Тоон аргууд

X-Scientist

June 2019

1 Ортогонал функц

Полиномиал ойролцоололын хувьд **өндөр эрэмбийн зэргийн коэффицентүүдийг**, $f(x) \approx \alpha_3 x^3$, нь тооцохгүй, зөвхөн **бага зэргийн коэффицентүүдийг** (α_1, α_2) нь функц $f(x) \approx \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$-ээс тооцож олсон гэж үзээ. Хэрэв бага эрэмбийн коэффицентүүдэд өндөр эрэмбийн коэффицентүүдийг нэмж, ойролцоолж буй функцын зэргийн эрэмбийг өөрчилөхөд, $f(x) \approx \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, бага эрэмбийн коэффицентүүдийг (α_1, α_2) дахин тооцох шаардлагатай болдог. Маш олон хэрэглээнд, бага эрэмбийн тооцож олсон параметрүүдийн утганд өндөр эрэмбийн параметрүүдийг нэмхэд бага эрэмбийн параметрийг дахин тооцохгүй байх нь чухал байдаг. Өөр үгээр хэлбэл тооцож олсон утгыг дахин тооцож олохгүй байхаар функцын эрэмбийг ихэсгэх нь чухал байдаг.

Бага эрэмбийн функц дээр нэмэлт дээд эрэмбийн хэсгийг нэмж нарийвчилан тооцоход бага эрэмбийн параметрийг дахин тооцохгүй байхад хэрэг болдог функц бол Ортогонал функц юм. Ортогонал функцууд нь ортогонал хувиргалттай ижил шинж чанартай юм. $y(x)$-ийн ойролцоололыг суурь функц $\phi_i(x)$-ээр илэрхийлбэл

$$y(x) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(x)\phi_i(x), \tag{1}$$

суурь функц нь ортогонал шинж чанарыг хангадаг

$$\langle \phi_i(x)\phi_j(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \delta_{ij}, \tag{2}$$

Энд

$$\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{Bmatrix} \tag{3}$$

шинж чанарыг хангадаг. Энэ шинж чанарыг нь ашиглан бид тэгшитгэл 1-ийн параметрийг тодорхойлж болно,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\phi_j(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(x) \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(x)\phi_i(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(x)\phi_i(x)dx \qquad (4) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j.\end{aligned}$$

Иймээс параметрийг олохын тулд

$$\alpha_j = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\phi_j(x)dx, \qquad (5)$$

тэгшитгэлийг ашиглана. Туршилтын үр дүн $\{x_i, y_i\}$ мэдэгдэж байгаа, харин функцын хамаарлын тэгшитгэл $y(x)$ мэдэгдэхгүй байгаа тохиолдолыг сонирхоё. Энэ тохиолдолд тэгшитгэл 5 интегралыг бодож параметрийг олох боломжгүй юм. хэдий тиймч суурь функц ортонормал шинж чанарыг хангаж байх ёстой бөгөөд хэмжилтийн магадлалын нягтын түгэлт нь ортогонал шинж чанарыг нь хангаж байх ёстой,

$$\langle \phi_i(x)\phi_j(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(x)\phi_j(x)p(x)dx = \delta_{ij}, \qquad (6)$$

бөгөөд параметр нь

$$\alpha_j = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\phi_j(x)p(x)dx \qquad (7)$$

гэж тодорхойлогдоно. Магадлалын нягтын функцыг нь доорх байдлаар тодорхойлоё

$$p(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \delta(x - x_n). \qquad (8)$$

Делта (Дирак делта) функц нь

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_n) = f(x_n) \qquad (9)$$

тодорхойлогддог. Иймээс параметрийг олохын тулд

$$\alpha_i \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y_n \phi_i(x_n), \qquad (10)$$

ашиглана.

2 Хэрхэн ортонормал суурь функц үүсгэх вэ?

Хэрэв бидэнд ортонормал шинж чанарыг (тэгшитгэл 6) хангадаггүй $g_i(x)$ суурь функцүүд өгөгдсөн бол Грамм Шмидтийн ортогоналчилах аргыг ашиглан ортонормал суурь функцүүдийг $\phi_i(x)$ үүсгэх боломжтой;

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \frac{g_1(x)}{(\int g_1(x)g_1(x)dx)^{1/2}}, \\
\tilde{\phi}_2(x) &= g_2(x) - \phi_1(x)\int \phi_1(x)g_2(x)dx, \\
\tilde{\phi}_3(x) &= g_3 - \phi_1(x)\int \phi_2(x)g_3(x)dx - \phi_2(x)\int \phi_2(x)g_3(x)dx, \\
&\vdots \\
\tilde{\phi}_n(x) &= g_n - \sum_{i=1}^{N-1}\phi_i(x)\int \phi_i(x)g_n(x)dx, \\
\phi_i(x) &= \frac{\tilde{\phi}_i(x)}{(\int \tilde{\phi}_i(x)\tilde{\phi}_i(x)dx)^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Энэхүү ортогонал суурь функц үүсгэх арга нь дурын вектор суурьнаас ортогонал суурь вектор үүсгэхтэй төстэй юм. Бидэнд дата өгөгдсөн үед ортогонал функц нь хэмжилтийн таамагласан утгаар (expected value) тодорхойлогддог,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_k(x) &= g_n - \sum_{i=1}^{N-1}\phi_i(x)\int \phi_i(x)g_k(x)p(x)dx, \\
\phi_i(x) &= \frac{\tilde{\phi}_i(x)}{(\int \tilde{\phi}_i(x)\tilde{\phi}_i(x)p(x)dx)^{1/2}},
\end{aligned} \tag{12}
$$

