匀分布的随机变量
（1）求两个随机过程的互相关函数
（2）两个随机过程是否联合平稳
解：
（1）$R_{XY}(n_1,n_2)=E\Big(X(n_1)Y(n_2)\Big)=E\big(\sin(2\pi n_1+\varphi)\cos(2\pi n_2+\varphi)\big)$

$$=\frac{1}{2}E\big(\sin(2\pi n_1+2\pi n_2+2\varphi)+\sin(2\pi n_1-2\pi n_2)\big)=\frac{1}{2}\sin(2\pi n_1-2\pi n_2)=0$$

$$E\big(\sin(2\pi n_1+2\pi n_2+2\varphi)\big)=\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\sin(2\pi n_1+2\pi n_2+2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi n_1+2\pi n_2+t)\,\mathrm{d}t=0$$

（2）$R_X(n_1,n_2)=E\left(X(n_1)X(n_2)\right)=E\big(\sin(2\pi n_1+\varphi)\sin(2\pi n_1+\varphi)\big)$

$$=\frac{1}{2}E\big(\cos(2\pi n_1-2\pi n_2)-\cos(2\pi n_1+2\pi n_2+2\varphi)\big)=\frac{1}{2}\cos(2\pi n_1-2\pi n_2)=\frac{1}{2}$$

$$E\big(\cos(2\pi n_1+2\pi n_2+2\varphi)\big)=\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\cos(2\pi n_1+2\pi n_2+2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi n_1+2\pi n_2+t)\,\mathrm{d}t=0$$

$$R_Y(n_1,n_2)=E\left(Y(n_1)Y(n_2)\right)=E\big(\cos(2\pi n_1+\varphi)\cos(2\pi n_1+\varphi)\big)$$

$$=\frac{1}{2}E\big(\cos(2\pi n_1-2\pi n_2)+\cos(2\pi n_1+2\pi n_2+2\varphi)\big)=\frac{1}{2}$$

可以看出两个信号的均值和相关函数都是平稳的，同时互相关函数也是平稳的，因此二者联合平稳

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\big)$$

⑥设两个联合平稳的随机过程为

$X(t)=a\cos(w_0t+\theta)$

$Y(t)=b\sin(w_0t+\theta)$

其中a,b,w_0为常数，θ是在$[0,2\pi]$上服从均匀分布的随机变量。试求互相关函数$R_{XY}(\tau)$，$R_{YX}(\tau)$

解：

$$R_{YX}(\tau)=E\big(X(t+\tau)Y(t)\big)=E\big(b\sin(w_0t+\theta)\,a\cos(w_0t+w_0\tau+\theta)\big)$$

$$=\frac{ab}{2}E\big(\sin(2w_0t+w_0\tau+2\theta)-\sin w_0\tau\big)=-\frac{ab}{2}\sin w_0\tau$$

$$E\big(\sin(2w_0t+w_0\tau+2\theta)\big)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin(2w_0t+w_0\tau+2\theta)\,\mathrm{d}\theta=0$$

$$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)=\frac{ab}{2}\sin w_0\tau$$

平稳随机过程基础（二）

均方遍历性（各态历经性）	①时间均值 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,\mathrm{d}t$ ②时间自相关函数 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\,\mathrm{d}t$
	如果$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,\mathrm{d}t=m_X$，则称均值具有均方遍历性 如果$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\,\mathrm{d}t=R_X(\tau)$，则称自相关函数具有均方遍历性
	如果平稳过程的均值和自相关函数都具备均方遍历性，则称平稳过程具有均方遍历性，称为均方遍历的平稳随机过程
	定理：平稳随机过程的均值具有均方遍历性的充要条件是 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left(R_X(\tau)-m_x^2\right)\mathrm{d}\tau=0$

题型二：考查随机过程的各态历经、均值或者相关函数的各态历经

①考察随机相位正弦波$X(t)=a\cos(wt+\theta)$的均方遍历性

其中a,w为常数，θ在$[0,2\pi]$上服从均匀分布

解：

方法一：

$$m(t)=\int_0^{2\pi}a\cos(wt+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$$

$$R(t,t+\tau)=\frac{a^2}{2}\cos w\,\tau$$

时间均值

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(wt+\theta)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{w}{a}(\sin(wT+\theta)-\sin(-wT+\theta))}{2T}=0$$

时间自相关均值

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a^2\cos(wt+\theta)\cos(w(t+\tau)+\theta)\,\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{a^2}{2}\int_{-T}^{T}\cos w\tau+\cos(w(2t+\tau)+2\theta)\,\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{a^2}{2}\int_{-T}^{T}\cos w\tau\,\mathrm{d}t+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{a^2}{2}\int_{-T}^{T}\cos(w(2t+\tau)+2\theta)\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\cos w\,\tau$$

因此，随机相位正弦波信号为均方遍历的平稳过程

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$$

方法二：

$$m(t)=\int_0^{2\pi} a\cos(wt+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$$

$$R(t,t+\tau)=\frac{a^2}{2}\cos w\,\tau$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left(R_X(\tau)-m_x^2\right)\mathrm{d}\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\frac{a^2}{2}\cos w\,\tau\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\frac{a^2}{2}\cos w\,\tau\,\mathrm{d}\tau+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(-\frac{\tau}{2T}\right)\frac{a^2}{2}\cos w\,\tau\,\mathrm{d}\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{-a^2}{4T^2}\left(\tau\sin w\tau\Big|_0^{2T}-\int_0^{2T}\sin w\tau\,\mathrm{d}\tau\right)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{-a^2}{4T^2}\left(\tau\sin w\tau\Big|_0^{2T}-\left(-\frac{1}{w}\cos w\,\tau\right)\Big|_0^{2T}\right)=0$$

②零均值二阶矩随机过程$X(t)$的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T}，|\tau|\le T\\ 0，|\tau|>T\end{cases}$$

（1）判断该随机过程的均方连续性、均方可积、均方可导性
（2）判断均值是否具有均方遍历性
解：
（1）$R_X(\tau)$
在$\tau=0$处连续，故均方可积
∵$R_X(\tau)$在$\tau=0$处不可导
∴该随机过程均方不可导
（2）依题意可知：该随机过程的均值为零
∵$\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=0$
∴均值具有均方遍历性

推论：对于平稳随机过程如果存在：
$\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=m^2(t)$
则该过程的均值具备均方遍历性

③随机过程$Z(t)=X\cos t+Y\sin t$ ，其中X,Y为独立同分布的随机变量，分布律为

X	-1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

（1）证明$Z(t)$为平稳过程
（2）证明$Z(t)$的均值具有各态历经性
解：
（1）$EX=EY=0$
$DX=DY=2$
因为X,Y为独立同分布的随机变量：$EXY=EXEY=0$
$E\big(Z(t)\big)=E(X\cos t+Y\sin t)=\cos t\,EX+\sin t\,EY=0$
$E\big(Z(t)Z(t+\tau)\big)=E\big((X\cos t+Y\sin t)\,(X\cos(t+\tau)+Y\sin(t+\tau))\big)=2\cos\tau$
因此该随机过程为平稳过程
（2）

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X\cos t+Y\sin t\,\mathrm{d}t=0=E\big(Z(t)\big)$$
因此该随机过程的均值具有各态历经性

④已知平稳随机过程$X(t)$的均值函数为$m(t)=1$，自相关函数为$R(\tau)=2\cos^2\tau$，讨论均值各态历经性
解：
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left(R_X(\tau)-m_x^2\right)\mathrm{d}\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\cos 2\tau\,\mathrm{d}\tau=0$$
因此均值具有各态历经性

⑤设有随机过程$X(t)=A\cos(wt+\varphi)$，其中A,φ是相互独立的随机变量，w是正常数，$A\sim U(-3,3)$，$\varphi\sim U(0,2\pi)$试讨论$X(t)$的广义平稳性和各态历经性
解：
$$E\big(X(t)\big)=E(A)E\big(\cos(wt+\varphi)\big)=0$$
$$R_X(t,t+\tau)=E\big(A^2\cos(wt+\varphi)\cos(w(t+\tau)+\varphi)\big)=E(A^2)E\big(\cos(wt+\varphi)\cos(w(t+\tau)+\varphi)\big)$$
$$=\frac{3}{2}\cos w\tau$$
因此该随机过程广义平稳

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(wt+\varphi)\,\mathrm{d}t=0$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^2\cos(wt+\varphi)\cos(w(t+\tau)+\varphi)\,\mathrm{d}t=\frac{A^2}{2}\cos w\tau$$
因此均值具有各态历经性，相关函数不具有各态历经性；该随机过程不是各态历经的

平稳随机过程通过线性系统

常见信号傅里叶变换

单边指数：$e^{-at}\cdot u(t)$，$a>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a+jw}$

阶跃函数：$u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(w)+\frac{1}{jw}$

冲击函数：$\delta(t) \Leftrightarrow 1$

常数函数：$1\Leftrightarrow 2\pi\delta(w)$

门函数：$u\left(t+\frac{t_0}{2}\right)-u\left(t-\frac{t_0}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{w}\sin\frac{wt_0}{2}=t_0S_a\left(\frac{wt_0}{2}\right)$

SA函数：$\frac{\sin w_0t}{\pi t} \Leftrightarrow u(w+w_0)-u(w-w_0)$

双边指数：$e^{-a|t|} \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2+w^2}$

符号函数：$\mathrm{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{jw}$

正弦：$\sin w_0t \Leftrightarrow j\pi[\delta(w+w_0)-\delta(w-w_0)]$

余弦：$\cos w_0t \Leftrightarrow \pi[\delta(w+w_0)+\delta(w-w_0)]$

1. LTI系统的输出的均值和相关函数

①如果$X(t)$为平稳过程，实LTI（线性时不变）系统的冲激响应为$h(t)$，输出$Y(t)=X(t)*h(t)$，则$X(t),Y(t)$是联合平稳的，且有

$m_Y=m_XH(j0)$

$R_{YX}(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)$

$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)$

$R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$

其中$H(jw)$为$h(t)$的傅里叶变换

②

$r_h(t)=h(t)*h(-t)$

$|H(jw)|^2$为$r_h(t)$的傅里叶变换

$S_{YX}(w)=S_X(w)H(jw)$

$S_Y(w)=S_X(w)|H(jw)|^2$

③某线性时不变系统的冲激响应为$h(t)=e^{-bt}u(t)$，输入信号$X(t)$是零均值平稳高斯信号，其自相关函数为$R_X(\tau)=\sigma^2e^{-a|\tau|}$，求输出信号$Y(t)$的功率谱和自相关函数

解：

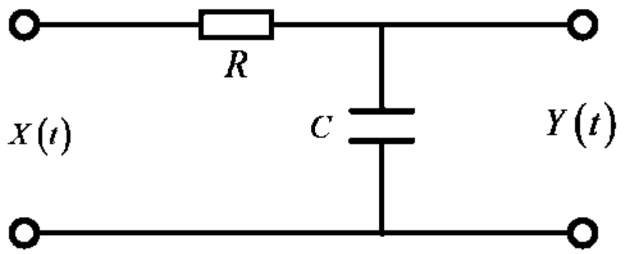
$$H(jw)=\frac{1}{b+jw}$$

$$S_X(w)=\frac{2a\sigma^2}{a^2+w}$$

$$S_Y(w)=S_X(w)|H(jw)|^2=\frac{2a\sigma^2}{a^2+w}\frac{1}{b^2+w^2}=\frac{2a\sigma^2}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a^2+w^2}-\frac{1}{b^2+w^2}\right)$$

$$R_Y(\tau)=\frac{a\sigma^2}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}e^{-a|\tau|}-\frac{1}{b}e^{-b|\tau|}\right)$$

④设随机过程为$x(t)=a\cos(w_ot+\theta)$，其中a,w_0为常数，θ是在$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量，当作用到如图所示电路时，求输出信号$Y(t)$的功率谱和自相关函数



解：

$$H(jw)=\frac{\frac{1}{jwC}}{R+\frac{1}{jwC}}=\frac{1}{1+jwRC}$$

$$h(t)=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}u(t)$$

$$E\big(X(t)\big)=0$$

$$R_X(\tau)=E\big(X(t+\tau)X(t)\big)=\frac{1}{2}a^2\cos w_0\tau$$

$$S_X(w)=\pi\frac{a^2}{2}\big[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\big]$$

$$S_Y(w)=S_X(w)\left|H(jw)\right|^2=\pi\frac{a^2}{2}\big[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\big]\times\frac{1}{1+(wRC)^2}$$

$$=\frac{a^2\pi}{2\left(1+(w_0RC)^2\right)}\big[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\big]$$

$$R_Y(\tau)=\frac{a^2}{2\left(1+(w_0RC)^2\right)}\cos w_0\tau$$

③若实平稳随机信号$X(t)$受到加性的独立随机正弦信号$Z(t)=A\cos(w_0t+\theta)$的干扰，已知A,w_0为常数，θ是在$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量，求受到干扰后的信号$Y(t)$的相关函数，并判断$X(t),Y(t)$是否联合平稳，并求出功率谱密度$S_Y(w)$和互功率谱密度$S_{XY}(w)$

解：

$$E\big(Z(t)\big)=0$$

$$R_z(\tau)=E\big(Z(t+\tau)Z(t)\big)=\frac{1}{2}A^2\cos w_0\tau$$

因为$X(t)$和$Z(t)$是相互独立的，也就是相互正交的

所以：$R_z(\tau)+R_X(\tau)=R_Y(\tau)=R_X(\tau)+\frac{1}{2}A^2\cos w_0\tau$

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E\Big(X(t+\tau)\big(X(t)+Z(t)\big)\Big)=R_X(\tau)$$

因此$X(t),Y(t)$是联合平稳的

$$S_Y(w)=S_X(w)+\pi\frac{A^2}{2}\big[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\big]$$

$$S_{XY}(w)=S_X(w)$$

2. 平稳白噪声通过LTI系统

白噪声通过LTI系统，输出信号的功率为：

$$P_Y=\frac{N_0r_h(0)}{2}$$

功率谱密度

随机过程的正交和独立：
如果随机信号$X(t),Y(t)$的互相关函数为0，则称$X(t),Y(t)$相互正交
如果随机信号$X(t),Y(t)$相互独立，则它们一定相互正交

1. 平稳过程的相关函数
①假设$X(t)$为广义平稳信号，$Y(t)=X(t)\cos(w_0t+\theta)$其中$w_0$为确定量，相位$\theta$在$[-\pi,\pi]$服从均匀分布，讨论$Y(t)$的广义平稳性
解：
$E(Y(t))=E(X(t)\cos(w_0t+\theta))=E(X(t))E(\cos(w_0t+\theta))=0$
$E(Y(t+\tau)Y(t))=E(X(t)\cos(w_0t+\theta)X(t+\tau)\cos(w_0t+w_0\tau+\theta))$
$=E(X(t)X(t+\tau))\times\frac{1}{2}E(\cos(w_0\tau)\cos(2w_0t+w_0\tau+2\theta))=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos(w_0\tau)$
因此$Y(t)$为广义平稳信号

