**考试科目：随机过程与排队论**
**考试形式：一页纸开卷**
**考试时间：2014 年秋**

1. （10 分） 随机过程 $X(t) = A\cos(t), -\infty < t < +\infty$，其中 $A$ 是随机变量，其概率分布律为

| $A$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

求：

(1) 一维分布函数 $F(\pi/4, x)$ 和 $F(\pi/3, x)$；

(2) 均值函数 $m_x(t)$，方差函数 $D_x(t)$ 以及协方差函数 $C_x(s,t)$。

注：$F(t,x) = PX(t) \le x, t \in T, x \in R = (-\infty, +\infty)$。

**解：**

(1) 因为

| $X(\frac{\pi}{4})$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

| $A$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

——————2 分

所以，一维概率分布函数：

$$F(\frac{\pi}{4}, x) = \begin{cases} 0, & -\infty \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.2, & \frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \sqrt{2} \\ 0.5, & \sqrt{2} \le x \le \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1, & \frac{3\sqrt{2}}{2} \le x \le +\infty \end{cases} \qquad F(\frac{\pi}{4}, x) = \begin{cases} 0, & -\infty \le x \le \frac{1}{2} \\ 0.2, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0.5, & 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ 1, & \frac{3}{2} \le x \le +\infty \end{cases}$$

——————2 分

(2) 均值函数

$m_x(t) = EX(t) = EA\cos t = \cos t EA = 2.3\cos t$ ——————2 分

协方差函数

$$\begin{aligned} C_x(s,t) &= EX(s)X(t) - m_x(s)m_x(t) \\ &= (0.2 + 1.2 + 4.5)\cos s\cos t - 5.29\cos s\cos t \\ &= 0.61\cos s\cos t \end{aligned}$$

——————2 分

方差函数

$D_x(t) = C_x(t,t) = 0.61\cos^2 t$ ——————2 分

2. （10 分） 某高速公路旁有一个加油站，汽车按平均每分钟 5 辆的泊松过程通过该加油站。假设通过该加油站的汽车有 40% 的来加油站加油，求

(1) 在头 2 分钟和第 3 至 5 分钟这两个时间区间内各有 2 辆汽车通过该加油站的概率。

(2) 在头 2 分钟内，通过该加油站 5 辆汽车且仅有 1 辆汽车来加油站加油的概率。

**解：**

设 $N(t)$ 为 $[0,t)$ 内通过该加油站的车辆数，则 $N(t)\sim\Psi(5t)$

(1)

$$
\begin{aligned}
P(N(2)-N(0)=2,N(5)-N(3)=2) &= P(N(2)-N(0)=2)\cdot P(N(5)-N(3)=2)\\
&= \left(\frac{(2\times5)^2}{2!}e^{-2\times5}\right)^2=\frac{10^4}{4}e^{-20}=2500e^{-20}
\end{aligned}
$$

——————5 分

(2) 将通过该汽车加油站的车辆数按 $p=0.4,q=0.6$ 进行分解，设 $L_t$ 是 $[0,t)$ 内通过该加油站并加油的车辆数，$M_t$ 是 $[0,t)$ 内通过该加油站但不加油的车辆数，$N_t$ 是 $[0,t)$ 内通过该加油站的车辆总数。由题意，$\{N_t,t>0\}$ 是参数为 $\lambda=5$（辆/分钟）的泊松过程，因此 $\{L_t,t>0\}$ 和 $\{M_t,t>0\}$ 分别是参数为 $\lambda_1=\lambda_p=2$（辆/分钟）和 $\lambda_2=\lambda_q=3$（辆/分钟）的泊松过程。由题意知，所求即为 $P\{L_2=1,M_2=4\}$，由于 $L_t$ 与 $M_t$ 相互独立，故有

$$
\begin{aligned}
P\{L_2=1,M_2=4\} &= P\{L_2=1\}P\{M_2=4\}\\
&= e^{-2\lambda_1}\frac{(2\lambda_1)^1}{1!}e^{-2\lambda_2}\frac{(2\lambda_2)^4}{4!}\\
&= 4e^{-4}\frac{e^{-6}}{4!}6^4=216e^{-10}
\end{aligned}
$$

