Métodos Multivariados: Tarea 1

Aldo, Diego, Mateo, Victor

31/01/2024

```
library(dplyr)
```

```


Attaching package: 'dplyr'
```

```
The following objects are masked from 'package:stats':

    filter, lag
```

```
The following objects are masked from 'package:base':

    intersect, setdiff, setequal, union
```

```
library(lattice)
library(tidyverse)
```

```
── Attaching core tidyverse packages ──────────────────────────────────────── tidyverse 2.0.0
──
✓ forcats   1.0.0     ✓ readr     2.1.4
✓ ggplot2   3.4.4     ✓ stringr   1.5.0
✓ lubridate 1.9.2     ✓ tibble    3.2.1
✓ purrr     1.0.1     ✓ tidyr     1.3.0
```

```
── Conflicts ────────────────────────────────────────────────────────── tidyverse_conflicts()
──
✖ dplyr::filter() masks stats::filter()
✖ dplyr::lag()    masks stats::lag()
ℹ Use the ]8;;http://conflicted.r-lib.org/conflicted package]8;; to force all conflicts to bec
ome errors
```

```
library(ggplot2)
library(ggExtra)
library(plotly)
```

```
Attaching package: 'plotly'

The following object is masked from 'package:ggplot2':

    last_plot

The following object is masked from 'package:stats':

    filter

The following object is masked from 'package:graphics':

    layout
```

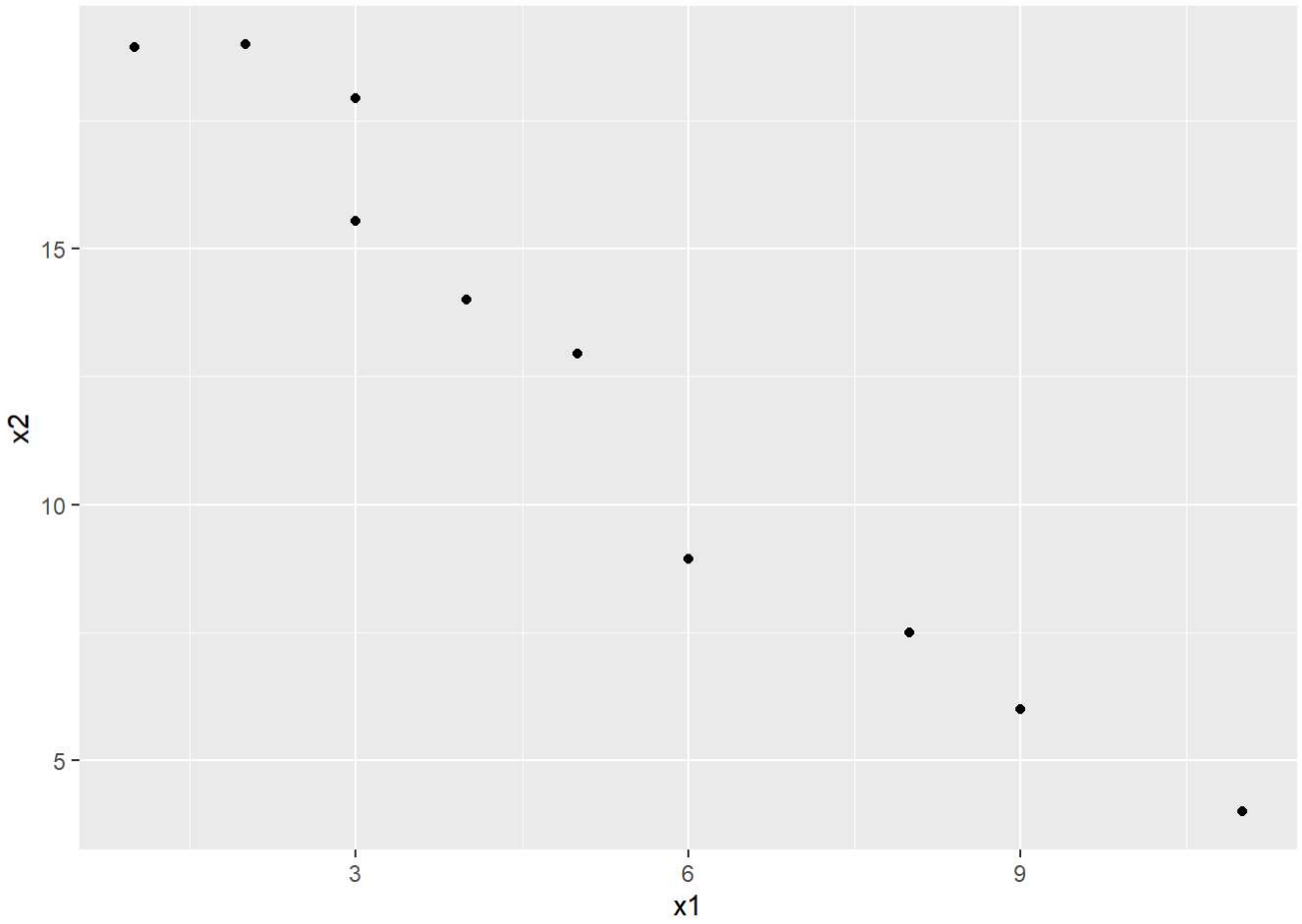
```
library(aplpack)
library(pander)
```

Ejercicio 1.2)

a)

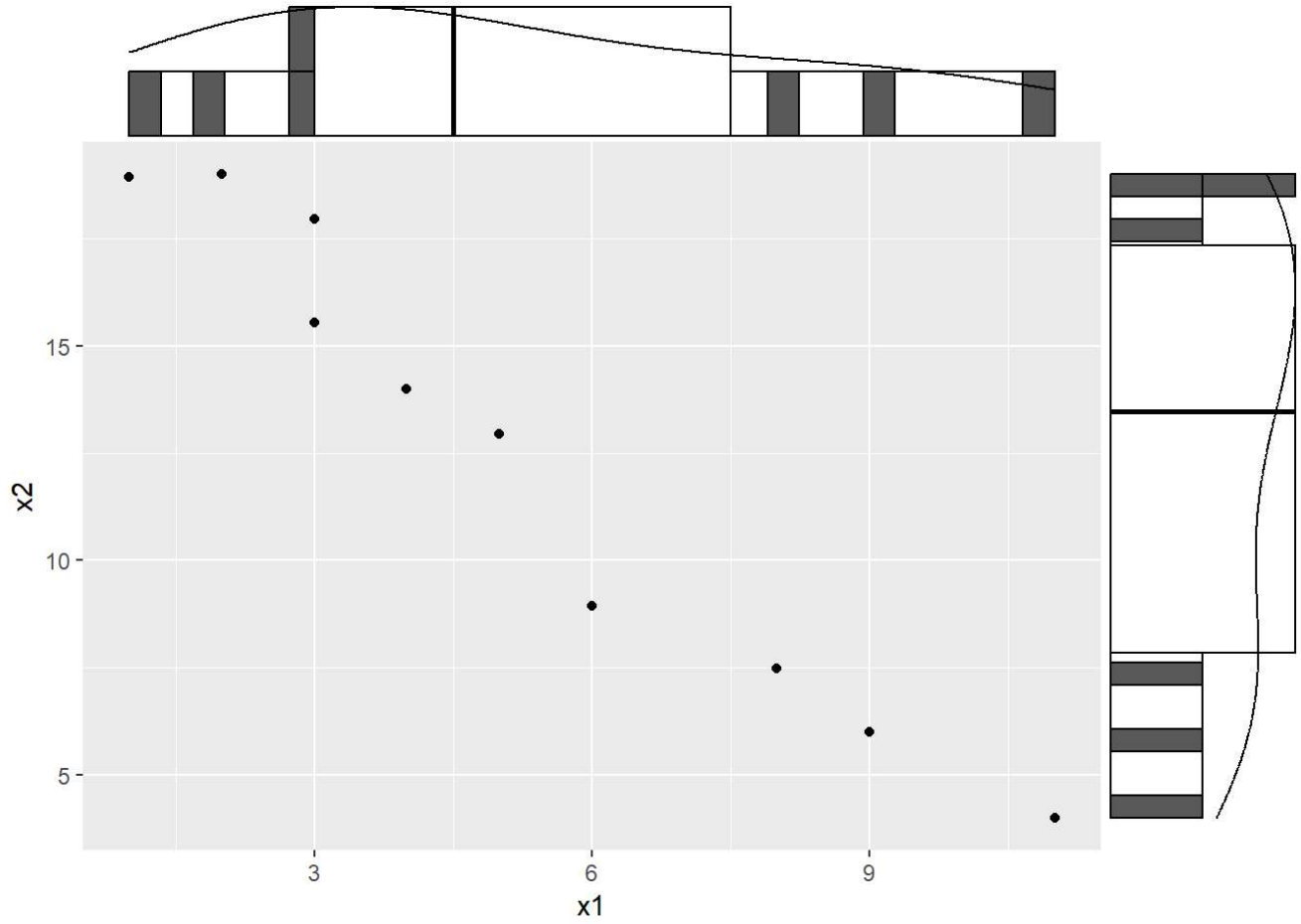
scatterplot A morning newspaper lists the following used-car prices for a foreign compact with age x_i measurred in years and selling price x_2 measurred in thousands of dollars.

```
x1 <- c(1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11)
x2 <- c(18.95, 19, 17.95, 15.54, 14, 12.95, 8.94, 7.49, 6, 3.99)
datos <- data.frame(x1, x2)

(plot <- ggplot(datos, aes(x1, x2)) + geom_point())
```



marginal dot diagram

```
plot1 <- ggMarginal(plot, type="histogram")
plot2 <- ggMarginal(plot, type="boxplot")
plot3 <- ggMarginal(plot, type="density")

plot1
plot2
plot3
```



b)

Infiero que la covarianza es negativa porque hay una tendencia: entre más años tiene el carro, en menos precio se vende.

c)

```
m1 <- mean(x1)
m2 <- mean(x2)

s11 <- var(x1)
s22 <- var(x2)

s12 <- cov(x1, x2)
r12 <- cor(x1, x2)

cat("media x1: ", m1, "\n",
       "media x2: ", m2, "\n",
       "varianza x1: ", s11, "\n",
       "varianza x2: ", s22, "\n",
       "covarianza: ", s12, "\n",
       "correlación: ", r12, "\n")
```

```
media x1:  5.2
 media x2:  12.481
 varianza x1:  10.62222
 varianza x2:  30.85437
 covarianza:  -17.71022
 correlación:  -0.9782684
```

Interpretación:

Media x1: 5.2 años. Representa el valor central de los años de antigüedad de los autos.

