ตรรกะและการพิสูจน์

สารบัญ

บทที่ ๑. ตรรกะและการพิสูจน์

บทนำ

ตรรกะ (logic) คือการวิชาที่ว่าด้วยการเรียนรู้เกี่ยวกับเหตุผล โดยเฉพาะกรณีที่เกี่ยวกับว่าเหตุผลใดถูก ตรรกะจะเน้นไปยังความสัมพันธ์ระหว่างถ้อยแถลง (statement) ที่ขัดแย้งกับเนื้อหาของถ้อยแถลงใดๆที่เป็นเฉพาะ ดูถ้อยแถลงต่อไปนี้เป็นตัวอย่าง

All mathematicians wear sandals.

Anyone who wears sandals is an algebraist.

Therefore, all mathematicians are algebraists.

ในทางเทคนิค ตรรกะไม่ได้ช่วยอะไรในการพิจารณาถ้อยแถลงเหล่านี้ว่ามันจะถูกต้องหรือไม่ อย่างไรก็ตามถ้าถ้อยแถลงสองถ้อยแถลงแรกถูก ตรรกะก็จะทำให้เรามั่นใจได้ว่าถ้อยแถลงที่สามนั้นถูกด้วย

วิธีการทางตรรกะถูกใช้ในทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีในวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ในการพิสูจน์การทำงานของโปรแกรมว่ามันได้ทำงานตามที่ควรเป็นหรือไม่ ตัวอย่างเช่น นักศึกษาคนหนึ่งได้ถูกกำหนดให้เขียนโปรแกรมในการคำนวณหาเส้นทางที่สั้นที่สุดระหว่างเมือง ตัวโปรแกรมต้องรับข้อมูลเข้าเป็นเมืองต่าง ๆ และระยะทางระหว่างเมืองเชื่อมต่อถึงกันโดยถนนเส้นต่าง ๆ โปรแกรมที่ออกแบบนี้จะให้ข้อมูลออกเป็นระยะทางที่สุดระหว่างเมืองที่เลือก หลังจากที่นักศึกษาคนนั้นเขียนโปรแกรมมันเป็นการง่ายที่จะทดสอบกับข้อมูลของเมืองที่มีจำนวนไม่มากนัก เช่นการเขียนบนกระดาษและคิดออกมาเป็นเส้นทางต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด คำตอบที่ได้มาก็จะทำการเปรียบเทียบกับสิ่งที่โปรแกรมทำได้ก็จะรู้ได้ว่าถูกต้องหรือไม่ อย่างไรก็ตามถ้าจำนวนเมืองมีจำนวนมากการใช้วิธีนี้อาจจะกินเวลานานมากซึ่งคงทำการทดสอบด้วยวิธีการเดิมอาจจะไม่ใช่วิธีที่ดีนัก แล้วจะทำได้อย่างไร ซึ่งอาจที่จะต้องใช้ตรรกะเป็นข้อโต้แย้งในการทดสอบว่าโปรแกรมนั้นถูกต้องหรือไม่ ข้อโต้แย้งดังกล่าวอาจจะเป็นทางการหรือไม่เป็นทางการโดยการใช้เทคนิคที่จะได้พูดถึงกันในบทนี้ ทั้งนี้ข้อโต้แย้งที่ต้องการดังกล่าวจะเป็นข้อโต้แย้งในเชิงของตรรกะที่จะใช้ในการทดสอบโปรแกรมนั้น ๆ

การเข้าใจถึงตรรกะยังคงเป็นประโยชน์ในการอธิบายงานเขียนแบบทั่วไปได้ ตัวอย่างเช่น ในครั้งหนึ่งกฎหมายต่อไปนี้มีการใช้ในเมือง Naperville, Illinois “มันเป็นการผิดกฎหมายถ้าใครคนหนึ่งจะเก็บหมามากกว่าสามตัวและแมวมากกว่าสามตัวไว้เป็นสมบัติของคนๆนั้นเมื่ออยู่ในเมือง” ถ้าพลเมืองของเมืองนี้คนหนึ่งเป็นเจ้าของหมา 5 ตัวและไม่มีแมวเลยจะผิดกฎหมายหรือไม่? ลองคิดถึงคำถามนี้ดูแล้วลองวิเคราะห์มัน

๑.๑ ประพจน์

ประพจน์ (proposition) หมายถึงข้อความทั่วไปที่เป็นประโยคบอกเล่าที่ต้องการการทดสอบว่างมันเป็นจริงหรือไม่ (ต้องการการพิสูจน์) ลองดูตัวอย่างประโยคเหล่านี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ (แต่จะไม่เป็นทั้งสอง)

(a) The only positive integers that divide 7 are 1 and 7 itself.

(b) Alfred Hitchcock won an Academy Award in 1940 for directing “Rebecca”

(c) For every positive integer *n*, there is a prime number larger than *n.*

(d) Earth is the only planet in the universe that contains life.

(e) Buy two tickets to the “Unhinged Universe” rock concert for Friday.

(a) Is correct, (b) false, Alfred Hitchcock didn’t won for directing in that day,

(C) is true

(d) true or false, เพราะว่าไม่มีใครรู้ว่ามีอีกหรือเปล่า

(e) ไม่รู้ว่าถูกหรือผิดทั้งนี้ประโยคดังกล่าวเป็นประโยคคำสั่ง

ข้อความที่มีค่าความจริงอยู่ (ไม่ว่าจะถูกหรือผิด) เรียกว่าประพจน์ (Proposition) มันมีลักษณะที่มันจะเป็นข้อความอย่างแจ้งชัด (declarative) ข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นเหมือนโครงสร้างพื้นฐานของทฤษฎีตรรกะใด ๆ ซึ่งในที่นี้จะใช้อักขระตัวพิมพ์เล็กโดยเฉพาะ p, q และ r ในการแทนข้อความที่เป็นข้อความต้องการการพิสูจน์ ใช้อักขระแทนตัวเลขต่าง ๆทางพีชคณิต และอาจใช้ในรูปแบบดังแสดง

$$p: 1 + 1 = 3$$

p เป็นข้อความที่ต้องการพิสูจน์ของ $1 + 1 = 3$

กล่าวโดยทั่วไปข้อความที่ต้องการพิสูจน์มักจะเป็นข้อความที่เชื่อมต่อกันด้วยสันธานที่ใช้ในตัวดำเนินการรวม (conjunctive operator) “and” หรือตัวดำเนินการเลือก (disjunction) “or” ตัวอย่างเช่น “It is raining” and “It is cold” ก็เชื่อมต่อกันเข้าเป็นประโยคได้เป็น “It is raining and it is cold.”

การเชื่อมประพจน์แบบการรวมและการเลือก

ในการเชื่อมประพจน์มีอยู่ 2 รูปแบบใหญ่โดยพิจารณาต่อตรรกะของมันได้แก่ การเชื่อมประพจน์แบบการรวม (conjunction) โดยใช้การเชื่อมด้วย AND และการเชื่อมประพจน์แบบการเลือก (disjunction) หรือการเชื่อมด้วย OR

ให้ p และ q เป็นประพจน์

การเชื่อมด้วย “and”

ให้ p and q เป็นประพจน์ เขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์เป็น

$p \wedge q$ เขียนการกระทำได้เป็น p and q (p และ q)

“$\wedge$” หมายถึง “และ” คำสันธานรวมหรือตัวดำเนินการรวม (conjunction)

$p \vee q$ เขียนการกระทำได้เป็น p or q (p หรือ q)

“$\vee$” หมายถึง “หรือ” (or) หรือตัวดำเนินการเลือก (disjunction)

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

```
p: It is raining.
q: It is cold.
```

p∧q : It is raining and it is cold.

```
p∨q : It is raining or it is cold.
```

ตารางค่าความจริงของการดำเนินการรวม “และ”

การดำเนินการ “และ” ใช้สำหรับการเชื่อมประพจน์สองประพจน์เข้าด้วยกันโดยเลือกเอาสิ่งที่เป็นตัวร่วมกันในการกำหนดค่าของการเชื่อมสันธานนั้น ๆ สำหรับการดำเนินการ “และ” จะเขียนด้วยเครื่องหมาย “∧” ระหว่างประพจน์ทั้งสอง สำหรับค่าตารางความจริงจะแสดงได้ดังนี้

p	q	p∧q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

บทสรุป ถ้ามีเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งเป็น false จะทำให้ p∧q เป็น false

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

```
p: A decade is 10 years.
```

q:A millennium is 100 years.

p มีค่าเป็น true q มีค่าเป็น false (millennium = 1000 ปี) ดังนั้น p∧q เป็นเท็จ

ในทางโปรแกรมมักใช้ตัวดำเนินการ “และ” ในการเชื่อมประโยคเพื่อตรวจสอบข้อความ ทั้งนี้มักใช้เครื่องหมาย “&&” เช่น

$$\mathrm{x} < 10 \;\&\&\; \mathrm{y} > 4$$

นิพจน์นี้ประกอบด้วยสองข้อความที่เชื่อมกันด้วยตัวดำเนินการและ

ตารางความจริงของการดำเนินการ “หรือ”

เป็นการเชื่อมประพจน์สองประพจน์เข้าด้วยกันด้วยการนำเอามารวมกันทั้งหมด การดำเนินการจะใช้เครื่องหมาย “∨” ในการเชื่อมประพจน์ทั้งสอง สำหรับตารางค่าความจริงแสดงได้ตามตารางต่อไปนี้

p	q	p∨q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

บทสรุป ถ้ามีข้อความใดข้อความหนึ่งหรือทั้งสองเป็น true จะทำให้ p∨q เป็น true

ในทางโปรแกรมการเชื่อมด้วย subjunctive จะใช้เครื่องหมาย “||” เช่น

$$x < 10 || y > 4$$

ตัวดำเนินการนิเสธและตารางค่าความจริงของมัน

นิเสธ (negation) เป็นการดำเนินการทางตรรกะที่ทำให้ประพจน์นั้นๆมีค่าตรงกันข้ามเช่นเดิมเป็น true จะกลายเป็น false เป็นต้น ใช้เครื่องหมาย “¬” และตารางความจริงของมันแสดงได้ดังนี้

p	¬p
T	F
F	T

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

p: Paris is the capital of England

¬p: Paris is not the capital of England / It is not the case that Paris is the capital of England.

