

Тоон аргууд

11 января 2020 г.

1 Зэрэгт функц ашиглан ойролцоолох

Хэмжилтээр олж авсан өгөгдөл буюу датаны утгын мужийг жижиг утгын мужид хувааж, тухайн муж бүрийг нь зэрэгт функц функцээр ойролцоолох боломжтой бөгөөд ойролцоолж буй функцийг нь сплайн функц гэж нэрлэдэг. Тухайн муж бүрт харгалзах сплайн функцүүд нь өөр өөр параметртэй ба муж бүрт харгалзах функцүүдийн нийт цуглууллага нь нийт датаг ойролцоолж байдаг. Бид 3-р эрэмбийн сплайн функцийг (кубик сплайн функц) авч үзэх болно.

Дата нь

$$\{x_i, y_i\}, \quad i = 1, \dots, N.$$

гэж өгөгдсөн гэж үзэе. Мөн тухайн нэг дурын мужид харгалзах кубик функц нь тодорхойлогдсон :

$$f_i(x) = D_i + C_i(x - x_i) + B_i(x - x_i)^2 + A_i(x - x_i)^3, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Энэ тэгшитгэл нь доорх шинж чанарыг хангадаг,

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= y_i, \\ f_i(x_{i+1}) &= f_{i+1}(x_{i+1}), \\ f'_i(x_{i+1}) &= f'_{i+1}(x_{i+1}), \\ f''_i(x_{i+1}) &= f''_{i+1}(x_{i+1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Нийт мужид ($x_1 \leq x \leq x_N$) харгалзах функц $f(x)$ нь $f_i(x)$ -үүдийн цуглууллага юм. Тасралтгүй функц $f(x)$ нь дурын цэгт тасралтгүй байхын тулд 2-р эрэмбийн уламжлал нь ($f''(x_i)$) буюу

$$f''_i = f''(x_i)$$

гэж тодорхойлогдоно. 2-р эрэмбийн уламжлалыг нь доорх байдлаар бичиж болно,

$$f''(x) = f''_i \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i} + f''_{i+1} \frac{(x - x_i)}{h_i}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \tag{2}$$

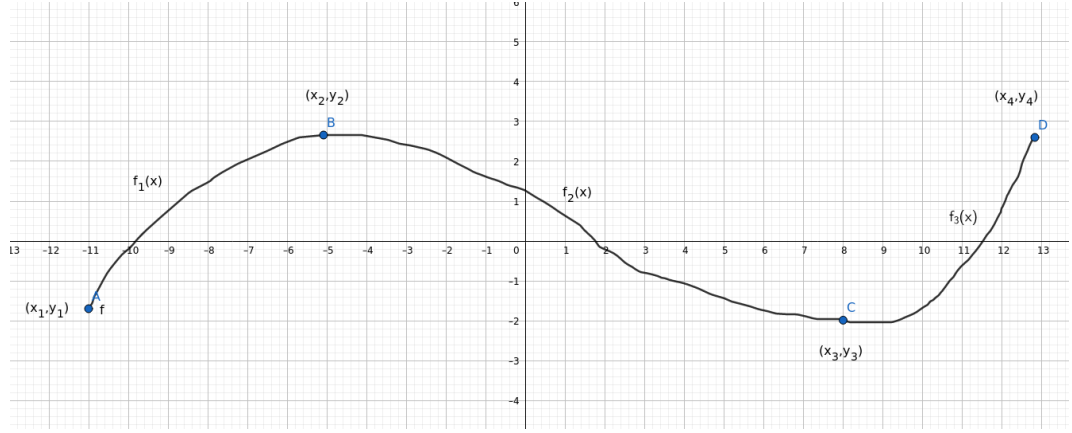


Рис. 1:

Тэгшитгэл 2-ыг 2 удаа интералчилбал бид $f(x)$ фунцыг олох боломжтой. Ннтегралчилбал,

$$f'(x) = -f_i'' \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + C_i,$$

$$f(x) = f_i'' \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + C_i(x - x_i) + D_i. \quad (3)$$

Энд $h_i = x_{i+1} - x_i$, ба тэгшитгэл 2-ийг $(x_i, y_i = f(x_i))$, $(x_{i+1}, y_{i+1} = f(x_{i+1}))$ цэгүүд дээр тооцвол,

$$y_i = f_i'' \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6} + D_i,$$

$$y_{i+1} = f_{i+1}'' \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6} + C_i(x_{i+1} - x_i) + D_i. \quad (4)$$

Коэффициентүүд болох C_i, D_i олбол,

$$C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{(f_{i+1}'' - f_i'')h_i}{6}, \quad (5)$$

$$D_i = y_i - \frac{f_i'' h_i^2}{6}. \quad (6)$$

Тэгшитгэл 3-ийг ажиглабал бид 2-р эрэмбийн уламжлалуудыг (ж нь: f_i'') нь олох хэрэгтэй бөгөөд $f'(x)$ -ийг $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ба $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ мужуудад тооцон $x = x_i$ цэг дээр тэнцүү гэдгийг авч үзээд, эмхэтгэн бичвэл,

$$\frac{h_{i-1}}{6} f_{i-1}'' + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} f_i'' + \frac{h_i}{6} f_{i+1}'' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}. \quad (7)$$

