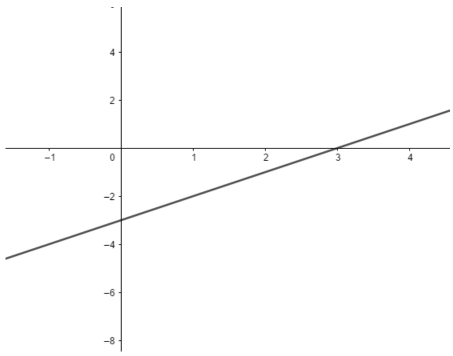
AULAS PARTICULARES



ASSUNTO: FUNÇÃO AFIM
OBJETIVO: COMPREENDER O COMPORTAMENTO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO AFIM, DESENVOLVER FERRAMENTAS PARA ESBOÇAR SEU GRÁFICO TAL QUAL CALCULAR A LEI DE FORMAÇÃO DA MESMA E CALCULAR PONTOS DE INTERSECÇÃO ENTRE DUAS FUNÇÕES AFINS DISTINTAS.

INSTAGRAM: @kvictorprof
DISCORD: justkvictor#9167

Victor K.

FUNÇÃO AFIM

1. DEFINIÇÃO:

Função afim é toda equação do tipo f(x) = ax + b, sendo “a” o **coeficiente angular** (ou taxa de variação) e “b” o **coeficiente linear** da função.

OBS_1: f(x) = ax + b também pode ser chamado de lei da função (ou lei de formação)

$$\boxed{\mathbf{f(x) = ax + b}}$$

A função $f(x) = ax + b$ também pode ser apresentada da forma $y = ax + b$, isso ocorre porque, em um plano cartesiano, $f(x) = y$. O significado dessa igualdade refere-se ao fato de que para todo valor de x que for substituído em f(x) (ou seja, definindo uma abscissa x), um valor numérico é obtido e atribuído o valor de ordenada (definindo assim uma ordenada y), dessa forma, forma-se um ponto: P(x, y).

2. GRÁFICO:

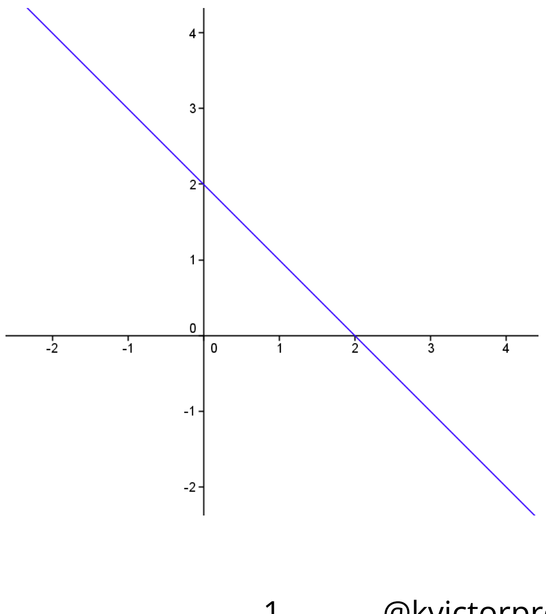
Como conceitos fundamentais, é importante saber o que é um ponto, uma reta e um plano:

1. **PONTO**: Um ponto determina uma posição no espaço, ele não possui tamanho, área ou volume.

2. **RETA**: Uma reta é uma junção de infinitos pontos em uma única direção, ele não possui largura nem profundidade mas possui comprimento infinito.

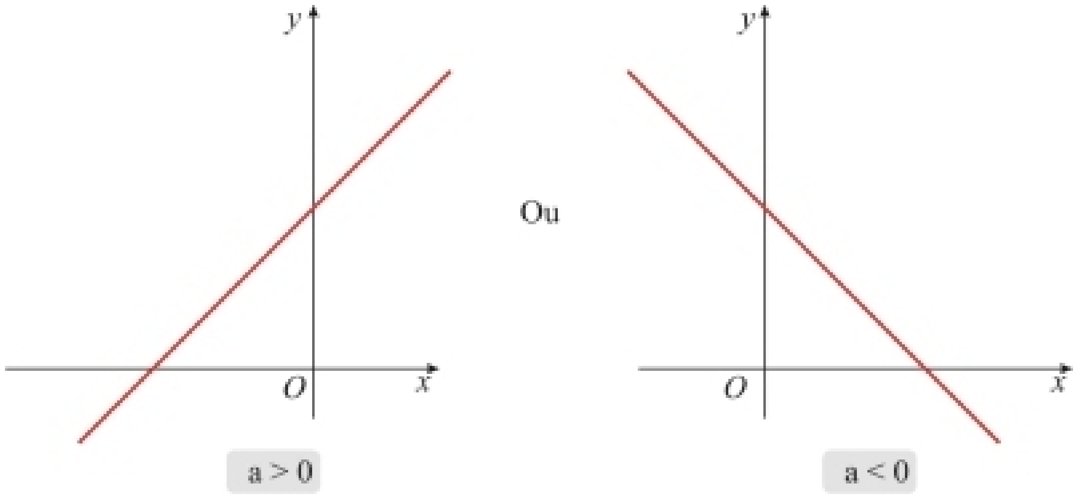
3. **PLANO**: Um plano é uma junção de infinitas retas em duas dimensões. Exemplo: a tela do seu computador pode ser considerado um plano finito (pois possui fim).