——————5 分

3. （16 分） 设齐次马氏链 $\{X(n),n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，一步状态转移矩阵

$$
P=\begin{pmatrix}\frac14 & \frac34 & 0\\ \frac15 & \frac35 & \frac15\\ 0 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}
$$

(1) 论其遍历性

(2) 求平稳分布

(3) 求概率 $P\{X(4)=1|X(1)=2,X(2)=3\}$；

(4) 已知 $X(0)$ 的分布率如下表所示，求 $P\{X(1)=1,X(2)=2,X(3)=3\}$ 和 $X(2)$ 的分布律。

| $X(0)$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

**解：**

根据已知条件可得

$$
P(2)=P^2=\begin{pmatrix}\frac14 & \frac34 & 0\\ \frac15 & \frac35 & \frac15\\ 0 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac14 & \frac34 & 0\\ \frac15 & \frac35 & \frac15\\ 0 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{80} & \frac{51}{80} & \frac{3}{20}\\ \frac{17}{100} & \frac{61}{100} & \frac{11}{50}\\ \frac{1}{10} & \frac{11}{20} & \frac{7}{20}\end{pmatrix}
$$

(1) 因为 $P(2)$ 中所有元素均大于 0，所以该齐次马氏链是遍历的。 ——4 分

(2) 遍历的齐次马氏链一定存在极限分布，其极限分布就是平稳分布

$$\begin{cases}\prod = \prod P \\ \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \qquad \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1\end{cases} \Rightarrow \prod = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{4}{25}, \frac{3}{5}, \frac{6}{25}).$$

——4 分

(3) $P\{X(4) = 1 | X(1) = 2, X(2) = 3\} = P\{X(4) = 1 | X(2) = 3\} = p_{31}(2) = 0.1$

——4 分

(4) $X(1)$ 的分布律 $\tilde{P_1} = \tilde{P_0}P = \begin{pmatrix}0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.11 & 0.58 & 0.31\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}&P\{X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3\} \\ =&P\{X(1) = 1\}P\{X(2) = 2 | X(1) = 1\}P\{X(3) = 3 | X(1) = 1, X(2) = 2\} \\ =&P\{X(1) = 1\} * p_{12}(1) * p_{23}(1) \\ =&0.11 * 3/4 * 1/5 = 33/2000 = 0.0165\end{aligned}$$

$X(2)$ 的分布率

$$\tilde{P_2} = \tilde{P_0}P(2) = \begin{pmatrix}0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{17}{80} & \frac{51}{80} & \frac{3}{20} \\ \frac{17}{100} & \frac{61}{100} & \frac{11}{50} \\ \frac{1}{10} & \frac{11}{20} & \frac{7}{20}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{287}{2000} & \frac{1171}{2000} & \frac{542}{2000}\end{pmatrix}$$

——4 分

4. （12 分） 设齐次马氏链 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，状态转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

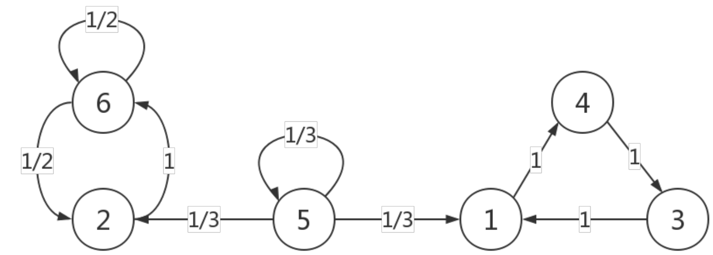
(1) 画出状态转移图；

(2) 讨论各状态性质；

(3) 分解状态空间。

**解:**

(1) 状态转移图：




(2) 状态性质：

$f_{11}(1)=0, f_{11}(2)=0, f_{11}(3)=1, f_{11}(n)=0(n>3), f_{11}=1$，故状态 1 为常返状态。

而 $\mu_1=\sum^{\infty} nf_{11}(n)=3<+\infty$，所以状态 1 为正常返状态，因为 $p_{11}(3n)=1>0(n>1)$，所以状态 1 的周期是 3. 由于状态 1、3、4 互通，因此具有相同的状态性质。

