# 计算物理第17题

PB18000039 徐祺云

## 一 作业题目

以 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 为迭代方程进行迭代:

(1)画出系统状态随参数 $\lambda$ 的变化图，要求在图中体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态；

(2)列出各个倍周期分叉处的 $\lambda$ 值，求相应的 Feigenbaum 常数。

## 二 推导及主要公式

根据给定的方程 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 迭代，初始设定的参数有：$\lambda$的范围$[a, b]$；$\lambda$步进的步长$h$；以及对于一个确定的$\lambda$值，输出该值下迭代点$x_n$的个数$num$。

这里选定初始值$x_0 = 0.1$，改变参数$a, b, h, num$进行迭代，主程序为$main.c$，用Origin软件绘图，可以画出系统状态随参数$\lambda$的变化图，然后对其中的定值状态、倍周期分叉、混沌状态依次讨论。

对于一维迭代$Logistic$方程，其倍周期分岔序列满足规律：前后分岔间距的比值趋于一个常数。对于正弦映射系统，同样可以列出各个倍周期分叉处的$\lambda$值(程序$find.c$)，并求出相应的 Feigenbaum 常数。

## 三 计算结果与分析

### 第一问

先粗略估计$\lambda$的研究范围：取$[a, b] = [0, 10]$，步长$h = 0.01$，迭代次数为$10^4$次，每个$\lambda$值画150个点，得到结果如下：

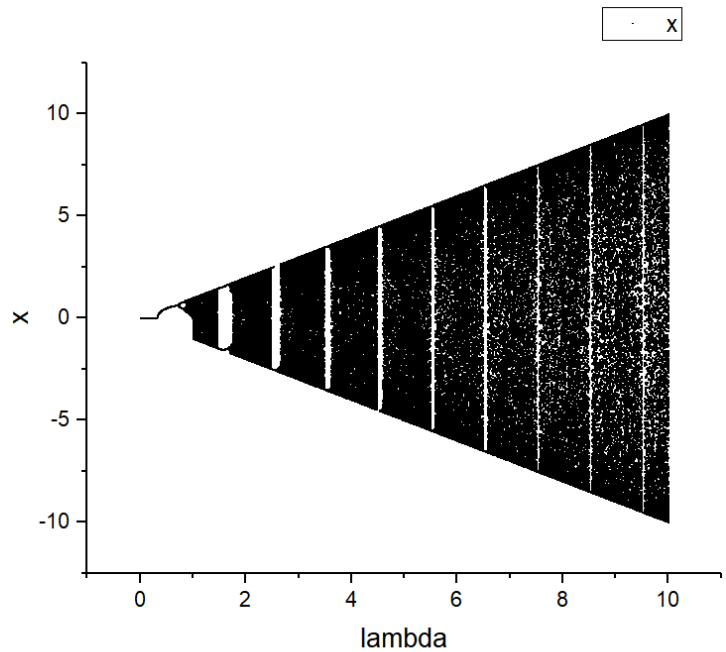


图 1: [0,10],h=0.01,num=150时系统状态随λ的变化图

上图存在一定的周期性的窗口，可见发生定值-倍周期分叉-混沌过程的范围比上述范围小的多。取$[a, b] = [0, 1]$，步长$h = 0.001$，迭代次数为$10^4$次，每个λ值画150个点，得到结果如下：