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

p: π was calculated to 1,000,000 decimal digits in 1954.

¬p: π was not calculated to 1,000,000 decimal digits in 1954.

ในการเขียนโปรแกรมมักใช้เครื่องหมาย “!” แทนการดำเนินการ negation ตัวอย่างเช่น

$$!\,(\mathrm{x} < 10)$$

จะเป็นจริงถ้า x มีค่ามากกว่าหรือเท้ากับ 10

การเชื่อมการดำเนินการ

ในการดำเนินการต่อประพจน์ต่าง ๆ อาจจะมีมากกว่าสองประพจน์ขึ้นไปและประกอบด้วยการเชื่อมต่อด้วยการกำทำทางตรรกะแบบต่าง ๆ สำหรับลำดับการดำเนินการทางตรรกะโดยทั่วไปจะใช้กฎเกณฑ์ในการพิจารณาลำดับของความสำคัญดังนี้

1. ¬

2. ข้อความในวงเล็บ

3. ทำจากซ้ายไปขวา

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

ให้ p มีค่าเป็น false, q มีค่าเป็น true และ r มีค่าเป็น false

$\neg p \vee q \wedge r$ จะมีค่าเป็น true

๑.๒ ประพจน์แบบมีเงื่อนไขและรูปแบบที่สมมูลของตรรกะ

เป็นข้อความที่ข้อความแรกจะเกิดก่อนแล้วมีผลกับข้อความหลังซึ่งเป็นผลจากข้อความแรก เช่น

If the Mathematics Department gets an additional $40,000, then it will hire one new faculty member.

ข้อความแรกคือ

If the Mathematics Department gets an additional $40,000

ข้อความที่สองคือ

It will hire one new faculty member.

เราเรียกประพจน์แบบนี้ว่าประพจน์แบบมีเงื่อนไข (conditional proposition)

เงื่อนไขแบบ if...then...

ให้ p และ q เป็นประพจน์

if p then q เขียนได้เป็น p→q

เรียก p ว่าเป็นสมมุติฐาน (hypothesis) หรือ antecedent และเรียก q ว่าเป็น conclusion (consequent)

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

ถ้าเรานิยามว่า

p:The Mathematics Department get an additional $40,000.
q:The Mathematics Department will hire one new faculty member.

ประพจน์ในตอนต้นก็จะอยู่ในรูปแบบของ **p→q** ตัวสมมติฐานคือ "The mathematics Department gets an additional $40,000" และบทสรุปคือ "The Mathematics Department will hire one new faculty member"

ตารางความจริงของประพจน์แบบเงื่อนไข p→q

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

จากตารางความเป็นจริงจะได้ว่า ถ้าเหตุเป็นเท็จแล้วผลที่ได้กลับเป็นจริงจะทำให้ข้อความแบบมีเงื่อนไขนี้เป็นเท็จ

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

ประพจน์ที่เป็นเงื่อนไขเป็นจริงเพราะสมมติฐานเป็นเท็จจะกล่าวได้ว่าเป็นจริงโดยปริยาย (true by default) หรือ ความจริงที่ว่างเปล่า (vacuously true) ตัวอย่างเช่น ถ้าประพจน์ต่อไปนี้

`If the Mathematics Department gets an additional $40,000, then it will hire one new faculty member.`

เป็นจริงเพราะว่าภาคคณิตศาสตร์ไม่ได้เงินเพิ่ม $40,000 เราอาจพูดได้ว่าประภจน์นี้เป็นจริงโดยปริยายนั่นคือมันเป็นจริงแบบว่างเปล่า

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

เงื่อนไขที่จำเป็น

เงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) คือเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับผลลัพธ์เฉพาะ เงื่อนไขนั้นไม่ได้รับรองถึงผลลัพธ์นั้นแต่ถ้าไม่มีมันไว้ผลลัพธ์ก็จะไม่สำเร็จ ในตอนนี้ถ้อยแถลงที่ให้หมายความว่าถ้า Cubs ชนะ World Series เราก็จะแน่ใจได้ว่าพวกเขาก็จะเซ็นสัญญากับคนขว้างได้อย่างโล่งใจเพราะว่าไม่มีการเซ็นสัญญาพวกเขาก็อาจจะไม่ชนะ World Series ดังนั้นรูปแบบสมมูลย์ของถ้อยแถลงที่ใช้คือ

if the Cubs win the World Series, then they sign a right-handed relief pitcher.

บทสรุปดังกล่าวแสดงถึงเงื่อนไขที่จำเป็น

ข้อสังเกต

If the Cubs sign a right-handed relief pitcher, then they win the World Series

ไม่เป็นประพจน์ที่สมมูลย์กัน การเซ็นสัญญากับพิชเชอร์มือขวาไม่ได้รับประกันว่าจะชนะ World Series อย่างไรก็ตามการไม่เซ็นสัญญากับพิชเชอร์มือขวาจะรับประกันว่าพวกเขาจะไม่ชนะ World Series

เงื่อนไขที่เพียงพอ

เงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition) คือเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะรับประกันถึงผลลัพธ์เฉพาะ ถ้าเงื่อนไขไม่เพียงพอผลลัพธ์อาจสำเร็จในอีกทางหนึ่งหรือไม่สำเร็จเลย แต่ถ้าเงื่อนไขเพียงพอผลลัพธ์ที่ได้ได้รับการรับประกัน ต่อไปนี้จะแน่ใจได้ว่า Maria ได้ไปฝรั่งเศส มันเพียงพอสำหรับเธอในการที่จะไปหอไอเฟิล (มีความแน่ใจในทางอื่นในการทำให้แน่ใจว่า Maria ได้ไปฝรั่งเศส ตัวอย่างเช่น เธอควรไป Lyon) ดังนั้นรูปแบบสมมูลย์ของถ้อยแถลงดังกล่าวจะได้เป็น

If Maria goes to the Eiffel Tower, then she visits France

สมมุติฐานนั้นแสดงออกมาเป็นแบบเงื่อนไขที่เพียงพอ

ข้อสังเกต

If Maria visits France, then she goes to the Eiffel Tower

ไม่ได้สมมูลย์กัน ดังที่เราได้กล่าวไว้ก่อนหน้าว่ามีเส้นทางอื่นนอกจากไปหอไอเฟิลที่จะทำให้แน่ใจว่ามาเรียไปฝรั่งเศสได้

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง เขียนประพจน์แบบเงื่อนไข

If Jerry receives a scholarship, then he will go to college.

ในคำตรงกันข้าม สมมุติได้ว่าถ้า Jerry ไม่ได้รับทุนแต่ชนะ lottery แล้วยังไงก็จะไป college หาค่าความจริงของประพจน์ดั้งเดิมนี้และข้อความในลักษณะตรงข้าม

ให้

```
p: Jerry receives a scholarship.
q: Jerry go to college.
```

จากประพจน์ที่ให้เขียนในสัญลักษณ์เป็น p⟶q ได้ และถ้าสมมุติฐาน p เป็นเท็จแล้วเงื่อนไขของประพจน์เป็นจริง ค่าตรงข้ามของประพจน์นี้จะได้เป็น

```
If Jerry goes to college, then he receives scholarship
```

ตัวประพจน์กลับเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น q⟶p และถ้า สมมุติฐาน q เป็นจริง และบทสรุป p เป็น false ประพจน์ย้อนกลับจะเป็นเท็จ

อีกหนึ่งประพจน์ที่เป็นประโยชน์คือ

```
p if and only if q
```

ซึ่งมันจะถูกพิจารณาว่าเป็นจริงที่ถูกต้องกว่าเมื่อ p และ q มีค่าความจริงเดียวกัน (นั่นคือ p และ q จริงทั้งคู่หรือเป็นเท็จทั้งคู่)

เงื่อนไขแบบสองทิศทาง

ข้อความแบบนี้เป็นข้อความแบบมีเงื่อนไขสองทาง (biconditional)

จะอยู่ในลักษณะที่เรียกว่า “if and only if”

ใช้เครื่องหมาย “$\boxed{\leftrightarrow}$”

ตัวอย่าง ๒. ตารางความจริง

p	q	p$\boxed{\leftrightarrow}$q
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	T

