Тооцон Бодох Математик: Тооцооллын Инженер

2 мая 2020 г.

1 Curse of Dimensional

Бидэнд $d \in \mathbb{N}$ ширхэг хувьсагчаас хамаарч буй $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, f : \vec{x} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(d)}\} \to f(\vec{x})$ функц өгөгдсөн гэж үзэе. Сонирхож буй интегралын утгын муж нь $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_d$, $\Omega_i = [a_i, b_i]$ гэж өгөгдсөн бол,

$$I = \int_{\Omega} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \cdots \int_{\Omega_d} f(\vec{x}) dx^{(d)} \ldots dx^{(2)} dx^{(1)}. \tag{1}$$

Дээрх интегралыг тооцохын тулд n-цэгийн Gauss quadrature дүрмийг интеграл бүрд $i = 1, \ldots, d$ ашиглах боломжтой. Нэг хэмжээст Gauss quadrature дүрмийг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цэгүүд болон $w_1, w_2, \ldots, w_n$ жинтэй тохиолдолд ашиглавал, d хэмжээст интеграл нь

$$I \approx \sum_{i_1=1 \ldots i_n=1}^{n} \tilde{w}_{i_1,\ldots i_d} f(x_{i_1}^{(1)}, \ldots x_{i_d}^{(d)}), \quad \tilde{w}_{i_1,\ldots i_d} = \prod_{r=1}^{d} w_{i_r}. \tag{2}$$

Энд нийт үнэлэх функцын тоо нь $N = n^d$ болж байна. Жишээ болгон $d = 2, n = 3$ үед доорх функцыг сонирхож үзвэл,

$$\begin{aligned} I &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y) dx dy = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} w_i w_j f(x_i, y_j) \\ &= \sum_{j=1}^{3} \left(w_1 w_j f(x_1, y_j) + w_2 w_j f(x_2, y_j) + w_3 w_j f(x_3, y_j) \right) \\ &= \left(w_1 w_1 f(x_1, y_1) + w_2 w_1 f(x_2, y_1) + w_3 w_1 f(x_3, y_1) \right) \\ &+ \left(w_1 w_2 f(x_1, y_2) + w_2 w_2 f(x_2, y_2) + w_3 w_2 f(x_3, y_2) \right) \\ &+ \left(w_1 w_3 f(x_1, y_3) + w_2 w_3 f(x_2, y_3) + w_3 w_3 f(x_3, y_3) \right). \end{aligned} \tag{3}$$

буюу $N = n^d = 3^2 = 9$ гэдэг нь харагдаж байна. Одоо тэгвэл **curse of dimensional** гэж ямар утгатай вэ? гэдгийг сонирхоё. Өмнөх хэсэгт үзсэн нэг

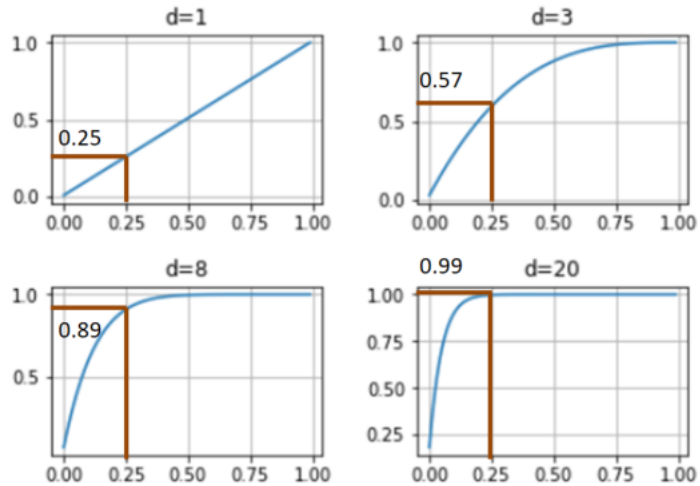

Рис. 1: Энэхүү графикийн $\epsilon = 0.25$ үед харгалзах эзэлхүүний хувийг өөр өөр хэмжээст огторгуйд тооцон тэмдэглэсэн болно.

