2023 年矩阵理论参考解析

一、 选择题（每小题 4 分，共 20 分，根据正确答案的选项涂黑答题卡对应的位置）

1. 下列结论**正确**的是(D).

A. 设 $A=BD$，则 $A^{+}=D^{+}B^{+}$； 最大秩分解?

B.设 $x\in R$ 令 $\|x\|=\sqrt[3]{x^2}$ 则 $\|x\|$ 是 R 中的范数； 齐次性?

C. A 为正规矩阵，则 $N(A)=R(A^{\mathrm{H}})$；

$R(A)=R(A^{\mathrm{H}})\Leftrightarrow AA^{+}=A^{+}A\Leftarrow A$正规SVD，奇异值为特征值的模；第6章课后作业。

D. 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times m}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|(i=1,2,\cdots,m)$，则 A 可逆. 盖尔圆盘定理

2. 下列命题**错误**的是（ A ）

A. 实矩阵的孤立盖尔圆的圆心落在左半平面内，则其必有一个负特征值.

注：其半径有可能越过，坐标原点，其特征值有可能为 0 或正

B. 若 A 是实反对称矩阵，则 e^{A} 为正交矩阵.

注：实反对称矩阵为正规+酉相似对角化+特征值为 0 或纯虚数

C. A 为正交投影矩阵，则 A 是半正定 Hermite 矩阵. 正交投影矩阵，幂等+Hemite

D. A 是幂等 Hermite 矩阵，则 $A^{+}=A$. 同上

3.下列选项中**错误**的是(C)

A. $A\in C^{m\times n}$，则 $R(A^{+}A)=R(A^{\mathrm{H}})$；

注：$R(A^{+})=R(A^{\mathrm{H}})+\mathrm{rank}(A^{H})=rank(A^{+}A)\Leftarrow A$的SVD。

B. 设矩阵 A 非零,且 A 是正交投影算子，则 $\|A\|_2=1$；

注：最大奇异值？ 正交投影矩阵，幂等+Hemite

C . $A\in C^{m\times n}$，则 AA^{H} 与 $A^{H}A$ 的特征值相同； 非零特征值个数不一定相同

D. $A\in C^{m\times n}$，则 $rank(A^{H})=rank(A_r^{-})$. 教材 $rank(A)=rank(A_r^{-})$

4.下列选项中**错误**的是 （ A ）

(A) P,Q 为可逆矩阵，则 $(PAQ)^{+}=Q^{-1}A^{+}P^{-1}$； PPT 反例

(B) 若 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = O$，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = (E-A)^{-1}$；　　收敛矩阵谱半径小于 1

(C) $A\in C^{n\times n}$，U,V 为酉矩阵且 $B=UAV$，则 A 与 B 的奇异值相同；　教材

(D) $\mathrm{H}(u)=E-2uu^{\mathrm{H}}$(其中 $u\in C^n, u^{\mathrm{H}}u=1$)，则 -1 为其特征值. 教材

5.下列选项中**错误**的是（　B　）

(A) $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为严格对角占优矩阵且 $a_{ii}>0(\forall i)$，则 $\det A>0$；盖尔圆盘定理

(B) $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in R^2, y=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}\in R^2$，则 $x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+x_2y_2$ 为 x 与 y 的内积.;

教材 24 页，内积定义的四要素，譬如第一条同一个向量的非负性不满足，如（2，-2）

(C) $A=U\begin{pmatrix} D_r & O \\ O & O\end{pmatrix}V^{\mathrm{H}}$ 为 A 的奇异值分解，则 $A^{+}=V\begin{pmatrix} D_r^{-1} & O \\ O & O\end{pmatrix}U^{\mathrm{H}}$；教材

(D) $A^{\mathrm{H}}=A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_n$ 分别为 A 的最大和最小特征值,则 $\lambda_n\le a_{ii}\le\lambda_1$.

教材 Hermite 矩阵 Rayleigh 商性质

二. 判断题（每小题 4 分，共 20 分. 正确的在答题卷涂黑【T】，错误的涂黑【F】）

6.设 $A\in C^{m\times n}$, 则 $R(A)=R(AA^H), N(A)=N(AA^H)$.　　（　F　）

7. 设 $A\in C^{m\times n}, m>n$，则 A 列满秩的充要条件是 $R(A)=C^m$.　　（　F　）

8. 在 $R^{n\times n}$ 中，设 $A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$，则 $(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii}$ 为 A,B 的内积.

