

基于罚函数序列凸规划的多无人机轨迹规划

王祝^{1,2}, 刘莉^{1,2,*}, 龙腾^{1,2}, 温永禄^{1,2}

1. 飞行器动力学与控制教育部重点实验室, 北京 100081

2. 北京理工大学 宇航学院, 北京 100081

摘要: 多无人机(UAVs)轨迹规划是具有非线性运动约束和非凸路径约束的最优控制问题。引入序列凸规划思想,将非凸最优控制问题近似为一系列凸优化子问题,并利用成熟的凸优化算法进行求解,以更好地权衡最优性和时效性。首先,建立了多无人机协同轨迹规划的非凸最优控制模型。然后,利用离散化和凸近似方法将其转换为凸优化问题,包括对无人机运动模型的线性化,以及对威胁规避约束和无人机碰撞约束的凸化。同时,提出了一种离散点间的威胁规避方法,保证无人机在离散轨迹点间的飞行安全。在凸优化模型的基础上,给出了基于罚函数序列凸规划求解多无人机轨迹规划的具体框架。最后,通过数值仿真验证了方法的有效性,结果表明该方法在多机轨迹规划结果的最优性和时效性都要优于伪谱法,而且优势随编队数量的增加而增大。

关键词: 无人机; 轨迹规划; 碰撞规避; 最优控制; 凸规划

中图分类号: V279 文献标识码: A 文章编号: 1000-6893(2016)10-3149-10

多无人机协同能够提高任务完成效能和扩展任务执行能力^[1],多无人机轨迹规划是实现多机协同的关键技术,已成为当前研究的热点。目前,无人机(Unmanned Aerial Vehicle, UAV)轨迹规划研究从运动方程的建模形式上可分为两类,本文研究属于第2类。第1类是基于转弯角、航段长度建立代数运动方程,相应的规划方法主要有图搜索、树搜索、势场法和数学优化方法^[2];第2类是基于加速度或过载等控制量建立微分运动方程,将轨迹规划建模为最优控制问题,求解方法主要包括伪谱法^[3-4]、混合整数规划^[5-6]以及现代智能算法^[7-8],但上述方法应用于多机规划时,由于问题规模增大,规划时间显著增长,规划效率难以满足应用需求^[5]。

随着凸优化方法的完善和计算机技术的发

展,大规模凸优化问题已能够在有限时间内获得最优解^[9],因此凸优化方法近年来得到广泛应用。序列凸规划^[10](Sequential Convex Programming, SCP)方法通过对非凸问题进行序列凸近似,能够快速得到非凸优化问题的近似最优解,已开始应用于飞行器轨迹规划领域。飞行器轨迹规划本质上是非凸最优控制问题,通过参数化方法转化为非凸优化问题后,则可以应用SCP方法实现求解。Liu和Lu^[11-14]近年来针对轨迹规划的凸优化建模与方法开展了深入研究。文献^[11]给出了基于凸优化求解一类非凸最优控制的方法,并将其应用到交会对接、轨道转移和运载器上升段问题中;文献^[12]基于圆锥优化实现了航天器交汇对接任务的轨迹规划;文献^[13]基于二阶锥规划,并结合序列线性化和松弛技术,完

收稿日期: 2015-11-11; 退修日期: 2016-01-22; 录用日期: 2016-03-04; 网络出版时间: 2016-03-08 13:05

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20160308.1305.004.html

基金项目: 国家自然科学基金(11372036, 51105040); 航空科学基金(2015ZA72004)

* 通讯作者. Tel.: 010-68914534 E-mail: liuli@bit.edu.cn

引用格式: 王祝, 刘莉, 龙腾, 等. 基于罚函数序列凸规划的多无人机轨迹规划[J]. 航空学报, 2016, 37(10): 3149-3158. WANG Z, LIU L, LONG T, et al. Trajectory planning for multi-UAVs using penalty sequential convex programming[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2016, 37(10): 3149-3158.

成了飞行器再入轨迹优化;在此基础上,文献[14]结合低通滤波器和线性搜索,实现了最大化侧向航程的再入轨迹规划。Morgan 和 Chung^[15]利用分散式 SCP 和模型预测控制实现了航天器集群的编队重构轨迹优化。在无人机轨迹规划方面, Augugliaro 等^[16]首次将 SCP 方法用于生成四旋翼无人机的避障轨迹,数值仿真和飞行试验表明 SCP 方法能够在很短时间内完成轨迹规划。在此基础上,Chen 等^[17]针对非凸空间约束下,SCP 方法会陷入不可行子问题而导致求解不收敛问题,提出了约束递增 SCP 方法,提高了非凸空间内 SCP 轨迹规划的可行概率。然而,文献[16-17]主要针对四旋翼无人机的轨迹规划,考虑的是简单线性离散运动学,难以求解非线性的无人机运动模型。同时,上述文献基于凸优化进行轨迹规划时,仅考虑了在轨迹离散点处的威胁规避约束,无法保证离散点区间内的飞行安全。

对此,本文考虑具有非线性运动方程的无人机(例如固定翼无人机)轨迹规划问题,建立多无人机轨迹规划的非凸最优控制模型。在此基础上,利用凸化和离散化方法,将其转换为关于基准轨迹的凸优化模型。同时,通过在凸优化模型中增加约束项,保证了离散点间轨迹的飞行安全。另外,采用罚函数 SCP 方法对凸优化模型进行迭代求解,可避免出现不可行子问题而导致 SCP 迭代不收敛。最后,通过仿真试验,对本文提出的无人机协同轨迹规划方法进行了验证。