хэмжээст Симпсоны дүрмийн хувьд интегралын нарийвчилал нь алхмын өргөнийг 4 зэрэгт дэвшүүлсэнтэй тэнцүү h^4 гэдгийг үзсэн бөгөөд ($N = n, d = 1$) үед

$$I - I_s = O(h^4), \quad h = \frac{b-a}{n} = O(n^{-1}) = O(N^{-1}), \tag{4}$$

дээрх байдлаар илэрхийлж болно. Цаашилбал d хэмжээст үед

$$h = O(n^{-1}) = O(N^{-1/d}). \tag{5}$$

Эндээс үзвэл хэмжээс d-г ихэсгэх тусам, нарийвчилал h нь буурч байна. Үүнийг **curse of dimensional** гэж нэрлэгдэг буюу d хэмжээст интегралыг тооцох өөр арга хэрэгтэй гэдэг нь харагдаж байна. Энэхүү аргыг Монте Карло гэдэг.

Мөн түүнчилэн **curse of dimensional** хэмээх ойлголт машин сургалтын өгөгдөлд ажиллах үед чухал хэрэгтэй байдаг. Учир нь n тооны өгөгдөлийн $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ хэмжээс ихсэх тусам машин сургалтын алгоритмыг тооцолоход хүдрэлтэй болдог. Жишээ болгож $d = 3$ хэмжээст огторгуйд орших бөмбөрцөгийн эзэлхүүнийг авч үзээ. Өөр үгээр хэлбэл өгөгдөл нь $d = 3$ хэмжээст огторгуйд орших цэгүүд юм; $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$. Бидний мэдхээр бөмбөрцөгийн эзэлхүүн нь $d = 3$ үед $V_3 = (4\pi/3)r^3 = c \cdot r^3$, төдийгүй ерөнхий d тохиолдолд бөмбөрцөгийн эзэлхүүн $V_d = k \cdot r^d$ гэж тодорхойлогддог. Жишээ болгон r_1 мужид орших $r - \epsilon \leq r_1 \leq r$ бөмбөрцөгийн эзэлхүүний эзлэх хувийг тодорхойлоё. Тэгвэл $r = 1$, $V = k \cdot r^d$, $V_e = k \cdot (r - e)^d$ гэж авч үзэе;

$$\frac{V - V_e}{V} = 1 - (1 - \epsilon)^d. \tag{6}$$

Одоо $d = 1, 3, 8, 20$ үеийн графикийг $\epsilon = 0.0, 0.01, 0.02, \ldots, 1$ үед байгуулая (Зур. 1). Дээрх зургаас үзвэл хэмжээс d ихсэх тусам нийт эзэлхүүн нь бөмбөрцөгийн гадаргын ойролцоо төвлөрч байна гэдгийг харж болох буюу цаашилбал d хэмжээст n ширхэг өгөгдөлийн ихэнхи нь бөмбөрцөгийн гадаргын дагуу байрлаж байна (Зур. 2). Тиймээс ихэнхи тохиолдолд өгөгдөлийн огторгуйг багасгах шаардлагатай болдог (жишээ нь: $d = 3 \rightarrow d = 2$).

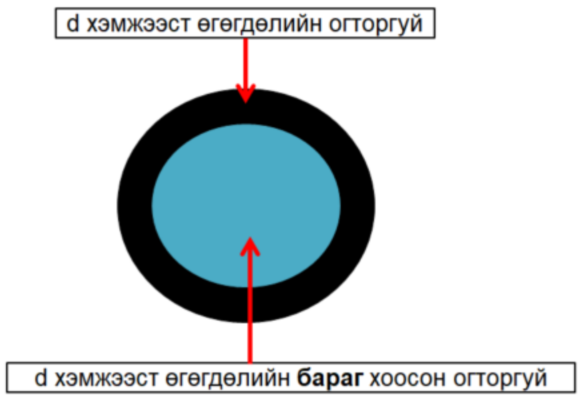

Рис. 2:

2 Магадлалын үндэс

2.1 Олонлог

Олонлог гэдэг нь эрэмбэ, дараалалгүй ялгаатай биетүүдийн цуглуулага. Биетүүдийг нь олонлогийн бүрдүүлэгч элементүүд эсвэл гишүүд гэж нэрлэдэг. Дурын олонлогийг A гэж тэмдэглэе. Харин a нь олонлог A-г бүрдүүлэгч элементүүдийн нэг гэж үзэе. Тэгвэл математикийн хэлээр $a \in A$ гэж илэрхийлдэг. Жишээ 1: Олонлог $A = \{a, b, c, d\}$ нь a, b, c, d бүрдүүлэгч элементүүдийг агуулж байна. Дурын элемент e-г авч үзвэл, энэхүү элементийг олонлог A агуулахгүй байгаа буюу $e \notin A$ гэж илэрхийлдэг. Жишээ 2: 10 хүртэлх тоонд агуулагдаж буй эерэг ба сондгой тооны олонлог нь $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ бөгөөд үүнийг ихэнхи тохиолдолд доорх байдлаар илэрхийлдэг,

$$B = \{x | \text{x нь 10-аас бага, эерэг ба сондгой тоо}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z}^+ | x < 10 \text{ ба x нь сондгой тоо}\}.$$

2.1.1 Дэд Олонлог

Эерэг ба 10-аас бага тоонуудын олонлогийг авч үзэе;

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \leq 10\}.$$

Тэгвэл жишээ 2-д дурдсан $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x < 10$ ба x нь сондгой тоо$\}$-г I-ын дэд олонлог гэж нэрлэдэг бөгөөд $B \subseteq I$ гэж тэмдэглэдэг. $B \subseteq I$ байх нөхцөлийг математикийн хэлээр

$$\forall x (x \in B \to x \in I). \tag{7}$$

Анхаарах зүйл: дурын хоосон биш олонлогт I хоёр дэд олонлог заавал байх ёстой. (1) хоосон олонлог $\varnothing \subseteq I$, (2) Олонлог нь өөрөө, өөрийнхөө дэд олонлог $I \subseteq I$ учир нь тэгшитгэл (6) хангагдаж байдаг.

2.1.2 Олонлогийн дүрмүүд

Дурын A ба B олонлогийг авч үзэе. Эдгээр олонлогуудын нэгдлийг $A \cup B$ гэж тэмдэглэдэг. $A \cup B$-г бүрдүүлэгч элементүүд A-д, эсвэл B-д, бүр эсвэл хоёуланд нь зэрэг харъялагдаж байх ёстой;

$$A \cup B = \{x | x \in A \quad \text{or} \quad x \in B\}.$$

Жишээ 3: $A = \{1, 3, 5\}$, ба $B = \{1, 2, 3\}$-ийн нэгдэл нь $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$. **Дурын A ба B олонлогийг авч үзэе. Эдгээр олонлогуудын огтлолцолыг $A \cap B$ гэж тэмдэглэдэг. $A \cap B$-г бүрдүүлэгч элементүүд нь A, B олонлогт хоёуланд нь зэрэг харъялагдаж байх ёстой;**

$$A \cap B = \{x | x \in A \quad \text{and} \quad x \in B\}.$$

Жишээ 4: $A = \{1, 3, 5\}$ ба $B = \{1, 2, 3\}$-ийн огтлолцол нь $A \cap B = \{1, 3\}$. **Дурын A ба B олонлогийг авч үзэе. Эдгээр олонлогуудын огтлолцол нь хоосон байвал $A \cap B = \varnothing$, A ба B олонлогийг үл давхцах олонлог гэж нэрлэдэг.** Жишээ 5: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ба $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, огтлолцол нь хоосон олонлог $A \cap B = \varnothing$. Жишээ 6: цаашилбал дурын олонлогт агуулагдаж буй элементүүдийн тоог $| \cdot |$ гэж тэмдэглэдэг. Тэгвэл үл давхцах $A \cap B = \varnothing$ олонлогууд $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ба $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ хувьд $|A| = 5, |B| = 5$, $|A \cup B| = 10$ буюу $|A \cup B| = |A| + |B| = 10$ гэж илэрхийлж болно. Давхцаж буй олонлог $A \cap B \neq \varnothing$ сонихрхое. $A = \{1, 3, 5, 7, 10\}$ ба $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ хувьд $|A| = 5, |B| = 5$, $|A \cup B| = 9$, $|A \cap B| = 1$ буюу $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 9$ болно. Тиймээс ерөнхий тэгшитгэл нь

