第 37 卷 第 3 期
2022 年 3 月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.37 No.3
Mar. 2022

基于新型距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策方法

方 冰[†], 韩 冰, 闻传花

(陆军指挥学院，南京 210045)

摘 要: 研究属性权重已知、专家权重未知条件下的概率犹豫模糊多属性群决策问题. 首先, 针对传统概率犹豫模糊距离测度的不足, 提出改进的新型距离测度, 并对其有效性和合理性进行数学证明; 其次, 在属性权重向量已知的前提下, 通过加权算术平均的方式实现单个专家视角下的概率犹豫模糊信息初次集结, 并基于分差最大化准则构建专家权重向量求解模型, 采用解析的方法给出最优解; 再次, 在专家权重向量求解的基础上, 基于TODIM方法实现群体专家视角下的概率犹豫模糊信息二次集结, 并实现基于综合感知价值的多个备选方案优劣排序; 最后, 以信息化战争条件下陆军部队作战方案模糊优选为例, 验证所提出交互式多属性群决策方法的可行性和有效性.

关键词: 多属性群决策；概率犹豫模糊集；距离测度；加权算术平均；分差最大化

中图分类号: C934　　**文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1118　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

引用格式: 方冰, 韩冰, 闻传花. 基于新型距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(3): 729-736.

Probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute group decision-making based on new distance measure

FANG Bing[†], *HAN Bing*, *WEN Chuan-hua*

(Army Command College of PLA，Nanjing 210045，China)

Abstract: The paper studies the probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute group decision-making (MAGDM) problem under the condition that the attribute weights are known and the expert weights are unknown. Firstly, to overcome the shortcomings of traditional distance measures of the probabilistic hesitant fuzzy elements (PHFEs), improved new distance measures of PHFEs are proposed, whose validity and rationality are mathematically proved. Secondly, under the premise that attribute weights are known, the first aggregation of the probabilistic hesitant fuzzy information, from the perspective of a single expert, is realized through weighted arithmetic averaging (WAA). Thirdly, based on the criteria of maximizing score deviation (MSD), a mathematical model of solving the expert weights is constructed and an analytical solution is further derived, Then, based on the TODIM method, a probabilistic hesitant fuzzy MAGDM method is developed to realize the second aggregation of the probabilistic hesitant fuzzy information, from the perspective of a group of experts. Finally, by taking the fuzzy optimization of army force's combat plans under the condition of information-based warfare as an example, the feasibility and effectiveness of the proposed interactive MAGDM method are verified.

Keywords: multi-attribute group decision-making; probabilistic hesitant fuzzy set; distance measure; weighted arithmetic averaging; maximizing score deviation

0 引 言

2009 年, Torra 等[1-3] 针对多属性决策 (multi-attribute decision-making, MADM) 问题中决策者常常犹豫不决、多个辅助专家互相不能说服、难以达成一致意见的情形, 提出了犹豫模糊集 (hesitant fuzzy set, HFS) 概念, 其基本描述工具是犹豫模糊元 (hesitant fuzzy element, HFE), 允许决策者或辅助专家可以在几个不同的评估值间犹豫徘徊, 从而增加了他们决策赋值的灵活性, 能够较为细腻地刻画其不确定性心理状态, 是模糊集理论[4] 的重要拓展, 在现实中有广泛的应用场景. 然而, 在大多数情况下, 由于辅助专家的个人倾向性以及专家数量等原因, 不同的隶属度可能具有不同的重要性, 但是, 犹豫模糊元却无法刻画决策者对不同隶属度的偏好信息, 从而容易导致对评估信息的不完整性描述.

为了更准确地描述决策者的不确定性心理

收稿日期: 2020-08-11；**录用日期:** 2021-01-19.
责任编委: 唐成生.
[†]通讯作者. E-mail: bingfang_ch@163.com.

状态, Xu等[5-8]提出了概率犹豫模糊集(probabilistic hesitant fuzzy set, PHFS)的概念,其基本描述工具是概率犹豫模糊元(probabilistic hesitant fuzzy element, PHFE)[9-10]. 与犹豫模糊元相比,概率犹豫模糊元在犹豫模糊元的基础上增加了每个隶属度的概率(权重)信息,因此包含了更多的不确定性信息,能够更加细腻地建模决策者的心理状态. 从这个意义上讲,概率犹豫模糊集是犹豫模糊集理论的重要推广. 得益于对概率信息的有效利用,概率犹豫模糊集不但能够刻画决策者对客观事物的不确定性认知,而且可以描述不同评价意见间的重要性差异,因此具有重要的理论价值和广泛的应用前景.