1 多无人机轨迹规划建模

本节建立多无人机协同轨迹规划问题的最优控制模型,包括状态方程、控制量、性能指标和约束条件。

1.1 无人机运动方程

多无人机最优控制的状态方程包括各无人机的运动方程。无人机定高等速飞行的运动方程^[18]为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = V_i \cdot \cos \phi_i \\ \dot{y}_i = V_i \cdot \sin \phi_i \\ \dot{\phi}_i = u_i / V_i \end{cases} \quad (1)$$

式中: $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ 为无人机在编队中的序号, N 为编队中无人机的数量; x_i 和 y_i 为位置; ϕ_i 为

航向角; V_i 为无人机飞行速度; u_i 为法向加速度。为了便于描述,下文中用向量 p 代表位置 $[x_i \ y_i]^T$ 二元组。

1.2 控制量与性能指标

选取各无人机的法向加速度 u_i 作为控制量,设 $u_{i,\max}$ 为无人机 i 的可用最大加速度,则容许控制约束为

$$|u_i| \leq u_{i,\max} \quad (2)$$

以最小化燃油为性能指标,可等价表示为

$$\min \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_f} |u_i(t)| dt \quad (3)$$

式中: t_0 和 t_f 分别为轨迹的初始时间和终端时间,本文中终端时间为已知的固定值。

1.3 约束条件

除了式(2)容许控制约束外,轨迹规划还需考虑初始条件、终端条件和路径约束。路径约束,包括无人机飞行轨迹对已知威胁的规避和无人机之间的碰撞规避。

无人机轨迹规划的初始位置 $[x_{0,i} \ y_{0,i}]$ 与速度方向 $\phi_{0,i}$ 和终端位置 $[x_{f,i} \ y_{f,i}]$ 与方向 $\phi_{f,i}$ 均固定,对应的初始与终端状态约束为

$$x_i(t_0) = x_{0,i}, y_i(t_0) = y_{0,i}, \phi_i(t_0) = \phi_{0,i} \quad (4)$$

$$x_i(t_f) = x_{f,i}, y_i(t_f) = y_{f,i}, \phi_i(t_f) = \phi_{f,i} \quad (5)$$

假设环境中存在 M 个威胁(文中考虑圆形静态威胁),为保证无人机编队的飞行安全,要求每个无人机在任意时刻都位于威胁区域外部,即 $\forall m \in \{1, 2, \dots, M\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 有

$$\|p_i(t) - p_m\|_2 \geq r_m, \forall t \in [t_0, t_f] \quad (6)$$

式中: $p_m = [x_m \ y_m]^T$ 为第 m 个威胁的位置; r_m 为对应的威胁半径。

无人机间避碰约束则要求两架无人机间的距离时刻大于安全距离 R , 即 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i < j$, 有

$$\|p_i(t) - p_j(t)\|_2 \geq R, \forall t \in [t_0, t_f] \quad (7)$$

1.4 最优控制模型

综上,建立多无人机轨迹规划对应的固定终端最优控制问题(P1)模型为

$$P1: \min \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_f} |u_i(t)| dt$$

s. t. 式(1) ~ 式(7) (8)

式中:约束包括 $3N$ 个运动方程微分等式约束, $3N$ 个初始状态代数等式约束, $3N$ 个末端状态代数等式约束, $M \cdot N + N(N-1)$ 个路径不等式约束, 以及 N 个控制不等式约束。

2 多机轨迹规划模型凸化与离散化

问题模型 P1 包括非线性状态方程、非凸路径约束, 是一个非凸最优控制问题。而凸优化要求目标函数和不等式约束函数均为凸函数, 等式约束函数是仿射函数。因此, 为了利用凸优化实现求解, 本节建立问题 P1 的凸化近似模型, 同时通过离散化将最优控制转变为参数优化问题。对比上述模型与凸优化需求, 模型凸化需对运动方程进行线性化, 以及对威胁规避和无人机间避碰约束进行凸化, 而目标函数和其他约束已满足凸优化框架的要求。

2.1 无人机运动方程线性化与离散化

记无人机 i 的状态量 $\mathbf{X}_i = [x_i \ y_i \ \phi_i]^T$, 则系统运动方程式(1)可以等价地以矩阵形式表述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_i = f(\mathbf{X}_i) + \mathbf{B}_i u_i \\ f(\mathbf{X}_i) = \begin{bmatrix} V_i \cos \phi_i \\ V_i \sin \phi_i \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/V_i \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可见, 右端项关于控制量呈线性, 而关于状态量呈非线性。依据基准状态轨迹 $\bar{\mathbf{X}}_i$, 对右端项关于状态量进行线性化, 可得

$$\dot{\mathbf{X}}_i = f(\bar{\mathbf{X}}_i) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\bar{\mathbf{X}}_i} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_i) + \mathbf{B}_i u_i = \mathbf{A}_i(\bar{\mathbf{X}}_i) \cdot \mathbf{X}_i + \mathbf{B}_i u_i + \mathbf{c}_i(\bar{\mathbf{X}}_i) \quad (10)$$