（　F　）

9. $E(u,v,\sigma)=E_n-\sigma uv^{\mathrm{H}}$，其中 $u,v\in C^n$，$\sigma\in C$，若 $v^{\mathrm{H}}u\neq 0$，则 $E(u,v,\sigma)$ 为单纯矩阵.　　（　T　）

10. $A,B\in C^{n\times n}$ 为酉矩阵，$\sigma_i(M)(i=1,2,\cdots,n)$ 为 M 的奇异值，则

$\sigma_i(AB)=\sigma_i(A)\bullet\sigma_i(B)$　　（　T　）

三. **(9 分)**设 A 是 n 阶正规矩阵,证明:$\|A\|_2=r(A)$（$r(A)$ 是 A 的谱半径)

证：$\because A$ 是正规矩阵,$\therefore\exists$ 酉矩阵 U，使得 $A=U\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n\}U^{\mathrm{H}}$,

$\therefore A^H A = U diag\{|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \cdots |\lambda_n|^2\} U^{\mathrm{H}}$,

$\therefore A^H A$的特征值为$|\lambda_i|^2$,

$\therefore \|A\|_2 = \max_i [\lambda_i (A^H A)]^{\frac{1}{2}} = [r^2(A)]^{\frac{1}{2}} = r(A).$

四.**(9 分)**设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in C^n$， 证明$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$是$C^n$上的向量范数.

证:(1)正定性:$x \neq 0$,则x至少有一个分量$x_k \neq 0$,所以$\|x\|_2 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)} > 0$;

(2) 齐次性: $\|kx\|_2 = \sqrt{|kx_1|^2 + |kx_2|^2 + \cdots + |kx_n|^2} = |k|\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$

$= |k| \|x\|_2$;

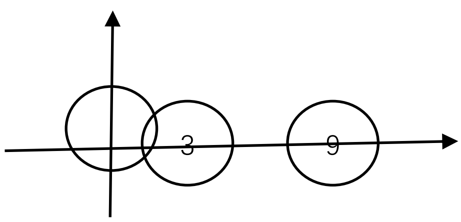
(3) 三角不等式: $\|x+y\|_2^2 = (x+y)^H (x+y) = x^H x + x^H y + y^H x + y^H y$

$\leq x^H x + |x^H y| + |y^H x| + y^H y \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$

故$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

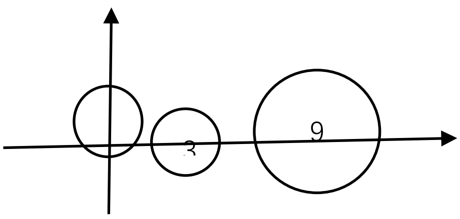
五.(10 分)设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, (i^2 = -1)$. (1)写出 A 的盖尔圆盘; (2)用圆盘定理证明: A 为单纯矩阵.

解:A 的三个盖尔圆为: $S_1 = \{z:|z-9| \leq 2\}, S_2 = \{z:|z-i| \leq 2\}, S_3 = \{z:|z-3| \leq 2\}$.



选取 $D = diag(\frac{1}{2}, 1, 1)$,则有 $B = D^{-1} A D = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 0.5 & i & 1 \\ 0.5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

B 的三个盖尔圆为: $S_1 = \{z:|z-9| \leq 4\}, S_2 = \{z:|z-i| \leq 1.5\}, S_3 = \{z:|z-3| \leq 1.5\}$.



三个盖尔圆盘都为孤立圆盘，故各有一个特征值。所以 A **为单纯矩阵.**

六.(10 分)求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的谱分解

解： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=2;$

对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$

令 $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$

$$A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

八.(7 分)设 $A\in C^{n\times n}$，证明 $\det e^A=e^{trA}$.

证： $A=PJP^{-1}=P\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}P^{-1}$，其中 $J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i\times m_i}$；

则 $e^A=Pe^JP^{-1}=P\begin{pmatrix} e^{J_1} & & & \\ & e^{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_s} \end{pmatrix}P^{-1}$，其中

$$e^{J_i}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_i} & \frac{1}{1!}e^{\lambda_i} & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}e^{\lambda_i} \\ & e^{\lambda_i} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}e^{\lambda_i} \\ & & & e^{\lambda_i} \end{pmatrix}_{m_i\times m_i}$$

所以 $\det e^A=\det e^A=|P||e^J||P^{-1}|=|e^{J_1}||e^{J_2}|\cdots|e^{J_s}|=e^{m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+\cdots+m_s\lambda_s}=e^{trA}$.

七.(15 分).设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.(1) 求 A 的最大秩分解；(2) 求 A^+；(3) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；(4) 线性方程组 $Ax=b$ 如有解，求通解和最小范数解；如无解，求最小二乘解和最佳逼近解.

解：

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&2&1&1\\2&4&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$;

(2)

$$B^{+}=(B^{H}B)^{-1}B^{H}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&1\\-3&3&0\end{pmatrix}$$

$$D^{+}=D^{H}(DD^{H})^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&0\\2&0\\0&6\\1&0\end{pmatrix}$$

$$A^{+}=D^{+}B^{+}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&2\\-18&18&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

(3) $AA^{+}b=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}\neq b\Rightarrow$ 无解;

(4) 最佳逼近解: $A^{+}b=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\4\\0\\2\end{pmatrix}$,

最小二乘解: $x=A^{+}b+(E-A^{+}A)u=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\4\\0\\2\end{pmatrix}+(E-A^{+}A)u.$