②讨论上题中的$X(t)$和$Y(t)$的互相关函数以及联合平稳性
解：
$E(X(t+\tau)Y(t))=E\left(X(t)\cos(w_0t+\theta)X(t+\tau)\right)=R_X(\tau)E(\cos(w_0t+\theta))=0$
因此$X(t)$和$Y(t)$是广义联合平稳的，并且$X(t)$和$Y(t)$相互正交

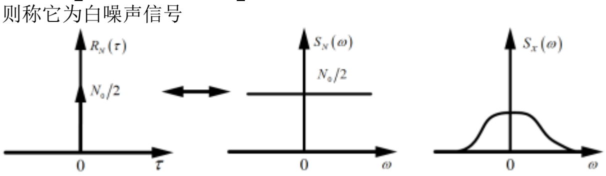
2. 平稳随机过程的功率谱密度
$$S(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w\tau}\,\mathrm{d}\tau$$
$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}w\tau}\,\mathrm{d}w$$
维纳---辛钦公式（维纳---辛钦定理）

3. 功率谱密度和互功率谱密度
①求正弦信号$X(t)=A\cos(w_0t+\theta)$，的功率谱密度，假设θ是在$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量
解：
θ的概率密度为
$$f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi},0\le\theta\le 2\pi\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$
均值函数为：
$$E(X(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)f(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}A\cos(w_0t+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$$
$$R(s,t)=E(X(s)X(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)X(s)f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}A^2\cos(w_0t+\theta)\cos(w_0s+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{A^2}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos w_0(t-s)+\cos(w_0(t+s)+2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{A^2}{2}\cos w_0(t-s)=\frac{A^2}{2}\cos w_0\tau$$
$$S_X(w)=\pi\frac{A^2}{2}[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]$$

②已知随机信号$X(t)$功率谱密度为$S(w)=\frac{w^2+4}{w^4+10w^2+9}$，求其自相关函数
解：
$$S(w)=\frac{w^2+4}{w^4+10w^2+9}=\frac{w^2+4}{(w^2+9)(w^2+1)}=\frac{5/8}{w^2+9}+\frac{3/8}{w+1}$$
$$R_X(\tau)=\frac{5}{48}\mathrm{e}^{-3|\tau|}+\frac{3}{16}\mathrm{e}^{-|\tau|}$$

思路：利用功率谱密度反求相关函数

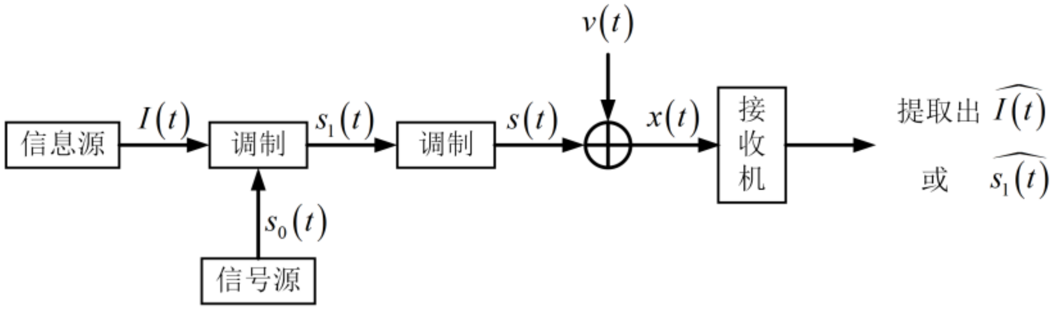
3. 白噪声和色噪声
定义：若广义平稳信号$X(t)$，有
$R(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ ，$S(w)=\frac{N_0}{2}$
则称它为白噪声信号

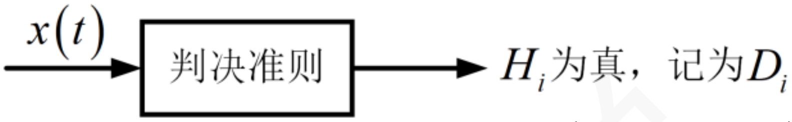


(a)白噪声　　(b)色噪声

常见信号傅里叶变换
单边指数：$\mathrm{e}^{-a\tau}\cdot u(\tau)$，$a>0\Leftrightarrow\frac{1}{a+jw}$
阶跃函数：$u(\tau)\Leftrightarrow\pi\delta(w)+\frac{1}{jw}$
冲击函数：$\delta(\tau)\Leftrightarrow 1$
常数函数：$1\Leftrightarrow 2\pi\delta(w)$
门函数：$u\left(\tau+\frac{t_0}{2}\right)-u\left(\tau-\frac{t_0}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{2}{w}\sin\frac{wt_0}{2}=t_0S_a\left(\frac{wt_0}{2}\right)$
SA函数：$\frac{\sin w_0\tau}{\pi\tau}\Leftrightarrow u(w+w_0)-u(w-w_0)$
双边指数：$\mathrm{e}^{-a|\tau|}\Leftrightarrow\frac{2a}{a^2+w^2}$
符号函数：$\mathrm{sgn}(\tau)\Leftrightarrow\frac{2}{jw}$
正弦：$\sin w_0\tau\Leftrightarrow j\pi[\delta(w+w_0)-\delta(w-w_0)]$
余弦：$\cos w_0\tau\Leftrightarrow\pi[\delta(w+w_0)+\delta(w-w_0)]$

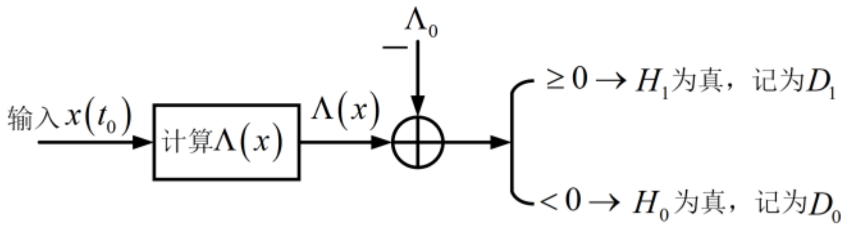
信号检测与估计基础

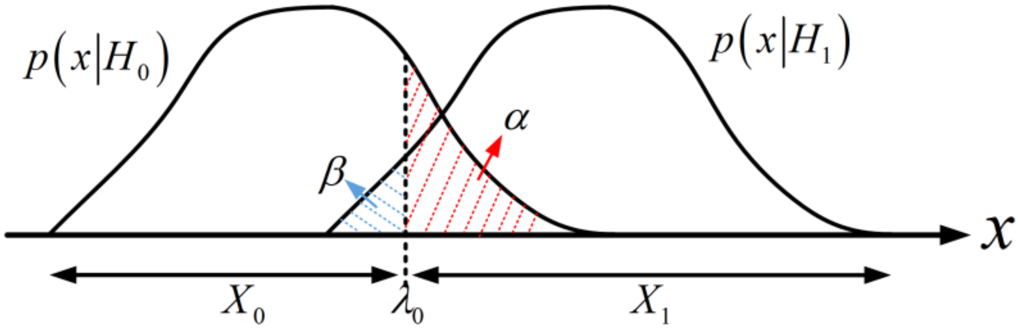
信号传输的基本结构	 信号检测与估计主要研究如何在有信道噪声$v(t)$的情况下，接收机能够从接收信号$x(t)$中检测信号$s(t)$，并且对信号$s(t)$中的参数进行估计。
信道中的噪声类型	①乘性噪声：信号在传输过程中幅度发生了变化 $x(t)=v(t)s(t)$ $v(t)$是随机变化的(如移动通信中的衰落信道) ②卷积噪声： $x(t)=s(t)*v(t)$（如多径效应） 冲激响应$\beta(t)$是随机过程 ③加性噪声： $x(t)=s(t)+v(t)$ 这里仅研究加性噪声中的信号检测与估计。对乘性噪声的研究采取取对数的方法；对卷积噪声取傅里叶变换再取对数。即都可以转换为对加性噪声的研究
噪声中的信号检测与估计	(1)噪声中的确定信号 $x(t)=s(t)+v(t)$ ①PAM信号 $s(t)=A(t)\cos(\omega_0 t), A(t)=\begin{cases}1\\0\end{cases}$ 在周期T内 ②PFM信号 $s(t)=A\cos(\omega_i t), \omega_i=\begin{cases}\omega_1, 1\\ \omega_2, 0\end{cases}$ 在T内 一般在同步数字通信中常遇到这种情况，没有随机相位。在这类问题中，只需要信号检测 (2)噪声中随机参数信号 $x(t)=s(t)+v(t)$，$s(t)$含有随机参数 ①PAM：$s(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\phi)$ ②PFM：$s(t)=\begin{cases}A\cos(\omega_1 t+\phi_1)\\A\cos(\omega_2 t+\phi_2)\end{cases}$ 其中ϕ, ϕ_1, ϕ_2为随机相位 ③雷达回波信号 $s(t)=A(t)\cos[\omega_0(t-\tau)+\phi]$ $A(t), \tau, \phi$：随机参数 异步数字通信中常遇到这种情况。需要信号检测与参数估计 (3)噪声中的随机过程

	$x(t)=s(t)+v(t)$，$s(t)$为一个随机过程 $x(t)$可以是电子侦察中侦收的信号、地震信号监测、天文观测信号、被动雷达信号、声纳信号等等。以电子侦察为例，通过拦截敌方信号$x(t)$，利用信号检测与估计理论对信号$s(t)$进行解析，从而获取情报。
信号检测的基本概念	①接收信号：$x(t)=s(t)+v(t)$ 一般在接收端我们仅有$x(t)$的若干个取样值$x_1,x_2,\cdots,x_N$ 那么这N个取样值可构成观测向量。所有观测向量的集合可以构成一个观测空间 ②一般我们假设$v(t)$噪声的分布情况已知（可以假设为高斯白噪声）。同时已知$s(t)$有M个可能的状态$S_1,S_2,\cdots,S_M$，称为M个假设$H_1,H_2,\cdots,H_M$。通常还已知$s(t)$为S_i的概率$P(S_i)=P(H_i)$，$P(H_i)$称为先验概率且$\sum_{i=1}^{M}P(H_i)=1$ ③信号检测问题的建模：由观测向量，按某一种最佳准则，判断原$s(t)$的M个假设中哪一个假设是真。此过程就称为M元信号检测问题  例如：我们可以计算每一个假设对应的$P(H_i\|x_1,x_2,\cdots,x_N)$。这个概率称为后验概率，因此可以选取最大后验概率所对应的假设作为我们的判决，这种判决方式就称为最大后验准则(MAP)，而$P(H_i\|x_1,x_2,\cdots,x_N)$的计算可以通过贝叶斯公式转换为先验概率和似然概率的计算 例：二进制数字通信$x(t)=s(t)+v(t)$ $s(t)$有两种假设：$M=2$ $H_0:s(t)=0$ $H_1:s(t)=1$ 例：雷达探测目标 $\begin{cases}H_0:s(t)=0,\text{无目标}\\H_1:s(t)=A(t)\cos[\omega_0t+\phi],\text{有目标}\end{cases}$ 例：雷达目标识别：导弹，战斗舰，轰炸机；$M=3$
信号估计的基本概念	根据观测样本值，在某种最佳状态准则意义下估计出$s(t)$的某一参数  $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}(\overline{X})$　$\overline{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_M)^T$ α是$s(t)$的某一参数 例：雷达目标探测中， $s(t)=A(t-\tau)\cos[2\pi(f_0+f_d)(t-\tau)+\phi]$ τ：目标距离 f_d：多普勒频率（目标径向速度） 对参数进行连续的估计，称为跟踪 检测与估计比较：在电子对抗中，我们需要先判断特点空域是否有敌方飞机（检测），然后再持续对飞机的速度等参数进行跟踪（估计）
概率论公式总结	①一维随机变量X的分布函数和概率密度函数(pdf) 分布函数：$P(x)=P(X\le x)$

	$pdf: p(x)=\frac{dP(x)}{dx}, P(x)=\int_{-\infty}^{x} p(z)dz$ ②由多个随机变量$x_1,x_2,\cdots,x_M$构成数组$\bar{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_M]^T$称为随机向量 M维的联合分布函数：$P(\bar{X})=P(x_1,x_2,\cdots,x_M)$ M维的联合pdf：$p(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ ③乘法公式：设A、B是随机事件 $P(AB)=P(A\|B)P(B)=P(B\|A)P(A)$ $P(ABC)=P(A)P(B\|A)P(C\|AB)$ ④贝叶斯公式 (Bayes) $P(B_i\|A)=\frac{P(A\|B_i)P(B_i)}{P(A)}$ $P(H_i\|x_1,x_2,\cdots,x_N)=\frac{P(x_1,x_2,\cdots,x_N\|H_i)P(H_i)}{P(x_1,x_2,\cdots,x_N)}$ 似然概率：$P(x_1,x_2,\cdots,x_N\|H_i)$ 后验概率：$P(H_i\|x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 先验概率：$P(H_i)$
	①接收机任务就是要加工处理所收到的混合波形，在波形中提取最大的信息量，尽量减少判决错误。当然这是有困难的，因为一方面信道噪声是个随机过程，同时信号本身也可能带有不确定的参量。 ②为了提高信号判决的正确性，只能采用数理统计的方法，根据信号和噪声所提供的统计特性，并且定义某些判决准则，使得接收机获得判决成功概率最大。这样的接收机通常称为“最佳接收机”。这里“最佳”的含义应与不同的判决准则有关。 ③用概率论和数理统计方法来研究信号检测的问题就称为“统计检测” ④如果信号是确知的，噪声是随机的，这就是在噪声中检测确知信号是否存在的问题，在数理统计中称为“简单假设检验”。 ⑤如果信号本身包含着随机参量，如在正弦信号中它的幅度、频率或相位是随机的，则在噪声中要检测随参信号是否存在不仅与噪声而且与参量的统计特性有关，在数理统计中称为“复合假设检验”。 无论简单还是复合的假设检验，都只是在噪声中判决信号是否存在或信号是什么状态，并不要求知道信号存在时所具有的参量大小，这是信号检测中的第一类任务，称为“狭义的信号检测”。 信号检测的第二类任务是要在有噪声干扰情况下根据一定的误差定义，以最小的误差作出对信号参量的估计，称为“信号估值”。 信号检测的第三类任务是信号过滤，是在有噪声干扰情况下以最小的误差定义，连续地将信号过滤出来，称为“信号的波形复原”。 包括信号估值和信号过滤任务在内的信号检测是广义的信号检测。