式中:

$$\mathbf{A}_i(\bar{\mathbf{X}}_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -V_i \sin \bar{\phi}_i \\ 0 & 0 & V_i \cos \bar{\phi}_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{c}_i(\bar{\mathbf{X}}_i) = f(\bar{\mathbf{X}}_i) - \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\bar{\mathbf{X}}_i} \cdot \bar{\mathbf{X}}_i = \begin{bmatrix} V_i \cos \bar{\phi}_i + V_i \sin \bar{\phi}_i \cdot \bar{\phi}_i \\ V_i \sin \bar{\phi}_i - V_i \cos \bar{\phi}_i \cdot \bar{\phi}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中: \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{c} 为依赖于基准轨迹, 而不依赖于当

前轨迹的状态量和控制量, 在计算时可认为是常数, 从而实现了运动方程的线性化。序列凸规划迭代求解过程中, 基准轨迹选取为前一次迭代得到的轨迹。

在线性化运动方程的基础上, 对运动方程进行离散化。离散按等采样周期进行, 控制量认为只在采样时刻发生变化, 在相邻两采样时刻之间, 通过零阶保持器保持不变, 则得到离散时间系统运动方程为

$$\mathbf{X}_i(k+1) = \mathbf{G}_i(k) \mathbf{X}_i(k) + \mathbf{H}_i(k) \cdot u_i(k) + \mathbf{C}_i(k) \quad (13)$$

式中: $k=0, 1, \dots, K$ 为离散时刻; K 为离散时刻数量, 且 $K \cdot \Delta t = t_f - t_0$, Δt 为离散步长; 系数 \mathbf{G}_i 、 \mathbf{H}_i 和 \mathbf{C}_i 的表达式分别为

$$\begin{cases} \mathbf{G}_i(k) = e^{\mathbf{A}_i(k) \Delta t} \\ \mathbf{H}_i(k) = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_i(k) \Delta t} dt \cdot \mathbf{B}_i(k) \\ \mathbf{C}_i(k) = \Delta t \cdot \mathbf{c}_i(k) \end{cases} \quad (14)$$

式中: \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{c} 分别由式(11)、式(9)、式(12)根据基准轨迹相应时刻状态值确定, 从而不同时刻的 \mathbf{G}_i 、 \mathbf{H}_i 、 \mathbf{C}_i 可以根据式(14)计算得到。

综上, 通过对无人机运动方程的线性化和离散化, 选定基准状态轨迹后, 基于已知的初始状态, 利用式(13)以及递归思想, 可将后续离散时刻的无人机状态用控制量序列的仿射函数表示为

$$\mathbf{X}_i(k) = \mathbf{P}_i(k) \cdot \mathbf{X}_i(0) + \mathbf{Q}_i(k) \cdot [u_i(0) \ u_i(1) \ \dots \ u_i(K-1)]^T + \mathbf{R}_i(k) \quad k=1, 2, \dots, K \quad (15)$$

式中:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_i(k) = \prod_{l=k-1}^0 \mathbf{G}_i(l) \\ \mathbf{Q}_i(k) = \left(\prod_{l=k-1}^1 \mathbf{G}_i(l) \mathbf{H}_i(0), \dots, \prod_{l=k-1}^n \mathbf{G}_i(l) \mathbf{H}_i(n-1), \dots, \mathbf{G}_i(k-1) \cdot \mathbf{H}_i(k-2), \mathbf{H}_i(k-1), 0, 0, \dots, 0 \right) \\ \mathbf{R}_i(k) = \sum_{n=1}^k \left(\left(\prod_{l=k-1}^n \mathbf{G}_i(l) \right) \cdot \mathbf{C}_i(n-1) \right) \end{cases} \quad (16)$$

2.2 威胁规避与无人机间避碰约束凸化

威胁规避约束和无人机间避碰约束函数都是凹函数, 参考文献[15-17]的凸近似方法, 将其转

化为仿射函数。尽管该方法实现约束凸化后,减小了问题可行域,但结合 SCP 的序列迭代能够很好地缓解约束处理的保守性^[15]。

2.2.1 圆形威胁规避约束凸化

轨迹离散化后,威胁规避约束函数可以表示为, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall m \in \{1, 2, \dots, M\}$,

$$\|p_i(k) - p_m\|_2 \geq r_m \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (17)$$

在基准轨迹对应的离散点 $\bar{p}_i(k)$ 处,将式(17)线性化,可将威胁规避约束转变为下述关于无人机状态量的仿射函数。

$$\frac{(\bar{p}_i(k) - p_m)^T}{\|\bar{p}_i(k) - p_m\|} \cdot (p_i(k) - \bar{p}_i(k)) \geq r_m - \|\bar{p}_i(k) - p_m\| \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (18)$$

同时根据式(15),状态量可以用控制量的仿射函数表征,因此威胁规避约束可表示为控制量的仿射函数,即实现了威胁约束条件的凸化。

上述圆形威胁规避约束的凸化可以从几何上直观理解。如图 1(a)所示,威胁规避约束的真实可行域为图中圆形威胁外的所有区域,为一个非凸集,而凸化后的可行域为图中右上方区域,该区域为一个半平面(凸集),其边界与威胁圆相切且和威胁中心与基准点连线垂直。规避多个威胁的情况如图 1(b)所示,凸化后的可行域为两个半平面的交集,仍然是一个凸集。