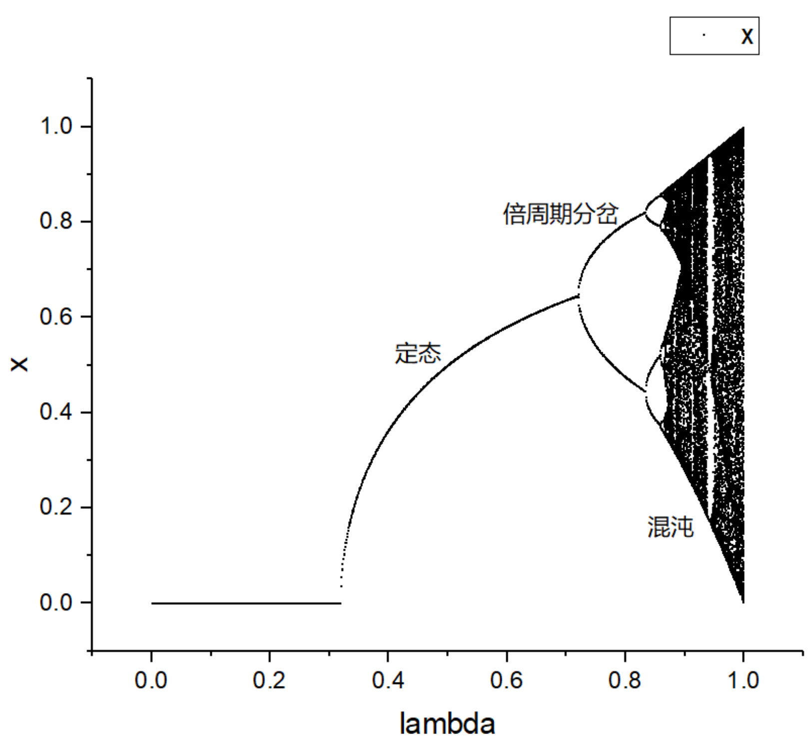


图 2: [0,1],h=0.001,num=150时系统状态随λ的变化图

此时可以清晰地看到定值状态、倍周期分叉区域、混沌状态区域。打开文本文件$data2.txt$，可以近似读取不同状态的λ范围(近似读取，因为迭代次数精度问题可能有小的误差，后面再进行高精度步进)：

(1)绝灭：$0 \leqslant \lambda \leqslant 0.318$

(2)定态：$0.318 \leqslant \lambda \leqslant 0.719$

(3)倍周期分岔：$0.719 \leqslant \lambda \leqslant 0.885$

(4)混沌与窗口：$0.885 \leqslant \lambda \leqslant 1$

这里可以取几个点$\lambda = 0.5$，$\lambda = 0.73$，$\lambda = 0.98$，绘制它们的前n个迭代点(调用$main.c$程序$finite_iteration()$函数),结果如下：

