МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Решение задач линейного программирования
Вариант 22

Студент гр. 5381		Лянгузов А.А.
Преподаватель		Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2019

Цель работы.

Ознакомиться с численными и компьютерными методами решения задач линейного программирования в системах компьютерной алгебры.

Основные теоретические положения.

Формы записи задач линейного программирования

Отдельный класс оптимизационных задач образуют задачи линейного программирования, в которых и оптимизируемый критерий, и ограничения линейны. В них требуется найти экстремум целевой функции $f = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, при наличии ограничений в виде неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, i = 1..m.$$

Эти условия можно записать в матричной форме

$$c^T X \to \text{extr}, \quad AX \leqslant b,$$

где b и c – векторы-столбцы, A – матрица размера m×n.

Существует другая форма записи, называемая канонической, когда ограничения имеют вид равенств, а на переменные накладывается требование положительности:

$$c^T X \to \min, AX = b, X \geqslant 0.$$

Приведённые формы записи не являются независимыми. Существуют преобразования, при помощи которых любую задачу линейного программирования свести к одной из этих форм.

Чтобы перейти ко второй канонической форме, необходимо условия типа неравенство заменить на равенства и перейти к положительным переменным. Первое делается путём введения дополнительных переменных.

Любую переменную неопределённого знака можно заменить разностью двух положительных переменных:

$$x_i = x_{i1} - x_{i2},\ x_{i1} \geqslant 0,\ x_{i2} \geqslant 0.$$

Для обратного перехода ограничения типа равенств нужно заменить неравенствами. Для этого можно воспользоваться формулой:

$$F(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} F(x) \geqslant 0, \\ F(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Существует много методов решения задач линейного программирования, одним из наиболее наглядных является графический метод, а среди численных наиболее известен симплекс-метод.

Симплекс-метод

При решении графическим методом видно, что система ограничений вырезает из пространства параметров некоторый выпуклый многогранник G. При этом в силу выпуклости G и линейности целевой функции экстремум может достигаться только в вершинах G. (В вырожденном случае экстремум может достигаться на ребре или грани).

Идея симплекс-метода состоит в следующем. На начальном шаге берется любая начальная вершина G и определяются все выходящие из неё ребра. Далее перемещаются вдоль того из ребер, по которому функция убывает (при поиске минимума), и попадают в следующую вершину. Находят выходящие из нее ребра и повторяют процесс. Когда приходят в такую вершину, в которой вдоль всех выходящих из нее ребер функция возрастает, то минимум найден.
Применение симплекс-метода для задачи линейного программирования предполагает предварительное приведение ее ко второй канонической форме с n положительными переменными и m условиями типа равенство. При этом требование положительности переменных означает, что точки принадлежат области n-мерного пространства, где все координаты положительны (положительный ортант). Равенства определяют (n−m)-мерную гиперплоскость,

пересечение которой с положительным ортантом и даёт многогранник допустимых решений. .

Постановка задачи.

В работе требуется решить задачу линейного программирования вручную (графически и при помощи симплекс-метода), а также при помощи вычислительных пакетов Maxima и MATLAB/GNU Octave/Scilab.

$W = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geqslant 4 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 100 \end{cases}$$

Выполнение работы.

Решение вручную симплекс методом

Определим максимальное значение целевой функции:

$$W = x_1 + 3x_2 \to \max.$$

При следующих условиях:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geqslant 4 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 100 \end{cases}$$

Для этого введем добавочные неотрицательные переменные

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_2 + x - 5 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_6 = 100 \end{cases}, \text{ где } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$

Запишем расширенную матрицу

Таблица1 - расширенная матрица.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
1	4	-1	0	0	0	4
-2	1	0	1	0	0	6
0	1	0	0	1	0	10
1	3	0	0	0	1	100

Приведем систему к единичной матрице методом жордановских преобразований.

