

组合 数学

习题解答

ZUHE SHUXUE XITI JIEDA

孙世新 卢光辉 编著
戴波 刘辉
张先迪 审

(a) initial state: $A^1 \Sigma_u^+ (J=10)_J^1$

$$\begin{aligned} \sigma_{jj'} &= c_j^2 c_{j'}^2 \sigma_{jj'}^S \\ &\quad + d_j^2 d_{j'}^2 \sigma_j^T \\ &\quad \times \cos \theta_{ST}. \end{aligned}$$



电子科技大学出版社

组合数学习题解答

孙世新 卢光辉 戴 波 刘 辉 编 著

张先迪 审

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

组合数学习题解答 / 孙世新编著. —成都: 电子科技大学出版社, 2006.5
ISBN 7-81114-092-6

I.组... II.孙... III.组合数学 —高等学校—解
题 IV.O·157-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第031972号

内 容 提 要

本书是电子科技大学等国内多所高等院校目前正在使用的《组合数学》(电子科技大学出版社出版, 2003年, 孙世新编著)教材的配套指导书。其主要内容包括原教材中的每一章的内容概要以及全部习题解答, 它几乎涉及计算机专业及非数学专业适用的现行组合数学教材中的所有基本理论、基本问题、基本方法和应用。

本书适合于计算机专业及非数学专业的理科、工科专业的本科生、研究生作为参考书使用, 也可作为组合数学教师教学参考用书以及工程技术人员的自学教材或参考书。

组合数学习题解答

孙世新 卢光辉 戴波 刘辉 编 著
张先迪 审

出 版	电子科技大学出版社(成都市建设北路二段四号, 邮编: 610054)
责任编辑	万晓桐
发 行	电子科技大学出版社
印 刷	成都蜀通印务有限责任公司
开 本	787×1092 1/16 印张 13.875 字数 338 千字
版 次	2006年5月第一版
印 次	2006年5月第一次印刷
书 号	ISBN 7-81114-092-6/O·5
印 数	1~4000册
定 价	18.00元

■ 版权所有 侵权必究 ■

- ◆ 邮购本书请与本社发行科联系。电话: (028) 83201495 邮编: 610054
- ◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

前 言

当今,组合数学中的许多问题是数学中的精华,同时也是推动计算机科学与技术蓬勃发展的原动力。组合数学的应用也涉及到自然科学和社会科学的许多领域。比如,它在计算机科学、编码理论、通信网络、电子工程、实验设计、交通运输、社会经济学、管理科学等领域中都有着广泛的使用价值,特别是在计算机科学中有着重要的应用。这不仅因为它是这门学科的重要基础,更主要的原因是计算机科学的核心是算法的研究,而组合算法是算法的重要组成部分。没有组合数学的理论基础,组合算法的深入研究和分析是不可能的。由于以上原因,组合数学在当今世界中受到普遍的高度重视。

由孙世新教授编著、电子科技大学出版社出版的《组合数学》目前已成为国内多所高校正在使用的教材。由于教材涉及的内容广、习题多、题难做,使学生在学习这门课程时遇到许多困难。为了使学生更好地学习组合数学,全面掌握组合数学的基本问题、基本原理、基本方法及其应用,编写本书是十分必要的。

本书每章由两部分组成:

1. 内容提要:简要地介绍每章的主要基础知识,包括定义、定理以及所使用的方法等。(注意:本书中所使用的定理、公式、图和表的编号都是原教材或原参考文献中对应的定理、公式、图和表的编号。)
2. 习题解答:对原教材每章中的习题进行了较详尽的解答和分析(由于原教材中第十一章的所有习题都可以在该章找到答案,故本书未能给出该章的习题解答)。

本书叙述详尽,习题由浅入深、条理清晰、层次分明。读者可通过该书对组合数学有更深刻、更全面的认识和了解,提高分析和解决组合数学问题的能力。本书中每章的内容提要都是对原教材中相应内容的概括和归纳,读者完全能够根据每章的内容提要把握原书“由厚变薄”。而每章中习题的解答和分析可以使读者全面而深刻地掌握组合数学中的主要内容、基本原理和使用的方法,并能达到举一反三、纲举目张、立竿见影的效果。该书适合于计算机专业及非数学专业的理科、工科专业的本科生、研究生作为参考书使用,也可作为组合数学教师的教学参考用书以及工程技术人员自学的教材或参考书。

本书的编写得到了电子科技大学计算机学院和研究生院领导的支持和鼓励,同时也得到了编者的许多学生的支持和帮助,特别是编者的博士和硕士研究生们,他们使用过本书原稿并指出了一些错误和缺点,并对本书的编写做了许多工作。在此一并向他们表示最衷心、最诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免存在不少错误和缺点,恳请读者批评指正。

编 者

2005 年 10 月于电子科技大学

目 录

第一章 排列、组合与二项式定理	1
一、内容提要	1
二、习题解答	5
第二章 鸽笼原理与 Ramsey 定理	22
一、内容提要	22
二、习题解答	23
第三章 容斥原理	33
一、内容提要	33
二、习题解答	34
第四章 母函数	53
一、内容提要	53
二、习题解答	56
第五章 递归关系	72
一、内容提要	72
二、习题解答	76
第六章 Pólya 定理	98
一、内容提要	98
二、习题解答	100
第七章 网络流	113
一、内容提要	113

二、习题解答	120
第八章 线性规划	146
一、内容提要	146
二、习题解答	154
第九章 动态规划	179
一、内容提要	179
二、习题解答	183
第十章 区组设计	196
一、内容提要	196
二、习题解答	203
参考文献	216

第一章 排列、组合与二项式定理

一、内容提要

加法规则 设 S 是有限集合, 若 $S_i \subseteq S$ ($i=1, 2, 3, \dots, m$), $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$, 且 $i \neq j$ 时, $S_i \cap S_j = \phi$, 则有

$$|S| = \left| \bigcup_{i=1}^m S_i \right| = \sum_{i=1}^m |S_i| \quad (1.1)$$

特别, 当 $m=2$ 时, 有

$$|S| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$$

乘法规则 若 S_i ($i=1, 2, \dots, m$) 为有限集, 且

$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m = \{(a_1, a_2, \dots, a_m) | a_i \in S_i, i=1, 2, \dots, m\}$, 则有

$$|S| = |S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m| = \prod_{i=1}^m |S_i| \quad (1.2)$$

特别, 当 $m=2$ 时, 有 $|S| = |S_1 \times S_2| = |S_1| \times |S_2|$

定义 1.1 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是具有 n 个元素的集合, r 是正整数. 从这 n 个不同的元素里取 r 个按照一定的次序排列起来 ($r \leq n$), 称为集合 A 的 r -排列. 其排列数记为 $P(n, r)$. 换言之, A 的 r -排列为 A 的 r 有序子集.

另外, 为了处理问题的方便, 我们定义

$$P(n, r) = \begin{cases} 1 & n \geq r = 0 \\ 0 & n < r \end{cases}$$

定理 1.1 对于正整数 n, r ($r \leq n$), 有

$$P(n, r) = n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (1.3)$$

推论 1 当 $n \geq r \geq 2$ 时, 有

$$P(n, r) = nP(n-1, r-1) \quad (1.4)$$

推论 2 当 $n \geq r \geq 2$ 时, 有

$$P(n, r) = r \cdot P(n-1, r-1) + P(n-1, r) \quad (1.5)$$

定义 1.2 从集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的 n 个不同元素中取出 r 个元素按照某种顺序

(如逆时针)排成一个圆圈,称这样的排列为圆排列(或称循环排列).

定理 1.2 集合 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 中的 r 个元素的圆排列的个数为

$$P(n, r)/r = n!/(r(n-r)!) \quad (1.6)$$

定义 1.3 从重集 $B = \{k_1 \cdot b_1, k_2 \cdot b_2, \dots, k_n \cdot b_n\}$ 中选取 r 个元素按照一定的顺序排列起来,称这种 r -排列为重排列.

定理 1.3 重集 $B = \{\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, \dots, \infty \cdot b_n\}$ 的 r -排列的个数为 n^r .

定理 1.4 重集 $B = \{n_1 \cdot b_1, n_2 \cdot b_2, \dots, n_k \cdot b_k\}$ 的全排列的个数为

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

$$\text{式中 } n = \sum_{i=1}^k n_i$$

定义 1.4 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是具有 n 个元素的集合, r 是非负整数. 从这 n 个不同的元素里取 r 个不考虑次序组合起来 ($r \leq n$), 称为集合 A 的 r -组合. 换句话说, A 的 r -组合是 A 的 r -无序子集. 用 $C(n, r)$ 或 $\binom{n}{r}$ 表示集合 A 的 r -组合的个数.

另外, 为了使用方便, 我们定义:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \begin{cases} 1 & n \geq r = 0 \\ 0 & n < r \end{cases}$$

定理 1.5 对于 $r \leq n$, 有

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (1.7)$$

推论 1

$$C(n, r) = C(n, n-r) \quad (1.8)$$

推论 2 (Pascal 公式)

$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1) \quad (1.9)$$

推论 3

$$C(n-1, r-1) + C(n-2, r-1) + \cdots + C(r-1, r-1) = C(n, r) \quad (1.10)$$

定理 1.6 $B = \{\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, \dots, \infty \cdot b_n\}$ 的 r -组合数为

$$F(n, r) = \binom{n+r-1}{r} \quad (1.11)$$

定理 1.7 (二项式定理) 当 n 是一个正整数时, 对任何 x 和 y , 有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (1.12)$$

推论 1 当 n 是正整数时, 对任何 x, y 均有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

推论 2 当 n 是正整数时, 对所有的 x 有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k \quad (1.13)$$

推论 3 当 n 是正整数时, 都有

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (1.14)$$

推论 4 当 n 是正整数时, 都有

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (1.15)$$

定理 1.8 设 α 是一个任意实数, 则对于满足 $|x/y| < 1$ 的所有 x 和 y 有

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k} \quad (1.16)$$

式中

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

推论 1 对于 $|z| < 1$ 的任何 z , 有

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \quad (1.17)$$

推论 2 对于 $|z| < 1$ 的任何 z , 有

$$(1+z)^{-n} = \frac{1}{(1+z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k \quad (1.18)$$

推论 3 当 $|z| < 1$ 时, 有

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \quad (1.19)$$

推论 4 当 $|z| < 1$ 时, 有

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (1.20)$$

推论 5 当 $|z| < 1$ 时, 有

$$\sqrt{1+z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} z^k \quad (1.21)$$

推论 6 当 $|-rz| < 1$, 即 $|z| < 1/|r|$ 时, 有

$$(1-rz)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} r^k z^k \quad (1.22)$$

组合恒等式

恒等式 1 对于正整数 n 和 k , 有

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad (1.23)$$

恒等式 2 对于正整数 n , 有

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \quad (1.24)$$

恒等式 3 对于正整数 n , 有

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0 \quad (1.25)$$

恒等式 4 对于正整数 n , 有

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \quad (1.26)$$

恒等式 5 对于正整数 n , 有

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} k^2 = 0 \quad (1.27)$$

恒等式 6 对于正整数 n , 有

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad (1.28)$$

恒等式 7 对于正整数 n , m 和 p , $p \leq \min\{m, n\}$, 有

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p} \quad (1.29)$$

恒等式 8 对于正整数 m , n 有

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{m}{k} = \binom{m+n}{m} \quad (1.30)$$

恒等式 9 对于任何正整数 n , 有

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (1.31)$$

恒等式 10 对于非负整数 p , q , n , 有

$$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{q}{k} \binom{n+k}{p+q} = \binom{n}{p} \binom{n}{q}$$

恒等式 11 对于非负整数 p, q, n , 有

$$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{q}{k} \binom{n+p+q-k}{p+q} = \binom{n+p}{p} \binom{n+q}{q} \quad (1.32)$$

恒等式 12 对于非负整数 n 和 k , 有

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (1.33)$$

恒等式 13 对于所有实数 α 和非负整数 k , 有

$$\sum_{j=0}^k \binom{\alpha+j}{j} = \binom{\alpha+k+1}{k} \quad (1.34)$$

证明恒等式常用的方法有:

1. 数学归纳法.
2. 利用二项式系数公式, 特别是 Pascal 公式.
3. 比较级数展开式中的系数 (包括二项式定理和以后要讲的母函数法).
4. 积分微分法.
5. 组合分析法.

还有其他的一些常用方法, 如有限差分法、级数变换法、多项式的有限 Taylor 展开法等. 这些方法本书未涉及, 有兴趣的读者可参看 H.W.Gonld 所著的《组合恒等式》一书.

二、习题解答

1.1 求在 1000 和 9999 之间各位数字都不相同的奇数个数.

解: 在 1000 和 9999 之间的数都是 4 个数字的有序排列. 由于题设要求所求的数字是奇数, 因此个位数字只有五种选择, 即选 1, 3, 5, 7, 9. 题设又要求各位数字都不相同, 即千位、百位、十位和个位上的数字各不相同. 另外要求所求数字大于 1000, 则说明千位数字只能在 1, 2, 3, \dots , 9 中选取. 具体步骤如下:

① 先从 1, 3, 5, 7, 9 中选出一位作为个位数字, 共有 5 种选法;

② 再从 1, 2, \dots , 9 中除去①中选得的数字后选一个数作为千位数字, 共有 8 种选法;

③ 再从 0, 1, 2, \dots , 9 中除去①、②中选得的数字后选一个数作为百位数字, 共有 8 种选法;

④ 最后从 0, 1, 2, \dots , 9 中除去①、②、③中选得的数字后选一个数作为十位数字, 共有 7 种选法;

因为每选一个符合题设条件的四位数需要经历以上四步, 所以由乘法规则知, 各位数字都不一样的奇数共有:

$$5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240 \text{ 个}$$

1.2 求在 1000 和 9999 之间各位数字都不相同, 而且由奇数构成的整数个数.

解: 由奇数构成的 4 位数只能是由 1, 3, 5, 7, 9 这 5 个数字构成, 由于这 5 个数字中没有包括数字 0, 所以不用考虑 0 排在千位时的特殊情况. 题设又要求各位数字都不相同, 因此这是一个从 5 个不同元素中选 4 个的排列, 可得

$$P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

1.3 洗一副扑克牌 52 张有多少种方法?

解: 由于扑克牌每一张都不相同, 洗一副扑克牌相当于问有 52 个空位, 将 52 张扑克牌放入 52 个空位中的排法, 所以此题是典型的全排列问题, 由全排列公式可得洗一副扑克牌有 $52!$ 种方法.

1.4 10 个人坐在一排看戏有多少种就坐方式? 如果其中有两人不愿坐在一起, 又有多少种就坐方式?

解: 这显然是一个 10 个人的全排列问题, 故共有 $10!$ 种就坐方式. 如果两个人坐在一起, 则可假定把这两个人捆绑在一起, 于是问题就变成 9 个人的全排列, 共有 $9!$ 种就坐方式. 而这两个人相捆绑的方式又有 2 种 (甲在乙的左面或甲在乙的右面), 故两人坐在一起的方式数共有 $2 \times 9!$, 于是两人不坐在一起的方式共有 $10! - 2 \times 9!$.

1.5 10 个人围圆桌而坐, 其中两人不愿坐在一起, 问有多少种就坐方式?

解: 首先, 这是一个圆排列问题, 不考虑特殊情况, 10 个人围圆桌就坐共有 $\frac{10!}{10}$ 种方式. 当两人必须坐在一起时, 可看作一个共同体参加圆排列, 即此时为 9 个人参加圆排列, 有 $\frac{9!}{9}$ 种方式, 又由于两个人坐在一起的时候位置可以互换, 所以两人坐在一起的方式数为 $2 \times \frac{9!}{9}$, 故两人不坐在一起的方式数为:

$$\frac{10!}{10} - 2 \times \frac{9!}{9} = 9! - 2 \times 8!$$

1.6 6 男 6 女围圆桌交替就坐有多少种就坐方式?

解: 先将 6 个男的围圆桌而坐, 其就坐方式为 $\frac{6!}{6}$ 种, 然后加入一个女的有 6 种方式, 再加第 2 个女的就有 5 种方式, 加入第 3 个女的就有 4 种方式……加入第 6 个女的只有 1 种方式, 故由乘法规则知, 其就坐方式共有:

$$\frac{6!}{6} \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! \times 5!$$

1.7 由 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字能组成多少个没有重复数字, 不能被 5 整除, 且比 20 000 大的五位数?

解:

方法一:

① 先考虑这五个数字能组成的没有重复且比 20 000 大的五位数. 因为要比 20 000 大, 所以万位上只能由 2, 3, 4, 5 这四个数字之一组成, 即万位上的数字有 4 种选择方式, 确定了万位后, 可知, 千位上有 4 种选择方式, 百位上有 3 种选择方式, 十位上有 2 种选择方式, 个位上有 1 种选择方式, 由乘法规则可得, 共有 $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ (个)

② 在①中加入限制条件“能被 5 整除”, 此时个位只能选 5, 万位上的数字要大于 1, 所以万位上有 3 种选择方式, 千位上有 3 种选择方式, 百位上有 2 种选择方式, 十位上有 1 种选择方式, 由乘法规则可得, 共有 $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ (个)

③ 题设中是求不能被 5 整除的数, 只需用①中所求的个数减去②中所求的个数, 即 $96 - 18 = 78$ (个)

方法二:

因为要组成的五位数既不能被 5 整除, 且比 20 000 大, 因此个位上只能取 1, 2, 3, 4 这四个数字, 万位上只能取 2, 3, 4, 5 这四个数字, 这样的五位数分为两种情况:

① 个位上取数字 1. 此时个位上的数字只有 1 种选法, 万位上可取 2, 3, 4, 5 这四个数字, 有 4 种选择方式, 千位上有 3 种选择方式, 百位上有 2 种选择方式, 十位上有 1 种选择方式, 由乘法规则可得, 共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$ (个).

② 个位上取 2, 3, 4 这三个数字之一. 此时个位上的数字有 3 种选法, 万位上可取 2, 3, 4 这三个数字中剩下的两个数字或者数字 5, 有 3 种选择方式, 千位上有 3 种选择方式, 百位上有 2 种选择方式, 十位上有 1 种选择方式, 由乘法规则可得, 共有

$$3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 54 \text{ (个)}$$

故这样的 5 位数共有

$$24 + 54 = 78 \text{ (个)}$$

1.8 证明:

$$\text{a. } \binom{n}{r} = \frac{n}{n-r} \binom{n-1}{r}$$

$$\text{证明: 原式左端} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n}{n-r} \cdot \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} = \frac{n}{n-r} \cdot \binom{n-1}{r} = \text{右端}$$

$$\text{b. } \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n-1}$$

$$\text{证明: 原式左端} = \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2n!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n-1} = \text{右端}$$

$$\text{c. } n \binom{n-1}{r} = (r+1) \binom{n}{r+1}$$

证明:

$$\begin{aligned}\text{原式左端} &= n \binom{n-1}{r} = n \cdot \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} = \frac{n!}{r!(n-r-1)!} = (r+1) \cdot \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \\ &= (r+1) \cdot \binom{n}{r+1} = \text{右端}\end{aligned}$$

1.9 在 $1 \sim 10\,000\,000\,000$ 之间的 100 亿个数中, 有多少个数含有数字 1? 又有多少个数不含有数字 1?

解: 先求不含有数字 1 的个数, 在 0 和 9 999 999 999 之间的 100 亿个数中, 不含有数字 1 的个数, 实际上就是重集 $\{\infty \cdot 0, \infty \cdot 2, \infty \cdot 3, \dots, \infty \cdot 9\}$ 的 10-排列的个数, 故有 9^{10} 个数不含有数字 1, 于是在 $1 \sim 10\,000\,000\,000$ 之间的一百亿个数中有 $9^{10} - 1$ 个数不含有数字 1, 因此有 $(10^{10} - 1) - (9^{10} - 1) = 10^{10} - 9^{10}$ 个数含有数字 1.

注意: 排除 0

1.10 在 1000~9999 之间的整数, 有多少个整数仅包含数字 3 一次? 有多少个整数不包含数字 3? 又有多少个整数仅包含 3 个 7?

解: ① 仅包含 3 一次, 分两种情况.

a. 千位为 3, 由于仅包含 3 一次, 百位、十位和个位可任取非 3 数字, 故在重集 $B = \{\infty \cdot 0, \infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \infty \cdot 4, \infty \cdot 5, \dots, \infty \cdot 9\}$ 中, 取 3 个数字的排列, 其重排列数为 $(10-1)^3$ 个.

b. 千位非 3 且非 0, 即在数字 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中选取一个作为千位, 其选法有 $\binom{8}{1}$ 种, 此时百位, 十位和个位有且仅有一个是 3, 这时符合题意的数有 $3 \times (10-1)^2$, 由乘法规则有

$$\binom{8}{1} \times 3 \times (10-1)^2$$

由于 a 和 b 两种情况互不相容, 故由加法规则有

$$9^3 + 8 \times 9^2 \times \binom{3}{1} = 2673 \text{ (个)}$$

② 根据题设可知所求整数不包含数字 3, 则千位只能在 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中选取一个, 共有 8 种方式, 又因为所求整数各位允许数字重复, 则百位、十位和个位可以分别在 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中选取一个, 由乘法规则得这样的整数共有

$$8 \times 9^3 = 5832 \text{ (个)}$$

③ 分千位非 7 (非 0) 与千位是 7 两种情况, 可得答案为

$$8 + \binom{3}{2} \times (10-1) = 35 \text{ (个)}$$

1.11 单词 “MISSISSIPPI” 中的字母有多少种不同的排列方法? 如果两个 S 不相邻, 又有多少种排列方法?

解: ① 这可以看作是重集 $B=\{1 \cdot M, 4 \cdot S, 4 \cdot I, 2 \cdot P\}$ 的一个全排列, 故不同的排列数为:

$$\frac{11!}{1!2!4!4!} = 34650 \text{ (种)}$$

② 由于两个 S 不相邻, 则先把 4 个 S 从重集 B 中去掉, 再将剩余 7 个字母进行排列, 这样的排列共有 $\frac{7!}{2!4!}$ 个, 对于每个这样的排列有 8 个空位置, 如: MIIIPPI

再把 4 个 S 嵌入 8 个空位置中, 这样的嵌入共有 $\binom{8}{4}$ 种, 由乘法法则可得符合题意的排列共有

$$\frac{7!}{2!4!} \binom{8}{4} = 7350 \text{ (种)}$$

1.12 空间中有 30 个点, 这 30 个点中无四个点共面, 问它们能确定多少个三角形? 能确定多少个四面体?

解: 由题设可知这 30 个点中无四个点共面, 则这 30 个点中也无三点共线. 因为如果有三点共线了, 再加上任意一点, 四点就共面了, 这显然与题设矛盾. 既然无三点共线, 说明任意三点都能组成三角形; 无四点共面, 说明任意四点都能组成四面体, 所以三角形的个数为 $C(30, 3)$, 四面体的个数为 $C(30, 4)$.

1.13 求方程 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$ 的正数解的个数.

解:

方法一:

由原教材 (参考文献 [1], 以后皆用原教材表示) 第一章第三节例 8 知

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r \quad (1)$$

的非负整数解的个数为 $\binom{n+r-1}{r}$,

在式 (1) 中, 若令 $Y_i = X_i + 1, i=1, 2, \dots, n$, 则 (1) 变为:

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = n+r \quad (2)$$

则式 (2) 的正数解的个数等于 (1) 的非负整数解的个数, 故 (2) 的正整数解的个数为:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

设 $k=n+r$, 则

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1}$$

即 $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = k$ 的正整数解的个数为 $\binom{k-1}{n-1}$

故式(1)的正整数解的个数为 $\binom{r-1}{n-1}$.

方法二: 本问题相当于要把 r 个苹果分成 n 堆, 要求每堆都不空, 求不同的分法数目.

我们这样考虑: 把 r 个苹果排成一排, 它们之间有 $r-1$ 个空隙, 在其中选择 $n-1$ 个并放入隔板, 这样就有 $\binom{r-1}{n-1}$ 个放法, 即原方程有 $\binom{r-1}{n-1}$ 个解.

1.14 求 $1 \sim 10\,000$ 中, 有多少整数, 它的数字之和等于 5? 又有多少数字之和小于 5 的整数?

