计算物理第1题

PB18000039 徐祺云

一　作业题目

用$Schrage$方法编写随机数子程序，用连续两个随机数作为点的坐标值绘出若干点的平面分布图。再用$< x^k >$测试均匀性(取不同量级的N值，讨论偏差与N的关系)，$C(l)$测试其2维独立性(总点数$N > 10^7$)。

二　算法及主要公式

(1).采用书上给出的$Lehmer$线性同余法产生随机数。随机数序列$\{x_n\}$是按线性关系

$$I_{n+1} = (aI_n + b) \mod m,$$

$$x_n = I_n/m,$$

得到。

(2).使用16807随机数产生器，即取$a = 16807$，$m = 2^{31} - 1 = 2147483647$，为了保证数据大小不溢出，往往需要设计取模的方法。这里采用$Schrage$方法计算$az\ mod\ m$：

$$az\ mod\ m = \begin{cases} a(z\ mod\ q) - r\,[z/q], & if \geqslant 0, \\ a(z\ mod\ q) - r\,[z/q] + m, & otherwise \end{cases}$$

其中$m = aq + r, q = [m/a]\,, r = m\ mod\ a$。

(3).采用k阶矩$\langle x^k \rangle$测试均匀性，即代入k阶矩公式得到理论值(期望值为$\frac{1}{n+1}$)与实际值比较即可；采用自相关函数$C(l)$测试独立性，两

个随机数列$\{x_n\}$ 和$\{x_{n+l}\}$不相关时的相关系数为零，据此计算$C(l)$来判断随机数数列的独立性情况。

$$C(l) = \frac{\langle x_n x_{n+l} \rangle - \langle x_n \rangle^2}{\langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2}$$

三 计算结果与分析

运行程序$Schrage.c$，用连续的两个随机数作为点(x, y)的坐标作图，其中分别取$N = 10^2, 10^3, 10^4$个点，绘制平面分布图如下：

图 1: $N = 10^2$

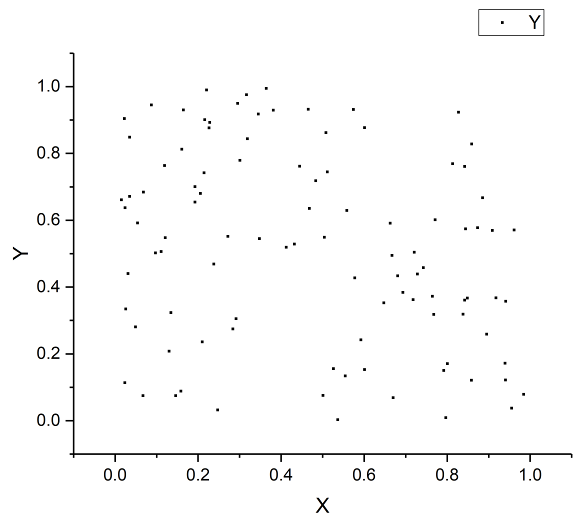


图 2: $N = 10^3$

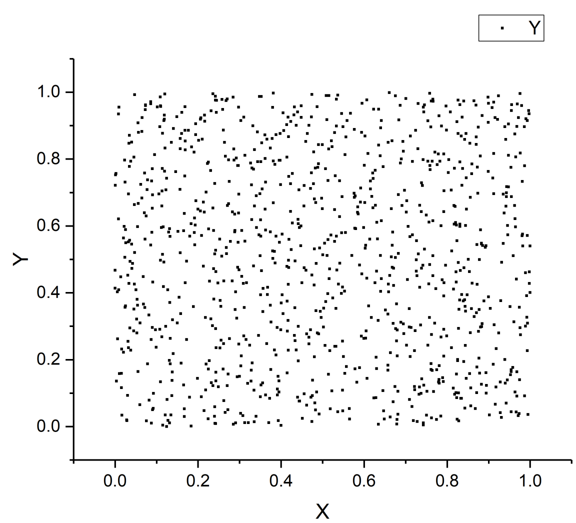
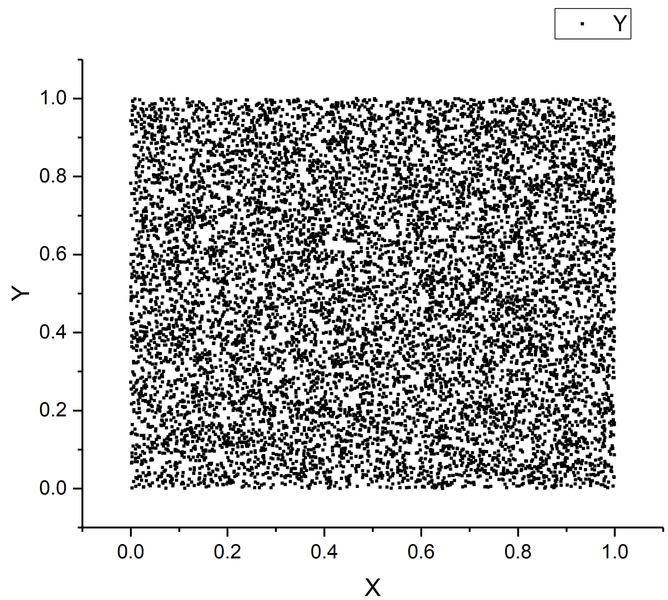


