一、选择题

1. 下列选项中**错误**的是（C）

(A) $V_1 = \{A \mid A^{\mathrm{T}} = A,\ \forall A \in R^{n\times n}\}$，则 $\dim V_1 = n(n+1)/2$；

(B) $U \in C^{n\times n}$ 为酉矩阵，λ 为其任一特征值，则 $|\lambda| = 1$；

(C) $A \in C^{n\times n}$，λ_i，$\sigma_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 分别为 A 的特征值与奇异值，则 $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 < \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$；

(D) $A \in C^{m\times n}$，$G \in A\{1, 2\}$，则 $R(GA) = R(G)$.

2. 下列选项中**正确**的是（B）

(A) $A \in C^{n\times n}$ 且其某一范数 $\|A\| < 1$，则 $E + A$ 可逆；

(B) $A \in C^{n\times n}$，则 $rank(A) = tr(AA^{+})$；

(C) $H(u) = E - 2uu^H$（其中 $u \in C^n, u^H u = 1$），则 $\|H(u)\|_{m_2} = 1$；

(D) $A \in C^{n\times n}$，则 $\|A\|_2 > \|A\|_F$.

3. 下列说法**错误**的是 （D ）

（A）n阶单纯矩阵一定有n个线性无关的特征向量;

（B）正规矩阵对应于不同特征值的特征向量一定正交;

（C）幂等矩阵一定可以相似对角化;

（D）$A\in C_r^{n\times n}(r>0)$, σ_1, σ_r 分别为 A 的最大和最小正奇异值，则 $\|AA^+\|_2>\sigma_1/\sigma_r$

4. 下列选项中**错误**的是（ C ）

(A) 设矩阵 $P^2=P, P^H=P$，则对 $\forall x\in C^n$ 有 $\|Px\|_2\le\|x\|_2$;

(B) 设矩阵的谱半径 $r(A)<1$，则 $\sum_{k=5}^{\infty}A^k$ 收敛;

(C) 设 $A\in C_m^{m\times n}$， $b\in R(A)$，则 $\|A_R^{-1}b\|_2<\|A^H(AA^H)^{-1}b\|_2$;

(D) 若 $A\in C_r^{m\times n}$，则矩阵 A 有 r 个正奇异值

5. 下列选项中**错误**的是（ B ）

(A) 设 $A=BD$ 是 A 的最大秩分解，则 $A^{+}=D^{+}B^{+}$；

(B) 若矩阵 A 是对角占优，则 A 一定可逆;

(C) $A\in C^{n\times n}$，则 AA^{H} 与 $A^{H}A$ 的零特征值相同;

(D) $A\in R^{n\times n}$ 的奇异值为 $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_n$，$R(x)=\dfrac{x^TA^TAx}{x^Tx}$，则 $\max\limits_{0\neq x\in R^n} R(x)=\sigma_1^2$.

二. 判断题

6. 设 $A \in C^{m,n}$, 则矩阵范数 $\| A \|_b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}| a_{ij} |$ 与 $\| x \|_1$ 相容. （X）

7. 若两个正规矩阵的特征值多项式相同则这两个正规矩阵必相似。 （ √ ）

8. 相容方程组 $Ax = b$ 的最小范数解与其导出组 $Ax = 0$ 的解正交.（ √ ）

9. $A \in C_r^{n\times n}$ 的行盖尔圆中有 k 个盖尔圆盘形成一个连通区域 G, 与余下的 $n-k$ 个盖尔圆盘不相交, 且原点 $O \notin G$, 则 $r < k$. （X）

10. 若 $A \in C_r^{m\times n}$, 则矩阵 A 有 r 个正奇异值 （ √ ）

三、设 $A,B\in C^{n\times n}$，证明：$\|AB\|_{m_2}\le\|A\|_2\cdot\|B\|_{m_2}$.

证 1： 令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n)$ 则

$$\|AB\|_{m_2}^2=\|A(\beta_1,\cdots,\beta_n)\|_{m_2}^2=\|A\beta_1\|_2^2+\cdots+\|A\beta_n\|_2^2$$

$$\le\|A\|_2^2(\|\beta_1\|_2^2+\cdots+\|\beta_n\|_2^2)=\|A\|_2^2\|B\|_{m_2}^2$$

故 $\|AB\|_{m_2}\le\|A\|_2\cdot\|B\|_{m_2}$

证 2： 设 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n\ge 0$ 为矩阵 A 的奇异值，记 $D=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n\end{pmatrix}$，

则 $A=UDV$ 为 A 的奇异值分解。

$$\|Dx\|_2^2=\sigma_1^2|x_1|^2+\sigma_2^2|x_2|^2+\cdots+\sigma_n^2|x_n|^2\le\sigma_1^2\|x\|_2^2\Rightarrow\|Dx\|_2\le\sigma_1\|x\|_2\Rightarrow$$

$$\|DM\|_2\le\sigma_1\|M\|_{m_2}=\|D\|_2\|M\|_{m_2}=\|A\|_2\|M\|_{m_2}$$

$$\|AB\|_{m_2} = \|UDVB\|_{m_2} = \|DVB\|_{m_2} \le \|D\|_2 \|VB\|_{m_2} \le \|A\|_2 \|B\|_{m_2}$$

四(用盖尔圆定理证明 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 至少有两个实特征值.

证： 矩阵的盖尔圆为： $S_1{:}|z-0|\le 1;\ S_2{:}|z-4|\le 2;\ S_3{:}|z-6|\le 3;\ S_4{:}|z-8|\le 2.$

其中， S_1 是孤立圆盘， S_2, S_3, S_4 形成一个联通区域

因为实数矩阵的复特征值一定成共轭对出现，所以 S_1 包含一个实特征值，

S_2, S_3, S_4 至少有 一个实特征值

五(.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -8 & 3\end{pmatrix}$，计算 $\cos(At)$.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ 8 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-5)\Rightarrow \lambda_1=-1,\lambda_2=5.$

对应特征向量为: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ -4\end{pmatrix}.$

令$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$,则$P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$

$$A=P\begin{pmatrix}\cos(-t) & \\ & \cos 5t\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\cos t+2\cos 5t & \cos t-\cos 5t\\ 8\cos t-8\cos 5t & 2\cos t+4\cos 5t\end{pmatrix}$$

六 .设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，求其谱分解.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)\Rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

对应特征向量为：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 令$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&1&0\\3&1&0\end{pmatrix}$,则$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&3&3\\6&4&2\end{pmatrix}$.

$$A=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&3\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix}.$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&3&-3\\0&-3&3\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-3&-3\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

七(.设 $A=\begin{pmatrix}2&4&1\\1&2&-1\\-1&-2&-2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}10\\5\\-5\end{pmatrix}$. (1) 求 A 的最大秩分解；(2) 求 A^+ ；(3) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；(4) 线性方程组 $Ax=b$ 如有解，求通解和最小范数解；如无解，求最小二乘解和最佳逼近解.

解： (1) $A=\begin{pmatrix}2&4&1\\1&2&-1\\-1&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\-1&-2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

(2) $B^+=(B^HB)^{-1}B^H=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\quad D^+=D^H(DD^H)^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0\\2&0\\0&5\end{pmatrix}$

$$A^+=D^+B^+=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&0\\0&-5&-5\end{pmatrix}$$

(3) $AA^+b=\begin{pmatrix}10\\5\\-5\end{pmatrix}=b\Rightarrow$ 有解；

(4) 最小范数解： $A^{+}b=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$,

通解： $x=A^{+}b+(E-A^{+}A)u=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+(E-A^{+}A)u,\ \forall u\in C^{3}$