Тооцон Бодох Математик: Тооцооллын Инженер

22 апреля 2020 г.

1 Adaptive Integration

Ричардсоны экстреполяцын хувьд функц $F(0)-$ын ойролцоо шийдийг $h = h/2$ үед доорх байдлаар тодорхойлох боломжтой гэдгийг авч үзсэн.

$$F(h/2) = F(0) + F^{'}(0)\frac{h}{2} + F^{''}(0)\frac{h^2}{8}. \tag{1}$$

Тэгвэл энэ үед тэгшитгэлийн алдаа нь

$$\epsilon(h/2) = F(h/2) - F(0) = F^{'}(0)\frac{h}{2} + F^{''}(0)\frac{h^2}{8}, \tag{2}$$

гэж тодорхойлогдоно. Иймээс алхамын хуваалт бүрд алдааг нь дээрх маягаар тооцох боломжтой. Өмнөх хэсэгт функцын интегралыг тооцохын тулд алхамын өргөн h нь бүх мужид ижил байсан. Гэвч зарим интегралын хувьд муж бүрийг өөр, өөр алхамд хуваах шаардлагатай болдог. Жишээ нь доорх функцын талбайг трапецын дүрмийг ашиглан олоё гэж үзээ.

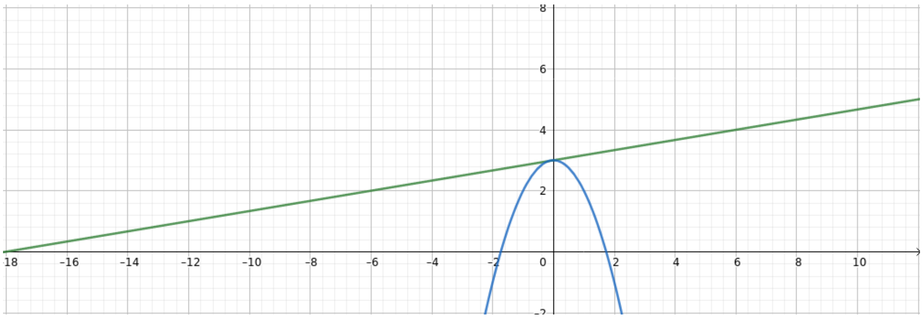


Рис. 1: F функц гэж үзээ.

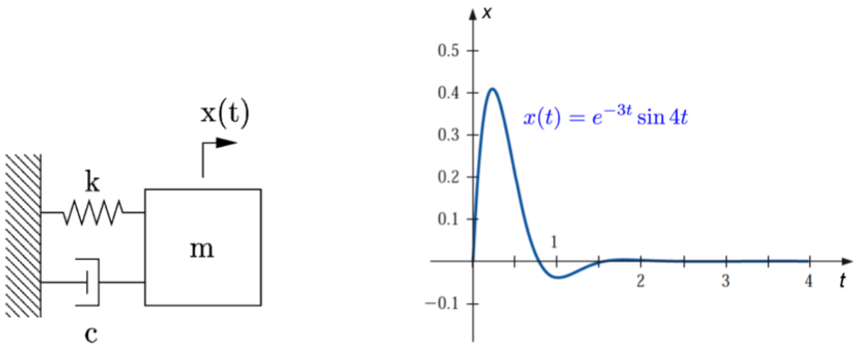
Энэхүү жишээг авч үзвэл, $[-2, +2]$ мужийг л маш бага олон алхамд h хуваах шаардлагатай, харин бусад мужийг олон алхамд h хуваах шаардлагагүй гэдэг нь харагдаж байна. Энэхүү аргыг Adaptive Integration гэж нэрлэдэг.

1.1 Жишээ бодлого

Adaptive Integration аргыг унтрах хэлбэлзлийн шийдийг олоход ашиглая. Унтрах хэлбэлзэлийн хөдөлгөөний тэгшитгэл нь $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$, $m = 1, c = 6, k = 25$, $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 4$ бөгөөд шийд нь $x(t) = e^{-3t}\sin(4t)$ гэж тодорхойлогдох бол хугацаа нь $t = 0$-оос $t = 4$ үед нийт туулсан замыг нь аналитикаар олбол

$$\int_0^4 e^{-3t}\sin(4t)dt \approx 0.160001153722807,$$

болно. Одоо тэгвэл тэгшитгэл 3-ын шийдийг Adaptive Integration аргыг



(a) (b)

Рис. 2: Spring-Damper Oscillation (source ocw.mit.edu, ETH).

