学院________ 姓名________ 学号________

密封线以内答题无效

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分，根据正确答案的选项涂黑答题卡对应的位置）

1.下列选项中**错误**的是(　　　　)

(A) $\mathrm{H}(u)=E-2uu^{\mathrm{H}}$(其中$u\in C^n, u^{\mathrm{H}}u=1$)，则$\|\mathrm{H}(u)\|_{m_2}=1$；

(B) $A\in C^{n\times n}$为上三角矩阵且为正规矩阵，则A为对角矩阵；

(C) $A\in C^{m\times n}$，则$A^{\mathrm{H}}A$与AA^{H}的正特征值相同；

(D) 正规矩阵A为幂零矩阵$\left(A^2=0\right)$，则$A=0$.

2.下列选项中**错误**的是（　　　　）

(A) $A=BC$为A的最大秩分解，则$Ax=0$与$Cx=0$解空间相同；

(B) $\|\bullet\|$为算子范数，$\rho(A)$为A的谱半径，则$\rho(A)\le\|A\|$；

(C) $A\in C_n^{m\times n}$的充要条件是$AA^-=E_n$；

(D) 若A和B分别是列满秩和行满秩矩阵，则$(AB)^+=B^+A^+$.

3.下列选项中**错误**的是（　　　　）

(A) 设$AXA=A$，则$rank(A)\le rank(X)$；

(B) 若矩阵A的自相容范数$\|A\|<1$，则A为收敛矩阵；

(C) 若$\|\bullet\|$为算子范数,，则$\|A^{-1}\|\le\|A\|^{-1}$；

(D) $A\in C^{m\times n}$，则$\mathrm{rank}(A^{\mathrm{H}}A)=\mathrm{rank}(AA^{\mathrm{H}})$.

4.下列选项中**正确**的是(　　　　)

(A) $A\in C^{m\times n}$，则$R(A)=R(A^{\mathrm{H}})$；　　(B) $A^2=A(\ne0)$ 则$\|A\|_2=1$；

(C) $\mathrm{H}(u)=E-2uu^{\mathrm{H}}$(其中$u\in C^n, u^{\mathrm{H}}u=1$)不是单纯矩阵；

(D) $A\in C^{m\times n}$，则$R(A^+)=R(A^{\mathrm{H}})$.

5. 下列结论**正确**的是(　　　　).

A. 设$A=BD$是A的满秩分解，则$A^+=B^+D^+$；　　B. $rank(A)=rank(A^-)$；

C. $R(A^+)=R(A^H)$；　　D. $(A^3)^+=(A^+)^3$.

二. 判断题（每小题 4 分，共 20 分. 正确的在答题卷涂黑【T】，错误的涂黑【F】）

6. $A\in C^{n\times n}, k\in C$且$\sigma_1(M)$为$M$的最大奇异值，则$\sigma_1(kA)=|k|\sigma_1(A)$.　　(　　　　)

7. $A\in C^{n\times n}, B=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^{\mathrm{H}} & 0\end{pmatrix}$，则$\|B\|_2\ne\|A\|_2$.　　(　　　　)

8. $A,B\in C^{n\times n}$,若$\|A\|_2<\|B\|_2$，则$\|A^+\|_2>\|B^+\|_2$.　　(　　　　)

9. 设$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}^n$，若$\boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x}$只有零特征值，则$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^H$　也只有零特征值。　　(　　　　)

10. 如果$A\in C_r^{m\times n}$，且$A\ne0$，，则$\|AA^+\|_2=r$.　　(　　　　)

三. **(9 分).**设$\|\bullet\|_m$是自相容的矩阵范数，证明$\|x\|=\|xa^H\|_m$ $(a\ne0)$是与$\|\bullet\|_m$相容的向量范数.

四. **(7 分).**设B,C为方阵，$A=\begin{pmatrix}B & X\\ 0 & C\end{pmatrix}$，证明: A为正规矩阵的充要条件是B,C为正规矩阵且

$X=0$.

五. **(15 分).**设 $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\1&2&4\\2&2&6\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix}$. (1) 求 A 的最大秩分解；(2) 求 A^{+} ；(3) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；(4) 线性方程组 $Ax=b$ 如有解，求通解和最小范数解；如无解，求最小二乘解和最佳逼近解.

六. **(8 分)** 设 $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$，求 $\sin At$.

七. **(7 分)**设 $A=\begin{pmatrix}1/4&1/4&1/4&1/4\\1/5&2/5&1/5&1/5\\1/6&1/6&3/6&1/6\\1/7&1/7&1/7&4/7\end{pmatrix}$, 证明 B 的谱半径 $r(B)<1$.

八. **(9 分).** 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\1&2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$，用三角分解（$QR$ 分解）解方程组 $Ax=b$.

九. **(5 分)**设 $A=\begin{pmatrix}-2&1&0&\cdots&0&0\\1&3&1&\cdots&0&0\\0&1&3&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&3&1\\0&0&0&\cdots&1&6\end{pmatrix}$, 用圆盘定理证明存在正交矩阵 B 和正定矩阵 C, 使 $A=BC$.