解: 在 $1 \sim 9999$ 中考虑, 不是 4 位数的整数前面补足 0, 例如 235 写成 0235, 则问题就变为求: $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ 的非负整数解的个数, 故有

$$F(4, 5) = \binom{4+5-1}{5} = 56$$

对第二个问题, 分为求:

$x_1+x_2+x_3+x_4=4$ 的非负整数解, 其个数为 $F(4, 4)=35$

$x_1+x_2+x_3+x_4=3$ 的非负整数解, 其个数为 $F(4, 3)=20$

$x_1+x_2+x_3+x_4=2$ 的非负整数解, 其个数为 $F(4, 2)=10$

$x_1+x_2+x_3+x_4=1$ 的非负整数解, 其个数为 $F(4, 1)=4$

将它们相加即得,

$$F(4, 4) + F(4, 3) + F(4, 2) + F(4, 1) = 69$$

由于 $10\,000$ 不是 4 位数, 但也满足数字之和小于 5. 因此共有 70 个数字之和小于 5 的整数.

1.15 有多少种方法把字母 $a, a, a, a, a, b, c, d, e$ 排列成无两 a 相邻?

解: 若要两个 a 不相邻, 必须将 4 个字母 b, c, d, e 放在 5 个 a 之间, 相当于 5 个 a 排成一排, 每两个相邻的 a 之间用一个方框隔开, 即排成 $a \square a \square a \square a \square a$, 再将 4 个字母 b, c, d, e 放入 4 个方框中的方法, 这是 4 个元素的全排列问题, 于是这样的放法共有 $4!$ 种.

1.16 从整数 $1, 2, \dots, 1000$ 中选取三个数, 使得它们的和是 4 的倍数, 求这样的选法有多少种?

解: 设集合 $A=\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$, 把这 1000 个数按模 4 的余数分成四个子集合, 其中

$$A_i = \{x | x \equiv i \pmod{4}\} \quad i=1, 2, 3, 4$$

显然这 4 个集合各有 250 个数.

设在 A 中所取的三个数为 a_1, a_2, a_3 , 那么这种选取是无序的, 且满足 $a_1+a_2+a_3 \equiv 0$

(mod 4), 我们将选法分为五类:

- ① a_1, a_2, a_3 选自同一集合 A_4 , 这样的选法共有

$$N_1 = C(250, 3)$$

- ② a_1, a_2, a_3 选自集合 A_1, A_2 , 并且在 A_1 中选取 2 个, 在 A_2 中选取 1 个, 这样的选法共有

$$N_2 = C(250, 2) \times C(250, 1)$$

- ③ a_1, a_2, a_3 分别选自三个集合 A_3, A_4, A_1 各一个, 这样的选法共有

$$N_3 = [C(250, 1)]^3$$

- ④ a_1, a_2, a_3 分别选自 A_2, A_4 , 在 A_2 中选 2 个, A_4 中选一个, 这样的选法共有

$$N_4 = C(250, 2) \times C(250, 1)$$

- ⑤ a_1, a_2, a_3 分别选自 A_2, A_3 , 在 A_2 中选 1 个, 在 A_3 中选 2 个, 这样的选法共有

$$N_5 = C(250, 1) \times C(250, 2)$$

由加法规则, 满足题意的选法共有

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = C(250, 3) + 3 \times C(250, 2) \times C(250, 1) + [C(250, 1)]^3$$

1.17 用二项式定理展开 $(2x-7)^7$

解: 将 $X=2x, Y=-7, n=7$ 代入二项式定理 (1.12) 中即得.

1.18 在 $(3X-2Y)^{18}$ 展开式中, X^5Y^{13} 的系数是什么? X^8Y^9 的系数是什么?

解: 在二项式定理 (1.12) 式中, 令 $X=3x, Y=-2y, n=18, k=5$ 即得 X^5Y^{13} 的系数为

$$-\binom{18}{5} 3^5 \times 2^{13}$$

X^8Y^9 的系数是 0 ($\because 8+9 \neq 18 \therefore$ 在 $(3X-2Y)^{18}$ 展开式中根本没有 X^8Y^9 项, 故 X^8Y^9 的系数是 0.)

1.19 用组合分析的方法证明恒等式 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

解:

方法一:

我们考虑一个由 a 和 b 组成的长度为 n 的字符串, 字符串每位的取值为 a 或 b 两种情况. 由乘法规则, 这样的字符串共有 $\overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^n = 2^n$ 个.

另一方面, 这样的字符串可以看成由 a 和 b 组成的一个 n -排列, 它有 k ($k=0, 1, 2, \dots, n$) 个 a , $n-k$ 个 b 组成, 这样的排列个数就是重集 $B_k = \{k \cdot a, (n-k) \cdot b\}$ 的 n -排列数, 由定理 1.4 知, 这样的排列个数为

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

再由加法规则, 这样的字符串共有 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

综合以上两种情况有

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

方法二:

设集合 $U = \{a_1, \dots, a_n\}$ 有 n 个元素, 则这个集合中的各个元素“选取”与“不选取”有两种状态, 于是对于 a_1 有 2 种选法, 对于 a_2 也有 2 种选法……对于 a_n 也有 2 种选法, 由乘法规则, 其总数为: $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$.

而等式的左端说明这所有的状态可分解为从 n 个元素中分别取 $0, 1, \dots, n$ 组合的总数为 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

综合以上两种情况有

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

1.20 用组合分析方法证明 $\frac{(2n)!}{2^n}$ 和 $\frac{(3n)!}{2^n \times 3^n}$ 都是整数.

证明: ① 考虑 $2n$ 个数的全排列.

显然, 其排列数为 $(2n)!$.

另一方面, $2n$ 个数的全排列可按如下步骤完成:

在排列位置 1, 2 上: 从 $2n$ 个数中选 2 个数排列在位置 1, 2 上, 其排列法有

$$2 \binom{2n}{2} \uparrow$$

在排列位置 3, 4 上: 在排列位置 1, 2 上确定两个数后, 再从剩下的 $2n-2$ 个数中选 2 个数排列在位置 3, 4 上, 其排列法有

$$2 \binom{2(n-1)}{2} \uparrow$$

.....

在排列位置 $2n-1, 2n$ 上: 在排列在位置 1, 2, 3, 4, $\dots, 2n-2$ 上确定 $2n-2$ 个数后, 再从剩下的 $2n - (2n-2)$ 个数中选 2 个数排列在位置 $2n-1, 2n$ 上, 其排列法有

$$2 \binom{2n - (2n-2)}{2} = 2 \binom{2}{2}$$

由乘法规则得总的排列法有

$$\begin{aligned}
 & 2 \binom{2n}{2} \times 2 \binom{2(n-1)}{2} \times \cdots \times 2 \binom{2}{2} \\
 &= 2^n \times \binom{2n}{2} \times \binom{2(n-1)}{2} \times \cdots \times \binom{2}{2}
 \end{aligned}$$

即

$$2^n \times \binom{2n}{2} \times \binom{2(n-1)}{2} \times \cdots \times \binom{2}{2} = (2n)!$$

$$\therefore \frac{(2n)!}{2^n} = \binom{2n}{2} \times \binom{2(n-1)}{2} \times \cdots \times \binom{2}{2}$$

故 $\frac{(2n)!}{2^n}$ 是整数.

② 同①一样的方法考虑 $3n$ 个数的全排列. 显然, 其排列数为 $(3n)!$; 另一方面, $3n$ 个数的全排列可按如下步骤完成:

在位置 1, 2, 3 上: 从 $3n$ 个数中选 3 个数排列在位置 1, 2, 3 上, 其排列法有

$$3! \binom{3n}{3}$$

在位置 4, 5, 6 上: 在排列位置 1, 2, 3 上确定三个数后, 再从剩下的 $3n-3$ 个数中选 3 个数排列在位置 4, 5, 6 上, 其排列法有

$$3! \binom{3(n-1)}{3}$$

.....

在位置 $3n-2, 3n-1, 3n$ 上: 在排列位置 1, 2, 3, \dots , $3n-3$ 上确定 $3n-3$ 个数后, 再从剩下的 $3n-(3n-3)$ 个数中选 3 个数排列在位置 $3n-2, 3n-1, 3n$ 上, 其排列法有

$$3! \binom{3n-(3n-2)}{3} = 3! \binom{3}{3}$$

由乘法规则得总的排列法有

$$\begin{aligned}
 & 3! \binom{3n}{3} \times 3! \binom{3(n-1)}{3} \times \cdots \times 3! \binom{3}{3} \\
 &= (3!)^n \times \binom{3n}{3} \times \binom{3(n-1)}{3} \times \cdots \times \binom{3}{3} \\
 &= 2^n \times 3^n \times \binom{3n}{3} \times \binom{3(n-1)}{3} \times \cdots \times \binom{3}{3}
 \end{aligned}$$

即

$$2^n \times 3^n \times \binom{3n}{3} \times \binom{3(n-1)}{3} \times \dots \times \binom{3}{3} = (3n)!$$

$$\therefore \frac{(3n)!}{2^n \times 3^n} = \binom{3n}{3} \times \binom{3(n-1)}{3} \times \dots \times \binom{3}{3}$$

故 $\frac{(3n)!}{2^n \times 3^n}$ 是整数.

1.21 用组合分析的方法证明

$$\binom{n}{l} \binom{l}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{l-r}$$

证明: 考虑从 n 个人中选 l 个人组成一个班, 且这个班有 r 个班委. 现用两种方法选取.

选法一: 先从 n 个人中选取 l 个人组成一个班, 再从 l 个人中选取 r 个人组成班委. 由乘法规则有 $\binom{n}{l} \binom{l}{r}$ 种方法.

选法二: 先从 n 个人中选 r 个人作为班委, 再在剩下的 $n-r$ 个人中选 $l-r$ 个人作为这一班的普通成员. 由乘法规则有 $\binom{n}{r} \binom{n-r}{l-r}$ 种方法.

容易知道这两种选取方法是一样的, 故有

$$\binom{n}{l} \binom{l}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{l-r}$$

1.22 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$$

证明:

方法一:

由二项式定理 (1.13) 式有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

对上式两边从 0~2 积分有:

$$\int_0^2 (1+x)^n dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^2 x^k dx$$

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_{x=0}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_{x=0}^2$$

\therefore

$$\frac{3^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1}$$

方法二:

由 (1.23) 式有

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ \therefore \binom{n}{k} &= \frac{k+1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$$

于是有

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 2^{k+1} \binom{n+1}{k+1}$$

下面计算 $\sum_{k=0}^n 2^{k+1} \binom{n+1}{k+1}$

由二项式定理 (1.13) 式有

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} x^{k+1}\end{aligned}$$

在上式中令 $x=2$ 得

$$1 + \sum_{k=0}^n 2^{k+1} \binom{n+1}{k+1} = 3^{n+1}$$

即

$$\sum_{k=0}^n 2^{k+1} \binom{n+1}{k+1} = 3^{n+1} - 1$$

因此

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 2^{k+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{(3^{n+1} - 1)}{n+1}$$

故恒等式成立.

1.23 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{m+k+1} \binom{n}{k} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

证明: 由二项式定理 (1.13) 式有

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k$$

$$\therefore x^m(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{m+k}$$

对上式两边从 0 到 1 积分有

$$\text{右端} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{m+k+1}$$

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{m+1} dx^{m+1} \\ &= \frac{(1-x)^n}{m+1} x^{m+1} \Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} d(1-x)^n \\ &= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= \dots \dots \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \\ \therefore \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{m+k+1} \binom{n}{k} &= \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \end{aligned}$$

1.24 证明恒等式

$$\text{a. } \sum_{k=0}^m \binom{n-k}{m-k} = \binom{n+1}{m}$$

$$\text{b. } \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

$$\text{c. } \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

$$\text{证明: a) 右端} = \binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} \quad (\text{由 (1.9) 式})$$

$$= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m-2} \quad (\text{由 (1.9) 式})$$

$$= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \binom{n-2}{m-3} \quad (\text{由 (1.9) 式})$$

$$= \dots \dots \quad (\text{反复应用 (1.9) 式})$$

$$= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \dots + \binom{n-m+1}{m-m+1} + \binom{n-m+1}{m-m}$$

$$= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \dots + \binom{n-(m-1)}{m-(m-1)} + \binom{n-m}{m-m} + \binom{n-m}{m-m-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m \binom{n-k}{m-k} + \binom{n-m}{-1} \\
&= \sum_{k=0}^m \binom{n-k}{m-k} \quad \left(\because \binom{n-m}{-1} = 0 \right) \\
&= \text{左端} \\
\text{b) } \therefore \binom{k}{m} \binom{n}{k} &= \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!(k-m)!(n-m-(k-m))!} \\
&= \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} \\
\therefore \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} &= \sum_{k=m}^n \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^n \binom{n-m}{k-m} \\
&= \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} \\
&= \binom{n}{m} 2^{n-m} \quad (\text{由 (1.14) 式})
\end{aligned}$$

故原恒等式成立.

c) 由二项式定理 (1.13) 式有

$$\begin{aligned}
(1-x)^n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=m+1}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k
\end{aligned}$$

上式中, 令 $x=1$ 有

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=m+1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}
\text{上式右端} &= \sum_{k=m+1}^n (-1)^{k+1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \quad (\text{由 (1.9) 式}) \\
&= \sum_{k=m+1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=m+1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=m+1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=m}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= (-1)^{n+1} \binom{n-1}{n} + \sum_{k=m+1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=m+1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} + (-1)^m \binom{n-1}{m} \\
&= (-1)^m \binom{n-1}{m} + (-1)^{n+1} \binom{n-1}{n}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

1.25 证明恒等式

$$\begin{aligned} \text{a. } \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k \\ \text{b. } \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} &= (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k \end{aligned}$$

证明: a)

$$\begin{aligned} \text{原式左端} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{(n+k)!}{m!((n+k-m))!} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!(m-k)!} \cdot \frac{(n+k)!}{(n+k-m)!} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(n+k)!}{k!n!} \cdot \frac{n!}{(m-k)!(n-(m-k))!} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} \binom{n}{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} \binom{n}{m-k} \quad (\text{由(1.8)式}) \\ &= \sum_{j=m}^0 \binom{n+m-j}{n} \binom{n}{j} \quad (\text{上式中, 令 } j=m-k \text{ 即得}) \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{n}{j} \binom{n+m-j}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{原式右端} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{m}{k} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{k}{j} \quad (\text{由(1.14)式}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n}{k} \binom{k}{j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} \quad (\text{由本章习题 21 的结论}) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{m}{k} \binom{n-j}{k-j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{m}{k} \binom{n-j}{n-k} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n-j}{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n}{j} \binom{m+n-j}{n} \quad (\text{由(1.29)式}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^m \binom{n}{j} \binom{n+m-j}{n} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \binom{n}{j} \binom{n+m-j}{n} \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{n}{j} \binom{n+m-j}{n}
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k$$

b) 由式 (1.13) 有

$$\left(1 + \frac{2t}{1-t}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{2t}{1-t}\right)^k$$

将上式两边同乘以 $\frac{1}{1-t}$, 得:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-t} \left(1 + \frac{2t}{1-t}\right)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} 2^k \cdot t^k (1-t)^{-(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} 2^k \cdot t^k \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{k+j}{j} (-t)^j && \text{(由式 (1.18))} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{k} 2^k \binom{k+j}{j} t^{k+j} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \binom{n}{k} 2^k \binom{m}{m-k} t^m && \text{(上式中令 } k+j=m\text{)} \\
&= \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{m}{k} 2^k t^m \\
&= \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k t^m && \text{(注意: 当 } k>m \text{ 时, } \binom{m}{k}=0\text{)}
\end{aligned}$$

即有:

$$\frac{1}{1-t} \left(1 + \frac{2t}{1-t}\right)^n = \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k t^m \quad (\text{A})$$

又由式 (1.18) 有:

$$\left(1 - \frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{n+k}{k} \left(\frac{-2t}{1+t}\right)^k$$

将上式两边同乘以 $\frac{1}{1+t}$, 得:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t} \left(1 - \frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{n+k}{k} (-2)^k t^k (1+t)^{-(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{n+k}{k} (-2)^k t^k \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{k+j}{j} t^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{n+k}{k} (-2)^k \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{k+j}{j} t^{k+j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k}{k} (-2)^k (-1)^{m-k} \binom{m}{m-k} t^m \\
&= \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (-2)^k (-1)^m \binom{m}{k} t^m \\
&= \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k t^m \quad (\because \text{当 } k > m \text{ 时, } \binom{m}{k} = 0)
\end{aligned}$$

即有

$$\frac{1}{1-t} \left(1 - \frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)} = \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k t^m \quad (\text{B})$$

又因

$$\frac{1}{1-t} \left(1 + \frac{2t}{1-t}\right)^n = \frac{(1+t)^n}{(1-t)^{n+1}} = \frac{1}{1+t} \left(1 - \frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)}$$

上式表明 (A) 式和 (B) 式的左端是相当的, 因此 (A) 式和 (B) 式右端也应是相当的, 故有下式成立:

$$\sum_{m=k}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k t^m = \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k t^m$$

于是 t^m 的系数也应相等, 即下面的恒等式成立:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k = (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k$$

再由上题 (25.a) 的结果知:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k = (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k$$

因此有

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{k} (-2)^k$$

1.26 如图 1-1 所示是一张城市平面图, 图中的直线表示街道, 直线的交点表示街道的交叉路口, 试证明从交叉路口 $S(0, 0)$ 到交叉路口 $T(m, n)$ 共有 $\binom{m+n}{m}$ 条不同的路径可走.

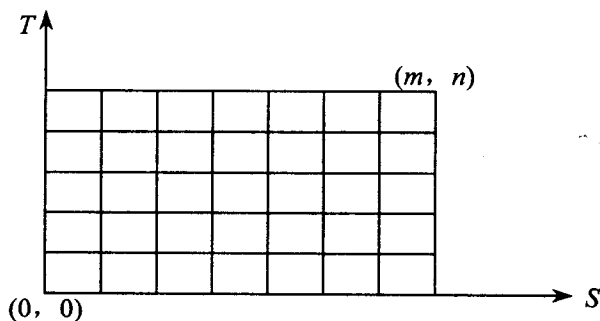


图 1-1

证明：因为从 S 到 T 只能向东、向北方向走，若向东走一个路段就用一个 E 表示，向北走一个路段就用 N 表示，这样一来，从 S 到 T 的一条路径是对应于由 E 、 N 组成的一个排列，这个排列有 m 个 E 和 n 个 N ，于是由 E 、 N 组成的一个排列是重集 $B = \{m \cdot E, n \cdot N\}$ 的一个全排列，其排列数为：

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} = \binom{m+n}{n}$$

故从交叉路口 $S(0, 0)$ 到交叉路口 $T(m, n)$ 共有 $\binom{m+n}{m}$ 条不同的路径可走。

证毕。

1.27 证明：对所有实数 r 和整数 k ，有

$$\binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}$$

证明：由定义 (1.6) 知，当 $k \leq 0$ 时，恒等式显然成立。

当 $k > 0$ 时，

$$\begin{aligned} \binom{-r}{k} &= \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k (r+k-1)(r+k-2)\cdots r}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{r+k-1}{k} \end{aligned}$$

故恒等式成立。

第二章 鸽笼原理与 Ramsey 定理

一、内容提要

定理 2.1 如果把 $n+1$ 个物体放到 n 个盒子中去, 则至少有一个盒子中放有两个或更多的物体.

定理 2.2 设 q_i 是正整数 ($i=1, 2, \dots, n$), $q \geq q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$, 如果把 q 个物体放入 n 个盒子中去, 则存在一个 i , 使得第 i 个盒子中至少有 q_i 个物体.

推论 1 如果把 $n(r-1)+1$ 个物体放入 n 个盒子中, 则至少存在一个盒子放有不少于 r 个物体.

推论 2 对于正整数 $m_i (i=1, 2, \dots, n)$, 如果

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i\right)}{n} > r-1$$

则至少存在一个 i , 使得 $m_i \geq r$.

定理 2.3 在人数为 6 的一群人中, 一定有两个人彼此相识, 或者彼此不相识.

定理 2.4 在人数为 10 的一群人中, 一定有两个人彼此不相识或者有四个人彼此相识.

定理 2.5 在人数为 10 的一群人中, 一定有两个人彼此相识或者四个人彼此不相识.

定理 2.6 在人数为 20 的一群人中, 一定有四个人彼此相识或者有四个人彼此不相识.

定义 2.1 设 a, b 为正整数, 令 $N(a, b)$ 是保证有 a 个人彼此相识或者有 b 个人彼此不相识所需要的最少人数, 则称 $N(a, b)$ 为 Ramsey 数.

$$\text{定理 2.7} \quad N(a, b) = N(b, a) \quad (2.1)$$

$$N(a, 2) = a \quad (2.2)$$

定理 2.8 当 $a, b \geq 2$ 时, $N(a, b)$ 是一个有限数, 并且有

$$N(a, b) \leq N(a-1, b) + N(a, b-1) \quad (2.3)$$

定理 2.9 当 $N(a-1, b)$ 和 $N(a, b-1)$ 都是偶数时, 则有

$$N(a, b) \leq N(a-1, b) + N(a, b-1) - 1 \quad (2.4)$$

$$\text{定理 2.1} \quad N(3, 3) = 6 \quad (2.5)$$

$$N(3, 4) = N(4, 3) = 9 \quad (2.6)$$

$$N(3, 5) = N(5, 3) = 14 \quad (2.7)$$

定义 2.2 如果把一个完全 n 角形不是用两种颜色对其边着色, 而是用 r 种颜色 c_1, c_2, \dots, c_r 对其边任意着色. 设 $N(a_1, a_2, \dots, a_r)$ 是保证出现下列情形之一的最小正整数:

用 c_1 种颜色着色的一个完全 a_1 角形

或用 c_2 种颜色着色的一个完全 a_2 角形

... ..

或用 c_r 颜色着色的一个完全 a_r 角形

则称数 $N(a_1, a_2, \dots, a_r)$ 为 Ramsey 数.

定理 2.11 有大于 1 的整数 a_1, a_2 和 a_3 , 数 $N(a_1, a_2, a_3)$ 是存在的.

定理 2.12 任意的正整数 r 和 $a_1, a_2, \dots, a_r \geq 2$, Ramsey 数 $N(a_1, a_2, \dots, a_r)$ 是存在的.

定义 2.3 对于有 n 个元素的一个集合, 把这个集合中的 r 个元素的所有子集分成 m 个类, 即 c_1, c_2, \dots, c_m 类, 设 $N(a_1, a_2, \dots, a_m; r)$ 是保证出现下列情形之一的最小正整数:

存在 a_1 个元素, 它的所有 r 元子集属于 c_1 类

或者 a_2 个元素, 它的所有 r 元子集属于 c_2 类

或者

或者存在 a_m 个元素, 它的所有 r 元子集属于 c_m 类

则称数 $N(a_1, a_2, \dots, a_m; r)$ 为 Ramsey 数

定理 2.13 对于任何正整数 r 和 $a_1, a_2, \dots, a_m \geq r$, Ramsey 数 $N(a_1, a_2, \dots, a_m; r)$ 存在.

注意: 当 $r=1$ 时, 定理 2.13 就是鸽笼原理的一般形式——定理 2.2, 由此可见定理 2.13 是鸽笼原理的进一步推广.

二、习题解答

2.1 在某中学 A 班有 50 名学生, 其中年龄最小的是 15 岁, 最大的是 18 岁. 证明这个班中至少有两个学生是同年同月生的.

证明:

方法一:

$$50 > 49 = 4 \times (12 - 1) + 1$$

由鸽笼原理推论 1 知: 至少有一个盒子中放有 13 个物体, 即至少有 13 个人同年生.

又因为 $13 \geq 12(2-1) + 1$, 故至少有一个盒子中放有 2 个物体, 即在此 13 个同年出生

的学生中至少有 2 个人是同月生的.

故这个班中至少有两个学生是同年同月生的.

方法二:

根据题意, 15 岁~18 岁共 4 个年龄段, 即 48 个月. 而

$$50 > 48 = 48 \times (2-1) + 1$$

故由鸽笼原理推论 1 知: 至少有一个盒子中放有 2 个物体, 即至少有 2 个人同年同月生.