буюу хялбарчилбал

$$A_i f''_{i-1} + B_i f''_i + C_i f''_{i+1} = D_i, \quad (8)$$

энд $A_i = h_{i-1}/6$, $B_i = (h_{i-1} + h_i)/3$, $C_i = h_i/6$, $D_i = (y_{i+1} - y_i)/h_i - (y_i - y_{i-1})/h_{i-1}$. Эндээс харвал энэ тэгшитгэл нь $N - 2$ тэгшитгэлийн хувьд биелдэг бөгөөд бидэнд нэмэлт захын нөхцөл хэрэгтэй болно. Тэгвэл доорх захын нөхцөлүүдийн нэгийг нь ашиглах боломжтой

- Ердийн сплайн (natural): $f''_1 = f''_N = 0$
- Параболик (parabolic): $f''_1 = f''_2$ буюу $f''_{N-1} = f''_N$.

Тэгшитгэл 7-ийн ерөнхий тэгшитгэлийн хувьд хэрэв 4-н цэг (Рис. 1) өгөгдсөн тохиолдолд доорх хэлбэрт бичигдэнэ,

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 \\ 0 & 0 & A_4 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \\ f''_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Энэ матрицыг Tri-diagonal гэж нэрлэдэг. 4-н цэгэн дата өгөгдсөн үед ойролцоолох функцыг олсон байдал (Рис. 2).

Дата ойролцоолох функц (тэгшитгэл 3)-ыг олохын тулд хамгийн эхэлж тэгшитгэл 9-өөс 2-р эрэмбийн уламжлалыг нь олно. Олсон утгануудаа буцаж тэгшитгэл 3-д орлуулна.

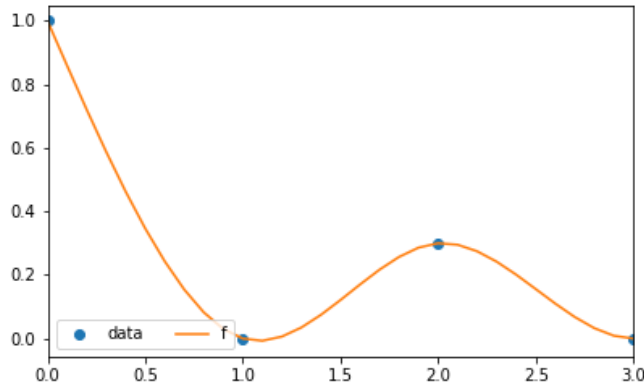


Рис. 2: Өгөгдсөн датаг ойролцоолох кубик функц, тэгшитгэл 3

Жишээ програм: Кубик полиномиал функц:

```
In [125]: 1 from scipy.interpolate import CubicSpline
          2 import matplotlib.pyplot as plt
          3 import pandas as pd
          4 import numpy as np

In [126]: 1 data = pd.read_csv('spline_4nodes.txt', sep=" ", header = None)
          2 dat = pd.read_csv('4nodes.txt', sep=" ", header = None)

          4-н цэг өгөгдсөн  $(x_i, y_i)$  (дата файл: 4nodes.txt)

In [127]: 1 dat=dat.values
          2 #print(dat)

          100-н цэг  $(x_i, x_{i+1})$  ба  $(y_i, y_{i+1})$  завсар бүрт өгөгдсөн (дата файл: spline_4nodes.txt).

In [128]: 1 data=data.values
          2 #print(np.around(data,2))
```

Рис. 3: Өгөгдсөн датаг ойролцоолох кубик функц, тэгшитгэл 3

Өгөгдөлийг ойролцоолох 3р эрэмбийн полиномиал функц (тэгшитгэл 8,9 ба 3-ийг ашиглана).

```
In [96]: 1 cs = CubicSpline(data[:,0], data[:,1])
          2 cs1 = CubicSpline(dat[:,0], dat[:,1])

          f нь 4-н цэгийг, f1 нь 100-н цэгийг ойролцоолох функцүүд.

In [101]: 1 xs = np.arange(0, 3.5, 0.1)
          2 plt.figure(figsize=(6.5, 4))
          3 plt.plot(dat[:,0], dat[:,1], 'o', label='data')
          4 plt.plot(xs, cs(xs), label="f")
          5 plt.plot(xs, cs1(xs), label="f1")
          6 plt.xlim(0, 3)
          7 plt.legend(loc='lower left', ncol=2)
          8 plt.show()
```

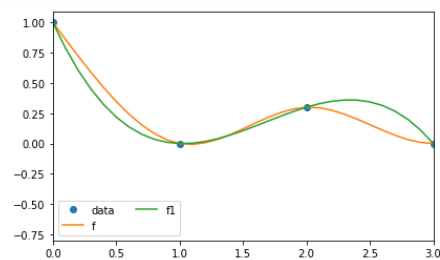


Рис. 4: Өгөгдсөн датаг ойролцоолох кубик функц, тэгшитгэл 3