1. В качестве базисной переменной можно выбрать x_3. Тогда получаем новую матрицу:

Таблица2 - полученная матрица.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
-1	-4	1	0	0	0	-4
-2	1	0	1	0	0	6
0	1	0	0	1	0	10
1	3	0	0	0	1	100

В таблице имеется единичная матрица. Выберем переменные (x_3, x_4, x_5, x_6) в качестве базисных.

Выразим базисные переменные через остальные.

$x_3 = x_1 + 4x_2 - 4$

$x_4 = 2x_1 - x_2 + 6$

$x_5 = -x_2 + 10$

$x_6 = -x_1 - 3x_2 + 100$

Среди свободных членов b_i имеется отрицательное значение. Таким образом, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x_3 следует ввести переменную x_2в качестве базисной.

Таблица3 - симплексная таблица.

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	0

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	5	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	0
x_5	9	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	1	0
x_6	97	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0	1
$W(X0)$	-3	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0	0

Выразим базисные переменные.

$$x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + 1$$

$$x_4 = \frac{9}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + 5$$

$$x_5 = \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + 9$$

$$x_6 = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_3 + 97$$

Подставим в целевую функцию:

$$F(X) = \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_3 + 3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + x_2 - \frac{1}{4}x_3 = 1 \\ -\frac{9}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 5 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + x_5 = 9 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_3 + x_6 = 97 \end{cases}$$

Полагая, что свободные переменные равны 0, получим нулевой опорный план:

X0 = (0,1,0,5,9,97)

Таблица4 - Опорный план 0.

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	0
x_4	5	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	0
x_5	9	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	1	0
x_6	97	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0	1
$W(X0)$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	0	0

Итерация №0.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план не оптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_3, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i3}

и из них выберем наименьшее:

min (- , 20, 36, 388/3) = 20

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (1/4) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица5 - Итерация 0. Ведущий элемент.

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	D_i
x_2	1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	-
x_4	5	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	0	20
x_5	9	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	36
x_6	97	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0	1	$\frac{388}{3}$
$W(X0)$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_4 в план 1 войдет переменная x_3.

Строка, соответствующая переменной x_3 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_4 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=$^1/_4$. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_3 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_3 и столбец x_3. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А*В)/РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент ($^1/_4$), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Получаем новую симплекс-таблицу:

Таблица6 - Опорный план 1.

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	6	-2	1	0	1	0	0
x_3	20	-9	0	1	4	0	0
x_5	4	2	0	0	-1	1	0
x_6	82	7	0	0	-3	0	1
$W(X1)$	15	-7	0	0	3	0	0

Итерация №1.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план не оптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1}

и из них выберем наименьшее:

min (- , - , 4 : 2 , 82 : 7) = 2

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (2) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица7 - Итерация 1. Ведущий элемент.

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	D_i
x_2	6	-2	1	0	1	0	0	-
x_3	20	-9	0	1	4	0	0	-
x_5	4	2	0	0	-1	1	0	2
x_6	82	7	0	0	-3	0	1	82/7
$W(X1)$	15	-7	0	0	3	0	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_5 в план 2 войдет переменная x_1.

Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_5 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=2. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_1 и столбец x_1. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс-таблицу:

Таблица8 - Опорный план 2.

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	0	1	0	0	1	0

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	38	0	0	1	-1/2	9/2	0
x_1	2	1	0	0	-1/2	1/2	0
x_6	68	0	0	0	1/2	-7/2	1
$W(X2)$	29	0	0	0	-1/2	7/2	0

Итерация №2.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план не оптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_4, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i4}

и из них выберем наименьшее:

min (- , - , - , 136) = 136

Следовательно, 4-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен ($^1/_2$) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица9 - Итерация 2. Ведущий элемент.

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	D_i
x_2	10	0	1	0	0	1	0	-
x_3	38	0	0	1	-1/2	9/2	0	-
x_1	2	1	0	0	-1/2	1/2	0	-
x_6	68	0	0	0	1/2	-7/2	1	136
$W(X2)$	29	0	0	0	-1/2	7/2	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_6 в план 3 войдет переменная x_4.

