2023年矩阵理论

一、　选择题（每小题4分，共20分，根据正确答案的选项涂黑答题卡对应的位置）

1. 下列结论**正确**的是(　　　　).

A. 设 $A=BD$，则 $A^{+}=D^{+}B^{+}$；

B.设 $x\in R$ 令 $\|x\|=\sqrt[3]{x^2}$ 则 $\|x\|$ 是 R 中的范数;

C. A 为正规矩阵，则 $N(A)=R(A^{\mathrm{H}})$；

D. 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times m}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\,(i=1,2,\cdots,m)$，则 A 可逆.

2. 下列命题**错误**的是（　　）

A. 实矩阵的孤立盖尔圆的圆心落在左半平面内，则其必有一个负特征值.

B. 若 A 是实反对称矩阵，则 e^{A} 为正交矩阵.

C. A 为正交投影矩阵，则 A 是半正定 Hermite 矩阵.

D. A 是幂等 Hermite 矩阵，则 $A^{+}=A$.

3.下列选项中**错误**的是(　　　)

A. $A\in C^{m\times n}$，则 $R(A^{+}A)=R(A^{\mathrm{H}})$；

B. 设矩阵 A 非零,且 A 是正交投影算子，则 $\|A\|_2=1$;

C . $A\in C^{m\times n}$，则 AA^{H} 与 $A^{H}A$ 的特征值相同;

D. $A\in C^{m\times n}$，则 $rank(A^{H})=rank(A_r^{-})$.

4.下列选项中**错误**的是（　　）

(A) P,Q 为可逆矩阵，则 $(PAQ)^{+}=Q^{-1}A^{+}P^{-1}$;

(B) 若 $\lim\limits_{k\to+\infty}A^{k}=O$，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^{k}=(E-A)^{-1}$;

(C) $A\in C^{n\times n}$，U,V 为酉矩阵且 $B=UAV$，则 A 与 B 的奇异值相同;

(D) $\mathrm{H}(u)=E-2uu^{\mathrm{H}}$ (其中 $u\in C^{n},u^{\mathrm{H}}u=1$)，则 -1 为其特征值.

5.下列选项中**错误**的是（　　　）

(A) $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为严格对角占优矩阵且$a_{ii}>0(\forall i)$，则$\det A>0$；

(B) $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in R^2, y=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}\in R^2$，则$x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+x_2y_2$为$x$与$y$的内积.;

(C) $A=U\begin{pmatrix}D_r & O\\ O & O\end{pmatrix}V^{\mathrm{H}}$为$A$的奇异值分解，则$A^+=V\begin{pmatrix}D_r^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}U^{\mathrm{H}}$；

(D) $A^{\mathrm{H}}=A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_n$分别为$A$的最大和最小特征值,则$\lambda_n\le a_{ii}\le\lambda_1$.

二. 判断题（每小题 4 分，共 20 分．正确的在答题卷涂黑【T】，错误的涂黑【F】）

6.设 $A\in C^{m\times n}$, 则$R(A)=R(AA^H), N(A)=N(AA^H)$.　　　(　　)

7. 设 $A\in C^{m\times n}, m>n$，则A列满秩的充要条件是$R(A)=C^m$.　　　(　　)

8. 在 $R^{n\times n}$ 中， 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$ ， 则 $(A,B)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}b_{ii}$ 为 A,B 的内积 .

(　　)

9. $E(u,v,\sigma)=E_n-\sigma uv^{\mathrm{H}}$，其中 $u,v\in C^n$，$\sigma\in C$，若$v^{\mathrm{H}}u\ne 0$，则$E(u,v,\sigma)$为单纯矩阵.　　　(　　)

10. $A,B\in C^{n\times n}$为酉矩阵，$\sigma_i(M)(i=1,2,\cdots,n)$为$M$的奇异值，则

$$\sigma_i(AB)=\sigma_i(A)\bullet\sigma_i(B)$$　　　(　　)

三. **(9 分)**设A是n阶正规矩阵,证明:$\|A\|_2=r(A)$（$r(A)$是A的谱半径)

四.**(9 分)**设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$， 证明$\|x\|_2=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2}$是$C^n$上的向量范数.

五.(10 分)设矩阵$A=\begin{pmatrix}9&1&1\\1&i&1\\1&1&3\end{pmatrix},(i^2=-1)$. (1)写出$A$的盖尔圆盘; (2)用圆盘定理证明:$A$为单纯矩阵.

六.(10 分)求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&-2\\1&0\end{pmatrix}$的谱分解

七.(7 分)设$A\in C^{n\times n}$， 证明$\det e^A=e^{trA}$.

八.(15 分).设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.(1) 求 A 的最大秩分解；(2) 求 A^{+} ；(3) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；(4) 线性方程组 $Ax=b$ 如有解，求通解和最小范数解；如无解，求最小二乘解和最佳逼近解.