电子科技大学 2022-2023 学年第 2 学期期末考试 A 卷

学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

考试科目：信息论与编码 考试形式：一页开卷 考试日期：2023 年 6 月 14 日

成绩构成比例：平时 40%， 期中 0%， 实验 0%， 期末 60%

本试卷由 三 部分构成，共 8 页。考试时长：120 分钟 注：可使用非存储功能的计算器

题号	一	二	三	合计
得分				

得分

一、简答题（共 14 分，共 3 小题）

1、简述离散信源最大熵定理，对于一个有 *m* 个符号的离散信源，其最大熵是多少?简述连续信源限平均功率最大熵定理，对于一个方差小于等于 σ^2 的连续信源，其最大熵是多少？（5 分）

参考答案：离散信源的最大离散熵定理：信源等概分布的时候，信源熵达到最大值。（1 分）

对于一个有 *m* 个符号的离散信源，其最大熵是$logm$比特/符号。（1 分）

连续信源的限平均功率最大熵定理：连续信源的平均功率最大值为 P 时，其最大熵等于方差为 P 的高斯信源的熵，即高斯分布时熵最大。（1 分）

对于一个方差小于等于 σ^2 的连续信源，其最大熵是$\frac{1}{2}\log_2\left(2\pi e\sigma^2\right)$比特/符号。（2 分）

2、简述限失真信源编码定理的要点，说明率失真函数 *R*(*D*)的物理意义以及其与信源熵 *H*(*X*)之间的关系。（5 分）

参考答案：限失真信源编码定理：对于任意允许的平均失真度 $D \ge 0$ 和任意小的 $\varepsilon > 0$，若 $R > R(D)$，只要信源序列 *L* 足够长，就一定存在一种编码方式 *C*，使译码后的平均失真度 $\bar{D}(C) \le D + \varepsilon$；反之，若 $R \le R(D)$，则无论用什么方式，必有 $\bar{D}(C) > D$。（3 分）

R(D)是给定失真度 D 的信源压缩的最小值，当 D=0 时，R(D)=H(X) 。 （2 分）

3、当字母表 a 至 z 用 0-25 编码时，用仿射密码 $C = \alpha P + \beta \left(mod\ 26 \right)$ 对明文“we”进行加密，假设加密参数 α=3，β=5 。（备注：$C \equiv \alpha P + \beta (\mathrm{mod}\,26)$ 即$C_i = \alpha P_i + \beta (\mathrm{mod}\,26)$ ）。（4 分）

参考答案：C=3*P+5

w 的序号是 22，C(W)=(66+5)nod 26=71 mod 26=19 对应 t 。（2 分）

e 的序号是 4，C(W)=(12+5)nod 26=17 mod 26=17 对应 r。（2 分）

所以：we 加密后对应的是 tr

得分

二、计算题（共 50 分，每小题 10 分，共 5 小题）

1. 有两个二元随机变量 X 和 Y 的联合概率如下表，并定义另一随机变量 $Z=X+Y+XY$ (注：这里的运算是传统加法和乘法)。

$p(x_i y_j)$	$y_0=0$	$y_1=1$
$x_0=0$	0.3	0.3
$x_1=1$	0.2	0.2

（1）求随机变量 X 和 Y 的熵 $H(X)$ 和 $H(Y)$;

（2）求条件熵 $H(X|Y)$及 $H(Y|X)$;

（3）比较熵 $H(Z)$与联合熵 $H(XY)$的大小关系，并说明理由。

参考答案:

（1）3 分

p(x=0)=0.6;p(x=1)=0.4,H(X)=0.97 比特/符号

P(y=0)=p(y=1)=0.1;H(Y)=1 比特/符号

（2）3 分

p(x|y)=p(xy)/p(y);p(0|0)=p(00)=0.3;p(0|1)=0.3;p(1|0)=0.2;p(1|1)=0.2

H(X|Y)=0.97 比特/符号

p(y|x)=p(xy)/p(x);p(0|0)=0.3/0.6;p(1|0)=0.3/0.6;p(0|1)=p(1|1)=0.2/0.4

H(X|Y)=1 比特/符号

（3）4 分

H(XY)=1.97 比特/符号

P(z=0)=p(00)=0.3;p(z=1)=p(01) ++p(10) =0.3+0.2=0.5;p(z=3)=p(11)=0.2

H(Z)=1.486 比特/符号

H(XY) > H(Z)

因为 XY 的联合取值在映射到 Z 的过程中发生了符号合并，所以 Z 的不确定程度小于 XY 的联合分布不确定度，因此 Z 的熵小于 XY 的联合熵。

2. 黑白传真图的消息只有黑色和白色两种，即信源 X={黑，白}。设黑色出现的概率是 p(黑)=0.7，白色出现的概率 p（白）=0.3。

（1）假设图上黑白消息出现前后没有关联，求熵 $H(X)$；

（2）假设消息前后的依赖关系是 p(白/白)=0.2，p(黑/白)=0.8，p（白/黑）=0.6，p（黑/黑）=0.4，求此一阶马尔科夫信源的极限熵 $H_2=H(X_2/X_1)$。

（3）比较 $H(X)$和 $H(X_2/X_1)$的大小。

参考答案

（1）3 分

由 H(X)=-0.3*log2(0.3)-0.7*log2(0.7)= 0.8813 比特/符号

（2）4 分

得出：

Pw=Pw*0.2+Pb*0.6

Pb=Pw*0.8+Pb*0.4

Pw+Pb=1

Pw=3/7,Pb=4/7

（3）3 分

H(X2/X1)=-3/7*0.8*log2(0.8)-3/7*0.2*log2(0.2)-4/7*0.6*log2(0.6)-4/7*0.4*log2(0.4)= 0.8642 比特/符号

H(X)> $H(X_2/X_1)$。

3. 已知信道矩阵 $\boldsymbol{P}(Y\,|\,X)=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.7 & 0.2\\ 0.2 & 0.1 & 0.7\end{bmatrix}$，（1）计算该信道的信道容量；（2）设该信源以 1000 符号/秒的速度传输输入符号，现有一消息序列共有 5000 比特，若信源等概分布，根据有噪信道编码定理，10 秒内能否将这一信息序列无失真地传递？

参考答案：

（1）5 分

C=log2(3)+0.7*log2(0.7)+0.2*log2(0.2)+0.1*log2(0.1)= 0.4282 比特/符号

（2）5 分

Ct=1000*0.4282=428.2 比特/秒

428.2*10=4282<5000

所以不能正确传输

4. 图像传输中，每帧 2.25×10^6 个像素，为了很好描述图像，每个像素需要 32 种亮度电平，并假设亮度等概率分布。

（1）计算每秒钟传输 30 帧图片所需要的信道带宽，假设信道信噪比为 30dB。

（2）如果信噪比降低到 10dB，需要达到相同传输速率，那么需要多大信道带宽？

参考答案：

（1）5 分

R=30*5*2.25*10^6；S/N=30dB=1000: c=w*log2(1+1000)= 337500000

W= 337500000/9.9672= 3.3861e+07(Hz)=33.86MHz

(2)　5 分

W*log2(1+10)= 337500000 ;W= 337500000/3.4594= 9.7560e+07(Hz)=97.56MHz

5. 一个四元信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{Bmatrix}$，失真矩阵为汉明失真矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求

（1）$D_{\min}$ 和 $D_{\max}$；

（2）信源的率失真函数 $R(D)$ 及其对应的试验信道；

（3）D=0.5 时最少需要多少个二进制符号表示该信源。

参考答案：

（1）3 分

Dmin=0; Dmax=3/4

（2）4 分

$$R(D) = \ln 4 + D\ln\frac{D}{3} + (1-D)\ln(1-D)$$

$$P_D = \begin{bmatrix} 1-D & D/3 & D/3 & D/3 \\ D/3 & 1-D & D/3 & D/3 \\ D/3 & D/3 & 1-D & D/3 \\ D/3 & D/3 & D/3 & 1-D \end{bmatrix}$$

（3）3 分

R(0.5)=log(4)+0.5*log(0.5/3)+0.5*log(0.5)= 0.1438 奈特=0.21 比特

得分

三、编码题（共 36 分，每小题 12 分，共 3 小题）

1. 已知一个信源输出包含 A，B 两种符号，它们的概率分布如下表：

A	B
0.1	0.9

（1）基于上述两个符号分别做二次及三次扩展信源，求扩展信源的熵 $H(X^2)$、$H(X^3)$；

（2）对两种扩展信源进行二进制码元霍夫曼编码，写出各码字，并比较编码效率。

参考答案：

（1）3 分

原始信源熵 $H(X) = -\sum_x p(x)\log p(x)$=0.47 bit/符号

因为不考虑符号间相关性，因此$H(X^2) = 2H(X) = 0.94$ bit/符号序列,$H(X^3) = 3H(X) = 1.41$ bit/符号序列

（2）4 分

对二次扩展信源进行二进制码元霍夫曼编码后得到下面码表：

符号	概率	码字	码长
BB	0.81	0	1
AB	0.09	11	2
BA	0.09	100	3
AA	0.01	101	3

平均码长$\bar{l} = \sum_x l(x) * p(x) = 1.29$ bit/二元符号

编码效率$\eta = \frac{H(X^3)}{\bar{l}\times\log_2 2}$ =72.87%

（3）5 分

对三次扩展信源进行二进制码元霍夫曼编码后得到下面码表：

符号	概率	码字	码长
BBB	0.729	1	1
ABB	0.081	001	3
BAB	0.081	011	3
BBA	0.081	010	3
BAA	0.009	00011	5
ABA	0.009	00010	5
AAB	0.009	00001	5
AAA	0.001	00000	5