Строка, соответствующая переменной x_4 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x_6 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=$^1/_2$. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_4 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x_4 и столбец x_4. Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Таблица10 - Опорный план 3.

Базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	0	1	0	0	1	0
x_3	106	0	0	1	0	1	1
x_1	70	1	0	0	0	-3	1
x_4	136	0	0	0	1	-7	2
$W(X3)$	97	0	0	0	0	0	1

Итерация №3.

1. Проверка критерия оптимальности.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Оптимальный план можно записать так:

$x_1 = 70,\ x_2 = 10$

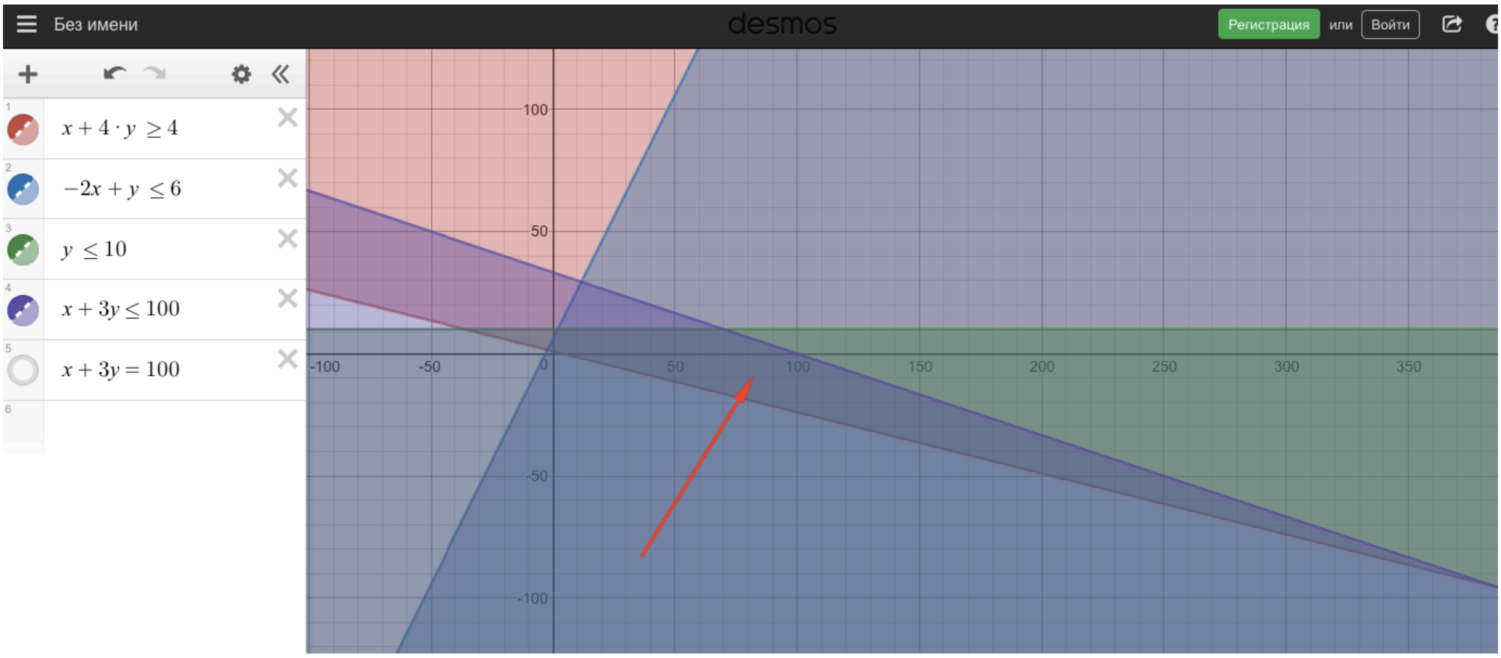
$W(X) = 1 * 70 + 3 * 10 = 100$

Решение вручную графическим методом

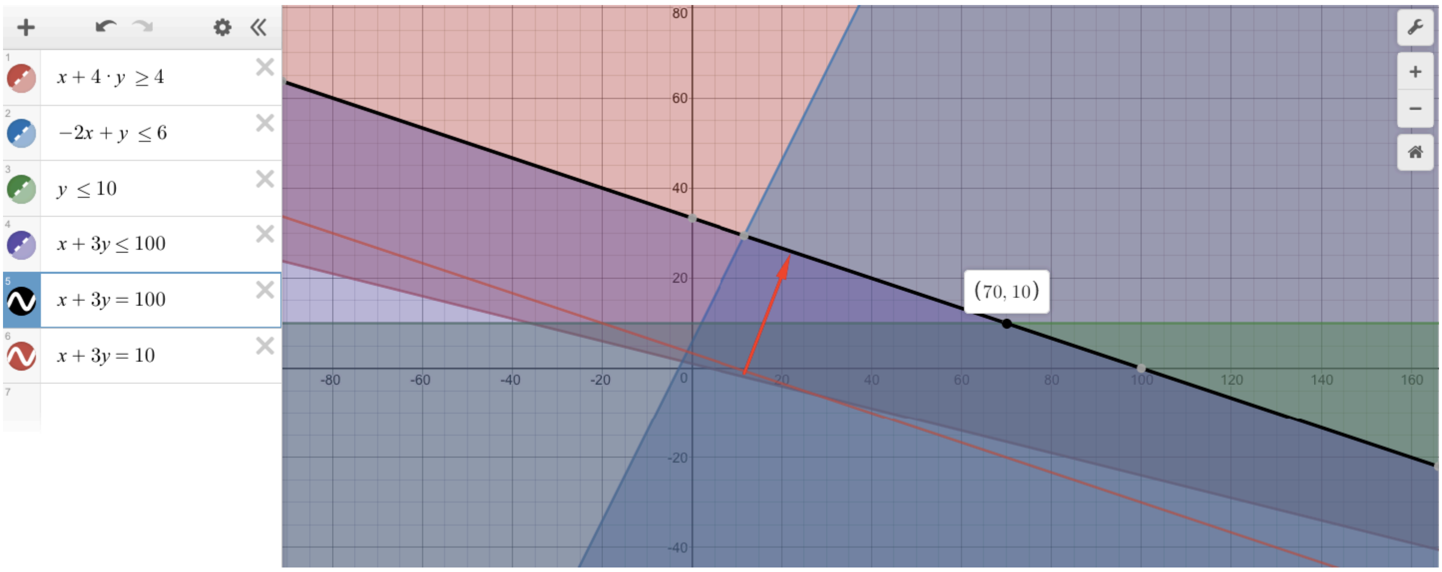