ถ้าเหตุ หรือผลอย่างใดอย่างหนึ่งเป็นเท็จจะทำให้ข้อความเป็นเท็จ

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

p:1<5, q:2<8

p$\boxed{\leftrightarrow}$q is true

q$\boxed{\leftrightarrow}$p is true

ความสมมูลของตรรกะ

ตรรกะที่สมมูลกัน (equivalent) หมายถึงตรรกะที่มีค่าความจริงที่เป็นผลลัพธ์เหมือนกัน สมมุติว่า P และ Q เป็นประพจน์รวมที่เกิดจากประพจน์ต่าง ๆ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ถ้าพูดว่า P และ Q สมมูลกันเขียนได้เป็น

$$P \equiv Q$$

ซึ่งจะมีความหมายว่าค่าความจริงของ P เป็น true Q ก็จะเป็น true ด้วย และถ้า P มีค่าความจริงเป็น false Q ก็จะมีค่าความจริงเป็น false ด้วย

กฎของเดอร์มอร์แกน

กฎของเดอร์มอร์แกน (De Morgan's Law)

กฎการกระจายเครื่องหมาย negation

1 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

2 $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

ตารางค่าความจริง

p	q	¬(p∨q)	¬p∧¬q
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

ผลที่ได้ทั้งสองมีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง ๑. 1.2.12 ตัวอย่าง

$$x < 10 \,||\, x > 20$$

และ

$$!\,(x \geq 10 \,\&\&\, x \leq 20)$$

จากกฎข้อที่สองของ De Morgan ทั้งสองข้อความสมมูลย์กัน

ตัวอย่าง ๑. 1.2.13 ตัวอย่าง

เครื่องหมาย ¬ การกระจายกับการดำเนินการแบบเป็นเงื่อนไข

2.1 กรณีของ → (if… then)

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

ตารางค่าความจริง

p	q	¬(p→q)	p∧¬q
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	F	F

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

If Jerry receives a scholarship, then he goes to college.

p: Jerry receives a scholarship

q: He goes to college

การดำเนินการของข้อความทั้งสองเขียนได้เป็น p→q

และการดำเนินการ negation สำหรับข้อความดังกล่าวได้เป็น $p \wedge \neg q$ ตีความหมายได้ว่า

Jerry receives a scholarship and he does not go to college.

2.2 การกระจาย ¬ เข้ากับ if…then (contrapositive)

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

ตัวอย่าง ๑. 1.2.15 ตัวอย่าง จากตารางค่าความจริงได้แสดงให้เห็นว่า

กรณีสมมูลของ $\boxed{\leftrightarrow}$ (if and only if)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

เงื่อนไขขัดแย้งแบบสอดคล้อง

เงื่อนไขขัดแย้งแบบสอดคล้อง (contrapositive) หรือเงื่อนไขการถ่ายโอน (transposition) ของ $p \to q$ คือ $\neg q \to \neg p$

ข้อสังเกตสำหรับเงื่อนไขขัดแย้งแบบสอดคล้องกับเงื่อนไขย้อนกลับคือ เงื่อนไขแบบย้อนกลับของประพจน์ก็แค่เป็นการกลับบทบาทของ p และ q ขณะที่เงื่อนไขขัดแย้งแบบสอดคล้องกลับบทบาทของ p และ q และกลับทำการนิเสธมันทั้งสองด้วย

ทฤษฎี ของประพจน์แบบเงื่อนไข $p \to q$ และประพจน์ขัดแย้งแบบสอดคล้องของมัน $\neg q \to \neg p$ เป็นประพจน์ที่สมมูลย์กัน

(พิสูจน์ได้จากตารางค่าความจริง)

๑.๓ ตัวบ่งปริมาณ

ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier) เป็นเครื่องหมายที่ใช้ในการกำหนดประพจน์หนึ่ง โดยประพจน์ดังกล่าวจะยังคงบอกไม่ได้ว่าจริงหรือเท็จจนกว่าจะกำหนดปริมาณให้กับตัวแปรในประพจน์นั้นๆ ให้ถูกต้อง

เป็นข้อความที่บอกไม่ได้ว่าจริงหรือเท็จจนกว่าจะมีการกำหนดค่าให้ ต.ย. เช่น

p: n is and odd number

p is false if n=8, p is true if n=103 เป็นต้น

ฟังก์ชันประพจน์

ให้ P(x) เป็นข้อความที่เกี่ยวข้องกับค่าของตัวแปร x และ D คือเซ็ต เราเรียก P ว่าเป็นฟังก์ชันประพจน์ (proposition function or predicate) ในบริบทของ D สำหรับแต่ x ใน D แล้ว P(x) เป็นประพจน์

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

ให้ P(n) เป็นถ้อยแถลง n is an odd integer และ D is a set of positive integer จะได้ว่า

P เป็น propositional function ในบริบทของเซ็ต D เพราะว่าในแต่ละ n ใน D, P(n) เป็น proposition ทั้งนี้ P(n) หาค่าได้ซึ่งเป็นได้ทั้ง true และ false อย่างใดอย่างหนึ่ง

P(1) : 1 is an odd integer

ตัวอย่าง ๒. ตัวอย่าง

(a) $n^2 + 2n$ is an odd integer (domain of discourse is a set of positive integer)

(b) $x^2 - x - 6 = 0$ (domain of discourse is a set of real numbers

(c) The baseball player hit over .300 in 2003 (domain of discourse is a set of baseball players)

(d) The restaurant rated over two stars in Chicago magazine (domain of discourse is a restaurant rated in Chicago magazine)

ทั้งหมดเป็นฟังก์ชันประพจน์

ฟังก์ชันประพจน์แบบ for all

ให้ P เป็นฟังก์ชันประพจน์ภายใต้บริบท D จะได้ว่า

for every x,P(x) เขียนได้เป็น

$$\forall x\ P(x)$$

สัญลักษณ์ ∀ เรียกว่า universal quantifier หรือหมายความถึง for all, for any

$\forall x\ P(x)$ จะมีค่า true เมื่อในทุกๆ x ใน D

$\forall x\ P(x)$ มีค่าเป็น false เมื่ออย่างน้อยหนึ่งตัวของ x ใน D ทำให้ P(x) เป็น false

ตัวอย่าง ๓. ตัวอย่าง

$\forall x\ (x^2 \geq 0)$ D เป็นเซ็ตของจำนวนจริง

ฟังก์ชันประพจน์นี้เป็นจริงในทุกๆ x

$\forall x\ (x^2 - 1 > 0)$ D เป็นเซ็ตของจำนวนจริง

ฟังก์ชันประพจน์นี้เป็นเท็จเพราะว่าเมื่อค่าของ x =1 ฟังก์ชันประพจน์นี้มีค่าเป็น 0 ซึ่งเป็นเท็จ

ฟังก์ชันประพจน์แบบ for some

ให้ p เป็นฟังก์ชันประพจน์ภายใต้บริบท D ถ้ามี x ของฟังก์ชันประพจน์ P(x) เขียนได้เป็น

$$\exists x P(x)$$

∃ คือเครื่องหมาย existentially quandifier ซึ่งมีความหมายว่า for some

ประพจน์ลักษณะนี้จะมีค่าเป็น true ก็ต่อเมื่อมีอย่างน้อย x ใน D ที่ทำให้ P(x) มีค่าเป็นจริง และจะมีค่าเป็น false ถ้าไม่มีค่าใดเลยของ x ที่ทำให้ P(x) เป็นจริง

ตัวอย่าง ๔. ตัวอย่าง

$$\exists x \left(\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5}\right)$$

D คือเซ็ตของเลขจำนวนจริง ประพจน์นี้มีค่าเป็นจริงเพราะว่ามีอย่างน้อยที่ x=2 ที่ทำให้ประพจน์ดังกล่าวมีค่าเป็นจริง

ตัวอย่าง ๕. ตัวอย่าง

$$\exists x \left(\frac{1}{x^2+1} > 1\right)$$

D คือเซ็ตของเลขจำนวนจริง ประพจน์นี้จะไม่มีค่าใดเลยของ x ที่จะทำให้ประพจน์นี้เป็นจริง ดังนั้น ประพจน์นี้เป็น false

ตัวอย่าง ๖. ตัวอย่าง

$$\exists x \left(\frac{1}{x^2+1} \leq 1\right)$$

ประพจน์นี้มีค่าเป็นจริง ทั้งนี้เพราะว่า เมื่อ x เป็นเลขจำนวนจริงใดๆ ประพจน์นี้เป็นจริงเสมอ

ตัวอย่าง ๗. ตัวอย่าง

ให้ P เป็นฟังก์ชันประพจน์โดยที่โดเมนของมันเป็นสมาชิกใน d1, d2,...dn. ให้ทดสอบ ∃x,P(x) เมื่ออยู่ในส่วนของโปรแกรมดังต่อไปนี้

```
for i=1 to n
  if(p(d_i))
    return true
return false
```

จากรอบวนของ for มันจะทำการทดสอบ $p(d_i)$ ทุกๆค่าของ d_i ทีละตัว ถ้าพบว่ามีตัวใดตัวหนึ่งของ d_i มีค่าเป็นจริง $p(d_i)$ จะมีค่าเป็น true แล้วจบการทำงาน แต่ถ้า $p(d_i)$ มีค่าเป็น false ในทุกๆค่าของ $p(d_i)$ รอบวนจะจบด้วยการคืนค่าเป็น false จากข้อความดังกล่าวเราอาจสรุปได้เป็นนิยามดังนี้

there exists x such that,P(x)

for some x, P(x)

for at least one x, P(x)

1.3.13 ตัวอย่าง

for some n is prime number then n+1, n+2, n+3, n+4 are not prime

ในที่นี้ต้องทดสอบโดยให้เป็น n เป็นเลข prime แล้วถ้าหาค่าของ n+1, n+2,n+3 และ n+4 ได้ ประพจน์นี้ก็จะมีค่าเป็น true ซึ่ง