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{8}$$

Дурын A ба B олонлогийг авч үзэе. Эдгээр олонлогуудын ялгааг $A \backslash B$ эсвэл $A - B$ гэж тэмдэглэдэг. $A \backslash B$-г бүрдүүлэгч элементүүд нь

A-д агуулагддаг, гэвч B-д агуулагддаггүй байх ёстой, эсвэл эсрэгээрээ.

$$A - B = \{x | x \in A \quad \text{and} \quad x \notin B\},$$

$$B - A = \{x | x \in B \quad \text{and} \quad x \notin A\}.$$

Жишээ 7: $A = \{1, 3, 5\}$, ба $B = \{1, 2, 3\}$. $A - B = \{5\}$ бөгөөд нөгөө талаар $B - A = \{2\}$; $A - B \neq B - A$. **Ерөнхий олонлог хэмээх ойлголт байдаг бөгөөд U гэж авч үзээ. Олонлог A-г нэгдмэл болгогч олонлогийг $\bar{A}$ ерөнхий олонлогтой харьцангуй тодорхойлдог ($\bar{A} = U - A$);**

$$\bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}.$$

Жишээ 8: $U = \{$Англи хэлний цагаан толгойн үсгүүд$\}$, $A = \{a, e, i, o, u\}$. Иймээс $\bar{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, \ldots, z\}$.

2.2 Магадлал

Нэг ширхэг зоосыг авч үзээ. Зоос зөвхөн сүлд эсвэл тоо талаараа буух боломжтой. Тэгвэл сүлд-s, тоо-t гэж тэмдэглэвэл, математикт үүнийг **түүврийн огторгуйн олонлог (sample space, Ω)** гэж нэрлэдэг $\Omega = \{s, t\}$. Энд s болон t-г олонлогийн гишүүд (members) эсвэл бүрдүүлэгч элементүүд (elements) гэдэг. **Түүврийн огторгуйн олонлог**-т **дэд олонлог/тохиолдолын огторгуй (subset/event space, $\mathbb{F}$)** хэмээх ойлголт байдаг. Тохиолдолын огторгуй $\mathbb{F}$ нь түүврийн огторгуйн олонлог Ω-г бүрдүүлэгч элеметүүдийн бүх боломжит сонголтууд ($\{\varnothing\}, \{s\}, \{t\}, \{s, t\}$). Эндээс үзвэл нийт дэд олонлогийн тоо нь 2^n-тэй (n нь олонлог Ω-ын бүрдүүлэгч элементүүдийн тоо) тэнцүү байдаг. Математикийн хэлээр

$$\mathbb{F} = \{\{\varnothing\}, \{s\}, \{t\}, \{s, t\}\} \subseteq \Omega = \{s, t\}; \tag{9}$$

$\mathbb{F}$-ын бүрдүүлэгч элементүүд $\{\{\varnothing\}, \{s\}, \{t\}, \{s, t\}\}$-ийг тайлбарлая. Зоосыг $n = 100$-н удаа хаясан гэж үзвэл. Заавал сүлд $\{s\}$, болон тоо $\{t\}$ талаараа буух тохиолдол нь тэнцүү буюу $n_s = 50$ удаа сүлд, $n_t = 50$ удаа тоо гэж авч үзээ. Тэгвэл нийт хаялтын тоо n-г сүлд n_s эсвэл тоо n_t байх тохиолдолд хуваавал

$$P(\{s\}) = P(\{t\}) = \frac{n_s}{n} = \frac{n_t}{n} = 0.5, \tag{10}$$

P-г магадлал гэж нэрлэдэг ба s болон t талаараа буух магадлал нь тэнцүү байна. Аль нэг талаараа буухгүй байх тохиолдолыг $\{\varnothing\}$ гэж тэмдэглэсэн бөгөөд магадлалаар илэрхийлбэл $P(\{\varnothing\}) = 0$. Харин сүлд эсвэл тоо (s or t)$\approx$ $\{s, t\}$-ны аль нэг нь заавал буух магадлал нь үргэлж 1-тэй тэнцүү $P(\{s, t\}) = P(s \quad or \quad t) = 1$ юм. Цаашилбал $(\Omega, \mathbb{F}, P)$-ыг **Магадлалын Огторгуй** гэж нэрлэдэг.