Тооцон Бодох Математик: Тооцооллын Инженер

20 мая 2020 г.

1 Магадлалын Үндэс

Өмнөх хэсэгт магадлалын талаар ерөнхий ойлголттой болсон. Цаашибал магадлалын талаар ярих бүрд **санамсаргүй хувьсагч (random variable)** $\mathbf{X}$ хэмээх ойлголт гарч ирдэг. Жишээ болгож зургаан талтай (тал бүрийг нь үсгээр тэмдэглэвэл: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$) нэг ширхэг шоог сонирхоё.Тэгвэл **түүврийн огторгуйн олонлог (sample space)**-ийг $\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ гэж тэмдэглэе. Нийт дэд олонлогийн тоо нь

$$n = 2^6, \mathbb{F} = \{\{\varnothing\}, \{f_1\}, \ldots, \{f_6\}, \ldots, \{f_1, f_2, \ldots, f_6\}\}.$$

Шооны тал бүрд харгалзах магадлал нь тэнцүү $P(\{f_i\}) = \frac{1}{6}, f_i = f_1, f_2, \ldots, f_6$ гэж үзээ. Цаашилбал санамсаргүй хувьсагч хэмээх ойлголтыг тайлбарлахын тулд шооны тал бүрийг тасралтгүй тоон шулуунд орших $\mathbf{X} \in \{10, 20, 30, 40, 60\}$ тоонд харгалзуулая.

$$\mathbf{X} : f_i \to \mathbf{X}(f_i),$$

$\mathbf{X}(f_1) = 10, \mathbf{X}(f_2) = 20, \mathbf{X}(f_3) = 30, \mathbf{X}(f_4) = 40, \mathbf{X}(f_5) = 50, \mathbf{X}(f_6) = 60.$ Магадлалыг зөвхөн тохиолдол (event)-ын хувьд тодорхойлдог учир санамсаргүй хувьсагчийн тохиолдол нь

$$\{\mathbf{X}(f_i) < x\}$$

гэж тодорхойлогддог бөгөөд энд x нь дурын тоо болно. Хэрэв $x = 35$ бол тохиолдол нь

$$\{\mathbf{X}(f_i) < 35\} = \{\mathbf{X}(f_1) = 10, \mathbf{X}(f_2) = 20\}$$

бөгөөд шооны нэгдүгээр эсвэл хоёрдугаар талд нь магадлал $P(\{\mathbf{X}(f_1), \mathbf{X}(f_2)\}) = 2/6$ харгалзуулна гэсэн үг. Дахин жишээ болгож нэгэн зоосыг авч үзэе,

$$\Omega = \{f_1, f_2\}, \mathbb{F} = \{\{\varnothing\}, \{f_1\}, \{f_2\}, \{f_1, f_2\}\}.$$

Цаашилбал зоосны тал бүрийг $\mathbf{X} \in \{0, 1\}$ тоонд харгалзуулая,

$$\mathbf{X}(f) = \begin{cases} 1, & f = f_1 \quad \text{буюу f нь сүлд үед.} \\ 0, & f = f_0 \quad \text{буюу f нь тоо үед.} \end{cases} \tag{1}$$

буюу хэрэв зоосыг 100 удаа хаявал 100 ширхэг санамсаргүй хувьсагч $\{0, 1\}$-үүдийн цуглуулгыг олж авах болно. **Дүгнэж хэлбэл санамсаргүй хувьсагч (random variable) X нь түүврийн огторгуйд Ω харъялагдах үр дүнгүүдийг бодит тоонд харгалзуулдаг буюу буулгадаг.** Дээрх жишээнүүд нь түүврийн огторгуйн Ω үр дүнгүүд нь тасралттай үед тодорхойлогдсон билээ. Гэвч бидний амьдарч буй хүрээлэн буй орчинд явагддаг физик үзэгдлүүд нь тасралтгүй хувьсагчуудаар тодорхойлогддог. Үүний нэгэн жишээ бол тодорхой цаг, хугацааны завсар дахь машины хурд $v(t)$ болон зам $s(t)$ билээ. Учир нь машин a-аас b цэгд очихын тулд үргэлж тэгээс ялгаатай хурдтай байх хэрэгтэй. Тиймээс **тасралтгүй санамсаргүй хувьсагч X**-ийн тодорхой утгаас x бага буюу тэнцүү байх магадлалыг **cumulative түгэлтийн функц, cumulative distribution function (CDF)** гэж нэрлэдэг,

$$P(\{\mathbf{X} \leq x\}) = F_{\mathbf{X}}(x). \tag{2}$$

Дээр дурдсан нэг ширхэг зоосны хувьд CDF-ийг тооцож үзээ. $x = 10$ үед тэгшитгэл (1)-ийн дагуу $\mathbf{X}(f_1) = 1 \leq x, \mathbf{X}(f_0) = 0 \leq x$ нөхцөлүүд хангагддаг бол

$$F_{\mathbf{X}}(10) = P(\{\mathbf{X}(f) \leq x\}) = P(\{\mathbf{X}(f_0), \mathbf{X}(f_1)\}) = 1,$$