最大后验准则

假设检测	已知信号$s(t)$有M个状态(M个假设)，对接收的信号(样本值)进行处理[在时间范围内(0,T)]。根据某种准测，作出判决哪一个假设为真，且可得到此判决为正确的概率
最大后验准则	①首先讨论二元检测$M=2$ $H_0: x(t)=v(t)$无信号，仅有噪声 $H_1: x(t)=s(t)+v(t)$有信号(有目标) 设先验概率$P(H_0)$,$P(H_1)$已知，$P(H_0)+P(H_1)=1$ ②假设观测波形$x(t)$在观测空间是一维的情况，即利用一个观测值进行检验，此时根据$x(t)$一个样本点$x=x(t_0)$，给出判决，哪一个为真。这时检测问题称为单样本二元检测问题 $H_0: x(t_0)=n$ $H_1: x(t_0)=s+n$ ③最大后验概率准则(MAP) $P(H_1\|x)\underset{<\,D_0}{\overset{\geq\,D_1}{}}P(H_0\|x)$
似然函数和似然比	$\because P(H_1\|x),P(H_0\|x)$不易计算 $\because P(H_1\|x)\underset{<\,D_0}{\overset{\geq\,D_1}{}}P(H_0\|x)\Rightarrow P(H_1)P(x\|H_1)\underset{<}{\overset{\geq}{}}P(H_0)P(x\|H_0)$ 若已知条件$pdf\,(p(x\|H_1),p(x\|H_0))$，则可以通过$pdf$的积分算出$P(x\|H_1),P(x\|H_0)$ $\therefore \dfrac{P(x\|H_1)}{P(x\|H_0)}\underset{<}{\overset{\geq}{}}\dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}\Leftrightarrow\dfrac{p(x\|H_1)}{p(x\|H_0)}\underset{<}{\overset{\geq}{}}\dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}$ (转换为概率密度之比) 似然比门限：$\Lambda_0=\dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}=\dfrac{P(H_0)}{1-P(H_0)}$ 似然函数：$p(x\|H_1),p(x\|H_0)$ 似然比：$\Lambda(x)=\dfrac{p(x\|H_1)}{p(x\|H_0)}$ 综上所述，二元假设检验就是：计算似然函数$p(x\|H_i)$，求出似然比$\Lambda(x)$；然后代入观测数据x并与门限值Λ_0相比较，超过门限值判决H_1成立，低于门限值判决H_0成立 
似然函数的讨论	上述过程可以等效地用下图予以说明。 ①图中x轴代表一维观测数据，门限值$x=\lambda_0$，将x轴分成两个区域X_1及X_0，称为两个判决域，若观测数据x处在X_0区域内就判决H_0成立。若观测数据x处在X_1区域内就判决H_1成立。考虑一种特殊情况，如果先验概率相等，那么阈值就是两个曲线的交点。如果先验概率不相等，那么阈值就会偏移交点。



②从图中可看出，作判决时可能发生四种情况：
(1)H_0为真，判决H_0成立
(2)H_1为真，判决H_1成立
(3)H_0为真，判决H_1成立
实际$s(t)$不存在而判决为$s(t)$存在，概率为$P(H_1|H_0)$，这种错误通常称为第一类错误，在二元数字通信中将$P(H_1|H_0)$称为虚报概率，雷达术语为虚警概率。虚警错误是在无信号的条件下判决为有信号。

(4)H_1为真，判决H_0成立
实际$s(t)$存在而判决为$s(t)$不存在，概率为$P(H_0|H_1)$，通常称为第二类错误，在通信系统中将$P(H_0|H_1)$称为漏报概率，雷达术语说就是漏警概率。漏报错误是在有信号的条件下判决为无信号。

其中，(1)和(2)属于正确判决；(3)和(4)属于错误判决。对于接收机的质量，应根据判决结果来评定，即出现正确判决概率$P(H_0|H_0)$和$P(H_1|H_1)$应尽量大，出现错误判决概率$P(H_1|H_0)$和$P(H_0|H_1)$应尽量小。

③四种概率的计算
(1)$P(H_0|H_0)=\int_{X_0} p(x|H_0)dx = P_{00}$
(2)$P(H_1|H_1)=\int_{X_1} p(x|H_1)dx = P_{11}$
(3)$\alpha = P(H_1|H_0)=\int_{X_1} p(x|H_0)dx = 1-\int_{X_0} p(x|H_0)dx = P_{10}$
(4)$\beta = P(H_0|H_1)=\int_{X_0} p(x|H_1)dx = 1-\int_{X_1} p(x|H_1)dx = P_{01}$

由此可得，使用最大后验概率准则而产生总的错误概率P_e等于：
$P_e = P(H_1)\beta + P(H_0)\alpha$

④最大后验概率准则的似然比门限值Λ_0，选用这个门限值将使得P_e最小。因此最大后验概率准则又称为最小总错误概率准则或理想观测器准则。

⑤对于多维观测数据而言，此时x是多维观测空间的一个向量，二元假设检验就是充分利用观测数据的先验概率特性，按照某个最佳准则确定一个曲面，把多维观测空间分成两个判决域X_0及X_1，当观测数据x落在区域X_0时则判决H_0成立

①考虑二元假设：
$H_0: x = s_0 + n$
$H_1: x = s_1 + n$

其中$s_0=-b$，$s_1=b$，$P(H_0)=0.8$，$P(H_1)=0.2$，$n\sim N(0,\sigma^2)$，请设计MAP检测

解：

$$p(x|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(x|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x+b)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\tau_{\mathrm{MAP}}=4$$

$$L(x)=\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}=\exp\left(\frac{(x+b)^2}{2\sigma^2}-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}\right)=\exp\left(\frac{2xb}{\sigma^2}\right)$$

对数似然比：

$$\ln L(x)=\frac{2xb}{\sigma^2}$$

误差补函数：

$$erfc(x)=1-erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

误差函数：

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

贝叶斯准则

二元检测的贝叶斯准则	最大后验准则的缺点就是没有考虑错误判决所带来的损失。例如：当发生漏报错误，在电子对抗中，很有可能使得我方遭受攻击。因此，需要考虑错误判决的代价风险。于是就引出了贝叶斯判决准则。 ①考虑判决的代价： $P(D_0\|H_1)$代价$:C_{01}$ $P(D_1\|H_0)$代价$:C_{10}$ $P(D_1\|H_1)$代价$:C_{11}$ $P(D_0\|H_0)$代价$:C_{00}$ 有时$C_{11}=C_{00}=0$ ②条件风险 H_1为真条件下的条件风险 $r_1=P(D_0\|H_1)C_{01}+P(D_1\|H_1)C_{11}$ H_0为真条件下的条件风险: $r_0=P(D_0\|H_0)C_{00}+P(D_1\|H_0)C_{10}$ $P(D_0\|H_1)=1-P(D_1\|H_1),P(D_0\|H_0)=1-P(D_1\|H_0)$ ③总的平均风险 $\Rightarrow r=r_1\cdot P(H_1)+r_0\cdot P(H_0)$ $=P(H_1)C_{01}+P(H_0)C_{00}+P(H_0)(C_{10}-C_{00})P(D_1\|H_0)$ $-P(H_1)(C_{01}-C_{11})P(D_1\|H_1)$ ④贝叶斯准则是使总的平均风险r最小的准则：寻求一种对观测空间的划分，使$r\rightarrow\min$ $r_{\min}=r_B\rightarrow$贝叶斯风险 $\Lambda(x)=\dfrac{p(\bar{x}\|H_1)}{p(\bar{x}\|H_0)}\begin{matrix}\geq\\<\end{matrix}\dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}\cdot\dfrac{(C_{10}-C_{00})}{(C_{01}-C_{11})}=\Lambda_0$ 结论：若C_{10}(虚警代价大)$\nearrow\Rightarrow\Lambda_0\nearrow$ 若C_{01}(漏报代价大)$\nearrow\Rightarrow\Lambda_0\searrow$
MAP和贝叶斯的关系	①在总平均风险中，代入$C_{11}=C_{00}=0,C_{01}=C_{10}=1$ $r=P(H_1)P(D_0\|H_1)+P(H_0)P(D_1\|H_0)\rightarrow$平均错误概率$P_e$ 故由$r\rightarrow\min$变为$P_e\rightarrow\min$，这时贝叶斯准则退化为最大后验准则 ②在通信中，判决代价相同$C_{01}=C_{10}=1,C_{00}=C_{11}=0$，且$P(H_0)=P(H_1)=\frac{1}{2}$，则 $\Lambda(\bar{x})=\dfrac{P(\bar{x}\|H_1)}{P(\bar{x}\|H_0)}\begin{matrix}\geq\\<\end{matrix}1=\Lambda_0$ 此时，称为最大似然准则 因此，最大似然准则是最大后验准则的特例。最大后验准则是贝叶斯准

	则的特例。

①设随机变量$x=s+n$，其中n是均值为零，方差为1的高斯随机变量；s是信号，它等于1或0的常数，其先验概率为$p=P(\mathrm{s}{=}1)$，$q=P(\mathrm{s}{=}0)$；并规定了代价因子C_{ij}，试根据一次观测数据x，应用贝叶斯准则给出最佳判决规则。

解：

令两个假设为 $\begin{matrix} H_1: x=1+n \\ H_0: x=n \end{matrix}$

由于n是均值为零，方差为1的高斯随机变量，因此两个假设的似然函数为

$$p(x|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-1)^2}{2}\right]$$

$$p(x|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

则似然比为：

$$l(x)=\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}=\exp\left[x-\frac{1}{2}\right]$$

由上两式，可得判决规则为：

$$\exp\left[x-\frac{1}{2}\right]\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\frac{(C_{10}-C_{00})q}{(C_{01}-C_{11})p}$$

若采用似然比的自然对数，常常会更方便些。由于对数是单调增加函数，因此上面判决规则不等式可以等效为对数似然比的判决规则不等式

不同的准则，确定Λ_0的方法不同。

(1) Bayes准则：$\Lambda_0=\frac{C_{10}-C_{00}}{C_{01}-C_{11}}\cdot\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

(2)最大后验准则(MAP)：

选择$C_{00}=C_{11}=0, C_{01}=C_{10}=1, \Lambda_0=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$，与代价因子无关

(3)最大似然准则(ML):

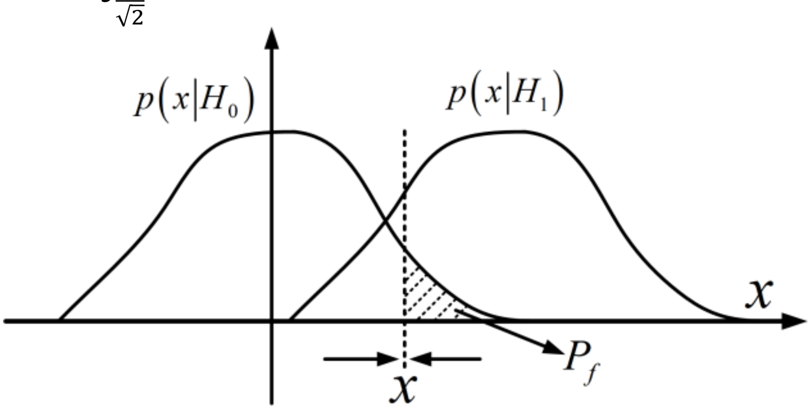
在MAP，若$P(H_1)=P(H_0)=\frac{1}{2}, \Lambda_0=1$

NP准则

二元检测的NP准则	错判的代价和先验概率均未知（雷达探测目标时）怎样确定门限Λ_0 ①准则：设定虚警概率$P(D_1\|H_0)=P_f$一定条件下，使检测概率最大或者漏报概率最小，即$P(D_1\|H_1)\to\max$或$P(D_0\|H_1)$漏报概率$\to\min$ ②条件极值：构造代价函数$Q=P(D_0\|H_1)+\mu\left[P(D_1\|H_0)-P_f\right]$ 即$Q=P(D_0\|H_1)+\mu P(D_1\|H_0)\to\min$（$\because\ \mu P_f$为常数） ③在总平均风险中 $r=r_1\cdot P(H_1)+r_0\cdot P(H_0)$ $=P(H_1)C_{01}+P(H_0)C_{00}+P(H_0)(C_{10}-C_{00})P(D_1\|H_0)$ $-P(H_1)(C_{01}-C_{11})P(D_1\|H_1)$ 若令$C_{00}=C_{11}=0,P(H_0)C_{10}=\mu,P(H_1)C_{01}=1$ 则$r=P(D_0\|H_1)+\mu P(D_1\|H_0)=Q$ 划分样本空间使$Q\to\min$则变为使$r\to\min$ $\therefore N-P$准则是$C_{ij},P(H_i)$满足上述条件的贝叶斯准则 $\Lambda(\overline{x_0})=\dfrac{p(\bar{x}\|H_1)}{p(\bar{x}\|H_0)}\underset{<}{\geq}\Lambda_0=\mu$ ④满足上面要求的阈值一般不好直接求解，我们一般可以利用虚警概率反求阈值 例：一次采样的样本$x=s+n$，n是零均值，$\sigma^2=2$的高斯分布；s有两种假设，为0或1；若令$P_f=\alpha=0.1$，按NP准则确定Λ_0和$P(D_1\|H_1)$ 解：$H_0:x=s_0+n,s_0=0$（高斯分布） $H_1:x=s_1+n,s_1=1$（高斯分布，均值变为1） $P(x\|H_0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{x^2}{4}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left[-\dfrac{x^2}{4}\right]$ $P(x\|H_1)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left[-\dfrac{(x-1)^2}{4}\right]$ $erfc(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_x^{\infty}\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)dt$ $erf(x)=1-erfc(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)dt$ 由P_f可得 $P_f=P(D_1\|H_0)=\displaystyle\int_{x_0}^{\infty}p(x\|H_0)dx=\int_{x_0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left[-\dfrac{x^2}{4}\right]dx$ $=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int^{\infty}\exp\left[-\dfrac{y^2}{2}\right]dy=erfc\left(\dfrac{x_0}{\sqrt{2}}\right)=0.1$

$$P_f = P(D_1|H_0) = \int_{x_0}^{\infty} p(x|H_0)dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_0}{\sqrt{2}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy = erfc\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}\right) = 0.1$$



由$erfc\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}\right) = 0.1$，查表可得：$x_0 = 1.8$

$$\mu = \Lambda(x_0) = \frac{p(x_0|H_1)}{p(x_0|H_0)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{{x_0}^2}{4}\right]}{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{(x_0-1)^2}{4}\right]} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)\right] = 1.9$$