Media x2: $12,481. Indica el valor central de los precios de los autos.

Varianza x1: 10.62222. Refleja la dispersión de los años de antigüedad de los autos alrededor de su valor central.

Varianza x2: 30.85437. Muestra la dispersión de los precios de los autos alrededor de su valor central.

Covarianza: -17.71022. Indica cómo varían conjuntamente los años de antigüedad y los precios de los autos. Una covarianza negativa sugiere que los autos más antiguos tienden a tener precios más bajos, y viceversa.

Correlación: -0.9782684. Representa la fuerza y la dirección de la relación entre los años de antigüedad y los precios de los autos. Una correlación negativa cercana a -1 indica una fuerte relación inversa: a medida que los años de antigüedad aumentan, los precios tienden a disminuir

d)

```
colMeans(datos)
```

```
    x1     x2
 5.200 12.481
```

```
var(datos)
```

```
          x1        x2
x1  10.62222 -17.71022
x2 -17.71022  30.85437
```

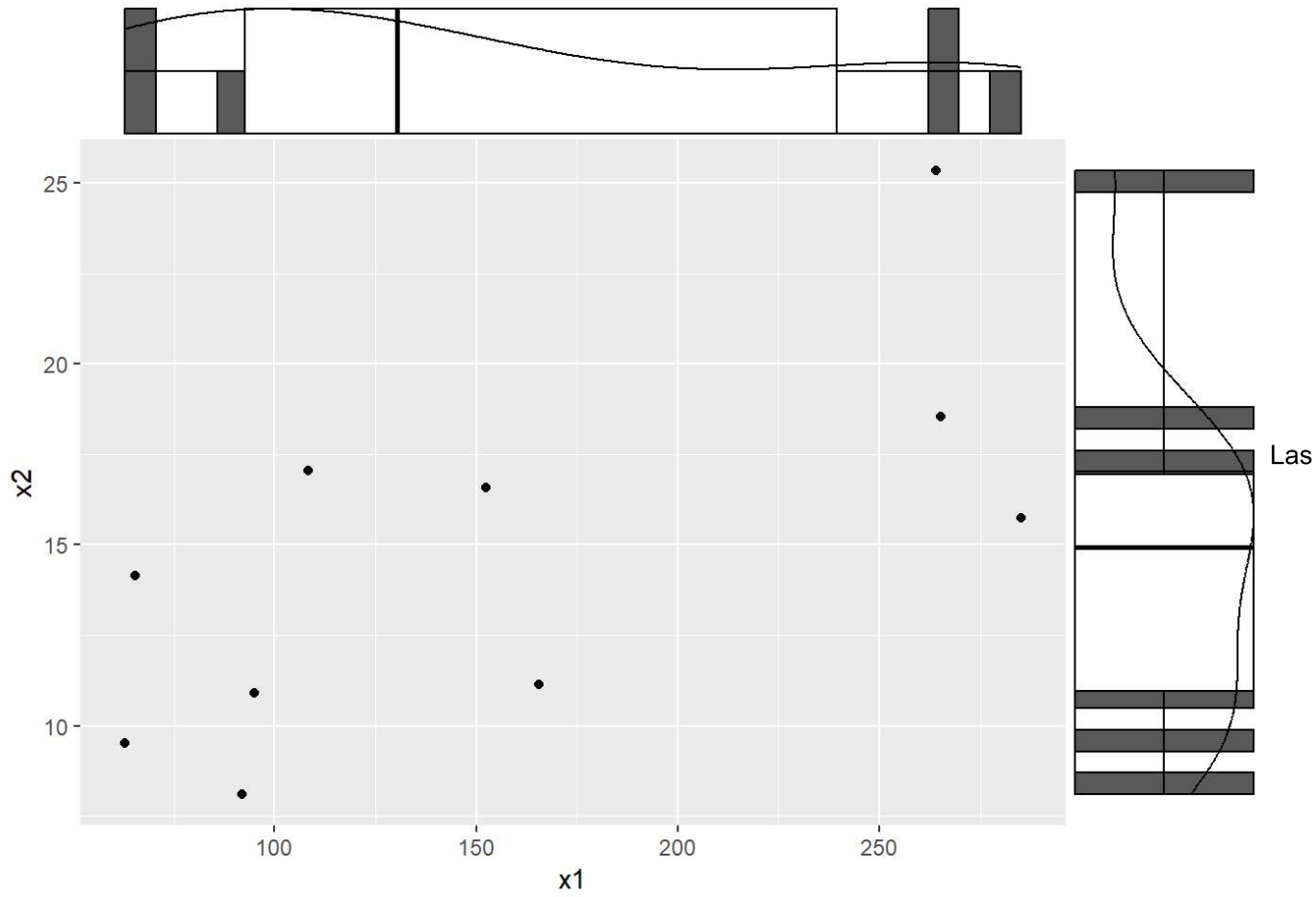
```
cor(datos)
```

```
           x1         x2
x1  1.0000000 -0.9782684
x2 -0.9782684  1.0000000
```

Ejercicio 1.4)

a)

```
df <- data.frame(
  x1 = c(108.28, 152.36, 95.04, 65.45, 62.97, 263.99, 265.19, 285.06, 92.01, 165.68),
  x2 = c(17.05, 16.59, 10.91, 14.14, 9.52, 25.33, 18.54, 15.73, 8.10, 11.13),
  x3 = c(1484.10, 750.33, 766.42, 1110.46, 1031.29, 195.26, 193.83, 191.11, 1175.16, 211.15))

plot <- ggplot(df, aes(x1, x2)) + geom_point()
plot1 <- ggMarginal(plot, type="histogram")
plot2 <- ggMarginal(plot, type="boxplot")
plot3 <- ggMarginal(plot, type="density")

plot1
plot2
plot3
```



ventas tienen mucha variabilidad y no parece seguir una distribución normal porque se cargan mucho los datos a la izquierda (es difícil tener ventas grandes). La ganancia parece estar también muy cargada, en general no se dan ganancias grandes, pero sí aumenta conforme aumentan las ventas.

b)

```
m1 <- mean(df$x1)
m2 <- mean(df$x2)

s11 <- var(df$x1)
s22 <- var(df$x2)

s12 <- cov(df$x1, df$x2)
r12 <- cor(df$x1, df$x2)

cat("media x1: ", m1, "\n",
       "media x2: ", m2, "\n",
       "varianza x1: ", s11, "\n",
       "varianza x2: ", s22, "\n",
       "covarianza: ", s12, "\n",
       "correlación: ", r12, "\n")
```

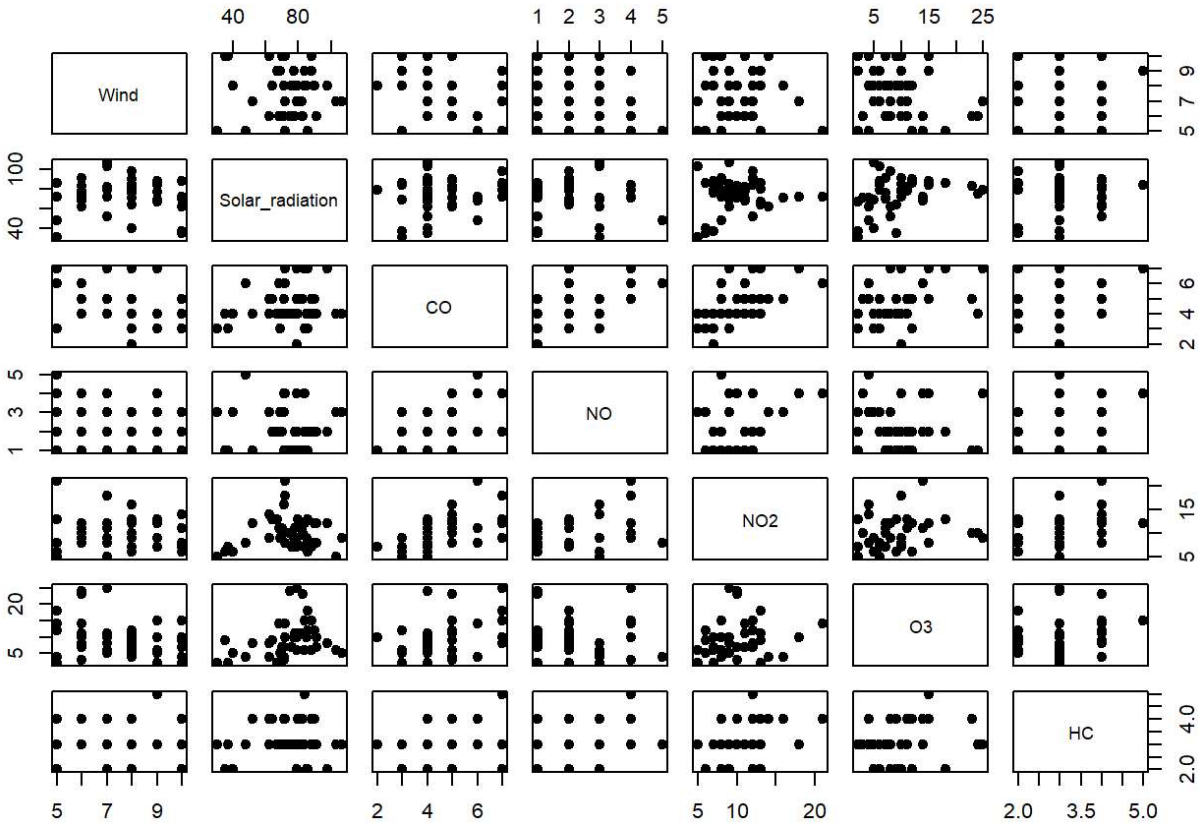
```
media x1:  155.603
 media x2:  14.704
 varianza x1:  7476.453
 varianza x2:  26.19032
 covarianza:  303.6186
 correlación:  0.686136
```

La correlación no llega a ser fuerte, pero sí hay cierta tendencia entre ambas variables que nos permite decir que ante un aumento de ventas, hay un aumento en el profit.