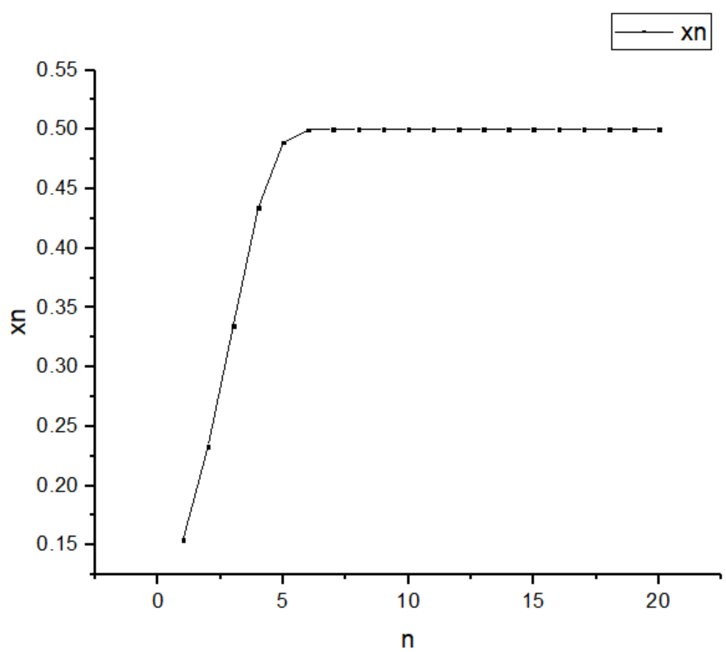


图 3: 定态$\lambda = 0.5$迭代结果

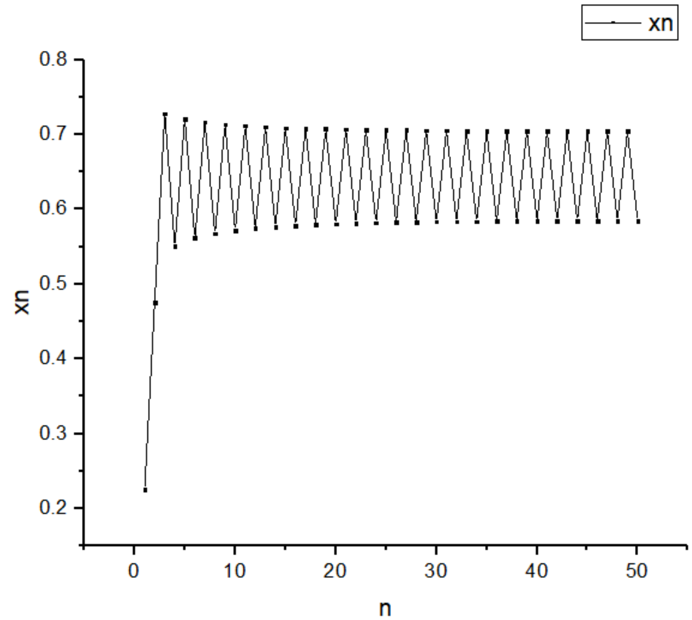


图 4: 倍周期分岔$\lambda = 0.73$迭代结果

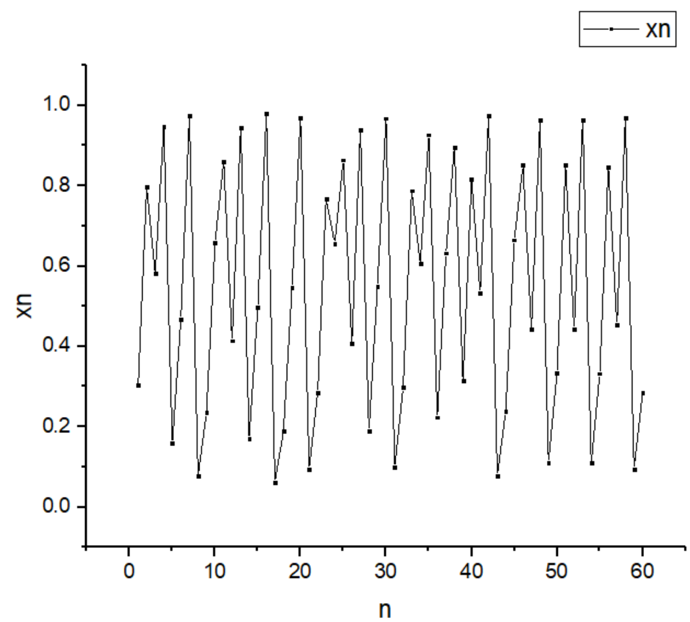


图 5: 混沌$\lambda = 0.98$迭代结果

## 第二问

列出各个倍周期分岔处的$\lambda$值：

取$[a, b] = [0.719, 0.866]$，步长$h = 0.0001$，迭代次数为$10^4$次，每个$\lambda$值画300个点，得到结果如下：