检测概率：

$$P(D_1|H_1) = \int_{x_0}^{\infty} p(x|H_1)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_0-1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy = erfc\left(\frac{x_0-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 0.235$$

极大极小准则

二元检测的极大极小准则	①若先验概率$P(H_0),P(H_1)$未知，但代价因子已知 $\Lambda_0=\frac{(C_{10}-C_{00})}{(C_{01}-C_{11})}\cdot\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$ ②观察Bayes风险： r_B $=P(H_0)C_{01}+P(H_0)C_{00}+P(H_0)(C_{10}-C_{00})P(D_1\|H_0)$ $-P(H_1)(C_{01}-C_{11})P(D_1\|H_1)$ 设$C_{00}=C_{11}=0$ $\Rightarrow\Lambda_0=\frac{C_{10}[1-P(H_1)]}{C_{01}P(H_1)}$ $\Rightarrow r_B=P(H_1)C_{01}+P(H_0)C_{10}P(D_1\|H_0)-P(H_1)C_{01}P(D_1\|H_1)$ 将整个r_B看做是$P(H_1)$的函数，考虑两个极端情况： (1)若$P(H_1)=0,\Lambda_0=\infty$，虚警概率$P(D_1\|H_0)=0\Rightarrow r_B=0$ (2)若$P(H_1)=1,\Lambda_0=0$，检测概率$P(D_1\|H_1)=1\Rightarrow r_B=0$ ③在$0\le P(H_1)\le 1$间，r_B是一个大于零的凸函数(存在极大值)。很明显，取不同的阈值会得到不同的r_B，极大极小准则就是希望找到一个阈值，使得r_B最大化。Bayes风险是极小风险，而在极小风险中寻求极大值，故称为极大极小准则 ④如何求阈值Λ_0 将r_B对$P(H_1)$求导得：$C_{01}-C_{10}P(D_1\|H_0)-C_{01}P(D_1\|H_1)=0$ $\Rightarrow C_{01}\left(1-P(D_1\|H_1)\right)=C_{10}P(D_1\|H_0)$ $\Rightarrow C_{01}P(D_0\|H_1)=C_{10}P(D_1\|H_0)$ ⑤求出阈值之后，准则写为 $\frac{p(\bar{x}\|H_1)}{p(\bar{x}\|H_0)}\gtrless\Lambda_0$ 然后可以根据阈值反推出先验概率 $\therefore\Lambda_0=\frac{C_{10}}{C_{01}}\cdot\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=\frac{C_{10}(1-P_M)}{C_{01}P_M}\Rightarrow P_M=\frac{C_{10}}{C_{01}\Lambda_0+C_{10}}$ 例：设一次采样信号可表示为$x=s+n$。$\begin{matrix}H_0:x=n\\H_1:x=1+n\end{matrix}$ n：零均值，$\sigma^2=1$，高斯分布 用极大极小准则求Λ_0,P_M 设代价因子$C_{00}=C_{11}=0,C_{10}=1,C_{01}=2$ 解： $p(x\|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},p(x\|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$ $\because C_{01}P(D_0\|H_1)=C_{10}P(D_1\|H_0)$ $\Rightarrow 2-2P(D_1\|H_1)=P(D_1\|H_0)$

	$2-2\int_{x_0}^{\infty}p\left(\bar{x}\middle\vert H_1\right)dx=\int_{x_0}^{\infty}p\left(\bar{x}\middle\vert H_0\right)dx$ $\therefore 2\Phi\left(x_0-1\right)=1-\Phi\left(x_0\right)$ 可解得$x_0=0.2$ $\because \Lambda(x)=\dfrac{p\left(\bar{x}\middle\vert H_1\right)}{p\left(\bar{x}\middle\vert H_0\right)}=e^{\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ $P\left(H_1\right)\vert r_B$最大$=P_M=\dfrac{C_{10}}{C_{01}\Lambda_0+C_{10}}$

几种检测准则的比较

①贝叶斯：需要知道先验概率和代价

②最大后验：需要知道先验概率，不需要知道代价（不考虑漏报和虚警）

③极大极小：不需要知道先验概率，需要知道代价

④NP：不需要知道先验概率和代价

序贯检测

序贯检测	在二元假设的基础上，引入第三种假设（继续接收信号，当接收到足够多的信号样本，再做判断）；因此关键问题在于：门限的选取和接受样本总数k的确定 $H_0: y_i = s_0 + n$，$\mathrm{i} = 1,2 \dots k$ $H_1: y_i = s_1 + n$ ，$\mathrm{i} = 1,2 \dots k$
	$\tau_A = \frac{p_{11}}{p_{10}}$ $\tau_C = \frac{p_{01}}{p_{00}} = \frac{1-p_{11}}{1-p_{10}}$ $I_i = \ln\frac{p(y_i \vert H_1)}{p(y_i \vert H_0)}$ $L_k = \sum_{i=1}^{k} I_i$ $\mu_0 = E\{I_i \vert H_0\}$ $\mu_1 = E\{I_i \vert H_1\}$ $\overline{k_0} = \frac{p_{10}\ln\tau_A + (1-p_{10})\ln\tau_C}{\mu_0}$ $\overline{k_1} = \frac{p_{11}\ln\tau_A + (1-p_{11})\ln\tau_C}{\mu_1}$ $\pi_0 = p(H_0)$ $\pi_1 = p(H_1)$ 接收样本总数： $E(k) = \overline{k_0}\pi_0 + \overline{k_1}\pi_1$

①考虑二元假设：
$H_0: y_i = n$，$\mathrm{i} = 1,2 \dots k$
$H_1: y_i = m + n$ ，$\mathrm{i} = 1,2 \dots k$
其中n服从标准正态分布，$m = 0.5$，请设计序贯检测器，$p_{11} = 0.99$，$p_{10} = 10^{-3}$
解：

$$\tau_A = \frac{p_{11}}{p_{10}} = 990$$

$$\tau_C = \frac{p_{01}}{p_{00}} = \frac{1-p_{11}}{1-p_{10}} = 0.01$$

$$p_1(y_i) = p(y_i|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y_i-m)^2}{2}}$$

$$p_0(y_i) = p(y_i|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y_i^2}{2}}$$

$$I_i = \ln\frac{p_1(y_i)}{p_0(y_i)} = y_i m - \frac{m^2}{2}$$

$$\mu_0 = E\{I_i|H_0\} = -\frac{m^2}{2}$$

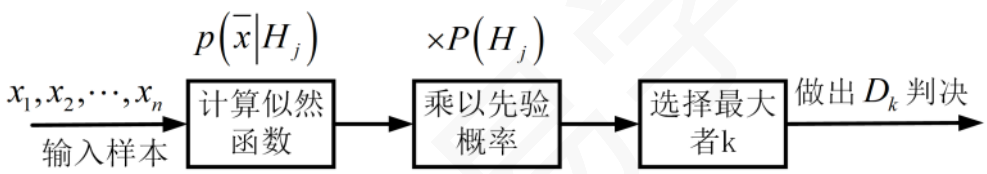
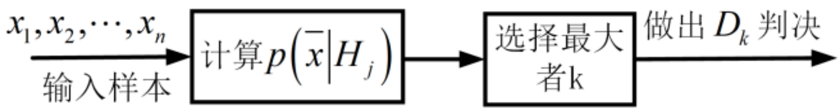
$$\mu_1 = E\{I_i|H_1\} = \frac{m^2}{2}$$

$$\overline{k_0} = \frac{p_{10}\ln\tau_A + (1-p_{10})\ln\tau_C}{\mu_0} = 36.74$$

$$\overline{k_1} = \frac{p_{11}\ln\tau_A + (1-p_{11})\ln\tau_C}{\mu_1} = 54.26$$

$$E(k) = \overline{k_0}\pi_0 + \overline{k_1}\pi_1 = 45.5 \text{（}\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}\text{）}$$

多样本多元信号检测

多样本M元检测	在数字通信中： QPSK调制$s(t)$有4种可能状态M=4 256QAM调制$s(t)$有256种可能状态M=256
	$x(t)=s(t)+v(t)$ $s(t)$有M种状态$s_1(t), s_2(t), \cdots s_M(t)$对应$M$种假设$H_1, H_2, \cdots, H_M$ 由$x(t)$的N个样本值$x=\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right)^T$，判决哪一假设为真。 设先验概率已知，且$P(H_1)+P(H_2)+\cdots+P\left(H_M\right)=1$ 每次实验有且仅有一个H_i为真
MAP准则	检测器结构：  高斯白噪声：在任意两个不同时刻上的随机变量之间，不仅是互不相关的，而且还是统计独立的 因此似然函数可以写为 $p(x\|H_k)=p\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\|H_k\right)=p\left(x_1\|H_k\right)p\left(x_2\|H_k\right)..p\left(x_N\|H_k\right)$
最大似然准则	在MAP中，令$P(H_i)=\frac{1}{M}$ $p(x\|H_k)P(H_k)\geq p(x\|H_i)\,P(H_i)$ $\therefore\ p\left(x\|H_k\right)\geq p\left(x\|H_i\right)$作$D_k$判决 检测器结构： 
	例：设输入信号为$x(t)=s_i(t)+v(t)$ $s_i(t)$分别为1，2，3，4 $v(t)$为零均值，方差σ^2，高斯白噪声 有对$x(t)$的N个样本值，给出检测方法。 解：由于$C_{ij}, P\left(H_j\right)$未知，选择$ML$准则 $H_k: x(t)=k+v(\mathrm{t})$ $p\left(\bar{x}\|H_k\right)=p\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\|H_k\right)=p\left(x_1\|H_k\right)p\left(x_2\|H_k\right)..p\left(x_N\|H_k\right)$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{N}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{x_n-k}{\sigma}\right)^2\right]$$

$p(\bar{x}|H_k)$最大，即$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{x_n-k}{\sigma}\right)^2$ 最小

展开后：$\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}(kx_n)-k^2$最大(即$2km_x-k^2$)

$H_1: 2m_x-1, m_x=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n \qquad H_2: 4m_x-4$

$H_3: 6m_x-9 \qquad H_4: 8m_x-16$

若$m_x \leqslant 1.5, 2m_x-1$最大，作$D_1$判决

若$1.5 \leqslant m_x \leqslant 2.5, 4m_x-4$最大，作$D_2$判决

若$2.5 \leqslant m_x \leqslant 3.5, 6m_x-9$最大，作$D_3$判决

若$3.5 \leqslant m_x, 8m_x-16$最大，作$D_4$判决

①设对某随机变量$x=s+n$进行N次独立地观测，
其中n是均值为0，方差为σ^2的高斯随机变量；s等于m

或0，其先验概率为$p=P(s=m), q=P(s=0)$；并规定了代价因子C_{ij}

试根据N次独立的观测数据 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，作出关于s的贝叶斯准则的判决

解：令两个假设为$\begin{matrix} H_1: & x_i=m+n_i, & i=1,2,\cdots,N \\ H_0: & x_i=n_i & i=1,2,\cdots,N \end{matrix}$

对于每个观测样本可以写出似然函数

$$p(x_1|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{(x_1-m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad p(x_1|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{(x_1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

由于N次观测是独立的，条件联合概率密度为：

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_N|H_j)=\prod_{i=1}^{N}p\left(x_j|H_j\right) \ j=0,1$$

用矢量表示$x=[x_1,x_2,\cdots,x_N]^T$ $\boldsymbol{m}=[m,m,\cdots,m]^T$

则条件联合概率密度为：

$$p(x|H_1)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}exp\left[-\frac{(x-\boldsymbol{m})^T(x-\boldsymbol{m})}{2\sigma^2}\right]$$

$$p(x|H_0)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}exp\left[-\frac{x^Tx}{2\sigma^2}\right]$$

似然比 $l(x)=\dfrac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}=exp\left[\dfrac{1}{\sigma^2}\left(\boldsymbol{m}^T x-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{m}\right)\right]$

应用贝叶斯准则的判决规则为

$$exp[\frac{1}{\sigma^2}\left(\boldsymbol{m}^T x-\frac{1}{2}\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{m}\right)]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{(C_{10}-C_{00})q}{(C_{01}-C_{11})p}=l_0$$

两边取自然对数：

$$\boldsymbol{m}^T x\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{1}{2}\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{m}+\sigma^2\ln l_0$$

标量式：

$$\sum_{i=1}^{N}x_i\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{Nm}{2}+\frac{\sigma^2}{m}\ln l_0\text{(矩阵相乘结果)}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{m}{2}+\frac{\sigma^2}{Nm}\ln l_0$$

$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ 是N次观测数据的平均值（样本均值），这里用它作为检验统计量，是充分统计量。同时这个统计量是观测值的线性函数

最佳接收机（一）

多样本二元检测最佳接收机设计	①设$(0,T)$内观测波形$x(t)$是信号$s_i(t)$与相加性噪声$n(t)$之和。其中$s_i(t)$是已知信号$s_0(t), s_1(t)$中的一个；$n(t)$是均值为零的高斯白噪声，其功率谱密度为$N_0/2$。现要设计一个最佳接收机，对观测波形进行处理，选择下面两个假设当中的一个： H_0: $x(t) = s_0(t) + n(t), \quad 0 \le t \le T$ H_1: $x(t) = s_1(t) + n(t), \quad 0 \le t \le T$ 在前面曾指出，不同准则只表现在似然比门限值的不同。因此我们暂时先不指定采用的具体准则。 ②首先对$x(t)$、$s_i(t)$及$n(t)$进行取样，在$t = t_k$时刻的取样值为x_k、s_{ik}及n_k，则上式就变换成为 H_0: $x_k = s_{0k} + n_k, \quad 1 \le k \le N$ H_1: $x_k = s_{1k} + n_k, \quad 1 \le k \le N$ 其中N是$(0,T)$内取样数，$N>>1$ 计算似然比： $l(\mathbf{x}) = \dfrac{p(\mathbf{x} \mid H_1)}{p(\mathbf{x} \mid H_0)} = \dfrac{p(x_1, x_2, \cdots, x_N \mid H_1)}{p(x_1, x_2, \cdots, x_N \mid H_0)}$ 需要计算N维似然比$p(x_1, x_2, \ldots, x_N \mid H_1)$，为此先计算一维$p(x_k \mid H_1)$ 在某时刻$t = t_k$，$x_k = s_{ik} + n_k, i = 0\ or\ 1$ ③在给定信号s_{ik}的条件下，s_{ik}是某确定的数，n_k是均值为零，方差为σ^2的高斯随机变量。因此x_k的条件均值、条件方差及条件概率密度分别为： $E[x_k \mid H_i] = s_{ik}$ $Var[x_k \mid H_i] = Var[n_k] = \sigma^2$ $p(x_k \mid H_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left[-\dfrac{(x_k - s_{ik})^2}{2\sigma^2}\right]$ 由于假设$n(t)$是高斯白噪声，故不同时刻取样是相互独立的。x的N维条件概率密度等于各取样值条件概率密度的乘积 $p(\mathbf{x} \mid H_i) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^N \exp\left[-\sum_{k=1}^{N} \dfrac{(x_k - s_{ik})^2}{2\sigma^2}\right]$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N \exp\left[-\frac{(x-s_i)^T(x-s_i)}{2\sigma^2}\right]$$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$

