Тооцон Бодох Математик: Тооцооллын Инженер

12 апреля 2020 г.

1 Ромберг Интеграл дүрэм

Өмнөх хэсэгт дурдсан интегралыг ойролцоолох Ньютон-Котесын тоон арга нь олон онцгой цэгтэй функцын хувьд тохиромжгүй байдаг. Харин нэгэн тохиромжтой аргыг Ромбергийн интегралын арга гэдэг буюу энэхүү арга нь Ричардсоны экстреполяцыд суурилдаг.

1.1 Ричардсоны экстреполяц

Компьютерд бүх зүйлийг тасралттай тоогоор илэрхийлдэг (жнь: зураг, дүрст бичлэг). Коипьютер ашиглан тооцох функцын нарийвчилал эсвэл компьютерд хадгалсан тухайн сонирхож буй зүйлийн нүдэнд харагдах чанар нь тасралттай тооноос h хамаардаг бөгөөд жишээ болгон доорх зургийг сонирхоё,

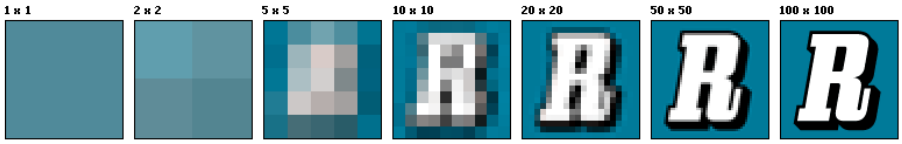

Рис. 1: Зургийн өргөн ба өндөр нь $1cm$: Эхний зурагт пикселийн өргөн нь $h = 1cm$, 2 дах зурганд $h = 0.5cm$, гэх мэтчилэн нэг дахин багасгавал зургийн нарийвчилал болон нүдэнд харагдах чанар сайжирч байна (source: Wikipedia).

Үүнээс үзэхэд тасралттай тоо h нь зургийн чанарыг сайжруулж байна. Хэрэв бид дээрх зургийг F гэж тэмдэглэвэл, F-ийн нарийвчилал нь пикселийн тоо буюу h-ээс хамаарч байгаа учир математикийн хувьд доорх байдлаар илэрхийлж болно,

$$F \approx F(h). \tag{1}$$

Өөр үгээр илэрхийлбэл компьютерд оруулж буй тухайн зүйлийн нарийвчилал нь сонгож авсан h-ээс хамаардаг. Сонгож авсан h нь маш бага үед $h << 1$ бид (1)-ыг тэгийн орчим Тейлорын цуваанд задлах боломжтой

$$F(h) = F(0) + F^{'}(0)h + F^{''}(0)\frac{h^2}{2}\dots, \tag{2}$$

өмнөх хэсгүүдэд дурдсанчилан $F = F(0)$ нь жинхэнэ утга харин нэмэлт хэсгүүд h нь алдааны утгууд байдаг. Тооцон бодох инженерийн салбарт функцыг тооцох хурд ба нарийвчилал чухал байдаг учир тэгшитгэл (2)-ийг тооцохын тулд $h = h/2$ гэж авч үзэе, тэгвэл

$$F(h/2) = F(0) + F^{'}(0)\frac{h}{2} + F^{''}(0)\frac{h^2}{8}\dots. \tag{3}$$

Ричардсоны гол санаа нь тэгтшигэл 2 ба 3-ийг нэгтгэх байсан бөгөөд

$$F_1(h) = 2F(h/2) - F(h) = F(0) + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots, \tag{4}$$

энд c_2, c_3 нь функцын уламжлалтай хэсгүүд болно. Энд алдааны утга нь багасч h^2 байна гэдгийг харж болно. Харин (2) болон (3)-т h байсан. Жишээ нь хэрэв бидэнд (2) болон (3)-ын хувьд $h = 0.1$ байсан бол (4) хувьд $h^2 = 0.01$ болж багасч байна. Тэгшитгэл (4)-д хэрэглэсэн арыг цааш давтван илэрхийлбэл

$$F_2(h) = \frac{1}{3}(4F_1(h) - F_1(h)) = F(0) + \dots. \tag{5}$$

Эцэст нь ерөнхий тэгшитгэлийг бичвэл

$$F_n(h) = \frac{1}{2^n - 1}(2^nF_{n-1}(h/2) - F_{n-1}(h)) = F(0) + \dots. \tag{6}$$

