

## ◀ 一、填空题

1. 5个女生和7个男生进行排列，女生两两不相邻的排列有\_\_\_\_\_种。  
男生A和B之间正好有三个女生且无其它男生的排列有\_\_\_\_\_种。
2. 把4个相同的球放入3个不同的盒子中，每个盒子至少放一个球，共有\_\_\_\_\_种放法。若问题改成3个相同的盒子，则放法有\_\_\_\_\_种。
3. 根据牛顿二项式定理，计算 $(1 - x)^{-2/3}$ 的展开式中 $x^k$ 的系数为\_\_\_\_\_。
4. 一个班有50人，则存在至少有\_\_\_\_\_个人的生日在同一个月。

## ◀ 二、解答题(需要写必要的解题步骤)

1. 证明: ①  $P(n, r) = rP(n - 1, r - 1) + P(n - 1, r)$

②  $C(n, r) = C(n - 1, r) + C(n - 1, r - 1)$ 。

2. 一个聚会有20个人, 要分成两桌来坐, 每桌10人。问有多少种不同的就座方式? (如果一桌的两种坐的方式通过转动后可以重叠, 则认为是同一种坐法)

3. 不超过1万, 且百位数只能是3, 6, 9的偶数有多少个?

## ◀ 二、解答题(需要写必要的解题步骤)

4. 一棋手为参加一次锦标赛要进行77天的训练，如果他每天至少下一盘棋，且每周至多下12盘棋，试证明不管他怎样安排，必存在相继的若干天，在这段时间中他恰好下棋21盘。

5. 证明世界上任意6个人中，必定存在3个人要么相互认识要么互相都不认识。

6. 记Ramsey数为  $N(a, b)$ ，证明： $N(a, b) \leq N(a - 1, b) + N(a, b - 1)$ 。

## ◀ 二、解答题(需要写必要的解题步骤)

7. 利用容斥原理, 求不超过100的素数个数。
8. 有 $n$ 个学生, 坐在 $n$ 个位子上, 现在学生们都去操场运动回来了重新坐位子, 问有多少种方式这 $n$ 个学生坐的位子和他原来的位子都不一样?
9. 求序列 $\{0, 1, 8, 27, \dots, n^3, \dots\}$ 的普通母函数。

## 一、填空题

1.  $7! P(8, 5)$  (或 33868800),  $P(5, 3) 2! 8!$

2. 3, 1

3.  $\frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3k-1)}{3^k k!}$

4. 5

## 二、解答题

$$1. \textcircled{1} P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{(r+n-r)(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{r(n-1)!}{(n-r)!} + \frac{(n-r)(n-1)!}{(n-r)!} =$$

$$\frac{r(n-1)!}{(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} = rP(n-1, r-1) + P(n-1, r)$$

$$\textcircled{2} C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)。$$

## 二、解答题

2. 先将20个人分成两组，方法数为 $\frac{1}{2} \binom{20}{10}$ 。然后每组进行圆排列 $9! 9!$ ，

从而不同的就座方式总数为 $\frac{1}{2} \binom{20}{10} 9! 9!$ 。

3. 不超过1万的数最多4位，百位数有3种选择（3，6，9），个位数只能是0，2，4，6，8共5种选择，从而总的个数为 $3 \times 5 \times 10 \times 10 = 1500$ 。

## 二、解答题

**4. 证明：** 设 $a_j$ 是前 $j$ 天该棋手下棋盘数的和， $j = 1, 2, \dots, 77$ ，由于每天至少一盘棋，所以序列 $a_1, a_2, \dots, a_{77}$ 是严格递增序列，且 $a_1 \geq 1, a_{77} \leq 11 * 12 = 132$ . 于是序列 $a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ 也是严格递增序列。而 $a_{77} + 21 \leq 153$ ，故154个数 $a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ 都在1和153两个整数之间。

由鸽笼原理知，这154个数中必有两个是相等的。故一定存在两个数 $i$ 和 $j$ ，使得 $a_i = a_j + 21$ 即 $a_i - a_j = 21$ 。

因此，在第 $j + 1, j + 2, \dots, i$ 天这些天中，这个棋手恰好下棋21盘。



## 二、解答题

5. 先在6个人中任选一个人 $a$ ，根据鸽笼原理，要么有3个人都认识 $a$ ，要么有3个人都不认识 $a$ 。假设有3个人 ( $b, c, d$ ) 都认识 $a$ ，那么这三个人如果有两人认识（不妨设为 $b$ 和 $c$ ），则 $a, b, c$ 就构成三个相互认识的人，否则 $b, c, d$ 就互相不认识。而若有3个人 ( $b, c, d$ ) 都不认识 $a$ ，那么这三个人如果有两人不认识（不妨设为 $b$ 和 $c$ ），则 $a, b, c$ 就构成三个相互不认识的人，否则 $b, c, d$ 就互相不认识。

## 二、解答题

**6. 证明：在  $R(a-1, b) + R(a, b-1)$  个人中任意挑选一个人，把这个人称作  $p$ ，则剩下的  $R(a-1, b) + R(a, b-1) - 1$  人可分成两个集合 Friend(与  $p$  相识的人) 和 Stranger(与  $p$  不相识的人)。由鸽笼原理的一般形式知，或者在 Friend 中至少有  $R(a-1, b)$  个人，或者在 Stranger 中至少有  $R(a, b-1)$  个人。**

**1) 如果在 Friend 中有  $R(a-1, b)$  个人，这表明有  $a-1$  个人彼此相识，或者有  $b$  个人彼此不相识。若有  $a-1$  个人彼此相识，则加上  $p$  就有  $a$  个人彼此相识，满足  $R(a, b)$  的要求。**

**2) 如果在 Stranger 中有  $R(a, b-1)$  个人，这表明有  $a$  个人彼此相识，或者  $b-1$  个人彼此不相识。若有  $b-1$  个人彼此不相识，则加上  $p$  就有  $b$  个人彼此不相识，因而也满足  $R(a, b)$  的要求。**

## 二、解答题

**7. 解:** 因  $10^2 = 100$ , 故不超过100的合数必然是2、3、5、7的倍数, 而且不超过100的合数的因子不可能都超过10. 设  $A_i = \{x | x \leq 100, i | x\}$ ,  $i = 2, 3, 5, 7$ .

由于  $|A_2| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$ ,  $|A_3| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$ ,  $|A_5| = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$ ,  $|A_7| = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 13$ ,  $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3} \right\rfloor = 16$ ,

$|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$ ,  $|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{14} \right\rfloor = 7$ ,  $|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6$ ,  $|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{21} \right\rfloor = 4$ ,  $|A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor = 2$ ,  
 $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 3$ ,  $|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 2$ ,  $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1$ ,  $|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{100}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 0$ ,  $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 0$

$|\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}| = 100 - |A_2| - |A_3| - |A_5| - |A_7|$

$+ |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7|$

$- |A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7| - |A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7|$

$+ |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 100 - (50 + 33 + 20 + 13) + (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) - (3 + 2 + 1 + 0) + 0 = 23$

由于这里排除了2, 3, 5, 7这四个素数, 又包含了1这个非素数. 故所求的不超过100的素数个数为:

$$23 + 4 - 1 = 26$$

## 二、解答题

8. 这是错排问题,  $D_n = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$

9. 由牛顿二项定理推论知:  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

两边微分后再乘以 $x$ 得  $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

两边微分后再乘以 $x$ 得  $\frac{(1+x)x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

两边微分后再乘以 $x$ 得  $\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$

即序列 $\{0, 1, 8, 27, \cdots, n^3, \cdots\}$ 的普通母函数为 $\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$