เมื่อ n = 23, ค่า 24, 25, 26,27 ไม่ใช่เลข prime ดังนั้นประพจน์นี้เป็น true

กฎของเดอร์มอร์แกนสำหรับฟังก์ชันประพจน์

$$\text{(a) } \neg(\forall x\ P(x)); \exists x\ \neg P(x)$$

$$\text{(b) } \neg(\exists x\ P(x)); \forall x\ \neg P(x)$$

พิสูจน์ (a)

สมมุติให้ $\neg(\forall x\ P(x))$ มีค่าเป็น true ดังนั้น $\forall x\ P(x)$ มีค่าเป็น false $\forall x\ P(x)$ มีค่าเป็น false ได้ก็ต่อเมื่อมีอย่างน้อยมีหนึ่ง x ที่ทำให้ P(x) มีค่าเป็น false ดังนั้นก็มีอย่างน้อยหนึ่งค่าของ x ที่ทำให้ $\neg P(x)$ มีค่าเป็น true หรือเราเขียนได้ใหม่ว่า $\exists x\ \neg P(x)$ นั่นเอง

ตัวอย่าง ๘. ตัวอย่าง

$$P(x): \frac{1}{x^2+1} > 1$$

ค่าของ $\exists x\ P(x)$ จะมีค่าเป็น false ซึ่งจะได้จากการพิสูจน์ว่า

$$\forall x \neg P(x)$$

มีค่าเป็น true

๑.๔ ตัวบ่งปริมาณเชิงซ้อน

ตัวบ่งปริมาณเชิงซ้อน (Nested quantifier) เป็นการประยุกต์ใช้ quantifier ที่เกี่ยวข้องกับ P ที่มากกว่าหนึ่ง ขอให้พิจารณาถ้อยแถลงต่อไปนี้

The sum of any two positive real numbers is positive.

จากประโยคดังกล่าวจะเห็นว่ามีจำนวนเลขอยู่สองจำนวนดังนั้นจึงควรที่จะแบ่งออกเป็นสองประโยค ซึ่งในที่นี้เราใช้ x และ y แทนจำนวนทั้งสอง การยืนยัน (assertion) ถึงถ้อยแถลงดังกล่าวอาจทดสอบโดยกำหนดลักษณะการแถลงเป็น

if x>0 and y >0 then x+y>0

เราจะใช้ quantifier จำนวนสองตัวในการควบคุมค่าของตัวแปร x และ y ซึ่งอาจเขียนถ้อยแถลงได้เป็นดังนี้

$$\forall x \forall y \big((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0)\big)$$

จากค่าของ x และ y เราให้ D ของมันทั้งสองเป็นเลขจำนวนจริง เราเรียกลักษณะของการใช้ quantifier มากกว่าหนึ่งว่า nested quantifier

ตัวอย่าง ๙. ตัวอย่าง

$$\forall m \exists n (m < n), D \in integer$$

จากถ้อยแถลงดังกล่าวอาจกล่าวได้ดังนี้

for all m there exists n such that m<n

นั่นหมายความว่า ถ้าเลือกจำนวนเต็มใดๆขึ้นมา จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งจำนวนเต็ม (n) ที่มีค่ามากกว่า m เสมอ หรือพูดง่ายๆว่า ไม่มีจำนวนที่ใหญ่ที่สุด

ตัวอย่าง ๑๐. ตัวอย่าง 2 ทดสอบข้อความ

Everybody loves sombody.

สมมุติว่าให้ L(x,y) มีถ้อยแถลงเป็น x loves y สำหรับ x ต้องการ universal quantifier (∀) และ y ต้องการ existent quantifier (∃)

$$\forall x \exists y \, L(x, y)$$

๑.๕ การพิสูจน์

การพิสูจน์ (proof)

สัจพจน์ (axiom) : ความจริงที่ไม่จำเป็นต้องพิสูจน์

นิยาม (definition) : ใช้สำหรับการสร้างแนวคิดในเทอมของสิ่งที่มีอยู่แล้ว

ทฤษฎี (theorem) : เป็นประพจน์ที่ได้รับการพิสูจน์ว่าเป็นจริง

บทตั้ง (lemma) : เป็นทฤษฎีบทง่ายๆ ที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทอื่นๆ เนื่องจากการพิสูจน์ที่ซับซ้อนสามารถจะทำให้ง่ายขึ้นโดยการพิสูจน์อนุกรมของบทตั้ง

ชนิดพิเศษของ theorem ที่มักจะไม่ใช่เป็นจุดสนใจหลักโดยตัวของมันเองแต่เป็นประโยชน์ที่จะใช้ในการพิสูจน์ theorem อื่น

บทพิสูจน์ (corollary) : คือประพจน์ที่ถูกสร้างโดยตรงจากทฤษฎีบทที่ถูกพิสูจน์แล้ว หรือเป็นชนิดพิเศษของ theorem เป็น theorem ที่ทำตามได้ง่ายจาก theorem อื่น

ข้อโต้แย้งของการสร้าง ความเป็นจริงของ theorem เรียกว่า proof หรือการพิสูจน์

ตัวอย่าง ๑. ในระบบทางเรขาคณิตก็เป็นส่วนหนึ่งของระบบทางคณิตศาสตร์เช่นกัน

สัจจพจน์ที่มีได้อาจเป็น

- Given two distinct point, there is exactly one line that contains them
- Given a line and point not on the line, there is exactly one-line parallel to the line through the point.

คำว่า point, line ไม่ได้นิยามลงไปดังนั้นการกล่าวถึงมันเป็นการนิยามอย่างเป็นนัยถึง axiom ที่อธิบายถึงคุณสมบัติของมัน

definition

- Two triangles are congruent if their vertices can be paired so that the corresponding sides and corresponding angles are equals.
- Two angles are supplementary if the sum of their measure is 180 degree

ตัวอย่าง ๒. ตัวอย่าง 2 ระบบของเลขจำนวนจริงก็เป็นส่วนหนึ่งของระบบจำนวนเลข ระหว่างสัจจพจน์ต่างๆเป็นได้ดังนี้

- For all real numbers x and y, xy=yx
- There is a subset P of real number satisfying
    - If x and y are in P, then x+y and xy are in P
    - If x is a real number, then exactly on of the following statements is true:
        - x is in P
        - x =0
        - -x is in P

สำหรับการคูณก็จะมีการนิยามอย่างเป็นนัยจาก axiom แรก และ axiom อื่นๆจะเป็นเสมือนคุณสมบัติของมัน

- The elements in P (of the preceeding axiom) are called positive real numbers.
- The absolute value (|x|) of a real number x is defined to be x if x is positive or 0 and –x otherwise.

ตัวอย่าง ๓. 1.5.3 ตัวอย่าง 3 ทฤษฎีสำหรับเรขาคณิตในระบบยูคลีเดียน

- If two sides of a triangle are equal, then the angles opposite them are equal.
- If the diagonals of a quadrilateral bisect each other, then the quadrilateral is a parallelogram.

ตัวอย่าง ๔. 1.5.4 ตัวอย่าง 4 corollary in Euclidean geometry

- If a triangle is quilateral, then it is equiangular.

Note เป็นทฤษฎีจากตัวอย่าง 3

ตัวอย่าง ๕. 1.5.5 ตัวอย่างทฤษฎีเกี่ยวกับจำนวนจริง

- $x \cdot 0 = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
- สำหรับจำนวนจริงทั้งหมดของ x,y และ z ถ้า x<=y และ y<=z ดังนั้น x<=z

ตัวอย่าง ๖. 1.5.6 บทตั้งของเลขจำนวนจริง

- If n is a positive integer, then either $n-1$ is a positive integer or $n-1$=0

Form of theorems

For all $x_1, x_2, \dots, x_n$ if $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, then $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

นิยาม จำนวนเต็มเลขคู่และเลขคี่

จำนวนเต็ม n จะเป็นเลขคู่ (even) ถ้ามีจำนวนเต็ม k ที่ n=2k และจำนวนเต็ม n เป็นจำนวนเต็มคี่ (odd) ถ้ามีจำนวนเต็ม k ที่ n=2k+1

การพิสูจน์โดยตรง

assume $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is true and then using $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ as well as other axioms,definitions and previously derived theorems, shows directly that $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is true.

