Тооцон Бодох Математик: Тооцооллын Инженер

7 марта 2020 г.

1 Шугаман Бус Систем Тэгшитгэл

Бид бүхэн N хувьсагчтай N шугаман тэгшитгэлийн систем $A\vec{x} = \vec{b}$ -ийн шийдийг хэрхэн олох талаар үзсэн. Энд A нь $N \times N$, харин $\vec{x}, \vec{b}$ нь N хэмжээст. Түүнээс гадна дата өгөгдөлийн хувьд хэрхэн шугаман тэгшитгэлийн шийд $\vec{x}$-ийг олохыг бид үзсэн. Гэвч N шугаман бус тэгшитгэлийн $f_i(\vec{x})$ шийдийг олох нь хялбар биш юм. Шугаман бус систем тэгшитгэлийг $f_i(\vec{x}^*) = 0$ хангах $\vec{x}^*$-ийг $(i = 1, \ldots, N; \vec{x} = (x_1, \ldots, x_N))$ олох нь зорилго юм. Шугамна бус тэгшитгэлийг доорх байдлаар илэрхийлж болно,

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &= f_1(x_1, x_2, \ldots x_N) = 0 \\ f_2(\vec{x}) &= f_2(x_1, x_2, \ldots x_N) = 0 \\ &\vdots \\ f_N(\vec{x}) &= f_N(x_1, x_2, \ldots x_N) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ерөнхий тохиолдолд $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ гэж илэрхийлдэг гэдгийг бид харсан. Цаашилбал

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_N(\vec{x}) \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

Өмнө хэсэгт бид $N = 1$ үеийг сонирхосон. Одоо функц $f_i(\vec{x})$-ын Тейлорын цувааг сонирхоё.

$$f_i(\vec{x}^*) = f_i(\vec{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_j}(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}). \tag{3}$$

Иймээс ерөнхий систем тэгшитгэлийн хувьд

$$\vec{F}(\vec{x}^*) \approx \vec{F}(\vec{x}^{(k)}) + J(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}). \tag{4}$$

Энд $J(\vec{x}^{(k)})$-ийг нь Якобиан матриц гэдэг бөгөөд доорх байдлаар илэрхийлдэг,

$$J(\vec{x}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N(\vec{x}^{(k)})}{\partial x_N} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

2 Ньютоны арга

Ньютоны аргын хувьд тэгшитгэл 4-ийг ашиглан

$$\underbrace{\vec{F}(\vec{x}^*)}_{0} \approx \vec{F}(\vec{x}^{(k)}) + J(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}), \tag{6}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - J^{-1}(\vec{x}^{(k)})\vec{F}(\vec{x}^{(k)}). \tag{7}$$

Бодит хэрэглээнд $J^{-1}(\vec{x}^{(k)})$-ийг тооцохын оронд

$$J(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}) = -\vec{F}(\vec{x}^{(k)}) \tag{8}$$

тэгшитгэлийг тооцон $\vec{y}^{(k)} = (\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)})$-ийг олох бөгөөд $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{y}^{(k)}$ гэж авч үздэг.

Algorithm 1 Ньютоны АРГА

1: **ОРОЛТ:**
2: $\vec{x}^{(0)}$ ▷ N хэмжээст анхны таамаг шийд вектор.
3: tol ▷ Хэрэв $\| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \| < tol$ бол алгоритм зогсоно.
4: N_{max} ▷ Хэрэв $N > N_{max}$ бол алгоритм зогсоно.
5: **ГАРАЛТ:**
6: ойролцоо шийд $\vec{x}^{(k)}$ ▷ тэгшитгэл $\vec{F}(\vec{x}^{(k)}) = 0$-ийг хангах.
7: $k = 0$
8: **while** $N \leq N_{max}$ **do**
9: $\quad\vec{F}(\vec{x}^{(k)})$ болон $J(\vec{x}^{(k)})$-ийг тооцох.
10: $\quad J(\vec{x}^{(k)})\vec{y}^{(k)} = -\vec{F}(\vec{x}^{(k)})$-ийг тооцох.
11: $\quad\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{y}^{(k)}$
12: $\quad$**if** $\| \vec{y}^{(k)} \| < tol$ **then**
13: $\qquad$break
14: $\quad k = k + 1$
15: **Алгоритм Зогсох.**