$x = 0.4$ үед тэгшитгэл (1)-ийн дагуу $\mathbf{X}(f_0) = 0 \leq x$ нөхцөл хангагддаг бол

$$F_{\mathbf{X}}(0.4) = P(\{\mathbf{X}(f) \leq x\}) = P(\{\mathbf{X}(f_0)\}) = 1/2.$$

Ихэнхи тохиолдолд $F_{\mathbf{X}}(x) = F(x)$ гэж тэмдэглэдэг. CDF нь санамсаргүй хувьсагч x-ээс хамаардаг учир уламжлалыг нь тодорхойлох боломжтой;

$$\frac{dF(x)}{dx} = p(x), \tag{3}$$

үүнийг **магадлалын нягтын функц (probability density function, pdf)** гэж нэрлэдэг төдийгүй $p(x) \geq 0$ ба $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$ нөхцөлүүд заавал хангагдах ёстой. Тэгшитгэл (3)-ыг $[-\infty, +\infty]$ мужид интегралчилбал

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\epsilon) d\epsilon, \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1. \tag{4}$$

Цаашилбал

$$\int_{a}^{b} p(x) dx = P(\{a \leq \mathbf{X} \leq b\}) = F(b) - F(a). \tag{5}$$

Инженерийн хэрэглээнд түгээмэл хэрэглэгддэг нь нэгэн төрлийн түгэлтийн функц $\mathbb{U}([a, b])$ бөгөөд pdf нь доорх байдлаар тодорхойлогддог,

$$p_{\mathbb{U}} = \frac{1}{b-a}$$

Өөр нэгэн түгээмэл хэрэглэгддэг нь нормал түгэлтийн функц $\mathbb{N}(\mu, \sigma)$ бөгөөд pdf нь доорх байдлаар тодорхойлогддог,

$$p_{\mathbb{N}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right\}.$$

1.1 Варианс болон хазайлт

Санамсаргүй хувьсагчийн $\mathbf{X}$ дундаж утга буюу expected value $\mathbb{E}$ нь утгын мужид Ω доорх байдлаар тодорхойлогддог,

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \langle \mathbf{X} \rangle = \int_{\Omega} xp(x)dx. \tag{6}$$

Тасралттай хувьсагчийн хувьд дундаж утга нь

$$\mathbb{E}(x) = \sum_i x_i P(x_i). \tag{7}$$

Цаашилбал санамсаргүй хувьсагчуудын $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ хувьд дурын тооны хувьд a, b доорх шинж чанар хангадаг

$$\mathbb{E}[a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}] = a\mathbb{E}[\mathbf{X}] + b\mathbb{E}[\mathbf{Y}]. \tag{8}$$

Санамсаргүй хувьсагчийн $\mathbf{X}$ варианс буюу дундаж утгаас хазайх хазайлт нь

$$Var[\mathbf{X}] = \sigma^2[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^2]. \tag{9}$$

Хэрэв дурын 2 санамсаргүй хувьсагчууд $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ нь хоорондоо хамааралгүй байвал эдгээрийн үржвэрийн expected value нь тус бүрийн үржвэрээр тодорхойлогдоно,

$$\mathbb{E}[\mathbf{XY}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}]\mathbb{E}[\mathbf{Y}]. \tag{10}$$

Мөн түүнчилэн варийнсын хувьд шугаман шинж чанар хадгалагддаг

$$\sigma^2\left[\sum_i a_i \mathbf{Y}_i\right] = \sum_i a_i^2 \sigma^2[\mathbf{Y}_i]. \tag{11}$$

2 Монте Карло Интегралчилал

Монте Карло Интегралчилалын аргын талаар тайлбарлахын өмнө, π тоог хэрхэн энэхүү аргыг ашиглан тооцох талаар сонирхоё. Бид r радиустай тойргийн талбай нь πr^2 гэдгийг мэднэ. Тойргийг ашиглан π тоог тооцохын тулд тооцоогоо бяцхан хялбрчилан $r = 1$ бөгөөд тойргийн дөрөв хуваасны нэгийг авч үзэе. Энэ тохиолдолд тойргийн 1/4-ийн талбай нь $\pi/4$-тэй тэнцүү болно. Математикийн хэллэгээр тойргийн 1/4 хэсгийн талбай нь $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ функцын интегралтай тэнцүү буюу функц нь доорх шинж чанартай,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \\ 0, & \text{else.} \end{cases} . \tag{12}$$

