电子科技大学 2021-2022 学年第 2 学期期末考试 A 卷

考试科目：信息论与编码 考试形式：一页开卷 考试日期： 2022 年 6 月 6 日

成绩构成比例：平时 40%， 期中 0%， 实验 0%， 期末 60%

本试卷由 三 部分构成，共 8 页。考试时长：120 分钟 注：可使用非存储功能的计算器

题号	一	二	三	合计
得分				

得分

一、简述题（共 20 分，每小题 5 分，共 4 小题）

1、在信源连续的情况下，若信源取值范围为(2, 6)，那么信源满足均匀分布时达到最大熵，其熵 $H_c(X)$ 为多少？若信源输出的平均功率为 P，均值为 0，那么信源满足高斯分布时达到最大熵，其熵 $H_c(X)$ 为多少？

参考答案：

$H_c(X)=\log_2(b-a)=\log_2(6-2)=2\ \ bit/symbol;$ （3 分）

$H_c(X)=0.5\log_2(2\pi eP)\ \ bit/symbol$ （2 分）

2、阐述香农第二定理的要点，说明平均互信息量 I(X;Y)与信源熵 H（X）、信道容量 C 之间的关系。

参考答案：

香农第二定理要点：

（1）信道编码后的信息率 Rc 小于信道容量 C，R_c<C；（1 分）

（2）存在或者能够找到一种信道编码，码长或输入序列长度足够长或无穷大时译码差错概率 P_e 可以任意小；（1 分）

（3）反之，若 R_c>C，译码差错概率 P_e 必大于零。（1 分）

因为信道容量 C 是平均互信息的最大值，即 C=maxI(X;Y)，对 p(x)，所以 I(X;Y)<=C；（1 分）

因为 I(X;Y)=H(X)-H(X|Y),且 H(X)>=H(X|Y)，所以 I(X;Y)<=H(X)；（1 分）

学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

……密……封……线……以……内……答……题……无……效……

3、某一归一化信号值 x=-21.6/32 量化编码，量化间隔是 1/16 时求其均匀量化编码及其量化噪声。

参考答案：

量化编码的码长 k=log2(16)+1=5；

编码表示为 c4c3c2c1c0；

因为 x=-21.6/32 小于 0 所以 c4 取 0;

21.6/32=10.8/16>8/16-1/32，所以 c3 取 1；

21.6/32=10.8/16<8/16+4/16-1/32，所以 c2 取 0；

21.6/32=10.8/16>8/16+2/16-1/32，所以 c1 取 1；

21.6/32=10.8/16>8/16+2/16+1/16-1/32，所以 c0 取 1；

x=-21.6/32 的量化编码为 01011; （3 分）

量化后的值为-11/16；

量化噪声或量化误差为：e=11/16-10.8/16=0.2/16=0.4/32=1/80=0.0125 （2 分）

4、当字母表 a 至 z 用 0-25 编码时，用仿射密码 $C \equiv \alpha P+\beta(\bmod 26)$，即 $C_i=\alpha P_i+\beta(\bmod 26)$ 对明文“good”进行加密，假设加密参数 α=3，β=5 。

参考答案：

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

g(6)→3*6+5=23→x; （1 分）

o(14)→3*14+5=47mod 26=21 mod 26→v; （1 分）

d(3)→3*3+5=14→o; （1 分）

明文“good”对应的密文是“xvvo” （2 分）

得分

二、计算题（共 50 分，每小题 10 分，共 5 小题）

1、设有两个随机变量 X 与 Y，它们的联合概率如下表所示，并定义另一随机变量 Z=XY(一般乘法)。计算：(1) 信源 Z 的 3 次扩展的熵 $H(Z^3)$；(2) 计算联合熵 H（XZ）；（3）计算条件熵 H（Z/X）及其平均互信息量 I(X;Z)。

X \ Y	0	1
0	0.2	0.3
1	0.3	0.2

参考答案：

由 P(XY)得到 P(X)和 P(Y):

p(x=0)=p(00)+p(01)=1/2;p(x=1)=p(10)+p(11)=1/2;→H(X)=1 bit/symbol

p(y=0)=p(00)+p(10)=1/2;p(y=1)=p(01)+p(11)=1/2;→H(Y)=1 bit/symbol

p(z=0)=p(x=0,y=0)+ p(x=0,y=1)+ p (x=1,y=0)=0.8;p(z=1)= p(x=1,y=1) =0.2;

H(Z)= 0.7219→$H(Z^3)$=3H(Z)= 2.1657 bit/symbol（5 分）

p(x=0,z=0)= p(x=0,y=0)+ p(x=0,y=1)=0.5;p(x=0,z=1)= 0

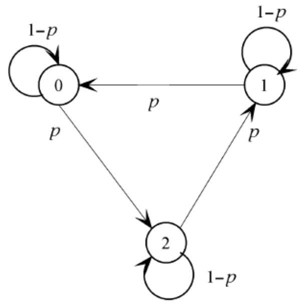
p(x=1,z=0)= p(x=1,y=0)=0.3;p(x=1,z=1)= p(x=1,y=1)=0.2