故这个班中至少有两个学生是同年同月生的.

2.2 某一制造铁盘的工厂, 由于设备和技术的原因为只能将生产盘子的重量控制在 a 克到 $(a+0.1)$ 克之间. 现需要制成重量相差不超过 0.005 克的两铁盘来配制一架天平, 问该工厂至少要生产多少铁盘才能保证得到一对符合要求的铁盘.

解: 将铁盘按重量分类, 所有 a 克到 $(a+0.005)$ 克的分为一类, $(a+0.005)$ 克到 $(a+0.01)$ 克的分为一类, $(a+0.01)$ 克到 $(a+0.015)$ 克的又为类, ……最后, $(a+0.095)$ 克到 $(a+0.1)$ 克为一类, 共计 20 类视为 20 个鸽笼, 由鸽笼原理知, 若该工厂生产 21 个铁盘, 那么就有两个铁盘属于同一类, 它们之间的重量差将不超过 0.005 克.

故该工厂至少要生产 21 个铁盘才能得到一对符合要求的铁盘.

2.3 在边长为 1 的正三角形内任意放置 5 个点, 则其中至少有两个点的距离 $\leq 1/2$.

证明: 将边长为 1 的正三角形分成边长为 $1/2$ 的 4 个小正三角形, 如图 2-1 所示, 将 5 个点放入 4 个小正三角形中, 由鸽笼原理知, 至少有一个小正三角形中放有 2 个点, 而这两点的距离 $\leq 1/2$.

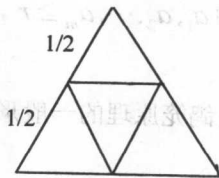


图 2-1

2.4 在 3×4 的长方形内任意放置 7 个点, 则其中至少有两点的距离 $\leq \sqrt{5}$.

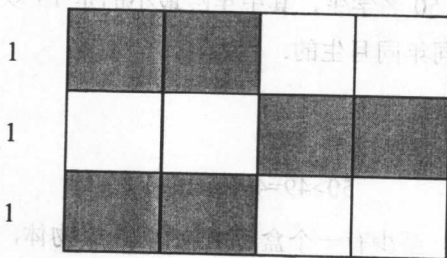


图 2-2

证明：将 3×4 的长方形分成 6 个 1×2 的小矩形，如图 2-2 所示，每个小矩形内的最长距离为两对角点之间的距离，即 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 。根据鸽笼原理，把 7 个点放到 6 个小矩形中，至少有两个点落入同一个小矩形中，则它们之间的距离 $\leq \sqrt{5}$ 。

故至少有两点的距离 $\leq \sqrt{5}$ 。

2.5 在如图 2-3 所示中，每个方格着红色或蓝色，证明至少存在两列有相同的着色。



图 2-3

证明：用两种颜色按列着色，根据乘法规则，每列着色的方式只可能有 $2 \times 2 = 4$ 种（视为 4 个鸽笼），而图中有 5 列方格（视为 5 个鸽子）。根据鸽笼原理知，至少有两列着色方式相同。

2.6 任给 5 个整数，则必能从中选出 3 个，使得它们的和能被 3 整除。

证明：设 5 个数为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 又设 a_i 被 3 除后所得的余数为 $b_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ ，显然， $0 \leq b_i \leq 2$ ，将 0, 1, 2 看为三个盒子， b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 看为五个物体，于是下面分为三种情况来讨论：

- (1) 若两个盒子是空的；
- (2) 若一个盒子是空的；
- (3) 三个盒子都不空。

对于 (1)： b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 放于同一盒子中，即这 5 个余数是相同的，任选 3 个，它们所对应的 a_i 的和必能被 3 整除。

对于 (2)： b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 放于另两个盒子中，而 $5 \geq 2 \times (3-1) + 1$ ，根据鸽笼原理推论 1，必有一个盒子中有三个物体，即 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 五个物体中必有三个放入同一盒子，选这三个对应的 a_i ，其和必能被 3 整除。

对于 (3)：每个盒子中选一个，将其对应的 a_i 相加，其和也必然能被 3 整除。

综上所述，5 个整数中必能从中选出 3 个，使得它们的和能被 3 整除。

2.7 一个学生打算用 37 天总共 60 学时自学一本书，他计划每天至少自学 1 学时，证明：无论他怎样安排自学时间表，必然存在相继的若干天，在这些天内其自学总时数恰好为 13 学时（假定每天自学学时数为整数）。

证明：设 a_1 是第一天自学的时数， a_2 是第一、二天自学的时数的和， a_j 是第一、第二、……第 j 天自学时数的和， $j=1, 2, \dots, 37$ 。

于是，序列 a_1, a_2, \dots, a_{37} 是严格递增序列（每天至少 1 学时），而且， $a_1 \geq 1, a_{37} = 60$ 。

于是序列 $a_1 + 13, a_2 + 13, \dots, a_{37} + 13$ 也是严格递增的序列，且 $a_{37} + 13 = 73$ 。

因此 74 个数 $a_1, a_2, \dots, a_{37}, a_1 + 13, a_2 + 13, \dots, a_{37} + 13$ 都在 $[1, 73]$ 之间，由鸽笼

原理知, 这 74 个数中必有两个是相等的, 由于 a_1, a_2, \dots, a_{37} 中任何两个数都不相等, 故 $a_1 + 13, \dots, a_{37} + 13$ 中任何两个数也是不相等的, 因此, 一定存在两个数 i, j 使得 $a_i = a_j + 13$, 即 $a_i - a_j = 13$.

因此, 在第 $j+1, j+2, \dots, i$ 这些天中, 这个学生自学总时数恰好为 13.

2.8 已知 n 个正整数 a_1, a_2, \dots, a_n , 证明: 在这 n 个数中总是可以选择两个数, 使得这两个数的和或差能被 n 整除.

证明:

方法一:

每个正整数被 n 除所得的余数必是 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 中的一个, n 个正整数 a_1, a_2, \dots, a_n 被 n 除所得的 n 个余数中如果有两个相同, 则相对应的两个正整数相减能被 n 整除. 否则, n 个余数分别为 $0, 1, 2, \dots, n-1$, 此时余数为 i 与 $n-i$ 的相对应的两个正整数之和能被 n 整除.

方法二:

设这 n 个正整数满足不等式

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

若上式中有一个等号成立, 则本题结论显然成立, 故可进一步假设

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

现用反证法证明: 如若不然, 则对任意的 i, j ($1 \leq i < j \leq n$), $a_j - a_i$ 和 $a_j + a_i$ 都不能被 n 整除, 令

$$b_i = a_n - a_i (i=1, 2, \dots, n-1) \quad b_n = a_n + a_1$$

由反证法假设知 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都不能被 n 整除, 则设它被 n 整除的余数分别为 c_1, c_2, \dots, c_n , 显然有 $1 \leq c_i \leq n-1 (i=1, 2, \dots, n)$.

于是, 把 $1, 2, \dots, n-1$ 看作 $n-1$ 个鸽笼, 把 c_1, c_2, \dots, c_n 看作 n 个鸽子, 由鸽笼原理, 至少存在两个正整数 c_i, c_j ($1 \leq i < j \leq n$), 使得

$$c_i = c_j$$

当 $j=n$ 时, 上式即为 $(a_n - a_i) - k_i n = (a_n + a_1) - k_n n$ (其中 k_i, k_n 为整数)

所以 $a_1 + a_i = (k_n - k_i)n$ 这与假设矛盾

当 $1 \leq i < j \leq n-1$ 时, 同样有 $(a_n - a_i) - k_i n = (a_n - a_j) - k_j n$ (其中 k_i, k_j 为整数)

所以 $a_j - a_i = (k_j - k_i)n$ 这与假设矛盾

综合上述两种情况, 本题得证.

2.9 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 证明: 如果 n 是奇数, 则乘积 $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ 是一个偶数.

证明:

方法一:

因为 n 是奇数, 故 $1, 2, \dots, n$ 中共有 $\frac{n+1}{2}$ 个奇数, 于是 $a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 2, \dots, n$ 中共有 $2 \times \frac{n+1}{2} = (n+1)$ 个奇数, 把它们放入 n 个盒子中, 必有两个在同一盒子中, 其差为偶数, 故本题结论成立.

方法二:

因为 n 是奇数, 故 $1, 2, \dots, n$ 中共有 $\frac{n+1}{2}$ 个奇数, $\frac{n-1}{2}$ 个偶数, 即奇数的个数比偶数的个数多 1. 如果 $(a_1 - 1), (a_2 - 2), \dots, (a_n - n)$ 中全为“奇数-偶数”或者“偶数-奇数”的形式, 则 $a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 2, \dots, n$ 中奇数个数和偶数个数应该相等, 当然 $1, 2, \dots, n$ 中奇数个数和偶数个数也应该相等, 这与 n 是奇数矛盾. 故 $(a_1 - 1), (a_2 - 2), \dots, (a_n - n)$ 中必有“奇数-奇数”或者“偶数-偶数”的形式, 即 $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ 是一个偶数.

2.10 证明: 在任意 52 个整数中, 必存在两个数, 其和或差能被 100 整除.

证明: 设 52 个整数 a_1, a_2, \dots, a_{52} 被 100 除的余数分别为 r_1, r_2, \dots, r_{52} , 而任意一整数被 100 除可能的余数为 $0, 1, 2, \dots, 99$, 共 100 个, 它可分为 51 个类: $\{0\}, \{1, 99\}, \{2, 98\}, \dots, \{49, 51\}, \{50\}$. 将 51 个类看为鸽笼, 52 个余数看为鸽子, 则 52 个鸽子放入 51 个鸽笼中, 由鸽笼原理知, 至少有两个鸽子属于同一类, 例如 r_i, r_j , 于是 $r_i = r_j$ 或 $r_i + r_j = 100$, 这就是说 $a_i - a_j$ 可被 100 整除, 或 $a_i + a_j$ 可被 100 整除.

2.11 证明: $N(4, 4) \leq 18$

证明: 由定理 2.8, 显然有 $N(4, 4) \leq N(3, 4) + N(4, 3) = 9 + 9 = 18$.

2.12 证明: $N(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq N(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n)$

$$+ N(a_1, a_2 - 1, \dots, a_n)$$

.....

$$+ N(a_1, a_2, \dots, a_n - 1)$$

证明: 记 $N_i = N(a_1, a_2, \dots, a_i - 1, \dots, a_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 记 $X = \sum_{i=1}^n N_i$. 考虑 X 个顶点的完全图, 用 n 种颜色 C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 对完全图的边染色. 在 X 个点中任取一点 P , 由 P 连出 $X - 1$ 条边. 则有

$$\begin{aligned} X - 1 &= N_1 + N_2 + \cdots + N_n - 1 \\ &\geq N_1 + N_2 + \cdots + N_n - (n - 1) \\ &= N_1 + N_2 + \cdots + N_n - n + 1 \end{aligned}$$

现 C_1, C_2, \dots, C_n 共 n 个鸽笼, 则由鸽笼原理知, 至少存在一个 i ($1 \leq i \leq n$), 使得

这 $X-1$ 条边中染成 C_i 色的边数至少是 N_i 条.

我们考虑其中染成 C_i 色的 N_i 条边. 这 N_i 条边连接到另外 N_i 个顶点. 而 $N_i = N(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$, 所以这 N_i 个顶点之间的连线

或者有一个 C_1 色的纯 a_1 角形;

或者有一个 C_2 色的纯 a_2 角形;

...

或者有一个 C_{i-1} 色的纯 a_{i-1} 角形;

或者有一个 C_i 色的纯 a_{i-1} 角形 (而点 P 和这 a_{i-1} 个顶点所连的边都是 C_i 色的, 从而这 a_i 个顶点组成一个纯 a_i 角形, 即存在一个 C_i 色的纯 a_i 角形);

或者有一个 C_{i+1} 色的纯 a_{i+1} 角形;

...

或者有一个 C_n 色的纯 a_n 角形;

而 $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是保证出现以上情形之一的最小正整数, 故有

$$N(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq N(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) + N(a_1, a_2 - 1, \dots, a_n) + \dots + N(a_1, a_2, \dots, a_n - 1)$$

综上所述, 原命题得证.

2.13 证明: 如果 $N(a, b-1)$ 和 $N(a-1, b)$ 都是偶数, 则

$$N(a, b) < N(a-1, b) + N(a, b-1).$$

证明: 显然, 要证上述的不等式, 只需证明下面的不等式 $N(a, b) \leq N(a-1, b) + N(a, b-1) - 1$ 成立即可. 下面证明此不等式成立.

令 $X = N(a-1, b) + N(a, b-1) - 1$, 由于 $N(a, b-1)$ 和 $N(a-1, b)$ 都是偶数, 因此 X 为奇数. 现在不妨假设有 X 个人.

我们首先断言这 X 个人不可能每个人认识的人数都为 $N(a-1, b) - 1$. 现用反证法来证明. 假设这 X 个人中每个人认识的人数都为 $N(a-1, b) - 1$, 则所有认识人数之和 $Y = X \cdot (N(a-1, b) - 1)$ 为奇数, 但事实上每一个相识关系都被计算了 2 次, 所以 Y 应该是偶数, 此矛盾说明了这 X 个人不可能每个认识的人数都为 $N(a-1, b) - 1$.

因此在这 X 个人中, 下面两种情形必有一种出现.

① 存在一个人 P , 他认识的人数小于 $N(a-1, b) - 1$.

那么 P 不认识的人数至少为

$$\begin{aligned} & X - (N(a-1, b) - 1) \\ &= (N(a-1, b) + N(a, b-1) - 1) - (N(a-1, b) - 1) \\ &= N(a, b-1). \end{aligned}$$

这表明在 $N(a, b-1)$ 个人中, 或者有 a 个人相互认识, 或者有 $b-1$ 个人互不相识. 如果有 a 个人相互认识, 则不等式成立. 如果有 $b-1$ 个人相互不认识, 又他们与 P 都不相识,

加上 P , 则有 b 个人相互不认识, 原不等式也成立.

故此种情形下命题的结论成立.

② 存在一个人 P , 他认识的人数大于或等于 $N(a-1, b)$.

这表明在 $N(a-1, b)$ 个人中, 或者有 $a-1$ 个人相互认识, 或者有 b 个人互不相识. 若有 $a-1$ 个人互相认识, 又他们与 P 都相识, 因此加上 P , 就有 a 个人相互认识, 则不等式成立. 若有 b 个人互不相识, 则不等式成立.

故此种情形下命题的结论成立.

综上所述两种情况, 原命题结论成立.

2.14 证明: 如果将完全七角形的边着红色或蓝色, 则至少有 3 个纯三角形.

证明: 首先证明如下命题:

将完全六角形的边着红色或蓝色, 至少会得到两个纯三角形.

假设完全六角形的 6 个顶点为 $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$. 对完全 6 角形用红、蓝二色进行着色, 根据定理 2.3 知至少有一个同色的纯三角形, 不妨设可得一个红色边的纯三角形 (蓝色边的纯三角形可作同样讨论), 其红色三角形顶点为 V_1, V_2, V_3 (如图 2-4 所示, 图中, 虚线代表红色, 实线代表蓝色) 下面分两种情况进行讨论:

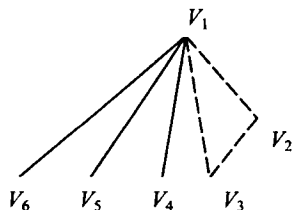


图 2-4

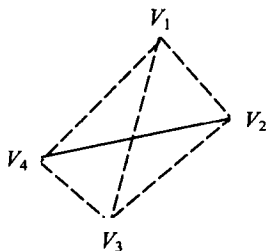


图 2-5

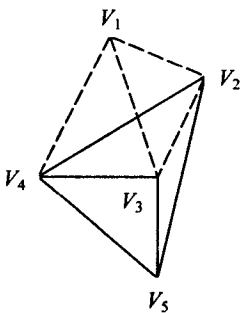


图 2-6

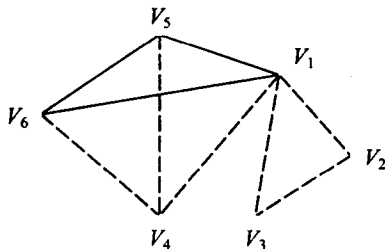


图 2-7

(1) 若 V_1V_4, V_1V_5, V_1V_6 三边为蓝色, 如图 2-4 所示. 若 V_4, V_5, V_6 三点之间有一蓝色边, 不妨设为 V_5, V_6 , 则由 V_1, V_5, V_6 三点所成的三角形为蓝色三角形, 否则, V_4, V_5, V_6 三点所成的三角形为红色三角形, 命题得证.

(2) 若 V_1V_4, V_1V_5, V_1V_6 三边中有一边为红色边, 不妨设 V_1V_4 为红色边. 于是, 又

分为以下两种情况进行讨论:

① 若 V_2V_4, V_3V_4 中有一边为红色边, 不妨设 V_3V_4 为红色边, 则由 V_1, V_3, V_4 三点所成的三角形为红色三角形, 如图 2-5 所示. 命题得证.

② 若 V_2V_4, V_3V_4 均为蓝色边, 则对于点 V_4 相关联的边又进行如下的讨论:

a. 若 V_4V_5, V_4V_6 中有一边为蓝色, 不妨设 V_4V_5 为蓝色边, 如图 2-6 所示. 此时, 若 V_2V_5, V_3V_5 均为红色, 则由 V_2, V_3, V_5 三点所成的三角形为红色三角形, 否则, 由 V_2, V_4, V_5 三点所成的三角形或由 V_3, V_4, V_5 三点所成的三角形为蓝色三角形. 命题得证.

b. 若 V_4V_5, V_4V_6 均为红色边, 如图 2-7 所示. 此时, 若由 V_1, V_5, V_6 三点所成的三角形有一条边为红色边, 不妨设 V_1V_5 为红色边, 则由 V_1, V_4, V_5 三点所成的三角形为红色三角形, 否则, 该三角形为蓝色三角形. 命题也得证.

综上所述, 命题得证.

再证本题的结论如下:

对于完全七角形, 我们先看其中的 6 个顶点, 由命题的结论知, 由这 6 个点组成的完全六角形中, 必存在两个纯三角形, 然后去掉某个纯三角形的一个顶点, 再把第 7 个顶点加入, 在新的完全六角形中又可找到两个纯三角形. 显然这两个纯三角形中至少有一个是新的. 综上所述, 至少有 3 个纯三角形.

2.15 证明: 如果将一个完全 17 角形的边用红, 蓝, 白三种颜色任意着色, 则一定存在一个同色的三角形.

证明: 在完全图 K_{17} 中任选一个顶点, 例如 V_1 , 以 V_1 为端点的边共有 16 条.

现在用红, 蓝, 白三种颜色对这 16 条边着色, 由鸽笼原理 (定理 2.2 推论 1) 知, 至少有 6 条边着同一种颜色 (因为 $16=3 \times (6-1) + 1$), 比如着红色, 而这 6 条边中每条边的另一个端点可构成完全图 K_6 , 若其中有一边着红色, 则得到一个红色三角形, 否则, K_6 的边着另两种颜色, 则由定理 2.3 知: 必存在一个蓝三角形或白三角形. 故一定存在一个同色的三角形.

2.16 证明: 如果将完全 $2n$ 角形的边着红色或蓝色, 则纯三角形的数量至少是 $2\binom{n}{3}$.

证明: 首先, 完全 $2n$ 角形中共有 $\binom{2n}{3}$ 个三角形

设 r_i 为第 i 个点 V_i ($i=1, 2, \dots, 2n$) 所关联的 $2n-1$ 条边中的红色边数, 则与点 V_i 有关的非纯三角形的个数为

$$r_i(2n-1-r_i)$$

对于 $i=1, 2, \dots, 2n$, 在完全 $2n$ 角形中, 其非纯三角形总的个数 (不考虑重复) 为

$$\sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i)$$

又由于用两种颜色着色时, 任何一个非纯三角形都有且仅有两个顶点分别与两条不同色的边相关联, 故每一个非纯三角形都包含两个与不同色边相关联的顶点, 因此, 每一个非纯三角形在对诸顶点计算时重复计算了两次, 故在完全 $2n$ 角形中, 其非纯三角形总的个数应该为

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i)$$

故在完全 $2n$ 角形中, 其纯三角形总的个数为

$$\binom{2n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i)$$

由于 $r_i(2n-1-r_i)$ 在 $r_i = n$ 时取得最大值, 所以

$$\begin{aligned} \binom{2n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i) &\geq \binom{2n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} n(2n-1-n) \\ &= \binom{2n}{3} - n^2(n-1) \\ &= 2 \binom{n}{3} \end{aligned}$$

故纯三角形的数量至少是 $2 \binom{n}{3}$.

注意: 此题还可以用归纳法证明.

2.17 在平面上的 m 个点 (无三点共线) 中, 若任意四点都是凸四边形的四个顶点, 那么这 m 个点必是一凸 m 边形的顶点.

证明:

证法一:

设用 $m(m-1)/2$ 条边连接 m 点所得完全图中最大的凸 n 边形是 V_1, V_2, \dots, V_n . 我们对每一边 $V_i V_{i+1}$ 延长其两邻边 $V_{i-1} V_i$ 和 $V_{i+1} V_{i+2}$ (注, $V_i = V_n$ 时, $V_{i+1} = V_1, V_{i+2} = V_2$), 可得以边 $V_i V_{i+1}$, $V_{i-1} V_i$, $V_{i+1} V_{i+2}$ 为界, 在边 $V_i V_{i+1}$ 外侧的区域. 例如 $n=5$ 时各边对应的外侧区域如图中 2-8 阴影部分所示.

若有点落在 V_1, V_2, \dots, V_n 中或落在它所有外侧区域之外 (如图 2-8 所示中的非阴影部分), 如图 2-8 中的 V, V' , 则必有四点构成凹四边形, 与题设矛盾. 若有点落在阴影部分, 如图 2-8 所示中的 V'' , 则我们有凸 $n+1$ 边形 $V_1, V_2, \dots, V_n, V''$, 与 V_1, V_2, \dots, V_n 的最大性相矛盾. 因此, m 个点全落在 V_1, V_2, \dots, V_n 的边界上, 而 m 个点中无三点共线, 故 m 个点为一凸 m 边形的顶点, 即这 m 个点必是一凸 m 边形的顶点.

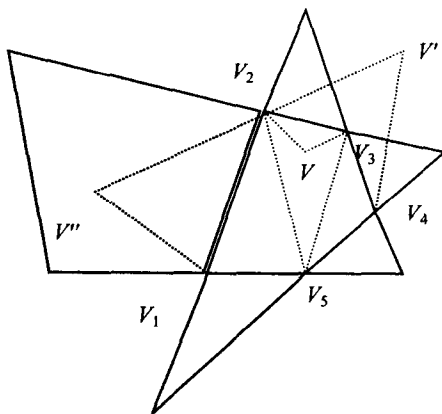


图 2-8

证法二:

我们现在引用“平面上有限个点必有一个凸闭包”这样一个结论来证明.

对此 m 个点, 两两连线, 共 $\frac{m(m-1)}{2}$ 条边. 这样将得到一个凸闭包, 设其有 k 个顶点 V_1, V_2, \dots, V_k . 若 $k = m$ 则命题成立, 否则 $k < m$, 则至少有一个点 V 不在凸闭包上. 那么, V 必包含于 V_1, V_2, \dots, V_k 所成的 $\binom{k}{3}$ 个三角形的某一个中. 如下图 2-9 所示, V, V_1, V_2, V_3 四个点不是某凸四边形的顶点, 与题设矛盾, 从而 $k = m$ 必成立, 命题得证.

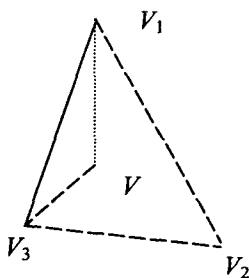


图 2-9

第三章 容斥原理

一、内容提要

在本章中, 令 $A_i (i=1, 2, \dots, m) \subseteq S$, 且 A_i 是 S 中具有性质 p_i 的元素所组成的子集合, 则 $\bigcap_{i=1}^m A_i$ 是 S 中同时具有性质 p_1, p_2, \dots, p_m 的元素子集合, $\bigcap_{i=1}^m \overline{A_i}$ 是 S 中既不具有性质 p_1 , 又不具有性质 p_2, \dots , 更不具有性质 p_m 的元素所组成的子集合. 于是我们有下面的容斥原理.

