Тоон аргууд

26 декабря 2019 г.

1 Проекц мариц (The projection Matrix) P

Өмнөх хэсэгт дурдсан тэгшитгэл 9-ийг A матрицаар хоёр талаас нь үйлчилбэл,

$$A\bar{x} = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}, \tag{1}$$

болох буюу $\vec{p} = A\bar{x}$ гэж тэмдэглэн үүнийг $\vec{b}$-ийн проекц гэж хэлдэг. Тэгвэл доорх хэлбэрт орно

$$\vec{p} = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}. \tag{2}$$

Энэхүү тэгшитгэлийг матриц хэлбэрт бичвэл,

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T, \tag{3}$$

төдийгүй энэхүү тэгшитгэлийг **проекц матриц** гэж нэрлэдэг. Иймээс $\vec{p} = P\vec{b}$ вектор нь A-ийн баганан огторгуй бөгөөд $\vec{p} - P\vec{b}$ ортогонал байгуулагч бүрдүүлэгч. Матриц тэгшитгэл 3 нь доорх хоёр шинж чанарыг хангадаг:

- Идэмпотент (Idempotent) $P^2 = P$
- Симметрик (Symmetric) $P = P^T$.

1.1 Проекц болон хамгийн бага квадратын арга

Матриц A нь $M \times N$ бөгөөд баганын хувьд ортонормал шинж чанартай,

$$\left(V_i^T V_j = \begin{Bmatrix} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{Bmatrix} \right). \tag{4}$$

Энд $\bar{x} = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$ нь хамгийн бага квадрат шийд бөгөөд $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ проекц матриц. Цаашилбал тэгшитгэл 4-ийн дагуу $(A^T A)$ нь нэгж матриц

бөгөөд $P = AA^T$, $\bar{x} = AA^T\vec{b}$ болж хялбарчилагдана.
Үүнтэй холбоотой нэгэн жишээ авч үзэе; $y_1 = -1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1.$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{5}$$

энд $\bar{y} = (y_1 + y_2 + \ldots + y_N)/N$ хувиргалтыг хийж болно. Иймээс бид тэгшитгэл $z = C + Dy$-тэй ажиллахын оронд $z = c + d(y - \bar{y})$-тэй ажиллаж болно,

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 - \bar{y} \\ 1 & y_2 - \bar{y} \\ 1 & y_3 - \bar{y} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Хэрэв энэ тэгшитгэлийг тэгшитгэл 12-тэй ижил хэлбэрт оруулбал, бид шийдийг маш хялбархан олж болно;

$$c = \frac{\vec{a}_1^T \vec{z}}{\vec{a}_1^T \vec{a}_1} = \frac{\sum z_i}{N}, \quad d = \frac{\vec{a}_2^T \vec{z}}{\vec{a}_2^T \vec{a}_2} = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y}) z_i}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}. \tag{7}$$

Энд $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ нь матриц A-ийн баганын элементүүд $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ юм.