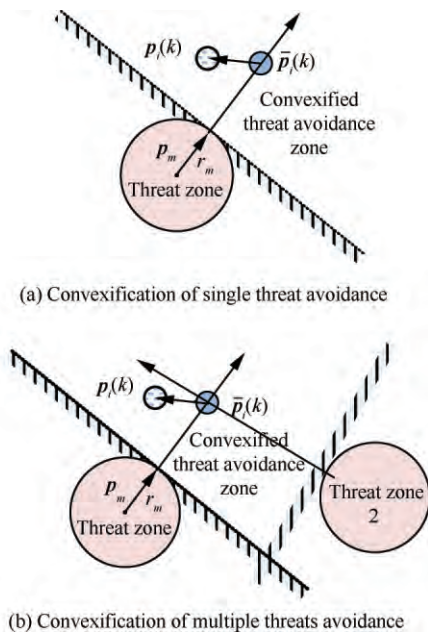


图 1 威胁规避约束凸化示意图^[15]

Fig. 1 Convexification of threat avoidance constraint^[15]

2.2.2 无人机间避碰约束凸化

基于离散轨迹点描述的无人机间避碰约束函数可表示为 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i < j$, 有

$$\|p_i(k) - p_j(k)\|_2 \geq R \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (19)$$

将式(19)在无人机 i 和 j 的两条基准轨迹对应离散点处进行线性化,可得关于两无人机状态量的仿射函数,从而实现无人机间避碰约束凸化。

$$(\bar{p}_i(k) - \bar{p}_j(k))^T \cdot (p_i(k) - p_j(k)) \geq R \cdot \|\bar{p}_i(k) - \bar{p}_j(k)\| \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (20)$$

几何上,无人机间避碰约束凸化示意图如图 2 所示。准确的避碰约束只需两无人机间距离不小于安全距离,而凸化后的约束变为两无人机不能同时位于宽度为 R 的带状区域,该区域与两无人机离散参考点连线垂直,而且区域位置并不固定,可以沿参考点连线方向移动。

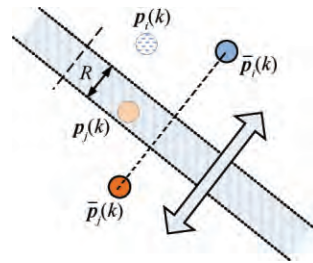


图 2 无人机间避碰约束凸化示意图^[17]

Fig. 2 Convexification of inter-UAVs collision avoidance^[17]

2.3 多机轨迹规划的凸优化模型

在运动方程、威胁规避和避碰约束凸化与离散化的基础上,将控制量及其约束和性能指标离散化。控制量离散后的允许控制约束可表示为

$$|u_i(k)| \leq u_{i,\max} \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (21)$$

将性能指标离散化,并结合前述凸化模型,可得到如下基于基准轨迹的多机轨迹规划凸优化问题(P2),其中优化变量为无人机编队的所有时刻控制量序列的集合 $U, U = [u_1(k) \quad u_2(k) \quad \dots \quad u_N(k)]^T, k = 1, 2, \dots, K$ 。

$$\text{P2: } \min \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^K |u_i(k)| \cdot \Delta t$$

$$\text{s. t. } A_{\text{eq}} \cdot U = b_{\text{eq}}$$

$$A_{\text{in}} \cdot U \leq b_{\text{in}} \quad (22)$$

式中:等式约束 $A_{eq} \cdot U = b_{eq}$ 仅包括等式(5);而不等式约束 $A_{in} \cdot U = b_{in}$ 包括不等式(18)、式(20)和式(21)。需要注意的是,式(4)和式(15)的作用是将状态量用控制量的仿射函数表征,通过将其代入其他约束条件表达式中可显式满足。

3 离散区间内的威胁规避

基于离散化方法将轨迹参数化后,通过在离散点处增加威胁规避约束不等式,能够保证在离散轨迹点处的安全,但是离散点之间的轨迹可能穿越威胁。

针对离散点间轨迹的威胁规避问题研究较少。其中,Maia 和 Galvao^[19]在混合整数规划求解障碍规避轨迹问题的框架下,通过限制二进制变量在离散点的变化方式,实现了离散点间轨迹的障碍规避。但该方法在原问题中新增了大量二进制变量,导致问题规模增大,求解效率降低。对此,Richards 和 Turnbull^[20]提出了一种新的约束添加方法,即限制相邻离散点间的障碍满足模式,以确保离散点之间的轨迹不会与障碍发生碰撞。上述方法都是在混合整数优化的框架下,通过增加二进制变量和对二进制变量增加约束的方式实现离散点间的障碍规避,并不能在序列凸优化框架中应用。本文针对 SCP 轨迹规划框架,引入约束增加思想,给出了一种保守而有效的离散点间轨迹的威胁规避方法。

图3描绘了本文的离散点间轨迹威胁规避方法的几何意义。由前文可知,根据威胁圆和一个基准轨迹离散时刻点 $\bar{p}_i(k)$ 可确定一个与威胁圆内部无交集的半平面,此半平面即为离散时刻点 $p_i(k)$ 的可行域。相应地,对于 $p_i(k-1)$ 也存在这样一个半平面可行域。如果将 $p_i(k)$ 的可行域约束为上述两个半平面的交集(即图中右侧可行域),则 $p_i(k)$ 在满足自身半平面可行域的前提下,还与 $p_i(k-1)$ 在同一个与威胁圆内部不相交的半平面内。由于半平面是一个凸集,而根据凸集的定义,即凸集内的任意两个点间的线段仍在该凸集中,可以得到,离散点 $p_i(k-1)$ 到 $p_i(k)$ 的线段位于一个与威胁圆内部不相交的半平面中,从而保证了离散点间的轨迹不会穿越威胁。