定理 3.1 S 中不具有性质 p_1, p_2, \dots, p_m 的元素个数为:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}| = & |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \\ & - \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned} \quad (3.5)$$

在式 (3.5) 中, 第二个和式取遍集合 $\{(i, j) \mid i, j=1, 2, \dots, m; i \neq j\}$, 第三个和式取遍集合 $\{(i, j, k) \mid i, j, k=1, 2, \dots, m; i \neq j \neq k\}$

推论 在集合 S 中至少具有性质 p_1, p_2, \dots, p_m 中的一个性质的元素个数是

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = & \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & + \dots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned} \quad (3.6)$$

定理 3.2 当 $n \geq 1$ 时, 有

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad (3.7)$$

定理 3.3

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (3.8)$$

定理 3.4 对于 $n \geq 1$, 有

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \cdot 1! \quad (3.9)$$

定理 3.5 当 $n \geq 2$ 时, 有

$$Q_n = D_n + D_{n-1} \quad (3.10)$$

定义 3.1 给定棋盘 C , 令 $r_0(C)=1$, n 为 C 的格子数, 称

$$R(C) = \sum_{k=0}^n r_k(C) x^k$$

为棋盘 C 的棋子多项式.

定理 3.6 给定棋盘 C , 指定 C 中某格 A . 令 C_i 为 C 中删去格 A 所在行与列所剩的棋盘, C_e 为 C 中删去格 A 所剩的棋盘, 则

$$R(C) = xR(C_i) + R(C_e) \quad (3.11)$$

定义 3.2 设 C_1 和 C_2 是两个棋盘, 若 C_1 的所有格都不与 C_2 的所有格同行同列, 则称两个棋盘是独立的.

定理 3.7 若棋盘 C 可分解为两个独立的棋盘 C_1 和 C_2 , 则

$$R(C) = R(C_1)R(C_2) \quad (3.12)$$

定理 3.8 n 元有禁位的排列数为

$$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \cdots \pm r_n \quad (3.13)$$

其中 r_i 为将 i 个棋子放入禁区棋盘的方式数, $i=1, 2, \dots, n$.

二、习题解答

3.1 从 1~10000 的整数中, 不能被 3, 4 或 5 中任何一个整除的整数的个数.

解: 设集合 S 为 1~10000 的整数构成的集合; A_1 为在 S 中能被 3 整除的整数的集合; A_2 为在 S 中能被 4 整除的整数的集合; A_3 为在 S 中能被 5 整除的整数的集合. 则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ 为在 S 中不能被 3, 4 或 5 任何一个整除的整数的集合.

由容斥原理 ((3.5) 式) 有:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (3.5)$$

其中

$$\begin{aligned} |S| &= 10000 \\ |A_1| &= \left\lfloor \frac{10000}{3} \right\rfloor = 3333 \\ |A_2| &= \left\lfloor \frac{10000}{4} \right\rfloor = 2500 \end{aligned}$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{10000}{5} \right\rfloor = 2000$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{10000}{3 \times 4} \right\rfloor = 833$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{10000}{3 \times 5} \right\rfloor = 666$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{10000}{4 \times 5} \right\rfloor = 500$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{10000}{3 \times 4 \times 5} \right\rfloor = 166$$

将以上数值代入 (3.5) 式即得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 10000 - (3333 + 2500 + 2000) + (833 + 666 + 500) - 166 = 4000$$

故从 1~10000 的整数中, 不能被 3, 4 或 5 中任何一个整除的整数的个数为 4000.

3.2 求 1~1000 中既非完全平方又非完全立方的整数个数.

解: 设 $S = \{1, 2, \dots, 1000\}$; A_1 表示在 1~1000 中完全平方数的集合, 则 $\overline{A_1}$ 表示在 1~1000 中不是完全平方数的集合; A_2 表示在 1~1000 中完全立方数的集合, 则 $\overline{A_2}$ 表示在 1~1000 中不是完全立方数的集合.

故 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ 表示在 1~1000 中既非完全平方又非完全立方的整数的集合, 由容斥原理 ((3.5) 式) 知:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| \quad (3.5)$$

其中

$$|S| = 1000$$

$$|A_1| = \left\lfloor \sqrt{1000} \right\rfloor = 31$$

$$|A_2| = \left\lfloor \sqrt[3]{1000} \right\rfloor = 10$$

$A_1 \cap A_2$ 表示在 1~1000 中既是完全平方又是完全立方的数的集合, 故

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \sqrt[6]{1000} \right\rfloor = 3$$

将以上数值代入 (3.5) 式得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = 1000 - (31 + 10) + 3 = 962$$

故在 1~1000 中既非完全平方又非完全立方的整数个数为 962.

3.3 某校有 120 名学生参加数学竞赛, 竞赛试题共有甲, 乙, 丙三题. 竞赛结果为: 12 名学生三题全对; 20 名学生只做对了甲题和乙题; 16 名学生做对了甲题和丙题; 28 名

学生做对了乙题和丙题；48 名学生做对了甲题；56 名学生做对了乙题；16 名学生三题都做错了。试求出做对了丙题的学生人数。

解：设 S 为参加竞赛的学生的集合； A_1 为在 S 中做对了甲题的学生的集合； A_2 为在 S 中做对了乙题的学生的集合； A_3 为在 S 中做对了丙题的学生的集合，则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ 就是做错了三题的学生的集合，由容斥原理 ((3.5) 式) 有，

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (3.5)$$

而 $|S| = 120$, $|A_1| = 48$, $|A_2| = 56$

由题意知，只做对了甲题和乙题的学生数为 20，故做对了甲题和乙题的学生数应为只做对了这两题的学生数和三题全做对的学生数之和，故

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2| &= 20 + 12 = 32, & |A_1 \cap A_3| &= 16, & |A_2 \cap A_3| &= 28 \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 12 \end{aligned}$$

将以上各式代入 (3.5) 式得

$$16 = 120 - (48 + 56 + |A_3|) + (32 + 16 + 28) - 12$$

所以 $|A_3| = 64$ 。

故做对了丙题的人数为 64。

3.4 在有 10 个字母 $a, a, b, b, c, c, d, d, e, e$ 的全排列中，求相同字母不相邻的排列个数。

解：设 S 为这 10 个字母的全排列的集合；

A_1 表示在 S 中两个 a 相邻的全排列的集合； A_2 表示在 S 中两个 b 相邻的全排列的集合；

A_3 表示在 S 中两个 c 相邻的全排列的集合； A_4 表示在 S 中两个 d 相邻的全排列的集合；

A_5 表示在 S 中两个 e 相邻的全排列的集合，则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$ 就是相同字母不相邻的排列所组成的集合，由容斥原理 ((3.5) 式) 有：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}| = |S| - \sum_{i=1}^5 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - \cdots - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \quad (3.5)$$

由定理 1.4 易得：

$$|S| = \frac{10!}{2!2!2!2!2!}$$

$$|A_i| = \frac{9!}{1!2!2!2!2!} \quad (i=1, 2, \dots, 5)$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{8!}{1!1!2!2!2!2!} \quad (i=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, \dots, 5; i \neq j)$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{7!}{1!1!1!2!2!2!} \quad (i=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, \dots, 5; k=1, 2, \dots, 5; i \neq j \neq k)$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = \frac{6!}{1!1!1!1!2!}$$

$$(i=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, \dots, 5; k=1, 2, \dots, 5; l=1, 2, \dots, 5; i \neq j \neq k \neq l)$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = \frac{5!}{1!1!1!1!1!}$$

将以上数值代入 (3.5) 式得

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}| \\ &= \frac{10!}{2!2!2!2!2!} - \binom{5}{1} \frac{9!}{2!2!2!2!} + \binom{5}{2} \frac{8!}{2!2!2!} - \binom{5}{3} \frac{7!}{2!2!} + \binom{5}{4} \frac{6!}{2!} - \binom{5}{5} 5! \\ &= 113400 - 5 \times 22680 + 10 \times 5040 - 10 \times 1260 + 5 \times 360 - 120 \\ &= 39480 \end{aligned}$$

故在 10 个字母 $a, a, b, b, c, c, d, d, e, e$ 的全排列中, 相同字母不相邻的排列个数为 39480.

3.5 求重集 $B = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 2 \cdot c\}$ 的排列数, 在这些排列中要求所有相同字母不能相邻出现 (例如, $abbbbcaca$ 是不允许的, 但 $abbbacacb$ 是允许的).

解: 令 S 为重集 B 的全排列所组成的集合, 则由定理 1.4 知

$$|S| = \frac{9!}{3!4!2!} = 1260$$

令 A_1 代表在 S 中 3 个 a 相邻的排列组成的集合, A_2 代表在 S 中 4 个 b 相邻的排列组成的集合, A_3 代表在 S 中 2 个 c 相邻的排列组成的集合, 则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ 为满足条件的排列集合. 由容斥原理 ((3.5) 式) 有:

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = |S| - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (3.5)$$

由定理 1.4 可得

$$|A_1| = \frac{7!}{4!2!} = 105, \quad |A_2| = \frac{6!}{3!2!} = 60, \quad |A_3| = \frac{8!}{4!3!} = 280$$

$$|A_1 \cap A_2| = 4!/2! = 12, \quad |A_1 \cap A_3| = 6!/4! = 30$$

$$|A_2 \cap A_3| = 5!/3! = 20, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = 6$$

将以上数值代入 (3.5) 式得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 1260 - 105 - 60 - 280 + 12 + 30 + 20 - 6 = 871$$

故所求全排列个数为 871 个.

3.6 求长为 5 的二进制数的个数, 其中要求每个 1 都同另一个 1 相邻.

解: 设 S 为长为 5 的二进制数的集合, 性质 P_i 表示长为 5 的二进制数的第 i 个数字是 1 且与其相邻的数字是 0, A_i 表示在 S 中具有性质 P_i 的二进制数的集合 ($i=1, 2, 3, 4$,

5), 则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$ 为在 S 中每个 1 都同另一个 1 相邻的集合, 由容斥原理 ((3.5) 式) 得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}| = |S| - \sum_{i=1}^5 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \cdots - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \quad (3.5)$$

显然有 $|S| = 2^5$

又由于 A_1 表示字长为 5 的二进制数的第 1 个数字是 1, 第 2 个数字是 0, 第 3、4、5 个数字分别是 x (x 表示数字 0 或 1, 下同) 的集合,

即 A_1 中的元具有如下形式: $10xxx$

因此有 $|A_1| = 2^3$

同理有

$$|A_2| = 2^2, |A_3| = 2^2, |A_4| = 2^2, |A_5| = 2^3$$

又由于 $A_1 \cap A_2$ 表示字长为 5 的二进制数的第 1 个数字是 1, 同时第 2 个数字也是 1 且第 3 个数字是 0, 第 4、5 个数字分别是 x 的集合, 即 $A_1 \cap A_2$ 中的元具有如下形式: $110xx$, 这不符合题意, 故有

$$|A_1 \cap A_2| = 0$$

又由于 $A_1 \cap A_3$ 表示字长为 5 的二进制数的第 1 个数字是 1, 第 3 个数字也是 1 且第 2 个数字是 0, 第 4 个数字也是 0, 第 5 个数字是 x , 即在 $A_1 \cap A_3$ 中的元具有如下形式: $1010x$, 故有

$$|A_1 \cap A_3| = 2$$

同理有

$$|A_1 \cap A_4| = 1, |A_1 \cap A_5| = 2, |A_2 \cap A_3| = 0, |A_2 \cap A_4| = 1, |A_2 \cap A_5| = 1$$

$$|A_3 \cap A_4| = 0, |A_3 \cap A_5| = 2, |A_4 \cap A_5| = 0$$

而 $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ ($i=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, \dots, 5; k=1, 2, \dots, 5; i \neq j \neq k$) 中只有 $|A_1 \cap A_3 \cap A_5| = 1$, 其余均为 0;

同理,

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, \dots, 5; k=1, 2, \dots, 5; l=1, 2, \dots, 5; i \neq j \neq k \neq l)$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 0$$

将以上数值代入 (3.5) 式得到:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}| = 2^5 - (2^3 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^3) + 9 - 1 + 0 - 0 = 12$$

故在长为 5 的二进制数中, 每个 1 都同另一个 1 相邻的二进制个数为 12 个.

3.7 在由 26 个字母 a, b, c, \dots, z 组成的全排列中, 求不包含字符串 john, paul 和 smite 的全排列个数.

解: 设 S 为 26 个字母的全排列的集合; A_1 表示在 S 中包含字符串 john 的全排列集合; A_2 表示在 S 中包含字符串 paul 的全排列集合; A_3 表示在 S 中包含字符串 smite 的全排列集合, 则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ 就是在 S 中不包含字符串 john, paul 和 smite 的全排列的集合, 由容斥原理 ((3.5) 式) 得:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (3.5)$$

其中, $|S| = 26!$; $|A_1| = 23!$; $|A_2| = 23!$; $|A_3| = 22!$

$$|A_1 \cap A_2| = 20!; |A_1 \cap A_3| = 19!; |A_2 \cap A_3| = 19!$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 16!$$

将以上数值代入 (3.5) 式得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 26! - 2 \cdot 23! - 22! + 20! + 2 \cdot 19! - 16!$$

故在由 26 个字母 a, b, c, \dots, z 组成的全排列中, 不包含字符串 john, paul 和 smite 的全排列个数为 $26! - 2 \cdot 23! - 22! + 20! + 2 \cdot 19! - 16!$

3.8 在所有的 n 位数中, 包含数字 3, 8, 9 但不包含数字 0, 4 的数有多少?

解: 除去 0, 4, 则在 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 这 8 个数字组成的 n 位数中,

令 S 表示由这 8 个数字组成的所有 n 位数的集合. 则 $|S| = 8^n$, 并令:

P_1 表示这样的性质: 一个 n 位数不包含 3;

P_2 表示这样的性质: 一个 n 位数不包含 8;

P_3 表示这样的性质: 一个 n 位数不包含 9;

又令 A_i 表示在 S 中具有性质 P_i 的元素构成的集合 ($i=1, 2, 3$).

则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ 表示在 S 中包含 3, 又包含 8, 又包含 9 的所有 n 位数的集合.

由容斥原理 ((3.5) 式) 得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (3.5)$$

而

$$|A_1| = 7^n, |A_2| = 7^n, |A_3| = 7^n$$

$$|A_1 \cap A_2| = 6^n, |A_1 \cap A_3| = 6^n, |A_2 \cap A_3| = 6^n$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5^n,$$

代入 (3.5) 式得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 8^n - 3 \cdot 7^n + 3 \cdot 6^n - 5^n$$

故所求的 n 位数有 $8^n - 3 \times 7^n + 3 \times 6^n - 5^n$ 个.

注意: 此题可用母函数的方法来求解 (见原教材第四章 § 4.3 节例 9).

3.9 一个体育团共 25 人, 其中 14 人会打足球, 12 人会打乒乓球, 6 人既会打乒乓球又会打足球, 5 人既会打篮球又会打足球, 还有两人对这三种球都会打, 而 6 个会打篮球的人都会打另一种球 (指这三种球的一种). 求不会打球的人数 (指这三种球).

解: 设 S 为这 25 个人组成的集合, F 代表在 S 中会打足球的人组成的集合, B 代表在 S 中会打篮球的人组成的集合, P 代表在 S 中会打乒乓球的人组成的集合, 则 $\overline{B} \cap \overline{F} \cap \overline{P}$ 就是在 S 中不会打球的人组成的集合, 由容斥原理 ((3.5) 式) 有

$$|\overline{B} \cap \overline{F} \cap \overline{P}| = |S| - |B| - |F| - |P| + |B \cap F| + |B \cap P| + |F \cap P| - |B \cap F \cap P| \quad (3.5)$$

而

$$|S| = 25, |F| = 14, |P| = 12, |B| = 6, |P \cap F| = 6, |B \cap F| = 5, |P \cap F \cap B| = 2$$

又 6 个会打篮球的人中有 5 个会打足球, 则依题意另一个必会打乒乓球, 又有两个人会三样, 所以, 那 5 个既会打篮球又会打足球的人中有两个会打乒乓球, 故有

$$|B \cap P| = 6 - 5 + 2 = 3$$

将以上各式之值代入 (3.5) 式得

$$\begin{aligned} |\overline{B} \cap \overline{F} \cap \overline{P}| &= |S| - |B| - |F| - |P| + |B \cap F| + |B \cap P| + |F \cap P| - |B \cap F \cap P| \\ &= 25 - 6 - 14 - 12 + 5 + 3 + 6 - 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

故不会打球的人数为 5 人.

3.10 求重集 $B = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10-组合数.

解: 构造集合 $B' = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$. 令集合 B' 的所有 10-组合构成的集合为 S . 由第一章的重复组合公式 (1.11) 有

$$|S| = F(3, 10) = \binom{3+10-1}{10} = 66$$

令 p_1 表示在 S 中的元素至少含有 4 个 a 这一性质, 令 p_2 表示在 S 中的元素至少含有 5 个 b 这一性质, 令 p_3 表示在 S 中的元素至少含有 6 个 c 这一性质, 并令 A_i ($i=1, 2, 3$) 表示在 S 中具有性质 p_i ($i=1, 2, 3$) 的元素所构成的集合, 于是 B 的 10-组合数就是在 S 中不具有性质 p_1, p_2, p_3 的元素个数. 由容斥原理 ((3.5) 式) 有:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (3.5)$$

由于已经求得 $|S| = 66$, 下面分别计算 (3.5) 式右端其他的项.

由于在 A_1 中的每一个 10-组合至少含有 4 个 a , 故将每一个这样的组合去掉 4 个 a 就得到集合 B' 的一个 6-组合. 反之, 如果取 B' 的一个 6-组合并加 4 个 a 进去, 就得到了 A_1 的一个 10-组合. 于是 A_1 的 10-组合数就等于 B' 的 6-组合数. 故有

$$|A_1| = F(3, 6) = \binom{3+6-1}{6} = 28$$

同样的分析可得

$$|A_2| = F(3, 5) = \binom{3+5-1}{5} = 21$$

$$|A_3| = F(3, 4) = \binom{3+4-1}{4} = 15$$

用类似的分析方法可分别求得

$$|A_1 \cap A_2| = F(3, 1) = \binom{3+1-1}{1} = 3$$

$$|A_1 \cap A_3| = F(3, 0) = \binom{3+0-1}{0} = 1$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0 \quad (\text{因为 } 5+6=11 > 10)$$

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = 0 \quad (\text{同上})$$

将以上数值代入 (3.5) 式得到:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= 66 - (28+21+15) + (3+1+0) - 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

故所求的 10-组合数为 6.

注意: 此题可用母函数的方法来求解 (见第四章).

3.11 求重集 $B = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$ 的 10-组合数.

解: 构造集合 $B' = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c, \infty \cdot d\}$. 令集合 B' 的所有 10-组合构成的集合为 S . 由第一章的重复组合公式 (1.11) 有

$$|S| = F(4, 10) = \binom{4+10-1}{10} = 286$$

令 p_1 表示在 S 中的元素至少含有 ∞ 个 a 这一性质, 令 p_2 表示在 S 中的元素至少含有 4 个 b 这一性质, 令 p_3 表示在 S 中的元素至少含有 6 个 c 这一性质, 令 p_4 表示在 S 中的元素至少含有 8 个 d 这一性质, 并令 A_i ($i=1, 2, 3, 4$) 表示在 S 中具有性质 p_i ($i=1, 2, 3, 4$) 的元素所构成的集合, 于是 B 的 10-组合数就是在 S 中不具有性质 p_1, p_2, p_3 和 p_4 的元素个数. 由容斥原理有

$$\begin{aligned}
& |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^4 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \quad (3.5)
\end{aligned}$$

由于已经求得 $|S|=286$ ，下面分别计算 (3.5) 式右端其他的项。

由于在 A_1 中的每一个 10-组合至少含有 ∞ 个 a ，故

$$|A_1|=0$$

由于 A_2 中的每一个 10-组合至少含有 4 个 b ，故将每一个这样的组合去掉 4 个 b 就得到集合 B' 的一个 6-组合。反之，如果取 B' 的一个 6-组合并加 4 个 b 进去，就得到了 A_2 的一个 10-组合。于是 A_2 的 10-组合数就等于 B' 的 6-组合数。故有

$$|A_2|=F(4, 6)=\binom{4+6-1}{6}=84$$

同样的分析可得

$$|A_3|=F(4, 4)=\binom{4+4-1}{4}=35$$

$$|A_4|=F(4, 2)=\binom{4+2-1}{2}=10$$

用类似的分析方法可分别求得

$$|A_i \cap A_j|=0 \quad (\text{因为 } \infty > 10) \quad (i=2, 3, 4)$$

$$|A_2 \cap A_3|=F(4, 0)=\binom{4+0-1}{0}=1$$

$$|A_2 \cap A_4|=0 \quad (\text{因为 } 4+8=12 > 10)$$

$$|A_3 \cap A_4|=0 \quad (\text{同上})$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k|=0 \quad (\text{因为 } \infty > 10) \quad (i=2, 3, 4; j=2, 3, 4; \text{且 } i \neq j)$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4|=0 \quad (\text{因为 } 4+6+8=18 > 10)$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l|=0 \quad (\text{因为 } \infty > 10)$$

将以上数值代入 (3.5) 式得到

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| &= 286 - (0+84+35+10) + (0+0+0+1+0+0) - (0+0+0+0) + 0 \\
&= 158
\end{aligned}$$

故重集 B 的 10 组合数为 158.

3.12 求方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 的不超过 8 的正整数解的个数.

解: 令 $y_i = x_i - 1$, $i=1, 2, 3$, 则原方程解的个数等于求 $y_1 + y_2 + y_3 = 11$ 的不超过 7 的非负整数解的个数.

由原教材第一章 § 1.3 节例 8 易知此解的个数与重集 $B = \{7 \cdot a, 7 \cdot b, 7 \cdot c\}$ 的 11-组合数相同.

构造集合 $B' = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$. 令集合 B' 的所有 11-组合构成的集合为 S . 由第一章的重复组合公式 (1.11) 有

$$|S| = F(3, 11) = \binom{3+11-1}{11} = 78$$

令 p_1 表示在 S 中的元素至少含有 8 个 a 这一性质, 令 p_2 表示在 S 中的元素至少含有 8 个 b 这一性质, 令 p_3 表示在 S 中的元素至少含有 8 个 c 这一性质, 并令 A_i ($i=1, 2, 3$) 表示在 S 中具有性质 p_i ($i=1, 2, 3$) 的元素所构成的集合, 于是 B 的 11-组合数就是在 S 中不具有性质 p_1, p_2, p_3 的元素个数. 由容斥原理 ((3.5) 式) 有

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (3.5)$$

由于已经求得 $|S|=78$, 下面分别计算 (3.5) 式右端其他的项.

由于在 A_1 中的每一个 11-组合至少含有 8 个 a , 故将每一个这样的组合去掉 8 个 a 就得到集合 B' 的一个 3-组合. 反之, 如果取 B' 的一个 3-组合并加 8 个 a 进去, 就得到了 A_1 的一个 11-组合. 于是 A_1 的 11-组合数就等于 B' 的 3-组合数. 故有

$$|A_1| = F(3, 3) = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

同样的分析可得

$$|A_2| = F(3, 3) = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

$$|A_3| = F(3, 3) = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

用类似的分析方法可分别求得

$$|A_1 \cap A_2| = 0 \quad (\text{因为 } 8+8=16>11)$$

$$|A_1 \cap A_3| = 0 \quad (\text{同上})$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0 \quad (\text{同上})$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0 \quad (\text{同上})$$

将以上数值代入 (3.5) 式得到

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 78 - (10+10+10) + (0+0+0) - 0 = 48$$

故方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 的不超过 8 的正整数解的个数有 48 个.

3.13 求由数字 1, 2, ..., 8 所组成的全排列中, 偶数均不在其自然位置上的全排列个数.

