Тоон аргууд

14 декабря 2019 г.

1 Лагранж интерполяц болон хамгийн бага квадратын арга

Интерполяц гэдэг нь **тоон математикийн (Numerical Mathematics)** хувьд өгөгдсөн тасралттай **өгөгдөлд (data)** зориулан **модел (model)** боловсруулах арга бөгөөд тухайн моделоо ашиглан өгөгдсөн өгөгдөлийн муж дотор **дурын өгөгдөл** бий болгох арга юм. Хамгийн энгийн жишээ авч үзэе. Энэ жишээний хувьд x-ийн утгын муж нь (1,5)-ын хооронд бөгөөд үүнд

```
In [2]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [6]: x=np.array([1,2,3,4,5])
        y=np.array([3,5,7,9,11])
```

```
In [8]: plt.scatter(x,y)
        plt.xlabel('x өгөгдөл')
        plt.ylabel('y өгөгдөл')
        plt.title('xy-ийн хамаарлын график.')

Out[8]: Text(0.5, 1.0, 'xy-ийн хамаарлын график.')
```

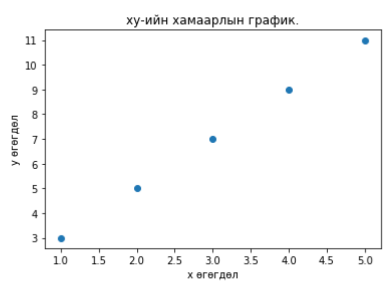

Рис. 1:

харгалзах y-ын хамаарлыг үзүүлсэн байна. Тэгвэл бидний дараагийн асуулт маань хэрэв x-ийн утга (1,5)-ын хооронд орших **дурын өгөгдөл**ийн хувьд харгалзах y-ын утгыг хэрхэн олох вэ? (тухайлбал дурын өгөгдөл $x = 2.6$ харгалзах $y =?$ юу байх вэ?). Зурагт үзүүлсэн xy-ын хамаарлыг анхааралтай ажиглабал

$$f(x_i) = y_i = 1 + 2 \cdot x_i \tag{1}$$

гэдгийг хялбархан харж болно. Өрөөр хэлбэл энэхүү **хамаарлын тэгшитгэл**ийг бидэнд өгөгдсөн өгөгдөлд зориулсан **модел** (Шугаман модел) гэж нэрлэдэг. Өөр үгээр ерөнхийлөн хэлбэл, өгөгдсөн өгөгдөлийн муж дотроос (зөвхөн муж дотроос гэдгийг анхаараарай) дурын өгөгдөлийн хамаарлыг олох энэхүү аргыг дээр дурдсанчлан интерполяцлах гэдэг. Дээр дурдсан жишээний хувьд өгөгдөл маань шугаман хамааралтай учир хамаарлын тэгшитгэлийг олоход амархан байлаа. Харин ярвигтай өгөгдөлийн хувьд өгөгдөлийн хамаарлын тэгшитгэлийг олоход хэцүү үед модел буюу хамаарлын тэгшитгэл боловсруулах олон арга байдгаас бид зөвхөн Лагранжийн интерполяц хэмээх моделийг (аргыг) авч үзэх болно.

2 Лагранж интерполяц (function fitting)

Өгөгдсөн өгөгдөлийн хувьд $(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N$, хамаарлын функцыг $f(x)$ олох нь гол зорилго юм.Өөрөөр хэлбэл $f(x_i) = y_i$ буюу дээр дурдсан жишээг харна уу. Тэгвэл хайж буй функцыг доорх хэлбэртэй бичие,

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^{M} \phi_k(x_i)\alpha_k, \tag{2}$$

энд суурь функц (base function) $\phi_k(x_i)$ ба параметер α_k. Дээр дурдсан (1)-ийн хувьд $M = 2, \quad i = 1, 2, \ldots, 5$ ба $\phi_1(x_i) = 1, \quad \phi_2(x_i) = x_i$. Манай жишээний хувьд тэгшитгэл (2),

$$f(x_i) = y_i = \phi_1(x_i)\alpha_1 + \phi_2(x_i)\alpha_2 = \alpha_1 + x_i\alpha_2, \tag{3}$$

хэлбэртэй болох ба хэрэв дээрх тэгшигтгэлээс α_k параметрийг олбол $\alpha_1 = 1$ мөн $\alpha_2 = 2$ болох буюу тэгшитгэл (1) ийг амархан тодорхойлж болно. Цаашиалбал суурь функц маань 2 нөхцлийг $\phi_k(x_k) = 1, \quad \phi_k(x_i) = 0, (k = 1, 2, \ldots N)$ хангадаг гэж үзээ. Тэгвэл

$$\phi_k(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_N)}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_N)} \tag{4}$$

хэлбэртэй суурь функцыг бичих боломжтой. Цаашид ойлгомжтой байхын тулд $\phi_k(x)$-ийг $l_k(x)$ гэж тэмдэглэнэ.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} l_k(x)\alpha_k, \tag{5}$$

буюу параметр α_k-г олбол,

$$f(x_i) = y_i = \sum_{k=1}^{M} \phi_k(x_i)\alpha_k = \alpha_i, \tag{6}$$

цаашилбал

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} l_k(x)y_k. \tag{7}$$

Одоо дээр дурдсан жишээний хувьд олсон тэгшитгэл (1)-ийг python программын хэл дээр бичсэн Лагранж интерполяц (тэгшитгэл 7)-д зориулсан бэлэн package ашиглан параметр (коэффицент)-ыг нь хэрхэн олж болохыг сонирхоё. Эндээс харвал бидний бидний таамаглаж олсон шугаман тэгшитг-

Лагранж Интерполяц (Lagrange Interpolation)

In [27]:
```
from scipy.interpolate import lagrange
from numpy.polynomial.polynomial import Polynomial
```

In [28]:
```
x=np.array([1,2,3,4,5])
y=np.array([3,5,7,9,11])
```

In [29]:
```
poly = lagrange(x, y)
coef=Polynomial(poly).coef
```

In [30]:
```
for i in np.around(coef,2):
    if i>0:
        print('alpha коэффицент:',i)
```

```
alpha коэффицент: 2.0
alpha коэффицент: 1.0
```

Рис. 2:

эл 1-ийн параметрыг маш амархан олж байна.