Um plano cartesiano (como o nome já sugere) é um plano onde é possível esboçar gráficos de funções. Dito isso, uma propriedade muito importante de função afim é tal que quando desenhada em um plano cartesiano, sempre será formada uma reta:



3. CARACTERÍSTICAS:

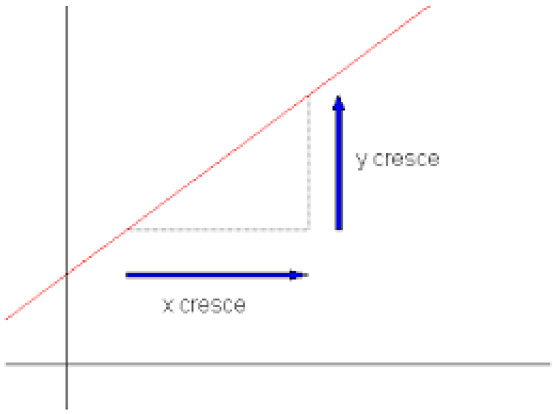
Uma função afim pode ser considerada crescente ou decrescente dependendo do sinal do seu coeficiente angular:



No gráfico à esquerda, o coeficiente angular é positivo ($a > 0$) e portanto, a função afim é crescente.

No gráfico à direita, o coeficiente angular é negativo ($a < 0$) e portanto, a função afim é decrescente.

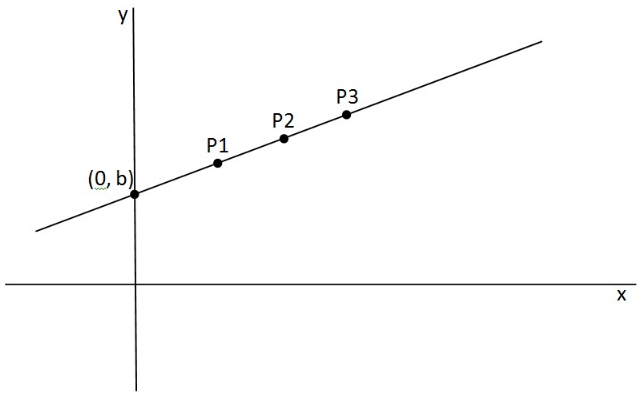
Ao lado está representando mais claramente a ideia de função crescente:



Repare que quando x aumenta, y também aumenta e isso caracteriza uma **função crescente**.

A mesma coisa vale para **função decrescente**, a medida que x aumenta, y diminui.

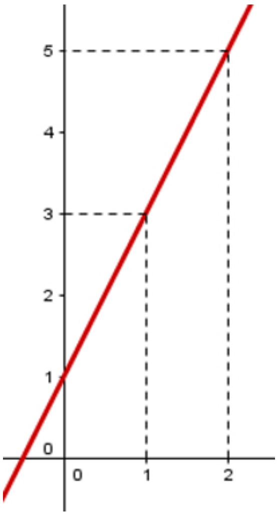
Como uma função afim é uma reta, então quaisquer dois pontos de uma mesma reta oferecem os mesmos coeficientes “a” e “b”. Exemplo:



Repare que os pontos P1, P2 e P3 estão todos na reta. Portanto ao calcular a taxa de variação (bem como ao calcular o coeficiente linear) pegando quaisquer dois desses três pontos, serão obtidos os mesmos valores de “a” e “b”.

4. PROCESSO DE OBTENÇÃO DA FUNÇÃO AFIM:

Pegue por exemplo, o seguinte gráfico de função afim:



Para obter as constantes “a” e “b” da função f(x) = ax + b, deve-se primeiro separar dois pontos do gráfico, por exemplo: $A(0,1)$ e $B(1,3)$

Para calcular o coeficiente angular (ou taxa de variação), utilizamos a seguinte expressão:

$$a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$$

Repare que a única diferença é que na primeira começamos com o ponto B: $y_b - y_a$, e na segunda começamos com o ponto A: $y_a - y_b$, é importante não esquecer que no denominador (em baixo) também deve-se começar com o ponto que começamos no numerador (em cima), então se começamos com o ponto B o denominador deve ser: $x_b - x_a$, e se começamos com o ponto A: $x_a - x_b$.