Ejercicio 1.6)

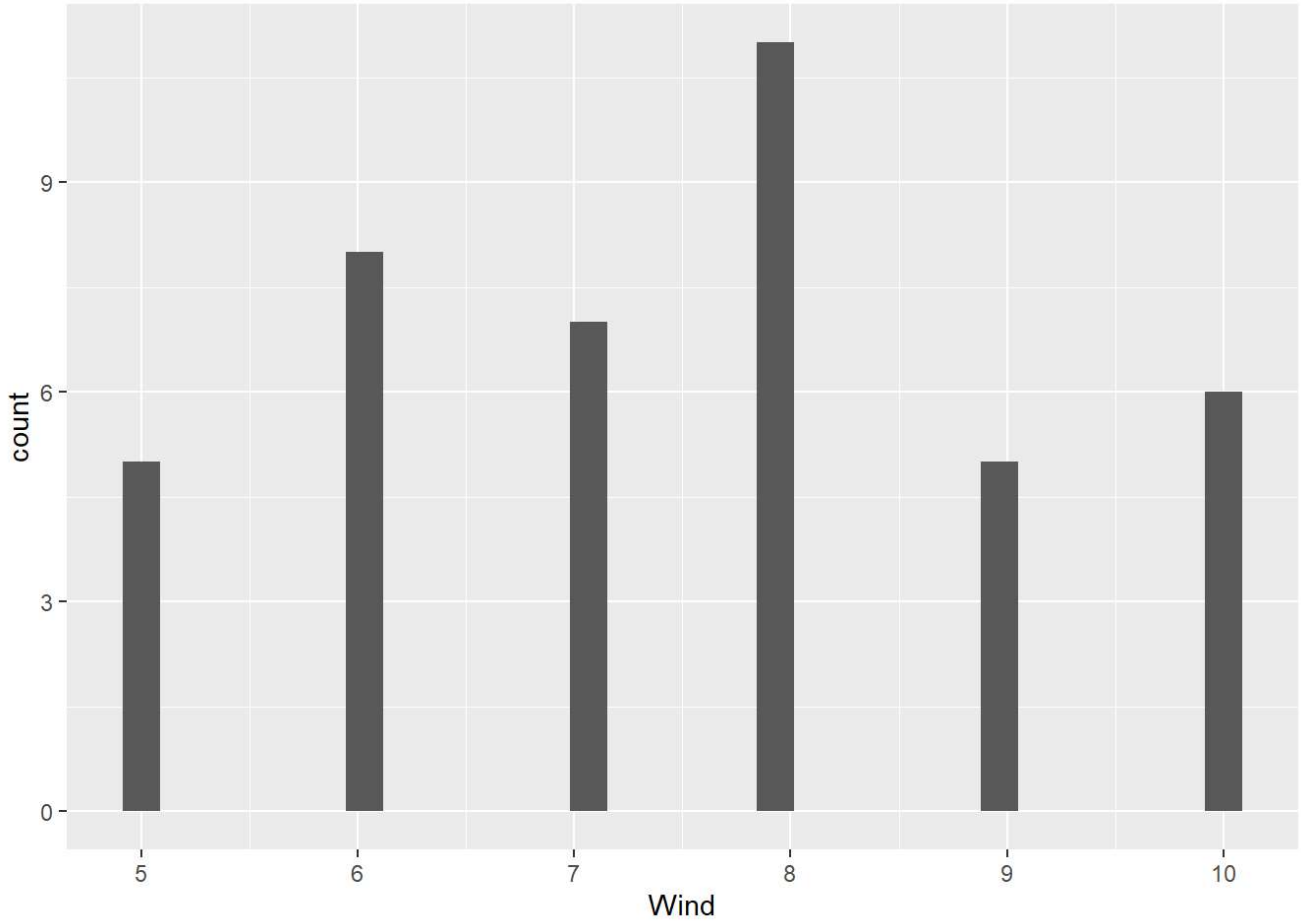
a)

```
datos <- read.table("data/T1-5.DAT", header = FALSE)
colnames(datos) <- c("Wind", "Solar_radiation", "CO", "NO", "NO2", "O3", "HC")

pairs(datos, pch = 19)
```



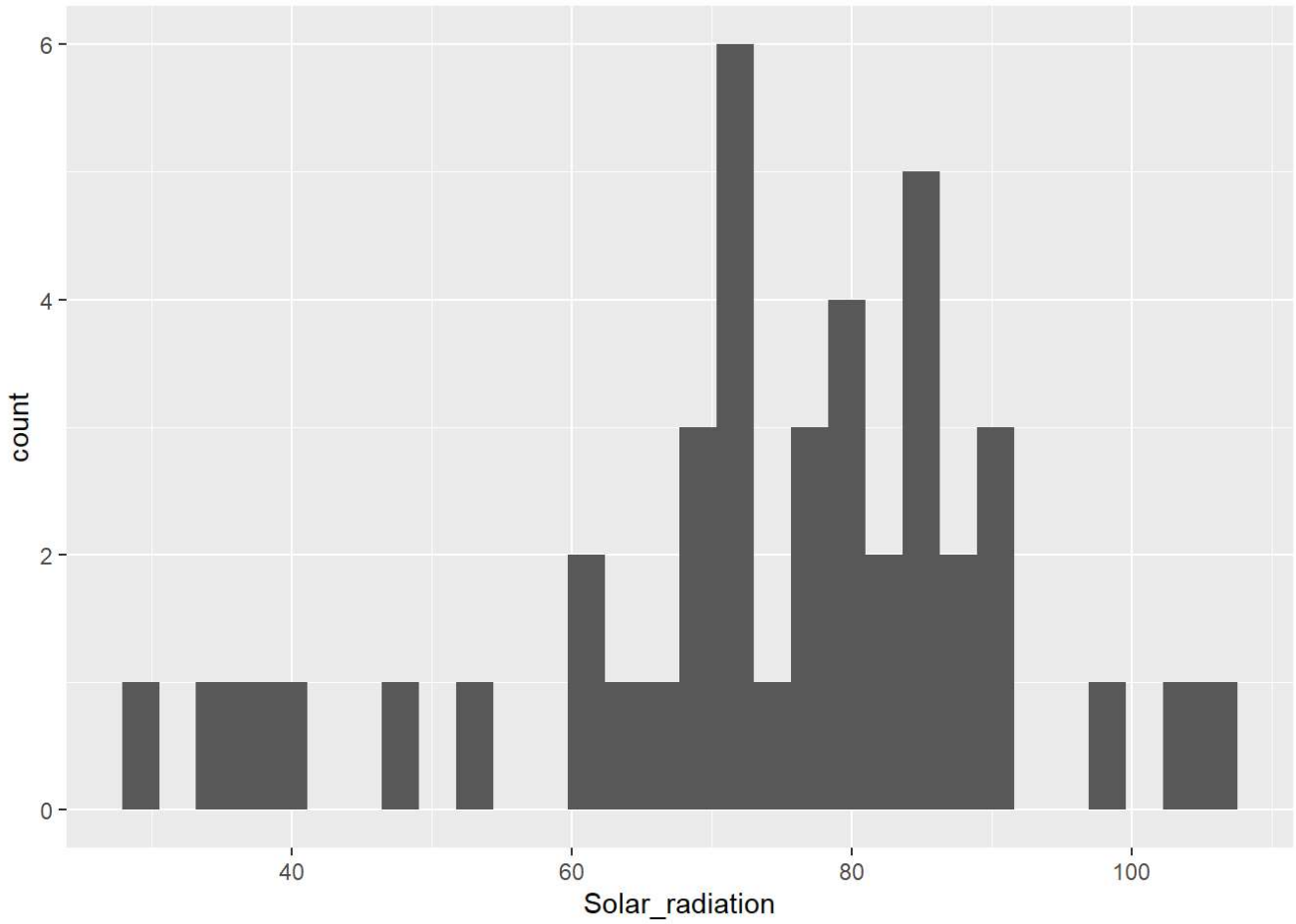

```
g1 <- ggplot(datos, aes(x = Wind)) +
  geom_histogram()

g2 <- ggplot(datos, aes(x = Solar_radiation)) +
  geom_histogram()

g3 <- ggplot(datos, aes(x = CO)) +
  geom_histogram()

g4 <- ggplot(datos, aes(x = NO)) +
  geom_histogram()

g5 <- ggplot(datos, aes(x = NO2)) +
  geom_histogram()

g6 <- ggplot(datos, aes(x = O3)) +
  geom_histogram()

g7 <- ggplot(datos, aes(x = HC)) +
  geom_histogram()


g1
```

```
`stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



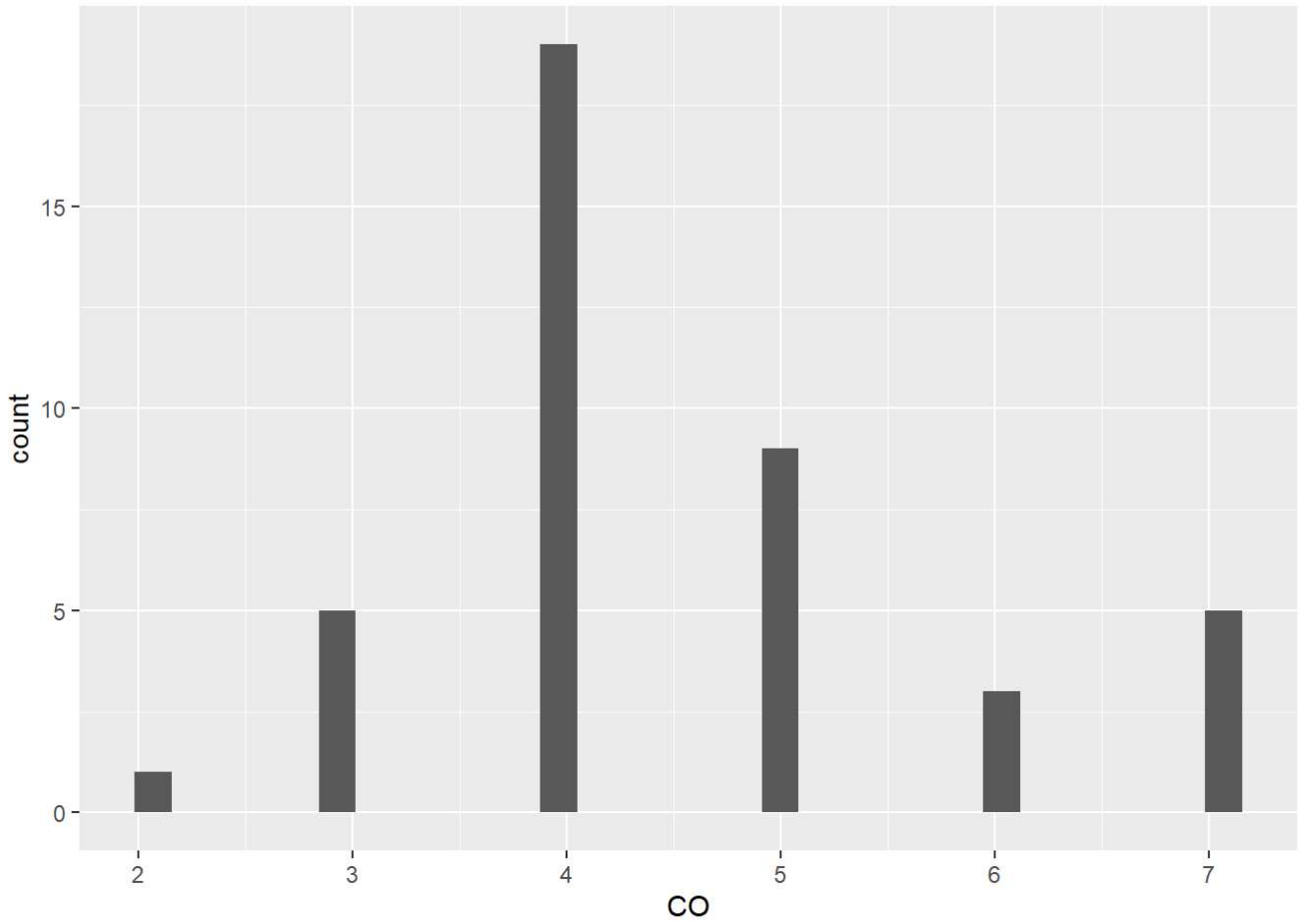