根据上述思想,离散区间内威胁规避约束可表示为: $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall m \in \{1, 2, \dots,$

$M\}$, 有

$$\frac{(\bar{p}_i(k-1) - p_m)^T}{\|\bar{p}_i(k-1) - p_m\|} \cdot (p_i(k) - \bar{p}_i(k-1)) \geq r_m - \|\bar{p}_i(k-1) - p_m\| \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (23)$$

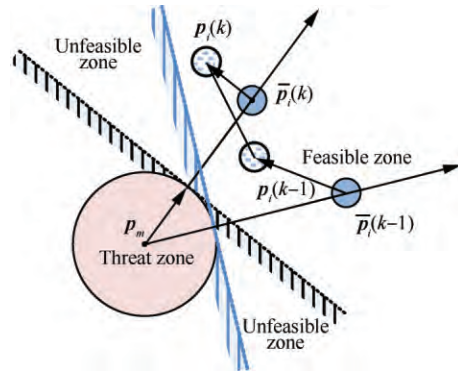


图3 离散点间威胁规避约束示意图

Fig. 3 Inter-sample threat avoidance constraint

上述离散区间内威胁规避约束为仿射的不等式约束,通过在凸优化问题 P2 中增加该约束,即可实现离散点间轨迹对威胁的规避。

4 基于罚函数的序列凸规划方法

基于上述建立的多机轨迹规划凸优化模型,选取一组初始轨迹作为基准,即可利用凸优化方法实现求解。然而,仅一次优化的方法对基准轨迹非常敏感,初值选取不当则难以得到可行解,而且不能保证状态方程线性化精度。对此,利用序列凸规划进行迭代求解可以避免上述问题。

4.1 序列凸规划

序列凸规划是一种利用凸优化求解非凸优化问题的方法,即通过迭代求解一系列非凸优化的凸近似子问题,得到原问题的解。其中,非凸问题的凸近似需要基于基准解实现,第一次迭代的基准解为猜测的初值,后续迭代中的基准解 \bar{X}_i^q 为前一次迭代的求解结果,即

$$\bar{X}_i^q = \begin{cases} X_{0i} & q = 1 \\ X_i^{q-1} & q > 1 \end{cases} \quad (24)$$

式中: q 描述了序列凸规划中第 q 次迭代的相关参数; X_i^q 为第 q 次序列迭代的求解结果。

另外,为保证运动方程线性化的有效性和序列迭代的收敛性,序列求解时增加如下的信赖域

约束: $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 有

$$\|X_i^{q+1}(k) - \bar{X}_i^{q+1}(k)\|_1 \leq L^q \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (25)$$

式中: L^q 为第 q 次迭代对应的信赖域半径。上述信赖域约束为状态量的仿射函数, 因此不影响子问题的凸性。为了确保迭代收敛, 可采用逐渐缩减的信赖域半径。

序列凸规划通过序列求解对应于不同基准解的凸近似模型, 相比单纯的凸优化方法, 降低了求解结果对初值的依赖性。序列凸规划应用于多无人机协同轨迹规划的具体步骤如下所示。

步骤 1 给定无人机编队的一组初始猜测轨迹 $X_{0i}, i = 1, 2, \dots, N$, 作为序列凸规划第一次迭代求解的基准轨迹。

步骤 2 根据基准轨迹 \bar{X}_i^q , 构建问题 P2 描述的凸优化模型。

步骤 3 在信赖域约束式(25)下, 利用凸优化算法求解所构造的凸优化子问题, 获得当前迭代的最优控制序列。

步骤 4 根据最优控制序列, 基于式(15), 求得对应的轨迹规划结果 X_i^q 。

步骤 5 判断是否满足收敛条件, 若满足, 则输出当前的轨迹结果; 若不满足, 根据式(24)更新基准轨迹, 并返回步骤 2。

上述 SCP 求解协同轨迹规划步骤中的收敛条件为: 当前迭代的轨迹结果满足所有约束(包括威胁规避、无人机间避碰约束、允许控制约束、信赖域约束), 并且连续两次迭代的轨迹结果在一定误差范围内相同。轨迹迭代误差的满足条件可表示为: $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 有

$$\|X_i^{q+1}(k) - X_i^q(k)\|_2 \leq e \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (26)$$

式中: e 为迭代收敛误差限, 文中取为 0.001。

4.2 罚函数 SCP

序列凸规划求解多无人机轨迹规划问题时, 由于约束条件众多, 而且构建子问题时进行了保守凸近似, 从而导致在 SCP 迭代中存在子问题不可行的情况, 特别对于有终端等式约束的问题。尽管通过序列迭代, SCP 具有从不可行解中恢复的能力, 但也存在迭代陷入不可行解空间而无法收敛的情况^[17]。另外, 对于不可行凸优化问题, 当前一些成熟的凸优化工具包(例如 CVX^[21-22])

不会返回寻优过程中的不可行解, 而是返回无效数据, 这将导致 SCP 无法继续迭代, 也无法从不可行解中恢复。

针对上述问题, 本文采用罚函数方法处理凸优化子问题中的约束。文中将终端等式约束、威胁规避约束和无人机间避碰约束以惩罚项形式加到性能指标中, 得到如下凸优化子问题(P3)。基于罚函数 SCP 求解时, 只需简单修改 4.1 节给出的算法步骤, 即在步骤 2 中不再构建问题 P2, 而是构建问题 P3, 进行序列求解。

$$\begin{aligned} \text{P3: } \min & \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^K |u_i(k)| \cdot \Delta t + \omega_{\text{eq}} \cdot \\ & \|A_{\text{eq}} \cdot U - b_{\text{eq}}\|_1 + \omega_{\text{in}} \cdot \\ & \|\max(0, A_{\text{in}}^p \cdot U - b_{\text{in}}^p)\|_1 \\ \text{s. t. } & \|X_i^{q+1}(k) - \bar{X}_i^{q+1}(k)\|_2 \leq L^q \\ & |u_i(k)| \leq u_{i, \max} \\ & k = 1, 2, \dots, K; \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (27)$$

