2022 矩阵理论参考答案

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分，根据正确答案的选项涂黑答题卡对应的位置）

1.下列选项中**错误**的是(　A　)

(A) $\mathrm{H}(u)=E-2uu^{\mathrm{H}}$(其中$u\in C^n, u^{\mathrm{H}}u=1$)，则$\|\mathrm{H}(u)\|_{m_2}=1$；

(B) $A\in C^{n\times n}$为上三角矩阵且为正规矩阵，则A为对角矩阵；

(C) $A\in C^{m\times n}$，则$A^{\mathrm{H}}A$与AA^{H}的正特征值相同；

(D) 正规矩阵A为幂零矩阵$\left(A^2=0\right)$，则$A=0$.

2.下列选项中**错误**的是（　C　）

(A) $A=BC$为A的最大秩分解，则$Ax=0$与$Cx=0$解空间相同；

(B) $\|\bullet\|$为算子范数，$\rho(A)$为A的谱半径，则$\rho(A)\le\|A\|$；

(C) $A\in C_n^{m\times n}$的充要条件是$AA^-=E_n$；

(D) 若A和B分别是列满秩和行满秩矩阵，则$(AB)^+=B^+A^+$.

3.下列选项中**错误**的是（　C　）

(A) 设$AXA=A$，则$rank(A)\le rank(X)$；

(B) 若矩阵A的自相容范数$\|A\|<1$，则A为收敛矩阵；

(C) 若$\|\bullet\|$为算子范数,，则$\|A^{-1}\|\le\|A\|^{-1}$；

(D) $A\in C^{m\times n}$，则$\mathrm{rank}(A^{\mathrm{H}}A)=\mathrm{rank}(AA^{\mathrm{H}})$.

4.下列选项中**正确**的是(　D　)

(A) $A\in C^{m\times n}$，则$R(A)=R(A^{\mathrm{H}})$；　　(B) $A^2=A(\ne 0)$ 则$\|A\|_2=1$；

(C) $\mathrm{H}(u)=E-2uu^{\mathrm{H}}$(其中$u\in C^n, u^{\mathrm{H}}u=1$)不是单纯矩阵；

(D) $A\in C^{m\times n}$，则$R(A^+)=R(A^{\mathrm{H}})$.

5. 下列结论**正确**的是(　C　).

A. 设$A=BD$是A的满秩分解，则$A^+=B^+D^+$；　　B. $rank(A)=rank(A^-)$；

C. $R(A^+)=R(A^H)$；　　D. $(A^3)^+=(A^+)^3$.

二. 判断题（每小题 4 分，共 20 分. 正确的在答题卷涂黑【T】，错误的涂黑【F】）

6. $A\in C^{n\times n}, k\in C$且$\sigma_1(M)$为$M$的最大奇异值，则$\sigma_1(kA)=|k|\sigma_1(A)$.　（　T　）

7. $A\in C^{n\times n}, B=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^{\mathrm{H}} & 0\end{pmatrix}$，则$\|B\|_2\ne\|A\|_2$.　（　F　）

8. $A,B\in C^{n\times n}$,若$\|A\|_2<\|B\|_2$，则$\|A^+\|_2>\|B^+\|_2$.　（　F　）

9. 设$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}^n$，若$\boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x}$只有零特征值，则$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^H$ 也只有零特征值。　（　T　）

10. 如果$A\in C_r^{m\times n}$，且$A\ne 0$，，则$\|AA^+\|_2=r$.　（　F　）

三. **(9 分).**设$\|\bullet\|_m$是自相容的矩阵范数，证明$\|x\|=\|xa^H\|_m$ $(a\ne 0)$是与$\|\bullet\|_m$相容的向量范数.

1） 正定性：$\boldsymbol{x\ne 0}\Rightarrow$ $xa^H\ne 0\Rightarrow$ $\|x\|=\|xa^H\|_m>0$ $\forall\theta\ne x\in P^n$

2） 齐次性：$\|\lambda x\|=\|\lambda xa^H\|_m$ $=|\lambda|\cdot\|xa^H\|_m$ $=|\lambda|\cdot\|x\|$

3） 三角不等式：

$$\|x+y\|=\|(x+y)a^H\|_m=\|xa^H+ya^H\|_m\le\|xa^H\|_m+\|ya^H\|_m=\|x\|+\|y\|$$

4） 相容：$\|Ax\|=\|Axa^H\|_m\le\|A\|_m\cdot\|xa^H\|_m=\|A\|_m\cdot\|x\|$

四. **(7 分).**设 B,C 为方阵，$A=\begin{pmatrix}B & X\\ 0 & C\end{pmatrix}$，证明: A 为正规矩阵的充要条件是 B,C 为正规矩阵且 $X=0$.

