1 Би-сплайн арга

Би-сплайнууд нь полиномиал d зэргийн суурь функц бөгөөд дурын сплайн функцыг үүсгэх боломжтой. d полиномиал зэргийн M ширхэг Би-сплайн функцүүдийг өгөгдсөн цэгэн векторын (knot vector) хувьд үүсгэх боломжтой. Цэгэн векторийн элементүүд нь t_j $(j = 1 \dots M + d + 1)$. Цэгэн векторууд нь эрэмблэгдсэн байх ёстой $(t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{M+d+1})$ бөгөөд хөрөөний ирэн полиномиал функцын завсрыг тодорхойлдог. d зэргийн хөрөөний ирэн полиномиал функцээс бүрдэх дурын полиномиал функц $S_{d,t}$ -ийг доорх байдлаар илэрхийлэх боломжтой

$$S_{d,t}(x) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i B_{i,d,t}(x). \tag{1}$$

Энд α_i нь бидний тодорхойлох хэрэгтэй чөлөөт параметр юм. Үр дүн функц нь өөр өөр интервалд тодорхойлогдсон $(t_i \leq x \leq t_{i+1})$ d зэргийн хөрөөний ирэн полиномиудын цуглуулагаар тодорхойлогдоно. Би-сплайн функц өөрөө хөрөөний ирэн полиномуудын цуглуулагааар тодорхойлогддог бөгөөд доорх рекурент шинж чанарыг хангадаг

$$B_{i,0,t}(x) = \begin{Bmatrix} 1 & if & t_i \leq x \leq t_{i+1}, \\ 0 & & otherwise, \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Энэ нөхцлийг хангаж буй ерөнхий тэгшитгэл нь

$$B_{i,d,t}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+d} - t_i} B_{i,d-1,t}(x) + \frac{t_{i+d+1} - x}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} B_{i+1,d-1,t}(x). \tag{3}$$

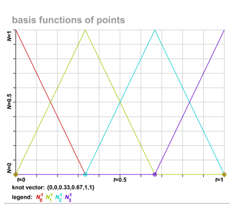

Рис. 1: Би-сплайн суурь функцыг $d = 1$.

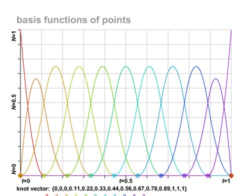

Рис. 2: Би-сплайн суурь функцыг $d = 2$.

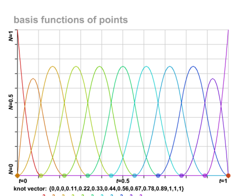

Рис. 3: Би-сплайн суурь функцыг $d = 3$.

Цэгэн векторыг зураг тус бүрд өөр өөр өгсөн байгааг дээрх зурагнаас харах боломжтой. Рис. 1 ийн хувьд $\{0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1\}$, мөн Рис. 2 ийн хувьд цэгэн вектор нь $\{0, 0, 0, 0.11, 0.22, 0.33, 0.44, 0.56, 0.67, 0.78, 0.89, 1, 1, 1\}$. Цэгэн векторууд нь давтагдах боломжтой. Хэрэв цэгэн вектрын эхний $d+1$ болон сүүлийн $d+1$ элементүүд нь тэнцүү байвал цэгэн векторуудыг **БЭХЛЭГДСЭН (clamped)** гэж хэлдэг.

$$\underbrace{t_1, \ldots t_{d+1}}_{\text{d+1 тэнцүү}}, \underbrace{t_{d+2} \ldots t_M}_{\text{M-d-1 дотоод}}, \underbrace{t_{M+1} \ldots t_{M+d+1}}_{\text{d+1 тэнцүү элементүүд}}$$

БЭХЛЭГДСЭН (clamped) элементүүдтэй Би-сплайн полиномын хувьд эхний болон сүүлийн Би-сплайн нь нэгтэй тэнцүү ($B_{1,d,t}(t_1) = B_{M,d,t}(t_{M+d+1}) = 1$). Харин бусад элементүүдийн хувьд тэгтэй тэнцүү ($B_{i,d,t}(t_1) = B_{i,d,t}(t_{M+d+1}) = 0, \quad i = 2 \ldots M-1$). Дотоод цэгэн элементүүд $M-d-1$ нь өөр хоорондоо ижил биш үед үр дүн сплайн функц нь $d-1$ зэрэг хүртэл тасралтгүй уламжлалтай. Иймээс дурын полиномыг доорх байдлаар тодорхойлж болно,

$$S_{d,t}(x) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i B_{i,d,t}(x), \quad t_{d+1} \leq x < t_{M+1}. \tag{4}$$

N дата $\{x_i, y_i\}, i = 1, \ldots, N$ нөхцлийг ($M \leq N$) хангах үед, бид тэгшитгэл 4-ийн параметр α_i хамгийн бага квадратын аргатай ижил замаар олох боломжтой. Хэрэв $M = N$ бол, полином $S_{d,t}(x)$ нь бүх датаг дайрч байхаар байгуулах боломжтой. Анхааруулж хэлэхэд нэг асуудал нь датаны нэг утгыг нь өөрчилөхөд, бүх параметрүүдийг дахин тооцоолох хэрэгтэй болдог. Энэ асуудалыг шийдэхийн тулд өөр нэгэн аргыг авч үзээ. Тэрхүү аргыг NURBS гэж нэрлэдэг.