1.2 Жишээ бодлого

Функцын уламжлалыг доорх байдлаар ойролцоолж болдог

$$f^{'}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F_0(h) \tag{7}$$

бөгөөд уламжлалын утгыг $F_0(h)$ гэж үзэе. Тэгвэл ойролцоолж буй уламжлалын утгын нарийвчлалыг сайжруулахын тулд тэгшитгэл 6-г ашиглах буюу дурын функц

$$f(x) = x + e^x$$

-ыг сонгон авч $x = 0$ цэг дэх уламжлалыг тэгшитгэл 6-ын дагуу $F_2(h)$-ийг олъё. Тэгшитгэлийн бодит шийд нь $f^{'}(0) = 2.00$, $h = 0.4$ гэж өгөгдсөн гэж үзэе.

$$
\begin{aligned}
F_1(h) &= \frac{1}{2}(2F_0(h/2) - F_0(h)) \\
&= \left[2 \cdot \frac{((x+0.2)+e^{x+0.2}) - (x+e^x)}{0.2} - \frac{((x+0.4)+e^{x+0.4}) - (x+e^x)}{0.4}\right]; \\
F_2(h) &= \frac{1}{3}(4F_1(h/2) - F_1(h)) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \left[2 \cdot \frac{((x+0.1)+e^{x+0.1}) - (x+e^x)}{0.1} - \frac{((x+0.2)+e^{x+0.2}) - (x+e^x)}{0.2}\right] \\
&- \frac{1}{3}\left[2 \cdot \frac{((x+0.2)+e^{x+0.2}) - (x+e^x)}{0.2} - \frac{((x+0.4)+e^{x+0.4}) - (x+e^x)}{0.4}\right] \\
&= 2.00039.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Тийм бол энэхүү олсон шийдийг бодит шийдтэй нь харцуулж алдааг нь олбол $e = |2.00039 - 2.00| = 0.00039$ байна. Хэрэв Ричардсоны аргыг үл ашиглан зөвхөн тэгшитгэл 7-ийн дагуу шийдийг нь олсон бол шийд нь $F_0(h) = 2.22956$, алдаа нь $e = |2.22956 - 2.00| = 0.22956$ байна. Үүнээс үзвэл Ричардсоны арга нь ойролцоо шийдийн нарийвчлалыг ихэсгэж байна.

2 Ромберг Интегралчилал

Ромбергийн арга нь Ричардсоны аргад суурилсан бөгөөд зорилго нь интегралын ойролцоо шийдийн нарийвчлалыг сайжруулах юм. Трапецын дүрмийг жишээ болгон авч үзэе. Ричардсоны аргатай адил сонгон авч буй завсрын өргөн h-ийг нэг дахин n удаа багасгах замаар интегралыг ойролцоолно, (Рис. 2). Өөр үгээр илэрхийлбэл интегралыг $I_0^1, I_0^2, \ldots, I_0^n$ гэх мэтчилэн өөр өөр завсарт тооцно.