$f_{55}(1)=\frac{1}{3}, f_{55}(n)=0(n>1), f_{55}=\frac{1}{3}<1$，故状态 5 为非常返状态。

$f_{66}(1)=\frac{1}{2}, f_{66}(2)=\frac{1}{2}, f_{66}(n)=0(n>2), f_{66}=1$，故状态 6 为常返状态。

而 $\mu_6=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{66}(n)=\frac{3}{2}<+\infty$，所以状态 6 为正常返状态。因为 $p_{66}>0$，所以状态 6 是非周期的。由于状态 2、6 互通，因此具有相同的状态性质。

——————4 分

(3) 状态空间分解为 $E=N+C_1+C_2=\{5\}+\{2,6\}+\{1,3,4\}$。

——————4 分

5. （16 分） 某打字室有 2 个打字员独立打字，假定每个打字员打一份文稿的时间都服从指数分布，平均 20 分钟。又假定文稿以泊松流到达，平均每小时到达 5 份。试求系统达到平稳时

(1) 文稿积压的概率及平时积压的文稿数；

(2) 每份文稿在打字室的平均逗留时间和平均等待打字的时间；

(3) 文稿到达打字室后立即可以打字的概率；

(4) 平均忙的打字员数。

**解：**

由题意知，按 $M/M/c/\infty$ 系统处理，其中 $c=2$，$\lambda=5$（份/小时），$\mu=3$（份/小时），$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{5}{3}$，$\rho_c=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{5}{6}<1$，因此

$$p_0=[\sum^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)}]^{-1}=[1+\frac{5}{3}+\frac{2\times(5/3)^2}{2\times(2-5/3)}]^{-1}=\frac{1}{11}$$

$$p_c=\frac{\rho^c}{c!}p_0=\frac{(5/3)^2}{2}\times\frac{1}{11}=\frac{25}{198}.$$

(1)

$$\text{文稿积压的概率}=\sum_{j=0}^{\infty}p_j=\frac{\rho^c}{(1-\rho_c)\cdot c!}p_0=\frac{(5/3)^2}{(1-5/6)\cdot 2!}\times\frac{1}{11}=\frac{25}{33}\approx 0.7576$$

平均积压的文稿数 $\overline{N}_q = \dfrac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}p_c = \dfrac{5/6}{(1-5/6)^2} \times \dfrac{25}{198} = \dfrac{125}{33} \approx 3.7879$

——————4 分

(2) 每份文稿在打字室的平均等待打字的时间

$$\overline{W}_q = \frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2} \cdot p_c = \frac{5/6}{5 \times (1-5/6)^2} \times \frac{25}{198} = \frac{25}{33}(\text{分钟}).$$

每份文稿在打字室的平均逗留时间

$$\overline{W} = \overline{W}_q + E[X] = \frac{25}{33} + \frac{1}{3} = \frac{12}{11}(\text{分钟})$$

(3) 文稿到达打字室后立即可以打字的概率

$$p = 1 - \sum_{j=c}^{\infty} p_j = \frac{8}{33}$$

(4) 平均忙的打字员数

$$\overline{N}_c = \rho = \frac{5}{3}$$

6. （10 分） 假定某电影网站有 3 台服务器，其中 2 台备用，只有一个维修工人。如果服务器正常工作时间服从指数分布，平均 2 天，而调整维修一台服务器的时间是负指数分布，平均 1 天。求网站正常运转的概率及由于停机网站无法运转的概率。

**解:**

由题知，$\lambda = 1/2$（台/天），$\mu = 1$（台/天），$\rho = 1/2$，该系统按 $M/M/c/m+k/m$ 型处理，$c = 1$，$m = 1$，$k = 2$，因为 $K > c$，因此有

$$\begin{aligned} P_0 &= [\sum_{i=0}^{c-1} \frac{m^i}{i!}\rho^i + \frac{1}{c!}\sum_{i=c}^{K-1} \frac{m^i}{c^{i-c}}\rho^i + \frac{m^K \cdot m!}{c!} \sum_{i=K}^{K+m} \frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i]^{-1} \\ &= [1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3]^{-1} = \frac{8}{15}. \\ P_{m+k} &= \frac{m^K \cdot m!}{(m-(m+k)+K)! \cdot c^{m+k-c} \cdot c!}\rho^{m+k} P_0 \end{aligned}$$