2 NURBS

Муруй шугаман датаг ойролцоолох функцыг олох нь төвөгтэй бөгөөд төгс дөхүүлэн, ойролцоолох $f(x) \approx y(x)$ бараг боломжгүй юм. Энэ тохиолдолд датаг параметрээс $x(s), y(s)$ хамааруулан тодорхойлсоны дараа, дурын полиноимал функцээр ойролцоолно. Энэхүү ойролцоолж буй аргыг NURBS гэж хэлдэг. NURBS нь датаг параметрт тэгшитгэлд хувилгах эсвэл жин харгалзуулан ойролцоолох юм. Ойролцоолж буй үр дүн функц нь дата цэгийг дайрж гарахгүй бөгөөд тасралтгүй уламжлалтай.

Өгөгдсөн N дата $\vec{p} = \{x_i, y_i\}, i = 1, \ldots, N$. Бид одоо d зэргийн, $t_j, j = 1, \ldots, N+d+1$ цэгэн вектортой N Би-сплайн $B_{i,d,t}(s)$-ийг тодорхойлно. Цаашилбал бид дата бүрд жин w_i мөн датаг Би-сплайн ашиглан ойролцоолно. Үүний дараа муруй шугамыг параметр тэгшитгэлд шилжүүлэнэ $\vec{p}(s) = \{x_i(s), y_i(s)\}, t_{d+1} \leq s \leq t_{N+1}$ доорх аргаар

$$\vec{p}(s) = \sum_{i=1}^{N} R_{i,d,t} \vec{p}_i, \quad R_{i,d,t} = \frac{B_{i,d,t}(s) w_i}{\sum_j B_{j,d,t}(s) w_j}. \tag{5}$$

Энд Би-сплайныг $B_{i,d,t}(s)$ тэгшитгэл 2 ба 3-д тодорхойлсон. NURBS нь Би-сплайн болон Bezier муруйн ерөнхий хэлбэр юм.

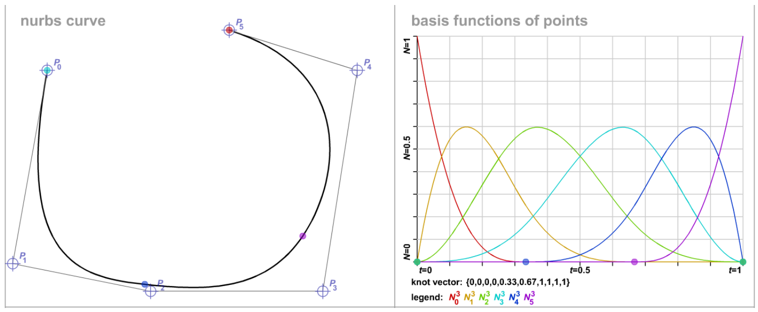

Рис. 4: 6-н цэг $P_0, \ldots, P_5$ өгөгдсөн үед кубик полином хэрхэн ойролцоолж буйг үзүүлэв. Эх сурвалж: http://geometrie.foretnik.net/files/NURBS-en.swf

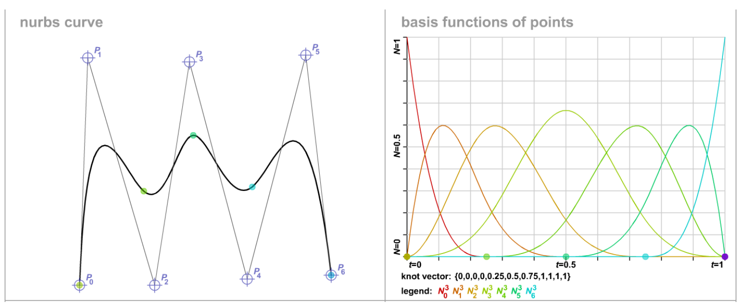

Рис. 5: 6-н цэг $P_0, \ldots, P_6$ өгөгдсөн үед кубик полином хэрхэн ойролцоолж буйг үзүүлэв.

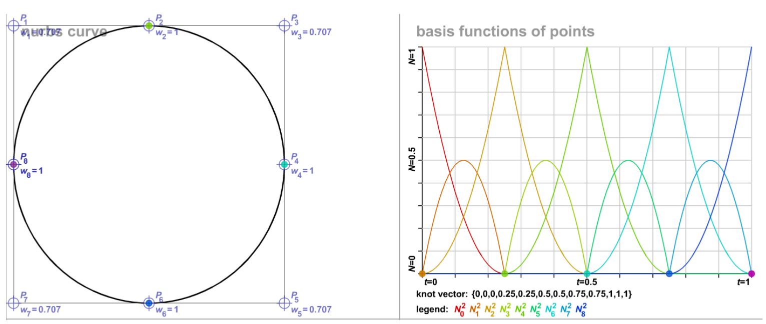

Рис. 6: 9-н цэг $P_0, \ldots, P_9$ мөн цэг бүрд жин w_i өгөгдсөн үед кубик полином хэрхэн ойролцоолж буйг үзүүлэв. Жин нь цэг бүрд ижил буюу $w_i = 1$ бол Bezier муруй болно.