ашиглан олж дээр олсон бодит үр дүнтэй нь харьцуулая. Алгоритм 1-ийн

Algorithm 1 AdaptiveTrapezoidal

Функц: AdaptiveTrapezoidal(a,b) ▷ интегралын хил $[a, b]$.
Алдааны нарийвчилал $tol = 10^{-6}$
Трапецын интегралчилах дүрмийг $[a, b]$ завсарт хэрэглэнэ.
Интегралын завсрыг 2 хуваана: $[a, m]$ мөн $[m, b]$, энд $m = (a + b)/2$.
Трапецын интегралчилах дүрмийг завсар $[a, m]$ мөн $[m, b]$-т хэрэглэнэ.
Ричардсоны экстреполяцын аргыг (2) ашиглан $[a, b]$ алдааг нь тооцно.
if хүссэн нарийвчилал tol-д хүрээгүй бол **then**
    return AdaptiveTrapezoidal(a,m)+AdaptiveTrapezoidal(m,b)
return AdaptiveTrapezoidal(a,m)+AdaptiveTrapezoidal(m,b)
гаралтын утга: $(0.108659, 0.160001)$

хувьд гаралтанд өгсөн эхний утга нь трапецын интегралын дурмийг нэг удаа ашиглахад, харин сүүлийнх нь Adaptive Trapezoidal дүрмийг ашиглаж олж авсан утгууд болно. Үүнээс үзвэл Adaptive Trapezoidal аргыг ашиглан олсон шийд нь бодит шийд (3)-тай ойролцоо олдсон байна гэдэг нь харагдсаж байна.

2 Gauss Quadrature

Бидэнд дурын функцын ойролцоо интгеграл нь доорх байдлаар өгөгдсөн гэж үзэе,

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b). \tag{3}$$

Хэрэв $f(x) = a_0 + a_1 x$ гэж өгөгдсөн бол, тэгшитгэл 3-ын зүүн гар тал нь

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (a_0 + a_1 x)dx = a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right). \tag{4}$$

Цаашилбал (4)-ийн баруун гар талыг (3)-тай харьцуулбал,

$$a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) = c_1(a_0 + a_1 a) + c_2(a_0 + a_1 b). \tag{5}$$

(5)-ын баруун гар талыг хялбарчилбал $a_0(c_1+c_2)+a_1(c_1 a+c_2 b)$ болох бөгөөд эндээс

$$c_1 = c_2 = \frac{b-a}{2}, \tag{6}$$

гэж олдох буюу (3)-т орлуулбал интегралыг ойролцоолох трапецын дүрмийг гарган авч болж байна.

2.1 Хоёр-Цэгийн Gauss quadrature

Цаашилбал интеграл 3-ын баруун гар тал нь үл мэдэгдэх 2-цэгээр тодорхойллогддог гэж үзвэл,

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_0) + c_2 f(x_1). \tag{7}$$

Кубик функц $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$-ыг ашиглан,

$$\begin{aligned}&\int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)dx = \\ &a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

өмнө дурдсан (4)-(6)-тай ижил алхмаар (7)-ийн үл мэдэгдэх коэффицентүүдийг тодорхойлоё. Тэгвэл

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{b-a}{2}, \\ c_2 &= \frac{b-a}{2}, \\ x_0 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}, \\ x_1 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2};\end{aligned} \tag{9}$$

болох бөгөөд энэхүү аргыг Хоёр-Цэгийн Gauss quadrature арга гэж хэлдэг.