式中: ω_{eq} 和 ω_{in} 分别为等式约束和不等式约束的罚系数。注意到等式约束仅在终端时刻存在, 而的不等式约束是过程约束, 存在于每个离散时刻, 因此罚系数取为 $\omega_{\text{eq}} = K \cdot \omega_{\text{in}}$ 。

5 仿真验证与结果分析

本节针对多无人机协同轨迹规划的一类典型问题, 即编队集结任务, 通过仿真试验验证本文方法的有效性, 并与伪谱法进行性能对比。

仿真实验在 Windows XP 中的 MATLAB 2013b 环境下进行, 硬件环境为 Intel Core i5-2310 2.90GHz 处理器和 3.24 GB 内存的 PC 机。凸优化子问题采用 CVX^[21-22] 和 SDPT3^[23] 求解, 伪谱法轨迹规划基于 GPOPS-II 工具包^[24]实现。

编队集结任务仿真想定为: 多架无人机分别从各自规划初始状态抵达集结区域, 并形成雁形编队。编队的初始状态和终端状态如表 1 所示。

以轨迹规划起点对应时间为 0 s, 无人机编队在 80 s 时到达指定集结位置, 无人机速度都为 $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 最大法向加速度 $u_{i, \max}$ 都为 $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。在集结过程中, 无人机编队需避免相互碰撞, 同时需规避环境中的已知威胁。其中, 无人机间安全距离设为 50 m, 环境中存在 8 个已知威胁, 威胁半径都为 100 m, 威胁坐标位置分别为 (500, 600)、(500, 200)、(500, -200)、(500, -600)、

(1 700,500)、(1 700,100)、(1 700,-300)和(1 700,-700) m。

表 1 无人机编队信息

Table 1 Information of UAV formation

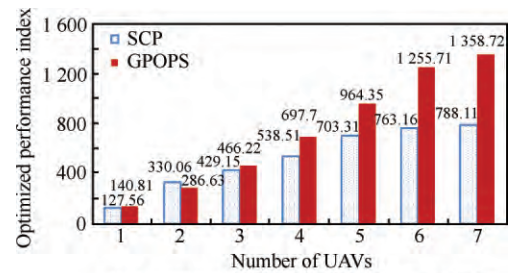
UAV ID	Initial state (x, y, ϕ)	Final state (x, y, ϕ)
UAV-1	(0 m, 1 200 m, 0)	(1 100 m, 400 m, $\pi/2$)
UAV-2	(0 m, 1 000 m, 0)	(1 000 m, 350 m, $\pi/2$)
UAV-3	(2 500 m, 1 000 m, π)	(1 200 m, 350 m, $\pi/2$)
UAV-4	(0 m, 200 m, 0)	(900 m, 300 m, $\pi/2$)
UAV-5	(2 500 m, 200 m, π)	(1 300 m, 300 m, $\pi/2$)
UAV-6	(0 m, -400 m, 0)	(800 m, 250 m, $\pi/2$)
UAV-7	(2 500 m, -400 m, π)	(1 400 m, 250 m, $\pi/2$)

针对上述无人机编队集结想定,分别求解无人机数量 N 为 1 到 7 的编队轨迹规划,以对比 SCP 和伪谱法在不同问题规模下的性能。例如,无人机编队数量为 3 时,表示编队由表中的 UAV-1、UAV-2 和 UAV-3 组成。

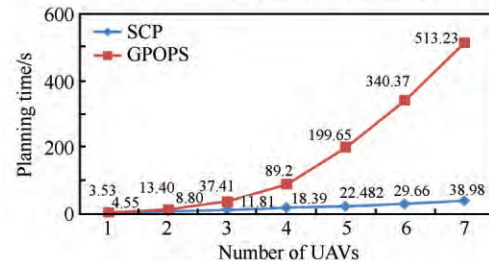
具体求解时,GPOPS 软件包中设置网格区间系数为 0.1,区间配点数为 4,其他参数为默认值。同时,SCP 求解框架中将离散时刻数 K 取为 40,使两方法具有相同离散点数量,便于算法性能对比。另外,不等式约束罚系数 ω_{in} 为 100,等式约束罚系数 $\omega_{eq} = K \cdot \omega_{in}$,即 4 000。

基于 SCP 和伪谱法分别求解不同编队数量情况下的无人机集结轨迹规划,得到的对比结果如图 4 所示。

由图 4(a)最优性能指标结果可见,单机轨迹规划时,SCP 方法和伪谱法所得结果的最优性相当;对于多机编队轨迹规划,SCP 获得的最优值优于伪谱法,而且无人机数量越多,SCP 的优势越