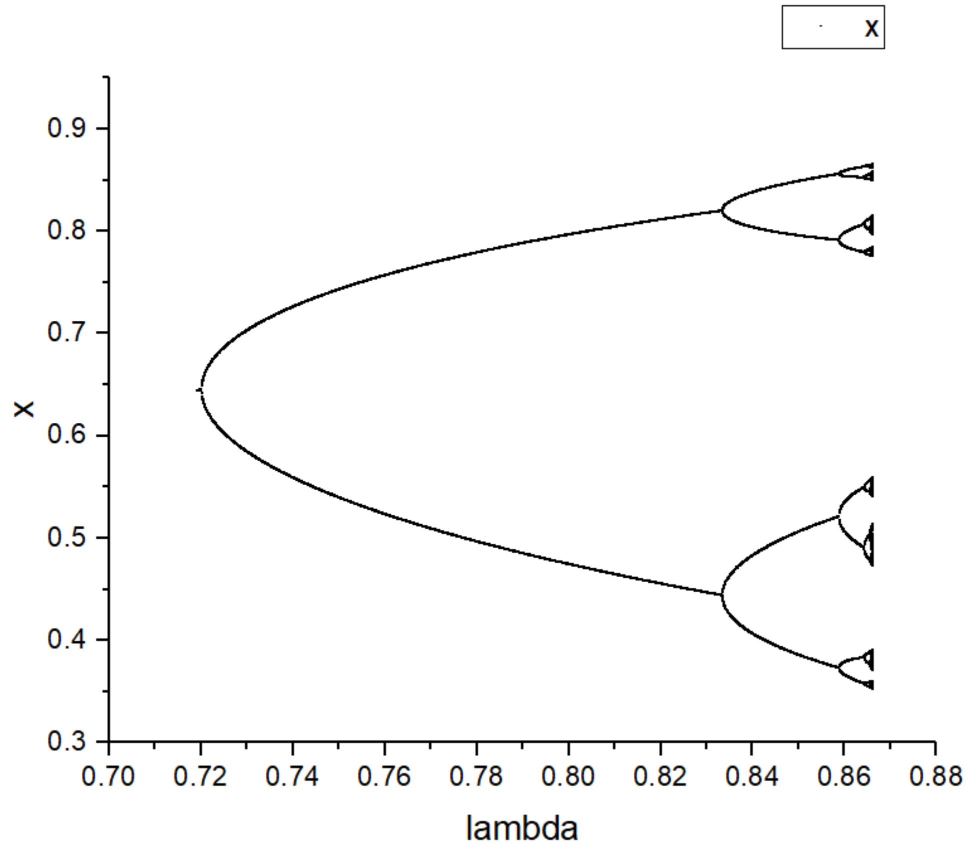


图 6: [0.719,0.866],h=0.0001 倍周期分岔段

由上图，并读取$data6.txt$可以得到二分岔点值约为$\lambda = 0.7197$；四分岔点值约为$\lambda = 0.8332$；

考虑到精度问题，这里选取更小的区间、更多的迭代次数来研究接下来的分岔点值：取 $[a, b] = [0.855, 0.866]$，步长$h = 0.00001$，迭代次数为$10^5$次，每个$\lambda$值画300个点，得到结果如下：

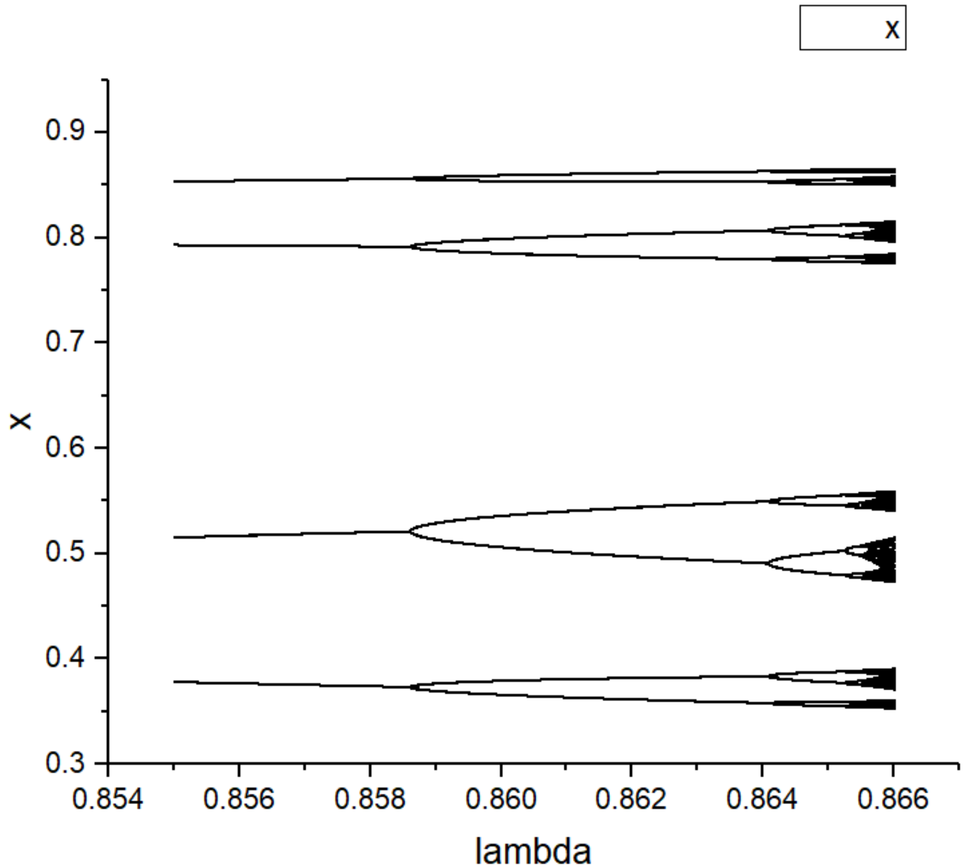


图 7: [0.855,0.866],h=0.00001 倍周期分岔段

由上图，并读取$data7.txt$可以得到八分岔点值约为$\lambda = 0.8586$；16分岔点值约为$\lambda = 0.8641$;

通过看图以及用眼在txt文件里找周期有些困难，上述点并不准确，这里可以考虑利用程序$find.c$来查找分叉点，程序的大体思路是在上述粗略值的附近区间里去查找迭代的周期改变时的$\lambda$，得到结果如下（迭代次数为$10^5$）：

表 1: 倍周期分岔对应的$\lambda$

| $m$ | 分岔情况 | 分岔点 | $\lambda_m$ | $\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1}-\lambda_m}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $1\rightarrow 2$ | 2分岔点 | 0.719942 | |
| 2 | $2\rightarrow 4$ | 4分岔点 | 0.833258 | 4.470412 |
| 3 | $4\rightarrow 8$ | 8分岔点 | 0.858606 | 4.628081 |
| 4 | $8\rightarrow 16$ | 16分岔点 | 0.864083 | 4.657313 |
| 5 | $16\rightarrow 32$ | 32分岔点 | 0.865259 | 4.666667 |
| 6 | $32\rightarrow 64$ | 64分岔点 | 0.865511 | |