```
g2
```

```
`stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



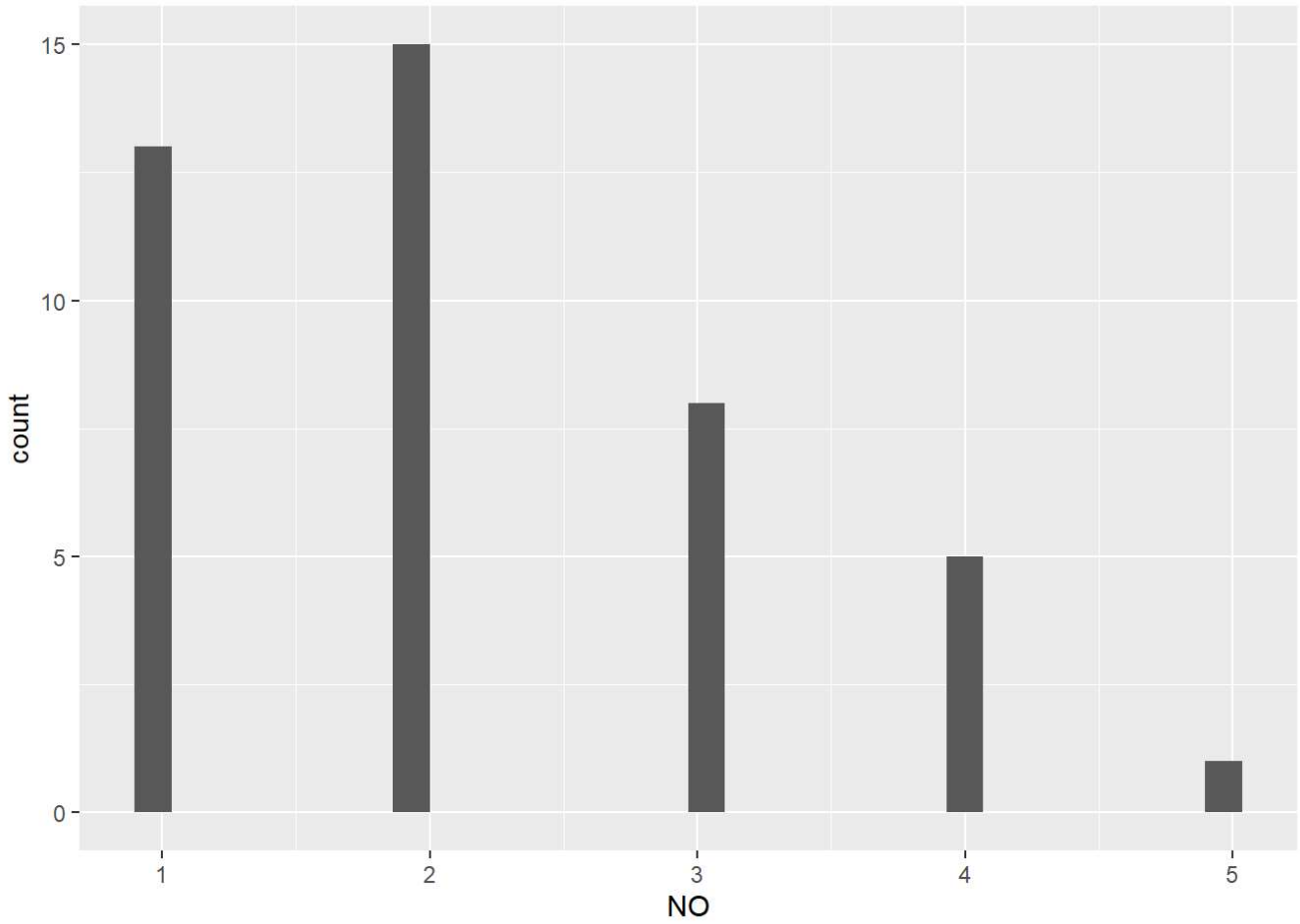

```
g3
```

```
`stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



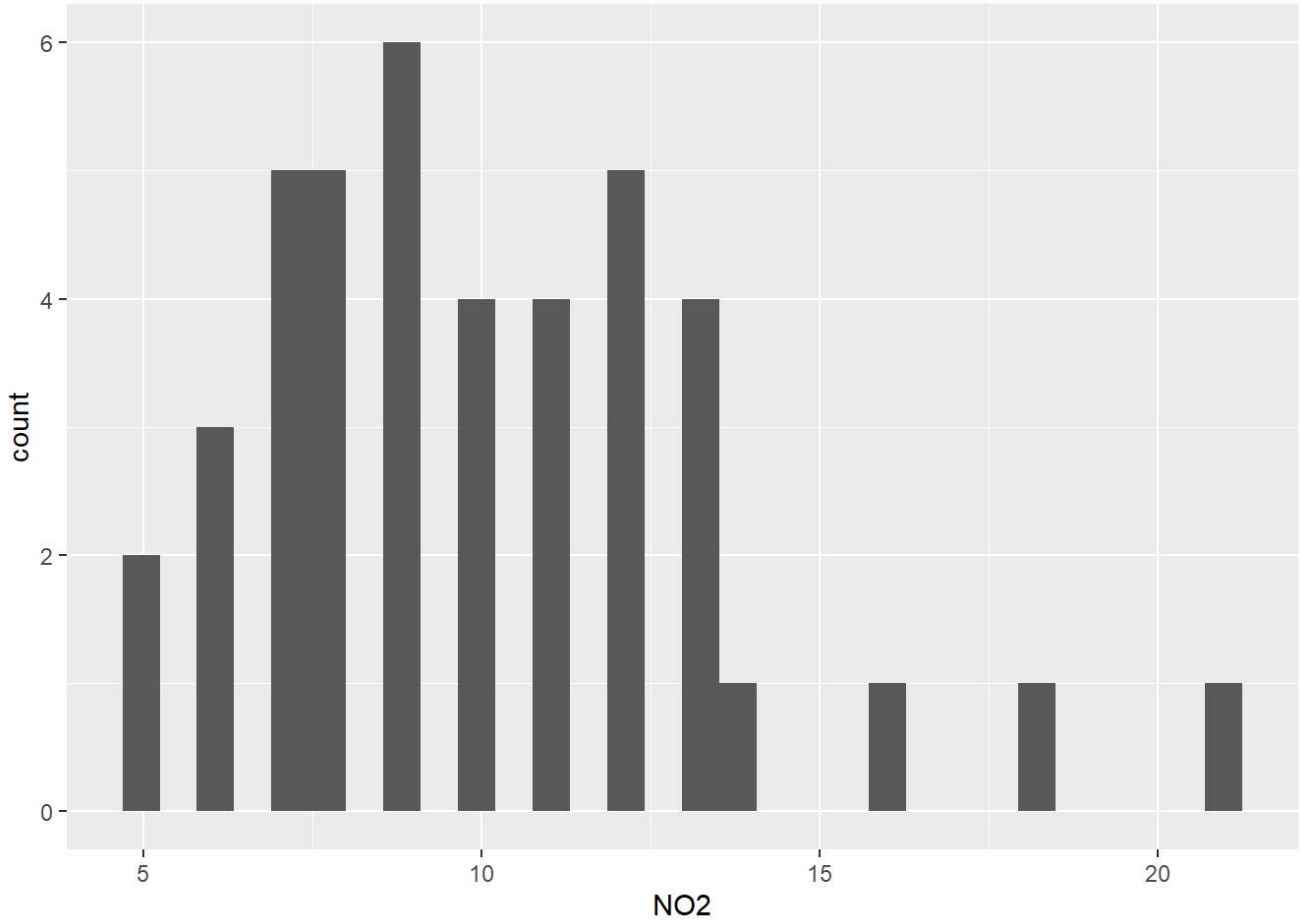

