

考试科目：随机过程与排队论

考试形式：一页纸开卷

考试时间：2012 年

1. (10 分) 若从 $t = 0$ 开始每隔 0.5 秒抛掷一枚均匀的硬币做实验，定义随机过程

$$X(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & t \text{时刻抛得正面} \\ 2t, & t \text{时刻抛得反面} \end{cases}$$

求：

- (1) $X(t)$ 的一维分布函数 $F(0.5, x)$ 和 $F(1, x)$;
- (2) $X(t)$ 的二维分布函数 $F(0.5, 1; x_1, x_2)$;
- (3) $X(t)$ 的均值函数 $m_x(t)$ ，方差函数 $D_x(t)$ 以及协方差函数 $C_x(s, t)$ 。

2. (10 分) 设电话总机在 $[0, t)$ 接到的电话呼叫数 $X(t)$ 是泊松过程，平均每分钟 2 次，求：

- (1) $[0, 2)$ 内接到 3 次呼叫的概率；
- (2) $[1, 2)$ 内接到第 3 次呼叫的概率。

3. (16 分) 设齐次马氏链 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3\}$, 状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- (1) 论其遍历性;
(2) 求平稳分布;
(3) 求概率 $P\{X(4) = 1 | X(1) = 2, X(2) = 3\}$;
(4) 已知 $X(0)$ 的分布律如下表所示:

$X(0)$	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

求 $P\{X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3\}$ 和 $X(2)$ 的分布律。

4. (12 分) 设齐次马氏链 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 状态转移矩阵 P 如下边矩阵。求:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- (1) 画出状态转移图;
(2) 讨论各状态性质;
(3) 分解状态空间。

5. (16 分) 病人以每小时 3 人的泊松流到达医院, 假设该医院只有一个医生服务, 他的服务时间服从负指数分布, 并且平均服务一个顾客时间为 15 分钟。
- (1) 医生空闲时间的比例?
 - (2) 有多少病人等待看医生?
 - (3) 病人的平均等待时间?
 - (4) 一个病人等待超过一个小时的概率?
6. (15 分) 某加油站设有三条加油管, 汽车按平均每 2 分钟 1 辆的泊松流到来; 加油时间为指数分布, 参数 $\mu = 0.5$ 辆/分钟。站内最多只能停放 2 辆车等待加油, 当汽车开来发现已有 2 辆车等待时, 它即往别处去加油。试求
- (1) 加油不需等待的概率;
 - (2) 加油站内平均车辆数;
 - (3) 排队等待加油的平均时间。

7. (15 分) 假定某电影网站有 2 台服务器, 其中 1 台运行, 1 台备用。当运行的服务器发生故障时, 发生故障的机器立刻由维修工去修理, 修好后转入备用。只有一个维修工人。如果服务器正常工作时间服从指数分布, 平均 9 天, 而调整维修一台服务器的时间是指数分布, 平均 3 天。求
- (1) 无备用服务器时, 网站正常运转的概率;
 - (2) 有备用服务器时, 由于停机网站无法运转的概率;
 - (3) 如果要求网站正常运转的概率不低于 0.995, 至少应该备用多少台服务器?
8. (6 分) 设有三台机器正常运转时间都为负指数分布, 其参数为 1. 有两个修理工, 修理时间服从负指数分布, 参数分别为 1 和 2. 试用生灭过程描述该系统故障机器数, 并画出状态转移速度图和求其平稳分布。