这里的$\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1}-\lambda_m}$即为我们所熟知的 Feigenbaum 常数 $\delta$，对于32分岔点得到$\delta\approx 4.666667$，这与理论值4.669201...相近，误差的可能来源是迭代次数不够多造成的。

在图6中画$x=0.5$直线，读出该直线与系统图像的交点所对应的$\lambda$值下的垂直分割长度$d$:

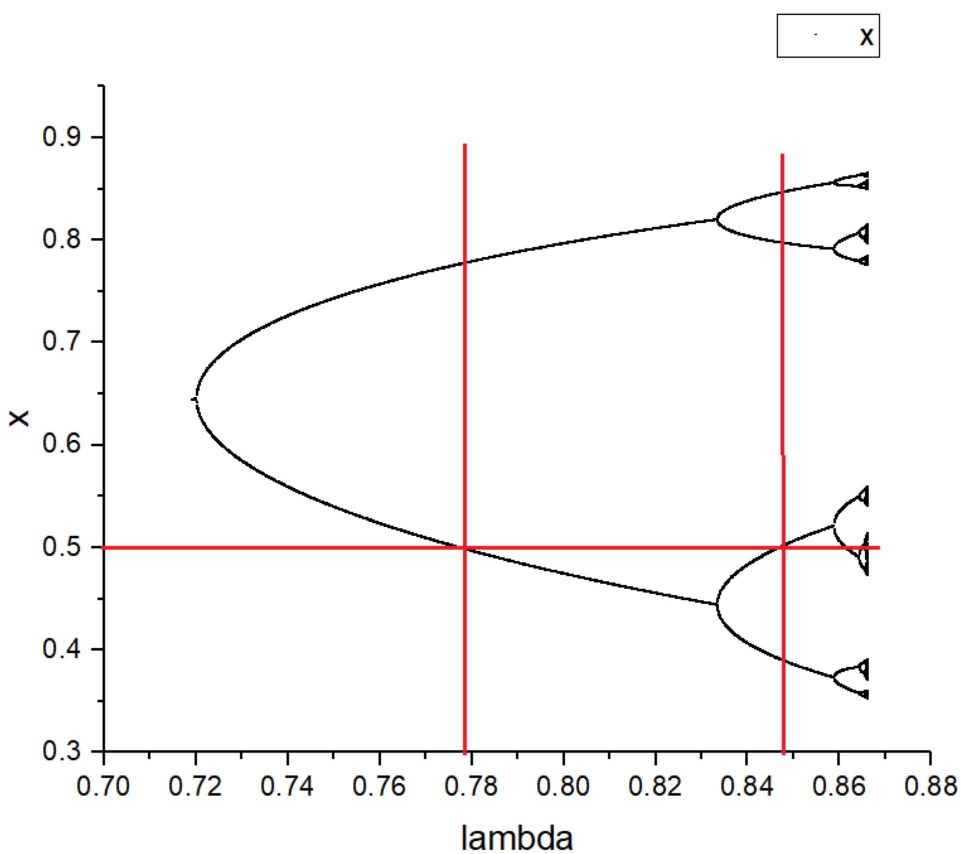


图 8: 倍周期分岔段(2,4)

$$d_1 = 0.776 - 0.5 = 0.276$$

$$d_2 = 0.5 - 0.393 = 0.107$$

同理在8分岔，16分岔图中找，得到:

$$d_3 = 0.5440 - 0.5 = 0.0440$$

$$d_4 = 0.5 - 0.4819 = 0.0181$$

得到$\alpha$值为:

$$\alpha = \frac{d_n}{d_{n-1}} = 2.5794, 2.4318, 2.4253$$

这与理论值$\alpha = 2.5029...$相近，误差的可能来源是随着m的增大，读数精度下降导致的。

## 四 结论

本次实验研究了正弦映射系统的迭代，画出了系统状态随参数$\lambda$的变化图，并清晰地看到了定态、倍周期分岔、混沌状态下的图样，并且细化了参数的变化精度，求得了2,4,8,16,32,64分岔点处的$\lambda$值，求得了对应的Feigenbaum 常数值，更深刻地理解了混沌现象与其背后蕴藏的规律。