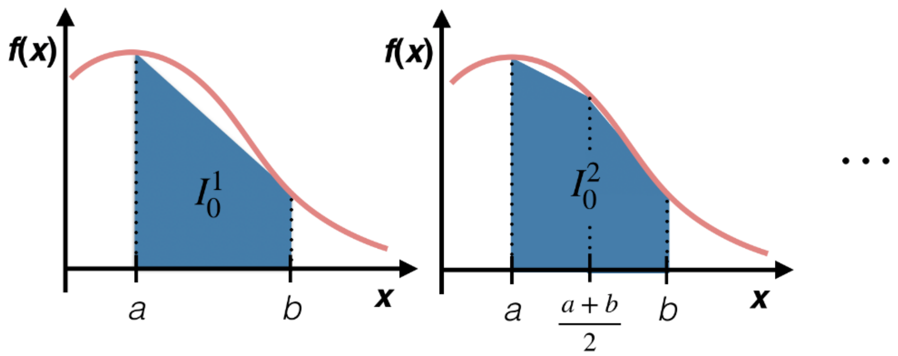

Рис. 2: Trapezoidal Rule For Romberg Integration

Трапецын интеграл дүрмийг доорх байдлаар илэрхийлж болно,

Algorithm 1 Ромберг Интегралчилал АРГА

ОРОЛТ:
Функц $f(x)$
Завсар $[a, b]$
Давталтын too K
ГАРАЛТ:
$I_K^1 = integral[K, 0]$ ▷ $\int_a^b f(x)dx$ интегралын ойролцоолол.
$maxNumInt \leftarrow 2^k$
$hmin \leftarrow (b-a)/maxNumInt$
for $i \leftarrow 0, \dots, maxNumInt$ **do**
    $fvalues[i] \leftarrow f(a + i \cdot hmin)$
for $r \leftarrow 0, \dots, K$ **do**
    $numInt \leftarrow 2^r$
    $step \leftarrow 2^{K-r}$
    $result \leftarrow 0$
    for $i \leftarrow step, 2 \cdot step, 3 \cdot step, \dots, maxNumInt - step$ **do**
        $result \leftarrow result + fvalues[i]$
    $integral[0, r] \leftarrow 0.5\frac{b-a}{numInt}(fvalues[0] + fvalues[maxNumInt] + 2 \cdot result)$
for $l \leftarrow 1, \dots, K$ **do**
    for $r \leftarrow 0, \dots, K - l$ **do**
        $integral[l, r] \leftarrow \frac{4^l \cdot integral[l-1, r+1] - integral[l-1, r]}{4^l - 1}$
Алгоритм Зогсох.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right]}_{I_0^n} + c_1h^2 + c_2h^4 + \dots \tag{9}$$

энд $h = (b-a)/n$, $f_i = f(a + ih)$.

$$I_0^n = I - c_1h^2 - c_2h^4 - c_3h^6 - \dots \tag{10}$$

Сонгож авсан завсарыг нэг дахин багасгавал $h = h/2$.

$$I_0^{2n} = I - c_1\frac{h^2}{4} - c_2\frac{h^4}{16} - c_3\frac{h^6}{64} - \dots \tag{11}$$

Ричардсоны экстреполяцын арга (6)-г ашиглан (9)-ийг илэрхийлбэл

$$I_1^n = \frac{4I_0^{2n} - I_0^n}{3} = I + c_2\frac{h^4}{16} + c_3\frac{5h^6}{16} + \dots \tag{12}$$

Дахин тэгшитгэл 10-ийн алхмыг 2 дахин багасгабал $h = h/4$,

$$I_0^{4n} = I - c_1\frac{h^2}{16} - c_2\frac{h^4}{256} - c_3\frac{h^6}{4096} - \dots \tag{13}$$

мөн Ричардсоны экстреполяцын арга (6)-г ашиглабал,

$$I_1^{2n} = \frac{4I_0^{4n} - I_0^{2n}}{3} = I + c_2\frac{h^4}{64} + c_3\frac{5h^6}{1024} + \dots \tag{14}$$

гэх мэтчилэн энэ үйлдлийг давтвал интегралын ойролцоо шийд нь

$$I_k^{2n} = \frac{4^k I_{k-1}^{2n} - I_{k-1}^n}{4^k - 1}. \tag{15}$$

2.1 Жишээ бодлого

Энд интеграл $err(t) = 2/\sqrt{\pi}\int_0^{0.5} e^{-x^2}dx$-ын утгыг тооцоё. Энэхүү интегралын жинхэнэ шийд нь $err = 0.5204998778130467$ бөгөөд бидний тооцсон шийд нь $err = 0.52049987781$**29182** байна. Эндээс үзвэл Ромбергийн интегралчилах арга нь шийдийн нарийвчилалыг ихэсгэж байна гэдэг нь харагдана.

In [4]:
```python
from scipy import integrate
from scipy.special import erf
import numpy as np
```

Бид функц $err = 2/\sqrt{(\pi)}\int_0^{0.5} e^{-t^2}dt$-ын утгыг сонирхоё. Тэгвэл доорх байдлаар үр дүн нь олдоно:

In [6]:
```python
err = lambda t: 2/np.sqrt(np.pi) * np.exp(-t**2)
result = integrate.romberg(err, 0, 0.5, show=True)
```

```
Romberg integration of <function vectorize1.<locals>.vfunc at 0x7f096aeb18c8> from [0, 0.5]

 Steps  StepSize   Results
     1  0.500000  0.501790
     2  0.250000  0.515899  0.520602
     4  0.125000  0.519354  0.520506  0.520500
     8  0.062500  0.520214  0.520500  0.520500  0.520500
    16  0.031250  0.520428  0.520500  0.520500  0.520500  0.520500

The final result is 0.5204998778129182 after 17 function evaluations.
```

Рис. 3: Romberg Integration: python package.