本文研究概率犹豫模糊环境下属性权重已知、专家权重未知条件下的多属性群决策问题(multi-attribute group decision-making, MAGDM)[5]. 该问题的顺利解决需要两次信息集成: 1) 在属性权重已知的条件下,从单个专家视角对多个属性的评估信息进行初次集成. 首次信息集结采用加权算术平均(weighted arithmetic averaging, WAA)的方式. 2) 在群体专家视角下对各专家的评估信息进行综合集成,但专家权重未知,需要构建合适的模型求取专家权重向量. 第2次信息集成从能够对各个备选方案作出更好区分的角度构建了基于分差最大化(maximizing score deviation, MSD)准则[5]的专家向量权重求解模型,并采用解析的方式推导出最优解. 本文分三步实现多个备选方案的优劣排序: 1) 针对传统概率犹豫模糊距离测度的不足,提出改进的新型距离测度,改进后的概率犹豫模糊距离测度能够有效满足距离测度的3个公理性条件; 2) 采用加权算术平均的方式实现单个专家视角下,属性权重已知条件下概率犹豫模糊信息初次集结; 3) 在专家权重向量求解的基础上,基于TODIM方法等[11-12]构建概率犹豫模糊多属性群决策方法,实现多个备选方案的优劣排序,并将其应用于陆军部队作战方案模糊优选,从而完成对其有效性的数值验证.

1 理论基础

1.1 概率犹豫模糊集

定义1[5] 给定任意非空集合X,定义在有限集合X上的一个概率犹豫模糊集H,可以表示为

$$H=\{\langle x,h(p)\rangle|x\in X\}. \tag{1}$$

其中: 集合$h(p)=\{\gamma^\lambda|p^\lambda,\lambda=1,2,\ldots,l\}$为描述概率犹豫模糊集$H$的基本工具,通常称为概率犹豫模糊元; 隶属度$\gamma^\lambda\in[0,1]$表示元素$x\in X$属于概率犹豫模糊集$H$的可能性; 实数$p^\lambda\in[0,1]$表示隶属度$\gamma^\lambda$出现的概率,且满足归一化条件$\sum\limits_{\lambda=1}^{l}p^\lambda=1$. 为方便计算,本文涉及到的概率犹豫模糊元$h(p)$,其元素一律按照隶属度值$\gamma^\lambda$降序排列,如果隶属度相同,则按照概率值$p^\lambda$降序排列.

例1 概率犹豫模糊元$h(p)=\{0.6|0.2,0.4|0.8\}$表达的含义是元素x属于概率犹豫模糊集H的隶属度可能是0.6,也可能是0.4; 且隶属度为0.6的概率是0.2,隶属度为0.4的概率是0.8. 特别地,当概率犹豫模糊元$h(p)$的各个可能的隶属度等概率出现时,$h(p)$便退化成一个普通的犹豫模糊元.

定义2[5] 给定任意概率犹豫模糊元$h(p)=\{\gamma^\lambda|p^\lambda,\lambda=1,2,\ldots,l\}$,其得分函数定义为

$$E(h)=\sum_{\lambda=1}^{l}\gamma^\lambda p^\lambda. \tag{2}$$

在得分函数定义的基础上,其离散函数可以定义为

$$D(h)=\sum_{\lambda=1}^{l}(\gamma^\lambda-E(h))^2p^\lambda. \tag{3}$$

基于得分函数和离散函数,任意两个概率犹豫模糊元$h_1(p_1)$和$h_2(p_2)$的大小可作如下比较:

1) 如果$E(h_1)>E(h_2)$,则$h_1(p_1)\succ h_2(p_2)$.

2) 如果$E(h_1)<E(h_2)$,则$h_1(p_1)\prec h_2(p_2)$.

3) 如果$E(h_1)=E(h_2)$,则:

若$D(h_1)>D(h_2)$,则$h_1(p_1)\prec h_2(p_2)$;

若$D(h_1)<D(h_2)$,则$h_1(p_1)\succ h_2(p_2)$;

若$D(h_1)=D(h_2)$,则$h_1(p_1)\sim h_2(p_2)$.

1.2 概率犹豫模糊基本运算规则

定义3[6] 给定任意概率犹豫模糊元$h(p)$和常数$\alpha>0$,其基本运算规则可以定义为

$$h^c(p)=\bigcup_{\gamma\in h}\{1-\gamma|p\}, \tag{4}$$

$$h(p)^\alpha=\bigcup_{\gamma\in h}\{\gamma^\alpha|p\}, \tag{5}$$

$$\alpha h(p)=\bigcup_{\gamma\in h}\{1-(1-\gamma)^\alpha|p\}, \tag{6}$$

其中$h^c(p)$为概率犹豫模糊元$h(p)$的补集.

定义4[6] 给定任意概率犹豫模糊元$h_1(p_1)$和$h_2(p_2)$,或简记为h_1和h_2,其基本运算规则为

$$h_1\oplus h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2|p_1p_2\}, \tag{7}$$

$$h_1\otimes h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\{\gamma_1\gamma_2|p_1p_2\}. \tag{8}$$

定义5[6] 假设$h_i(p_i)(i=1,2,\ldots,n)$为概率犹豫模糊元,或简记为$h_i(i=1,2,\ldots,n)$,则式(7)和(8)可进一步推广为

$$\mathop{\oplus}_{i=1}^{n}h_i=\bigcup_{\gamma_i\in h_i}\left\{1-\prod_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)|p_1\ldots p_n\right\}, \tag{9}$$

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} h_i = \bigcup_{\gamma_i \in h_i} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \gamma_i | p_1 \dots p_n \right\}. \tag{10}$$

定义6 假定概率犹豫模糊元$h_i(p_i)(i=1,2,\dots,n)$对应的权重是$w_i(i=1,2,\dots,n)$,且满足归一化条件$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$,则式(9)和(10)可分别推广为加权算术平均算子和加权几何平均算子

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\oplus}} w_i h_i = \bigcup_{\gamma_i \in h_i} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-\gamma_i)^{w_i} | p_1 \dots p_n \right\}, \tag{11}$$

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} h_i^{w_i} = \bigcup_{\gamma_i \in h_i} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \gamma_i^{w_i} | p_1 \dots p_n \right\}. \tag{12}$$

2 概率犹豫模糊距离测度

定义7 [6,8] 任意两个元素数目相等的概率犹豫模糊元$h_1(p_1)$和$h_2(p_2)$,或简记为h_1和h_2,其距离测度需要满足以下3个公理性条件:

1) 非负性: $d(h_1,h_2) \geqslant 0$;

2) 交换性: $d(h_1,h_2) = d_2(h_2,h_1)$;

3) 反身性: $d(h_1,h_2) = 0 \Leftrightarrow h_1 = h_2$.

显然,两个概率犹豫模糊元的距离测度是建立在其元素个数相等的基础上,但是,这一条件在大多数情况下都不能得到有效满足. 为使任意两个概率犹豫模糊元具有相等的元素个数,需要首先对其进行规范化处理.

2.1 概率犹豫模糊元规范化

通常有两种方法对概率犹豫模糊元进行规范化处理: 一种是将元素个数较多的概率犹豫模糊元截短处理,即降维的方法,但是这种处理方法会损失一部分信息,通常在概率犹豫元规模较大时使用; 另一种是对元素个数较少的概率犹豫模糊元进行扩充,根据某种风险规则重复添加隶属度最大或隶属度最小的元素,并使其概率为零,这也是大部分文献采用的方法. 本文采用风险厌恶的原则对元素个数较少的概率犹豫模糊元进行扩充处理的规范化方法,举例说明如下.

例2 概率犹豫模糊元$h_1(p) = \{0.4|1\}$, $h_2(p) = \{0.6|0.2, 0.4|0.8\}$, $h_3(p) = \{0.7|0.2, 0.5|0.4, 0.3|0.4\}$. 采用风险厌恶的法则对其进行规范化处理,3个概率犹豫模糊元分别可以扩充为

$$h_1(p) = \{0.4|1, 0.4|0, 0.4|0\},$$
$$h_2(p) = \{0.6|0.2, 0.4|0.8, 0.4|0\},$$
$$h_3(p) = \{0.7|0.2, 0.5|0.4, 0.3|0.4\}.$$

2.2 传统概率犹豫模糊距离测度

定义8 [8] 给定任意两个元素数目相等的概率犹豫模糊元 $h_1(p_1) = \{\gamma_1^\lambda | p_1^\lambda, \lambda = 1,2,\dots,l\}$和$h_2(p_2) = \{\gamma_2^\lambda | p_2^\lambda, \lambda = 1,2,\dots,l\}$,其传统的海明(Hamming)距离测度定义为

$$d_1(h_1,h_2) = \sum_{\lambda=1}^{l} |\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda|. \tag{13}$$

传统的欧几里得(Euclidean)距离测度定义为

$$d_2(h_1,h_2) = \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda)^2}. \tag{14}$$

这两个传统的概率犹豫模糊距离测度由犹豫模糊距离测度演绎而来. 虽然传统的概率犹豫模糊距离测度得到了广泛应用,但却有明显的不足,其不足之处说明如下.

例3 设有两个不同的概率犹豫模糊元$h_1(p) = \{0.8|0.7, 0.2|0.3\}$和$h_2(p) = \{0.7|0.8, 0.3|0.2\}$,根据定义8,海明距离测度为$d_1(h_1,h_2) = 0$,欧几里得距离测度为$d_2(h_1,h_2) = 0$.

注意到,$h_1(p)$和$h_2(p)$是两个不同的概率犹豫模糊元,这与定义7中的反身性条件相矛盾. 因此,有必要对定义8所给出的概率犹豫模糊距离测度进行改进.

2.3 新型概率犹豫模糊距离测度

定义9 给定任意两个元素数目相等的概率犹豫模糊元$h_1(p_1) = \{\gamma_1^\lambda | p_1^\lambda, \lambda = 1,2,\dots,l\}$和$h_2(p_2) = \{\gamma_2^\lambda | p_2^\lambda, \lambda = 1,2,\dots,l\}$,其改进的海明距离测度定义为

$$d_3(h_1,h_2) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{l} (|\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda| + |\gamma_1^\lambda - \gamma_2^\lambda| p_1^\lambda p_2^\lambda). \tag{15}$$

相应地,改进的欧几里得距离测度定义为

$$d_4(h_1,h_2) = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{l} [(\gamma_1^\lambda p_1^\lambda - \gamma_2^\lambda p_2^\lambda)^2 + (\gamma_1^\lambda - \gamma_2^\lambda)^2 p_1^\lambda p_2^\lambda]}. \tag{16}$$

显然,新型概率犹豫模糊距离测度是在传统概率犹豫模糊距离测度的基础上改进得到的,其有效性和合理性通过如下定理给出.

定理1 在定义9中,由式(15)确定的新型海明距离测度和由式(16)确定的新型欧几里得距离测度,满足定义7给出的概率犹豫模糊元距离测度的3个公理性条件.

