МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2

по дисциплине «Теория принятия решений»

Тема: Вычисление расстояния между кривыми на плоскости

Студент гр. 5381	________________	Лянгузов А.А.
Преподаватель	________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2019

Цель работы.

Исследовать метод множителей Лагранжа и вариационного исчисления для решения задачи вычисления расстояния между кривыми на плоскости в среде Maxima.

Основные теоретические положения.

Стандартная условно-экстремальная задача формулируется следующим образом: найти минимум функции (критерия) $J = f(x_1, \ldots, x_n)$ при наличия ограничений $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ i = 1..m$ или коротко:

$$J = f(X) \to \min_X; \quad \varphi(X) = 0; \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Основной аналитический метод решения связан с введением вектора множителей Лагранжа $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и построением составного критерия (функции Лагранжа)

$$F = f(X) + \Lambda\varphi(X) \to \min$$

или в более подробной записи

$$F = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i.$$

Экстремум этой функции ищется обычным образом путем взятия производных и приравнивания их нулю. Тем самым исходная условно-экстремальная задача сводится к задаче отыскания безусловного экстремума.

Применение вариационного исчисления

Методы Ферма и Лагранжа позволяют аналитически решать конечномерные экстремальные задачи, когда критерий зависит от конечного числа неизвестных. Более трудны для решения бесконечномерные экстремальные задачи, когда критерий зависит от неизвестной функции $f(x)$.

Такие задачи решают методами вариационного исчисления.

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Требуется найти кривую $y = f(x)$, проходящую через две заданные точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и доставляющую экстремум функционалу

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y})\, dy$$

Эйлер доказал, что искомая кривая удовлетворяет уравнению

$$\dot{F}_y - \frac{d}{dx}\dot{F}_{\dot{y}} = 0,$$

где через $\dot{F}_y$ и $\dot{F}_{\dot{y}}$ обозначены частные производные от подынтегральной функции

$$\dot{F}_y = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y, \dot{y}), \qquad \dot{F}_{\dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}F(x, y, \dot{y}).$$

Уравнение Эйлера представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, семейство решений которого содержит экстремальную кривую $y = f(x)$.

Следует заметить, что уравнение Эйлера не дает окончательного решения поставленной задачи, а лишь выделяет класс кривых, подозрительных на экстремум. Ситуация здесь вполне аналогична поиску экстремума функции путем ее дифференцирования, когда экстремум может оказаться либо в одной из точек, где производная равна нулю, либо на краях интервала. Общее решение уравнения зависит от двух произвольных постоянных $y = f(x, C_1, C_2)$ и задает двухпараметрическое семейство экстремалей. Для определения постоянных C_1, C_2 и выделения из семейства экстремалей одной кривой – решения исходной задачи – используют краевые условия $f(x_1) = y_1; f(x_2) = y_2$.

В простейшей задаче вариационного исчисления левая и правая точки искомой кривой фиксированы. В общем случае эти точки могут лежать на заданных кривых, тогда говорят о вариационной задаче с подвижными границами.

Постановка задачи.

В работе требуется вычислить расстояние между двумя фигурами (согласно варианту задания). В случае, если фигуры пересекаются, путем переноса центра окружности и/или поворота одной из парабол или гипербол добиться того чтобы фигуры не пересекались. При этом следует привести исходные и результирующие уравнения, а также указать, на какой угол был осуществлен поворот. Затем нужно двумя способами вычислить расстояние между фигурами (методом неопределенных множителей Лагранжа и с использованием вариационного исчисления).

Вращение фигуры на плоскости осуществляется следующим образом.

Предположим, исходная фигура задана уравнением $f(x, y) = 0$. Для того, чтобы повернуть ее вокруг начала координат на угол по часовой стрелке нужно осуществить подстановку:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Фигура1: $(x-5)^2 + (y-10)^2 = 16$.

Фигура2: $y + x^2 - x = 0$

Выполнение работы.

Первоначально требуется привести чертеж графиков заданных двумя исходными уравнениями. Для этого можно прибегнуть к средствам Maxima (см. рис. 1).