——————4 分

网站由于停机无法运转的概率 $= p_3 = (\frac{1}{2})^3 \frac{8}{15} = \frac{1}{15}$ ——————3 分

网站正常运转的概率 $= \sum^2 p_j = 1 - p_3 = \frac{14}{15}$ ——————3 分

7. （20 分） 某计算中心的信息交换站接受到的信息流为泊松流，每秒钟到达 15 份信息，信息从交换站输出服从指数分布，平均每秒钟 20 份，试求：若缓冲器的存储空间仅可存储 4 份信息，则平稳时的概率分布，信息损失的概率，信息交换站的平均信息数，缓冲器中的平均信息数，每份信息在交换站的平均逗留时间和平均等待时间。

**解：**

由题意，按 $M/M/c/K$ 排队系统处理，其中 $c=1$，$K=5$，$\lambda=15$（份/秒），$\mu=20$（份/秒），$\rho=3/4\neq 1$，因此

$$p_j=\frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{k+1}},0\le j\le 5$$

——————4 分

(1)

$$\text{平稳时的概率分布：}p_0=\frac{1024}{3367},p_1=\frac{768}{3367},p_2=\frac{576}{3367},p_3=\frac{432}{3367},p_4=\frac{324}{3367},p_5=\frac{243}{3367}$$

——————4 分

(2) 信息损失的概率 $p_5=\frac{243}{3367}$ ——————4 分

(3) 缓冲器钟的平均信息数

$$\underline{N}_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}-\frac{(K+\rho)\rho^{k-1}}{1-\rho^{k-1}}=\frac{3613}{3367}(\text{份})$$

信息交换站的平均信息数

$$\overline{N}=\overline{N}_4+\rho(1-p_K)=\frac{5956}{3367}(\text{份})$$

(4) 每份信息在交换站的平均等待时间

$$\begin{aligned}\overline{W}_q&=\sum_{jmc}^{K-1}\frac{j-c+1}{c\mu}\cdot q_j=\sum_{jmc}^{K-1}\frac{j-c+1}{c\mu}\cdot\frac{P_i}{1-P_k}\\&=\frac{1}{20}\times\frac{\frac{768}{3367}}{1-\frac{243}{3367}}+\frac{2}{20}\times\frac{\frac{576}{3367}}{1-\frac{243}{3367}}+\frac{3}{20}\times\frac{\frac{432}{3367}}{1-\frac{243}{3367}}+\frac{4}{20}\times\frac{\frac{324}{3367}}{1-\frac{243}{3367}}=\frac{281}{3905}(\text{分钟}).\end{aligned}$$

每份信息在交换站的平均逗留时间 $\overline{W}=\overline{W}_q+\frac{1}{\mu}=\frac{4467}{78100}$ ——————4 分

8. （6 分） 设有一排队系统：顾客按参数为 2 的泊松流到达：顾客所需的服务时间序列独立、服从参数为 5 的 2 阶爱尔朗分布；系统中只有一个服务台，容量为无穷大；顾客到达时，若服务台空闲就立即接受服务，否则就排队等待，并按先到先服务的顺序接受服务，而且到达过程与服务过程彼此独立。试求该系统的平均队长、平均等待队长、平均等待时间、平均逗留时间。

**解：**

由题意，按 $M/G/1/\infty$ 系统处理，其中 $\lambda = 2$（个/秒），顾客所需的服务时间 $\chi$ 服从参数为 5 的 2 阶爱尔朗分布，因此 $\mu = 5$（个/秒），$\rho = 2/5$。

$$E[X^2] = D[X] + E^2[X] = \frac{2}{5^2} + (\frac{2}{5})^2 = \frac{6}{25}$$

$$\text{平均队长} \quad \overline{N} = \rho + \frac{\lambda^2 E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{6}{5}$$

$$\text{平均等待队长} \quad \overline{N}_q = \frac{\lambda^2 E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{6}{5}$$

$$\text{平均等待时间} \quad \overline{W}_q = \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{2}{5}$$

$$\text{平均逗留时间} \quad \overline{W} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{3}{5}$$