(a) Comparison of optimized performance index



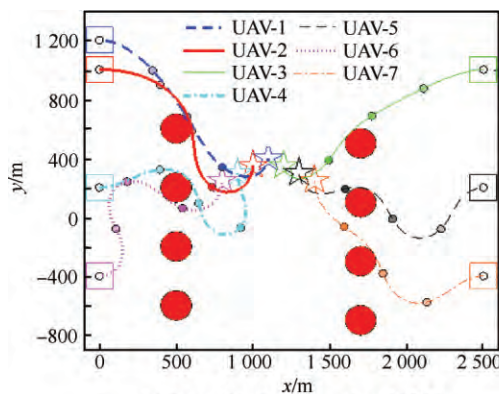
(b) Comparison of planning time

图 4 轨迹规划结果对比

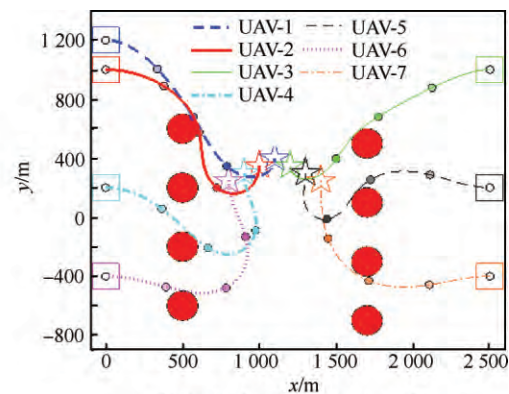
Fig. 4 Comparison of trajectory planning results

显著。另一方面,根据图 4(b)规划时间对比结果,SCP 规划多机编队轨迹的耗时都要低于伪谱法。特别是随着无人机编队数量的增加,SCP 求解耗时近似呈线性增长,而伪谱法则超线性增长,SCP 方法的效率优势愈发明显。这主要是由于伪谱法中采用非线性规划求解一般的参数优化问题,其耗时随着问题维度的增加而显著增加;序列凸规划中求解的则是一类特殊的参数优化问题,即凸优化问题,而成熟的凸优化方法已经可以在较短时间内完成大规模问题求解,尽管其求解时间也随维度增大而增加,但其增长程度要低于一般非凸优化。

图 5 给出了 SCP 和伪谱法对 7 架无人机编队



(a) Optimal trajectories using GPOPS



(b) Optimal trajectories using SCP

图 5 7 架无人机编队的规划轨迹

Fig. 5 Planned trajectories of formation with 7 UAVs

集结任务所规划的轨迹结果。图中, 方形表示无人机的规划起点, 五角星为各自的集结点, 轨迹外的圆为威胁, 飞行轨迹上的小圆分别为各无人机在 0、10、20 和 30 s 的位置。

由图 5 可见, 两种求解方案都能够得到规避威胁和避免碰撞的可行飞行轨迹。对比规划轨迹结果可见, 伪谱法和 SCP 方法得到的 UAV-4 到 UAV-7 轨迹虽然不同, 但两种方法得到的轨迹都是绕着威胁边界的局部最优轨迹。

综上, 仿真对比实验结果表明, 针对多无人机编队集结轨迹规划, SCP 方法和伪谱法都能获得安全可行的飞行轨迹, 同时 SCP 方法比伪谱法具有更好的最优性和效率, 而且 SCP 方法的优势随着编队数量的增加而增大。

6 结 论

1) 建立了多无人机协同轨迹规划的非凸最优控制模型, 其中考虑了威胁规避和无人机间避碰约束; 在此基础上, 基于运动方程线性化和约束凸化方法, 将问题转换为凸优化问题。

2) 给出了一种离散点间轨迹的威胁规避方法, 从理论上说明了该方法能够保证轨迹安全。

3) 给出罚函数 SCP 方法求解多机协同轨迹规划问题的框架, 并通过具体算例的数值仿真和对比验证了方法的有效性。

参 考 文 献

- [1] 沈林成, 牛轶峰, 朱华勇, 等. 多无人机自主协同控制理论与方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2013: 1-9.
SHEN L C, NIU Y F, ZHU H Y, et al. Theories and methods of autonomous cooperative control for multiple UAVs[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2013: 1-9 (in Chinese).
- [2] 丁明跃, 郑昌文, 周成平, 等. 无人飞行器航迹规划[M]. 北京: 电子工业出版社, 2009: 6-15.
DING M Y, ZHENG C W, ZHOU C P, et al. Route planning for unmanned aerial vehicles[M]. Beijing: Publishing House of Electronics industry, 2009: 6-15 (in Chinese).
- [3] 张煜, 张万鹏, 陈璟, 等. 基于 Gauss 伪谱法的 UCAV 对地攻击武器投放轨迹规划[J]. 航空学报, 2011, 32(7): 1240-1251.
ZHANG Y, ZHANG W P, CHEN J, et al. Air-to-ground weapon delivery trajectory planning for UCAVs using Gauss pseudospectral method[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(7): 1240-1251 (in Chinese).
- [4] 白瑞光, 孙鑫, 陈秋双, 等. 基于 Gauss 伪谱法的多 UAV 协同航迹规划[J]. 宇航学报, 2014, 35(9): 1022-1029.
BAI R G, SUN X, CHEN Q S, et al. Multiple UAV cooperative trajectory planning based on Gauss pseudospectral method[J]. Journal of Astronautics, 2014, 35(9): 1022-1029 (in Chinese).
- [5] RICHARDS A, HOW J P. Aircraft trajectory planning with collision avoidance using mixed integer linear programming[C]//Proceedings of the American Control Conference. Reston: AIAA, 2002: 1936-1941.
- [6] KUWATA Y, HOW J P. Cooperative distributed robust trajectory optimization using receding horizon MILP[J]. IEEE Transactions on System Technology, 2011, 19(2): 423-431.
- [7] 熊伟, 陈宗基, 周锐. 运用混合遗传算法的多机编队重构优化方法[J]. 航空学报, 2008, 29(S1): 209-214.
XIONG W, CHEN Z J, ZHOU R. Optimization of multiple flight vehicle formation reconfiguration using hybrid genetic algorithm[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2008, 29(S1): 209-214 (in Chinese).
- [8] DUAN H B, LIU S Q, WU J. Novel intelligent water drops optimization approach to single UCAV smooth trajectory planning[J]. Aerospace Science and Technology, 2009, 13(8): 442-449.
- [9] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex optimization [M]. New York: Cambridge University Press, 2004: 1-15.
- [10] BYRD R H, GILBERT J C, NOCEDAL J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming[J]. Mathematical Programming, 2000, 89(1): 149-185.
- [11] LIU X F, LU P. Solving nonconvex optimal control problems by convex optimization[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(3): 750-765.
- [12] LU P, LIU X F. Autonomous trajectory planning for rendezvous and proximity operations by conic optimization[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(2): 375-389.
- [13] LIU X F, SHEN Z J, LU P. Entry trajectory optimization by second-order cone programming[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(2): 227-241.
- [14] LIU X F, SHEN Z J, LU P. Solving the maximum-cross-range problem via successive second-order cone programming with a line search[J]. Aerospace Science and Technology, 2015, 47: 10-20.
- [15] MORGAN D, CHUNG S. Model predictive control of swarm of spacecraft using sequential convex programming[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(6): 1725-1740.