证明 定义9中,由式(15)和(16)所确定的新型概率犹豫模糊距离测度显然满足定义7给出的非负性和交换性要求. 重点对其反身性证明如下.

1) 充分性. 如果$d_3(h_1,h_2) = 0$或$d_4(h_1,h_2) = 0$,则由式(15)或(16)均可以推导出如下等式关系:

$$\begin{cases}\gamma_1^\lambda p_1^\lambda-\gamma_2^\lambda p_2^\lambda=0,\ \lambda=1,2,\ldots,l;\\ \gamma_1^\lambda-\gamma_2^\lambda=0,\ \lambda=1,2,\ldots,l.\end{cases}\tag{17}$$

由式(17)可以进一步推导得到

$$\begin{cases}p_1^\lambda=p_2^\lambda,\ \lambda=1,2,\ldots,l;\\ \gamma_1^\lambda=\gamma_2^\lambda,\ \lambda=1,2,\ldots,l.\end{cases}\tag{18}$$

进而有$h_1=h_2$,即如下因果关系成立:

$$\begin{cases}d_3(h_1,h_2)=0\Rightarrow h_1=h_2,\\ d_4(h_1,h_2)=0\Rightarrow h_1=h_2.\end{cases}\tag{19}$$

2) 必要性. 将上述论证过程反过来,可以得到如下因果关系:

$$\begin{cases}h_1=h_2\Rightarrow d_3(h_1,h_2)=0,\\ h_1=h_2\Rightarrow d_4(h_1,h_2)=0.\end{cases}\tag{20}$$

因此,由定义9给出的新型概率犹豫模糊距离测度满足概率犹豫模糊元距离测度的3个公理性条件. □

为直观展示新型距离测度和传统距离测度的不同,列出4种距离测度计算如表1所示.

表1 几种距离测度计算结果比较

例子	d_1	d_2	d_3	d_4
$d(h_1,h_2)$	0	0	0.0310	0.0557
$d(h_1,h_3)$	0.1	0.0825	0.0500	0.0583
$d(h_1,h_4)$	0.2	0.1649	0.1000	0.1166

在表1中:设$h_1(p)=\{0.8|0.7,0.2|0.3\}$,$h_2(p)=\{0.7|0.8,0.3|0.2\}$,$h_3(p)=\{0.8|0.6,0.2|0.4\}$,$h_4(p)=\{0.8|0.5,0.2|0.5\}$. 由表1的计算结果可以看出,改进的新型距离测度保留了传统概率犹豫模糊元距离测度的特点,并克服了其不足.

3 概率犹豫模糊多属性群决策方法

3.1 多属性群决策问题描述

本文考虑概率犹豫模糊环境下的多属性群决策问题,问题具有m个备选方案,n个评价属性和K个辅助专家参与决策. 令集合$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$为备选方案集,集合$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$为评价属性集,集合$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_K\}$为参与决策的辅助专家的集合. 进一步地,令向量$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)^{\mathrm T}$为属性权重向量,向量$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_K)^{\mathrm T}$为专家权重向量. 假设参与决策的辅助专家$e_k$给出方案$x_i(i=1,2,\ldots,m)$关于属性$a_j(j=1,2,\ldots,n)$的评估值为概率犹豫模糊元$x_{ij}^k$,将所有专家$e_k(k=1,2,\ldots,K)$给出的概率犹豫模糊评估信息按照矩阵的形式进行排列,可以得到如下概率犹豫模糊决策矩阵:

$$\boldsymbol{D}^k=\begin{array}{c}\\ x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_n\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}x_{11}^k & x_{12}^k & \ldots & x_{1n}^k\\ x_{21}^k & x_{22}^k & \ldots & x_{2n}^k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{m1}^k & x_{m2}^k & \ldots & x_{mn}^k\end{bmatrix}\end{array}.\tag{21}$$

显然,不同的辅助专家给出了不同的概率犹豫模糊决策矩阵.

为了得到最终的评价结果,需要对概率犹豫模糊矩阵形式的评估信息进行两次信息集成:首先,在单个专家视角下,按属性进行初次信息集成,得到单个专家的综合评估信息;其次,在群体专家视角下,按专家进行二次信息集成,得到最终的综合评估结果. 但是,两次的概率犹豫模糊信息集成都需要相应的权重向量信息. 为降低问题的求解复杂度,假设备选方案的属性权重向量$\boldsymbol{w}$已知,专家权重向量$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_K)^{\mathrm T}$未知. 目标是在专家权重向量未知的条件下,根据专家们给出的概率犹豫模糊决策矩阵$\boldsymbol{D}^k(k=1,2,\ldots,K)$对方案集$X$中的备选方案进行综合排序.