```
g4
```

```
`stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



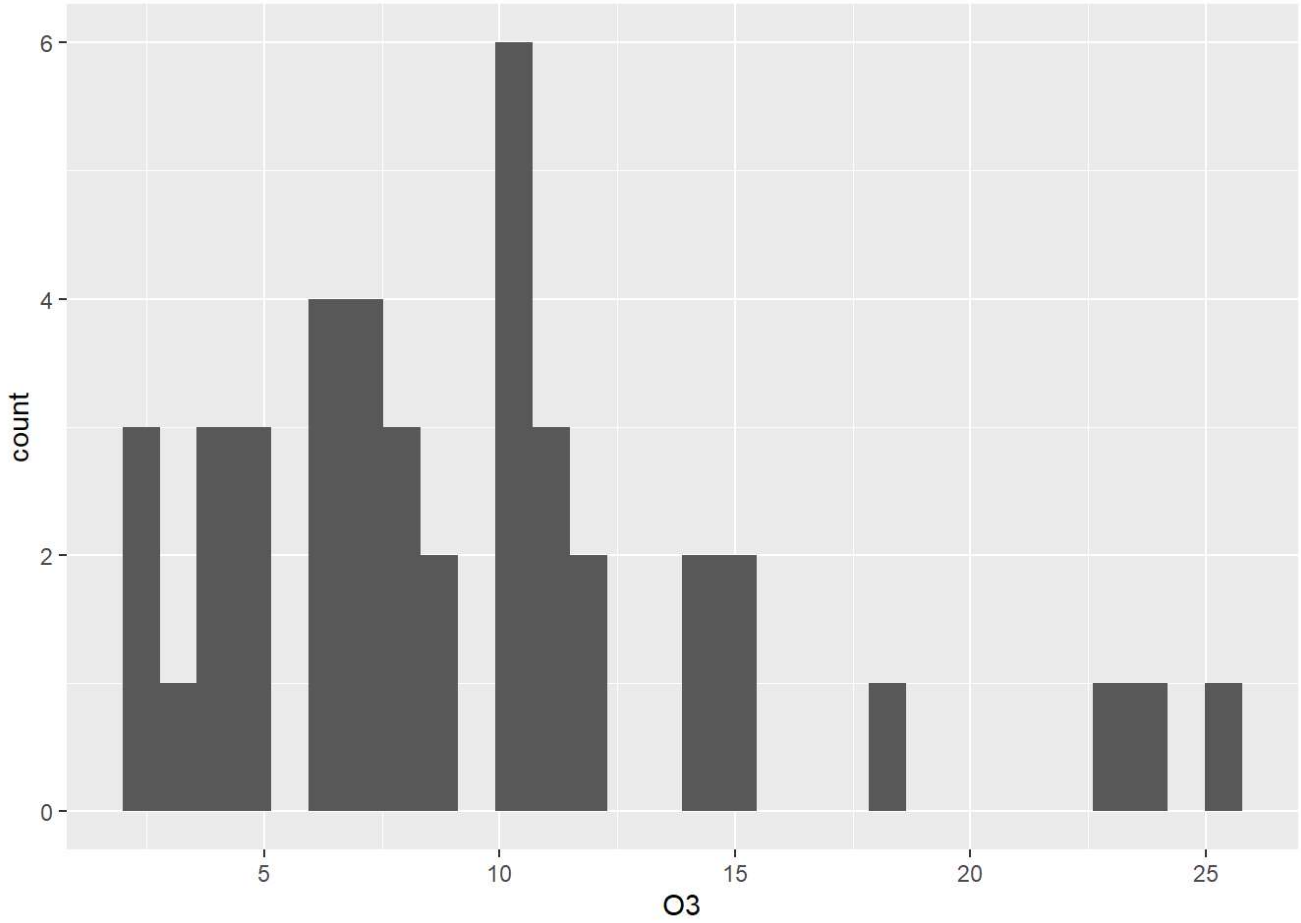

```
g5
```

```
`stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



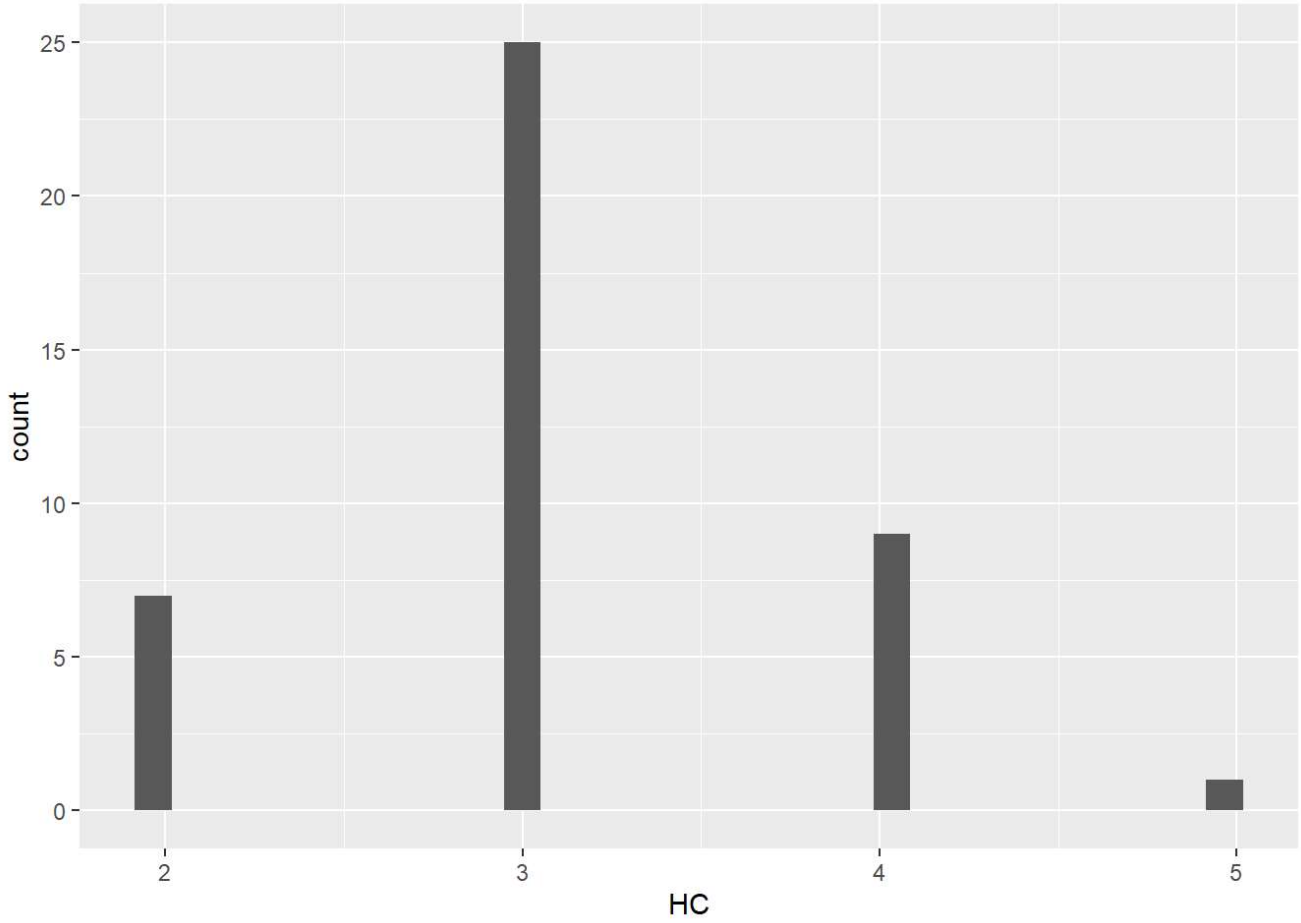

```
g6
```

```
`stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```




```
g7
```

```
`stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```



b)

```
x <- colMeans(datos)
S <- var(datos)
R <- cor(datos)

x
```

```
          Wind Solar_radiation             CO             NO            NO2             O3
      7.500000       73.857143        4.547619        2.190476       10.047619        9.404762
            HC
      3.095238
```

```
S
```

```
                    Wind Solar_radiation         CO         NO        NO2         O3        HC
Wind           2.5000000      -2.7804878 -0.3780488 -0.4634146 -0.5853659 -2.2317073 0.1707317
Solar_radiation -2.7804878     300.5156794  3.9094077 -1.3867596  6.7630662 30.7909408 0.6236934
CO             -0.3780488       3.9094077  1.5220674  0.6736353  2.3147503  2.8217189 0.1416957
NO             -0.4634146      -1.3867596  0.6736353  1.1823461  1.0882695 -0.8106852 0.1765389
NO2            -0.5853659       6.7630662  2.3147503  1.0882695 11.3635308  3.1265970 1.0441347
O3             -2.2317073      30.7909408  2.8217189 -0.8106852  3.1265970 30.9785134 0.5946574
HC              0.1707317       0.6236934  0.1416957  0.1765389  1.0441347  0.5946574 0.4785134
```

