计算物理第5题

PB18000039 徐祺云

一　作业题目

对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在(x, y)平面上投影的几率分布函数。并由此验证$Marsaglia$抽样方法$x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1-2r^2$确为球面上均匀分布的随机抽样。

二　算法及主要公式

先将问题简化：我们在单位球面上讨论该问题，此时球坐标变量为(θ, φ).$(\theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi], r = 1)$

球坐标下面元面积为：$\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$

球面上均匀分布的概率密度函数：

$$g(\theta, \varphi) = \frac{r^2 \sin\theta}{4\pi r^2} = \frac{\sin\theta}{4\pi}$$

球坐标系与直角坐标系的关系：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

做变换$(\theta, \varphi) \to (x, y)$,即

$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

$Jacobi$行列式：$\left|\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(x, y)}\right| = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)}\right|^{-1} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

在(x,y)平面上的投影的概率密度分布函数：

$$p(x,y)=\left|\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(x,y)}\right|g(\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi\cos\theta}=\frac{1}{4\pi\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

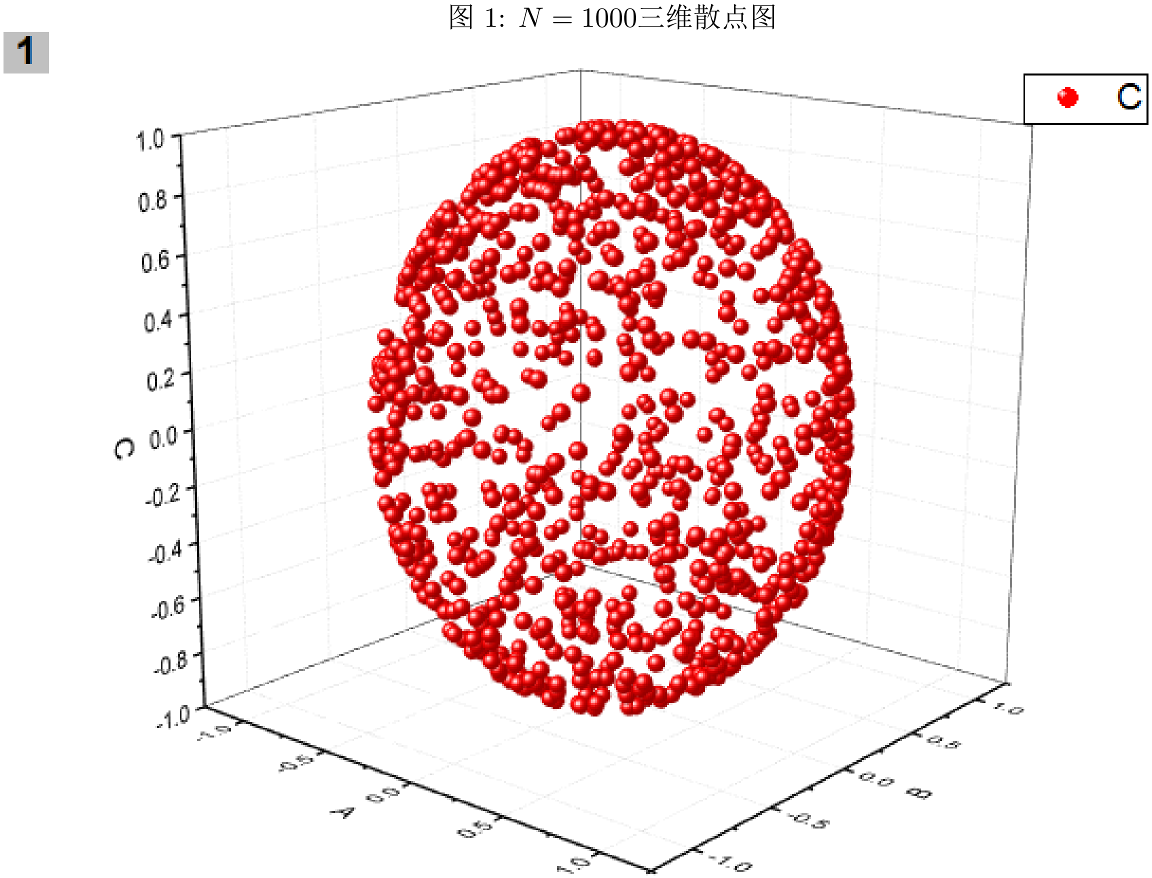
验证$Marsaglia$抽样方法：

1. 随机抽样一对均匀分布的随机数，$(u,v)\in[-1,1]$；
2. 计算$r^2=u^2+v^2$，如果$r^2>1$则重新抽样直至$r^2\leqslant 1$；
3. 得 $x=2u\sqrt{1-r^2},y=2v\sqrt{1-r^2},z=1-2r^2$