3.2 分差最大化专家权重向量求解模型

在属性权重向量$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)^{\mathrm T}$已知的条件下,可以通过加权算术平均的方法给出单个专家$e_k(k=1,2,\ldots,K)$对备选方案$x_i(i=1,2,\ldots,m)$的综合评估信息,计算公式为

$$x_i^k=\mathop{\oplus}_{j=1}^{n}(w_jx_{ij}^k).\tag{22}$$

可见,综合评估信息x_i^k依然具有概率犹豫模糊元的形式. 由式(2),概率犹豫模糊元x_i^k的得分为

$$g_{ik}=E(x_i^k).\tag{23}$$

因此,g_{ik}即可以视为单个评估专家$e_k(k=1,2,\ldots,K)$对备选方案$x_i(i=1,2,\ldots,m)$的综合评分. 将所有综合评分g_{ik}按照矩阵的形式进行排列,可以得到如下形式的得分矩阵:

$$\boldsymbol{G}=\begin{array}{c}\\ x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}e_1 & e_2 & \ldots & e_K\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1K}\\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2K}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mK}\end{bmatrix}\end{array}.\tag{24}$$

对于单个专家$e_k(k=1,2,\ldots,K)$,备选方案$x_i(i=1,2,\ldots,m)$与其他所有备选方案$x_t(t=1,2,\ldots,m)$之间的加权分差可以表示为

$$S_{ik}(\boldsymbol{v})=\sum_{t=1}^{m}v_k|g_{ik}-g_{tk}|.\tag{25}$$

其中: $v_k(k=1,2,\dots,K)$ 为专家 e_k 的权重系数, $\boldsymbol{v}$ 为专家权重向量. 进一步地, 对于任意单个专家 $e_k(k=1,2,\dots,K)$, 所有备选方案相对于其他备选方案的加权分差和可以计算为

$$S_k(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}v_k|g_{ik}-g_{tk}|. \tag{26}$$

为了更好地将各个备选方案区分出来, 可以基于分差最大化 (MSD)[5] 的思想构建如下所示的专家权重向量求解模型:

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{v}}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}v_k|g_{ik}-g_{tk}|;\\ &\text{s.t. }\sum_{k=1}^{K}v_k^2\leqslant 1,\\ &\qquad v_k\geqslant 0,\ k=1,2,\dots,K.\end{aligned} \tag{27}$$

显然, 式 (27) 所示的非线性规划问题是凸优化问题, 且具有唯一最优解[13]. 求解式 (27) 所示的凸问题即可得到最优专家权重向量 $\boldsymbol{v}^*$. 该求解过程可以采用数值优化的方法, 如使用标准的数值优化软件, 也可以采用解析的方式.

3.3 专家权重向量求解

采用解析的方法求解专家权重向量, 为此, 需要构造如下拉格朗日 (Lagrange) 函数[13]:

$$L(\boldsymbol{v},\eta)=\sum_{k=1}^{K}c_kv_k+\eta\Big(\sum_{k=1}^{K}v_k^2-1\Big). \tag{28}$$

其中: η 为 Lagrange 乘子; $v_k(k=1,2,\dots,K)$ 为专家 e_k 的权重系数; $\boldsymbol{v}$ 为专家权重向量; $c_k(k=1,2,\dots,K)$ 为中间参量, 计算为

$$c_k=\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}|g_{ik}-g_{tk}|. \tag{29}$$

根据 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件, 令 $\partial L(\boldsymbol{v},\eta)/\partial v_k=0, \partial L(\boldsymbol{v},\eta)/\partial\eta=0$, 分别可得

$$2\eta v_k+c_k=0,\ k=1,2,\dots,K; \tag{30}$$

$$\sum_{k=1}^{K}v_k^2-1=0. \tag{31}$$

联立求解式 (30) 和 (31), 可得最优 Lagrange 乘子为

$$\eta^*=-\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{K}c_k^2}}{2}. \tag{32}$$

最优权重系数为

$$v_k^*=\frac{c_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{K}c_k^2}},\ k=1,2,\dots,K. \tag{33}$$

此最优解 $\boldsymbol{v}^*=(v_1^*,v_2^*,\dots,v_K^*)^{\mathrm{T}}$ 即为所求的专家权重向量.

为下文应用的需要, 将专家权重向量 $\boldsymbol{v}^*$ 进一步标准化为

$$v_k=\frac{c_k}{\sum_{k=1}^{K}c_k},\ k=1,2,\dots,K. \tag{34}$$

3.4 基于TODIM的备选方案排序方法

TODIM 方法是一种基于前景理论的交互式多属性决策方法[11-12,14], 本文将其应用到群体共识达成上来. 对于单个专家 $e_k(k=1,2,\dots,K)$, 备选方案 $x_i(i=1,2,\dots,m)$ 相对于其他备选方案 $x_t(t=1,2,\dots,m)$ 的感知价值可以表示为

$$\varphi_{it}^k=\begin{cases}\sqrt{v_kd(x_i^k,x_t^k)},\ x_i^k\succeq x_t^k;\\ -\theta\sqrt{v_k^{-1}d(x_i^k,x_t^k)},\ x_i^k\prec x_t^k.\end{cases} \tag{35}$$

其中: 参数 $\theta\geqslant 1$ 为损失规避指数, θ 越大表示对 "损失" 的规避程度越高; $d(x_i^k,x_t^k)$ 为概率犹豫模糊元 x_i^k 与 x_t^k 之间的距离测度, 这里可以是海明距离测度, 也可以是欧几里得距离测度, 本文选用改进的欧几里得距离测度.