3 Шугаман Бус Оптимизац

Язгуур олох алгоритмыг ашиглан оптимизацын бодлогын шийдийг олж болох уу? Хамгийн бага утгыг нь олох шаардлагатай доорх шугаман бус бодлогыг авч үзэе.

$$\min_{\vec{x}} E(\vec{x}). \tag{9}$$

Мөн түүнчлэн $\max_{\vec{x}} E(\vec{x})$ шийдийг олох нь $\min_{\vec{x}}(-E(\vec{x}))$ шийд олохтой ижил юм. $E(\vec{x})$-ыг онцгой цэгд $\vec{x}^{(*)}$ шинжилхийн тулд

$$\nabla E(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\vec{x}^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E(\vec{x}^*)}{\partial x_N} \\ \vdots \\ \frac{\partial E(\vec{x}^*)}{\partial x_N} \end{pmatrix} = 0 \tag{10}$$

тэгшитгэлийг үнэлнэ. Онцгой цэг $\vec{x}^{(*)}$ нь $E(\vec{x})$-ын хамгийн бага цэг нь хэрэв доорх нөхцөл хангагддаг бол

$$\nabla^2 E(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E(\vec{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 E(\vec{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E(\vec{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 E(\vec{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 E(\vec{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E(\vec{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 E(\vec{x}^*)}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 E(\vec{x}^*)}{\partial x_N \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 E(\vec{x}^*)}{\partial x_N \partial x_N} \end{pmatrix} > 0. \tag{11}$$

Тэгшитгэл 11 нь шугаман бус систем тэгшитгэлийг үүсгэдэг,

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla E(\vec{x}^*) = 0. \tag{12}$$

Энэхүү тэгшитгэлийн шийдийг олохын тулд Ньютоны аргыг хэрэглэх боломжтой бөгөөд Якобиан матриц нь $J(\vec{x}^{(k)}) = \nabla^2 E(\vec{x}^{(k)})$ болно. Иймээс тэгшитгэл 8 нь

$$\begin{aligned} &\nabla^2 E(\vec{x}^{(k)})\vec{y}^{(k)} = -\nabla E(\vec{x}^{(k)}), \\ &\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{y}^{(k)}. \end{aligned} \tag{13}$$

хэлбэрт орно. Ньютоны арга нь давталт бүрд 2-дугаар эрэмбийн уламжлалыг тооцох шаардлагатай болдог буюу иймээс бодит хэрэглээнд тохиромжгүй байдаг. Тиймээс

$$\begin{aligned} &\vec{y}^{(k)} = -\nabla E(\vec{x}^{(k)}), \\ &\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \eta\vec{y}^{(k)}, \end{aligned} \tag{14}$$

тэгшитгэлийг тооцох нь хялбар байдаг. Тэгшитгэл 14-ийг Steepest Descent арга гэж нэрлэдэг. **Жишээ бодлого:** эх сурвалж: Numerical Analysis by R.L.Burden and J.D.Faires and ETH. Түүнчлэн бодлогонд зориулж энгийн c++ кодыг хавсаргав.

The pressure required to sink a large, heavy object in soft homogeneous soil, that lies above hard-base soil, can be predicted by the pressure required to sink smaller objects in the same soil. The bridge-foundations can be modeled as circular plates. The pressure p required to sink a circular plate of radius r in the soft soil to a certain depth d can be approximated by an expression:

$$p(r) = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

where $k_1,\ k_2 > 0$, and k_3 depend on d and the consistency of the soil but not on the radius of the plate.

a) You have the following data: a pressure of 100 N/m^2 is required to sink a plate of radius $r = 0.1$ m to depth $d = 1$ m, whereas a plate of radius $r = 0.2$ m requires a pressure of 120 N/m^2 and a plate of radius $r = 0.3$ m requires a pressure of 150 N/m^2 to get sunk to the same depth d. Formulate the system of equations to be solved for the coefficients $k_1,\ k_2$, and k_3 and the Jacobian matrix of the resulting system.