$s_i = (s_{i1}, s_{i2} \dots, s_{iN})$

因此可得到似然比

$$l(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} \mid H_1)}{p(\mathbf{x} \mid H_0)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{(x_k - s_{1k})^2}{2\sigma^2} - \frac{(x_k - s_{0k})^2}{2\sigma^2}\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{2x_k s_{0k}}{\sigma^2} - \frac{2x_k s_{1k}}{\sigma^2} - \frac{s_{0k}^2 - s_{1k}^2}{\sigma^2}\right]\right\}$$

而判决规则是：$l(\mathrm{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0$

其中l_0决定于所选用的判决准则

④取对数，移项

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{x_k s_{1k}}{\sigma^2} - \sum_{k=1}^{N}\frac{x_k s_{0k}}{\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln l_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{s_{1k}^2 - s_{0k}^2}{\sigma^2}$$

不等式右端都是已知数，实现最佳检测的关键步骤是对不等式左边的项进行计算，即对观测数据x_k与已知的信号数据s_{ik}作相关系数的计算。用矢量表示：

$x = [x_1, x_2, \cdots, x_N]^T; s_i = [s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{iN}]^T$

则可以写成：

$$x^T(\mathrm{s}_1 - \mathrm{s}_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma^2 \ln l_0 + \frac{1}{2}(\mathrm{s}_1^T\mathrm{s}_1 - \mathrm{s}_0^T\mathrm{s}_0)$$

⑤根据前面的取样定理，设取样数足够大，以及

$$\sigma^2 = N_0 f_B = N_0\frac{\omega_B}{2\pi}$$

$$x(t) = \Sigma x_k \phi_k(t)$$

$$\Rightarrow x_k = 2f_B\int_0^T x(t)\phi_k(t)dt$$

则不难求出下面的关系式

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N} x_k s_{ik} = \frac{1}{N_0 f_B}\sum_{k=1}^{N}\left[2f_B\int_0^T x(t)\phi_k(t)dt\right]s_{ik}$$

积分求和交换次序（因为这里的函数都是连续可测函数，所以可以交换位置）

$$= \frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)\sum_{k=1}^{N}\phi_k(t)s_{ik}dt = \frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)s_i(t)dt$$

上式表示两个信号的相关，相对应的硬件结构称为相关器

接下来，模仿向量空间中定义向量的长度，我们定义函数空间中函数的长度（能量）

$$\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{2f_B}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$\int_0^T s_i^2(t)dt = \frac{1}{2f_B}\sum_{k=1}^{N} s_{ik}^2 = E_i$$

代表信号$s_i(t)$的能量

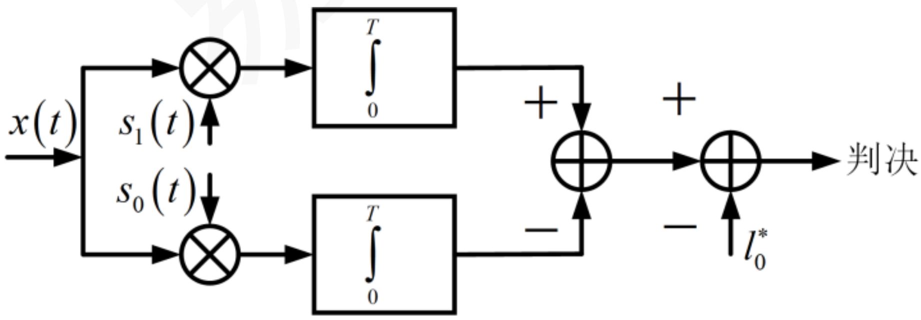
⑥把上面关系式代入得到判决规则：

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{x_k s_{1k}}{\sigma^2} - \sum_{k=1}^{N}\frac{x_k s_{0k}}{\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln l_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{s_{1k}^2 - s_{0k}^2}{\sigma^2}$$

$$\int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0^*$$

其中门限值l_0^*等于

$$l_0^* = \frac{1}{2}N_0\ln l_0 + \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$$



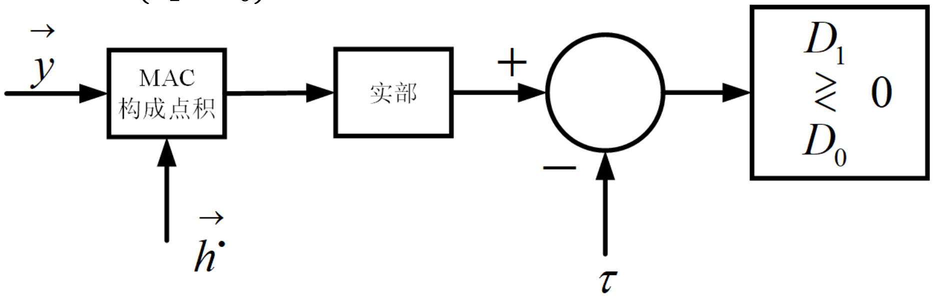
最佳接收机（二）

	前面主要考虑实高斯白噪声的情况下的最佳接收机设计，对于非实高斯白噪声以及复信号的情况，并没有考虑到。
多样本二元检测最佳接收机设计	考虑信号源发出的两个信号u_0,u_1。我们希望在观测值受到噪声z干扰之后，通过采样值判断具体的发射信号。因此，该问题就转化为了假设检验问题： $H_0: y_j = u_{0j} + z，j = 1,2,\dots,k$ $H_1: y_j = u_{1j} + z，j = 1,2,\dots,k$ 其中z是零均值复高斯噪声，请设计最大后验检测器，并给出最优接收机的框图
	解：为了更容易的写出似然函数之比，我们首先从复多维零均值高斯随机变量的分布入手 $z = (z_1,\dots,z_k)$ $p(z) = \frac{1}{(2\pi)^k\|M\|}\exp\left(-\frac{1}{2}z^T M^{-1} z^*\right)$ 其中M为z的协方差矩阵，$\|M\|$为协方差矩阵的行列式 $M = \begin{pmatrix} cov(z_1,z_1) & cov(z_1,z_2) & .. & cov(z_1,z_k) \\ cov(z_2,z_1) & cov(z_2,z_2) & .. & cov(z_2,z_k) \\ .. & .. & .. & .. \\ cov(z_k,z_1) & cov(z_k,z_2) & .. & cov(z_k,z_k) \end{pmatrix}$ 注意：①如果z为多维实零均值高斯，则 $p(z) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\|M\|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^T M^{-1} z^*\right)$ ②对于前面的实高斯白噪声，由于协方差矩阵是一个对角矩阵，$\|M\| = (\sigma^2)^k$，所以可以简化为 $p(z) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{k}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{z_n}{\sigma}\right)^2\right]$ $p_1(\vec{y}) = p_1(\vec{y}\|H_1) = p_1(y_1,y_2,\cdots,y_k\|H_1) = \frac{1}{(2\pi)^k\|M\|}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{y}-\vec{u}_1)^T M^{-1}(\vec{y}^*-\vec{u}_1^*)\right)$ $p_0(\vec{y}) = p_1(\vec{y}\|H_0) = \frac{1}{(2\pi)^k\|M\|}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{y}-\vec{u}_0)^T M^{-1}(\vec{y}^*-\vec{u}_0^*)\right)$ 其中$\vec{u}_1 = (u_{11},\cdots u_{1k})$，$\vec{u}_0 = (u_{01},\cdots u_{0k})$，$\vec{y} = (y_1,\cdots y_k)$ $L(\vec{y}) = \exp\left(\frac{1}{2}(\vec{u_1}-\vec{u}_0)^T M^{-1}\vec{y}^* + \frac{1}{2}y^T M^{-1}(\vec{u}_1^*-\vec{u}_0^*) + \frac{1}{2}u_0^T M^{-1}\vec{u}_0^* - \frac{1}{2}u_1^T M^{-1}\vec{u_1}^*\right)$ $L(\vec{y}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} l_0$ l_0为最大后验准则的阈值 对数似然比：

$l(\vec{y}) = \mathrm{Re}\{y^T M^{-1}(\vec{u}_1^* - \vec{u}_0^*)\} + \frac{1}{2}u_0^T M^{-1}\vec{u}_0^* - \frac{1}{2}u_1^T M^{-1}\overrightarrow{u_1}^*$

$\tau = -\frac{1}{2}u_0^T M^{-1}\vec{u}_0^* + \frac{1}{2}u_1^T M^{-1}\overrightarrow{u_1}^*$

$h^* = M^{-1}(\vec{u}_1^* - \vec{u}_0^*)$



匹配滤波器

匹配滤波器	①在信号检测中，误码率p_e由$\frac{E}{N_0}$决定(信噪比) 设计滤波器，使输出信号的信噪比最大，p_e可减小。 ②对线性时不变(LTI)系统 $x(t)=s_i(t)+n(t)\rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)=s_2(t)+n_2(t)$ ③匹配滤波器：设计系统$h(t)$，使$\frac{\left\|{s^2}_2(t)\right\|}{\mathrm{E}[n_2(t)^2]}\rightarrow \max$
白噪声条件下的匹配滤波器	①设输入信号$s_i(t)$，噪声$n(t)$是零均值，谱密度$\frac{N_0}{2}$的白噪声 $\therefore R_n(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(t)\quad S_n(\omega)=\frac{N_0}{2}$ $x(t)=s_i(t)+n(t)$ $\therefore y(t)=x(t)*h(t)=s_i(t)*h(t)+n(t)*h(t)$ $s_2(t)=s_i(t)*h(t)$ $n_2(t)=n(t)*h(t)$ ②$n_2(t)$的平均功率： $E\left[\left\|n_2(t)\right\|^2\right]=E[n_2(t)n_2^*(t)]$ $=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)n(t-\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty}h^*(r)n^*(t-r)dr\right]$ $=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)h^*(r)E[n(t-\tau)n^*(t-r)]drd\tau$ $\therefore E\left[\left\|n_2(t)\right\|^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)h^*(r)\frac{N_0}{2}\delta(r-\tau)drd\tau$ $=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)h^*(\tau)\delta(r-\tau)drd\tau$ $=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)h^*(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(r-\tau)\,drd\tau$ $=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|h(\tau)\right\|^2d\tau$

③输出信号：$s_2(t)=s_i(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)s_i(t-\tau)d\tau$

观测时刻：$s_2(T)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)s_i(T-\tau)d\tau$

输出功率：$\left|s_2(T)\right|^2=\left|\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)s_i(T-\tau)d\tau\right|^2$

信噪比：$\rho=\frac{\left|s_2(T)\right|^2}{E\left[\left|n_2(t)\right|^2\right]}=\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)s_i(T-\tau)d\tau\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|^2d\tau}$

④利用Schart不等式：

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)s_{\mathrm{i}}(T-\tau)\mathrm{d}\tau\right|^2\leq\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}\left|s_i(T-\tau)\right|^2\mathrm{d}\tau$$

仅当$h(\tau)=cs_i^*(T-\tau)$, c为非零常数时，等号成立

$$\rho_{\max}=\frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|s_i(T-\tau)\right|^2\mathrm{d}\tau=\frac{2\mathrm{E}}{N_0}\quad \mathrm{E}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|s_{\mathrm{i}}(t)\right|^2\mathrm{d}t$$

⑤匹配滤波器冲激响应：$h(t)$=$cs_i^*(T-t)$

频谱特性：

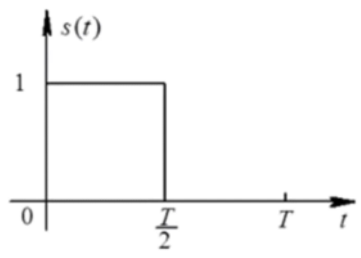
$H(f)=\mathrm{c}S_{\mathrm{i}}^*(f)e^{-j2\pi fT}\quad H(j\omega)=\mathrm{c}S_{\mathrm{i}}^*(j\omega)e^{-j\omega T}$

说明：

(1)$|S(f)|$表明滤波器形状与$|S_{\mathrm{i}}(f)|$一样，信号强的频率位置，滤波器增益高

(2)$H(f)$的相位$e^{-j2\pi fT}$，可消除$s_{\mathrm{i}}(t)$中的相位(可消除色散引起的延时)，可实现频率成份同时相加(如雷达中线性调频信号(LMF))

①设输入信号如下所示，试求该信号的匹配滤波器频率响应和输出信号波形



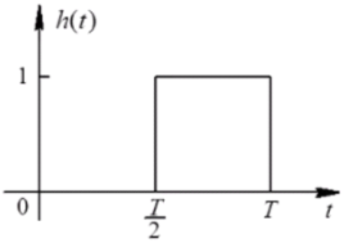
解：(1)输入信号为

$$s(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t\leq\frac{T}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

频谱函数$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{T/2} e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{j\omega}\left(1-e^{-j\frac{T}{2}\omega}\right)$

传递函数$H(\omega)=S^{*}(\omega)e^{-j\omega t_0}=\frac{1}{j\omega}\left(e^{j\frac{T}{2}\omega}-1\right)e^{-j\omega t_0}$

冲激响应$h(t)=s(t_0-t)$



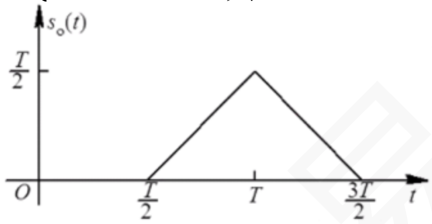
取$t_0=T$，则有

$H(\omega)=\frac{1}{j\omega}\left(e^{j\frac{T}{2}\omega}-1\right)e^{-j\omega T}\quad h(t)=s(\mathrm{T}-t)$

(2) 匹配滤波器的输出为

$$s_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty} s(x)s(x+t-T)dx$$

$$=\begin{cases}-\frac{T}{2}+t & \frac{T}{2}\le t\le T\\ \frac{3T}{2}-t & T\le t\le\frac{3T}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