在单个专家 $e_k(k=1,2,\dots,K)$ 的视角下, 计算得到各备选方案 $x_i(i=1,2,\dots,m)$ 相对于其他所有备选方案综合感知价值为

$$\varphi_i^k=\sum_{t=1}^{m}\varphi_{it}^k. \tag{36}$$

集成所有专家的智慧, 计算得到备选方案 $x_i(i=1,2,\dots,m)$ 相对于其他备选方案的综合感知价值为

$$\varphi_i=\sum_{k=1}^{K}\varphi_i^k. \tag{37}$$

显然, 群体专家视角下, 各备选方案 $x_i(i=1,2,\dots,m)$ 的综合感知价值 φ_i 越大, 表示备选方案 $x_i(i=1,2,\dots,m)$ 越优秀. 可以根据 φ_i 的大小对备选方案 $x_i(i=1,2,\dots,m)$ 进行优劣排序, 并选出最优方案. 通常, 各个备选方案 $x_i(i=1,2,\dots,m)$ 的排序值可以计算为

$$\phi(x_i)=\frac{\varphi_i-\min\limits_i\{\varphi_i\}}{\max\limits_i\{\varphi_i\}-\min\limits_i\{\varphi_i\}}. \tag{38}$$

4 算例分析

4.1 问题描述

未来信息化战争是体系与体系之间的对抗, 情报信息急剧增长, 战场态势复杂多变, 不确定情况日益增多, 日益呈现出 "以快打慢" 的战场态势, 决策的速度和质量直接关系到战争胜负. 战场复杂性和不确

定性的增加,以及作战进程的快节奏和高毁伤都给决策者带来了空前的压力,使他们在决策时犹豫不决、不确定感显著增加. 因此,如何构建决策模型,积极发挥决策者和辅助专家的群体智慧成为亟待解决的现实问题. 本文尝试使用概率犹豫模糊理论对不确定条件下的决策信息进行建模,并构建合适的群决策方法.

作战方案评估优选是作战指挥的关键环节[15],对一种作战方案的优劣评价,主要看其3种属性: 一是方案可行性a_1,作战方案是否符合上级意图,能否在限定的时间、空间及其他资源限制条件下完成作战任务;二是方案可接受性a_2,作战方案是否完整、要素齐全,能够取得的潜在价值是否大于实施作战方案所需要付出的代价,包括政治代价与道义代价;三是方案的独特性a_3,作战方案与其他备选作战方案相比是否有显著不同,体现较大的艺术创造价值. 在作战筹划阶段,为选出最优作战方案,4名军事专家$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$受命对陆军部队的4种备选作战方案$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$进行分析评估,并给出专业化建议. 假设这4名军事专家通过前文所述作战方案的3种属性,即$\{a_1,a_2,a_3\}$,对4种备选方案进行分析评估,评估信息以概率犹豫模糊元的形式给出. 表2～表5分别为4名专家对4种备选方案的评估结果. 本文所用数据改编自文献[5, 7, 10].

表2 专家e_1的评估结果

方案	a_1	a_2	a_3
x_1	$\{0.8\|1\}$	$\{0.75\|1\}$	$\{0.94\|0.4, 0.8\|0.6\}$
x_2	$\{0.4\|1\}$	$\{0.8\|0.3, 0.7\|0.4, 0.6\|0.3\}$	$\{0.65\|1\}$
x_3	$\{0.6\|0.2, 0.5\|0.4, 0.3\|0.4\}$	$\{0.85\|1\}$	$\{0.45\|1\}$
x_4	$\{0.37\|0.6, 0.15\|0.4\}$	$\{0.48\|1\}$	$\{0.38\|1\}$

表3 专家e_2的评估结果

方案	a_1	a_2	a_3
x_1	$\{0.76\|0.4, 0.55\|0.6\}$	$\{0.65\|1\}$	$\{0.55\|1\}$
x_2	$\{0.95\|1\}$	$\{0.35\|1\}$	$\{0.65\|0.5, 0.45\|0.5\}$
x_3	$\{0.68\|1\}$	$\{0.66\|0.5, 0.55\|0.5\}$	$\{0.55\|1\}$
x_4	$\{0.6\|1\}$	$\{0.62\|0.4, 0.48\|0.6\}$	$\{0.75\|1\}$

表4 专家e_3的评估结果

方案	a_1	a_2	a_3
x_1	$\{0.65\|1\}$	$\{0.3\|1\}$	$\{0.55\|1\}$
x_2	$\{0.69\|1\}$	$\{0.7\|1\}$	$\{0.45\|1\}$
x_3	$\{0.5\|1\}$	$\{0.45\|1\}$	$\{0.68\|1\}$
x_4	$\{0.4\|1\}$	$\{0.55\|1\}$	$\{0.7\|0.5, 0.5\|0.5\}$

表5 专家e_4的评估结果

方案	a_1	a_2	a_3
x_1	$\{0.8\|1\}$	$\{0.4\|0.5, 0.3\|0.3, 0.2\|0.2\}$	$\{0.75\|1\}$
x_2	$\{0.58\|1\}$	$\{0.65\|1\}$	$\{0.7\|1\}$
x_3	$\{0.6\|1\}$	$\{0.56\|1\}$	$\{0.75\|1\}$
x_4	$\{0.73\|1\}$	$\{0.66\|1\}$	$\{0.85\|1\}$

4.2 单个专家视角下评估信息初次集成

根据前文所述,综合排序算法的第1步是在属性权重信息已知的条件下,对单个专家的评估信息进行综合集成.