พิสูจน์

1. if n = 12 is even because there is an integer k (k=6) such that n=2k; that is 12 = 2*6

2. if n = -21 is odd because there is an integer k (k=-11) such that n=2k+1; that is -21 = 2*(-11)+1

statement: For all integer m and n, if m is odd and n is even, then m+n is odd.

assume m and n is arbitrary integer and m is odd and n is even is true,thus

m+n is odd

is true

By definition

$$m = 2k_1 + 1 \text{ and } n = 2k_2;\ k_1 \neq k_2$$
$$m + n = (2k_1 + 1) + (2k_2)$$
$$= 2(k_1 + k_2) + 1$$

ให้ $k = k_1 + k_2$

และ

$$m + n = 2k + 1$$

ดังนั้น

$m + n$ เป็นเลขคี่

การพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง

การพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง (proof by contradiction) เป็นการพิสูจน์ในลักษณะทางอ้อม โดยพิสูจน์ว่าถ้าสมมุติฐาน p เป็น true และบนสรุป q เป็น false ดังนั้น p and ¬q เช่นเดียวกับ axiom, definition, derived theorem ทำให้เกิดสิ่งตรงข้ดแย้ง (contradiction) การพิสูจน์แบบนี้จะอยู่ในรูปแบบของ $\mathrm{r} \wedge \neg \mathrm{r}$

การพิสูจน์เพื่อให้ได้สิ่งตรงข้ามแตกต่างจากการพิสูจน์ทางตรงคือข้อสรุปของแบบตรงข้ามจะเป็นมีลักษณะที่ตรงข้ามกับข้อพิสูจน์ทางตรง การพิสูจน์โดยทางอ้อมอาจเป็นการปรับรูปแบบหรือลักษณะของการพิสูจน์ที่จะมีรูปแบบเป็น

$$p \to q \text{ and } (p \wedge \neg q) \to (r \wedge \neg r)$$

ดังแสดงค่าความจริงของมันในตาราง

p	q	r	$p \to q$	$p \wedge \neg q$	$r \wedge \neg r$	$(p \wedge \neg q) \to (r \wedge \neg r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F	T

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง : พิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้งสำหรับประพจน์ต่อไปนี้

For all real numbers x and y, if $x + y \geq 2$, then either $x \geq 1$ or $y \geq 1$

proof

เริ่มโดยการให้ผลสรุปเป็น flase หรือ $\neg(x \geq 1 \vee y \geq 1)$ เป็น true จาก De Morgan's Law

$$\neg(x \geq 1 \vee y \geq 1) \equiv \neg(x \geq 1) \wedge \neg(y \geq 1) \equiv (x < 1) \wedge (y < 1)$$

จากรูปแบบของเครื่องหมายน้อยกว่า

$$x + y < 1 + 1 = 2$$

ณ.จุดนี้หาผลตรงข้าม $p \wedge \neg p$ เมื่อ

$$p: x + y < 2$$

ดังนั้นเราสรุปว่าถ้อยแถลงนี้มีค่าเป็น true

สมมุติว่าเราให้ผลพิสูจน์โดยการโต้แย้ง ดังตัวอย่างแล้วสรุป $\neg p$ เป็นผลให้เราต้องพิสูจน์

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

การพิสูจน์แบบนี้จะเป็นการพิสูจน์ที่เรียกว่า proof by contrapositive

คำกล่าวอ้าง

อาร์กิวเมนต์ (*argument*) หมายถึงลำดับของประพจน์ที่เขียนเป็น

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array}$$

หรือ

$$p_1, p_2, \dots, p_n / \therefore q$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$: สมมติฐาน

q : ข้อสรุป

อาร์กิวเมนต์ที่ให้กับ $p_1 \dots p_n$ จะเป็น true ทั้งหมดแล้วทำให้ q มีค่าเป็น true ด้วย มิฉะนั้นจะโมฆะ (invalid)

สำหรับ *argument* ที่มีค่าเป็น invalid บางครั้งอาจพูดได้ว่า conclusion หรือ q เป็นไปตาม hypotheses ซึ่งจะไม่พูดว่า conclusion มีค่าเป็น true หรือหมายความว่าถ้าพอใจใน hypotheses ก็ต้องพอใจใน conclusion ด้วย argument มีค่าใช้ได้ก็จะเป็นเพราะว่ารูปแบบของมันไม่ใช่สิ่งที่มันมีอยู่

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

พิจารณา argument ต่อไปนี้

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$$

พิสูจน์ว่ามันใช้ได้ (valid)

วิธีการแรกอาจกระทำได้โดยการพิจารณาตารางค่าความจริง

p	q	p→q	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

ดูที่ค่าเป็น true ของ p⟶q และ p (แถวแรก) จะพบว่า เมื่อมันทั้งสองมีค่าเป็นจริงจะได้ q เป็นจริง ดังนั้นอาร์กิวเมนต์ในที่นี้ valid

ตัวอย่าง ๑. ตัวอย่าง

กำหนดอาร์กิวเมนต์ต่อไปนี้

$$\begin{array}{c} \text{if } 2 = 3 \text{ then } I\ ate\ my\ hat. \\ \underline{I\ ate\ my\ hat.} \\ \therefore 2 = 3 \end{array}$$

ตัวอย่าง ๒. ตัวอย่าง

ให้ p: 2=3, q=I ate my hat

จากข้อความเขียนได้เป็น

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{q} \\ \therefore p \end{array}$$

ถ้าอาร์กิวเมนต์นี้ valid ก็ต่อเมื่อ p⟶q และ q ทั้งสองมีค่าเป็น true ดังนั้น p ต้องมีค่าเป็น true ด้วย ถ้า p⟶q และ q มีค่าเป็น true ในกรณีนี้ p มีค่าเป็น false และ q เป็น true ในกรณีนี้ อาร์กิวเมนต์ก็จะเป็น invalid

ในการดำเนินการพิสูจน์อาจกระทำได้โดยการพิจารณาจากตารางค่าความจริงของมัน จากตัวอย่างดังกล่าวที่ประพจน์ที่เป็นสมมุติฐานมีค่าเป็น true แต่บทสรุปมีค่าเป็น false แล้วอาร์กิวเมนต์ที่ได้เป็น invalid

จากที่พิจารณากันมาเป็นการใช้สำหรับการพิสูจน์ สมมุติฐาน สัจพจน์ นิยามและอื่นๆ เพื่อที่จะไปให้ถึงข้อสรุป สำหรับการพิสูจน์ในบทโดยรวมว่ามันจะ valid แต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ต้องมีผลเป็น valid ในแต่ละขั้นของบทสรุป เมื่อมีการสร้างการพิสูจน์ก็มักจะใช้สัญญชาติญาณในการนำเขียนแบบ valid สู่บทสรุปชั่วขณะ อย่างไรก็ตามกรบวนการจะถูกทำให้เป็นรูปแบบมาตรฐาน ในบทนี้จะสรุปรูปแบบของขั้นตอนที่กล่าวมาโดยเรียกเป็นกฎของการอนุมาน (rule of inference) ซึ่งแสดงรูปแบบของการอนุมานแบบต่างๆในตาราง argument ที่ valid ที่ถูกใช้ใน arguments ที่ใหญ่กว่าเช่นการพิสูจน์

Rule of inference	Name	Rule of inference	Name
$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$	Modus ponens/law of detachment	$\begin{array}{c} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$	Conjunction
$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \neg p \end{array}$	Modus tollens	$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{p \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$	Hypothetical syllogism
$\begin{array}{c} \underline{p} \\ \therefore p \vee q \end{array}$	Addition	$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$	Disjunctive syllogism
$\begin{array}{c} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$	Simplification		

syllogism = การอ้างเหตุผล

กฎการอนุมานสำหรับถ้อยแถลงแบบได้รับการระบุจำนวน

ถ้อยแถลงแบบได้รับการระบุจำนวน (quantified statement) สมมุติว่า เรามีประพจน์แบบได้รับการระบุจำนวนเป็น $\forall x P(x)$ โดยมีค่าเป็น true จากนิยาม P(x) เป็น true สำหรับทุก ๆ x ใน D หรือโดเมนที่สนใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า d ใน D ดังนั้น P(d) มีค่าเป็น true ซึ่งแสดงได้ในลักษณะของ argument เป็น

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(d) \text{ if } d \text{ is in } D}$$

จะมีค่าเป็น valid กฎของการอนุมาณในที่นี้เรียกว่า universal instantiation กฎต่างๆที่เกี่ยวข้องการถ้อยแถลงแบบมีปริมาณมีได้ดังนี้

Rule of inference	Name
$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(d) \text{ if } d \text{ is in } D}$	Universal Instantiation
$\frac{P(d) \text{ for every } d \text{ in } D}{\therefore \forall x P(x)}$	universal generalization
$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(d) \text{ for some } d \text{ in } D}$	existential instantiation
$\frac{P(d) \text{ for some } d \text{ in } D}{\therefore \exists x P(x)}$	Existential generalization

การพิสูจน์แบบ resolution

ในหัวข้อนี้จะเขียน a∧b ด้วย ab Resolution เป็นการเทคนิคการพิสูจน์แบบหนึ่งที่นำเสนอโดย J.A. Robinson ในปี 1965 ซึ่งมันจะมีกฎการพิสูจน์เพียงกฎเดียวดังนี้

$$\text{If } p \vee q \text{ and } \neg p \vee r \text{ both true, then } q \vee r \text{ is true.}$$

ในการพิสูจน์ด้วย resolution ตัวสมมุติฐานและผลสรุปจะถูกเขียนในลักษณะที่เป็นประโยคย่อย (clause) ประโยคย่อยคือประโยคที่จะมีเทอมที่แยกโดย “or” เมื่อแต่ละเทอมเป็นตัวแปรหรือเป็นนิเสธของตัวแปร

ตัวอย่าง ๑๑. ลักษณะของประโยคย่อย

นิพจน์ (expression) ต่อไปนี้

$$a \vee b \vee \neg c \vee d$$

เป็นประโยคย่อยเนื่องจาก a b ¬c และ d เชื่อมต่อโดยเครื่องหมาย ∨ และแต่ละเทอมเป็นตัวแปรหรือนิเสธของตัวแปร