Calculando, temos:

$$a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \qquad a = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$$

$$a = \frac{3-1}{1-0} \qquad a = \frac{1-3}{0-1}$$

$$a = \frac{2}{1} \qquad a = \frac{-2}{-1}$$

$$a = 2 \qquad a = 2$$

Sendo assim, temos que o coeficiente angular é 2:

f(x) = 2x + b ou y = 2x + b

Para calcular o coeficiente b, podemos substituir qualquer um dos dois pontos que o valor será o mesmo, repare:

$$A(0,1)$$
$$y = 2x + b$$
$$1 = \cancel{2 \cdot 0} + b$$
$$1 = b$$

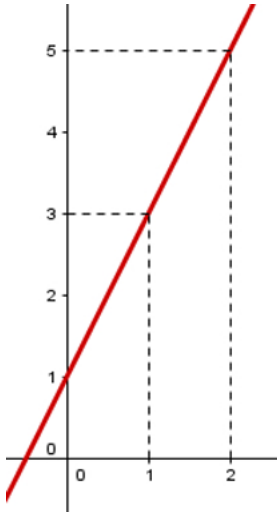
$$B(1,3)$$
$$y = 2x + b$$
$$3 = 2 \cdot 1 + b$$
$$3 - 2 = b$$
$$1 = b$$

Disso, temos que nossa lei de formação pode ser escrita como:

f(x) = 2x + 1 ou y = 2x + 1

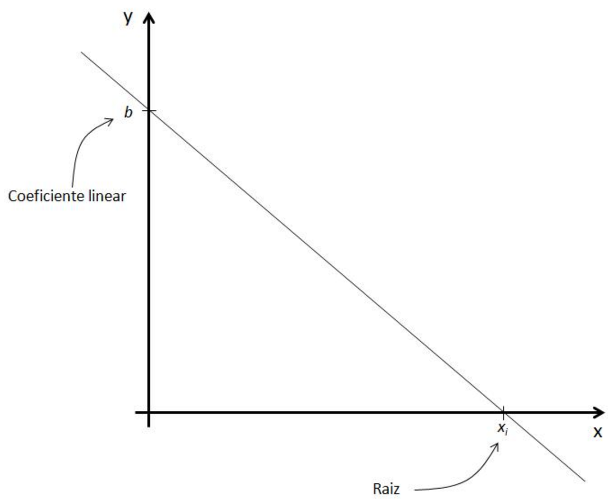
E com essa função podemos descobrir qualquer outro ponto da reta, por exemplo, o ponto C(2, 5):

$$f(x) = 2x + 1$$
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1$$
$$f(2) = 4 + 1$$
$$f(2) = 5 \quad \text{ou} \quad y = 5$$



O ponto em que o gráfico da função afim toca o eixo y (corta o eixo y) é o ponto em que x = 0, e o valor de y nesse ponto é o próprio **b (coeficiente linear) da função afim**.

O ponto em que o gráfico da função afim toca o eixo x (corta o eixo x) é o ponto em que y = 0, e o valor de x nesse ponto é chamado de **raiz da função afim**. Como mostrado no gráfico ao lado.



Com a lei de formação (ou função afim) em mãos, é possível descobrir qualquer ponto da reta e assim esboçar o seu gráfico em um plano cartesiano.

Não há necessidade em descobrir vários pontos da reta (a não ser que a questão peça por tal), ao se calcular dois pontos, conecta-se ambos e estende-se a reta indefinidamente, dessa forma engloba-se todos os pontos da função afim.

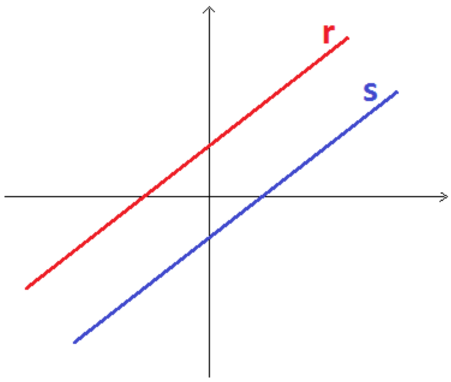
Geralmente são utilizados os pontos que tocam tanto o eixo x quanto o eixo y para esboçar o gráfico pois estes são mais fáceis de se calcular.