三　计算结果与分析

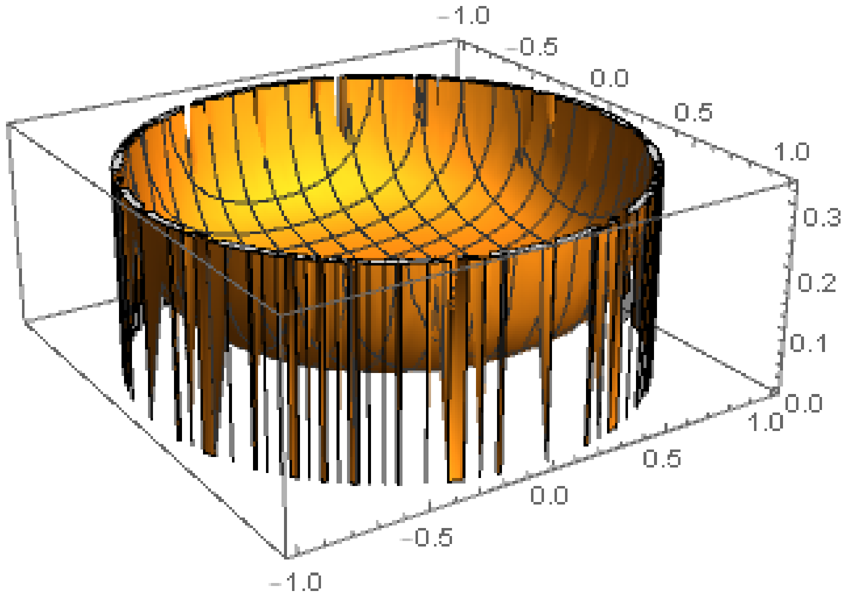
取$N=1000$，将得到的(x,y,z)绘制三维散点图如下图1，可见其均匀分布性良好。

图 1: $N=1000$三维散点图



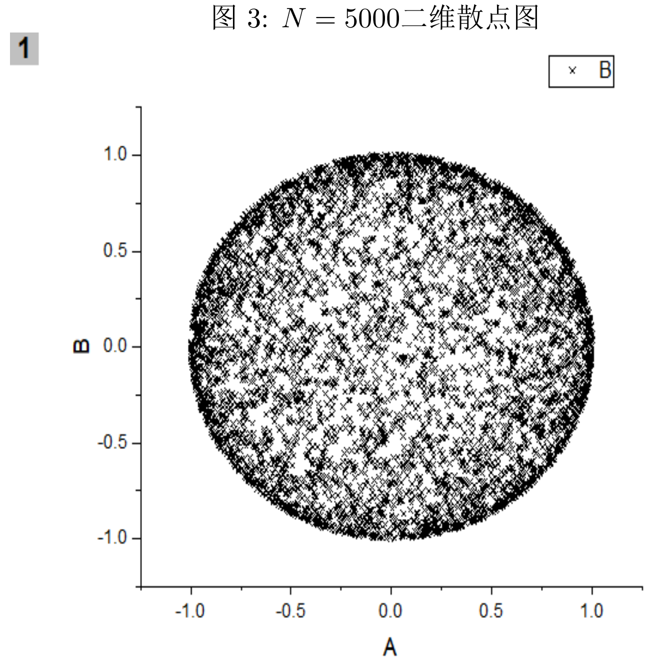
利用$Mathematica$绘制理论概率密度函数$p(x,y)$如图2。

图 2: $p(x,y)$



取$N=5000$，绘制(x,y)二维散点图如下图3。可见散点分布呈中心对称，沿径向方向点密度增加，这与理论概率函数$\frac{1}{4\pi\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$的性质相一致。

图 3: $N=5000$二维散点图



四 结论

对于球面上均匀分布的随机坐标点，解出了它们在(x, y)平面上投影的几率分布函数$p(x, y) = \dfrac{1}{4\pi\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$，由此绘制了理论函数图像。然后验证了$Marsaglia$方法，分别绘制了由此方法生成的三维散点图和二维散点图，发现球上的均匀分布良好且(x, y)二维分布性质和$p(x, y)$相吻合。可见$Marsaglia$抽样方法确为球面上均匀分布的随机抽样。