

# Estadística Aplicada II / Modelos Lineales

Profesor: Mario Cooper

2024

## 1 Regresión Lineal Simple

1. Muestre que  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)^2$  tiene punto crítico  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$  tales que  $\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$  y  $\hat{\beta}_2 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$
2. Mostrar bajo el modelo de Regresión Lineal Simple que los estimadores para  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$  son insesgados, es decir  $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$  y  $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$ . Hint: verifique que  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i$
3. Mostrar bajo el modelo de Regresión Lineal Simple que:
  - (a)  $\sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0$
  - (b)  $\sum_{i=1}^n X_i \epsilon_i = 0$
  - (c)  $\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \epsilon_i = 0$
  - (d)  $Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -\bar{X} \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$
  - (e)  $Cov(\hat{\beta}_2, \bar{Y}) = 0$
  - (f)  $Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}})$ ; **Hint:**  $\bar{Y}, \hat{\beta}_2$  independientes
  - (g)  $Var(\hat{\mu}_{Y|X_0}) = \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{S_{xx}})$
4. Muestre que  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ .
5. Considere los datos contenidos en el archivo *Base1 – NivelesdeCarbono* y responda lo siguiente:

- (a) Construya una diagrama de dispersión con los datos ¿Sugiere una asociación lineal entre las variables?
  - (b)  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$
  - (c) Obtenga el coeficiente de determinación e interprete su valor
  - (d) Intervalo de confianza considerando 95% y 97%, para cada uno de los parámetros
  - (e) ¿Qué puede decir acerca de la afirmación que  $\hat{\beta}_2$  es menor a 13? Construya las pruebas de hipótesis correspondientes e interprete
  - (f) Construya un intervalo de confianza sobre la media de respuesta si el nivel de pureza es de 1.00.
  - (g) Construya un intervalo de confianza sobre la futura observación  $X_0 = 1.00$
6. Considere los datos contenidos en el archivo *Base2-Experiencia de Manejo* y responda lo siguiente:
- (a) Construya una diagrama de dispersión con los datos ¿Sugiere una asociación lineal entre las variables?
  - (b)  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$  Dibuje la recta e interprete
  - (c) Obtenga  $r$  y  $r^2$  e interprete su valor
  - (d) Intervalo de confianza considerando 90% y 95%, para cada uno de los parámetros
  - (e) ¿Qué puede decir acerca de la afirmación que  $\hat{\beta}_2$  es menor a -2.5? Construya las pruebas de hipótesis correspondientes e interprete
  - (f) Construya un intervalo de confianza sobre la media de respuesta si los años de experiencia son 10.
  - (g) Construya un intervalo de confianza sobre la futura observación  $X_0 = 10$