นิพจน์ต่อไปนี้

$$xy \vee w \vee \neg z$$

ไม่เป็นประโยคย่อยทั้งนี้มันมีเทอมหนึ่งเชื่อมต่อด้วย ∧

นิพจน์ต่อไปนี้

$$p \rightarrow q$$

ไม่เป็นประโยคย่อยทั้งนี้แต่ละเทอมแยกด้วยเครื่องหมาย →

การพิสูจน์โดยวิธี resolution จะทำการพิสูจน์ทีละส่วนและทำซ้ำๆ ไปในแต่ละคู่ของถ้อยแถลงเพื่อที่จะให้ได้อนุพันธ์ของมันเป็นถ้อยแถลงใหม่ เมื่อมีการประยุกต์เข้าไปแต่ละเทอมจะต้อง p ต้องเป็นตัวแปรเดี่ยว q และ r เป็นนิพจน์ได้ ข้อสังเกตเมื่อประยุกต์เข้ากับประโยคย่อย ตัวผล q∨r เป็นประโยคย่อยด้วย (เพราะว่า q และ r ประกอบด้วยเทอมที่แยกโดยการ or ซึ่งแต่ละเทอมเป็นตัวแปรหรือนิเสธของตัวแปร q∨r ยังคงประกอบด้วยเทอมที่แยกด้วย or ซึ่งที่แต่ละเทอมเป็นตัวแปรหรือนิเสธของตัวแปร)

ตัวอย่าง ๑๒. ตัวอย่าง

พิสูจน์ประโยคต่อไปนี้โดยใช้วิธี resolution

$$\begin{array}{l} 1.\, a \vee b \\ 2.\, \neg a \vee c \\ \underline{3.\, \neg c \vee d} \\ \therefore\, b \vee d \end{array}$$

วิธีการคือพิสูจน์ 1. และ 2. (resolution) จะได้

$$4.\, b \vee c$$

จาก 4 และ 3 จะได้ (resolution)

$$5.\, b \vee d$$

ซึ่งเป็นไปตามบทสรุปที่ได้

กรณีพิเศษ

$$\text{if } p \vee q \text{ and } \neg p \text{ are true, then } q \text{ is true. (disjunctive syllogism)}$$

$$\text{if } p \text{ and } \neg p \vee r \text{ are true, then } r \text{ is true. (disjunctive syllogism)}$$

การพิสูจน์เชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์

การพิสูจน์เชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction) เป็นการพิสูจน์ที่เราเริ่มจากบทพิสูจน์พื้นฐานแล้วสรุปถึงผลจริงที่จะเป็นว่าเป็นในรูปแบบเดียวกัน ถ้าผลเริ่มแรกเป็นจริงผลที่เราสนใจก็จะเป็นจริงด้วย ในการพิสูจน์ด้วยวิธีนี้มีอยู่ด้วยกันสองขั้นตอน เริ่มจากการพิสูจน์ว่าถ้อยแถลงพื้นฐานนั้นมีค่าเป็นจริง จากนั้นที่ถ้อยแถลงในรูปแบบทั่วไปที่เป็นรูปแบบเดียวกันก็จะมีค่าเป็น true ด้วย และในท้ายที่สุดบทสรุปของถ้อยแถลงที่เราสนใจก็จะเป็นจริงตามที่ถ้อยแถลงข้างต้นได้กล่าวเป็นต้น เราเรียกว่ามันเป็นการพิสูจน์เชิงอุปนัยในทางคณิตศาสตร์ไปหาผลที่เราต้องการทราบ

สมมุติว่าเราเริ่มต้นด้วยลำดับที่ 1 ซึ่งเราพิสูจน์แล้วว่ามันเป็น true จากนั้นเราเริ่มพิสูจน์ถ้อยแถลงนี้ในรูปแบบทั่วไปเช่น ลำดับที่ n ว่าเป็น true ด้วยและถ้าเราสนใจลำดับที่ n+1 ก็จะให้สรุปว่าถ้อยแถลงที่ n+1 เป็นจริงด้วย

ตัวอย่าง ๑๓. ดูตัวอย่างต่อไปนี้

สมมุติว่าเราต้องการหาค่าผลรวมอนุกรมเลขคณิตหนึ่ง (Sn) ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n\,;\ n \geq 1$$

ซึ่งโดยการคำนวณทางคณิตศาสตร์ทำให้เราทราบว่า

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ถ้าให้ n มีค่าเป็น 1,2,...,n ผลรวมที่ได้ก็จะมีลักษณะเป็น

$$S_1 = \frac{1(2)}{2} = 1$$

$$S_2 = \frac{2(3)}{2} = 3$$

$$S_3 = \frac{3(4)}{2} = 6$$

$$\vdots$$

สมมุติว่าแต่ละสมการเราได้ใส่เครื่องหมาย “x” ให้กับมันถ้ามันมีรูปแบบเดียวกัน ดังนั้นเราอาจใส่ “x” เข้ากับทุกสมการได้จนถึง S_n ทั้งนี้ S_n ก็จะมีรูปแบบเช่นเดียวกับ $S_1, S_2, \ldots$

คำถามของเราที่ต้องการพิสูจน์คือแล้วที่เทอม S_{n+1} เป็นเช่นเดียวกันหรือไม่

เราต้องพิสูจน์ในทุกๆ n ถ้า n ทำให้เป็น true ดังนั้น n+1 ก็ทำให้เป็น true ด้วย

จากผลรวมของ n เทอมจะมีสูตรได้เป็น

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ผลดังกล่าวนำมาใช้กับจำนวน n+1 เทอม

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

มีค่าเป็นจริงเนื่องจากรูปแบบมันเป็น

$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$$

จะสังเกตได้ว่า S_{n+1} จะมีเทอมของ S_n รวมอยู่ด้วยหรือ

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)$$

จะได้ว่า

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

และ

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

เราได้

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ดังนั้นถ้าสมการที่ n ทั่วไปเป็น true เราก็จะพิสูจน์ได้ว่าที่ n+1 ก็จะมีค่าเป็น true ด้วย

การพิสูจน์ในลักษณะนี้เราเรียกว่าการพิสูจน์ในเชิงอุปนัย ในขั้นตอนแรกเราจะเรียกว่าขั้นพื้นฐาน (basic step) และในขั้นที่เป็นเงื่อนไขเรียกว่าขั้นอุปนัย (induction step)

ตัวอย่าง ๑. อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Sum)

จงพิสูจน์สมการโดยใช้วิธีการอุปนัย

$$a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(r^{n+1}+1)}{r-1}; \quad \forall n\ (n \geq 0 \vee n \in \mathbb{I}^+), r \neq 1$$

ผลรวมทางด้านซ้ายเรียกว่าผลรวมเรขาคณิต (**geometric sum**) **.ซึ่ง** $a \neq 0$ และ $r \neq 0$**,** สัดส่วนของเทอมที่ติดกัน $\left[\frac{ar^{i+1}}{ar^i} = r\right]$ เป็นค่าคงที่

ขั้น Basis

เป็นขั้นตอนพิสูจน์เมื่อกำหนดให้ $n = 0$, is

$$a = \frac{a(r^{0+1} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r - 1)}{r - 1}$$

ซึ่งเป็นจริง

ขั้นอุปนัย (Inductive)

ทดสอบในขั้นตอน *n*. และ

$$\begin{aligned} a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} &= \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} + ar^{n+1} \\ &= \frac{a\left(r^{(n+1)} - 1\right)}{r - 1} + \frac{ar^{n+1}(r\ -\ 1)}{r - 1} \\ &= \frac{a(r^{n+2} - 1)}{r - 1} \end{aligned}$$

จากในขั้น Basic และขั้น Inductive ได้รับการพิสูจน์ว่าถูกดังนั้นสมการจึงถูกต้อง

รูปแบบที่เข้มแข็งของการอุปนัย และคุณสมบัติของการจัดลำดับที่ดี

Strong Form of induction and the well-ordering property

ในการอุปนัยที่ผ่านมาเริ่มจากการอุปนัยโดยให้ถ้อยแถลงที่ n เป็น true แล้วพิสูจน์ว่า n+1 ก็เป็น true ด้วย หรือพูดได้อีกแบบหนึ่งก็คือการพิสูจน์ว่าถ้อยแถลงนั้นเป็นจริง (ถ้อยแถลงที่ n+1) เราตีขลุมไปว่าเทอมก่อนหน้า (ถ้อยแถลงที่ n) เป็น true มาก่อน ในบางกรณีขั้นตอนการอุปนัยในการพิสูจน์ถ้อยแถลงนั้นๆเป็น true จะช่วยได้มากถ้าเราสรุปว่าทุกๆถ้อยแถลงก่อนหน้าเป็น true ทั้งหมด (ไม่เพียงแต่เทอมก่อนหน้า) รูปแบบนี้เป็นรูปแบบที่เข้มแข็งของการอุปนัยทางคณิศาสตร์ที่ให้เราสรุปในทุกๆรูปแบบก่อนหน้า การตามในรูปแบบปรกติดังกล่าวถ้อยแถลงที่จะพิสูจน์จะพิสูจน์ในเทอมที่ n มากกว่าที่จะเป็นเทอมที่ n+1

วิธีการ

สมมุติว่าเรามีฟังก์ชันสัจพจน์ S(n) ที่โดยเมนของมันเป็นเซ็ตของจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ n0 และสมมุติว่า

$S(n_0)$ เป็น true

สำหรับทุก n>n0 เป็น true ถ้า S(k) เป็น true สำหรับทุก k โดยที่ n0≤k≤n ดังนั้น S(n) เป็น true