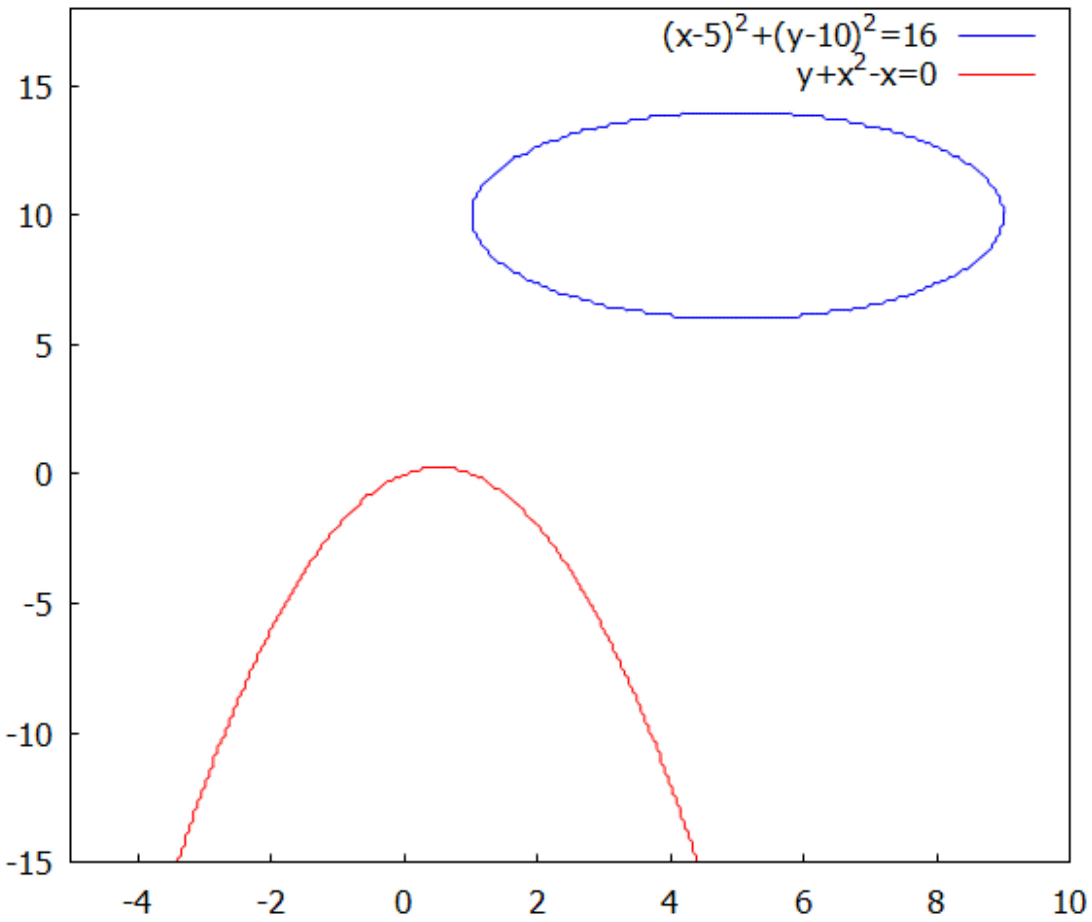

Рисунок 1 – Чертеж графиков, заданных уравнениями.

Соответствующий код (см. рис. 2):

```
(%i5) draw2d(key="(x−5)^2+(y−10)^2=16",
      implicit((x−5)^2+(y−10)^2=16,x,−5,10,y,−15,18),
      key="y+x^2−x=0",
      color=red,
      implicit(y+x^2−x=0,x,−5,10,y,−15,18))$
```

Рисунок 2 – Текст программы Maxima для построения графиков исходных уравнений.

Найдем расстояние между фигурами методом Лагранжа.

Целевая функция:

$$f = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Условия:

$$\varphi_1 = (x - 5)^2 + (y - 10)^2 - 16$$

$$\varphi_2 = y + x^2 - x$$

Функция Лагранжа:

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$$

$$F = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \lambda_1((x_1 - 5)^2 + (y_1 - 10)^2 - 16) + \lambda_2(y_2 + x_2^2 - x_2)$$

Далее найдем точки, подозрительные на экстремум, для функции Лагранжа. Для этого возьмем частные производные по всем переменным:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2) + 2\lambda_1(x_1 - 5) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2(x_1 - x_2) + \lambda_2(2x_2 - 1) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_1} = 2(y_1 - y_2) + 2\lambda_1(y_1 - 10) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} = -2(y_1 - y_2) + \lambda_2 = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = (x_1 - 5)^2 + (y_1 - 10)^2 - 16 = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = y_2 + x_2^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему, используя Maxima.

```
(%i4) F(x_1,x_2,y_1,y_2,l_1,l_2):=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+l_1·((x_1-5)^2+(y_1-10)^2-16) + l_2·(y_2+(x_2)^2-x_2);
(%o4) F(x1,x2,y1,y2,l1,l2):=(x1-x2)^2+(y1-y2)^2+l1((x1-5)^2+(y1-10)^2-16)+l2(y2+x2^2-x2)

(%i5) f1: diff(F(x_1,x_2,y_1,y_2,l_1,l_2), x_1);
(f1)  2(x1-x2)+2 l1(x1-5)

(%i6) f2: diff(F(x_1,x_2,y_1,y_2,l_1,l_2), x_2);
(f2)  l2(2 x2-1)-2(x1-x2)

(%i7) f3: diff(F(x_1,x_2,y_1,y_2,l_1,l_2), y_1);
(f3)  2(y1-y2)+2 l1(y1-10)

(%i8) f4: diff(F(x_1,x_2,y_1,y_2,l_1,l_2), y_2);
(f4)  l2-2(y1-y2)

(%i9) f5: diff(F(x_1,x_2,y_1,y_2,l_1,l_2), l_1);
(f5)  (y1-10)^2+(x1-5)^2-16

(%i10) f6: diff(F(x_1,x_2,y_1,y_2,l_1,l_2), l_2);
(f6)  y2+x2^2-x2

(%i115) realonly:true;
        algsys([f1=0,f2=0,f3=0,f4=0,f5=0,f6=0],[x_1,x_2,y_1,y_2,l_1,l_2]);
(realonly) true
(%o115) []
```