2.2 n-цэгийн Gauss quadrature

2.2.1 Хермитийн полином

Өмнөх хэсгүүдэд өгөгдсөн өгөгдөлд (x_i, y_i) харгалзах зэрэгт функцын интерполяц нь $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ гэж тодорхойлогдсон буюу $p(x_i) = y_i$ хамаарлыг олох нь гол зорилго байдаг. Харин Хермитийн полиномиал интерполяц нь өгөгдөлийн уламжлалын мэдээллийг мөн ашигладаг бөгөөд доорх байдлаар тодорхойлогддог,

$$f(x_i) = y_i, f^{'}(x_i) = y_i^{'}, \tag{10}$$

энд $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Иймээс бидний зорилго бол (10)-ыг ойролцоолох $2n-1$ эрэмбийн полиномиал функцыг $f(x)$ олох юм,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)y_k + \sum_{k=1}^{n} V_k(x)y_k^{'}. \tag{11}$$

$U_k(x), V_k(x)$ нь (10)-ийг хангахын тулд доорх шинж чанартай,

$$\begin{aligned} U_k(x_j) &= \delta_{kj}, \quad U_k^{'}(x_j) = 0 \\ V_k(x_j) &= 0, \quad V_k^{'}(x_j) = \delta_{kj}. \end{aligned} \tag{12}$$

Иймээс бид Лагранжийн полиномыг ашиглан тэгшитгэл (12)-ыг илэрхийлэх боломжтой.

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_n)}, \\ U_k(x) &= \left(1 - 2L_k^{'}(x_k)(x-x_k)\right) L_k^2(x), \\ V_k(x) &= (x-x_k)L_k^2(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Тэгшитгэл (11)-ийг Хермитийн полином гэж нэрлэдэг.

2.2.2 n-цэгийн Gauss quadrature

n-цэгийн Gauss quadrature дүрмийг $[-1, +1]$ мужид тооцох нь тохиромжтой байдаг, учир нь энэ мужид функцыг ойроoцоолж буй полином (11) нь нарийвчилал өндөртэй байдаг. Иймээс бид интегралын мужийг $[a, b]$,

$$\epsilon = \frac{2x - (a+b)}{b-a}, \tag{14}$$

ашиглан $[-1, +1]$ мужид шилжүүлэх хэрэгтэй.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f(x)dx &= \sum_{k=1}^{n} y_k \int_{-1}^{+1} U_k(x)dx + \sum_{k=1}^{n} y_k^{'} \int_{-1}^{+1} V_k(x)dx, \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_k f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} v_k f^{'}(x_k), \\ u_k &= \int_{-1}^{+1} U_k(x)dx, \quad v_k = \int_{-1}^{+1} V_k(x)dx. \end{aligned} \tag{15}$$

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$
3	$\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$
4	$\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$
5	$\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$
6	$\frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right)$
7	$\frac{1}{16}\left(429x^7-693x^5+315x^3-35x\right)$
8	$\frac{1}{128}\left(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35\right)$
9	$\frac{1}{128}\left(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x\right)$
10	$\frac{1}{256}\left(46189x^{10}-109395x^8+90090x^6-30030x^4+3465x^2-63\right)$

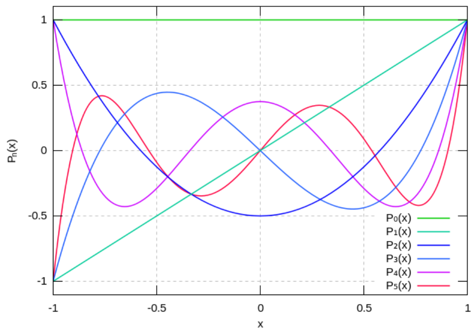


Рис. 3: Лежендр полином.

Интегралыг $\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ хэлбэрт бичихийн тулд $v_k = 0$ байх ёстой гэдгийг (15)-аас хялбархан ажиглаж болно. Цаашилбал бид бяцхан математик үйлдлийг гүйцэтгэвэл доорх үр дүнд хүрэх бөгөөд

$$\begin{aligned}
v_k &= \int_{-1}^{+1} (x-x_k) L_k^2(x) dx, \\
L_k(x) &= \frac{\overbrace{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}^{F(x)}}{\underbrace{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_n)}_{C_k}}, \\
v_k &= C_k \int_{-1}^{+1} F(x) L_k(x) dx, \\
0 &= \int_{-1}^{+1} F(x) L_k(x) dx, \quad C_k \neq 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

хангах x_k-үүдийг тодорхойлох хэрэгтэй болно гэсэн үг юм. $F(x) = P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$-ийг Лежендрийн полином гэж нэрлэдэг (Зураг 2). Эцэст нь n-цэгийн Gauss Quadrature нь доорх байдлаар тодорхойлогдоно,

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} u_k f(x_k), \quad u_k = \frac{2}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2}. \tag{17}$$