```
R
```

```
                    Wind Solar_radiation         CO          NO        NO2         O3          HC
Wind             1.0000000     -0.10144191 -0.1938032 -0.26954261 -0.1098249 -0.2535928 0.15609793
Solar_radiation -0.1014419      1.00000000  0.1827934 -0.07356907  0.1157320  0.3191237 0.05201044
CO              -0.1938032      0.18279338  1.0000000  0.50215246  0.5565838  0.4109288 0.16603235
NO              -0.2695426     -0.07356907  0.5021525  1.00000000  0.2968981 -0.1339521 0.23470432
NO2             -0.1098249      0.11573199  0.5565838  0.29689814  1.0000000  0.1666422 0.44776780
O3              -0.2535928      0.31912373  0.4109288 -0.13395214  0.1666422  1.0000000 0.15445056
HC               0.1560979      0.05201044  0.1660323  0.23470432  0.4477678  0.1544506 1.00000000
```

Interpretación:

el vector de medias x nos dice el nivel que podemos esperar de cada medida tomada por el estudio en Los Ángeles, de tal forma que podemos esperar niveles de CO de 4.54 en un día cualquiera en Los Ángeles.

La matriz S nos permite ver un poco sobre la proporcionalidad entre pares de mediciones. Si el signo del elemento $ s_{2,1} $ es negativo, como es el caso, podemos observar que las variables Solar_radiation y Wind tienen tendencias a ser inversamente proporcionales. Al contrario si el signo es positivo, podemos argumentar que hay cierta proporcionalidad o tendencias a ello.

La matriz R nos permite ver la magnitud con la que covarían cierto par de variables, con esto podemos observar que la relación que tienen las variables entre ellas no es para nada fuerte, la correlación más fuerte es 0.55, que pertenece al par de variables (NO2, CO).

Ejercicio 1.8

a)

$Dado\,(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_p-y_p)^2}\; y\; P=(-1,-1)\; Q=(1,0)$

$\rightarrow\;\; d\,(P,Q) = \sqrt{(-1-1)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

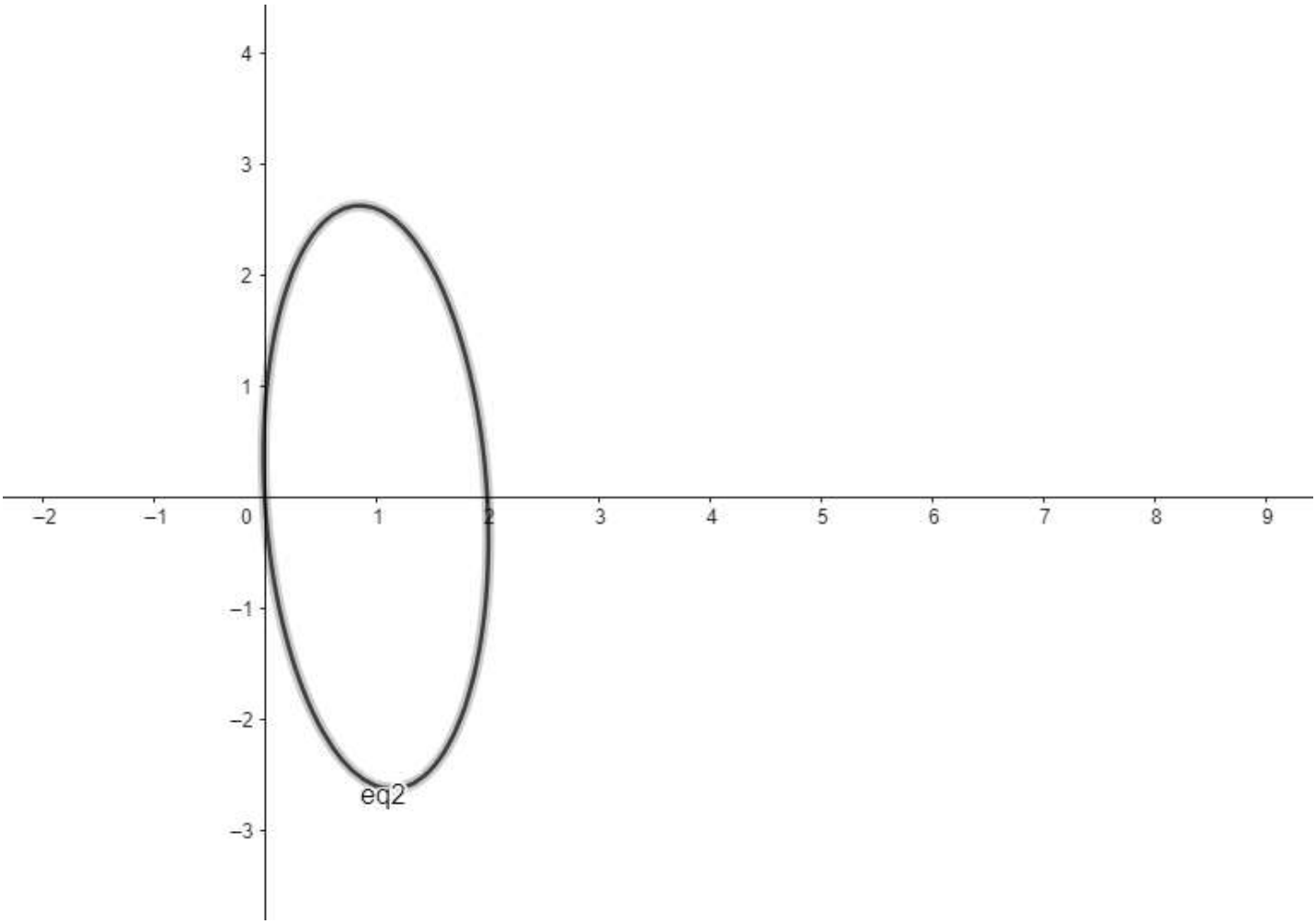
b)

$Dado\; d\,(P,Q) = \sqrt{a_{11}(x_1-y_1)^2+2a_{12}\,(x_1-y_1)\,(x_2-y_2)+a_{22}\,(x_2-y_2)^2}$

$P=(-1,-1)\;\; Q=(1,0)\;\;\; a_{11}=\frac{1}{3}\;\; a_{22}=\frac{4}{27}\;\; a_{12}=\frac{1}{9}$

$\sqrt{\frac{1}{3}(-1-1)^2+\frac{4}{27}(-1-0)^2+(-1-1)\,(-1-0)\,\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}+\frac{4}{27}+\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{36+4+6}{27}} = \sqrt{\frac{46}{27}}$

c)



Ejercicio 1.10

Para que una función sea considerada una metrica se deben de cumplir las siguientes propiedades :

$d\left(x,y\right) \geq 0$

$d\left(x,y\right) = d\left(y,x\right)$

$d\left(x,z\right) \leq \ d\left(x,y\right) + d\left(y,z\right)$

$d\left(x,y\right) = 0 \ \ sii \ \ x = y$

a)

Para $d\left(P\right) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_2x_1$

No se cumple, ya que para $p = (1,3) \ \ y \ q = (3,1) \ \ d\left(x,y\right) \neq \ d\left(y,x\right)$

$1 + 4 * 9 + 3 = 9 + 4 + 3 \rightarrow 40 = 16 \ \ !$

b)

Para $d(P) = x_1^2 - 2x_2^2$

No se cumple, ya que para $p = (1, 3)$ $d(x, y) < 0$

$1 - 2 * 9 <= 0 - > - 17 >= 0$!

Ejercicio 1.12

a)

Sea $d(O, P) = \max(|x_1|, |x_2|)$

Para $P = (-3, 4) = \max(|-3|, |4|) = \max(3, 4) = 4$

b)

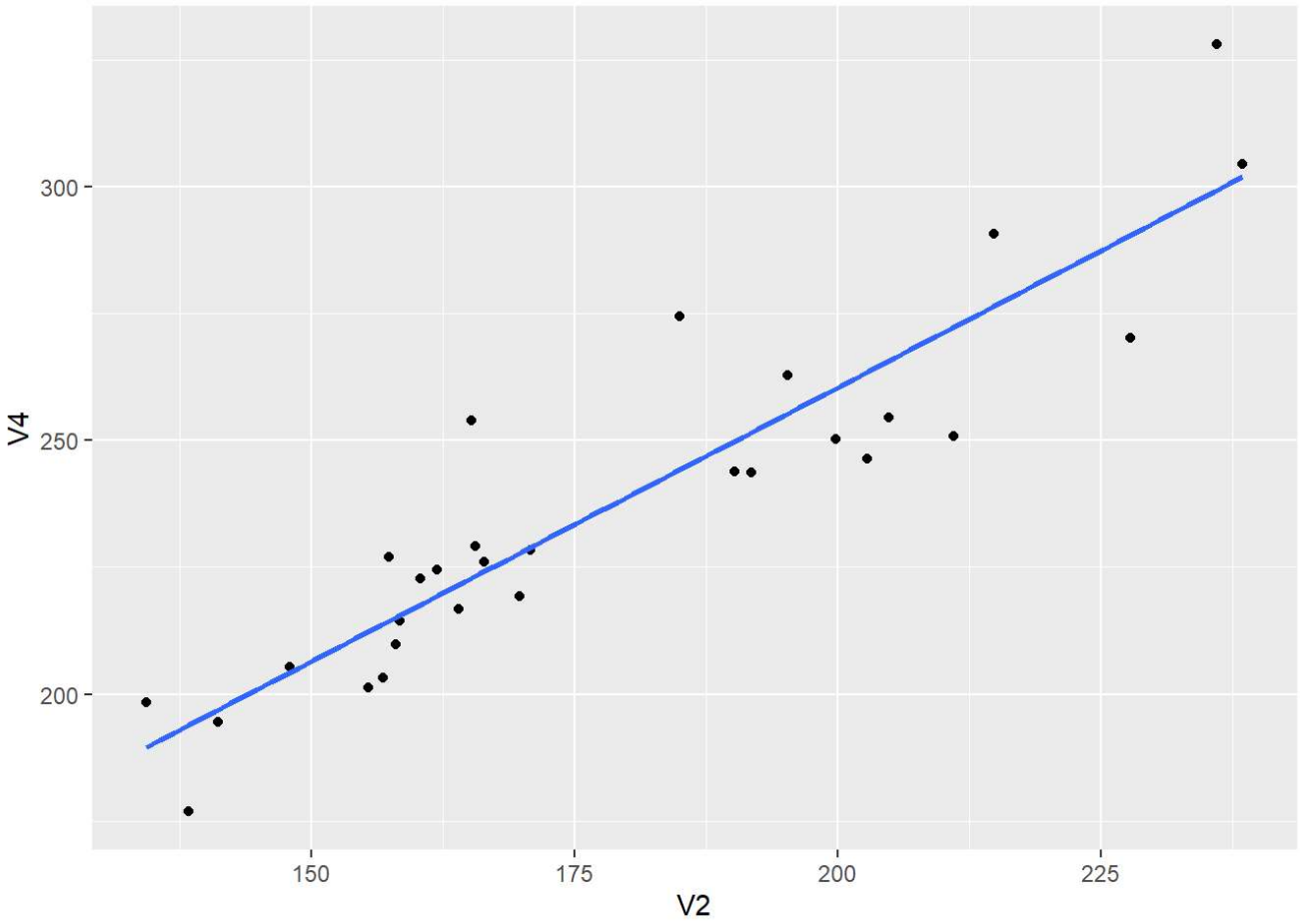
c)

Basandonos en la expresión original, podemos generalizar la expresión a p dimensiones de la siguiente manera $\mathrm{d(P, O)} = \max(|\mathrm{x_1}|, |\mathrm{x_2}|, \ldots, |\mathrm{x_p}|)$

Ejercicio 1.14

a)

