# Тоон аргууд

1 января 2020 г.

## 1 Ортогонал матриц

Ортогонал матриц нь ортонормал баганатай матриц юм. Ортогонал матриц нь доорх шинж чанартай,

$$Q^T Q = I = QQ^T, \quad Q^T = Q^{-1}; \tag{1}$$
$$||Q\vec{x}|| = \vec{x}, \quad (Q\vec{x})^T (Q\vec{y}) = \vec{x}^T \vec{y}. \tag{2}$$

Баганууд нь шугаман хамааралгүй дурын матриц A-ийг дараах байдлаар задлаж болно,

$$A = QR, \tag{3}$$

энд Q-ийн баганууд нь ортонормал бөгөөд R нь дээд гурвалжин (upper triangular) ба урвуу (invertible) нь оршин байдаг. Энэ шинж чанарыг нь ашиглан, шугаман тэгшитгэл $A\vec{x} = \vec{b}$-ийн шийдийг олох боломжтой буюу доорх хэлбэрт орно,

$$\bar{x} = R^{-1} Q^T \vec{b}. \tag{4}$$

### 1.1 Псюдо-урвуу (Pseudoinverse)

Шийд $\bar{x}$-ийг хэрхэн ойролцоогоор олох аргыг дурын матриц A болон вектор $\vec{b}$-ын хувьд боловсруулах. Оптимал сонголт нь проекц вектор $\vec{p} = A\bar{x}$ нь $\vec{b}$-д хамгийн ойрхон байх юм. Хамгийн ойрхон проекц векторыг олохын тулд доорх тэгшитгэлийн хамгийн бага шийдийг олох хэрэгтэй,

$$E = ||A\vec{x} - \vec{b}||. \tag{5}$$

Өмнө харсанчлан хэрэв A матриц нь кватрат бөгөөд урвуу нь оршин байдаг бол шугаман тэгшитгэлийн шийд нь $\bar{x} = A^{-1}\vec{b}$. Харин өгөгдсөн $M \times N$ багана ба мөртэй A матрицын хувьд парамерийн тоо нь тэгшитгэлийн тооноос бага үед $N > M$ хамгийн бага квадратын аргыг ашиглана. Нөгөө талаасаа, $N < M$ үед $A\bar{x} = \vec{p} = P\vec{b}$ шинжийг хангасан маш олон шийд оршин байдаг.

СОНГОЛТ: Хамгийн оптимал шийд нь $A\bar{x} = \vec{p}$-ны уртын хэмжээ хамгийн богинотой нь юм. Тэгшитгэлийн $A\vec{x} = \vec{b}$ шийдийг нь $\bar{x} = A^{+}\vec{b}$ хэлбэрт бичих буюу $A^{+}$-г псюдо-урвуу (pseudoinverse) гэж хэлдэг.

**Жишээ нь:** Өгөгдсөн нь,

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0. \tag{6}$$

Вектор $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$-ын проекц нь $\vec{p} = P\vec{b} = [b_1, b_2, 0]^T$ болно. Иймээс $A\bar{x} = \vec{p}$,

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Эндээс бид $\bar{x}_1\mu_1 = b_1$, $\bar{x}_2\mu_2 = b_2$ гэдгийг харж байна. Эсвэл шийдийг $\bar{x} = A^{+}\vec{b}$ гэж олж болно,

$$A^{+}\vec{b} = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Диагоналын элементүүд нь тэгээс их бөгөөд бусад элементүүд нь тэгтэй тэнцүү матриц нь нэгэн онцгой матрицын бүлд харялагддаг. Доорх байдлаар ерөнхий хэлбрийг нь илэрхийлж болно,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \to \Sigma^{+} = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2^{-1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3^{-1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

## 2 Онцгой утгын задрал (Singular Value Decomposition)

Дурын $M \times N$ хэмжээт матриц A-г задлан бичих боломжтой,

$$A = Q_1 \Sigma Q_2^T. \tag{10}$$

- $Q_1$ нь $M \times M$ хэмжээст ортогонал матриц.

- $Q_2$ нь $N \times N$ хэмжээст ортогонал матриц.
- $\Sigma$ нь $M \times N$ хэмжээст дээр дурдсанчилан, тэгшитгэл 9, диагонал матриц.

Диагоналын утгууд $\mu_i$-ыг матриц A-ын онцгой утга гэж хэлдэг бөгөөд

$$A^+ = Q_2 \Sigma^+ Q_1^+, \tag{11}$$

хэлбэрт оруулж болно. Тэгвэл тэгшитгэлийн $A\vec{x} = \vec{b}$ шийд нь,

$$\bar{x} = Q_2 \Sigma^+ Q_1^+ \vec{b}. \tag{12}$$

> Онцгой утгын задрал (SVD): Онцгой утгын задралыг параметрын тоо нь тэгшитгэлийн тооноос их $M > N$ (underdetermined system) эсвэл $M < N$ (overdetermined system) систем тэгшитгэлийн шийдийг олоход хэрэглэх боломжтой.

### Жишээ програм: Онцгой Утгын Задрал

In [36]:
```python
import numpy.linalg as linalg
import numpy as np
```

**Дурын матрицын Онцгой Утгын Задралыг авч үзэе.**

In [37]:
```python
A = np.random.randn(3, 4)
```

Өгөгдсөн матриц нь:

In [38]:
```python
print(A)
```

```
[[-0.79164636  0.00898644  0.66668641 -0.80577924]
 [ 0.18219955  0.04515089 -0.31628269  1.64914704]
 [ 0.62033301 -0.54341104 -0.87410559 -0.67716419]]
```

Тэгвэл матриц $A = Q_1 \Sigma Q_2^T$ нь:

In [42]:
```python
Q1, Sigma, Q2_T = linalg.svd(A, full_matrices=True)
```

In [43]:
```python
print(Q1)
```

```
[[ 0.54737268  0.4417076  -0.71082877]
 [-0.82363009  0.13373172 -0.55113455]
 [ 0.14837997 -0.88713597 -0.43700476]]
```

In [44]:
```python
print(Sigma)
```

```
[2.02712881 1.51045362 0.29578851]
```

In [45]:
```python
print(Q2_T)
```

```
[[-0.24238501 -0.05569454  0.24454594 -0.93720057]
 [-0.57971332  0.32578754  0.68034789  0.30809365]
 [ 0.64647565  0.69712368  0.27858668 -0.13593115]
 [-0.43272533  0.63622259 -0.63222899 -0.09086318]]
```

Рис. 1: Дурын матрицын Онцгой Утгын Задрал (SVD)