Функцын $\int_0^1 f(x,y)dxdy$ интеграл нь доор үзүүлсэн зурагны усан сангийн

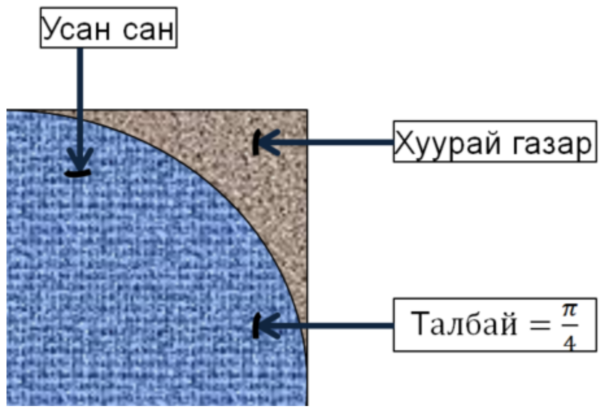

Рис. 1: Pond-Ground

талбайтай тэнцүү буюу үгээр илэрхийлбэл, бид нүдээ аниж байгаад чулууг дээрх дөрвөлжин дүрс үрүү шидлээ гэж бодоё. Хэрэв чулуу усанд унавал 1, харин газарт унавал тоолохгүй буюу 0 гэж үзвэл, нийт усанд унасан чулуу нь $\pi/4$-тэй тэнцүү байх болно. Эдгээр шидсэн чулууг **түүврийн санамсаргүй цэг (random sampling point)**-үүд гэж хэлдэг. Цаашилбал өгөгдсөн d хэмжээст функцын хувьд, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, интеграл нь

$$I = |\Omega|\langle f \rangle \tag{13}$$

$\langle f \rangle = \int_\Omega f(\vec{x})p(\vec{x})d\vec{x}$ бөгөөд $p(\vec{x}) = 1/|\Omega|$ нэгэн төрлийн функц үед

$$\langle f \rangle = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(\vec{x})d\vec{x}. \tag{14}$$

Өмнөх хэсэгт дурдсанчилан $\langle f \rangle$-ийг тооцохын тулд f-ийг n^d цэгүүдэд авч үзэх шаардлагатай болдог буюу үүнийг **curse of dimensionality** гэж хэлдэг гэж үзсэн. Үүнийг даван туулахын тулд M ширхэг **түүврийн санамсаргүй цэг (random sampling point)**-үүдийг нэгэн төрлийн функцээс түүвэрлэн аваад, дундаж утгыг нь доорх байдлаар тооцдог

$$\langle f \rangle \approx \langle f \rangle_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(\vec{x}_i). \tag{15}$$

Үүнийг **Монте Карло Интегралчилал**-ын арга гэж хэлдэг. Энгийн жишээ болгон $d = 1$ нэг хэмжээст функцын дундаж утгыг , $|\Omega| = b - a, M = 4$ тохиолдолд зургаар илэрхийлэе.

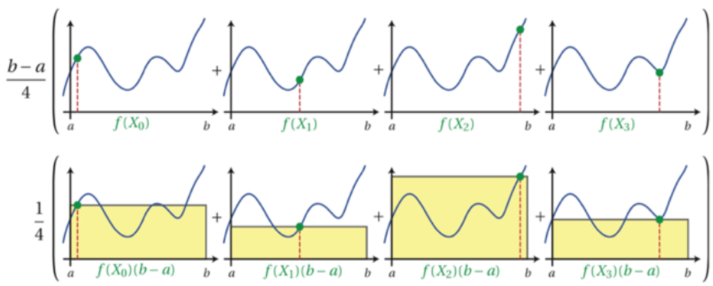

Рис. 2: (Source: computational methods ETH)

Анхаарах зүйл бол бидний тооцож буй функц $\langle f \rangle_M$ нь **түүврийн санамсаргүй цэг**-үүдээс хамаарч буй учир $\langle f \rangle_M$ мөн санамсаргүй дурын утга болж хувирдаг. Иймээс энэнүү функцын expected value-г нь авч үзэх шаардлагатай болдог,

$$\mathbb{E}[\langle f \rangle_M] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(\vec{x}_i)\right] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\langle f \rangle = \langle f \rangle, \tag{16}$$

энэ нь бодит утгатай тэнцүү байдаг. **Монте Карло Интегралчилал**-ын алдаа нь

$$\begin{aligned} e_M &= \sqrt{Var[\langle f \rangle_M - \langle f \rangle]}, \quad \mathbb{E}[\langle f \rangle_M] = \langle f \rangle \\ e_M &= \sqrt{Var[\langle f \rangle_M]}, \quad e_M = \sqrt{\frac{Var[f]}{M}} = \mathbb{O}(M^{-1/2}). \end{aligned} \tag{17}$$

Эндээс үзвэл **Монте Карло Интегралчилал**-ын аргын алдаа нь өмнөх хэсэгт дурдсан интегралыг тоон аргаар ойролцоолох аргуудаас бага байна гэдэг нь харагдаж байна.