假设属性权重向量为$\boldsymbol{w}=(0.4,0.3,0.3)^{\mathrm{T}}$,采用加权算术平均的方式进行概率犹豫模糊信息的初次集成. 由式(11)可计算得到4名专家$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$的综合评估信息,分别如表6～表9所示.

表6 专家e_1的综合评估信息

方案	专家 e_1 综合评估信息	得分
x_1	$\{0.8510\|0.4,\ 0.7862\|0.6, 0.7862\|0\}$	0.8121
x_2	$\{0.6329\|0.3,\ 0.5854\|0.4,\ 0.5480\|0.3\}$	0.5884
x_3	$\{0.6721\|0.2,\ 0.6415\|0.4, 0.5898\|0.4\}$	0.6269
x_4	$\{0.4081\|0.6,\ 0.3328\|0.4,\ 0.3328\|0\}$	0.3780

表7 专家e_2的综合评估信息

方案	专家 e_2 综合评估信息	得分
x_1	$\{0.6452\|0.4,\ 0.5827\|0.6,\ 0.5827\|0\}$	0.6077
x_2	$\{0.8065\|0.5, 0.7784\|0.5,\ 0.7784\|0\}$	0.7924
x_3	$\{0.6390\|0.5, 0.6074\|0.5, 0.6074\|0\}$	0.6232
x_4	$\{0.6579\|0.4,\ 0.6242\|0.6,\ 0.6242\|0\}$	0.6377

表 8　专家e_3的综合评估信息

方案	专家e_3综合评估信息	得分
x_1	$\{0.5354\vert 1, 0.5354\vert 0, 0.5354\vert 0\}$	0.5354
x_2	$\{0.6354\vert 1, 0.6354\vert 0, 0.6354\vert 0\}$	0.6354
x_3	$\{0.5500\vert 1, 0.5500\vert 0, 0.5500\vert 0\}$	0.5500
x_4	$\{0.5529\vert 0.5, 0.4789\vert 0.5, 0.4789\vert 0\}$	0.5159

表 9　专家e_4的综合评估信息

方案	专家e_4综合评估信息	得分
x_1	$\{0.7027\vert 0.5, 0.6886\vert 0.3, 0.6759\vert 0.2\}$	0.6931
x_2	$\{0.6405\vert 1, 0.6405\vert 0, 0.6405\vert 0\}$	0.6405
x_3	$\{0.6425\vert 1, 0.6425\vert 0, 0.6425\vert 0\}$	0.6425
x_4	$\{0.7574\vert 1, 0.7574\vert 0, 0.7574\vert 0\}$	0.7574

为便于后续计算,表6～表9中的概率犹豫模糊信息已经进行过规范化处理,并由式(2)计算出了单个专家视角下各备选方案的综合得分.

4.3　专家权重向量确定

专家权重向量对备选方案综合排序而言具有基础性支撑作用. 基于分差最大化准则构建专家权重向量求解模型,其目的是为了更好地对4种备选作战方案进行区分. 在实际运用中,可以根据不同需求构建不同的专家权重向量求解模型,也可根据需要以主观的方式或以演化博弈[16]的方式对各个辅助专家进行赋权. 基于分差最大化思想的专家权重向量求解步骤为如下.

step 1: 式(24)所示的得分矩阵$\boldsymbol{G}$是专家权重向量的求解基础. 由表6～表9可求取得分矩阵$\boldsymbol{G}$,结果如表10所示.

表 10　单个专家视角下各备选方案的得分

方案	e_1	e_2	e_3	e_4
x_1	0.8121	0.6077	0.5354	0.6931
x_2	0.5884	0.7924	0.6354	0.6405
x_3	0.6269	0.6232	0.5500	0.6425
x_4	0.3780	0.6377	0.5159	0.7574

step 2: 在得分矩阵$\boldsymbol{G}$的基础上,由式(29)计算出辅助变量$c_k(k = 1,2,3,4)$的值$c_1 = 2.6817, c_2 = 1.1376, c_3 = 0.7462, c_4 = 0.8026$.

step 3: 由式(34)可求取标准化的专家权重向量为$\boldsymbol{v} = (0.4996, 0.2119, 0.1390, 0.1495)^{\mathrm{T}}$.

4.4　备选方案综合排序

基于TODIM的备选作战方案综合排序算法的基本步骤如下.

step 1: 由式(36),当$\theta = 1$时,可以计算得到单个专家视角下各备选方案的综合感知价值,结果如表11所示.

表 11　单个专家视角下各备选方案的综合感知价值

方案	e_1	e_2	e_3	e_4
x_1	1.1292	−1.6698	−0.9860	−1.0990
x_2	−0.7802	0.4946	0.4337	−2.3454
x_3	−0.2175	−1.1956	−0.5497	−2.2072
x_4	−2.0827	−0.5785	−4.1881	0.4878

step 2: 由式(37)计算得到群体专家视角下各备选方案的综合感知价值,并由式(38)计算各备选方案的综合排序值,结果如表12所示.