ดังนั้น S(n) เป็น true สำหรับทุกๆ n ที่ n≥n0

a. ตัวอย่าง

ใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ที่แสดงให้เห็นว่าค่าไปรษณีย์ในราคา 4 เซนต์หรือมากกว่าจะทำให้สำเร็จได้ดดยการใช้เพียงแสตมป์ราคา 2 เซนต และ 5 เซนต์

ก่อนที่จะทำการพิสูจน์ เราจะพิจารณาถึงแนวทางที่จะพิสูจน์ข้อกำหนดดังกล่าวโดยวิธีการทางคณิตศาสตร์ พิจารณาถึงขั้นของการอุปนัยซึ่งที่เราต้องการพิสูจน์คือค่าบริการไปรษณีย์ราคา n จะทำสำเร็จได้โดยการใช้เหรียญ 2 เซนต์และ 5 เซนต์ มันเป็นการพิสูจน์เฉพาะได้โดยง่ายถ้าค่าบริการทางไปรษณีย์อยู่ในรูปแบบของ n-2 เซนต์ เราก็จะเพิ่มแสตมป์เข้าไปเพื่อที่จะทำให้ได้ค่าบริการทางไปรษณีย์ในราคา n เซนต์ ช่างง่ายอะไรเช่นนี้ ถ้าเราใช้รูปแบบของการอุปนัยทางคณิตศาสตร์อย่างแข็งขัน เราจะสมมุติค่าความจริงของถ้อยแถลงสำหรับทุกๆ k<n ในรูปแบบเฉพาะเราจะสรุปความจริงให้กับถ้อยแถลงสำหรับ k=n-2 ดังนั้นรูปแบบของการอุปนัยทางคณิตศาสตร์อย่างแข็งขันอนุญาตให้เราให้การพิสูจน์ที่ถูกต้องขึ้นอยู่กับเหตุผลที่ไม่เป็นทางการของเรา

มีจุดที่น่ากังวลอยู่จุดหนึ่งที่เราต้องเอาใจใส่ เราพิจารณาเพียงค่าบริการไปรษณีย์ที่ 4 เซนต์หรือมากกว่า ดังนั้นเมื่อ n=5, n-2 จะไม่เป็นค่า valid เพราะว่า $n-2<4$ เราสรุปไม่ได้ว่าเราทำค่าบริการไปรษณีย์สำหรับ n-2 เซนต์ ดังนั้น นอกจากที่กรณี n=4 เราต้องพิสูจน์ให้ได้อย่างแจ้งชัดสำหรับกรณี n=5 เมื่อ n≥6 เท่านั้นที่เป็นค่า valid ที่ n-2 ดังนั้นเราต้องพิสูจน์ให้ได้อย่างแจ้งชัดในกรณี n=4 และ n=5 ซึ่งมันเป็นลำดับขั้นพื้นฐาน

ขั้นพื้นฐาน (n=4, n=5)

เราทำค่าบริการทางไปรษณีย์เป็นราคา 4 เซนต์โดยการใช้แสตมป์ 2 เซนต์ 2 ตัว สำหรับค่าบริการ 5 เซนต์โดยการใช้แสตมป์ 5 เซนต์ 1 ดวง ในขั้นพื้นฐานนี้ได้รับการพิสูจน์แล้ว

ขั้นการอุปนัย

เราสมมุติว่า $\mathrm{n} \geq 6$ และ ค่าบริการเป็น k เซนต์หรือมากกว่าที่จะสำเร็จได้โดยการใช้แสตมป์ 2 เซนต์และ 5 เซนต์ สำหรับ $4 \leq \mathrm{k} < \mathrm{n}$

โดยการสรุปของการอุปนัยเราทำค่าบริการได้เป็น n-2 เซนต์ เราเพิ่มแสตมป์ 2 เซนต์เพื่อที่จะสร้างค่าบริการเป็น n เซนต์ จากที่กล่าวการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ในที่นี้สมบูรณ์แล้ว

b. ตัวอย่าง

เมื่อสมาชิกของลำดับได้รับการนิยามในเทอมปัจจุบันจากบางเทอมที่มีมาก่อนหน้า (predecessor) การอุปนัยทางคณิตศาสตร์แบบแข็งแรงมีประโยชน์ในการพิสูจน์คุณสมบัติของลำดับนั้นๆ สมมุติว่ามีลำดับเป็ c1,c2,... มีรูปแบบของลำดับต่างๆดังแสดงได้ดังสมการ

$$c_1 = 0,\ \ c_n = c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n\ \forall n > 1$$

เช่น

$$c_2 = c_{\lfloor 2/2 \rfloor} + 2 = c_{\lfloor 1 \rfloor} + 2 = c_1 + 2 = 0 + 2 = 2$$
$$c_3 = c_{\lfloor 3/2 \rfloor} + 2 = c_{\lfloor 1.5 \rfloor} + 3 = c_1 + 3 = 0 + 3 = 3$$
$$c_4 = c_{\lfloor 4/2 \rfloor} + 2 = c_{\lfloor 2 \rfloor} + 4 = c_2 + 4 = 2 + 4 = 6$$
$$c_5 = c_{\lfloor 5/2 \rfloor} + 2 = c_{\lfloor 2.5 \rfloor} + 5 = c_2 + 5 = 2 + 5 = 7$$

ต้องการพิสูจน์

$$c_n < 4n \text{ for all } n \geq 1$$

basic step (n=1)

$$c_1 = 0 < 4.1 = 4$$

ขั้นพื้นฐานได้รับการพิสูจน์ว่าเป็น true

induction step

สมมุติว่า

$$c_k < 4k$$

for $k < n$ และต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า

$$c_n < 4n$$

เราพบว่า $\lfloor n/2 \rfloor < n$ ดังนั้นให้ $k = \lfloor n/2 \rfloor$ โดยบทสรุปของการอุปนัย

$$c_{\lfloor n/2 \rfloor} = c_k < 4k = 4\lfloor n/2 \rfloor$$

ในที่นี้

$$c_n = c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n < 4\lfloor n/2 \rfloor + n \leq 4(n/2) + n = 3n < 4n$$

การอุปนัยดังกล่าวสมบูรณ์

เพิ่มเติม เครื่องหมาย $\lfloor x \rfloor$ หมายถึงค่าตัวเลข x ที่อยู่ภายในจะได้รับการปรับให้เป็นค่าจำนวนเต็มที่ต่ำที่สุด เช่น $\lfloor 1.5 \rfloor = 1, \lfloor 5/2 \rfloor = 2$ เป็นต้น

คุณสมบัติของการจัดลำดับที่ดี

(well-ordering property)

คุณสมบัติของการจัดลำดับที่ดีสำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (well-ordering property for nonnegative integers) กล่าวไว้ว่าทุกๆ เซ็ตที่ไม่ใช่เซ็ตว่างของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบจะมีสมาชิกที่น้อยที่สุดอยู่หนึ่งตัว คุณสมบัตินี้สมมูลย์กับรูปแบบของการอุปนัยที่กล่าวมาทั้งสอง เราใช้รูปแบบนี้ในการพิสูจน์บางสิ่งบางอย่างที่คุ้นเคยจากการหารด้วยวิธีการหารยาว เมื่อเราหารจำนวนเต็ม n โดยจำนวนเต็มบวก d เราได้ผลลัพธ์ (quotient) q และเศษ (remainder) r ที่เป็นไปตามสมการ

$$0 \leq r < d \text{ ดังนั้น } n \; = \; dq + r$$

เมื่อเราหาร n=74 ด้วย d=13

$$\begin{array}{r} 5 \\ 13)\overline{74} \\ \underline{65} \\ 9 \end{array}$$

เราได้ผลหาร $\mathrm{q} = 5$ และ $\mathrm{r} = 9$ ข้อสังเกต $0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{d}$ หรือ $0 \leq 9 < 13$

ดังนั้น $\mathrm{n} = 74 = 13.5 + 9 = \mathrm{dq} + \mathrm{r}$

ตัวอย่าง ๑๔. ทฤษฎีของ ผลลัพธ์และเศษของการหาร

ถ้า d และ n เป็นจำนวนเต้ม $\mathrm{d} > 0$ จะมีจำนวนเต็มที่เป็นผลลัพธ์ q และจำนวนเต็มที่เป็นเศษ r ที่เป็นไปตามกฎ

$$n = dq + r \quad 0 \leq r < d$$

นอกจากนี้ q และ r จะมีลักษณะเฉพาะตัวที่ว่า ถ้า

$$n = dq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < d$$

และ

$$n = dq_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < d$$

ดังนั้น $q_1 = q_2$ และ $r_1 = r_2$

ตัวอย่าง ๑๕. วิธีพิสูจน์

เราใช้การพิสูจน์จากทฤษฎีของผลลัพธ์และเศษจากการหาร โดยการสังเกตให้ดีในเทคนิคการหารยาวพบว่า ทำไม 5 เป็นผลหารในตัวอย่างก่อนหน้า? เพราะว่า q=5 ทำให้เกิดเศษอยู่ในรูปแบบ n-dq จะได้ค่าที่เป็นค่าบวกที่เล็กที่สุด ตัวอย่างเช่นถ้า q=3 ค่า r ก็จะเป็น n-dq=74-13.3=35 ซึ่งมีค่าใหญ่เกินไป หรือให้ q=6 ค่าเศษที่ได้เป็น n-dq=74-13*6=-4 ซึ่งมันเป็นค่าติดลบ ดังนั้นการเกิดผลลัพธ์คือค่าบวกที่เล็กที่สุด ค่าเศษที่ไม่ใช่ค่าลบในรูปแบบ n-dq ได้รับการรับประกันโดยคุณสมบัติการจัดลำดับที่ดี