```
`geom_smooth()` using formula = 'y ~ x'
```



Paceriera seguir un comportamiento lineal con correalación positiva, ya que al ajustar una regresión lineal a este conjunto de datos podemos ver de mejor manera esta posible relación.

b)

Medias para ambas clases

Group.1	V1	V2	V3	V4	V5
Non-Positive	37.99	147.3	1.562	195.6	1.62
Positive	42.07	178.3	12.28	236.9	13.08

Para esclerosis esto resulta S_n

	V1	V2	V3	V4	V5
V1	117	50.97	-19.52	65.78	-28.79
V2	50.97	815.6	236	881	103.1
V3	-19.52	236	306.3	224.4	287.1
V4	65.78	881	224.4	1139	78.3
V5	-28.79	103.1	287.1	78.3	338.9

Para no esclerosis esto resulta S_n

	V1	V2	V3	V4	V5
V1	273.6	94.02	5.284	102.2	3.194
V2	94.02	110.7	1.741	105.2	2.013
V3	5.284	1.741	1.779	2.202	0.4941
V4	102.2	105.2	2.202	182.5	2.317
V5	3.194	2.013	0.4941	2.317	2.321

Para esclerosis esta es la matriz R

	V1	V2	V3	V4	V5
V1	1	0.165	-0.1031	0.1802	-0.1446
V2	0.165	1	0.4722	0.9139	0.1961
V3	-0.1031	0.4722	1	0.3798	0.8909
V4	0.1802	0.9139	0.3798	1	0.126
V5	-0.1446	0.1961	0.8909	0.126	1

Para no esclerosis esta es la matriz R

	V1	V2	V3	V4	V5
V1	1	0.5403	0.2395	0.4574	0.1268
V2	0.5403	1	0.1241	0.7404	0.1256
V3	0.2395	0.1241	1	0.1222	0.2431
V4	0.4574	0.7404	0.1222	1	0.1126
V5	0.1268	0.1256	0.2431	0.1126	1

Ejercicio 1.18

Convertir los datos de la tabla a rapidez medida en m/s. Calcular $\bar{x}, S_n$, R. Interpretar las correlaciones a pares.

```
datos <- read.table("data/T1-9.DAT")

datos <- datos %>% mutate(speed_100 = 100 / V1, speed_200 = 200 / V2,
speed_400 = 400 / V3, speed_800 = 800 / (V4 * 60),
speed_1500 = 1500 / (V5 * 60), speed_3000 = 3000 / (V6 * 60),
speed_marathon = 42195 / (V7 * 60))
X <- datos %>% select(speed_100, speed_200, speed_400,
speed_800, speed_1500, speed_3000, speed_marathon)
```

Vector de medias

```
x_bar <- colMeans(X)
x_bar
```

```
     speed_100      speed_200      speed_400      speed_800     speed_1500     speed_3000 
      8.619563       8.477682       7.508260       6.438315       5.809894       5.327651 
speed_marathon 
      4.154344 
```

Matriz de covarianza

```
n <- nrow(X)
S <- var(X)
Sn <- (n-1)/n * S
Sn
```

```
               speed_100  speed_200 speed_400  speed_800 speed_1500 speed_3000 speed_marathon
speed_100      0.10760676 0.12153268 0.1020016 0.07809972 0.09734084  0.1013165      0.1323820
speed_200      0.12153268 0.15053074 0.1241922 0.09227774 0.11161663  0.1152740      0.1553819
speed_400      0.10200163 0.12419217 0.1382760 0.10913176 0.11949475  0.1200003      0.1490451
speed_800      0.07809972 0.09227774 0.1091318 0.10656842 0.11982963  0.1177373      0.1441559
speed_1500     0.09734084 0.11161663 0.1194947 0.11982963 0.15951532  0.1588241      0.1928020
speed_3000     0.10131654 0.11527402 0.1200003 0.11773734 0.15882406  0.1702817      0.2059045
speed_marathon 0.13238201 0.15538191 0.1490451 0.14415595 0.19280198  0.2059045      0.3157511
```

Matriz de correlaciones

```
R <- cor(X)
R
```

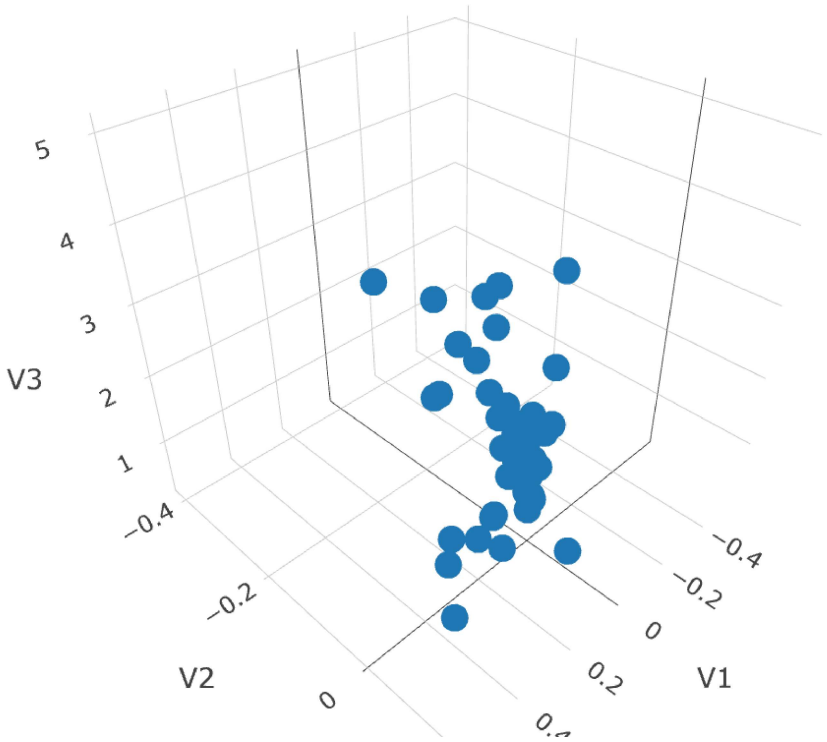
```
               speed_100 speed_200 speed_400 speed_800 speed_1500 speed_3000 speed_marathon
speed_100      1.0000000 0.9549062 0.8362072 0.7293155  0.7429749  0.7484738      0.7181856
speed_200      0.9549062 1.0000000 0.8608117 0.7285680  0.7203028  0.7200039      0.7127142
speed_400      0.8362072 0.8608117 1.0000000 0.8990078  0.8045891  0.7820324      0.7132994
speed_800      0.7293155 0.7285680 0.8990078 1.0000000  0.9190704  0.8740091      0.7858612
speed_1500     0.7429749 0.7203028 0.8045891 0.9190704  1.0000000  0.9636761      0.8590883
speed_3000     0.7484738 0.7200039 0.7820324 0.8740091  0.9636761  1.0000000      0.8879928
speed_marathon 0.7181856 0.7127142 0.7132994 0.7858612  0.8590883  0.8879928      1.0000000
```

Se puede observar que todas las correlaciones entre los valores de rapidez son positivas. Se puede observar que después del valor 1 de la diagonal principal, las correlaciones tienden a disminuir y antes del valor tienden a aumentar. Cuando la disntancia aumenta el tiempo en completarlo también aumenta, pero naturalmente, la rapidez promedio para completar un maratón es menor que la de un circuito de 100 m.

Ejercicio 1.20

```
No trace type specified:
  Based on info supplied, a 'scatter3d' trace seems appropriate.
  Read more about this trace type -> https://plotly.com/r/reference/#scatter3d
```

