

计算物理第3题

PB18000039 徐祺云

一 作业题目

在球坐标系 (ρ, θ, φ) 下产生球面上均匀分布的随机坐标点，给出其直接抽样方法。

二 算法及主要公式

先将问题简化：我们在单位球面上讨论该问题，此时球坐标变量为 (θ, φ) 。 $(\theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi], r = 1)$

1. 总体思路：直接抽样法构造 (ξ, η) ，使得均匀分布的、可以由16807随机数产生的 (ξ, η) 能转换为球坐标下非均匀分布的 (θ, φ) ，然后球坐标 (θ, φ) 转换为直角坐标 (x, y, z) ，导出数据在 $Origin$ 绘图；
2. 球坐标下面元面积为： $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \sin \theta d\theta d\varphi$

球面上均匀分布（右式为归一化后的两概率分布的乘积）：

$$p(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{4\pi} = \frac{\sin \theta}{2} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

积分：

$$\begin{cases} \xi = \int_0^\theta \frac{\sin t}{2} dt = \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ \eta = \int_0^\varphi \frac{1}{2\pi} dt = \frac{\varphi}{2\pi} \end{cases}$$

求反函数：

$$\begin{cases} \theta = \arccos(1 - 2\xi) \\ \varphi = 2\pi\eta \end{cases}$$

球坐标系与直角坐标系的关系:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

三 计算结果与分析

取 $N = 1000, 5000$ 绘制三维散点图如下:

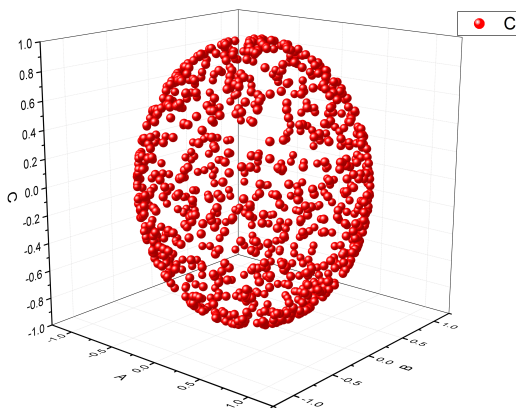


图 1: N=1000

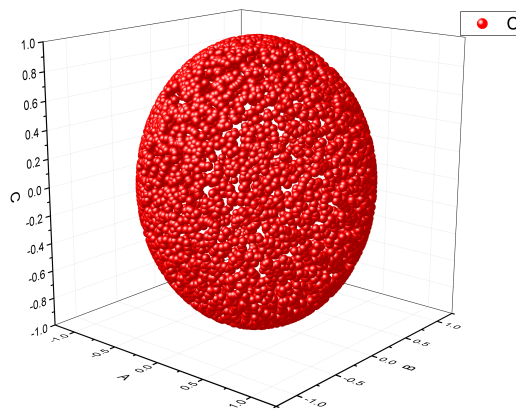


图 2: N=5000

可见球面上点的分布均匀性良好。

四 结论

本题采用直接抽样法($\theta = \arccos(1 - 2\xi)$, $\varphi = 2\pi\eta$), 使用16807产生器得到的均匀分布随机数绘制出了在球面上均匀分布的随机坐标点, 从 $N = 1000, 5000$ 的图直观来看球面上点的均匀性良好。