第二次作业：

1. 要使平衡点x为全局渐近稳定

① $V(x)$为正定：由于 $V(x)=\int_0^{x_1} h_1(\tau)d\tau+\frac{1}{2}x_2^2$，显然 $x_1=0$ 时，$V(x)=0$ 且 $h_1(0)=0$

当 $x\neq 0$ 时，要使 $\int_0^{x_1} h_1(\tau)d\tau+\frac{1}{2}x_2^2>0 \Rightarrow \int_0^{x_1} h_1(\tau)d\tau\geq 0$.

② $\dot{V}(x)$为负定：由于 $\dot{V}(x)= h_1(x_1)\cdot x_2+x_2(-h_1(x_1)-h_2(x_2))$

$=h_1(x_1)\cdot x_2 - h_1(x_1)x_2-h_2(x_2)\cdot x_2$

$=h_2(x_2)\cdot x_2$

使 $-h_2(x_2)\cdot x_2=0$ 在 $x_2=0$ 时成立，且 $x_2\neq 0$ 时，$h_2(x_2)<0$ 成立.

显然 $x_2=0 \Rightarrow -h_2(x_2)\cdot x_2=0$

当 $x_2\neq 0$ 时，由 $h_2(x_2)\cdot x_2<0 \Rightarrow \begin{cases} h_2(x_2)>0, & x_2>0 \\ h_2(x_2)<0, & x_2<0 \end{cases}$

综上，$h_1(\cdot)$满足 $h_1(0)=0$ 且 $x_1\neq 0$ 时，$\int_0^{x_1} h_1(\tau)d\tau\geq 0$

$h_2(\cdot)$满足 $\begin{cases} h_2(x_2)>0, & x_2>0 \\ h_2(x_2)<0, & x_2<0 \end{cases}$

2. 由于径向无界要求：对 $V(x)$，若 $\|x\|\to+\infty$ 蕴含 $V(x)\to+\infty$，则 $V(x)$ 在 R^n 上径向无界

~~题中 $\|x\|\to\infty$ 时，连续正定 $W(x)\to\infty$，已经满足径向无界的要求.~~

~~只有当 $\|x\|\to\infty$ 时，$W(x)$ 未趋于无穷，才不满足径向无界 如 $\log(1+\|x\|)$~~

题中 $\|x\|$ 沿所有主轴方向趋于无穷时，连续正定函数 $W(x)$ 趋于无穷.

而 $\|x\|\to\infty$ 并不意味着需要在所有主轴方向趋于无穷，即在某些主轴上 $x_2\not\to\infty$，

也可以满足 $\|x\|\to\infty$，这说明某些情况下 $W(x)$ 并不一定是径向无界的。

反例：$W(x)=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2}$ 满足连续正定，$x=(x_1,x_2)$

但当 $x_2\to 0$，$x_1\to\infty$ 时，即使 $\|x\|\to\infty$

$W(x)\to 1$，不满足 $W(x)\to\infty$.

即不满足径向无界的条件.