解: (1) A 为正规矩阵 $\Leftrightarrow$ $A^{\mathrm{H}}A=AA^{\mathrm{H}}$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}B^{\mathrm{H}}B & B^{\mathrm{H}}X\\ X^{\mathrm{H}}B & X^{\mathrm{H}}X+C^{\mathrm{H}}C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{\mathrm{H}} & 0\\ X^{\mathrm{H}} & C^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & X\\ 0 & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B & X\\ 0 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B^{\mathrm{H}} & 0\\ X^{\mathrm{H}} & C^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}BB^{\mathrm{H}}+XX^{\mathrm{H}} & XC^{\mathrm{H}}\\ CX^{\mathrm{H}} & CC^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}$$

(2) $\mathrm{tr}(B^{\mathrm{H}}B)=\mathrm{tr}(BB^{\mathrm{H}}+XX^{\mathrm{H}})=\mathrm{tr}(BB^{\mathrm{H}})+\mathrm{tr}(XX^{\mathrm{H}})=\mathrm{tr}(B^{\mathrm{H}}B)+\mathrm{tr}(X^{\mathrm{H}}X)$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr}(X^{\mathrm{H}}X)=0$ $\Leftrightarrow$ $X=0$

(3) $\Leftrightarrow$ $B^{\mathrm{H}}B=BB^{\mathrm{H}},C^{\mathrm{H}}C=CC^{\mathrm{H}}$ $\Leftrightarrow$ B,C 为正规矩阵.

五. **(15 分).**设 $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\1&2&4\\2&2&6\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix}$. (1) 求 A 的最大秩分解；(2) 求 A^+ ；(3) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；(4) 线性方程组 $Ax=b$ 如有解，求通解和最小范数解；如无解，求最小二乘解和最佳逼近解.

解：(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\1&2&4\\2&2&6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&2\\2&2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$;

(2)

$$B^+=(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}1&7&8&2\\1&-6&-5&2\end{pmatrix}$$

$$D^+=D^H(DD^H)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-2\\-2&5\\2&1\end{pmatrix}$$

$$A^+=D^+B^+=\frac{1}{78}\begin{pmatrix}0&26&26&0\\3&-44&-41&6\\3&8&11&6\end{pmatrix}$$

(3) $AA^+b=\frac{1}{78}\begin{pmatrix}83\\-54\\118\\168\end{pmatrix}\ne b\Rightarrow$ 无解；

(4) 最佳逼近解：$A^+b=\frac{1}{78}\begin{pmatrix}104\\-137\\72\end{pmatrix}$,

最小二乘解：$x = A^{+}b + (E - A^{+}A)u = \frac{1}{78}\begin{pmatrix} 104 \\ -137 \\ 72 \end{pmatrix} + (E - A^{+}A)u.$

六. **(8 分)** 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\sin At$.

解：(1) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$

(2) 对应的特征向量为：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\sin At = P\begin{pmatrix} \sin(-2t) & 0 \\ 0 & \sin 4t \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(-2t) & 0 \\ 0 & \sin 4t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$= \sin At = P\begin{pmatrix} \sin(-2t) & 0 \\ 0 & \sin 4t \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin 2t + \sin 4t & \sin 2t + \sin 4t \\ \sin 2t + \sin 4t & -\sin 2t + \sin 4t \end{pmatrix}.$$

七. **(7 分)** 设 $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 1/6 & 3/6 & 1/6 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$，证明 A 的谱半径 $r(A) = 1$.

证 1: $\|A\|_\infty = 1$，又 $r(A) \le \|A\|_\infty$ 。

所以 $r(A) \le 1$。

$|E - A| = 0 \Rightarrow 1$ 是矩阵 A 的特征值

故 $r(A) = 1$。

证 1: A 的盖尔圆盘为： 又

$S_1 : |z - 1/4| \le 3/4$，$S_2 : |z - 2/5| \le 3/5$，$S_3 : |z - 3/6| \le 3/6$，$S_4 : |z - 4/3| \le 3/7$

A 的盖尔圆盘都在单位圆内，且与单位圆相切于实轴 1，

所以 $r(A) \le 1$

$|E - A| = 0 \Rightarrow 1$ 是矩阵 A 的特征值

故 $r(A) = 1$。

八. **(9 分).** 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，用三角分解（$QR$ 分解）解方程组 $Ax = b$.

解：令 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，补充 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

将 α_1，α_2，α_3 正交化、单位化有

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \xi_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

且 $\alpha_1=\sqrt{3}\xi_1$，$\alpha_2=\frac{5}{\sqrt{3}}\xi_1+\frac{2}{\sqrt{6}}\xi_2$，$\alpha_3=\sqrt{2}\xi_3$

QR 分解为：$A=QR=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}}\\ 0 & 2/\sqrt{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$Ax=b\Rightarrow QRx=b\Rightarrow Rx=Q^{-1}b\Rightarrow\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}}\\ 0 & 2/\sqrt{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{3}\\-2/\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

九. **(5 分)**设 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6\end{pmatrix}$，用圆盘定理证明存在正交矩阵 B 和正定矩阵 C，使 $A=BC$.

证法 1：$A^T=A$ 及圆盘定理知，$\lambda_1<0,\lambda_2>0,\lambda_3>0,\cdots,\lambda_n>0$.

故

$$A=Q^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}Q=Q^T\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}QQ^H\begin{pmatrix}|\lambda_1| & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}Q$$

$=BC$.

证法 2：由圆盘定理知，$\lambda_1<0,\lambda_2>0,\lambda_3>0,\cdots,\lambda_n>0$，即矩阵 A 可逆；因此根据可逆矩阵的极分解定理：任意可逆矩阵 A，存在唯一的正交矩阵 Q，和正定矩阵 H_1,H_2 使得 $A=QH_1=H_2Q$．因此结论成立。