H(XZ)= 1.4855 bit/symbol （2 分）

H(Z/X)=H(XZ)-H(X)= 1.4855-1=0.4855 bit/symbol （2 分）

I(X;Z)=H(Z)-H(Z/X)= 0.7219-0.4855=0.2364 bit/symbol （1 分）

2、一阶马尔科夫信源的状态图如下所示，信源符号集合为{0，1，2}。



（1）求信源平稳后，各状态的极限概率 $P(0), P(1), P(2)$；

（2）求信源的极限熵 H_∞；

（3）p 取何值时，H_∞ 达到最大或最小，H_∞ 的最大值和最小值是多少。

参考答案：

（1）由 $\begin{cases} p(E_0) = (1-p)p(E_0) + pp(E_1) \\ p(E_1) = (1-p)p(E_1) + pp(E_2) \\ p(E_2) = (1-p)p(E_2) + pp(E_0) \\ p(E_0) + p(E_1) + p(E_2) = 1 \end{cases}$

得出：$p(E_0) = p(E_1) = p(E_2) = 1/3$；（4 分）

（2）$H_\infty = \sum_i \sum_j p(E_i) p(a_j|E_i) log_2 p(a_j|E_i) = H(p)$ （4 分）

（3）p=0.5 时，H_∞=1 bit 为最大，p=1 或 0 时，H_∞=0 bit 为最小。（2 分）

3、某二进制删除信道的转移概率 $P(Y/X) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$；（1）求信源的概率 P(x=0)=0.6，P(x=1)=0.4 时的平均互信息 I(X;Y)；（2）求信道容量 C 及达到 C 的信源概率 P(X)。

参考答案：

（1）

$$P(y=0) = 0.6 \times 0.9 = 0.54$$
$$P(y=1) = 0.6 \times 0.1 + 0.4 \times 0.1 = 0.1$$
$$P(y=2) = 0.4 \times 0.9 = 0.36$$

$$H(Y) = -0.54\log 0.54 - 0.1\log 0.1 - 0.36\log 0.36 = 1.34(bit)$$ （2 分）

$$H(Y/X) = -0.9\log 0.9 - 0.1\log 0.1 = 0.47(bit)$$ （2 分）

$$I(X;Y) = 1.34 - 0.47 = 0.87(bit)$$ （1 分）

（2）

$$P(y=0) = 0.9P(x=0)$$
$$P(y=\varepsilon) = 0.1P(x=0) + 0.1P(x=1) = 0.1$$
$$P(y=1) = 0.9P(x=1)$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= -0.9P(x=0)\log[0.9P(x=0)] - 0.9P(x=1)\log[0.9P(x=1)] - 0.1\log 0.1 \\ &= 0.9[-P(x=0)\log P(x=0) - P(x=1)\log P(x=1)] - 0.9\log 0.9 - 0.1\log 0.1 \\ &= 0.9H(X) + 0.47 \end{aligned}$$

（2 分）

$$C = \max_{P(X)} I(X;Y) = \max_{P(X)} \{0.9H(X) + 0.47 - 0.47\} = \max_{P(X)} 0.9H(X) = 0.9(bit)$$ （2 分）

$$P(x=0) = P(x=1) = 0.5$$ （1 分）

4、假设图像传输中每帧有 6×10^6 个像素，设每个像素有 64 种彩色度，每种彩度又有 16 种不同的亮度层次，如果所有的彩色品种和亮度层次的组合均以等概率出现，并且各个组合之间相互独立。如果信道带宽 W=40KHz，计算每分钟无差错传送一帧图像所需的最小信噪比是多少 dB？

参考答案：

每种彩色品种和亮度层次组合的概率 $P = {}^{1}\!/_{64\times16}$

每个彩色象元的自信息量 $I_1 = \log\dfrac{1}{p} = 10bit/$每象元

每帧彩色图象的信息量 $I_2 = 10\times6\times10^6 = 6\times10^7 bit/$帧

每分钟传送一帧图象，所需的信道容量至少为

$$C_t = 6\times10^7/60 = 1\times10^6 bit/s$$ （5 分）

$$C_t = W\log_2(1+\frac{S}{N}) = 40\times10^3\times\log_2(1+\frac{S}{N}) = 1\times10^6$$

$$\therefore \log_2(1+\frac{S}{N}) = 25,\quad \frac{S}{N} = 10\times\log_{10}(2^{25}\text{-}1) = 75.2575dB$$ （5 分）

5、离散信源 $\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{Bmatrix}$，当失真矩阵 $[D]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 时，计算（1）D_{max} 和 D_{min}；（2）允许失真 $D=0.1$ 的信息率失真函数 R(D) 及达到 R(D) 的实验信道 $P_D(\hat{X}/X)$。（3）比较离散信源 X 的熵 H(X)与 R(D=0.1)的大小，并说明其物理意义；

参考答案：

（1）$D_{max}=2/3$；$D_{min}=0$ （3 分）

（2）R(D)= log2(3)+0.1*log2(0.1/2)+0.9*log2(0.9)= 1.0160 bit/symbol （2 分）

$$[P]=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0 \\ 0.05 & 0.9 & \\ 0.05 & 0.05 & \end{bmatrix}$$ （2 分）