非高斯白噪声中的信号检测（一）

	前面的课程所有假设均为高斯噪声背景 $\begin{cases}H_0: x(t)=s_0(t)+n(t)\\H_1: x(t)=s_1(t)+n(t)\end{cases}$ $R_n(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)\quad S_n(\omega)=\frac{N_0}{2}$ 其中：幅度分布为高斯$\Rightarrow pdf$确知
研究内容	(1)若$n(t)$是高斯分布但非白，$\Rightarrow R_n(\tau)\neq\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ 即：$S_n(\omega)\neq$常数$\Rightarrow x_1,x_2,\cdots,x_n$可能相关 此时如何对信号进行检测⇒高斯色噪声背景下信号的检测问题（参量检测） (2)若$n(t)$是非高斯分布，且非白 $\Rightarrow x_1,x_2,\cdots,x_n$不可能相互独立 且$pdf$未知或部分已知，即：$n(t)$分布未知时如何检测信号⇒非参量检测
高斯色噪声下的二元检测	二元检测： $H_0: x(t)=s_0(t)+n(t)\quad 0\le t\le T$ $H_1: x(t)=s_1(t)+n(t)$ $\boxed{n(t)\text{：零均值高斯分布，平稳的}}$ 相关函数$R_n(\tau)$或$S_n(\omega)$ 问题：如何判决H_0,H_1为真？
傅里叶级数和完备函数集	若$g(t)$是以T为周期的周期信号，则可展开为FS： $g(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$ $a_k=\frac{1}{T}\int_T g(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ 定义：$f_k(t)=e^{jk\omega_0 t}$ $g(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k f_k(t)$ $a_k=\frac{1}{T}\int_T g(t)f_k^*(t)dt$ 显然：$f_k(t)$相互正交$\Leftrightarrow \int_T f_i(t)f_j^*(t)dt=C\delta(i-j)$ 所有$f_k(t)$的集合，称为$\boxed{\text{完备正交函数集}}$

	除$f_k(t)=e^{jk\omega_0 t}(k=1,2,\cdots)$集合外，还有其它的完备正交集，只需满足⇒ $\int_0^T f_i(t)f_j^*(t)dt=C\delta(i-j)$即可 若同时满足$C=1$，则称集合$\{f_k(t)\},k=1,2,\cdots$为$\boxed{\text{归一化的正交函数集}}$
KL展开	利用$\{f_k(t)\}$，对任意信号$x(t)$，可分解为 $\boxed{x(t)=\sum_k x_k f_k(t)\quad 0\le t\le T}$ $\therefore\int_0^T x(t)f_i^*(t)dt=\sum_k x_k\int_0^T f_k(t)f_i^*(t)dt=x_i$ $\therefore\boxed{x_k=\int_0^T x(t)f_k^*(t)dt\quad(1)}$ ⇔ 称之为$K-L$分解
	对接收信号：$x(t)=s(t)+n(t)$ 如果$n(t)$为高斯白噪声，那么我们可以根据前面的做法对$x(t)$进行采样，采样的数据一定是相互独立的，然后通过计算多样本的似然函数计算似然比，得到判决。但是现在$n(t)$不是白噪声，这个时候采样得到的样本不是独立的，因此多样本似然函数无法写为连乘的形式。这个时候，就考虑对$x(t)$进行KL展开，可以得到系数x_k，如果这些系数x_k是相互独立的话，那么我们就可以把这些系数看作是采样值，然后计算似然函数。那么在什么条件下，这些系数x_k才是独立的呢 下面观察x_k的相关系数，协方差： $A.E[x_k]=\int_0^T s(t)f_k^*(t)dt$ $B.cov\{x_i,x_j\}=E\{[x_i-E(x_i)][x_j-E(x_j)]^*\}$ $=E\left\{\int_0^T\int_0^T f_i^*(t_1)f_j(t_2)n(t_1)n^*(t_2)dt_1dt_2\right\}$ $=\int_0^T\int_0^T f_i^*(t_1)f_j(t_2)R_n(t_1-t_2)dt_1dt_2$ $=\int_0^T f_i^*(t_1)\left[\int_0^T f_j(t_2)R_n(t_1-t_2)dt_2\right]dt_1$ 仅当 $\int_0^T f_j(t_2)R_n(t_1-t_2)dt_2=\lambda_j f_j(t_1)\qquad(2)$ 则$cov\{x_i,x_j\}=0$ 在(2)中，λ_j →积分方程的特征值，$f_j(t)$→积分方程的特征函数，$R_n(t_1-t_2)$ →积

	分方程的核函数 结论：选择正交函数集$\{f_k(t)\}$满足(2)，使$K-L$系数x_i间不相关$\overset{高斯}{\Rightarrow}$独立
$K-L$分解的结论	(1)若$\{f_k(t)\}$是完备的归一化正交函数集 对$x(t)=s(t)+n(t) \quad 0\le t\le T$ $x_k=\int_0^T x(t)f_k^*(t)dt \quad s_k=\int_0^T s(t)f_k^*(t)dt$ $n_k=\int_0^T n(t)f_k^*(t)dt$ $\therefore$ K—L系数间：$x_k=s_k+n_k$ (2) $\because$ $n(t)$高斯零均值平稳$R_n(\tau)$ $\therefore$ x_i,x_j不相关⇒独立，且$\sigma_i^2=Var[x_i]=\lambda_i$ (3)若$R_n(\tau)$ 是实偶 ⇒ $f_k(t)$是实的
	处理步骤： 1、由$R_n(\tau)$根据(2)可得归一化正交函数集$\{f_k(t)\}$ 2、可由(1)得KL系数x_k 3、求pdf 因为x_k是高斯的，且相互独立，求出其均值、方差，可得条件pdf ⇒ $$p(x_k\mid H_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}exp\left[-\frac{(x_k-s_{ik})^2}{2\lambda_k}\right]$$ ⇒ n维联合分布 $$p\left(\overline{X}_n\mid H_i\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}exp\left[-\frac{(x_k-s_{ik})^2}{2\lambda_k}\right]$$ 似然比 $$\Lambda\left(\overline{X_n}\right)=\frac{p\left(\overline{X_n}\mid H_1\right)}{p\left(\overline{X_n}\mid H_0\right)}=\frac{exp[-\sum_{k=1}^{n}(x_k-s_{1k})^2/2\lambda_k]}{exp[-\sum_{k=1}^{n}(x_k-s_{0k})^2/2\lambda_k]}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\Lambda_0$$ $$\therefore F=\int_0^T x(t)h_1(t)dt-\int_0^T x(t)h_0(t)dt$$ $$\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\Lambda_0+\frac{1}{2}\int_0^T s_1(t)h_1(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^T s_0(t)h_0(t)dt$$ $\breve{\beta}$

	$h_1(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{1\mathrm{k}}}{\lambda_{\mathrm{k}}}f_{\mathrm{k}}(t)$ $h_0(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{0\mathrm{k}}}{\lambda_{\mathrm{k}}}f_{\mathrm{k}}(t)$ 检测统计量：$F=F_1-F_0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \beta$

非高斯白噪声中的信号检测（二）

参量检测和非参量检测	(1)参量检测 若噪声或干扰的统计特性完全已知，或仅需对某些参量估值即可确知，此时即可以似然比处理器为基础，构成适当的检测统计量和门限，从而实现对信号的最佳检测。 例如：高斯白噪声或色噪声背景下的信号检测，μ和σ可完全确知或通过估计得到。 (2)非参量检测 在噪声的统计特性未知时，设计某种检测器，使得检测器的虚警 概率不随噪声干扰的统计特性而变化，即呈现CFAR特性，这样的检测器 称之为非参量检测器 → 自由分布检测器。 即不利用噪声干扰统计特性的检测器。 $\boxed{\text{本质：不利用pdf, 进行信号检测}}$ 特点：适应性强，抗各类干扰，无论什么统计背景均可CFAR (3)参量和非参量检测器的对比： A、非参量检测器未利用先验信息，随适应性强，但针对性差。 B、若pdf已知，参量检测性能优于非参量检测。 C、若pdf未知或有误差，参量检测性能劣于非参量检测。实际中，若pdf不能确知，则应用非参量检测居多。
	自动检测：雷达信号的检测功能全部由雷达系统自身完成而不需要操作人员的干预。 恒虚警率系统：在没有目标存在时，自动检测的电路能实现保持恒虚警率的系统。 $\boxed{(CFAR)}$ ⇒根据检测统计量的pdf的已知程度，$CFAR$可分为：参量$CFAR$和非参量$CFAR$。
几种非参量检测器	设有$x_1, x_2, \cdots, x_N$个观测样本，且是相互独立的。 1、相关检测器(D_1) 二元检测：$H_0: x(t) = n(t)$ $H_1: x(t) = s(t) + n(t)$

样本点：$\begin{cases} H_0: x_i = n_i \\ H_1: x_i = s_i + n_i \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,N$

相关检测器：

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\, s_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} C_1 \quad \begin{array}{l} \rightarrow D_1 = 1\left(\text{原}D_1\text{判决}\right) \\ \rightarrow D_1 = 0\left(\text{原}D_0\text{判决}\right) \end{array}$$

2、线性检测器(平均值检测器D_2)

$\begin{cases} H_0: x_i = n_i \\ H_1: x_i = s + n_i \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,N$

$\rightarrow n_i$分布未知，s是一个常数时的检测。

线性检测器：

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} C_2 \quad \begin{array}{l} D_2 = 1\left(\text{有信号}\right) \\ D_2 = 0\left(\text{无信号}\right) \end{array}$$

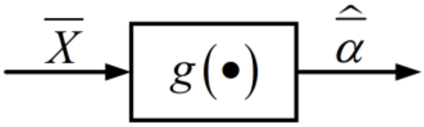
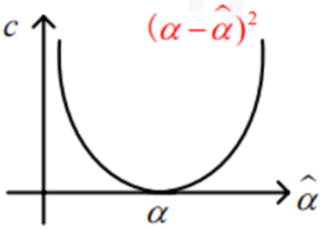
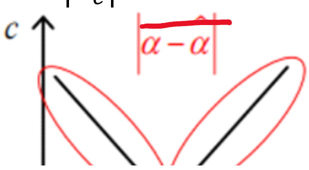
3、符号检测器$\left(D_3\right)$

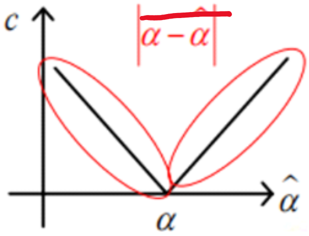
$\begin{cases} H_0: x_i = n_i \\ H_1: x_i = s_i + n_i \end{cases} \quad s_i > 0, n_i$是零均值

令$u\left(x_i\right) = \begin{cases} 1 & x_i > 0 \\ 0 & x_i < 0 \end{cases} \leftrightarrow$阶跃

$$\boxed{\text{检测器:} \sum_{i=1}^{N} u\left(x_i\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} C_3 \quad \begin{array}{l} D_3 = 1 \\ D_3 = 0 \end{array}}$$

信号参量估计（一）

估计	根据样本数据，计算信号中的某一个或多个参数。 数学上描述：已知N点回波数据 $\overline{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_N]$ 目标：由N个数据确定或估计$\bar{\alpha}$ 可表示为：$\hat{\bar{\alpha}}=g\left(\overline{X}\right)$  问题的本质：怎样确定函数$g\left(\overline{X}\right)$，使$\hat{\bar{\alpha}}$在某种意义下逼近真实参数$\bar{\alpha}$ 噪声的存在→$\overline{X}$随机→$\hat{\bar{\alpha}}$是随机变量(向量) 信号参数：频率、相位、延时、幅度、方向
矩估计	对N个样本点x_i，估计其均值和方差 均值→ $m_x=E\left[\overline{X}\right]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ 方差→ $\sigma_x^2=Var\left[\overline{X}\right]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-m_x)^2$ 特点：矩法仅能估计$x(t)$的一阶、二阶矩；没有用参量的先验的统计特性，一般不是最佳的
贝叶斯(Bayes)估计	贝叶斯估计：通过定义风险函数，对分布中的参数进行估计 ①平方误差代价函数 $C=(\alpha-\hat{\alpha})^2=\alpha_e^2$  对应MSE估计（最小均方误差估计） $\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha p(\alpha\|\vec{y})\,\mathrm{d}\alpha$ $p(\alpha\|\vec{y})=\frac{p(\alpha)p(\vec{y}\|\alpha)}{p(\vec{y})}$ ②绝对误差代价函数： $C=\|\alpha_e\|$ 

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


对应绝对误差估计

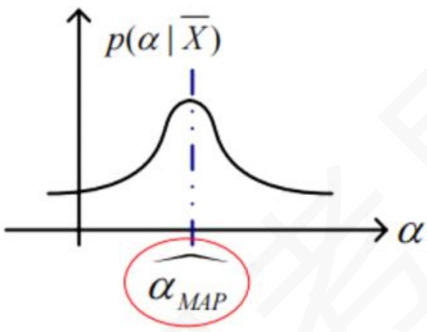
$\int_{-\infty}^{\alpha} p(a|\vec{y})\,\mathrm{d}\alpha = \int_{\alpha}^{+\infty} p(a|\vec{y})\,\mathrm{d}\alpha$
</td>
</tr>
<tr>
<td>最大后验估计</td>
<td>
$(MAP - Maximum\ A\ Posteriori\ Probability)$

$\overline{\alpha}$的MAP估计：在给定$\overline{X}$的情况下，使$p\left(\overline{\alpha}|\overline{X}\right)$达到最大值的估计量$\widehat{\overline{\alpha}}$

数学上可表述为：

对$\overline{\alpha}$中的α_{i}, 令$\frac{\partial p\left(\overline{\alpha}|\overline{X}\right)}{\partial \alpha_{\mathrm{i}}} = 0$, 求极大值, $i = 1,2,\cdots,m$

从而可求出$\widehat{\alpha_{MAP}} = \left(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_m\right)^T$



</td>
</tr>
<tr>
<td>最大似然估计</td>
<td>
$(ML - Maximum$ Likelihood$)$

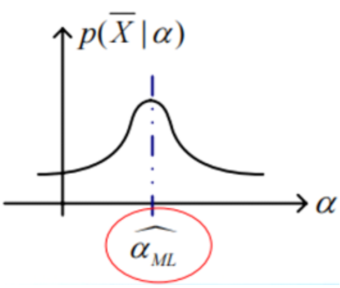
$\overline{\alpha}$的ML估计：在给定$\overline{X}$的情况下，使似然函数$p\left(\overline{X}|\overline{\alpha}\right) \to max$的估计量$\widehat{\overline{\alpha}}$

数学上可表述为

$\overline{\alpha}$中的α_{i}，令$\frac{\partial p\left(\overline{X}|\overline{\alpha}\right)}{\partial \alpha_{\mathrm{i}}} = 0, or\ \frac{\partial \ln p\left(\overline{X}|\overline{\alpha}\right)}{\partial \alpha_{\mathrm{i}}} = 0$