解: 设 S 表示 $\{1, 2, \dots, 8\}$ 的所有全排列组成的集合;

A_1 表示在 S 中 2 在其自然位置上的全排列的集合;

A_2 表示在 S 中 4 在其自然位置上的全排列的集合;

A_3 表示在 S 中 6 在其自然位置的全排列的集合;

A_4 表示在 S 中 8 在其自然位置上的全排列的集合.

则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$ 表示在 S 中偶数均不在自然位置上的全排列所组成的集合, 故由容斥原理 ((3.5) 式) 有

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = |S| - \sum_{i=1}^4 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \quad (3.5)$$

而 $|S| = 8!, |A_i| = 7!, |A_i| = 7! (i = 1, 2, 3, 4)$

而 $A_1 \cap A_2$ 表示 2 和 4 均在自然位置上的全排列的集合,

故 $|A_1 \cap A_2| = 6!$

同理 $|A_i \cap A_j| = 6!, (i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j)$

类似地有 $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 5! (i, j, k = 1, 2, 3, 4; i \neq j \neq k)$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4!$$

将以上数值代入 (3.5) 式得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = 8! - \binom{4}{1} 7! + \binom{4}{2} 6! - \binom{4}{3} 5! + \binom{4}{4} 4! = 24024$$

故由数字 1, 2, ..., 8 所组成的全排列中, 偶数均不在其自然位置上的全排列个数为 24024 个.

注意: 本题可用禁区棋盘来求解

3.14 求由数字 1, 2, ..., 8 所组成的全排列中, 恰有 4 个数字在其自然位置上的全排列个数.

解: 4 个数在其自然位置共有 $\binom{8}{4}$ 种方式, 对某一种方式, 均有 4 个数字不在其自然

位置, 这正好是一个错排, 其方式数为 D_4 (见定理 3.2), 由乘法规则, 恰有 4 个数字在其自然位置上的全排列数为

$$\binom{8}{4} D_4 = 630$$

3.15 在有 9 个字母 $a, a, a, b, b, b, c, c, c$ 的全排列中, 求相同字母不相邻的排列个数.

解：我们把 9 个字母的排列位置从左到右编号为 1, 2, ..., 9.

设 p_1 表示排列位置 1 和 2 上排的字母相同这一性质；

p_2 表示排列位置 2 和 3 上排的字母相同这一性质；

.....

p_8 表示排列位置 8 和 9 上排的字母相同这一性质.

并设 S 为这 9 个字母的全排列的集合, A_i 为具有性质 p_i 的排列所组成的集合, $i=1, 2, \dots, 8$, 则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_8}$ 就是相同字母不相邻的排列所组成的集合, 于是, 由容斥原理 ((3.5) 式) 有

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_8}| &= |S| - \sum_{i=1}^8 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^8 |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_8| \end{aligned} \quad (3.5)$$

下面, 我们计算 (3.5) 式右端各项.

由定理 1.4 有

$$|S| = \frac{9!}{3!3!1!} = 1680$$

由于 A_1 表示排列位置 1 和 2 上字母相同的排列所组成的集合, 而从重集 $\{3a, 3b, 3c\}$ 中选两个相同的字母有三种方式, 或选 aa , 或选 bb , 或选 cc . 对于每一种方式 (如选 aa , 选 bb 或 cc 可作同样分析), 还剩下 7 个字母 ($abbbccc$) 作全排列共有 $\frac{7!}{3!3!1!}$ 种排法, 对于每一种排法都排在排列位置 1 和 2 的后面, 因此, 由乘法规则可得

$$|A_1| = 3 \frac{7!}{3!3!1!}$$

又由于 A_2 表示排列位置 2 和 3 上字母相同的排列所组成的集合, 由上面的分析知, 将两个相同的字母 (如选 aa) 放在排列位置 2 和 3 上, 再将由 7 个字母 ($abbbccc$) 所作全排列中的一个排列的第一个字母放在排列位置 1 上, 第 2, 3, ..., 6 个字母按顺序分别放在排列位置第 4, 5, 6, 7, 8, 9 上, 因此, 由乘法规则可得

$$|A_2| = 3 \frac{7!}{3!3!1!}$$

同样的分析可得

$$|A_i| = 3 \frac{7!}{3!3!1!} \quad (i=3, 4, \dots, 8)$$

故有

$$\sum_{i=1}^8 |A_i| = 8 \times 3 \times \frac{7!}{3!3!1!} = 3360$$

用上面同样的分析方法可以计算 $\sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j|$ 之值如下:

由于 $A_1 \cap A_2$ 表示在排列位置 1 和 2 上字母相同 (如选 aa, bb, cc 均可, 这里选 aa) 的排列, 同时也表示在排列位置 2 和 3 上字母相同的全排列所组成的集合, 这表明 $A_1 \cap A_2$ 在排列位置 1、2、3 均排相同的字母 a , 在其他位置上再排重集 $\{3b, 3c\}$ 的一个排列所成的全排列的集合, 而重集 $\{3b, 3c\}$ 的排列个数共有

$$\frac{6!}{3!3!}$$

于是, 由乘法规则可得

$$|A_1 \cap A_2| = 3 \frac{6!}{3!3!}$$

然后分析 $A_i \cap A_j$ 中 i, j 不相邻的情况, 以 $A_1 \cap A_3$ 为例: 由于 $A_1 \cap A_3$ 表示在排列位置 1, 2 上字母相同, 排列位置 3, 4 上字母相同 (如选 aa, bb, cc 任意 2 种进行排列均可, 故 $P(3, 2) = 6$ 种排列方式. 这里选 aa, bb) 的排列, 这在其他位置上再排重集 $\{1a, 1b, 3c\}$ 的一个排列所成的全排列的集合, 而重集 $\{1a, 1b, 3c\}$ 的排列个数共有

$$\frac{5!}{3!}$$

于是, 由乘法规则可得

$$|A_1 \cap A_3| = 6 \times \frac{5!}{3!}$$

由于 $\sum_{i \neq j}^8 |A_i \cap A_j|$ ($j > i+1; i=1, 3, \dots, 6$) 中对于每一个 i, j 有 $7-i$ 个位置, 故满足 $A_i \cap A_j$ 中 i, j 不相邻的个数有 $6+5+4+\dots+1=21$;

故

$$\sum_{i \neq j}^8 |A_i \cap A_j| = (1+2+\dots+6) \times 6 \times \frac{5!}{3!} = 21 \times 6 \times \frac{5!}{3!} \quad (j \neq i+1; i=1, 3, \dots, 6)$$

综合上述两种情况有:

$$\sum_{i \neq j}^8 |A_i \cap A_j| = 7 \times 3 \times \frac{6!}{3!3!} + 21 \times 6 \times \frac{5!}{3!} = 420 + 2520 = 2940$$

用上面类似的分析方法可得

$$\sum_{i \neq j \neq k}^8 |A_i \cap A_j \cap A_k| = 30 \times 3 \times 2 \times \frac{4!}{3!} + 20 \times (3! \times 3!) = 1440$$

$$\sum_{i \neq j \neq k \neq l}^8 |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 10 \times (3 \times 2 \times \frac{3!}{3!}) + 30 \times (3! \times 2!) = 420$$

$$\sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq m}^8 |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m| = 12 \times (3! \times 1!) = 72$$

$$\sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq m \neq n}^8 |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m \cap A_n| = 1 \times (3! \times 0!) = 6$$

$$\sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq m \neq n \neq p}^8 |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m \cap A_n \cap A_p| = 0$$

$$\sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq m \neq n \neq p \neq q}^8 |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m \cap A_n \cap A_p \cap A_q| = 0$$

将以上各式代入 (3.5) 式右端得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_8}| = 1680 - 3360 + 2940 - 1440 + 420 - 72 + 6 = 174$$

故在有 9 个字母 $a, a, a, b, b, b, c, c, c$ 的全排列中, 相同字母不相邻的排列个数为 174.

3.16 证明: D_n 是偶数当且仅当 n 是奇数.

证明: 原命题等价于: D_{2k-1} 为偶数, D_{2k} 为奇数, ($k=1, 2, 3, \dots$) 现用数学归纳法证明.

显然, 当 $k=1$ 时, $D_1=0$, $D_2=1$ 故命题成立.

设 $k=n$ 时命题成立, 即, D_{2n-1} 为偶数, D_{2n} 为奇数.

则当 $k=n+1$ 时, 由定理 3.3 ((3.8) 式) 有

$$D_{2(n+1)-1} = D_{2n+1} = (2n+1-1)(D_{2n} + D_{2n-1}) = 2n(D_{2n} + D_{2n-1}) \text{ 为偶数.}$$

$$D_{2(n+1)} = D_{2n+2} = (2n+2-1)(D_{2n+1} + D_{2n}) \text{ 为奇数.}$$

故由数学归纳法原理知, 命题得证.

3.17 证明: 当 $n \geq 2$ 时

$$Q_n = D_n + D_{n-1}$$

证明: 由定理 3.4 ((3.9) 式) 有

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-1)! \frac{n-k}{k!} \\ &= (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{k!} \end{aligned}$$

而又由定理 3.2 ((3.7) 式) 有

$$\begin{aligned} D_n &= n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}, \quad D_{n-1} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!}, \quad \text{故} \\ D_n + D_{n-1} &= (n-1)! \left[n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n}{k!} \right] + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!} \\ &= (n-1)! \left[n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n}{k!} \right] + (n-1)! \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (n-1)! \left[n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!} (n-k) \right] \\
 &= (n-1)! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n-k}{k!} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{k!} = Q_n
 \end{aligned}$$

即 $Q_n = D_n + D_{n-1}$.

3.18 来自 n 个国家的 $5n$ 个人站在一排. 每个国家 5 个人. 证明: 使得每一个人都挨着他的一个同胞而站的排列个数为

$$(120)^n \left[(2n)! - \binom{n}{1} (2n-1)! + \binom{n}{2} (2n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} n! \right]$$

证明: 依题意满足题设要求的排列中, 任一国家的 5 个人要么 5 个人相邻排在一起, 要么其中 2 个人相邻, 另外 3 个人相邻排在一起. 我们分两步来进行排列:

第一步: 把每个国家的 5 个人分成一个 2 人组和一个 3 人组, 这样共得 $2n$ 个组. 因为我们考虑的是排列问题, 所以各组内的人是有序的, 则显然有 $(5!)^n = 120^n$ 种分组方法.

第二步: 对一个固定的分组, 设 x_i 为第 i 个国家的 2 人组, y_i 为第 i 个国家的 3 人组. 注意到 $x_i y_i$ 与 $y_i x_i$ 相邻都是第 i 个国家 5 个人相邻的情形. 只能计算一个, 否则将产生重复. 例如 $(123)(45) = (12)(345)$.

我们称 $y_i x_i$ 为反序相邻 ($i=1, 2, \dots, n$). 设 A_i 为这 $2n$ 个组的全排列中含 $y_i x_i$ 反序相邻的排列组成的集合 ($i=1, 2, \dots, n$). 则

$$|A_i| = (2n-1)! \quad i=1, 2, \dots, n.$$

$$|A_i \cap A_j| = (2n-2)! \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

... ..

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (2n-k)! \quad k=1, 2, \dots, n$$

设 S 为这 $2n$ 个组的所有全排列所组成的集合. 那么对于这个固定的分组, 满足要求的排列数为:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = (2n)! - \binom{n}{1} (2n-1)! + \binom{n}{2} (2n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} n!$$

由乘法规则知本问题总的排列数为

$$(120)^n \cdot \left[(2n)! - \binom{n}{1} (2n-1)! + \binom{n}{2} (2n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} n! \right]$$

3.19 a. 证明: 从集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 中选取 k 个数, 且无相邻两数, 则不同的选取方法数为 $\binom{n-k+1}{k}$.

证明: 设 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 是从集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 中选取满足要求的 k 个数. 因为这

是组合问题,不妨设它们是按从小到大的顺序排列的,即

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k \leq n_2$$

由于无相邻两数,则显然有

$$1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \cdots < a_k - (k-1) \leq n - (k-1)$$

因此 $\{a_1, a_2 - 1, \cdots, a_k - k + 1\}$ 是 $S' = \{1, 2, 3, \cdots, n - k + 1\}$ 的一个 k 子集.

易见有一种 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 的取法便有一种 $\{a_1, a_2 - 1, \cdots, a_k - k + 1\}$ 的取法. 而这两种取法有一一对应关系, 从而这两个组合计数问题是等价的. 这样一来, 从集合 $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 中选取 k 个数且无相邻两数的组合数和从集合 $S' = \{1, 2, 3, \cdots, n - k + 1\}$ 中选取 k 个数的组合数是相同的. 故不同的选取方法数为 $\binom{n-k+1}{k}$, 证毕.

3.19 b. 证明在一个凸 n 边形中, 以其顶点为顶点, 对角线为边 (不含原多边形的边) 的 k 边形个数是 $\frac{n}{k} \binom{n-k+1}{k-1}$.

证明: 任选一点 A , 去掉左右两个邻点, 在剩下的 $n-3$ 个点中按顺序编号为 $1, 2, \cdots, n-3$ (显然 1 和 $n-3$ 两点不相邻). 从这 $n-3$ 个点中选出 $k-1$ 个不相邻的点 (再加一点 A) 组成 k 边形, 由上题 3.19a 的结论, 其选法数为

$$\binom{(n-3)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{n-k+1}{k-1}$$

由于凸 n 边形有 n 个顶点, 由乘法规则得到共有 $n \binom{n-k+1}{k-1}$ 个满足要求的 k 边形. 又注意到 k 边形有 k 个顶点, 所以同一个 k 边形必在 $n \binom{n-k+1}{k-1}$ 中被计算了 k 次, 因此满足要求的 k 边形有 $\frac{n}{k} \binom{n-k+1}{k-1}$ 个, 证毕.

注意本题也可以等价描述为: 在集合 $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 中, 既无相邻两数, 同时也不含有 1 和 n 的 k 元子集的个数为 $\frac{n}{k} \binom{n-k+1}{k-1}$.

3.20 在一个宴会上, 有 $n(n \geq 3)$ 对夫妇围圆桌就坐, 在男女交替、夫妻不相邻的条件下, 有多少种就坐方式.

解: 我们先让 n 位女士围圆桌间隔就坐, 由 (1.6) 式知其就坐方式有 $(n-1)!$ 种. 对每一种就坐方式, 把她们按顺时针方向编号为 $1, 2, 3, \cdots, n$, 再让丈夫们就坐.

下面, 我们计算男士符合题意的所有就坐方式.

设 S 为所有男士就座方式的集合, 则显然有 $|S| = n!$,

令:

R_1 表示丈夫 1 坐在妻子 1 右边这一性质, L_1 表示丈夫 1 坐在妻子 1 左边这一性质;

R_2 表示丈夫 2 坐在妻子 2 右边这一性质, L_2 表示丈夫 2 坐在妻子 2 左边这一性质;

.....

R_n 表示丈夫 n 坐在妻子 n 右边这一性质, L_n 表示丈夫 n 坐在妻子 n 左边这一性质.

注意, 以上这些性质不是相互独立的, 例如, 显然有 L_2 出现时, R_2 就不能出现, 同时 R_3 也不能出现.....

并令:

A_i 是具有性质 R_i 的元素所组成的集合 ($i=1, 2, \dots, n$);

A_{n+i} 是具有性质 L_i 的元素所组成的集合 ($i=1, 2, \dots, n$)

则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{2n}}$ 就是男士符合题意的所有就坐方式的集合, 由容斥原理((3.5)式)有

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{2n}}| &= |S| - \sum_{i=1}^{2n} |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{2n} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{2n}| \end{aligned} \quad (3.5)$$

下面, 分别计算上式右端各项.

由于以上这些集合(或性质)不是相互独立的, 我们可按如下方式计算:

现把以上 $2n$ 个集合看成 $2n$ 个点, 并将它们按顺序 $A_1, A_{n+1}, A_2, A_{n+2}, \dots, A_n, A_{2n}$

分别编号为 $1, 2, 3, 4, \dots, 2n-1, 2n$, 并按顺时针排成一个圆(这时, $2n$ 与 1 相邻, 即 A_{2n} 与 A_1 相邻). 由于男女交替、夫妻不相邻, 由此可知, 任何两个相邻的集合(或性质)是不能同时出现的, 否则, 要么妻子和丈夫坐在一起, 要么两个男士坐在一起. 于是由上题(3.19b)的结论可知(本题中用连线连接相邻的两点, 就得到一个凸 $2n$ 边形): 在集合 $S=\{1, 2, \dots, n, \dots, 2n\}$ 中, 既无相邻两数, 同时也不含有 1 和 $2n$ 的 k 元子集(即仅具有 k 种性质出现)的个数为

$$\frac{2n}{k} \binom{2n-k-1}{k-1} = \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}$$

当 $k=1$ 时, 即仅考虑具有一种性质时, 也即仅有一位男士座位固定, 其他 $n-1$ 个男士可以随便就坐, 则有 $(n-1)!$ 种坐法, 由乘法规则有

$$\sum_{i=1}^{2n} |A_i| = \frac{2n}{2n-1} \binom{2n-1}{1} (n-1)!$$

同理有

$$\sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| = \frac{2n}{2n-2} \binom{2n-2}{2} (n-2)!$$

.....

一般有

$$\sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \quad (k=1, 2, \dots, 2n)$$

注意：显然，在上式中，当 $k=n+1, n+2, \dots, 2n$ 时，有

$$\sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = 0$$

而且，从几何意义上讲，当 $k=n+1, n+2, \dots, 2n$ 时， $\sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ 也

应为 0，因为，当至少有 $n+1$ 个集合相交时，或者有两个男士坐在一起，或者一个男士同时坐两个位置，这是不可能的。例如 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}$ 就表明这个集合中的一种可能坐法是丈夫 1 既坐在妻子 1 的右边，又坐在妻子 1 的左边，这是不可能的，或者这个集合中一种坐法是丈夫 1 坐在妻子 1 的左边，丈夫 2 坐在妻子 2 的右边，这表明两个女士坐在一起，这又不符合题意。

将以上各式代入 (3.5) 式右端即得男士符合题意的所有就坐方式为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{2n}}| = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

又由于女士开始时就坐方式为 $(n-1)!$ 种，由乘法原规则，其总的符合题意的就坐方式为

$$(n-1)! |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{2n}}| = (n-1)! \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \quad (\text{种})$$

注意：此题还可用禁区棋盘多项式方法求解。

3.21 在一个班上有 n 名学生，临时将这 n 个学生任意编号为 $1, 2, 3, \dots, n$ 。当教师上课按原来的点名册点名时，如果编号为 i 的学生正好是第 i 个喊到时，就称为一次巧遇。

a. 求至少有一次巧遇的概率。

b. 求恰有 m 次巧遇的概率。

解：事实上，此问题与原教材第三章 § 3.3 中的错排问题相同，于是有

$e^{-1} \approx D_n/n!$ ，这表明，当 n 充分大时， $D_n/n!$ 近似等于 e^{-1} 。而 $D_n/n!$ 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的错排个数与它的全排列个数之比。它表明我们随机地选择 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个全排列，它的一个错排的概率近似等于 e^{-1} ，于是有

a. 至少有一次巧遇的概率为

$$1 - D_n/n! \approx 1 - e^{-1}$$

b. 设有 m 个学生保持原有编号，则从 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中取 m 个数共有 $\binom{n}{m}$ 种方式，

其余还剩 $n-m$ 个数不在原来位置上, 这相当 $n-m$ 个数的错排, 其错排数为 D_{n-m} , 由乘法规则有

$$\binom{n}{m} D_{n-m} \approx \frac{n!}{m!} e^{-1}$$

所以恰有 m , 此巧遇的概率为:

$$\binom{n}{m} D_{n-m} / n! \approx \frac{e^{-1}}{m!}$$

3.22 有张、王、刘、李四位教师和数学、物理、化学、英语四门课程. 已知张和李都不能教数学和英语, 王不能教化学, 刘不能教物理和化学. 若要为每人安排一门他能教的课程, 且一门课程只能被一人教, 试问有多少种不同的安排方案?

解: 这是一个四元有禁位排列问题, 其对应的有禁区棋盘为如图 3-1 所示.

	数	英	物	化
张				
李				
刘				
王				

图 3-1

设禁区棋盘为 C (图中阴影部分), 利用 (3.11) 式可求得

$$R(C) = 1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + 2x^4$$

即 $r_1 = 7, r_2 = 15, r_3 = 10, r_4 = 2$. 由定理 3.8 可得所求排列数 (安排方案) 为

$$4! - 7 \times 3! + 15 \times 2! - 10 \times 1! + 2 = 4 \text{ (种)}$$

注意: 用观察法看棋盘的特点也可以分析出仅有 4 种方案.

第四章 母函数

一、内容提要

定义 4.1 给定一个无穷序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ (简记为 $\{a_n\}$), 称函数

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad (4.1)$$

为序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的普通母函数.

定义 4.2 给定无穷序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, 称函数

$$f_e(x) = a_0 + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_n \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \quad (4.2)$$

为序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的指数母函数.

定理 4.1 设 $f(x)$, $f_e(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的普通母函数和指数母函数, 则

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-s} f_e(sx) ds$$

定义 4.3 设 $A(x)$, $B(x)$ 和 $C(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$, $(b_0, b_1, \dots, b_r, \dots)$ 和 $(c_0, c_1, \dots, c_r, \dots)$ 的普通母函数, 则有 $C(x) = A(x) + B(x)$ 当且仅当对所有的 i , 都有 $c_i = a_i + b_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, r, \dots$).

定义 4.4 设 $A(x)$, $B(x)$ 和 $C(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$, $(b_0, b_1, \dots, b_r, \dots)$ 和 $(c_0, c_1, \dots, c_r, \dots)$ 的普通母函数, 则有

$$C(x) = A(x) B(x) \text{ 当且仅当对所有的 } i, \text{ 都有 } c_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r, \dots)$$

定义 4.5 设 $A(x)$, $B(x)$ 和 $C(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$, $(b_0, b_1, \dots, b_r, \dots)$ 和 $(c_0, c_1, \dots, c_r, \dots)$ 的指数母函数, 则有

$$C(x) = A(x) + B(x) \text{ 当且仅当对所有的 } i, \text{ 都有 } c_i = a_i + b_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r, \dots)$$

定义 4.6 设 $A(x)$, $B(x)$ 和 $C(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$, $(b_0, b_1, \dots, b_r, \dots)$ 和 $(c_0, c_1, \dots, c_r, \dots)$ 的指数母函数, 则有

$$C(x) = A(x) B(x) \text{ 当且仅当对所有的 } i, \text{ 都有}$$

$$c_i = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} a_k b_{i-k} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r, \dots)$$

注意：在本章中，必须对下面的多项式作正确解释和理解：

① 多项式

$$(1+x)(1+x)\cdots(1+x) = (1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r$$

表示从 n 个不同的物体中选取 r 个物体的组合，其方法数为 $(1+x)^n$ 的幂级数展开式中 x^r 的系数 $\binom{n}{r}$ 。

多项式中的因子 $(1+x)$ 象征性表示在组合中某一物体可以不选取，或者只选取一次。

② 多项式

$$(1+x+x^2+\cdots)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

表示从 n 个不同的物体中允许重复地选取 r 个物体，其方法数为 $(1+x+x^2+\cdots)^n$ 的幂级数展开式中 x^r 的系数 $\binom{n+r-1}{r} = F(n, r)$ 。

多项式中因子 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)$ 象征性地表示在组合中某一物体可以不选，或者选一次，或者选两次，或者选三次……

③ 多项式

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n p(n, r) \frac{x^r}{r!}$$

表示从 n 个不同的物体中选取 r 个物体的排列，其方法数为 $(1+x)^n$ 的幂级数展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数 $p(n, r)$ 。

多项式中的因子 $(1+x) = (1+x^1/1!)$ 象征性地表示某一物体在排列中可以不选取，或者选取一次。

④ 多项式

$$(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots)^n = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{x^r}{r!}$$

表示从 n 个不同的物体中允许重复地选取 r 个物体的排列，其方法数为 $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots)^n$ 的幂级数展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数 n^r 。

多项式中的因子 $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots)$ 象征性地表示某一物体在排列中可以不选，或选取一次，或选取两次，…，或选取 r 次……

定理 4.2 设 a, b, c, \dots 是大于 0 的正整数，则

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$$

的级数展开式中的 x^n 的系数等于把正整数 n 拆分成 a, b, c, \dots 的和的方法数 $P(n)$.