平均码长$\bar{l} = \sum_x l(x) * p(x) = 1.598$ bit/三元符号

编码效率$\eta = \frac{H(X^3)}{\bar{l}\times\log_2 2}$ =88.23%

随着 N 次扩展信源中 N 的增加，huffman 编码效率一般可以随之得到提升。一方面，随着 N 的增加，待编码符号序列个数增加，可以更好地平衡编码后的 0/1 分布，另一方面，随着扩展信源 N 的增加，信源编码效率增加并逼近信源熵，符合香农第一定理。

2. 已知某线性分组码的校验矩阵 $H=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&0&1\\1&0&0&1&1&1&0\\1&1&1&0&1&0&0\end{bmatrix}$；

（1）求相应的生成矩阵 G；

（2）求该分组码的码长、消息位长、码率和最小码距；

（3）接收序列为 **r**=1100101 时，求伴随式译码器的输出。

参考答案：

（1）4 分

$$H=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&0&1\\1&0&0&1&1&1&0\\1&1&1&0&1&0&0\end{bmatrix}\rightarrow（1、3交换）H1=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&0\\1&0&0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}\text{-1+2、1+3}$$

$$H2=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow G=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

（2）3 分

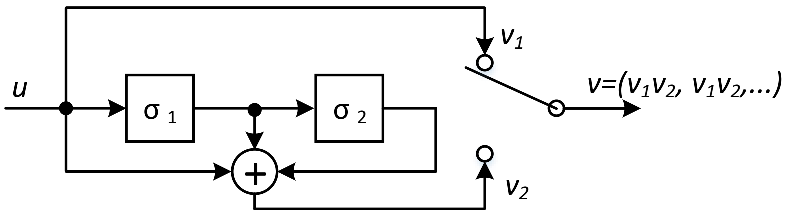
n=7,k=4,r=4/7,d=3

（3）5 分

rH=001，第 2 个比特错，译码输出 1000101

rH_2=111，第 2 个比特错，译码输出 1000101

3. 已知某(2,1,2)卷积码的编码电路如下图所示：



（1）请画出栅格图(注：栅格图状态 $S_i=(\sigma_1\sigma_2)$，$S_0=(00)$,$S_1=(10)$,$S_2=(01)$,$S_3=(11)$,输入输出关系(v_1v_2/0, v_1v_2/1)简记为(v_1v_2, v_1v_2)如(00/0,11/1)简记为(00,11)，虚线表示 u=1，实线表示 u=0)

（2）请给出基本生成矩阵 G_B；

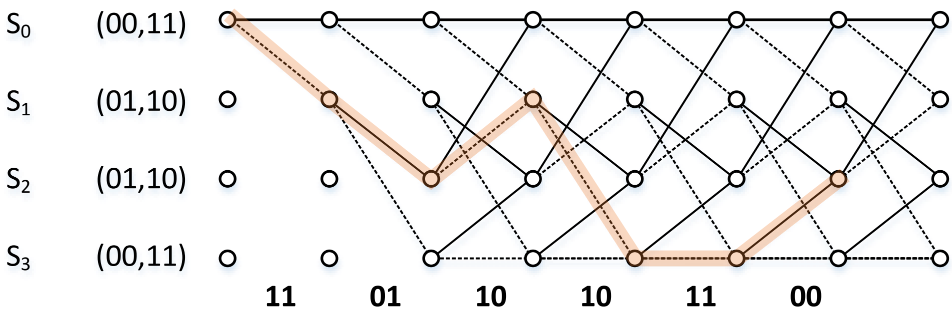
（3）求消息序列 1011100 对应的编码码字；

（4）若采用维特比译码，则对于第 4 段接收序列，需要计算多少个分支度量值？

参考答案：

（1）5 分

栅格图如下所示：



（2）3 分

基本生成矩阵为：G_B=[11 01 01]

（3）2 分

c=11 01 10 11 00 01

（4）2 分

2*4=8 个。