

计算物理第4题

PB18000039 徐祺云

一 作业题目

设pdf函数满足关系式

$$p'(x) = p(x) \frac{x-d}{ax^2+bx+c}$$

请找到其中的一种函数，讨论性质并给出抽样方法。

二 算法及主要公式

对于上述微分方程，可在 $Mathematica$ 中求出通解：

$$p(x) = C_1 e^{\frac{2(2ad+b) \arctan(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}) - \ln(ax^2+bx+c)}{2a}}$$

考虑到概率密度分布函数 $p(x)$ 应满足非负性、可归一化，这里任取一种函数： $(a, b, c, d) = (1, 1, 3, 1)$ ，即pdf函数满足关系式：

$$p'(x) = p(x) \frac{x-1}{x^2+x+3}$$

通解：

$$p(x) = C_1 e^{\frac{6 \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}) - \ln(x^2+x+3)}{2}} = C_1 e^{-\frac{3 \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})}{\sqrt{11}}} \sqrt{x^2+x+3}$$

显然在 $x \rightarrow \infty$ 时函数发散，为使得其能归一化，这里只选取一段区间 $[-5, 5]$ ，可以使用 $Matlab$ 计算得到

$$C_1 = \left[\int_{-5}^5 e^{-\frac{3 \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})}{\sqrt{11}}} \sqrt{x^2+x+3} dx \right]^{-1} \approx \frac{1}{39.1517}$$

抽样方法：

因为该概率分布函数比较复杂，直接抽样法不易得到反函数，这里采用von Neumann发展的一个简单实用的方法，即舍选法：

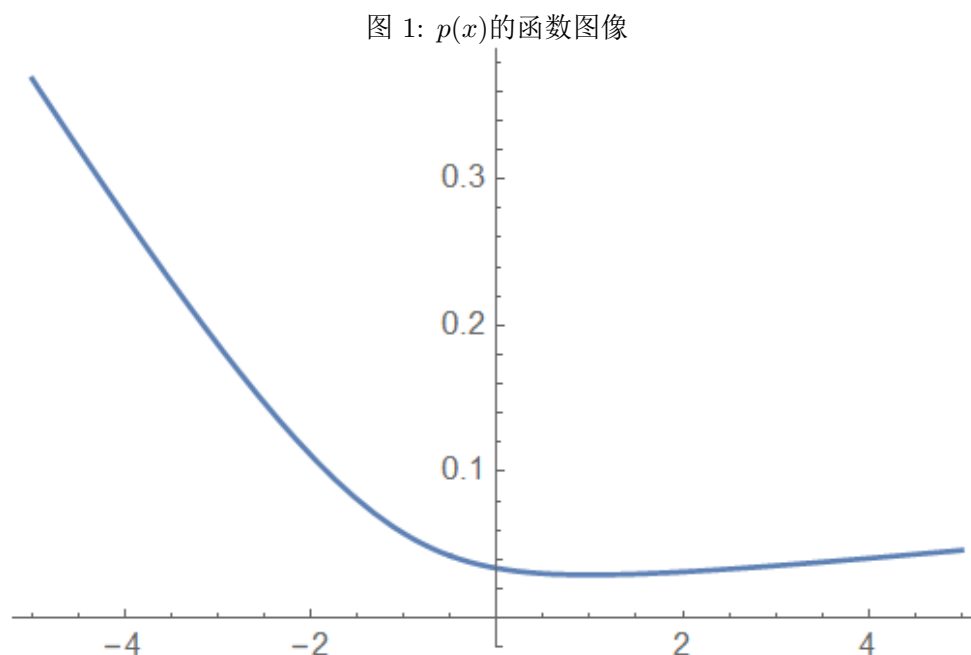
1. 产生一对 $[0, 1]$ 区间中均匀分布的随机抽样值 (ξ_1, ξ_2) ；
2. 判断条件 $M\xi_2 \leq p(a + (b - a)\xi_1)$ 是否成立，否，则舍；
3. 是，则取 $x = a + (b - a)\xi_1$ 。

其中， $a = -5, b = 5, M = 15$ (M 为上界)

将 $[-5, 5]$ 划分为更小的区间，在每一块区间上统计 x 的个数，得到直方图与理论图像比较即可。

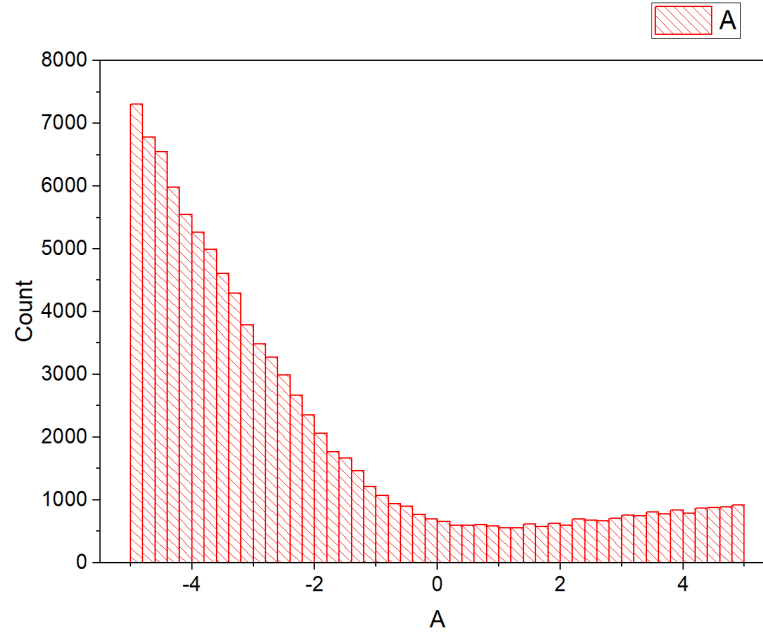
三 计算结果与分析

根据解出的 $p(x) = \frac{e^{-\frac{3 \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})}}{\sqrt{11}} \sqrt{x^2 + x + 3}}{39.1517}$ 绘制得到理论概率密度函数如下图1：



根据舍选法，取 $N = 100000$ (舍去大于函数 $p(x)$ 的点 (x, y))，将数据导入Origin中，将区间 $[-5, 5]$ 分成等间隔50份，在各个小区间计数得到直方图如下：

图 2: 区间 $[-5, 5]$ 上的统计直方图



可见，得到的直方图与理论曲线的趋势相吻合(先剧烈减小后缓慢增加)，即说明这个抽样方法是良好的。事实上，如果继续细化区间，增加总点数 N ，得到的图像结果将更逼近于理论函数图像。

四 结论

本题取参数 $(a, b, c, d) = (1, 1, 3, 1)$ ，得到的pdf函数解析式较为复杂，累计函数的反函数难以求解，故采用舍选法抽样；通过上述抽样方法得到了一组 $X[i]$ 数据，并利用 $Origin$ 软件统计得到直方图分布，与pdf理论函数图像相比，函数的趋势与性质基本吻合。