

►一、填空题



1. 5个女生和7个男生进行排列，女生两两不相邻的排列有_____种。
男生A和B之间正好有三个女生且无其它男生的排列有_____种。
2. 把4个相同的球放入3个不同的盒子中，每个盒子至少放一个球，共有_____种放法。若问题改成3个相同的盒子，则放法有_____种。
3. 根据牛顿二项式定理，计算 $(1 - x)^{-2/3}$ 的展开式中 x^k 的系数为_____。
4. 一个班有50人，则存在至少有_____个人的生日在同一个月。



►二、解答题(需要写必要的解题步骤)

1. 证明: ① $P(n, r) = rP(n - 1, r - 1) + P(n - 1, r)$

② $C(n, r) = C(n - 1, r) + C(n - 1, r - 1)$ 。

2. 一个聚会有20个人，要分成两桌来坐，每桌10人。问有多少种不同的就座方式？（如果一桌的两种坐的方式通过转动后可以重叠，则认为是同一种坐法）

3. 不超过1万，且百位数只能是3, 6, 9的偶数有多少个？



►二、解答题(需要写必要的解题步骤)

4. 一棋手为参加一次锦标赛要进行77天的训练，如果他每天至少下一盘棋，且每周至多下12盘棋，试证明不管他怎样安排，必存在相继的若干天，在这段时间中他恰好下棋21盘。
5. 证明世界上任意6个人中，必定存在3个人要么相互认识要么互相都不认识。
6. 记Ramsey数为 $N(a, b)$ ，证明： $N(a, b) \leq N(a - 1, b) + N(a, b - 1)$ 。



►二、解答题(需要写必要的解题步骤)

7. 利用容斥原理，求不超过100的素数个数。
8. 有 n 个学生，坐在 n 个位子上，现在学生们都去操场运动回来了重新坐位子，问有多少种方式这 n 个学生坐的位子和他原来的位子都不一样？
9. 求序列 $\{0, 1, 8, 27, \dots, n^3, \dots\}$ 的普通母函数。

► 答案



一、填空题

1. $7! P(8, 5)$ (或33868800), $P(5, 3)2! 8!$

2. 3, 1

3. $\frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3k-1)}{3^k k!}$

4. 5

二、解答题

$$1. \textcircled{1} P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{(r+n-r)(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{r(n-1)!}{(n-r)!} + \frac{(n-r)(n-1)!}{(n-r)!} =$$

$$\frac{r(n-1)!}{(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} = rP(n-1, r-1) + P(n-1, r)$$

$$\textcircled{2} C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)。$$

二、解答题

2. 先将20个人分成两组，方法数为 $\frac{1}{2} \binom{20}{10}$ 。然后每组进行圆排列 $9! 9!$ ，

从而不同的就座方式总数为 $\frac{1}{2} \binom{20}{10} 9! 9!$ 。

3. 不超过1万的数最多4位，百位数有3种选择（3, 6, 9），个位数只能是0, 2, 4, 6, 8共5种选择，从而总的个数为 $3 \times 5 \times 10 \times 10 = 1500$ 。

二、解答题

4. **证明：**设 a_j 是前 j 天该棋手下棋盘数的和， $j = 1, 2, \dots, 77$ ，由于每天至少一盘棋，所以序列 a_1, a_2, \dots, a_{77} 是严格递增序列，且 $a_1 \geq 1, a_{77} \leq 11 * 12 = 132$. 于是序列 $a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ 也是严格递增序列。而 $a_{77} + 21 \leq 153$ ，故154个数 $a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ 都在1和153两个整数之间。

由鸽笼原理知，这154个数中必有两个是相等的。故一定存在两个数 i 和 j ，使得 $a_i = a_j + 21$ 即 $a_i - a_j = 21$ 。

因此，在第 $j + 1, j + 2, \dots, i$ 天这些天中，这个棋手恰好下棋21盘。

二、解答题

5. 先在6个人中任选一个人a，根据鸽笼原理，要么有3个人都认识a，要么有3个人都不认识a。假设有3个人（b, c, d）都认识a，那么这三个人如果有两人认识（不妨设为b和c），则a, b, c就构成三个相互认识的人，否则b, c, d就互相不认识。而若有3个人（b, c, d）都不认识a，那么这三个人如果有两人不认识（不妨设为b和c），则a, b, c就构成三个相互不认识的人，否则b, c, d就互相不认识。

二、解答题

6. 证明：在 $R(a - 1, b) + R(a, b - 1)$ 个人中任意挑选一个人，把这个人称作 p ，则剩下的 $R(a - 1, b) + R(a, b - 1) - 1$ 人可分成两个集合Friend(与 p 相识的人)和Stranger(与 p 不相识的人)。由鸽笼原理的一般形式知，或者在Friend中至少有 $R(a - 1, b)$ 个人，或者在Stranger中至少有 $R(a, b - 1)$ 个人。
1) 如果在Friend中有 $R(a - 1, b)$ 个人，这表明有 $a - 1$ 个人彼此相识，或者有 b 个人彼此不相识。若有 $a - 1$ 个人彼此相识，则加上 p 就有 a 个人彼此相识，满足 $R(a, b)$ 的要求。
2) 如果在Stranger中有 $R(a, b - 1)$ 个人，这表明有 a 个人彼此相识，或者 $b - 1$ 个人彼此不相识。若有 $b - 1$ 个人彼此不相识，则加上 p 就有 b 个人彼此不相识，因而也满足 $R(a, b)$ 的要求。

► 答案



二、解答题

7. **解：**因 $10^2 = 100$, 故不超过100的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过100的合数的因子不可能都超过10。 设 $A_i = \{x|x \leq 100, i|x\}, i = 2, 3, 5, 7$ 。

由于 $|A_2| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50, |A_3| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33, |A_5| = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20, |A_7| = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 13, |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3} \right\rfloor = 16, |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10, |A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{14} \right\rfloor = 7, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6, |A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{21} \right\rfloor = 4, |A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor = 2, |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 3, |A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 2, |A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1, |A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 0, |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 0$

$$\begin{aligned} & |\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}| = 100 - |A_2| - |A_3| - |A_5| - |A_7| \\ & + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7| \\ & - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7| - |A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 100 - (50 + 33 + 20 + 13) + (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) - (3 + 2 + 1 + 0) + 0 = 23 \end{aligned}$$

由于这里排除了2, 3, 5, 7这四个素数, 又包含了1这个非素数。故所求的不超过100的素数个数为:

$$23 + 4 - 1 = 26$$

► 答案



二、解答题

8. 这是错排问题, $D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$

9. 由牛顿二项定理推论知: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

两边微分后再乘以x得 $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

两边微分后再乘以x得 $\frac{(1+x)x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

两边微分后再乘以x得 $\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$

即序列{0, 1, 8, 27, ..., n^3 , ...}的普通母函数为 $\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$