定义 4.7

1. 用 $P_k(n)$ 表示 n 拆分成 $1, 2, \dots, k$ 的允许重复的方法数.
2. 用 $P_o(n)$ 表示 n 拆分成奇整数的方法数.
3. 用 $P_d(n)$ 表示 n 拆分成不同整数的方法数.
4. 用 $P_i(n)$ 表示 n 拆分成 2 的不同幂 (即 $1, 2, 4, 8, \dots$) 的方法数.

推论 1 $\{P_3(n)\}$ 的普通母函数是 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$

推论 2 $\{P_k(n)\}$ 的普通母函数是 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$

推论 3 $P(n)$ 的普通母函数是 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$

推论 4 $\{P_o(n)\}$ 的普通母函数是 $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}$

定理 4.3 设 a, b, c, \dots 都是大于 0 的正整数, 则

$$(1+x^a)(1+x^b)(1+x^c)\cdots$$

的级数展开式中 x^n 项的系数就是把 n 拆成 a, b, c, \dots 的和, 且 a, b, c, \dots 最多只出现一次的方法数.

推论 1 $\{P_d(n)\}$ 的普通母函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$$

推论 2 $\{P_i(n)\}$ 的普通母函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

定理 4.4 (Euler) 对于正整数 n 都有

$$P_o(n) = P_d(n)$$

定理 4.5 (Sylvester) 对正整数 n , 有

$$P_i(n) = 1$$

定理 4.6 对于任何正整数 n , 有

$$P(n) < e^{3\sqrt{n}}$$

定理 4.7 正整数 n 拆分成 m 项的和的方式数等于 n 拆分成最大数为 m 的方式数.

定理 4.8 正整数 n 拆分成最多不超过 m 个项的和的方式数等于 n 拆分成最大的数不超过 m 的方式数.

二、习题解答

4.1 求下列序列的普通母函数.

a. $1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$

解: 设序列 $1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ 的普通母函数为 $f(x)$, 则由定义 (4.1) 有:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

b. $\left\{ \binom{c}{0}, -\binom{c}{1}, \binom{c}{2}, \dots, (-1)^n \binom{c}{n}, \dots \right\}$ (c 是实数)

解: 设序列 $\left\{ \binom{c}{0}, -\binom{c}{1}, \binom{c}{2}, \dots, (-1)^n \binom{c}{n}, \dots \right\}$ 的普通母函数为 $f(x)$, 则由定义 (4.1)

有:

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{c}{0} - \binom{c}{1}x + \binom{c}{2}x^2 + \dots + (-1)^n \binom{c}{n}x^n + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{c}{i} x^i \\ &= (1-x)^c \end{aligned}$$

c. $(c^0, c^1, c^2, \dots, c^n, \dots)$ (c 是实数)

解: 设序列 $(c^0, c^1, c^2, \dots, c^n, \dots)$ 的普通母函数为 $f(x)$, 则由定义 (4.1) 有:

$$\begin{aligned} f(x) &= c^0 + cx + \dots + c^n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i \\ &= \frac{1}{1-cx} \end{aligned}$$

d. $\left(\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, (-1)^n, \dots \right)$

解: 设序列 $\left(\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, (-1)^n, \dots \right)$ 的普通母函数为 $f(x)$, 则由定义 (4.1) 有:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}x^n + \cdots \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!} \\
 &= e^{-x}
 \end{aligned}$$

e. $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, 其中 $a_n = \binom{n}{2}$

解: 设序列 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ 的普通母函数为 $f(x)$, 则由定义 (4.1) 有:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad (\text{其中 } a_i = \binom{i}{2}) \\
 &= \frac{x^2}{(1-x)^3}
 \end{aligned}$$

4.2 求下列序列的指数母函数

a. $(1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots)$

解: 设序列 $(1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots)$ 的指数母函数为 $f_e(x)$, 则由定义 (4.2) 有:

$$\begin{aligned}
 f_e(x) &= 1! + 2! \frac{1}{1!}x + 3! \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (n+1)! \frac{1}{n!}x^n + \cdots \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)! \frac{x^i}{i!} \\
 &= \frac{1}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

b. $(0!, 1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots)$

解: 设序列 $(0!, 1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots)$ 的指数母函数为 $f_e(x)$, 则由定义 (4.2) 有:

$$\begin{aligned}
 f_e(x) &= 0 + 1! \frac{x}{1!} + 2! \frac{x}{2!} + \cdots + n! \frac{x}{n!} + \cdots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\
 &= \frac{1}{1-x}
 \end{aligned}$$

c. $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$, 其中 $(c_0 = 1, c_n = c(c-1) \cdots (c-n+1), n=1, 2, 3, \dots)$

解: 设序列 $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ 的指数母函数为 $f_e(x)$, 则由定义 (4.2) 有:

$$\begin{aligned}
 f_e(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c(c-1) \cdots (c-n+1)}{n!} x^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} x^n \\
 &= (1+x)^c
 \end{aligned}$$

d. $(1, 2, 2^2 \cdot 2!, 2^3 \cdot 3!, \dots, n!, \dots)$

解: 设序列 $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ 的指数母函数为 $f_e(x)$, 则由定义 (4.2) 有:

$$\begin{aligned}
 f_e(x) &= 2^0 + 2^1 \cdot 1! \frac{x}{1!} + 2^2 \cdot 2! \frac{x^2}{2!} + \dots + 2^n \cdot n! \frac{x^n}{n!} + \dots \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i \\
 &= \frac{1}{1-2x}
 \end{aligned}$$

4.3 若 $A(x), B(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $(b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ 的普通母函数, 证明:

a. 若 $b_n = ka_n$, k 为常数, 则 $B(x) = kA(x)$

b. 若 $b_n = \begin{cases} 0, & n < m \\ a_{n-m}, & n \geq m \end{cases}$, 则 $B(x) = x^m A(x)$

c. 若 $b_n = a_{n+m}$, 则 $B(x) = \frac{A(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n}{x^m}$

d. 若 $b_n = na_n$, 则 $B(x) = xA'(x)$

证明:

$$a. B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} ka_n x^n = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = kA(x)$$

$$\begin{aligned}
 b. B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{m-1} b_n x^n + \sum_{n=m}^{\infty} b_n x^n = 0 + \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^n = x^m \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^{n-m} \\
 &= x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^m A(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c. B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} x^n = \frac{1}{x^m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} x^{n+m} \\
 &= \frac{1}{x^m} \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{x^m} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n \right) \\
 &= \frac{1}{x^m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n \right) \\
 &= \frac{A(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n}{x^m}
 \end{aligned}$$

$$d. B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$$

而 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 故 $A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

所以, $x A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$

所以, $B(x) = x A'(x)$

4.4 已知序列 $1, b, b^2, \dots, b^n, \dots$ 的普通母函数是 $\frac{1}{1-bx}$, 求以 $\frac{b^k x^k}{(1-bx)^{k+1}}$ 为普通母函数的序列.

解: $\because \frac{1}{1-bx} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n x^n$

将上式两边对 x 微分得

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-bx} \right) = \frac{b}{(1-bx)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n b^n x^{n-1}$$

再将上式对 x 微分得,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{1-bx} \right) = \frac{2b^2}{(1-bx)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b^n x^{n-2}$$

同理有

$$\frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{1}{1-bx} \right) = \frac{3 \cdot 2b^3}{(1-bx)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) b^n x^{n-3}$$

... ..

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-bx} \right) &= \frac{k! 2b^k}{(1-bx)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) b^n x^{n-k} \\ &\Rightarrow \frac{b^k}{(1-bx)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)! k!} b^n x^{n-k} \end{aligned}$$

上式两边同乘以 x^k 得:

$$\frac{b^k x^k}{(1-bx)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} b^n x^n$$

由定义 4.1 知, 所求的序列为 $\left\{ \binom{n}{k} b^n \right\}, n=0, 1, \dots, \infty$.

4.5 有无穷多个字母 A, B 和 C . 求从中选出 n 个字母但必须包含偶数个 A 的方式数.

解: 设从中选出 n 个字母但必须包含偶数个 A 的方式数为 a_n , 则序列 $\{a_n\}$ 的普通母函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2+x^4+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)^2 \\ &= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{(1+x)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^3} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{1-x} + \frac{\frac{1}{8}}{1+x}
 \end{aligned}$$

下面, 我们利用 (1.22) 式:

$$(1 - (-rz))^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$$

将以上各和式展开成 x 的幂级数, 然后合并同类项即得

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \binom{n+2}{2} + \frac{1}{4} (n+1) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} (-1)^n \right) x^n \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(n+1)(n+3)}{4} + \frac{1+(-1)^n}{8} \right) x^n
 \end{aligned}$$

故 x^n 的系数

$$a_n = \frac{(n+1)(n+3)}{4} + \frac{1+(-1)^n}{8}$$

为所求的方式数.

4.6 求重集 $B = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d, \}$ 的 10-组合数.

解: 设重集 B 的 n -组合数为 a_n , 则序列 $\{a_n\}$ 的普通母函数为

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\
 &\quad \times (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7) \\
 &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} \cdot \frac{1-x^6}{1-x} \cdot \frac{1-x^8}{1-x} \\
 &= (1-x^4-x^6-x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}-x^{18}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k}{3} x^k
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= \binom{3+10}{3} - \binom{3+6}{3} - \binom{3+4}{3} - \binom{3+2}{3} + \binom{3+0}{3} \\
 &= 286 - 84 - 35 - 10 + 1 = 158
 \end{aligned}$$

故重集 B 的 10-组合数为 158.

注意: 此题也可用容斥原理求解.

4.7 求从 n 个不同的物体中允许重复的取 r 个物体, 但每个物体出现奇数次的方式数.

解: 设每个物体出现奇数次的方式数为 a_r , 则序列 $\{a_n\}$ 的普通母函数为:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x + x^3 + x^5 + \cdots)^n \\
&= x^n (1 + x^2 + x^4 + \cdots)^n \\
&= \frac{x^n}{(1 - x^2)^n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{2k+n} \quad (\text{由 (1.22) 式}) \\
&= \sum_{r=n}^{\infty} \binom{n+\frac{r-n}{2}-1}{\frac{r-n}{2}} x^r \quad (\text{在上式中, 令 } 2k+n=r \text{ 即得}) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} F\left(n, \frac{r-n}{2}\right) x^r \\
\therefore a_r &= F\left(n, \frac{r-n}{2}\right)
\end{aligned}$$

故所求的方式数 $a_r = F\left(n, \frac{r-n}{2}\right)$.

4.8 求从 n 个不同的物体中允许重复的取 r 个物体, 但每个物体至少出现 3 次的方式数.

解: 设从 n 个不同的物体中允许重复的取 r 个物体且每个物体至少出现 3 次的方式数为 a_r , 则序列 $\{a_r\}$ 普通母函数为:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^n \\
&= x^{3n} (1 + x + x^2 + \cdots)^n \\
&= x^{3n} (1 - x)^{-n} \\
&= x^{3n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \quad (\text{由 (1.22) 式}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{k+3n} \\
&= \sum_{k=3n}^{\infty} \binom{n+(k-3n)-1}{k-3n} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+(k-3n)-1}{k-3n} x^k \quad (\text{注意: } \sum_{k=0}^{3n-1} \binom{n+(k-3n)-1}{k-3n} x^k = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} F(n, k-3n) x^k
\end{aligned}$$

$$\therefore a_r = F(n, k-3n).$$

故所求的方式数 $a_r = F(n, k-3n)$.

4.9 设重集 $B = \{\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, \infty \cdot b_3, \infty \cdot b_4, \infty \cdot b_5, \infty \cdot b_6\}$, 并设 a_r 是 B 满足以下条件的 r -组合数, 求序列 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$ 的普通母函数.

- a. 每个 b_i 出现 3 的倍数次 ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$).
- b. b_1, b_2 至多出现 1 次, b_3, b_4 至少出现 2 次, b_5, b_6 最多出现 4 次.
- c. b_1 出现偶数次, b_6 出现奇数次, b_3 出现 3 的倍数次, b_4 出现 5 的倍数次.
- d. 每个 b_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 至多出现 8 次.

解:

- a. 序列 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$ 的普通母函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^3+x^6+x^9+\dots)^6 \\ &= \frac{1}{(1-x^3)^6} \end{aligned}$$

- b. 序列 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$ 的普通母函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^2(x^2+x^3+x^4+\dots)^2(1+x+x^2+x^3+x^4)^2 \\ &= (1+x)^2 \frac{x^4}{(1-x)^2} \frac{(1-x^5)^2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x^4(1-x^5)^2(1+x)^2}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

- c. 序列 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$ 的普通母函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2+x^4+\dots)(x+x^3+x^5+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots) \\ &\quad \times (1+x+x^2+x^3+\dots)^2 \\ &= \frac{1}{1-x^2} \frac{x}{1-x^2} \frac{1}{1-x^3} \frac{1}{1-x^5} \frac{1}{(1-x)^2} \\ &\quad \times \frac{x}{(1+x)^2(1-x^3)(1-x^5)(1-x)^4} \end{aligned}$$

- d. 序列 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$ 的普通母函数为

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots+x^8)^6$$

4.10 有两颗骰子, 每个骰子六个面上刻有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个点. 问掷骰子后, 点数之和为 r , 两颗骰子的点数有多少种搭配方式?

解: 每个骰子是不同的, 但讨论点数之和的时候不考虑顺序, 故该问题是组合问题. 设有满足条件的搭配方式有 a_r 种, 则其普通母函数为

$$f(x) = (x+x^2+\dots+x^6)^2$$

其中 x^r 的系数 a_r 即为所求的搭配方式数.

4.11 设有重量分别为 1 克、2 克、3 克、5 克和 7 克的砝码 (砝码的数量不限) 去称重量为 r 克的物体的方式数为 a_r , 求序列 $(a_1, a_2, \dots, a_r, \dots)$ 的普通母函数.

解: 这个问题实际上是求重集 $B = \{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \infty \cdot 3, \infty \cdot 5, \infty \cdot 7\}$ 的 r -组合数, 其序列 $(a_1, a_2, \dots, a_r, \dots)$ 普通母函数为:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots) \\
 &\quad \times (1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x^7+x^{14}+\cdots) \\
 &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)}
 \end{aligned}$$

4.12 求用一分、二分、三分、四分的邮票（邮票允许重复）贴出不同数值的方式数。

解：设用一分、二分、三分、四分的邮票贴出不同数值的方式数为 a_r ，则序列 $(a_1, a_2, \dots, a_r, \dots)$ 的普通母函数为：

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots) \\
 &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}
 \end{aligned}$$

将上式展开成 x 的幂级数后， x^r 的系数就是所求的方式数 a_r 。

4.13 对 $1 \times n$ 棋盘的每个正方形都用四种颜色红、橙、黄、绿之一着色，若着红色和绿色的正方形的数量都是偶数，求不同的着色方案数。

解：若用 A 、 B 、 C 和 D 分别表示红、橙、黄和绿四种颜色，则该问题实际上是求重集 $B = \{\infty \cdot A, \infty \cdot B, \infty \cdot C, \infty \cdot D\}$ 的 n -排列数。其中要求 A 和 D 出现偶数次。

设 a_n 为所求的着色方案数，定义 $a_0=1$ ，于是序列 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots)$ 的指数母函数为

$$\begin{aligned}
 f_e(x) &= (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)^2 (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots)^2 \\
 &= \frac{1}{2^2} (e^x + e^{-x})^2 e^{2x} \\
 &= \frac{1}{2^2} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) e^{2x} \\
 &= \frac{1}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^n}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} + 1) \\
 &= \frac{1}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} (4^n + 2^{n+1}) \frac{x^n}{n!} + 1) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2^{n+1}}{4} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{4} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4^n + 2^{n+1}}{4}) \frac{x^n}{n!}
 \end{aligned}$$

所以，

$$a_n = \begin{cases} 4^n + 2^{n+1}, & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

4.14 求由数字 2, 3, 4, 5, 6, 7 组成的 r 位数中，3 和 5 都出现偶数次，2 和 4 至

少出现一次的 r 位数的个数.

解: 这是一个排列问题. 设满足条件的 r 位数的个数为 a_r , 则序列 $(a_1, a_2, \dots, a_r, \dots)$ 对应的指数母函数为:

$$\begin{aligned} f_e(x) &= (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots)^2 (x + \frac{x^2}{2!} + \dots)^2 (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)^2 \\ &= \frac{1}{2^2} (e^x + e^{-x})^2 (e^x - 1)^2 e^{2x} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} (6^r - 2 \cdot 5^r + 3 \cdot 4^r - 4 \cdot 3^r + 3 \cdot 2^r - 2) \frac{x^r}{r!} + 1 \end{aligned}$$

所以,

$$a_r = \begin{cases} 0 & , r=0 \\ \frac{1}{4} (6^r - 2 \cdot 5^r + 3 \cdot 4^r - 4 \cdot 3^r + 3 \cdot 2^r - 2), & r>0 \end{cases}$$

4.15 设 a_r 表示重集 $B = \{4 \cdot A, 1 \cdot B, 2 \cdot C, 1 \cdot D, 2 \cdot E, \}$ 的 r -排列的个数, 求序列 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots)$ 的指数母函数.

解: 由定义 4.2 可得序列 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots)$ 的指数母函数为

$$f_e(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}) (1 + x) (1 + x + \frac{x^2}{2!}) (1 + x) (1 + x + \frac{x^2}{2!})$$

4.16 求在重集 $B = \{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \infty \cdot 3\}$ 中, 0 出现偶数次的长为 r 的字的个数.

解: 这是排列问题. 设满足题设要求的长为 r 的字的个数为 a_r , 则 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots)$ 的指数母函数为

$$\begin{aligned} f_e(x) &= (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots) (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)^3 \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{3x} \\ &= \frac{1}{2} (e^{4x} + e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (4^k + 2^k) \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

所以, $a_r = \frac{1}{2} (4^r + 2^r)$

故在重集 $B = \{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \infty \cdot 3\}$ 中, 0 出现偶数次的长为 r 的字的个数为 $\frac{1}{2} (4^r + 2^r)$.

4.17 证明定理 4.3 和定理 4.8, 即

a. 定理 4.3 设 a, b, c, \dots 都是大于 0 的正整数, 则 $(1+x^a)(1+x^b)(1+x^c)\dots$ 的级数展开式中 x^n 的系数就是把 n 拆分为 a, b, c, \dots 的和, 且 a, b, c, \dots 最多只出现一次的方法数.

b. 定理 4.8 整数 n 拆分成最多不超过 m 个项的和的方式数等于 n 拆分成最大的数不超过 m 的方式数.

证明:

a. 由定理 4.2 知, $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\dots}$ 的级数展开式中的 x^n 系数等于把正整数 n 拆分成 a, b, c, \dots 的和的方法数 $P(n)$, 即 $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\dots}$ 是序列 $\{P(n)\}$ 的普通母函数, 而

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\dots} = (1+x^a+x^{2a}+\dots)(1+x^b+x^{2b}+\dots)(1+x^c+x^{2c}+\dots)$$

在上式中, 由于 a, b, c, \dots 最多只出现一次, 故当 $i \geq 2$ 时, x^{ia}, x^{ib}, x^{ic} 都等于 0, 因此有

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\dots} = (1+x^a)(1+x^b)(1+x^c)\dots$$

上式表明 $(1+x^a)(1+x^b)(1+x^c)\dots$ 的级数展开式中 x^n 的系数就是把 n 拆分为 a, b, c, \dots 的和, 且 a, b, c, \dots 最多只出现一次的方法数. 本定理证毕.

b. 设正整数 n 拆分成最多不超过 m 个项的和的一个拆分对应一个 Ferrers, 如图 4-1 所示 (图中, $n=24=6+6+5+4+3$, 共 5 项, 最大数为 6), 则它的共轭图如图 4-2 所示 (图中, $n=24=5+5+5+4+3+2$, 共 6 项, 最大数为 5) 表示另一个拆分, 容易看出这个拆分每一项都不大于 m . 反知亦然. 故正整数 n 拆分成最多不超过 m 项的和的方式和 n 拆分成最大数不超过 m 的方式是一一对应的, 因此整数 n 拆分成最多不超过 m 项的和的方式数等于 n 拆分成最大数不超过 m 的方式数. 定理证毕.

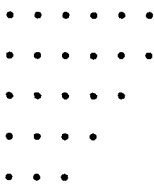


图 4-1

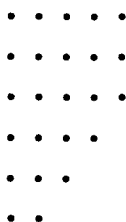


图 4-2

4.18 证明: 把整数 n 拆分成 m 个不同的部分的个数, 等于把整数 $n - m(m+1)/2$ 拆分成最多 m 个部分的个数 ($n > m(m+1)/2$).

证明: 不妨设 $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$, 且满足 $a_1 > a_2 > \dots > a_m \geq 1$, 则有

$$n - (1 + 2 + \cdots + m) = (a_1 - m) + (a_2 - (m-1)) + \cdots + (a_m - 1)$$

即

$$n - m(m-1)/2 = (a_1 - m) + (a_2 - (m-1)) + \cdots + (a_m - 1)$$

显然有 $a_1 - m \geq a_2 - (m-1) \geq \cdots \geq a_m - 1 \geq 0$

又因为 $n > \frac{m(m+1)}{2}$, 故上式各项不全为 0, 且最多有 m 个部分不为 0.

由上可知, 整数 n 拆分成 m 个不同部分的个数, 等于把整数 $n - m(m+1)/2$ 拆分成最多 m 个部分的个数.

4.19 用母函数方法证明下列恒等式:

a. 原教材第一章中 § 1.5 节的恒等式 7.

$$b. \sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} = \begin{cases} 0 & k = n+1 \\ \binom{n+1}{k} & 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

$$c. \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-2k}{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

证明:

a. 由原教材第四章 § 4.1 节例 1 知, 序列 $\left\{ \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n} \right\}$ 的普通母函数为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

序列 $\left\{ \binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \dots, \binom{m}{m} \right\}$ 的普通母函数为

$$g(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m$$

根据普通母函数乘法的定义 4.4 有

$(1+x)^{m+n}$ 是序列 $\left\{ \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} \right\}$ 的普通母函数

即有

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} \right) x^p$$

又由二项式定理 (1.13) 式有

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n} \binom{m+n}{p} x^p$$

故有

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

b. 由普通母函数的定义以及式 (1.4.2) 知, 序列 $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}\right)$ 的普通母函数为 $(1+x)^n$, 即

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

于是, 我们分别得到下列各式

$$(1+x)^{n-1} = \binom{n-1}{0}x + \binom{n-1}{1}x^2 + \dots + \binom{n-1}{k-1}x^k + \dots + \binom{n-1}{n-1}x^n$$

$$x^2(1+x)^{n-2} = \binom{n-2}{0}x^2 + \dots + \binom{n-2}{k-2}x^k + \dots + \binom{n-2}{n-2}x^n$$

$$\vdots$$

$$x^k(1+x)^{n-k} = \binom{n-k}{0}x^k + \dots + \binom{n-k}{n-k}x^n$$

将以上各式两端分别相加, 则其右端和式中 x^k 的系数正好是 $\sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i}$, 而其左端的

和为

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n + x(1+x)^{n-1} + x^2(1+x)^{n-2} + \dots + x^k(1+x)^{n-k} \\ &= x^n \left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^n + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-2} + \dots + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k} \right] \end{aligned}$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) + x^n \left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-1} + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-2} + \dots + \left(\frac{1+x}{x}\right)^0 \right]$$

则有

$$\begin{aligned} g(x) &= x^n \left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^n + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-2} + \dots + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-1} + \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-2} + \dots + \left(\frac{1+x}{x}\right)^0 \right] \\ &= x^n \left[\frac{1 - \left(\frac{1+x}{x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1+x}{x}} \right] \\ &= (1+x)^{n+1} - x^{n+1} \end{aligned}$$

由于, 在 $g(x)$ 中 x^k 的系数也就是在 $f(x)$ 中 x^k 的系数, 于是, 在 $g(x)$ 的展开式中, x^k 的系数为

$$\begin{cases} \binom{n+1}{k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k = n+1 \end{cases}$$

故有

$$\sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} = \begin{cases} \binom{n+1}{k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k = n+1 \end{cases}$$

c. 由二项式定理 1.7 ((1.12) 式) 知

$$[(1+x)^2 - 1]^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (1+x)^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left[\sum_{i=0}^{2(n-k)} \binom{2n-2k}{i} x^i \right]$$

注意, 上式中, 令 $X=-1$, $Y=(1+x)^2$, 然后再代入 (1.12) 式, 再利用式 (1.13) 即得上式.