ให้ X เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มที่อยู่ในรูปแบบของ n-dk เมื่อ n-dk≥0 เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม เราต้องแสดงว่า X ไม่เป็นเซ็ตว่างโดยการพิสูจน์ด้วยกรณีต่างๆ ถ้า n≥0 ดังนั้น

n-d.0=n≥0

ดังนั้น n เป็นค่าใน X สมมุติว่า n<0 เนื่องจาก d เป็นเลขจำนวนเต็มบวกและเพราะว่า $1 - \mathrm{d} \leq 0$ ดังนั้น

$$n - dn = n(1 - d) \geq 0$$

ในกรณีนี้ n-dn อยู่ใน X ดังนั้น X มีสมาชิก

เพราะว่า X ไม่เป็นเซ็ตว่างและเป็นเซ็ตของเลขจำนวนเต็มบวก โดยการพิสูจน์ด้วยวิธีคุณสมบัติการจัดลำดับที่ดี X มีสมาชิกทีเล็กที่สุดซึ่งให้เป็น r เราให้ q เป็นค่าเฉพาะของ k ซึ่ง

r=n-dq ดังนั้น

$$n = dq + r$$

เนื่องจาก r อยู่ใน X r≥0 เราใช้วิธีการพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้งเพื่อที่จะแสดงว่า r<d สมมุติว่า r≥d ดังนั้น

$$n - d(q + 1) = n - dq - d = r - d \geq 0$$

ดังนั้น $n - d(q + 1)$ อยู่ใน X แล้วยังคง $n - d(q + 1) = r - d < r$ แต่ r เป็นจำนวนเต็มที่เล็กที่สุดใน X ข้อขัดแย้งนี้แสดงให้เห็นว่า $r < d$

เราได้แสดงให้เห็นว่า ถ้า d และ n เป็นจำนวนเต็ม d>0 จะมีจำนวนเต็ม q และ r ที่เป็นไปตามสมการ

$$n = dq + r \quad 0 \leq r < d$$

เรากลับมาเรื่องของความเป็นหนึ่งของ q และ r สมมุติว่า

$$n = dq_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < d$$

และ

$$n = dq_2 + r_2 \quad 0 < r_2 < d$$

เราต้องแสดงให้เห็นว่า $q_1 = q_2$ และ $r_1 = r_2$ จากสมการข้างบนให้ลบกันได้ว่า

$$0 = n - n = (dq_1 + r_1) - (dq_2 + r_2) = d(q_1 - q_2) - (r_1 - r_2)$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$d(q_1 - q_2) = (r_1 - r_2)$$

จากสมการจะเห็นว่า d หาร $(r_1 - r_2)$ ได้อย่างไรก็ตาม $0 \leq r_1 < d$ และ $0 \leq r_2 < d$ จะได้

$$-d < r_2 - r_1 < d$$

แต่จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง d และ –d ที่หารได้ด้วย d คือ 0 ดังนั้น

$$r_1 = r_2$$

ดังนั้น

$$d(q_1 - q_2) = 0$$

จะได้

$$q_1 = q_2$$

การพิสูจน์สำเร็จ

แบบฝึกหัด

ตอบคำถามต่อไปนี้

1. ความหมายของประพจน์
2. ตารางค่าความจริง

๑. พิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่

๑.๑. 2+5=19

๑.๒. Waiter, will you serve the Nuts-I mean, would you serve the guests the nuts?

๑.๑. For some positive integer n, 19340=n.17

๑.๒. Audrey Meadows was the original “Alice” in “The Honeymooners”

๑.๓. Peel me a grape

๑.๔. The line “Play its again, Sam” occurs in the movie “Casablanca”

๑.๕. Every even integer greater than 4 is the sum of two primes.

๑.๖. The difference of two primes

๒. อ้างอิงถึงเหรียญที่มีการปั่นจำนวน 10 ครั้ง ให้เขียนนิเสธของประพจน์ดังต่อไปนี้

๒.๑. Ten heads were obtained

๒.๒. Some heads were obtained

๒.๓. Some heads and some tails were obtained

๒.๔. At least one head was obtained

๓. ให้ประพจน์ p เป็นเท็จ ประพจน์ q เป็นจริง และ ประพจน์ r เป็นเท็จ พิจารณาว่าแต่ละประพจน์ต่อไปนี้มีค่าเป็นจริงหรือเท็จ

๓.๑. $p \vee q$

๓.๒. $\neg p \vee \neg q$

๓.๓. $\neg p \vee q$

๓.๔. $\neg p \vee \neg(q \wedge r)$

๓.๕. $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

๓.๖. $(p \vee r) \wedge \neg\big((q \vee r) \vee \neg(r \vee p)\big)$

๔. เขียนตารางค่าความจริงต่อไปนี้

๔.๑. $p \wedge \neg q$

๔.๒. $(\neg p \vee \neg q) \vee p$

๔.๓. $(p \vee q) \wedge \neg p$

๔.๔. $(p \wedge q) \wedge \neg p$

๔.๕. $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$

๔.๖. $\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$

๔.๗. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

๔.๘. $\neg(p \wedge q) \vee (\neg q \vee r)$

๕. ให้ $p: 5 < 9 \quad q: 9 < 7 \quad r: 5 < 7$ –พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ

๕.๑. 5<9 and 9<7

๕.๒. It is not the case that (5<9 and 9<7)

๕.๓. 5<9 or it is not the case that (9<7 and 5<7)

๖. ให้ p: Lee takes computer science, q: Lee takes mathematics แสดงผลของประพจน์ต่อไปนี้

๖.๑. $\neg p$

๖.๒. $p \wedge q$

๖.๓. $p \vee q$

๖.๔. $p \vee \neg q$

๖.๕. $p \wedge \neg q$

๖.๖. $\neg p \wedge \neg q$

๗. จงหาความหมายจากประพจน์ที่ให้ต่อไปนี้ p: **Today is Monday**, q: **It is raining**, r: **It is hot.**

๗.๑. p∨q

๗.๒. ¬p∧(q∨r)

๗.๓. ¬(p∨q)∧r

๗.๔. (p∧q)∧¬(r∨p)

๘. ให้ p:4<2, q:7<10, r:6<6 จากประพจน์ต่อไปนี้จงเขียนความหมายของประโยคต่อไปนี้ประโยคเป็นสัญลักษณ์

a. If 4<2 then 7<10

b. if(4<2 and 6<6), then 7<10

c. 7<10 if and only if (4<2 and 6 is not less than 6)

๙. ในแต่ละประพจน์ P และ Q จงหาว่า $P \equiv Q$ หรือไม่

d. P=p, Q=p∨q

e. P=p∧q, Q=¬p∨¬q

f. P=p⟶q, Q=¬q⟶¬p

g. P=(p⟶q)⟶r, Q=p⟶(q⟶r)

๑๐. จากตารางค่าความจริงของตัวดำเนินการ imp1 และ imp2 เป็นดังนี้

p	q	p imp1 q	p imp2 q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	T	F

จงแสดงให้เห็นว่า $(p\ imp2\ q) \wedge (q\ imp2\ p) \not\equiv p \leftrightarrow q$

๑๑. จากถ้อยแถลงที่ให้จงบอกว่ามันเป็นประพจน์หรือไม่และถ้าข้อใดเป็นประพจน์จงบอกถึงโดเมนของมัน

h. $(2n+1)^2$ is an odd integer

i. Choose an integer between 1 and 10

j. Let x be a real number

k. 1+3 = 4

๑๒. ให้ P(n) เป็นฟังก์ชันประพจน์ “n divides 77” จากคำสั่งต่อไปนี้ให้บรรยายความหมายของประพจน์ต่อไปนี้

l. P(11)

m. P(1)

n. $\forall n P(n)$

o. $\exists n P(n)$

๑๓. จงพิสูจน์ประพจน์ต่อไปนี้

p. for all integers m and n, if m and n are even then m+n is even

q. for all integers m and n, if m and n are odd, then mn is even

r. If a and b are real numbers, we define max[a, b] to be the maximum of a and b or the common value if they are equal. Prove that for all real numbers $d, d_1, d_2, x,$ if $d = max\{d_1, d_2\}\ and\ x \geq d, then\ x \geq d_1$ and $x \geq d_2$

๑๔. จากประพจน์ต่อไปนี้ p: 4 megabytes is better than no memory at all q:We will buy more memory r:We will buy a new computer จงอธิบายความหมายของอาร์กิวเมนต์ที่กำหนดในแต่ละข้อและพิสูจน์ว่าเป็นจริงหรือไม่

s. $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow r \\ p \rightarrow q \end{array}}{\therefore p \rightarrow (r \wedge q)}$

t. $\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ r \rightarrow q \\ \underline{\ p\ } \\ \therefore q \end{array}$

๑๕. พิจารณาว่าอาร์กิวเมนต์ต่อไปนี้ว่า valid หรือไม่

u. $(p \rightarrow q), \neg p / \therefore \neg q$

v. $p \rightarrow (q \rightarrow r), q \rightarrow p \rightarrow r / \therefore (p \vee q) \rightarrow r$

w. Floppy disk storage is better than nothing, nothing is better than a hard disk drive/∴Floppy disk storage is better than a hard disk drive.