Рисунок 3 – Текст программы Maxima для вычисления расстояния методом Лагранжа.

Из изображения выше, можно видеть, что система не имеет вещественных корней. Таким образом, используя множество вещественных чисел, расстояние между фигурами найти невозможно.

Решение задачи методом вариационного исчисления.

Для того, чтобы найти минимальное расстояние между кривыми, требуется минимизировать функционал

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Уравнение Эйлера:

$$y'' = 0.$$

Уравнение искомой прямой, которая должна проходить через точки $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2\ ,y_2)$, в общем виде:

$$y = kx + b.$$

Для того, чтобы вычислить k и b, запишем уравнения трансверсальности:

$$\begin{cases}(x_2 - x_1) + \ (y_2 - y_1)\grave{\varphi}_{x_1} = 0;\\(x_2 - x_1) + \ (y_2 - y_1)\grave{\psi}_{x_2} = 0.\end{cases}$$

Для 1 фигуры:

$$\varphi = (x_1 - 5)^2 + (y_1 - 10)^2 - 16$$

$$\varphi_1' = -\frac{x_1 - 5}{y_1 - 10}$$

$$y_1 = kx_1 + b, y_2 = kx_2 + b$$

Подставим в условие трансверсальности:

$$(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\varphi'(x_1) = (x_2 - x_1) - k(x_2 - x_1)\frac{x_1 - 5}{kx_1 + b - 10},$$

Следовательно, после преобразований получаем:

$$-5k + b - 10 = 0\ (1)$$

Для второй фигуры:

$$\varphi = y_2 + x_2^2 - x_2$$

$$\varphi_2' = -\frac{2x_2 - 1}{1}$$

$$y_1 = kx_1 + b, y_2 = kx_2 + b$$

Подставим в условие трансверсальности:

$$(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\varphi_2' = (x_2 - x_1) - k(x_2 - x_1)(2x_2 - 1)$$

Следовательно, после преобразований получаем:

$$1 - 2kx_2 - k = 0 \ (2)$$

Добавим еще два уравнения, которые говорят нам о том, что концы отрезков лежат на кривых.

$$(x_1 - 5)^2 + (kx_1 + b - 10)^2 - 16 = 0 \ (3)$$

$$(kx_2 + b) + x_2^2 - x_x = 0 \ (4)$$

Составим систему уравнений из (1), (2), (3), (4):

$$\begin{cases} -5k + b - 10 = 0; \\ 1 - 2kx_2 - k = 0; \\ (x_1 - 5)^2 + (kx_1 + b - 10)^2 - 16 = 0 \\ (kx_2 + b) + x_2^2 - x_x = 0. \end{cases}$$

Для решения системы воспользуемся пакетом Maxima.

```
(%i110) varf1:-5·k+b-10;
        varf2:1-2·k·x_2-k;
        varf3:(x_1-5)^2+(k·x_1+b-10)^2-16=0;
        varf4:(k·x_2+b)+(x_2)^2-x_2;
(varf1)  -5 k+b-10
(varf2)  -2 k x_2-k+1
(varf3)  (k x_1+b-10)^2+(x_1-5)^2-16=0
(varf4)  x_2^2+k x_2-x_2+b

(%i113) realonly:true;
        roots: solve([varf1=0,varf2=0,varf3=0,varf4=0],[x_1,x_2,k,b]);
(realonly) true
(roots)  []
```

Рисунок 4 – Текст программы Maxima для вычисления расстояния методом вариационного исчисления.

Из изображения выше, можно видеть, что система не имеет вещественных корней. Таким образом, используя множество вещественных чисел, расстояние между фигурами найти невозможно.

Выводы.

В результате выполнения работы были исследованы метод множителей Лагранжа и вариационного исчисления для решения задачи вычисления расстояния между кривыми на плоскости в среде Maxima. Решение на множестве вещественных чисел, найти не удалось используя оба метода.