```
No scatter3d mode specifed:
  Setting the mode to markers
  Read more about this attribute -> https://plotly.com/r/reference/#scatter-mode
```

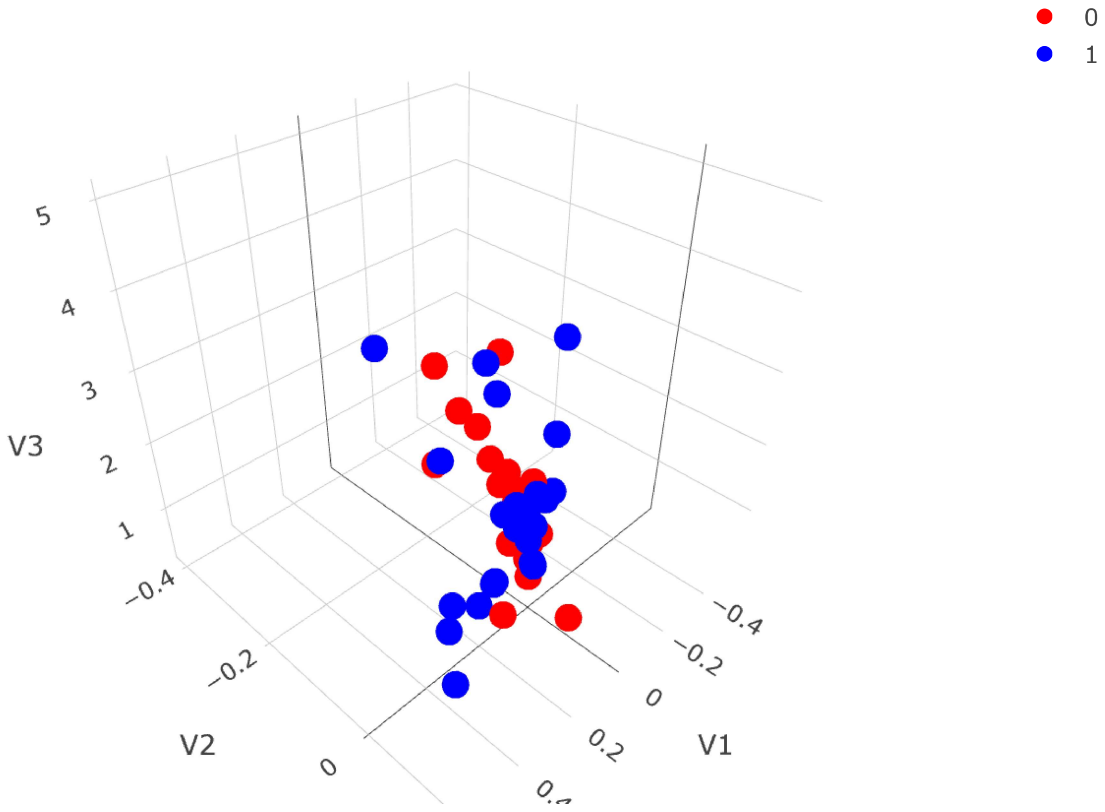


Se puede observar que una gran cantidad de puntos se concentran en un cúmulo alrededor del (-0.2, 0.4) en el eje x, (-0.2, 0.2) en el eje y, (1, 3.27) en el eje z. El punto con las coordenadas (0.58, 0.04, 5.06) parece ser un dato atípico. b) Colorear los puntos de acuerdo a los que están en bancarrota ¿Hay alguna orientación en la que se pueden distinguir las compañías en bancarrota de las que no lo están? ¿Existen observaciones que pueden llegar a tener un impacto significativo en alguna regla para clasicar nuevas empresas?

```
datos$V5 <- as.factor(datos$V5)

fig <- plot_ly(datos, x = ~V1, y = ~V2, z = ~V3, color = ~V5,
colors = c("#FF0000", "#0000FF"))
fig
```

```
No trace type specified:
  Based on info supplied, a 'scatter3d' trace seems appropriate.
  Read more about this trace type -> https://plotly.com/r/reference/#scatter3d
```

```
No scatter3d mode specifed:
  Setting the mode to markers
  Read more about this attribute -> https://plotly.com/r/reference/#scatter-mode
```



Si orientamos el eje X con x2, el eje y con x3 y el eje z con x1 se puede disntiguir a una gran mayoría de las compañías en bancarrota, específicamente, las que están en bancarrota tienden a tener menor x2, menor x3 y menor x1. En las empresas que no están en bancarrota un punto que puede tener un gran impacto puede ser el (0.14, -0.03, 0.46) debido a que presenta un valor de x3 muy bajo. En el caso de las que sí están en bancarrota podría ser el (0.37, 0.11, 1.99) debido a su valor mayor de x1.

Ejercicio 1.22

```
datos <- read.table("data/T6-12.DAT") %>% select(V1, V2, V3, V4)
```

```
x_bar <- colMeans(datos)
x_bar
```

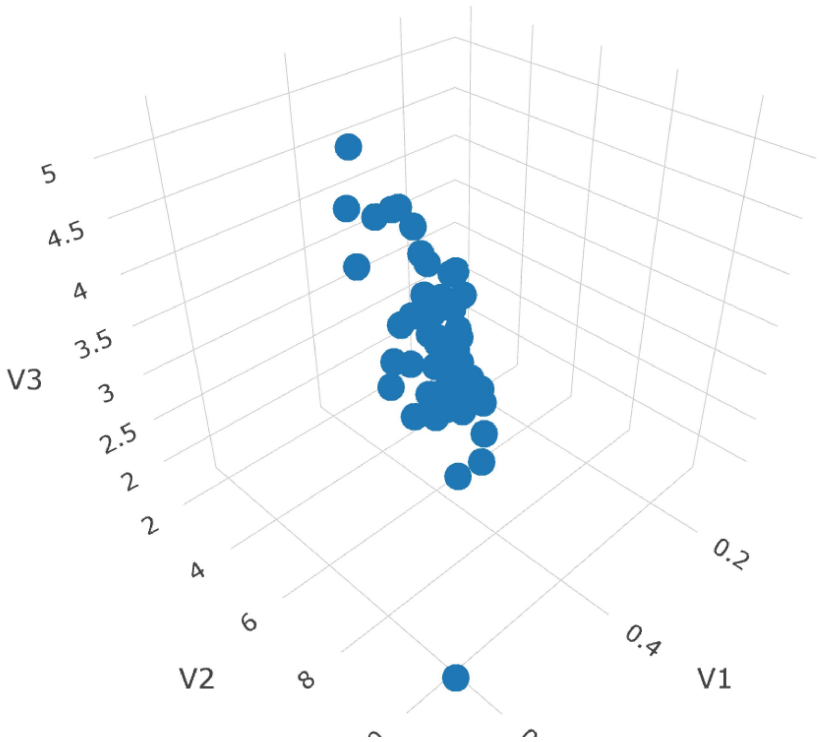
```
     V1      V2      V3      V4 
 0.3554  5.2542  3.0014 43.7876 
```

a) Graficar el dataset en 3 dimensiones.

```
fig <- plot_ly(datos, x = ~V1, y = ~V2, z = ~V3)
fig
```

```
No trace type specified:
  Based on info supplied, a 'scatter3d' trace seems appropriate.
  Read more about this trace type -> https://plotly.com/r/reference/#scatter3d
```

```
No scatter3d mode specifed:
  Setting the mode to markers
  Read more about this attribute -> https://plotly.com/r/reference/#scatter-mode
```



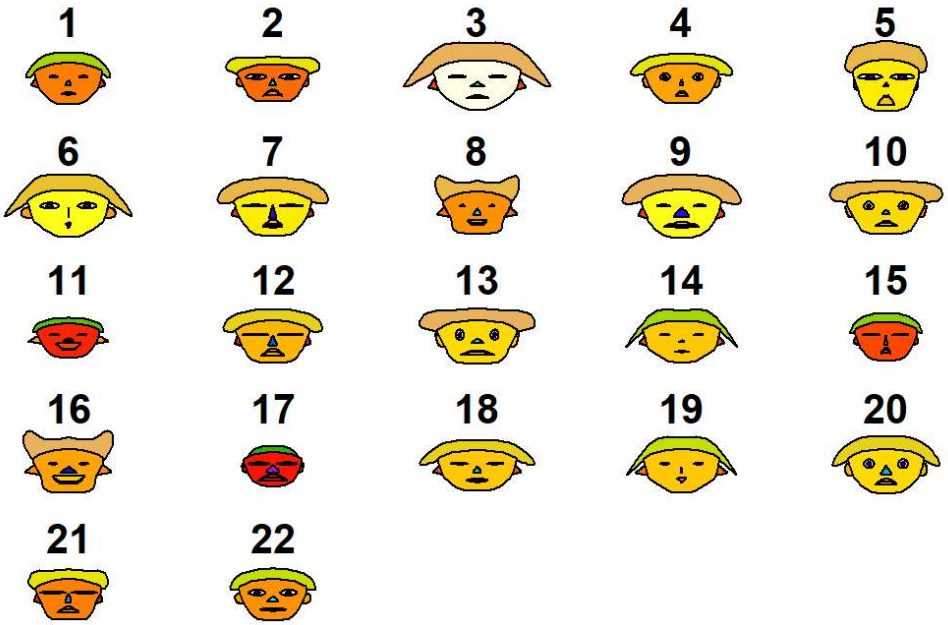
b) Checar outliers.

Un valor que parece ser un outlier es el (-0.45, -0.41, 1.09) ya que sus valores en las tres coordendas son menores que la media.

Ejercicio 1.24

Representar el dataset con caras de Chernoff ¿Existen diferentes grupos?

```
datos <- read.table("data/T12-4.DAT") %>% select(V1, V2, V3, V4, V5, V6, V7, V8)

faces(datos, face.type = 1)
```




```
effect of variables:
 modified item       Var
 "height of face   " "V1"
 "width of face    " "V2"
 "structure of face" "V3"
 "height of mouth  " "V4"
 "width of mouth   " "V5"
 "smiling          " "V6"
 "height of eyes   " "V7"
 "width of eyes    " "V8"
 "height of hair   " "V1"
 "width of hair    "  "V2"
 "style of hair    "  "V3"
 "height of nose   "  "V4"
 "width of nose    "  "V5"
 "width of ear     "  "V6"
 "height of ear    "  "V7"
```

Existen algunas compañías que sus representaciones se parecen, por ejemplo, la 7, 9, 12 y la 11, 15, 17.