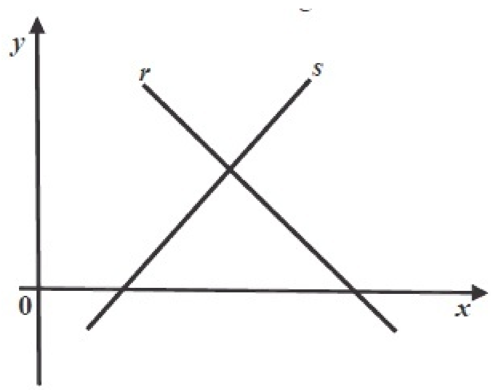
5. PONTO DE INTERSECÇÃO ENTRE DUAS FUNÇÕES AFINS:

Ao estudar sobre funções afins, as vezes nos deparamos com questões que questionam sobre as coordenadas do ponto de intersecção entre duas funções distintas. Sendo assim, deve-se analisar dois casos especiais:

(A) Retas com inclinações iguais;

(B) Retas com inclinações diferentes.

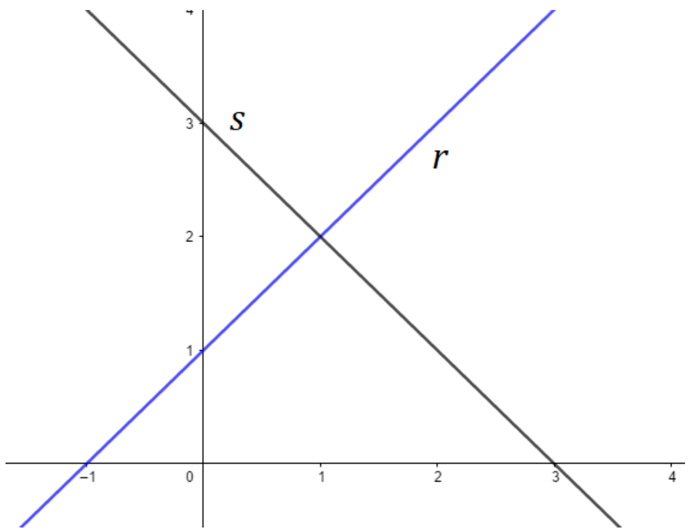




A) Repare que as retas da figura da esquerda possuem inclinações iguais, ou seja, ambas têm coeficientes angulares iguais ($a_r = a_s$) e são chamadas de **retas "paralelas"**. Sendo assim, elas nunca vão se cruzar e portanto não há ponto de intersecção nesse caso.

B) Na figura da direita, as retas são ditas **"concorrentes"** pois possuem coeficientes angulares diferentes ($a_r \neq a_s$). Sendo assim, elas se cruzam em um único ponto, como mostrado na figura.

Considere o seguinte gráfico de duas funções afins, e vamos calcular seu ponto de intersecção:



Após fazer os cálculos, temos que as funções afins das retas r e s são:

r: y = x + 1

s: y = -x + 3

Repare que o ponto P(x, y) de intersecção pertence tanto a reta r (y = x + 1) quanto a reta s (y = -x + 3), e portanto, suas coordenadas resolvem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Daí temos:

$$x + 1 = -x + 3$$

$$x + x = 3 - 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Portanto, a coordenada x do nosso ponto é x = 1. Para descobrir y, deve-se substituir esse ponto em qualquer uma das duas equações iniciais:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} y = 1 + 1 \\ y = -1 + 3 \end{matrix} \therefore \begin{matrix} y = 2 \\ y = 2 \end{matrix}$$

Disso, temos que o nosso ponto de intersecção é: P(1, 2)

Para retas paralelas, não é possível calcular ponto de intersecção pois elas nunca se interceptam, dessa forma, ao tentar calcular, chega-se num absurdo.

OBS_2: Quando as retas são paralelas e possuem mesmo coeficiente linear, chamamos de retas coincidentes (ou iguais).

QUESTÕES

1. Calcule o coeficiente angular das retas dos seguintes pares de pontos:

A) (1, 2) e (3, 4)

B) (0, 1) e (2, 3)

C) (5, 2) e (4, 1)

D) (0, 0) e (5, 1)

E) (0, 0) e (6, 2)

F) (1, 4) e (2, 8)

G) (4, 1) e (3, 0)

H) (7, 5) e (1, -1)

I) (-1, -4) e (-2, -8)

J) (0, 1) e (1, 2)

2. Dada a lei de formação: $f(x) = 2x + 3$, calcule:

A) $f(2)$

B) $f(3)$

C) $y = 1$

D) A raiz da função. ($y = 0$)

E) $f(0)$

3. Calcule o ponto de intersecção das funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 3x + 1$.

4. Diga se as retas $f(x) = x + 3$ e $g(x) = -x + 2$ são paralelas. Justifique.

GABARITO

1.
A) 1

B) 1

C) -1

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{1}{3}$

F) 4

G) 1

H) 1

I) 4

J) 1

2.

A) 7

B) 9

C) -1

D) $\frac{-3}{2}$

E) 3

3. P(2, 7)

4. Não são paralelas pois seus coeficientes angulares são diferentes: f(x) tem coeficiente angular 1 e g(x) tem coeficiente angular -1.