求极大值即可, $i = 1,2,\cdots,m$

从而可求出$\widehat{\alpha_{ML}} = \left(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_m\right)^T$



(1)Bayes →要求知道代价函数。例如→ $MMSE$等
</td>
</tr>
</table>

(2)MAP →要求后验概率分布已知。选择使后验概率分布最大的$\overline{\alpha}$作为$\widehat{\overline{\alpha}_{MAP}}$

(3)ML →要求似然函数$p\left(\overline{X}\mid\overline{\alpha}\right)$已知。选择使$p\left(\overline{X}\mid\overline{\alpha}\right)$最大的$\overline{\alpha}$作为$\widehat{\overline{\alpha}_{ML}}$

如果后验概率$p(\alpha|\vec{y})$是对称的，则均方误差估计和绝对误差估计相等；如果后验概率$p(\alpha|\vec{y})$是单峰的，则均方误差估计和最大后验估计相等。对于高斯型分布的后验概率，以上三个估计都相等

例：设有随机过程$x=\alpha+n$, n是均值为0，方差为σ_W^2的高斯白噪声，现有N个观测样本$\overline{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_N]^T$

(1)若x_i为正态分布且相互独立，试用ML估计x的均值和方差

(2)若已知α是均值为μ，方差为β^2的高斯分布，用MAP估计α

解：(1)用ML估计，令估计量为(α,σ_x)

$\overline{X}$的N维联合分布，其似然函数：

$$p\left(\overline{X}|\alpha\,,\sigma_x\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\right)^N\exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(x_i-\alpha\right)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

$$\therefore \ln p\left(\overline{X}|\alpha\,,\sigma_x\right)=-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\alpha\right)^2-N\ln\sigma_x+c$$

$$ML\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial a}\left[\ln p\left(\overline{X}|\alpha\,,\sigma_x\right)\right]=\frac{1}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-a\right)=0$$

$$\therefore\hat{\alpha}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\ (\text{与矩法结果相同})$$

估计方差：$\frac{\partial}{\partial\sigma_x}\left[\ln p\left(\overline{X}|\alpha,\sigma_x\right)\right]=0$

$\therefore\hat{\sigma}_x^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\hat{\alpha}\right)^2$，与矩法相同

⇒结论：正态分布的矩法估计与ML估计相同

(2)MAP估计 ⇔ 使$p\left(\overline{\alpha}|\overline{X}\right)$最大

$$\because p\left(\alpha|\overline{X}\right)=p\left(\overline{X}|\alpha\right)p(\alpha)/p\left(\overline{X}\right)$$

$$p(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}exp\left[-\frac{(\alpha-\mu)^2}{2\beta^2}\right]$$

$p\left(\overline{X}\right)$与$\alpha$无关，不用求。

$$\therefore p\left(\alpha|\overline{X}\right)=\frac{1}{p\left(\overline{X}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_W}\right)^N\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\right)exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(x_i-\alpha\right)^2}{2\sigma_W^2}-\frac{(\alpha-\mu)^2}{2\beta^2}\right]$$

	$\therefore lnp\left(\alpha\|\overline{X}\right) = -\frac{1}{2\sigma_W{}^2}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\alpha\right)^2 - \frac{1}{2\beta^2}(\alpha-\mu)^2 + c - lnp\left(\overline{X}\right)$ $\therefore \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[lnp\left(\alpha\|\overline{X}\right)\right] = \frac{1}{\sigma_W^2}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\alpha\right) - \frac{1}{\beta^2}(\alpha-\mu) = 0$ $\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{\sigma_W{}^2+\beta^2 N}\left(\beta^2\sum_{i=1}^{N}x_i + \sigma_W{}^2\mu\right)$ $= \frac{1}{\sigma_W{}^2+\beta^2 N}\left(\beta^2 N m_X + \sigma_W{}^2\mu\right) \quad m_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ 观察$p(\alpha)$ 的分布中，$\beta\to\infty$时: $lim_{\beta\to\infty}\hat{\alpha} = m_x \Leftrightarrow ML$估计

信号参量估计（二）

估计量的性能比较	对于同一个参数，我们可以得到不同的估计量，那么如何评价这些估计量的好坏
无偏估计	①如果$E\left[\hat{\bar{\alpha}}\right]=E[\bar{\alpha}],\bar{\alpha}$是随机参量，或$E\left[\hat{\bar{\alpha}}\right]=\bar{\alpha},\bar{\alpha}$是常量。 →称为$\boxed{\text{无偏估计}}$，否则称为$\boxed{\text{有偏估计}}$ 若估计次数为N, $\lim\limits_{N\to\infty}E\left[\hat{\bar{\alpha}}\right]=E[\bar{\alpha}]\to\boxed{\text{渐进无偏估计}}$ ②若$\hat{\bar{\alpha}}$是$\bar{\alpha}$的一个有偏估计量，且 $Bias\left[\hat{\bar{\alpha}}\right]=E\left[\hat{\bar{\alpha}}\right]-\bar{\alpha}$ 则称$Bias\left[\hat{\bar{\alpha}}\right]$为 估计的偏差。
一致估计	$\lim_{N\to\infty}E\{\left\|\hat{\bar{\alpha}}_N-\bar{\alpha}\right\|^2\}=0\Leftrightarrow$均方误差$\underset{N\to\infty}{\to}0$ 则称$\hat{\bar{\alpha}}_N$为一致估计 估计的一致性与极限有关→样本数很大才适用 ①$\hat{\bar{\alpha}}$是弱一致估计：对∀小正数ε，有 $\lim_{N\to\infty}P\{\left\|\hat{\bar{\alpha}}_N-\bar{\alpha}\right\|>\varepsilon\}=0(\text{对}\forall\varepsilon>0)$ （$\hat{\bar{\alpha}}$依概率收敛于$\bar{\alpha}$） ②$\hat{\bar{\alpha}}$是强一致估计： $\lim_{N\to\infty}P\{\hat{\bar{\alpha}}_N=\bar{\alpha}\}=1$
充分估计	未知参量的估计量$\hat{\bar{\alpha}}=g\left(\bar{X}\right)$是否充分地用尽了$\bar{X}$中包含的待估参量$\bar{\alpha}$的信息 判别准则：$p\left(\bar{X}\|\bar{\alpha}\right)=p\left(\hat{\bar{\alpha}}\|\bar{\alpha}\right)f\left(\bar{X}\right)$成立，则为充分估计。 物理意义：估计量$\hat{\bar{\alpha}}$已经包含了在观测数据$\bar{X}$中与待估量$\bar{\alpha}$有关的全部信息。
优效估计(有效性)	①对于无偏估计，具有最小方差的估计量称之为优效估计。 若$\widehat{\alpha_1},\widehat{\alpha_2}$是两个对$\alpha$的无偏估计，方差分别为 $Var(\hat{\alpha}_1),Var(\hat{\alpha}_2)$

显然：方差小，估计优

但估计量的方差能小到什么程度，是否存在最小方差呢？

②可以证明：在一定的条件下，任何估计量都存在一个方差的下限。估计量的方差只能大于等于此下限，此下限称之为克拉美罗限

即：$Var(\hat{\alpha}) \geq CRLB$(克拉美罗下界)

$Cramer - Rao\ Low\ Band$

显然：对于无偏估计，

当$Var(\hat{\alpha}) = CRLB$时，即为优效估计。

③对于任何一个估计量α，估计量的方差均存在下列不等式：

$$V(\alpha) \geq \frac{1}{E\left\{\left(\frac{\partial \ln p\left(\overline{X}|\alpha\right)}{\partial \alpha}\right)^2\right\}}$$

$$\frac{1}{E\left\{\left(\frac{\partial \ln p\left(\overline{X}|\alpha\right)}{\partial \alpha}\right)^2\right\}}$$

为克拉美罗界（CLRB）

fisher信息量：

$$E\left\{\left(\frac{\partial \ln p\left(\overline{X}|\alpha\right)}{\partial \alpha}\right)^2\right\}$$

④

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln p\left(\overline{X}|\alpha\right) = k(\hat{\alpha} - \alpha)}$$

（对数似然函数的导数）

此式可作为优效估计的判别式。

⑤优效估计一定是无偏估计，无偏估计不一定是优效估计；有偏估计一定不是优效估计

⑥如果最大似然估计存在，则它一定是优效估计；并且最大似然估计是不变的

例：设$x_i = a + n_i, i = 1...N$,有N个独立观测值。

n_i是零均值，方差为σ_w^2的高斯白噪声，a是确定未知量。

试证明：样本均值估计量

	$\hat{a}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$是优效估计。 解：优效估计的前提要求无偏： (1)证明其为无偏估计 $E\{\hat{a}\}=E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right\}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left[a+n_i\right]=a$ $\therefore\Rightarrow\hat{a}$是无偏的。 (2)优效估计 $\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial\alpha}lnp\left(\overline{X}\|\alpha\right)=k(\hat{\alpha}-\alpha)$ $p\left(\overline{X}\|\alpha\right)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_W^2}\right)^{\frac{N}{2}}exp\left(-\frac{1}{2\sigma_W^2}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-a\right)^2\right)$ 取对数 $\Rightarrow lnp\left(\overline{X}\|\alpha\right)=ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_W^2}\right)^{\frac{N}{2}}-\frac{1}{2\sigma_W^2}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-a\right)^2$ 对a求导 $\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\alpha}lnp\left(\overline{X}\|\alpha\right)=\frac{1}{\sigma_W^2}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-a\right)$ $=\frac{N}{\sigma_W^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i-a\right)=\frac{N}{\sigma_W^2}(\hat{\alpha}-\alpha)$ $\therefore\Rightarrow\hat{\alpha}$是优效估计量

波形估计（一）

波形估计	参数估计：$\overline{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_M\}$不随时间变化 波形估计：随时间变化的信号$s(t)$，对$s(t)$进行估计。等效于对时变参量的估计
滤波	估计量为$s(t+t_0)$，根据不同的应用要求，t_0取值不同 (1)若$t_0=0$即估计当前时刻值，$s(t)$，称为滤波 (2)若$t_0>0$即估计未来时刻值，$s(t+t_0)$，称为预测，如：拦截导弹 (3)若$t_0<0$估计过去时刻值，$s(t+t_0)$，称为平滑 我们这里以维纳滤波为例进行讲解。维纳滤波分为连续维纳滤波和离散维纳滤波
连续 Wiener 滤波	①设期望信号：$d(t)=s(t+t_0)$ 接收信号：$x(t)=s(t)+n(t)$ 构造线性滤波器：冲激响应为$g(t)$，输出为$y(t)$ $y(t)=g(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)x(t-\tau)d\tau$ 目的：选择$g(t)$，使$y(t)\to d(t)$ ②$n(t)$随机过程，因此，$x(t),y(t)$是随机过程。因此只能在统计意义下使$y(t)\to d(t)$ 准则：误差的平均功率→min $E\left[\|e(t)\|^2\right]=E\left[\left\|d(t)-y(t)\right\|^2\right]\to\min$ $\because e(t)=s(t+t_0)-\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)x(t-\tau)d\tau$ $\therefore E\left[\|e(t)\|^2\right]=E\{\left[s(t+t_0)-\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)x(t-\tau)d\tau\right]$ $\times\left[s(t+t_0)-\int_{-\infty}^{+\infty}g(r)x(t-r)dr\right]^*\}$ 若$s(t)$是实的，则 $R_s(\tau)=E[s(t)s^*(t-\tau)]$ $R_{xs}(\tau)=E[x(t)s^*(t-\tau)]$

$$E\left[e^2(t)\right]=R_s(0)-2\int_{-\infty}^{+\infty} g\,(\tau)R_{xs}\left(t_0+\tau\right)d\tau$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g\,(r)g(\tau)R_x(\tau-r)d\tau dr]$$

③$g(t)$的求解

(1)$g(t)$为非因果信号（非因果维纳滤波器）

物理上不可实现

$$G(s)=\frac{S_{xs}(s)e^{t_0 s}}{S_x(s)}\overset{L^{-1}}{\leftrightarrow} g(t)$$

(2)$g(t)$为因果信号，物理上可实现（因果维纳滤波器）。$g(t)=0, t<0$

$$G(s)=\frac{1}{S^+{}_x(s)}\left[\frac{S_{xs}(s)e^{t_0 s}}{S^-{}_x(s)}\right]^+\overset{L^{-1}}{\leftrightarrow} g(t)$$

其中：
$S^+{}_x(s)\rightarrow$ 在$S_x(s)$中取左半S面极点的表达式
$S^-{}_x(s)\rightarrow$ 在$S_x(s)$中取右半S面极点的表达式