Область допустимых значений обозначена на рисунке 1. На рисунке 2 изображена точка максимума функци W, с учетом условий. В направлении стрелки функция возрастает.

$x_1 = 70, x_2 = 10$ и значение функции в данной точке:

$W = 1 * 70 + 3 * 10 = 100$



Риунок 1 - Область допустимых значений.



Риунок 2 -Точка максимума.

Решение с помощью программы Maxima

```
(%i1) load(simplex);
(%o1) C:\maxima-5.42.2\share\maxima\5.42.2\share\simplex\simplex.mac

(%i2) W: x_1 + 3·x_2;
(W)   3 x2+x1

(%i3) e1: x_1+4·x_2>=4;
(e1)  4 x2+x1≥4

(%i4) e2:-2·x_1+x_2<=6;
(e2)  x2-2 x1≤6

(%i5) e3:x_2<=10;
(e3)  x2≤10

(%i6) e4:x_1+3·x_2<=100;
(e4)  3 x2+x1≤100

(%i8) maximize_lp(W,[e1,e2,e3,e4]),nonegative_lp=true;
(%o8) [100,[x2=10,x1=70]]
```

Рисунок 3 - решение в Maxima.

Выводы.

В результате выполнения работы были исследованы численные и компьютерными методы решения задач линейного программирования в системах компьютерной алгебры. Результаты вычисления разными способами совпали.