энд $p(x) \approx \exp -x^2$ бол Хермитийн полином, $p(x) \approx \exp -x$ бол Лагуэрийн полиномууд, харин $p(x) \approx (1-x^2)^{-1/2}$ Чебишевийн полином гэж нэрлэдэг. Хэрэв N дата өгөгдсөн бол интегралыг нийлбэрээр солих хэрэгтэй буюу

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_k(x) &= g_n - \sum_{i=1}^{N-1}\phi_i(x)\sum_{n=1}^{N}\phi_i(x_n)g_k(x_n)p(x_n), \\
\phi_i(x) &= \frac{\tilde{\phi}_i(x)}{(\sum_1^N \tilde{\phi}_i(x_n)\tilde{\phi}_i(x_n)p(x_n))^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

2.1 Хэрэглээ

Бидэнд суурь функц $g_1 = 1, g_2 = x, g_3 = x_2$ өгөгдсөн, математикт $g = \{1, x, x^2\}$ гэж тэмдэглэдэг, бөгөөд хэмжилтийн утгууд { (-3,0), (-1,1/4), (1, 1/2), (3,1)} нь гэж тодорхойлогдмон. Тэгвэл өгөгдөлд зориулж ашиглан ортогонал функцыг $\tilde{\phi} = \{\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3\}$ Грам Шмидтийн арга ашиглан байгуулая. Эхний алхам,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1(x) &= \frac{g_1(x)}{(\sum_{n=1}^{N} g_1(x_n) g_1(x_n) p(x_n))^{1/2}} = \frac{\tilde{\tilde{\phi}}_1(x)}{\langle \tilde{\tilde{\phi}}_1(x) \tilde{\tilde{\phi}}_1(x) \rangle^{(1/2)}}, \\
\tilde{\phi}_1(x) &= \frac{1}{(g_1(x_1) g_1(x_1) p(x_1) + g_1(x_2) g_1(x_2) p(x_2) + g_1(x_3) g_1(x_3) p(x_3))^{1/2}}, \\
\tilde{\phi}_1(x) &= 1,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

энд $g_1 = g_1(x_1) = g_1(x_2) = g_1(x_3) = 1$. Хоёр дугаар алхам $\tilde{\phi}_2(x)$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\phi}}_2(x) &= g_2(x) - \phi_1(x) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \phi_1(x_n) g_2(x_n), \\
\tilde{\tilde{\phi}}_2(x) &= x - \phi_1(x) \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{4} \phi_1(x_n) x_n, \\
\tilde{\tilde{\phi}}_2(x) &= x - \phi_1(x) \frac{1}{4} (\phi_1(x_1) x_1 + \phi_1(x_2) x_2 + \phi_1(x_3) x_3 + \phi_1(x_4) x_4), \\
\tilde{\tilde{\phi}}_2(x) &= x - 1 \frac{1}{4} (1(-3) + 1(-1) + 1(1) + 1(3)) = x \\
\tilde{\phi}_2(x) &= \frac{\tilde{\tilde{\phi}}_2(x)}{\langle \tilde{\tilde{\phi}}_2(x) \tilde{\tilde{\phi}}_2(x) \rangle^{(1/2)}} = \frac{x}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

гэх мэтчилэн тэгшитгэл 13-ийг ашиглан хамгийн сүүлийн ортогонал суурь $\phi_3(x)$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\phi}}_3(x) &= g_3(x) - \phi_1(x) \sum_{i=1}^{4} \phi_2(x_n) g_3(x_n) - \phi_2(x) \sum_{i=1}^{4} \phi_2(x_n) g_3(x_n), \\
\tilde{\tilde{\phi}}_3(x) &= g_3(x) - \phi_1(x) \sum_{i=1}^{4} \phi_2(x_n) g_3(x_n) - \phi_2(x) \sum_{i=1}^{4} \phi_2(x_n) g_3(x_n), \\
\tilde{\tilde{\phi}}_3(x) &= x^2 - 1 \sum_{i=1}^{4} \phi_2(x_n) g_3(x_n) - \sum_{i=1}^{4} \phi_2(x_n) g_3(x_n) = x^2 - 5, \\
\tilde{\phi}_3(x) &= \frac{\tilde{\tilde{\phi}}_3(x)}{\langle \tilde{\tilde{\phi}}_3(x) \tilde{\tilde{\phi}}_3(x) \rangle^{(1/2)}} = \frac{x^2 - 5}{4}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Иймээс бидний ортогонал суурь функц нь $\tilde{\phi} = \{\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3\} = \{1, \frac{x}{\sqrt{5}}, \frac{x^2-5}{4}\}$. Түүнчилэн бидэнд шугаман, нэгдүгээр эрэмбийн тэгшитгэл өгөгдсөн гэж үзээ. Дээр олсон ортогонал суурь функц болон тэгшитгэл (1), (10)-ийг ашиглан

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha_1\tilde{\phi}_1 + \alpha_2\tilde{\phi}_2, \\
\alpha_1 &= \frac{7}{16}, \alpha_2 = \frac{13}{16\sqrt{5}}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Одоо ортогонал функцын шинж чанар болох өндөр эрэмбийн коэффицентийг нэмхэд бага эрэмбийн коэффицентүүдийг дахин тооцох шаардлагагүй болдог буюу тэгшитгэл 14 нь квадрат эрэмбийн хувьд

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha_1\tilde{\phi}_1 + \alpha_2\tilde{\phi}_2 + \alpha_3\tilde{\phi}_3, \\
\alpha_3 &= \frac{1}{16},
\end{aligned} \tag{18}
$$

энд ортогонал функцын дагуу коэффицентүүд (α_1, α_2) нь тэгшитгэл 17-д олсонтой ижил утгатай яир дахин тооцох шаардлагагүй.