- [16] AUGUGLIARO F, SCHOELLIG A P, D'ANDREA R. Generation of collision-free for a quadcopter fleet: a sequential convex programming approach [C]//IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2012: 1917-1922.
- [17] CHEN Y F, CUTLER M, HOW J P. Decoupled multi-agent path planning via incremental sequential convex programming[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2015: 5954-5961.
- [18] KABAMBA P T, MEERKOV S M, ZEITZ F H. Optimal path planning for unmanned combat aerial vehicles to defeat radar tracking[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(2): 279-288.
- [19] MAIA M H, GALVAO R K H. On the use of mixed-integer linear programming for predictive control with avoidance constraints[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(7): 822-828.
- [20] RICHARDS A, TURNBULL O. Inter-sample avoidance in trajectory optimizers using mixed-integer linear programming[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(4): 521-526.
- [21] CVX Research Inc. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0[EB/OL]. (2011-06-17)[2015-10-09]. <http://cvxr.com/cvx>.
- [22] GRANT M AND BOYD S. Graph implementations for nonsmooth convex programs[M]// Blondel V, Boyd S, and Kimura H. Recent Advances in Learning and Control. Berlin: Springer, 2008: 95-110.
- [23] TUTUNCU R H, TOH K C, TODD M J. Solving semi-definite-quadratic-linear programs using SDPT3 [J]. Mathematical Programming, Series B, 2003, 95(2): 189-217.
- [24] PATTERSON M A, RAO A V. GPOPS-II: A matlab software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming [J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2014, 41(1): 1-37.

作者简介:

王祝 男, 博士研究生。主要研究方向: 无人机任务规划、无人机协同决策与控制。

Tel: 010-68913290

E-mail: wangzhubit@163.com

刘莉 女, 博士, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 飞行器总体设计、飞行器结构设计、多学科设计优化。

Tel: 010-68914534

E-mail: liuli@bit.edu.cn

Trajectory planning for multi-UAVs using penalty sequential convex programming

WANG Zhu^{1,2}, LIU Li^{1,2,*}, LONG Teng^{1,2}, WEN Yonglu^{1,2}

1. Key Laboratory of Dynamics and Control of Flight Vehicle, Ministry of Education, Beijing 100081, China

2. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract: Trajectory planning of multiple unmanned aerial vehicles (UAVs) is an optimal control problem which subjects to nonlinear motion and nonconvex path constraints. Based on the sequential convex programming approach, such nonconvex optimal control is approximated to be a series of convex optimization subproblems, which can be solved by the state-of-the-art convex optimization algorithm. A good balance between solution quality and computational tractability can then be achieved. Nonconvex optimal control model for multi-UAV trajectory planning is formulated first, and is then approximated to be a convex optimization by discretization and convexification methods. To convexify the nonconvex model, equations of motion of UAVs are linearized, and constraints of threat avoidance and inter-UAVs collision avoidance are convexified. Meanwhile, an inter-sample threat avoidance method is provided to guarantee UAVs' safety at intervals between discrete trajectory points. Based on convex optimization formulation, the detailed procedure of using sequential convex programming based on penalty function to solve multi-UAV trajectory planning is provided. Numerical simulations are conducted to show the effectiveness of the proposed method. The results show that the method can acquire the solution with better optimality and efficiency than the pseudospectral method, especially for larger scale UAV formation.

Key words: unmanned aerial vehicle; trajectory planning; collision avoidance; optimal control; convex programming

Received: 2015-11-11; Revised: 2016-01-22; Accepted: 2016-03-04; Published online: 2016-03-08 13:05

URL: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20160308.1305.004.html

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (11372036; 51105040); Aeronautical Science Foundation of China (2015ZA72004)

* Corresponding author. Tel.: 010-68914534 E-mail: liuli@bit.edu.cn