显然, 上式右边 x^n 的系数为 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n}$.

而上式左边为

$$(1+2x+x^2-1)^n = (2x+x^2)^n = x^n (2+x)^n = x^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \cdot 2^{n-i}$$

容易看出, 上式中, x^n 的系数为 2^n (因为在 $x^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} \cdot x^i$ 中, x^n 的系数只有 $i=0$

时才能得到, 即为 $\binom{n}{0} \cdot 2^{n-0} = 2^n$)

故有

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-2k}{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

4.20 设 n, k 都是非负整数, 计算下列诸和的值

a. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{q}$, 其中 n 是偶数时, $q = n$; n 是奇数时, $q = n-1$

b. $\binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$

c. $\binom{n}{0} \binom{n}{k} - \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{k-2} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{0}$

d. $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n \binom{n}{n}$

解:

a. $\because (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

$$(1-x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}x^n$$

所以

$$\frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{q}x^q$$

其中 $q = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数} \\ n-1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

所以

$$\frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2} \Big|_{x=1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{q} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{当 } n > 0 \\ 1, & \text{当 } n = 0 \end{cases}$$

b. 由普通母函数的定义以及式 (1.4.2) 知, 序列 $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}\right)$ 的普通母函数为 $(1+x)^n$, 即 $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n$. 于是, 我们分别得到下列各式

$$x^{2n}(1-x)^{2n} = \binom{2n}{0}x^{2n} - \binom{2n}{1}x^{2n+1} + \binom{2n}{2}x^{2n+2} - \cdots + \binom{2n}{2n}x^{4n}$$

$$x^{2n-1}(1-x)^{2n-1} = \binom{2n-1}{0}x^{2n-1} - \binom{2n-1}{1}x^{2n} + \binom{2n-1}{2}x^{2n+1} - \cdots - \binom{2n-1}{2n-1}x^{4n-2}$$

$$x^{2n-2}(1-x)^{2n-2} = \binom{2n-2}{0}x^{2n-2} - \binom{2n-2}{1}x^{2n-1} + \binom{2n-2}{2}x^{2n} - \cdots + \binom{2n-2}{2n-2}x^{4n-4}$$

\vdots

$$x^n(1-x)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n+1} + \binom{n}{2}x^{n+2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}x^{2n}$$

将以上各式两端分别相加, 则其右端和式中 x^{2n} 的系数正好是我们所求的和式 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{k}$, 而其右端的和为

$$A(x) = x^{2n}(1-x)^{2n} + x^{2n-1}(1-x)^{2n-1} + x^{2n-2}(1-x)^{2n-2} + \cdots + x^n(1-x)^n$$

如果我们能求出 $A(x)$ 展开式中 x^{2n} 的系数 a_{2n} , 则 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{k} = a_{2n}$. 下面我们求 a_{2n} .

因为在 $A(x)$ 的后面加上次数低于 x^{2n} 的项不影响我们所求的和, 故令 $B(x)$ 为

$$\begin{aligned} B(x) &= A(x) + x^{n-1}(1-x)^{n-1} + x^{n-2}(1-x)^{n-2} + \cdots + x^0(1-x)^0 \\ &= \frac{1 - [x(1-x)]^{2n+1}}{1-x(1-x)} = \frac{1 - [x(1-x)]^{2n+1}}{1-x+x^2} \cdot \frac{1+x}{1+x} \\ &= \{1 - [x(1-x)]^{2n+1}\} \cdot \frac{1+x}{1+x^3} \\ &= \{1 - [x(1-x)]^{2n+1}\} \cdot (1+x)(1-x^3+x^6-x^9+\cdots+(-1)^k x^{3k}+\cdots) \end{aligned}$$

于是, 由上式知, $B(x)$ (或 $A(x)$) 中的 x^{2n} 的系数 $a_{2n} = \begin{cases} 1, & 2n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ -1, & 2n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 0, & 2n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$

故有

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{k} = \begin{cases} 1, & 2n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ -1, & 2n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 0, & 2n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!} \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{n!}{(n-k)!(k-i)!i!} \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-i)!i!} \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{k} \binom{k}{i} = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \\ &= \binom{n}{k} (1-x)^k \Big|_{x=1} \\ &= \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{d. } \because (1+2x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}2x + \binom{n}{2}(2x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(2x)^n$$

令 $x=1$ ，有

$$3^n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$$

即有

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$$

第五章 递归关系

一、内容提要

定义 5.1 设 $(a_0, a_1, \dots, a_r, \dots)$ 是一个序列, 把该序列中的 a_r 和它前面的几个 $a_i (0 \leq i < r)$ 关联起来的方程称作一个递归关系.

1. 常系数线性齐次递归关系的解法

由下面的定理 5.3 和定理 5.5 易知常系数线性齐次递归关系的求解方法.

定义 5.2 序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 中相邻的 $k+1$ 项之间的关系

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \dots + b_k a_{n-k} \quad (n \geq k) \quad (5.12)$$

称作序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的 k 阶常系数线性齐次递归关系. 其中 $b_i (i=1, 2, \dots, k)$ 是常数, 且 $b_k \neq 0$.

定义 5.3 与式 (5.12) 相关联的方程

$$x^k - b_1 x^{k-1} - b_2 x^{k-2} - \dots - b_k = 0 \quad (5.13)$$

称作递归关系式 (5.12) 的特征方程. 方程式 (5.13) 的根称作递归关系式 (5.12) 的特征根.

定理 5.1 若 $q \neq 0$, $a_n = q^n$ 是递归关系式 (5.12) 的解, 当且仅当 q 是特征方程 (5.13) 的根.

定义 5.4 求递归关系式 (5.12) 满足如下条件的解:

$$a_0 = h_0, a_1 = h_1, \dots, a_{k-1} = h_{k-1} \quad (5.14)$$

则称式 (5.14) 为递归关系式 (5.12) 的初值条件.

定理 5.2 若 q_1, q_2, \dots, q_k 是递归关系式 (5.12) 的特征根, c_1, c_2, \dots, c_k 是任意常数, 则

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n \quad (5.15)$$

是递归关系式 (5.12) 的解.

定义 5.5 若 a_n 是递归关系式 (5.12) 的任意一个解, 都存在一组适当的常数 c_1, c_2, \dots, c_k , 使得 a_n 可以表示为式 (5.15) 的形式, 则称式 (5.15) 是递归关系式 (5.12)

的通解.

定理 5.3 若 q_1, q_2, \dots, q_k 是递归关系式 (5.12) 的互不相同的特征根, 则

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n$$

是递归关系式 (5.12) 的通解.

定理 5.4 若递归关系式 (5.12) 的特征方程式 (5.13)

$$x^k - b_1 x^{k-1} - b_2 x^{k-2} - \dots - b_k = 0$$

有一个 m 重根 q , 则 $q^n, nq^n, \dots, nm^{-1}q^n$ 都是递归关系式 (5.12) 的解.

定理 5.5 设 q_1, q_2, \dots, q_l 分别是特征方程式 (5.13) 的相异的 m_1, m_2, \dots, m_l 重根, 且

$$\sum_{i=1}^l m_i = k$$

则

$$a_n = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} n^{j-1} q_i^n \quad (5.17)$$

是递归关系式 (5.12) 的通解.

定义 5.6 序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 中相邻的 $k+1$ 项之间的关系

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \dots + b_k a_{n-k} + f(n) \quad (5.18)$$

称作序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的 k 阶常系数线性非齐次递归关系. 其中 $b_i (i=1, 2, \dots, k)$ 是常数, 且 $b_k \neq 0, f(n) \neq 0, n \geq k$.

定义 5.7 在式 (5.18) 中, 若 $f(n)=0$, 则称

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \dots + b_k a_{n-k} \quad (5.19)$$

为由式 (5.18) 导出的常系数线性齐次递归关系.

定理 5.6 若 $\overline{a_n}$ 是 (5.18) 的一个特解, 而 $a_n^* = \sum_{i=1}^k c_i q_i^n$ (或 $\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} n^{j-1} q_i^n$) 是由式 (5.18)

导出的齐次线性递归关系式 (5.19) 的通解, 则

$$a_n = \overline{a_n} + a_n^*$$

是常系数线性非齐次递归关系式 (5.18) 的通解.

2. 常系数线性非齐次递归关系的解法

由定理 5.6 知, 若要求一个常系数线性非齐次递归关系式 (5.18) 的通解, 必须先求出这个递归关系所导出的常系数线性齐次递归关系式 (5.19) 的通解, 然后再求这个递归关系 (5.18) 的一个特解, 将其相加即可. 然而, 求一个非齐次线性递归关系的特解, 通常

没有系统的方法,但当函数 $f(n)$ 是某些特殊形式时,才有一些规范的求法.下面讨论几种情形:

(1) 当 $f(n)$ 是 n 的 k 次多项式时,又可分为如下两种情形:

a. 如果 1 不是常系数线性非齐次递归(5.18)所导出的常系数线性齐次递归关系式(5.19)的特征根,可设常系数线性递归关系式(5.18)的特解形式为

$$\overline{a_n} = A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k \quad (5.20)$$

式中 A_0, A_1, \dots, A_k 为待定常数.

b. 如果 1 是常系数线性非齐次递归关系式(5.18)所导出的常系数线性齐次递归关系式(5.19)的 m 重特征根时($m \geq 1$),可设特解的形式为

$$\overline{a_n} = (A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k n^m) \quad (5.21)$$

式中 A_0, A_1, \dots, A_k 为待定常数.

(2) 当 $f(n)$ 是 β^n 的形式时,又可分为如下两种情形:

如果 β 不是常系数线性非齐次递归(5.18)所导出的常系数线性齐次递归关系式(5.19)的特征根,可设特解的形式为

$$\overline{a_n} = A \cdot \beta^n \quad (5.22)$$

式中 A 为待定常数.

c. 如果 β 是常系数线性非齐次递归关系式(5.18)所导出的常系数线性齐次递归关系式(5.19)的 k 重特征根时($k \geq 1$),可设特解的形式为

$$\overline{a_n} = (A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k) \beta^n \quad (5.23)$$

3. 迭代法与归纳法求解递归关系

迭代法 反复应用递归关系式进行迭代而得到解的方法.

归纳法 先用初值条件求出前几项,并观察其规律,由猜想得到一般公式后,再用归纳法证明猜想得到的公式是正确的方法.

4. 用母函数法求解递归关系的方法

这个方法的主要思想和步骤是:

① 用 $f(x)$ 表示序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的普通母函数,即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5.29)$$

② 利用递归关系 a_n 的表达式与式(5.29)之间的关系,将式(5.29)化为关于 $f(x)$ 的方程(多数情况是将递归关系 a_n 的表达式代入式(5.29)的右端),即

$$g(f(x))=0 \quad (5.30)$$

③ 由式 (5.30) 解出 $f(x)$.

④ 将 $f(x)$ 的表达式展开成幂级数, 即可求得 a_n 的初等表达式.

⑤ Stirling 数所满足的递归关系.

定义 5.8 令 $[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$, 若

$$[x]_n = \sum_{k=0}^n S_1(n, k)x^k \quad (5.32)$$

则称 $S_1(n, k)$ 为第一类 Stirling 数. 也就是说, $S_1(n, k)$ 就是多项式 $[x]_n$ 中的 x^k 的系数. 显然, 当 $n < k$ 时, $S_1(n, k) = 0$.

定理 5.7 第一类 Stirling 数满足如下递归关系:

$$\begin{cases} S_1(n+1, k) = S_1(n, k-1) - nS_1(n, k) & (n \geq 0, k > 0) \\ S_1(0, 0) = 1, S_1(n, 0) = 0 & (n > 0) \end{cases} \quad (5.33)$$

定义 5.9 若

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_2(n, k)[x]_k \quad (5.34)$$

则称 $S_2(n, k)$ 为第二类 Stirling 数. 显然, 当 $n < k$ 时, $S_2(n, k) = 0$.

定理 5.8 第二类 Stirling 数满足递归关系:

$$\begin{cases} S_2(n+1, k) = S_2(n, k-1) + kS_2(n, k) & (n \geq 0, k > 0) \\ S_2(0, 0) = 1, S_2(n, 0) = 0 & (n > 0) \end{cases} \quad (5.35)$$

定理 5.9 第二类 Stirling 数 $S_2(n, k)$ 就是 n 个元素的集合划分成 k 个不相交的非空子集的方式数目.

定理 5.10 第二类 Stirling 数 $S_2(n, k)$ 具有下列性质:

$$1. S_2(n, n) = 1$$

$$S_2(n, k) = 0 \quad (n < k \text{ 或 } k = 0 < n)$$

$$2. S_2(n, 2) = 2^{n-1} - 1$$

$$3. S_2(n, n-1) = \binom{n}{2}$$

定义 5.10 若

$$B_n = \sum_{k=0}^n S_2(n, k) \quad (5.36)$$

则称 B_n 为 Bell 数. 显然, $B_0 = 1$.

定理 5.11 Bell 数 B_n 满足如下的递归关系:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

二、习题解答

5.1 对 $1 \times n$ 棋盘的每个正方形用红或蓝两种颜色之一着色. 设 a_n 表示没有任何两个着红色的正方形是相邻的着色的方式数. 求 a_n 所满足的递归关系并解之.

解: 设 a_n 表示 $1 \times n$ 棋盘中无任何两个着红色的方格是相邻的着色方式数, 则对第一个方格有两种着色方式:

(1) 对第一格着蓝色, 则在其余的 $n-1$ 个方格中无任何两个着红色的方格是相邻的着色方式数为 a_{n-1} .

(2) 对第一格着红色, 在第二格只能着蓝色, 则在剩下的 $n-2$ 个方格中无任何两个着红色的方格是相邻的着色方式数为 a_{n-2} .

显然有 $a_1=2$, $a_2=3$, 由加法规则得递归关系式为:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3) \\ a_1 = 2, a_2 = 3 \end{cases}$$

这是一个 2 阶常系数线性齐次递归关系式, 其特征方程为

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

由定理 5.3 知其通解为 $a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$

由初值条件 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ 可得

$$\begin{cases} c_1 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2 \\ c_1 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2 \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{解以上方程组得 } c_1 = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \quad c_2 = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$$

故有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} \right] \end{aligned}$$

5.2 如果用 a_n 表示没有两个 0 相邻的 n 位三元序列 (即由 0, 1, 2 组成的序列) 的个数. 求 a_n 所满足的递归关系并解之.

解: 对 n 位三元序列的第一位数有三种选择方式:

(1) 第一位选 1, 则在剩下的 $n-1$ 位数中无两个 0 相邻的个数为 a_{n-1} ;

(2) 第一位选 2, 则在剩下的 $n-1$ 位数中无两个 0 相邻的个数为 a_{n-1} ;

(3) 第一位选 0, 则在第二位又有两种选择方式:

① 第二位选 1, 则在剩下的 $n-2$ 位数中无两个 0 相邻的个数为 a_{n-2} ;

② 第二位选 2, 则在剩下的 $n-2$ 位数中无两个 0 相邻的个数为 a_{n-2} . 显然, 有

$$a_1=3, a_2=8$$

∴ 由加法规则得 a_n 所满足的递归关系为:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} & (n \geq 3) \\ a_1 = 3, a_2 = 8 \end{cases}$$

其特征方程为

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

∴ 特征根为

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

由定理 5.3 知其通解为

$$a_n = c_1 (1 + \sqrt{3})^n + c_2 (1 - \sqrt{3})^n$$

由初始条件有

$$\begin{cases} c_1(1 + \sqrt{3}) + c_2(1 - \sqrt{3}) = 3 \\ c_1(1 + \sqrt{3})^2 + c_2(1 - \sqrt{3})^2 = 8 \end{cases}$$

解以上方程组得 $c_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}, c_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$

$$\therefore a_n = \frac{1}{6} \left[(3+2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^n + (3-2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^n \right]$$

5.3 有一个楼梯共有 n 阶, 一个人要从这个楼梯上去, 他每一步跨上一阶或两阶, 问此人有多少种方式走过该楼梯?

解: 设此人有 F_n 种方式走过这个楼梯, 则此人走过这个楼梯的方式可分为两种情况:

(1) 第一步跨一阶, 剩余 $n-1$ 阶, 于是走过这 $n-1$ 阶的方式数为 F_{n-1} .

(2) 第一步跨二阶, 剩余 $n-2$ 阶, 于是走过这 $n-2$ 阶的方式数为 F_{n-2} .

显然有 $F_1=1, F_2=2$.

∴ 由加法规则得 F_n 所满足的递归关系为

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & (n \geq 3) \\ F_1 = 1, F_2 = 2 \end{cases}$$

这是一个 2 阶常系数线性齐次递归关系式, 可以用常系数线性齐次递归关系的解法得到它的解 (见原教材第五章 § 5.2 节的例 1), 这里用母函数法求解.

设 $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$ 是序列 $(F_1, F_2, \dots, F_n, \dots)$ 的普通母函数, 并将上式代入 $F(x)$

中, 有

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\ &= x + 2x^2 + x \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\ &= x + 2x^2 + x \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n - F_1 x \right) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\ &= x + 2x^2 + xF(x) - x^2 + x^2 \cdot F(x) \end{aligned}$$

得到

$$F(x) = (x+x^2) / (1-x-x^2) = [1 / (1-x-x^2)] - 1$$

$\because 1-x-x^2=0$ 有 2 个根:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

故令

$$F(x) = \left(\frac{A}{1-x_1 x} + \frac{B}{1-x_2 x} \right) - 1$$

由待定系数法得到:

$$A = \frac{x_1}{\sqrt{5}}, B = \frac{-x_2}{\sqrt{5}}$$

所以

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\frac{x_1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} x_1^n x^n - \frac{x_2}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} x_2^n x^n \right) - 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_1^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{x_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \right) x^n - 1 \end{aligned}$$

故有

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (x_1^{n+1} - x_2^{n+1})$$

所以代入 x_1, x_2 可以得到:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}} \quad (n \geq 1)$$

故此人有 $\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}$ 种方式走过该楼梯.

5.4 某人有 n 元钱, 她每天要去菜市场买一次菜, 每次买菜的品种很单调, 或者买

一元钱的蔬菜，或者买两元钱的猪肉，或者买两元钱的鱼。问，她有多少种不同的方式花完这 n 元钱？

解：设花完这 n 元钱的方式有 a_n 种，则第一次花钱可分为下面几种情况：

(1) 若第一次买一元钱的菜，则花完剩下的 $n-1$ 元钱就有 a_{n-1} 种方式；

(2) 若第一次买二元钱的肉，则花完剩下的 $n-2$ 元钱就有 a_{n-2} 种方式；

(3) 若第一次买二元钱的鱼，则花完剩下的 $n-2$ 元钱就有 a_{n-2} 种方式。

显然有

$$a_1=1, a_2=3$$

由加法规则，得递归关系如下：

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} (n \geq 3) \\ a_1 = 1, a_2 = 3 \end{cases}$$

其特征方程为：

$$x^2 - x - 2 = 0$$

特征根

$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

通解

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n$$

由初始条件得

$$\begin{cases} c_1 \times (-1) + c_2 \times 2 = 1 \\ c_1 \times (-1)^2 + c_2 \times 2^2 = 3 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{2}{3}$$

故该递归关系的解为

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + 2^n \times \frac{2}{3}$$

故她有 $\frac{1}{3}(-1)^n + 2^n \times \frac{2}{3}$ 种不同的方式花完这 n 元钱。

5.5 求解下列递归关系

a.
$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} & (n \geq 1) \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

解：这里用迭代法求解易得：

$$a_n = 3a_{n-1} = 3^2 a_{n-2} = 3^3 a_{n-3} = \cdots = 3^n a_0 = 3^{n+1}$$

$$\text{b. } \begin{cases} a_n = 4a_{n-2} & (n \geq 2) \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

解: 若 n 是奇数, 令 $n=2k+1$

$$\therefore a_n = a_{2k+1} = 4 \cdot a_{2k-1} = 4^2 \cdot a_{2k-3} = \cdots = 4^i \cdot a_{2k-(2i-1)} = \cdots = 4^i \cdot a_1$$

由 $2k - (2i-1) = 1$ 得

$$i = k \text{ 且 } k = \frac{n-1}{2}$$

故

$$a_n = 4^{\frac{n-1}{2}} \times a_1 = 2^{n-1}$$

若 n 是偶数, 令 $n=2k$

$$\therefore a_n = a_{2k} = 4 \cdot a_{2k-2} = 4^2 \cdot a_{2k-4} = \cdots = 4^i \cdot a_{2k-(2i)} = \cdots = 4^i \cdot a_0$$

由 $2k - 2i = 0$ 得

$$i = k$$

故有

$$a_n = 4^{\frac{n}{2}} \cdot a_0 = 0$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ 2^{n-1}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} & (n \geq 2) \\ a_0 = 1, a_1 = 4 \end{cases}$$

解: 特征方程为

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

所以特征根

$$x_1 = x_2 = 2$$

\therefore 通解

$$a_n = (c_1 + c_2 n) 2^n$$

由初始条件

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 \times 0) \times 1 = 1 \\ (c_1 + c_2) \times 2^1 = 4 \end{cases}$$

解出

$$c_1 = 1, c_2 = 1$$

故 $a_n = (1+n)2^n$.

$$\text{d. } \begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 16a_{n-2} - 20a_{n-3} & (n \geq 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1 \end{cases}$$

解: 特征方程为

$$q^3 + q^2 - 16q + 20 = 0$$

特征根

$$q_1 = q_2 = 2, q_3 = -5$$

∴ 通解

$$a_n = (c_1 + c_2 n)2^n + c_3(-5)^n$$

将初始条件代入得

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ (c_1 + c_2) \times 2 - 5c_3 = 1 \\ (c_1 + 2c_2) \times 4 + 25c_3 = -1 \end{cases}$$

解出

$$c_1 = \frac{5}{49}, c_2 = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}, c_3 = -\frac{5}{49}$$

故

$$a_n = \left(\frac{5}{49} + \frac{1}{7}n\right) \times 2^n - \frac{5}{49} \times (-5)^n$$

$$\text{e. } \begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n & (n \geq 2) \\ a_0 = 2, a_1 = 7 \end{cases}$$

解: 特征方程为

$$q^2 - 7q + 12 = 0$$

特征根

$$q_1 = 3, q_2 = 4$$

∴ 通解

$$a_n = c_1 3^n + c_2 4^n$$

由初始条件得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 3c_1 + 4c_2 = 7 \end{cases}$$

解出

$$c_1 = c_2 = 1$$

所以 $a_n = 3^n + 4^n$.

$$\text{f. } \begin{cases} a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3} & (n \geq 3) \\ a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0 \end{cases}$$

解: 特征方程为

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

特征根

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -2$$

∴ 通解

$$a_n = (c_1 + c_2 n)1^n + c_3(-2)^n$$

由初始条件, 有

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases}$$

解出

$$c_1 = \frac{8}{9}, c_2 = -\frac{6}{9}, c_3 = \frac{1}{9}$$

$$\text{故 } a_n = \frac{8}{9} - \frac{6}{9}n + \frac{1}{9}(-2)^n.$$

5.6 求解下列递归关系

$$\text{a. } \begin{cases} a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 3 & (n \geq 2) \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

解: 这是一个常系数线性非齐次递归关系式, 其导出的齐次递归关系为:

$$a_n^* = -6a_{n-1}^* - 9a_{n-2}^*$$

∴ 其特征方程为

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

解得

$$q_1 = q_2 = -3$$

由定理 5.3 知, 所导出的齐次线性递归关系的通解为

$$a_n^* = (c_1 + c_2 n) \cdot (-3)^n$$

由于 $f(n) = 3$, 且 1 不是递归关系式的特征根, 故设特解为

$$\bar{a}_n = A$$

将 $\bar{a}_n = A$ 代入递归关系得

$$A = -6A - 9A + 3$$

∴

$$A = \frac{3}{16}$$

由定理 5.6 知, 递归关系式的通解为 $a_n = \bar{a} + a^* = \frac{3}{16} + (c_1 + c_2 n)(-3)^n$

将初值条件代入上式并解得

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{3}{16} \\ c_2 = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

