Тоон аргууд

22 декабря 2019 г.

1 Хамгийн бага квадратын арга (Least Squares Method)

Интерполяц гүйцэтгэх өгөгдөлийн тоо нь олохыг зорьж буй параметрийн тооноос их байх үед хэрхэн тухайн параметр олж болохыг сонирхоё. Бидэнд доорх жишээний параметр -ийг олох шаардлагатай болсон гэж үзээ,

$$2x = b_1, \quad 3x = b_2, \quad 4x = b_3. \tag{1}$$

Энэхүү тэгштгэлийг матриц хэлбэрт бичие,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Энд тэгшитгэлийн тоо нь $N = 3$ ба параметр нь $M = 1$ байна. Хэрэв $M = 3$ буюу тэгшитгэлийн тоотой $N = 3$ ижил тооны параметр байсан бол тэгшитгэл 2-ийн шийд болох параметрүүдийг маш хялбархан олох боломжтой. Параметр ба тэгшитгэлийн тоо нь ижил биш үед шийд буюу параметрийг хайхын тулд кватрат алдаа нь хамгийн бага байх параметрүүдийг олохыг зорьж доорх хэлбэрт илэрхийлэе,

$$e = (2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2. \tag{3}$$

Параметр x-ийн бага утгыг олохын тулд нь дээрх илэрхийллэлийн нэгдүгээр эрэмбийн уламжлал $\dfrac{de}{dx} = 0$- ийг тэгтэй тэнцүүлнэ. Тэгвэл,

$$2\left[(2x - b_1) \cdot 2 + (3x - b_2) \cdot 3 + (4x - b_3) \cdot 4\right] = 0, \tag{4}$$

буюу ойролцоо шийд нь

$$\bar{x} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{2^2 + 3^2 + 4^2}. \tag{5}$$

Ерөнхий шийдийг доорх хэлбэртэй бичиж болно

$$\vec{a}\bar{x} = \vec{b}, \quad \bar{x} = \frac{(\vec{a}^T \vec{b})}{(\vec{a}^T \vec{a})}. \tag{6}$$

Дээрх жишээгээ өргөтгөж матриц хэлбэрээр илэрхийлбэл,

$$A\vec{x} = \vec{b}. \tag{7}$$

Хайж буй оролцоо шийдийн $\bar{x}$ хувьд,

$$A\bar{x} = \vec{b}, \tag{8}$$

бөгөөд тэгшитгэл 6-н дагуу ашиглан

$$A^T A\bar{x} = A^T\vec{b}, \quad \bar{x} = (A^T A)^{-1}A^T\vec{b}. \tag{9}$$

1.1 Хамгийн бага кватратын арга: 2 хэмжээст өгөгдөлийн параметрийг олох

Доор үзүүлсэн 2 хэмжээст өгөгдөлийн (y_i, z_i) хоорондын хамаарлын параметрийг (C, D) олоё.

$$C + D \cdot y_i \approx z_i. \tag{10}$$

Дээрх тэгшитгэлийг матриц хэлбэрт бичвэл,

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Энэхүү тэгшигэлийн өгөгдөлийн тоо нь параметрийн тоотой ижил биш учир шийдийг олохын тулд тэгшитгэл 9-ийг хэрэглэн өгөгдөлийг 2x2 хэлбэртэй матриц болгоно,

$$\begin{pmatrix} N & \sum_i^N y_i \\ \sum_i^N y_i & \sum_i^N y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{C} \\ \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i^N z_i \\ \sum_i^N y_i z_i \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Ойролцоо шийд нь $(\bar{C}, \bar{D})$,

$$\bar{C} = \frac{\sum_i^N y_i^2 \cdot \sum_i^N z_i - \sum_i^N y_i \sum_i^N y_i z_i}{N\sum_i^N y_i^2 - \left(\sum_i^N y_i\right)^2},$$

$$\bar{D} = \frac{N\sum_i^N y_i z_i - \sum_i^N y_i \sum_i^N z_i}{N\sum_i^N y_i^2 - \left(\sum_i^N y_i\right)^2}.$$

1.1.1 Жишээ бодлого

In [1]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Хамгийн бага квадратын арга (Least Squares Method)

Өгөгдсөн өгөгдөл y-д харгалзах z-ын утга нь шугаман хамааралтай гэж үзэж доорх жишээг сонирхоё

$$y \in (0, 10), \quad z = 0.5 \cdot y - 1.$$

In [30]:
```python
y=[]
z=[]

for i in range(0,10):
    y.append(i)
    z.append(0.5*i-1)

y=np.array(y).reshape(10,1)
z=np.array(z).reshape(10,1)
```

Рис. 1:

Бидний зорилго бол дээр боловсруулсан аргыг ашиглан өгөгдсөн жишээний $(0.5, -1)$ утгыг олох юм. y-д харгалзах z өгөгдөл нь,

In [33]:
```python
print(z)
```

```
[[-1. ]
 [-0.5]
 [ 0. ]
 [ 0.5]
 [ 1. ]
 [ 1.5]
 [ 2. ]
 [ 2.5]
 [ 3. ]
 [ 3.5]]
```

Тэгшитгэл 12 ийн матрицийг A гэж тэмдэглэе

$$A = \begin{pmatrix} N & \sum_i^N y_i \\ \sum_i^N y_i & \sum_i^N y_i^2 \end{pmatrix}$$

бөгөөд харгалзах элементийн утгыг нь олоё.

In [38]:
```python
A=np.zeros([2,2])
A[0,0]=len(y)
A[0,1]=sum(y)
A[1,0]=sum(y)
A[1,1]=sum(y**2)
```

In [39]:
```python
print(A)
```

```
[[ 10.  45.]
 [ 45. 285.]]
```

Рис. 2:

Тэгшитгэл 12-ийн баруун талын матрицийг Y гэж тэмдэглэн харгалзах элементүүдийг нь олоё,

$$Y = \begin{pmatrix} \sum_i^N z_i \\ \sum_i^N y_i z_i \end{pmatrix}.$$

In [40]:
```
s=0
for i in range(0,10):
    s+=y[i]*z[i]
```

In [41]:
```
print(s)
```

```
[97.5]
```

In [42]:
```
Y=np.zeros([2,1])
Y[0,0]=sum(z)
Y[1,0]=s
```

In [43]:
```
print(Y)
```

```
[[12.5]
 [97.5]]
```

Рис. 3:

Одоо тэгшитгэл 9-ийн дагуу параметрийг $(\bar{C}, \bar{D})$ олоё.

$$res = \begin{pmatrix} \bar{C} \\ \bar{D} \end{pmatrix}.$$

In [25]:
```
from numpy.linalg import inv
inv_A=inv(A)
res=np.matmul(inv_A,Y)
```

In [26]:
```
print(res)
```

```
[[-1. ]
 [ 0.5]]
```

Рис. 4: