一、填空题

1. 5个女生和7个男生进行排列，女生两两不相邻的排列有______种。男生A和B之间正好有三个女生且无其它男生的排列有______种。
2. 把4个相同的球放入3个不同的盒子中，每个盒子至少放一个球，共有______种放法。若问题改成3个相同的盒子，则放法有____种。
3. 根据牛顿二项式定理，计算$(1-x)^{-2/3}$的展开式中x^k的系数为____。
4. 一个班有50人，则存在至少有______个人的生日在同一个月。

二、解答题(需要写必要的解题步骤)

1. 证明：①$P(n,r) = rP(n-1,r-1) + P(n-1,r)$

②$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$。

2. 一个聚会有20个人，要分成两桌来坐，每桌10人。问有多少种不同的就座方式？ （如果一桌的两种坐的方式通过转动后可以重叠，则认为是同一种坐法)

3. 不超过1万，且百位数只能是3，6，9的偶数有多少个？

二、解答题(需要写必要的解题步骤)

4. 一棋手为参加一次锦标赛要进行77天的训练，如果他每天至少下一盘棋，且每周至多下12盘棋，试证明不管他怎样安排，必存在相继的若干天，在这段时间中他恰好下棋21盘。

5.证明世界上任意6个人中，必定存在3个人要么相互认识要么互相都不认识。

6.记Ramsey数为$N(a,b)$，证明：$N(a,b) \le N(a-1,b)+N(a,b-1)$。

二、解答题(需要写必要的解题步骤)

7. 利用容斥原理，求不超过100的素数个数。

8. 有n个学生，坐在n个位子上，现在学生们都去操场运动回来了重新坐位子，问有多少种方式这n个学生坐的位子和他原来的位子都不一样?

9. 求序列$\{0, 1, 8, 27, \cdots, n^3, \cdots\}$的普通母函数。

答案

一、填空题

1. $7!\,P(8,5)$(或33868800), $P(5,3)2!\,8!$

2. $3, 1$

3. $\frac{2\times5\times\cdots\times(3k-1)}{3^k k!}$

4. 5

答案

二、解答题

1. ①$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-r)!}=\frac{(r+n-r)(n-1)!}{(n-r)!}=\frac{r(n-1)!}{(n-r)!}+\frac{(n-r)(n-1)!}{(n-r)!}=$

$\frac{r(n-1)!}{(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}=rP(n-1,r-1)+P(n-1,r)$

②$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!}=$

$\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$。

答案

二、解答题

2.先将20个人分成两组，方法数为$\frac{1}{2}\binom{20}{10}$。然后每组进行圆排列$9!\,9!$，

从而不同的就座方式总数为$\frac{1}{2}\binom{20}{10}9!\,9!$。

3. 不超过1万的数最多4位，百位数有3种选择（3，6，9），个位数只能是0，2，4，6，8共5种选择，从而总的个数为$3\times5\times10\times10=1500$.

答案

二、解答题

4. 证明：设a_j是前j天该棋手下棋盘数的和，$j=1,2,\cdots,77$，由于每天至少一盘棋，所以序列$a_1,a_2,\cdots,a_{77}$是严格递增序列，且$a_1\geq 1,a_{77}\leq 11*12=132.$ 于是序列$a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21$也是严格递增序列。而$a_{77}+21\leq 153$，故154个数$a_1,a_2,\cdots,a_{77},a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21$都在1和153两个整数之间。

由鸽笼原理知，这154个数中必有两个是相等的。故一定存在两个数i和j，使得$a_i=a_j+21$即$a_i-a_j=21$。

因此，在第$j+1,j+2,\cdots,i$天这些天中，这个棋手恰好下棋21盘。

答案

二、解答题

5. 先在6个人中任选一个人a，根据鸽笼原理，要么有3个人都认识a，要么有3个人都不认识a。假设有3个人（b，c，d）都认识a，那么这三个人如果有两人认识（不妨设为b和c），则a，b，c就构成三个相互认识的人，否则b,c,d就互相不认识。而若有3个人（b，c，d）都不认识a，那么这三个人如果有两人不认识（不妨设为b和c），则a，b，c就构成三个相互不认识的人，否则b,c,d就互相不认识。

答案

二、解答题

6. 证明：在$R(a-1,b)+R(a,b-1)$个人中任意挑选一个人，把这个人称作p，则剩下的$R(a-1,b)+R(a,b-1)-1$人可分成两个集合Friend(与p相识的人)和Stranger(与p不相识的人)。由鸽笼原理的一般形式知，或者在Friend中至少有$R(a-1,b)$个人，或者在Stranger中至少有$R(a,b-1)$个人。1）如果在Friend中有$R(a-1,b)$个人，这表明有$a-1$个人彼此相识，或者有b个人彼此不相识。若有$a-1$个人彼此相识，则加上p就有a个人彼此相识，满足$R(a,b)$的要求。2）如果在Stranger中有$R(a,b-1)$个人，这表明有a个人彼此相识，或者$b-1$个人彼此不相识。若有$b-1$个人彼此不相识，则加上p就有b个人彼此不相识，因而也满足$R(a,b)$的要求。

答案

二、解答题

7. **解**：因$10^2=100$，故不超过100的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过100的合数的因子不可能都超过10。 设$A_i=\{x|x\le 100，i|x\}$，$i=2,3,5,7$。

由于$|A_2|=\left\lfloor\frac{100}{2}\right\rfloor=50, |A_3|=\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor=33, |A_5|=\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor=20, |A_7|=\left\lfloor\frac{100}{7}\right\rfloor=14, |A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{100}{2\times 3}\right\rfloor=16,$

$|A_2\cap A_5|=\left\lfloor\frac{100}{10}\right\rfloor=10, |A_2\cap A_7|=\left\lfloor\frac{100}{14}\right\rfloor=7, |A_3\cap A_5|=\left\lfloor\frac{100}{15}\right\rfloor=6, |A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{100}{21}\right\rfloor=4, |A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{100}{35}\right\rfloor=2,$
$|A_2\cap A_3\cap A_5|=\left\lfloor\frac{100}{2\times 3\times 5}\right\rfloor=3, |A_2\cap A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{100}{2\times 3\times 7}\right\rfloor=2, |A_2\cap A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{100}{2\times 5\times 7}\right\rfloor=1, |A_3\cap A_5\cap A_7|=$
$\left\lfloor\frac{100}{3\times 5\times 7}\right\rfloor=0, |A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|=0$

$|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_7}|=100-|A_2|-|A_3|-|A_5|-|A_7|$

$+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_5|+|A_2\cap A_7|+|A_3\cap A_5|+|A_3\cap A_7|+|A_5\cap A_7|$

$-|A_2\cap A_3\cap A_5|-|A_2\cap A_3\cap A_7|-|A_2\cap A_5\cap A_7|-|A_3\cap A_5\cap A_7|$

$+|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|=100-(50+33+20+14)+(16+10+7+6+4+2)-(3+2+1+0)+0=22$

由于这里排除了2，3，5，7这四个素数，又包含了1这个非素数。故所求的不超过100的素数个数为：

$$22+4-1=25$$

答案

二、解答题

8. 这是错排问题， $D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$

9. 由牛顿二项定理推论知： $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

两边微分后再乘以x得 $\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$

两边微分后再乘以x得 $\frac{(1+x)x}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$

两边微分后再乘以x得 $\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}n^3x^n$

即序列$\{0，1，8，27，\cdots,n^3，\cdots\}$的普通母函数为$\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$