故

$$a_n = \frac{3}{16} + \left(-\frac{3}{16} - \frac{1}{12}n\right)(-3)^n$$

$$\text{b. } \begin{cases} a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3n^2 & (n \geq 2) \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

解: 这也是一个常系数线性非齐次递归关系式, 其导出的齐次递归关系的特征方程为

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

∴ 特征根为

$$x_1 = -2, x_2 = -3$$

由定理 5.3 知, 所导出的齐次线性递归关系的通解为 $a_n^* = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n$

由于 $f(n) = 3n^2$, 且 1 不是递归关系式的特征根, 故设特解为

$$\bar{a}_n = A_0 n^2 + A_1 n + A_2$$

将上式代入递归关系式解得

$$A_0 = \frac{1}{4}, A_1 = \frac{17}{24}, A_2 = \frac{115}{288}$$

∴ 通解

$$a_n = a_n^* + \bar{a}_n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

由初始条件有

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{115}{288} = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 + \frac{1}{4} + \frac{17}{24} + \frac{115}{288} = 1 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{-14}{9}, c_2 = \frac{37}{32}$$

故递归关系的解为:

$$a_n = a_n^* + \bar{a}_n = \frac{-14}{9}(-2)^n + \frac{37}{32}(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

$$c. \begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 3^n & (n \geq 2) \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

解: 对应齐次递归关系的特征方程为

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

其特征根

$$x_1 = 5, x_2 = 2$$

$$\therefore a_n^* = 5^n c_1 + 2^n c_2$$

又 $f(n) = 3^n$, 且 3 不是递归关系式的特征根, 故设特解为 $\bar{a}_n = A \times 3^n$, 将 $\bar{a}_n = A \times 3^n$ 代入原递归关系得

$$A \times 3^n = 7A \times 3^{n-1} - 10A \times 3^{n-2} + 3^n$$

解得

$$A = -\frac{9}{2}$$

\therefore 通解为

$$a_n = a_n^* + \bar{a}_n = 5^n c_1 + 2^n c_2 - \frac{9}{2} 3^n$$

由初始条件有

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{9}{2} = 0 \\ 5c_1 + 2c_2 - \frac{9}{2} \times 3 = 1 \end{cases}$$

解出

$$c_1 = 11/6, c_2 = 8/3$$

故原递归关系的解为:

$$a_n = \frac{11}{6} 5^n + \frac{8}{3} 2^n - \frac{9}{2} 3^n$$

$$d. \begin{cases} a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \times 4^n & (n \geq 2) \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

解: 对应齐次递归关系的特征方程为

$$x^2+5x+6=0$$

解得

$$x_1=-2, x_2=-3$$

齐次递归关系的通解为:

$$a_n^* = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n$$

又 $f(n) = 42 \times 4^n$, 且 4 不是递归关系式的特征根, 故设特解为

$$\bar{a}_n = A \times 4^n,$$

将 $\bar{a}_n = A \times 4^n$ 代入递归关系得

$$A4^n + 5A4^{n-1} + 6A4^{n-2} = 42 \times 4^n$$

解得

$$A=16$$

故通解为

$$a_n = a_n^* + \bar{a}_n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + 16 \times 4^n$$

由初始条件有

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 16 = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 + 64 = 1 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = -111, c_2 = 95$$

所以有

$$a_n = -111 \times (-2)^n + 95 \times (-3)^n + 16 \times 4^n$$

$$e. \begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3 \times 2^n & (n \geq 2) \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

解: 对应齐次递归关系的特征方程为

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

解得

$$x_1=2, x_2=3$$

故齐次递归关系的通解为:

$$a_n^* = c_1 2^n + c_2 3^n$$

又 $f(n) = 3 \times 2^n$, 且 2 是递归关系式的 1 重特征根, 故设特解为

$$\bar{a}_n = (A_n + B)2^n$$

代入递归关系求得

$$A=-6$$

从而通解为

$$a_n = a^* + \bar{a}_n = c_1 2^n + c_2 3^n - 6n \times 2^n$$

由初始条件有

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 - 12 = 1 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = -13, \quad c_2 = 13$$

所以有

$$a_n = -13 \times 2^n + 13 \times 3^n - 6n \times 2^n$$

5.7 证明 § 5.1 节中的 Fibonacci 数的性质式 (5.6), (5.7), (5.8), (5.9).

证明:

$$(1) \quad \sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1 \quad (5.6)$$

\because

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n = F_n + F_{n-1} + F_n \\ &= F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_1 + F_0 + F_1 \end{aligned}$$

\therefore

$$F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_0 = \sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n} - 1 \quad (5.7)$$

\because

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{2n-1} + F_{2n-2} \\ &= F_{2n-1} + F_{2n-3} + F_{2n-4} \\ &= F_{2n-1} + F_{2n-3} + F_{2n-5} + \cdots + F_1 + F_0 \end{aligned}$$

\therefore

$$\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n} - 1$$

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad (5.8)$$

\because

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

\therefore

$$\begin{aligned} F_n \cdot F_{n+1} &= F_n(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 + F_n \cdot F_{n-1} \\ &= F_n^2 + F_{n-1}^2 + \cdots + F_1^2 + F_1 \cdot F_0 \\ &= F_n^2 + F_{n-1}^2 + \cdots + F_1^2 + F_0^2 \end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=0}^n F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

$$(4) \quad F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+1} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
& \because F_n = ((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}) / (2^{n+1} \cdot \sqrt{5}) \\
& \therefore F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 \\
& \quad = \{[(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}] / (2^{n+2} \cdot \sqrt{5})\} \{[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n] / (2^n \cdot \sqrt{5})\} \\
& \quad \quad - \{[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}] / (2^{n+1} \cdot \sqrt{5})\}^2 \\
& \quad = \frac{1}{5 \times 2^{2n+2}} [(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}] [(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n] \\
& \quad \quad - \frac{1}{5 \times 2^{2n+2}} [(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}]^2 \\
& \quad = (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

5.8 用迭代法或归纳法求解下列递归关系:

$$\text{a. } \begin{cases} a_n = (n+2)a_{n-1} & (n \geq 1) \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

解: 用归纳法求解.

先用初值条件 $a_0=2$ 求出前几项, 并观察其规律.

$$a_1 = (1+2) a_0 = 2 \times 3 = (1+2)!$$

$$a_2 = (2+2) a_1 = 2 \times 3 \times 4 = (2+2)!$$

$$a_3 = (3+2) a_2 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = (3+2)!$$

由上面所得到的值, 我们可以猜想递归关系式的解的一般公式为

$$a_n = (n+2)!$$

为了证实上述猜想 $a_n = (n+2)!$ 确实是递归关系式的解, 我们用归纳法证之.

由上面计算前几项的值, 显然, 对于 $n=1, 2, 3$ 时, 结论是成立的.

设 $n=k$ 时, 结论成立. 即有

$$a_k = (k+2)!$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= (k+1+2) a_k \\
&= (k+1+2) (k+2)! \\
&= (k+1+2)!
\end{aligned}$$

可见, 当 $n=k+1$ 时, 结论也是成立的.

$$\text{b. } \begin{cases} a_n = ca_{n-1} + b & (b, c \text{ 为常数}) \\ a_0 = b \end{cases}$$

解: 用迭代法求解.

反复应用递归关系式进行迭代, 有

$$\begin{aligned}
a_n &= ca_{n-1} + b = c(ca_{n-2} + b) + b \\
&= c^2 + cb + b
\end{aligned}$$

$$=c^3 a_{n-3} + c^2 b + cb + b$$

...

$$=c^n a_0 + c^{n-1} b + \cdots + cb + b$$

$$=b (c^n + c^{n-1} + \cdots + c^1 + c^0)$$

$$= \begin{cases} \frac{b(c^{n+1}-1)}{(c-1)} & c \neq 1 \\ (n+1)b & c = 1 \end{cases}$$

故

$$a_n = \begin{cases} \frac{b(c^{n+1}-1)}{(c-1)} & c \neq 1 \\ (n+1)b & c = 1 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} a_n = a_{n-1} - n + 3 & (n \geq 1) \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

解: 用迭代法求解.

$$a_n = a_{n-1} - n + 3$$

$$= (a_{n-2} - (n-1) + 3) - n + 3$$

$$= a_{n-2} - 2n + 3 + 4$$

$$= a_{n-3} - 3n + 3 + 4 + 5$$

$$= a_{n-4} - 4n + 3 + 4 + 5 + 6$$

...

$$= a_1 - (n-1)n + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n+1)$$

$$= a_0 - n^2 + 3 + 4 + \cdots + (n+1) + (n+2)$$

$$= (-n^2 + 5n + 4) / 2$$

\therefore

$$a_n = (-n^2 + 5n + 4) / 2$$

5.9 用母函数法求解下列递归关系:

$$a. \begin{cases} a_n = a_{n-1} + n & (n \geq 1) \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

解: 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为序列 $\{a_n\}$ 的普通母函数, 则

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + n) \cdot x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$$

$$= 1 + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$$

$$= 1 + x \cdot f(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{(1-x)^3}$$

$$\therefore (1-x)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

$$\therefore f(x) = (x^2 - x + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

$$\therefore a_n = \binom{n}{2} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

$$\text{b. } \begin{cases} a_n = a_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2} & (n \geq 1) \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

解: 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为 $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ 的普通母函数, 则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n-1} + \frac{1}{2} n(n+1) \right] x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$$

$$= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n = x \cdot f(x) + \frac{x}{(1-x)^3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{\frac{x}{(1-x)^3}}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^4} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4+n-1}{3} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4+n-1}{3} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+2}{3} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{3} x^n$$

$$\therefore a_n = \binom{n+2}{3} = \frac{1}{6} (n^3 + 3n^2 + 2n)$$

$$\text{c. } \begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} & (n \geq 1) \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

解: 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为 $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ 的普通母函数, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + 2^{n-1}) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^n \end{aligned}$$

$$= x \cdot f(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \frac{1}{2}$$

$$= x \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1-x} = \frac{x}{(1-2x)(1-x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\therefore a_n = 2^n - 1$$

$$\text{d. } \begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} & (n \geq 2) \\ a_0 = 1, a_1 = -2 \end{cases}$$

解: 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为 $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ 的普通母函数, 则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 1 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} (5a_{n-1} - 6a_{n-2}) \cdot x^n$$

$$= 1 - 2x + 5 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 1 - 2x + 5x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 1 - 2x + 5x(f(x) - 1) - 6x^2 \cdot f(x)$$

$$\therefore f(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{1-7x}{(2x-1)(3x-1)}$$

$$= -\frac{5}{2x-1} + \frac{4}{3x-1} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

$$= 5 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n) x^n$$

$$\therefore a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

5.10 设 a_n 表示一个凸 n 边形被它的对角线划分成互不重叠的区域个数. 其中假定没有三条对角线在该 n 边形内相交于一点.

(1) 证明: 当 n 大于等于 3 时, 有

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)(n-2)(n-3)/6 + n - 2$$

证明: 如图 5-1 所示, 在凸 n 边形中, 选任意相邻两边为边的三角形设为 ABC , 设相邻边为 AB 、 AC , 暂不考虑顶点 A , 其剩余的 $n-1$ 个顶点的所成的凸多边形, 被它的对角线划分成互不重叠的区域个数为 a_{n-1} .

另外, 由点 A 引出的对角线有 $n-3$ 条, 分三角形 ABC 为 $n-2$ 个区域. 下面考虑: 由点 A 引出的对角线对 $n-1$ 条边 (去掉边 AB 、 AC , 加入边 BC) 的凸多边形划分所增加的区域数.

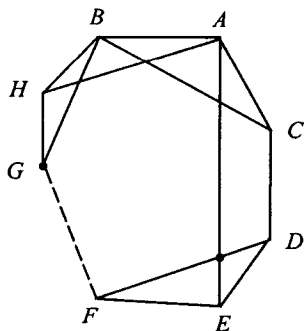


图 5-1

在 $n-1$ 个顶点 (不包含顶点 A) 中任取三个点, 不妨设为 D, E, F , 其中必有一个顶点 (设为 E) 使得对角线 AE 把 D 和 F 分在两边. 所以对角线 DF 必定与 AE 相交. 由题意, 这个交点不会有其他对角线通过, 这说明每新增一个交点必与 $n-1$ 个顶点中的三个顶点相对应, 故新增的交点数为 $\binom{n-1}{3}$ 个.

另一方面, 从 A 引出的每一条对角线上的交点正好与这条对角线在凸 $n-1$ 边形内截成的线段数相同, 而每一线段恰好把凸 $n-1$ 边形内某一区域分为 2 个, 故新增区域数为 $\binom{n-1}{3}$ 个. 于是, 由加法规则知, 有

$$a_n = a_{n-1} + \binom{n-1}{3} + n - 2 = a_{n-1} + (n-1)(n-2)(n-3)/6 + n - 2 \quad (n \geq 3)$$

(2) 设 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, 求出序列 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ 的普通母函数, 从而求出 a_n 的表达式.

解: 设 $\{a_n\}$ 的普通母函数为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1)$$

则有

$$-xf(x) = -x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \quad (2)$$

(1)、(2) 式相加得

$$\begin{aligned} (1-x)f(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\binom{n-1}{3} + n - 2 \right) x^n \quad (\text{由 (1) 题结论}) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{1-x} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\binom{n-1}{3} + n - 2 \right) x^n \\
 &= \left(\binom{3}{3} x^4 + \binom{4}{3} x^5 + \cdots + \binom{n-1}{3} x^n + \cdots \right) (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) \\
 &\quad + (x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \cdots + nx^{n+2} + \cdots) (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)
 \end{aligned}$$

由 (1.23) 式有

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1}$$

取 $k=3$ 展开 $f(x)$ 可得 x^n 的系数为

$$\begin{aligned}
 a_n &= ((n-2) + (n-3) \cdots + 1) + \left(\binom{n-1}{3} + \binom{n-2}{3} + \cdots + \binom{3}{3} \right) \\
 &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \binom{n}{4}
 \end{aligned}$$

5.11 在一圆周上任取 n 个不相同的点, 过每两点作一条弦. 假设这些弦中没有三条在圆内相交于一点, 令 a_n 表示这些弦将圆分成的区域数. 证明

$$a_n = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$$

证明: 利用上题 (2) 求解.

假如把圆周上每相邻两点连接起来, 可得一个凸 n 边形和 n 块弓形的区域. 由 5.10 题 (2) 得, 凸 n 边形中的区域数是

$$b_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \binom{n}{4}$$

所以有

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \binom{n}{4} + n \\
 &= \frac{n(n-1)}{2} + \binom{n}{4} + 1 \\
 &= \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + 1
 \end{aligned}$$

5.12 (1) 证明: 设边长为整数且最大的边长为 l 的不全等的三角形的个数是 a_l , 则有

$$a_l = \begin{cases} (l+1)^2/4 & l \text{ 是奇数} \\ (l+1)^2/4 & l \text{ 是偶数} \end{cases}$$

证明: 令三角形的边长分别为 a, b, c , 并且 $a \geq b \geq c$.

① 当 l 是偶数时, 即令 $l=2n$, 则所求的三角形中 $a=l=2n$, b 的取值只可能是 $2n, 2n-1, \dots, n+1$.

如果 $b=2n$, 则 c 可以为 $2n, 2n-1, \dots, 2, 1$, 共有 $2n$ 种不全等的三角形;

如果 $b=2n-1$, 则 c 可以为 $2n-1, 2n-2, \dots, 2$, 共有 $2n-2$ 种不全等的三角形;

...

如果 $b=n+2$, 则 c 可以为 $n+2, n+1, n, n-1$, 共 4 种不全等的三角形;

如果 $b=n+1$, 则 c 可以为 $n+1, n$, 共两种不全等的三角形;

故最大边长为 $l=2n$ 的不全等的三角形总共有

$$\begin{aligned} & 2n + (2n-2) + (2n-4) + \dots + 4 + 2 = n(n+1) \\ & = \frac{l(l+2)}{4} \end{aligned}$$

② 当 l 是奇数时, 即令 $l=2n+1$, 则所求的三角形中 $a=l=2n+1$, b 的取值只可能是 $2n+1, 2n, \dots, n+1$.

如果 $b=2n+1$, 则 c 可以为 $2n+1, 2n, \dots, 2, 1$, 共 $2n+1$ 种不全等的三角形;

如果 $b=2n$, 则 c 可以为 $2n, 2n-1, \dots, 2$, 共 $2n-1$ 种不全等的三角形;

.....

如果 $b=n+2$, 则 c 可以为 $n+2, n+1, n$, 共 3 种不全等的三角形;

如果 $b=n+1$, 则 c 可以为 $n+1$, 共 1 种不全等的三角形;

故最大边长为 $l=2n+1$ 的不全等的三角形总共有

$$\begin{aligned} & (2n+1) + (2n-1) + (2n-3) + \dots + 3 + 1 = (2n+2)^2/4 \\ & = \frac{(l+1)^2}{4} \end{aligned}$$

故

$$a_l = \begin{cases} (l+1)^2/4 & l \text{ 是奇数} \\ (l+2)l/4 & l \text{ 是偶数} \end{cases}$$

(2) 设 a_n 表示每一边长都不超过 $2n$ 的三角形的个数, b_n 表示每一边长都不超过 $2n+1$ 的三角形的个数, 求 a_n 和 b_n 的表达式.

解: a_n 就是最大边长分别为 $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ 的不全等的三角形的个数, 则由 (1) 得

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{(1+1)^2}{4} + \frac{(2+2) \times 2}{4} + \frac{(3+1)^2}{4} + \frac{(4+2)^2 \times 4}{4} \dots + \frac{(2n-1+1)^2}{4} + \frac{(2n+2) \times 2n}{4} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1+1)^2}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{(2k+2) \times 2k}{4} \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k(k+1) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}
 \end{aligned}$$

即

$$a_n = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

类似地, b_n 就是最大边长分别为 $1, 2, \dots, 2n-1, 2n, 2n+1$ 的不全等的三角形的个数, 而最大边长分别为 $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ 的不全等的三角形的个数已求得为 a_n , 故

$$\begin{aligned}
 b_n &= a_n + \frac{(2n+1+1)^2}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6} + \frac{(2n+1+1)^2}{4} \\
 &= \frac{(n+1)(4n^2+11n+6)}{6}
 \end{aligned}$$

即

$$b_n = \frac{(n+1)(4n^2+11n+6)}{6}$$

5.13 证明第二类 Stirling 数 $S_2(n, k)$ 具有性质:

$$(1) S_2(n, 2) = 2^{n-1} - 1$$

证明:

方法一:

因为 $S_2(n+1, k) = S_2(n, k-1) + kS_2(n, k)$, 所以

$$\begin{aligned}
 S_2(n, 2) &= S_2(n-1, 1) + 2S_2(n-1, 2) = 1 + 2 + 2^2 S_2(n-2, 2) \\
 &= 1 + 2 + 2^2 S_2(n-3, 1) + 2^3 S_2(n-3, 2) \\
 &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 S_2(n-4, 1) + 2^4 S_2(n-4, 2) \\
 &\dots\dots \\
 &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^{n-1} - 1$$

方法二:

$S_2(n, 2)$ 表示 n 只不同的球放入 2 个相同的盒子, 盒子不空的方式数. 这等价于将除某个球 a_1 外的 $n-1$ 只球任意放入 2 个盒子, 再将 a_1 加入某个盒子 (盒子不空) 的方式数. $n-1$ 只不同的球放入 2 个盒子, 有 2^{n-1} 种放法, 其中有一种盒子空, 故盒子不空有 $2^{n-1}-1$ 种.

$$(2) S_2(n, n-1) = \binom{n}{2}$$

证明: $S_2(n, n-1)$ 表示 n 个不同的球放入 $n-1$ 个相同的盒子、盒子不空的方式数, 它等价于首先从 n 个球中取出 2 个球出来放入某个盒子中, 有 $\binom{n}{2}$ 种取法, 然后把剩下的 $n-2$ 个球放入 $n-2$ 个盒子中, 每个盒子中放一个球, 有 1 种放法, 于是由乘法原理得

$$S_2(n, n-1) = \binom{n}{2}$$

5.14 利用 Stirling 数证明:

$$\sum_{x=1}^m x^n = \sum_{k=0}^n k! S_2(n, k) \binom{m+1}{k+1}$$

证明: n 个球放入 x 个有标记的盒子且允许空盒的方法数是 x^n .

n 个球放入 k 个无标记盒子且不允许空盒的方法数是 $S_2(n, k)$, x 个有标记盒子中选出 k 个的排列数是 $\binom{x}{k} k!$, 所以 n 个球恰好放入从 x 个有标记的盒子中选出的 k 个盒子中 (选出的 k 个盒子不允许空盒, 剩余的 $x-k$ 个盒子即为空盒) 的方法数是 $S_2(n, k) \binom{x}{k} k!$. 让 k 遍历 $1 \sim x$, 并累加不同的方法数, 即得总的方法数 x^n . 所以有

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=1}^x k! S_2(n, k) \binom{x}{k} \\ \therefore \sum_{x=1}^m x^n &= \sum_{x=1}^m \sum_{k=1}^x k! S_2(n, k) \binom{x}{k} \\ &= \sum_{x=1}^m \sum_{k=1}^m k! S_2(n, k) \binom{x}{k} \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{x=1}^m k! S_2(n, k) \binom{x}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k! S_2(n, k)) \sum_{x=1}^m \binom{x}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k! S_2(n, k) \binom{m+1}{k+1} \quad (\text{由式 (1.33)}) \\
&= \sum_{k=1}^n k! S_2(n, k) \binom{m+1}{k+1} \quad (\because \text{当 } k > n \text{ 时, } S_2(n, k) = 0) \\
&= \sum_{k=0}^n k! S_2(n, k) \binom{m+1}{k+1}
\end{aligned}$$

故结论成立.

5.15 求下列和式之值:

(1) $1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3$

解: 由 5.14 题得

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{100} x^3 &= \sum_{k=0}^3 k! S_2(3, k) \binom{100+1}{k+1} \\
&= \binom{101}{2} + 2! S_2(3, 2) \binom{101}{3} + 3! S_2(3, 3) \binom{101}{4} \\
&= \binom{101}{2} + 6 \times \binom{101}{3} + 6 \times \binom{101}{4}
\end{aligned}$$

(2) $1^4 + 2^4 + \cdots + 100^4$

解: 由 5.14 题得

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{100} x^4 &= \sum_{k=0}^4 k! S_2(4, k) \binom{100+1}{k+1} \\
&= \binom{101}{2} + 2! S_2(4, 2) \binom{101}{3} + 3! S_2(4, 3) \binom{101}{4} + 4! S_2(4, 4) \binom{101}{5} \\
&= \binom{101}{2} + 14 \times \binom{101}{3} + 36 \times \binom{101}{4} + 24 \times \binom{101}{5}
\end{aligned}$$

5.16 证明 § 5.6 节中的定理 5.11.

证明: 设这 $n+1$ 个元素的集合为 $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$. 因为 B_{n+1} 是 $n+1$ 个元素的集合划分为不相交的非空子集的方式数, 对于任一划分, a_1 总是出现在某一子集中. 不妨设这个子集有 k 个元素 ($k=1, 2, \dots, n+1$), 则在此子集中的另外 $k-1$ 个元素将从 n 个元素 a_2, a_3, \dots, a_{n+1} 中去选取, 其选取方式共有 $\binom{n}{k-1}$ 种. 对于每一种选取方式, 对剩下的 $n+1-k$ 个元素的集合再划分为不相交的非空子集的方式数为 B_{n-k+1} . 由乘法规则有

$$\binom{n}{k-1} B_{n-k+1}$$

对于 $k=1, 2, \dots, n+1$, 又由加法规则有

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{n-1} B_{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{n-k+1} B_{n-k+1} \\ &= \binom{n}{n} B_n + \binom{n}{n-1} B_{n-1} + \binom{n}{n-2} B_{n-2} + \dots + \binom{n}{0} B_0 \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \end{aligned}$$