例如$S_x(s)=\dfrac{1}{(s-5)(s-2)(s+3)}\Rightarrow S^-{}_x(s)=\dfrac{1}{(s-5)(s-2)}$

$$S^+{}_x(s)=\frac{1}{(s+3)}$$

例：设$x(t)=s(t)+n(t), n(t)$是白噪声，$s(t)$是高斯马尔科夫过程。

且$S_s(j\omega)=\dfrac{2\sigma^2\beta}{\omega^2+\beta^2}, S_n(j\omega)=A$

且$\sigma^2=\beta=A=1$。

试求最佳的非因果$wiener-filter\left(t_0=0\right)$

解：$\because e^{-a|t|}, a>0 \overset{FT}{\Leftrightarrow} \dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$

$$let: a=1\Rightarrow \frac{2}{\omega^2+1}=S_s(j\omega)=\frac{2\sigma^2\beta}{\omega^2+\beta^2}$$

$$\therefore R_s(\tau)=e^{-|t|}$$

$$\because e^{-a|t|}\overset{L}{\leftrightarrow}\frac{2a}{-s^2+a^2}$$

$$\therefore S_s(s)=\frac{2}{-s^2+1}$$

显然$S_n(s)=1$

又因为$s(t), n(t)$不相关

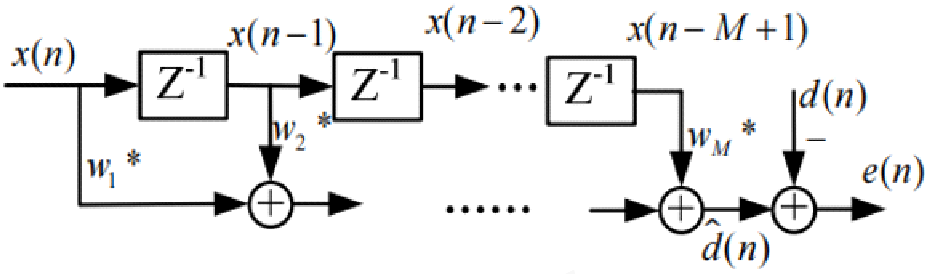
	$\Rightarrow S_x(s)=S_s(s)+S_n(s)=\frac{-s^2+3}{-s^2+1}$ $S_{xs}(s)=S_s(s)=\frac{2}{-s^2+1}$ $\therefore G(s)=\frac{\frac{2}{-s^2+1}}{\frac{-s^2+3}{-s^2+1}}\times e^{st_0}=\frac{2}{-s^2+3}$ $\Rightarrow g(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}\lvert t\rvert}$ →最佳非因果加权函数 例：对于例题1条件，求最佳因果维纳滤波器 解： $\because S_x(s)=\frac{-s^2+3}{-s^2+1}=\frac{s+\sqrt{3}}{s+1}\times\frac{-s+\sqrt{3}}{-s+1}$ $\Rightarrow S_x^+(s)=\frac{s+\sqrt{3}}{s+1}, S_x^-(s)=\frac{-s+\sqrt{3}}{-s+1}$ $\because S_{xs}(s)=S_s(s)=\frac{2}{-s^2+1}$ $\therefore \frac{S_{xs}(s)}{S_s^-(s)}=\frac{2}{\left(-s+\sqrt{3}\right)(s+1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{s+1}+\frac{\sqrt{3}-1}{-s+\sqrt{3}}$ $\therefore G(s)=\frac{s+1}{s+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}-1}{s+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{s+\sqrt{3}}$ $\Rightarrow g(t)=\left(\sqrt{3}-1\right)e^{-\sqrt{3}t}, t\geq 0$ 同样可求出：$E\left(e^2\right)=0.732$ → 非因果维纳滤波均方误差更小
正交原理	若$e(t)=s\left(t+t_0\right)-\hat{s}\left(t+t_0\right)$，则$E\left[x\left(t_1\right)e(t)\right]=0; t_1,t$任意。即：观测信号与误差信号正交。 例：设接收信号为$x(t)=s(t)+n(t)$,$n(t)$为零均值、方差为σ^2的白噪声，$s(t)$、$n(t)$相互独立。令滤波器：$g(t)=k$。$y(t)=kx(t)$ 选择$g(t)$，使$y(t)\overset{MMSE}{\rightarrow}d(t)=s\left(t+t_0\right)$ 解：由正交原理： $E[x(t)e(t)]=E\{x(t)\left[s\left(t+t_0\right)-kx(t)\right]\}$ $=E\{x(t)s\left(t+t_0\right)-kx^2(t)]\}$ $=R_s\left(t_0\right)-kR_s(0)-k\sigma^2=0$ $\Rightarrow k=\frac{R_s\left(t_0\right)}{R_s(0)+\sigma^2}$

波形估计（二）

<table>
<tr>
<td>离散维纳滤波器</td>
<td>
随着数字电路的发展，离散时间Wiener 滤波应用更广泛。

离散维纳滤波器分为：FIR结构和IIR结构，其中IIR结构又分为因果和非因果两种

①设有接收信号$x(n)$，有一期望信号$d(n)$。构造一个单输入M阶的横向滤波器（FIR滤波器）



估计输出：

$\hat{d}(n)=\sum_{i=1}^{M} x\,(n-i+1)w_i^*=W^H(n)X(n)=X^T(n)W^*(n)$

其中：$X(n)=[x(n)\,,x(n-1)\cdots,x(n-M+1)]^T$

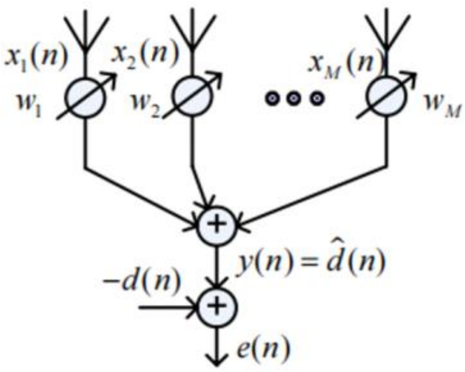
$W(n)=[w_1,\quad w_2,\cdots,w_M]^T$

$X(n)$ →表示n时刻的M个输入

$W(n)$ →表示n时刻的滤波器系数

目的：选择横向滤波器权值W，使$\hat{d}(n)$在某种意义下逼近$d(n)$

②当多个输入时

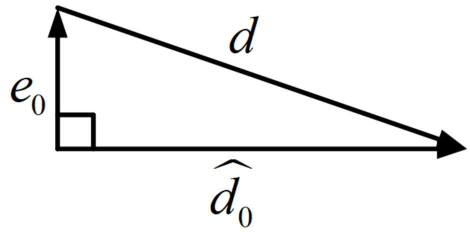


$y(n)=\sum_{k=0}^{M-1} w_k\,(n)x_k(n)$

$W(n)=[w_0(n)\quad w_1(n)\quad \cdots \quad w_{M-1}(n)]^T$

$X(n)=[x_0(n)\quad x_1(n)\quad \cdots \quad x_{M-1}(n)]^T$
</td>
</tr>
</table>

	则 $\Rightarrow \hat{d}(n) = X^T(n)W^*(n) = W^H(n)X(n)$ 单输入与多输入有同样的数学模型，可统一求解 ③定义估计误差： $e(n) = d(n) - \hat{d}(n) = d(n) - W^H X(n) = d(n) - X^T(n)W^*$ MMSE准则： $J(W) = E\left[\lvert e(n)\rvert^2\right] = E\left\{\left[d(n) - W^H X(n)\right]\left[d(n) - X^T(n)W^*\right]^*\right\}$ $= E\left[\lvert d(n)\rvert^2\right] - W^H E[X(n)d^*(n)] - E\left[d(n)X^H(n)\right]W$ $+W^H E\left[X(n)X^H(n)\right]W$ ④ $X(n)$的自相关矩阵：$R_X = E\left[X(n)X^H(n)\right] \in C^{M\times M}$ $d(n)$与$X(n)$的互相关向量：$P = E[X(n)d^*(n)] \in C^{M\times 1}$ 期望信号的平均功率：$\sigma_d^2 = E\left[\lvert d(n)\rvert^2\right]$ ⑤$J(W) = {\sigma_d}^2 - W^H P - P^H W + W^H R_X W$ 定义梯度：$\frac{dJ(W)}{dW} = -2P + 2R_x W_o = 0$ $\Rightarrow$ $R_X W_o = P$　　Wiener-Hopf方程 一般情况，R_X非奇异，即可逆；则$W_o = R_X^{-1}P$ 上述使误差的平均功率最小的思想，在信号处理中经常被称为最小均方误差(MMSE)准则 可以把具有 M 个自变量 $w_0, w_1, \cdots, w_{M-1}$的函数 $J(w)$看成一个在$(M+1)$维空间中具有M个自由度的抛物面，而这个抛物面具有唯一的全局极小值点(估计误差的平均功率最小)。经常把 $J(w)$所构成的这样一个多维空间的曲面称为误差性能面。
正交原理	当$w = w_o$时，假设估计误差信号为$e_o(n)$ $E\{u(n-i)e_o^*(n)\} = 0, \quad i = 0,1,\cdots,M-1$ 即估计误差与滤波器所有抽头的输入信号$u(n-i)$是相互正交的， 使均方误差$J(w)$取得极小值的充要条件是，对应的估计误差$e_o(n)$与n时刻的每个抽头的输入样本在统计意义下相互正交。 由于滤波器输出估计信号是权向量和输入向量的内积，即

	$\hat{d}_o(n) = w_o^H u(n)$ 于是，$\hat{d}_o(n)$与$e_o(n)$也相互正交，即有 $E\{\hat{d}_o(n)e_o^*(n)\} = w_o^H E\{u(n)e_o^*(n)\} = 0$ 可以从几何上来理解正交原理，如图所示。 
最速下降法求解维纳滤波器	①假设在第n时刻，已得到滤波器权向量为$w(n)$，则$n+1$时刻的权向量可表示为w(n)与某个微小修正量 Δw 之和： $w(n+1) = w(n) + \Delta w$ 选择修正量Δw: $\Delta w = -\frac{1}{2}\mu\nabla J(w(n))$ 其中，$\nabla J(w(n))$是均方误差 $J(w(n))$的梯度，正数μ为步长参数。所以 $w(n+1) = w(n) - \frac{1}{2}\mu\ \nabla J\ (w(n))$ 根据均方误差 $J(w(n))$，可得$\nabla J(w(n)) = -2P + 2R_x w(n)$，所以 $w(n+1) = w(n) + \mu[P - R_x w(n)]$ ②如果步长因子μ满足 $0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ 其中$\lambda_{\max}$为自相关矩阵R的最大特征值，那么随着迭代次数n的增加，算法将使均方误差$J(w(n))$逐渐减小；当$n \to \infty$时，均方误差 $J(w(n))$将逼近极小值$J_{\min}$，$w(n)$将逼近维纳霍夫方程的解w。 ③在维纳滤波器中，既然期望响应$d(n)$已知，为什么还要对其进行估计 解：维纳滤波器包括训练和工作两种过程。在训练过程中，已知期望响应$d(n)$，通过对权向量$w(n)$的设计，使从输入信号$u(n)$中得到的估计$\hat{d}(n)$在某种意义下最佳逼近$d(n)$；而在工作过程，则是用训练过程求得的$w(n)$作为滤波器的权向量，对事先未知的输入进行滤波处理，得到有用的输出

①已知输入信号向量u(n)的相关矩阵及数学期望响应信号$d(n)$的互相关向量分别为

$\vec{R} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$\vec{p} = [5 \quad 4]^T$

且已知期望相应$d(n)$的平均功率为 $\mathrm{E}\{\mathrm{d}^2(\mathrm{n})\}$=30

(1)计算维纳滤波器的权向量；(2)计算误差性能面的表达式和最小均方误差

解：(1)根据维纳霍夫方程 $\mathrm{Rw_0} = p$

得 $w_0 = \mathrm{R}^{-1}\mathrm{p}$

$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) 误差性能面的表达式为 $\mathrm{J}(\omega) = \sigma_d^2 - \mathrm{p}^{\mathrm{H}}\omega - \omega^{\mathrm{H}}\mathrm{p} + \omega^{\mathrm{H}}\mathrm{R}\omega$

最小均方误差值为将$\mathrm{w_0}$代入上面的误差性能面表达式得$J_{\min}$
$= \sigma_d^2 - \mathrm{p}^H\omega - \omega^H\mathrm{p} + \omega^H\mathrm{R}\omega$

$= \sigma_d^2 - \mathrm{p}^H\mathrm{w_0} = 30 - 14 = 16$

波形估计（三）

IIR维纳滤波器	离散非因果维纳滤波 $R_{yx}(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)R_{xx}(m-k)$ 两边取z变换$H(z)=\frac{S_{yx}(z)}{S_{xx}(z)}$
	离散因果维纳滤波 $R_{yx}(m)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)R_{xx}(m-k)$ 记$S_{xx}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{xx}(k)z^{-k}$ 做谱分解， $S_{xx}(z)=S_{xx}^{+}(z)S_{xx}^{-}(z)$ $S_{yx}(z)=H(z)S_{xx}(z)$ $H(z)S_{xx}^{+}(z)=\frac{S_{yx}(z)}{S_{xx}^{-}(z)}$ $\frac{S_{yx}(z)}{S_{xx}^{-}(z)}=\left[\frac{S_{yx}(z)}{S_{xx}^{-}(z)}\right]^{+}+\left[\frac{S_{yx}(z)}{S_{xx}^{-}(z)}\right]^{-}=B^{+}(z)+B^{-}(z)$ $H(z)=\frac{B^{+}(z)}{S_{xx}^{+}(z)}=\frac{1}{S_{xx}^{+}(z)}\left[\frac{S_{yx}(z)}{S_{xx}^{-}(z)}\right]^{+}$ $I=R_{yy}(0)-\sum_{k=0}^{\infty}h(k)R_{yx}(-k)$ 例已知$y(n)=x(n)+\omega(n)$，其中信号$x(n)=0.6x(n-1)+u(n),u(n)$是$N(0,0.64)$的白噪声，$\omega(n)$是$N(0,1)$的白噪声，试设计一个IIR的wiener滤波器来估计$x(n)$。 解:信号$x(n)$的功率谱$S_{xx}(z)=\frac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$ 即$=S_{xx}^{+}(z)S_{xx}^{-}(z)$ $S_{yy}(z)=S_{xx}(z)+S_{ww}(z)=S_{xx}(z)+1=\frac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}+1$ $=\frac{\frac{9}{5}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$ $S_{yy}^{+}(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}$ 互相关谱 $S_{yx}(z)=S_{xx}(z)=\frac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$ $\quad y\perp\omega$ $H(z)=\frac{\frac{9}{5}}{S_{yy}^{+}(z)}\left[\frac{S_{yx}(z)}{S_{yy}^{-}(z)}\right]^{+}=\frac{1-0.6z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\left[\frac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}\cdot\frac{1-0.6z}{1-\frac{1}{3}z}\right]\times\frac{9}{5}$ $=\frac{0.8\times\frac{9}{5}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$ $h(n)=1.44\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$

卡尔曼滤波	希望用迭代的方法求解得到滤波器，或估计结果 $\hat{s}(t+t_0)$ 即：用$k-1$时刻的估计结果$\hat{s}_{k-1}$，根据输入对其修正，得到k时刻的估计输出$\hat{s}_k$ $Kalman$滤波的数学模型 (1)系统的状态方程($StateBquation$) $s(k)=\alpha s(k-1)+w(k-1) \quad or \quad s_k=\alpha s_{k-1}+w_{k-1}$ w_k是均值为零,方差为σ_w^2的白噪声 (2)观测方程(0bservation Equation) $x_k=cs_k+v_k \quad (5-46)$ $\mathrm{v_k}$是均值为零，方差为 σ_v^2 的白噪声； 目的：根据$\mathrm{x_k}$,估计$\mathrm{s_k}$ (3)估计方程 $\hat{s}_k=a_k\hat{s}_{k-1}+b_kx_k$ 问题：a_k =?　 b_k =? (4)一步预测方程 $\hat{S}_{k\|k-1}=\alpha\hat{s}_{k-1}$ 也可以多步预测(外推),即当目标暂时丢失时可以 用此式估计一段时间。 (5)估计误差 $e_k=s_k-\hat{s}_k$ 一步预测误差 $e_{k\|k-1}=s_k-\hat{s}_{k\|k-1}=s_k-\alpha\hat{s}_{k-1}$ $=\alpha(s_{k-1}-\hat{s}_{k-1})+w_{k-1}=\alpha e_{k-1}+w_{k-1}$