（3） H(X)= $\log_2 3$=1.585 bit >R(D=0.1)=1.016 bit， 率失真函数 R(D)是小于等于信源的熵 H(X),当 D=0 时，R(D)=H(X)。（3 分）

得分

三、编码题（共 30 分，每小题 10 分，共 3 小题）

1、已知某离散三元信源的概率 $P(X)=[0.7 \quad 0.2 \quad 0.1]$，编出 2 次扩展信源的赫夫曼码码表，并求编码效率 η。

答案：

$P(X)^2=[0.49 \quad 0.14 \quad 0.14 \quad 0.07 \quad 0.07 \quad 0.04 \quad 0.02 \quad 0.02 \quad 0.01]$（2 分）

$00 \to 1$

$01 \to 000$

$10 \to 001$

$02 \to 0100$

$20 \to 0101$ （5 分）

$11 \to 0111$

$12 \to 01101$

$21 \to 011000$

$22 \to 011001$

$H(X)=-0.7\log 0.7-0.2\log 0.2-0.1\log 0.1=1.157(bit)$ （1 分）

$$L=0.49\times 1+2\times 0.14\times 3+(2\times 0.07+0.04)\times 4+0.02\times 5+(0.02+0.01)\times 6$$
$$=2.33(bit)$$
（1 分）

$\eta=\dfrac{2\times 1.157}{2.33}=0.993=99.3\%$（1 分）

2、线性分组码的校验矩阵如下：

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（1）求这分组码的码字长度、信息位长度、校验位长度各是多少？

（2）写出该分组码对应的生成矩阵？

（3）写出该分组码所有可能的码字？

（4）假定接收码字为 1101110，判断哪一位出错？

参考答案：

（1）码长 7，信息位长 4，校验位长 3；（2 分）

（2）校验矩阵标准形式：（3 分）

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

生成矩阵

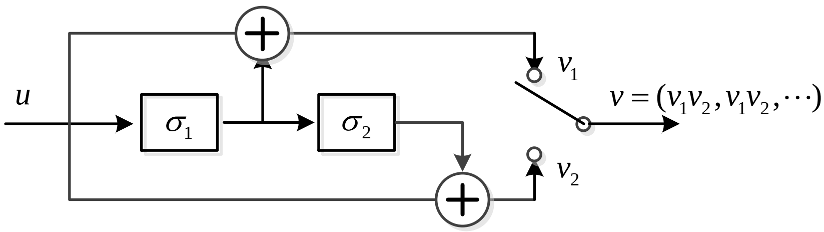
$$G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

（3）标准形式的码字：（3 分）

0000：0000000
0001：0001011
0010：0010101
0100：0100110
1000：1000111
1100：1100001
1010：1010010
1001：1001100
0110：0110011
0101：0101101
0011：0011100
1110：1110100
1101：1101010
1011：1011000
0111：0111001
1111：1111111

（4）伴随式为 HS’=111，倒数第 3 位出错。（2 分）

3、已知某(2,1,2)卷积码的编码电路如下图所示：



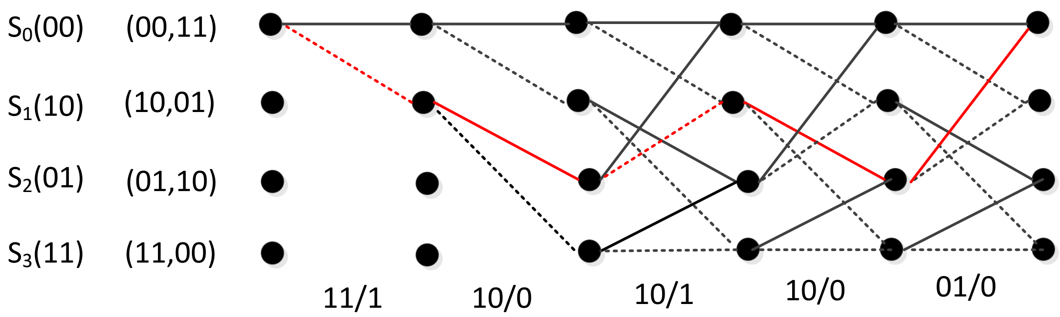
（1）请画出该卷积码的栅格图(注：栅格图状态 $S_i=(\sigma_1\sigma_2)$，$S_0=(00)$，$S_1=(10)$，$S_2=(01)$，$S_3=(11)$，输入输出关系(v_1v_2/0, v_1v_2/1)简记为(v_1v_2, v_1v_2)如(00/0, 11/1)简记为(00, 11)，虚线表示 u=1，实线表示 u=0)；

（2）求消息序列 10100 对应的码字序列 v；

（3）若采用维特比译码，每个时刻最多需要保留多少条路径，也就说每个时刻最多有多少条幸存路径？

参考答案：

（1）栅格图（5 分）；



（2）信息序列 1100 对应的编码码字 1110101001；（3 分）

（3）每个状态有 2 个分支度量，每个时刻最多有 4 条幸存路径。（2 分）