图 3: $N = 10^4$



由图可见，当N较大时并未有规律可循，即可以认为是比较好的随机数。

下面计算$\langle x^k \rangle$ 和 $C(l)$:

取$N = 10^n (n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$，运行$Schrage.c$得到随机数数列，而后计算k阶矩$\langle x^k \rangle (k = 1, 2, 3, 4)$，并与理论$k$阶矩$(\frac{1}{n+1})$相比计算偏差，得到数据如下表：

表 1: $N = 10^2$时的k阶矩

k	理论值	计算值	误差
1	0.5	0.478118	0.021882
2	0.333333	0.314526	0.018807
3	0.25	0.235649	0.014351
4	0.2	0.189364	0.010636

表 2: $N = 10^3$时的k阶矩

k	理论值	计算值	误差
1	0.5	0.502903	-0.002903
2	0.333333	0.339994	-0.006661
3	0.25	0.258129	-0.008129
4	0.2	0.208626	-0.008626

表 3: $N = 10^4$时的k阶矩

k	理论值	计算值	误差
1	0.5	0.504017	-0.004017
2	0.333333	0.337262	-0.003929
3	0.25	0.253513	-0.003513
4	0.2	0.203089	-0.003089

表 4: $N = 10^5$时的k阶矩

k	理论值	计算值	误差
1	0.5	0.500470	-0.000470
2	0.333333	0.333934	-0.000601
3	0.25	0.250606	-0.00606
4	0.2	0.200571	-0.000571

表 5: $N = 10^6$时的k阶矩

k	理论值	计算值	误差
1	0.5	0.499767	0.00233
2	0.333333	0.333092	0.00241
3	0.25	0.249778	0.00222
4	0.2	0.199797	0.00203

表 6: $N = 10^7$时的k阶矩

k	理论值	计算值	误差
1	0.5	0.500019	-0.000019
2	0.333333	0.333378	-0.000045
3	0.25	0.250053	-0.000053
4	0.2	0.200055	-0.000055

表 7: $N = 10^8$时的k阶矩

k	理论值	计算值	误差
1	0.5	0.499987	0.000013
2	0.333333	0.333321	0.000012
3	0.25	0.249989	0.000011
4	0.2	0.199989	0.000011

可见随着N的增大，k阶矩实际值与理论值的误差随之减小，随机数的均匀性也趋于良好。在N较小时误差并不稳定，随着N的增大，可以看出规律：N每增大两个量级，误差就减小一个量级，即正比于$\frac{1}{\sqrt{N}}$。

总点数为10^8时，计算$C(l)$得到下表：

表 8: $C(l)$

l=1	C(l)=-0.000052
l=2	C(l)=-0.000163
l=3	C(l)=0.000007
l=4	C(l)=-0.000024
l=5	C(l)=-0.000089
l=6	C(l)=-0.000010
l=7	C(l)=-0.000018
l=8	C(l)=-0.000024

可见随着l的改变，自相关系数有所涨落，约等于零，可以认为随机数数据的线性关系比较弱，独立性比较好。

四　结论

使用$Schrage$方法取模，编写了16807随机数生成器，得到了不同量级下的几组随机数并绘制平面分布图，直观地表现了随机数的随机性良好与否。然后计算了$\langle x^k \rangle$，发现N越大随机数的均匀性越好，且误差约正比于$\frac{1}{\sqrt{N}}$；计算了$N = 10^8$时的自相关系数$C(l)$，认为产生的随机数的独立性良好。