表 12　群体专家视角下各备选方案的综合感知价值

方案	综合感知价值	排序值
x_1	−2.6257	0.8971
x_2	−2.1973	1.0000
x_3	−4.1701	0.5262
x_4	−6.3615	0

step 3: 根据计算结果可知,当$\theta = 1$时,各备选方案的排序结果为$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$.

4.5　参数敏感性分析

TODIM方法是一种带参数的多属性群决策方法,当参数θ取不同值时,4个备选方案的排序结果如表13所示. 由计算结果可以看出,4种备选方案的排序结果对θ的取值并不敏感.

表 13　θ取不同值时结果比较

θ取不同值	排序结果
$\theta = 1$	$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$
$\theta = 2$	$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$
$\theta = 5$	$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$

综上所述,实例分析的输入参数如下:属性权重向量为$\boldsymbol{w} = (0.4, 0.3, 0.3)^{\mathrm{T}}$,专家权重向量为$\boldsymbol{v} = (0.4996, 0.2119, 0.1390, 0.1495)^{\mathrm{T}}$; 而各备选方案的排序结果为$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$. 根据综合排序结果可知:备选作战方案$x_2$为最优,备选作战方案$x_4$为最劣.

4.6　比较分析

在同样的数据条件下,文献[10]的输入参数如下:属性权重向量为$\boldsymbol{w} = (0.3906, 0.2592, 0.3502)^{\mathrm{T}}$,专家权重向量为$\boldsymbol{v} = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^{\mathrm{T}}$,各备选方案的排序结果为$x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$,备选方案$x_1$

为最优,备选方案x_4为最劣.

取$\theta = 1$,在使用文献[10]输入参数的条件下,使用本文的排序方法可以得到的排序结果为$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$,备选方案$x_1$为最优,备选方案$x_4$为最劣.

通过比较分析可知:使用同样的数据,在输入参数相同的条件下,本文方法能够与文献[10]取得大致相同的排序结果.尽管两种方法的排序结果有差异,但差异是比较小的,充分表明了本文方法排序结果的可信性.

5 结　论

本文在改进的新型概率犹豫模糊距离测度的基础上,基于TODIM提出了概率犹豫模糊多属性群决策方法,实现了基于综合感知价值的多个备选作战方案的优劣排序.数值实验表明:所提出的交互式多属性群决策方法步骤清晰,能够充分考虑决策者心理行为对备选方案排序的影响,有利于充分发挥辅助专家的群体智慧,综合排序结果客观有效.所提出的群决策方法和距离测度具有一定理论意义和实用价值.

参考文献(References)

[1] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Jeju Island, 2009: 1378-1382.

[2] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[3] 徐泽水, 赵华. 犹豫模糊集理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018: 308-382.
(Xu Z S, Zhao H. Hesitant fuzzy sets theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2018: 308-382.)

[4] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[5] Xu Z S, Zhou W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2017, 16(4): 481-503.

[6] Gao J, Xu Z S, Liao H C. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(5): 1261-1278.

[7] Li J, Wang J Q. Multi-criteria outranking methods with hesitant probabilistic fuzzy sets[J]. Cognitive Computation, 2017, 9(5): 611-625.

[8] Su Z, Xu Z S, Zhao H, et al. Entropy measures for probabilistic hesitant fuzzy information[J]. IEEE Access, 2019, 7: 65714-65727.

[9] 曾文艺, 李德清, 尹乾. 加权犹豫模糊集的群决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(3): 527-534.
(Zeng W Y, Li D Q, Yin Q. Group decision making approach of weighted hesitant fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2019, 34(3): 527-534.)

[10] 刘玉敏, 朱峰, 靳琳琳. 基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(4): 861-870.
(Liu Y M, Zhu F, Jin L L. Multi-attribute decision method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 861-870.)

[11] 张小路. 基于犹豫模糊信息的多属性决策方法研究[D]. 南京: 东南大学经济管理学院, 2015: 39-57.
(Zhang X L. Research on multiple attribute decision making methods with hesitant fuzzy information[D]. Nanjing: School of Economics and Management，Southeast University, 2015: 39-57.)

[12] Zhang X L, Xu Z S. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 61: 48-58.

[13] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 127-271.

[14] 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊TOPSIS多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(5): 864-870.
(Wang Y M, Que C P, Lan Y X. Hesitant fuzzy TOPSIS multi-attribute decision method based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2017, 32(5): 864-870.)

[15] 方冰, 韩冰, 徐平. 基于客观赋权的作战方案模糊优选方法[J]. 指挥控制与仿真, 2019, 41(6): 34-40.
(Fang B, Han B, Xu P. Fuzzy optimization of operational alternatives based on objective weighting[J]. Command Control & Simulation, 2019, 41(6): 34-40.)

[16] Wang H, Xu C, Xu Z S. An approach to evaluate the methods of determining experts' objective weights based on evolutionary game theory[J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 182: 104862.

作者简介

方冰(1980−), 男, 讲师, 博士, 从事信息融合、军事运筹的研究, E-mail: bingfang_ch@163.com;

韩冰(1976−), 男, 副教授, 博士, 从事军事运筹、建模与仿真等研究, E-mail: hbgfy@126.com;

闻传花(1981−), 女, 讲师, 博士, 从事军事运筹、复杂系统分析等研究, E-mail: wenflower@126.com.

(责任编辑：郑晓蕾)