# 圆锥曲线探究

Xthoa

July 2023

## 摘要

本文通过圆锥曲线的本质，即平面截锥面，推导得出了能表示出所有圆锥曲线的通式，探究了几种曲线的共性，分析了参数对图像的影响。

## 1 简介

高中数学教材中，介绍了圆锥曲线，即用平面截锥面得到的曲线。教材对三种曲线分别作了定义，并给出了标准方程。

1) 椭圆：到两个定点距离之和相等的点的集合，标准方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

并规定：$2a$ 是定长，$2c$ 是焦距，$b^2=a^2-c^2$，离心率 $e=c/a<1$。

2) 双曲线：到两个定点距离之差相等的点的集合，标准方程：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

并规定：$2a$ 是定长，$2c$ 是焦距，$b^2=c^2-a^2$，离心率 $e=c/a>1$。

3) 抛物线：到定点和定直线的距离相等的点的集合，标准方程：

$$y^2=2px$$

并规定：$r$ 是到定点的距离，$d$ 是到定直线的距离，离心率 $e=r/d=1$。

显然，三种曲线的定义和标准方程不尽相同。但根据其本质，应该能得到一个统一这三者的方程。通过建系，我们得到了一个能表示这三种曲线的方程，但其不够一般。结合上述三个标准方程，我们得到了更一般的方程，能够包括平面内所有二次曲线。

## 2 探究

### 2.1 归纳式

#### 2.1.1 推导

建立一个空间直角坐标系，在其中构造一个圆锥。为便于计算，假定圆锥横截面的圆的半径就是其竖坐标的绝对值，那么得到圆锥的方程：

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1}$$

然后构造一个平面。为便于计算和直观理解，假定这个平面平行于 y 轴，得到平面的方程：

$$z=kx+b \tag{2}$$

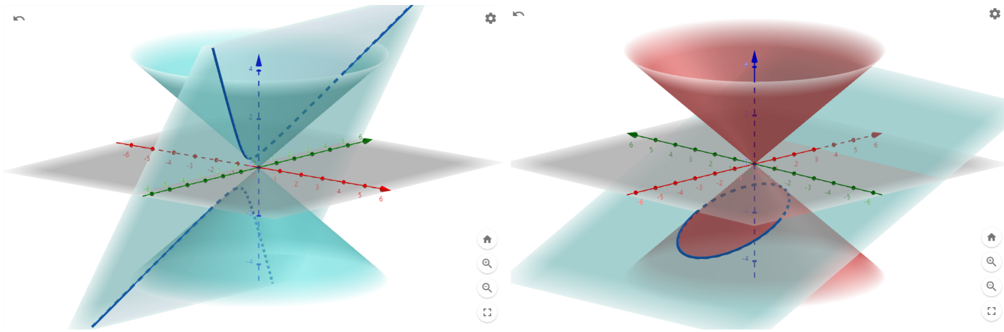

图 1: 用平面 $z=2x+1$ 和平面 $z=0.5x-1.6$ 截圆锥 $x^2+y^2=z^2$

用这个平面截圆锥，如图 1 所示；于是联立上述二式得到方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z=kx+b \end{cases} \tag{3}$$

把解集所表示的曲线从空间中平行（于 z 轴）映射到 Oxy 平面上，能得到归纳式

$$x^2+y^2=(kx+b)^2 \tag{4}$$

#### 2.1.2　特点

若平面不经过圆锥的顶点，即 $b\neq 0$，则图像有如下特点：1) 当 $k<-1$ 或 $k>1$ 时，图像是双曲线；2) 当 $k=\pm 1$ 时，图像是抛物线；3) 当 $-1<k<1$ 时，图像是椭圆，其中 $k=0$ 时图像是圆。

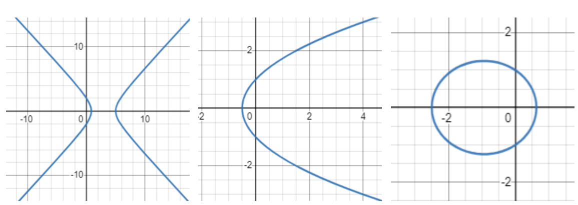

图 2: $b\neq 0$ 时的图像

若平面经过圆锥顶点，即 $b=0$，图像特点如下：1) 当 $-1<k<1$ 时，没有图像；2) 当 $k=\pm 1$ 时，图像与 x 轴重合；3) 当 $k^2>1$ 时，图像是两条相交于原点、斜率互为相反数的直线，实质上是圆锥的母线。

### 2.2　通式

观察归纳式和前文所述的三个标准方程，将其化为 $f(x,y)=0$ 的形式后，注意到方程左侧是含有 x 和 y 的二次多项式，即它是一个二元二次方程。据此，猜想平面内所有的圆锥曲线都能用一个二元二次方程表达：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

#### 2.2.1　特点

设 $\Delta=B^2-4AC$，该变量可以判断二次项是否符合完全平方形式，进而能够确定曲线的大致类型；

设 $\varphi=BDE-AE^2-CD^2$，该变量可以判断一次项与二次项是否能够合并同类项，进而能够确定图像的曲直；

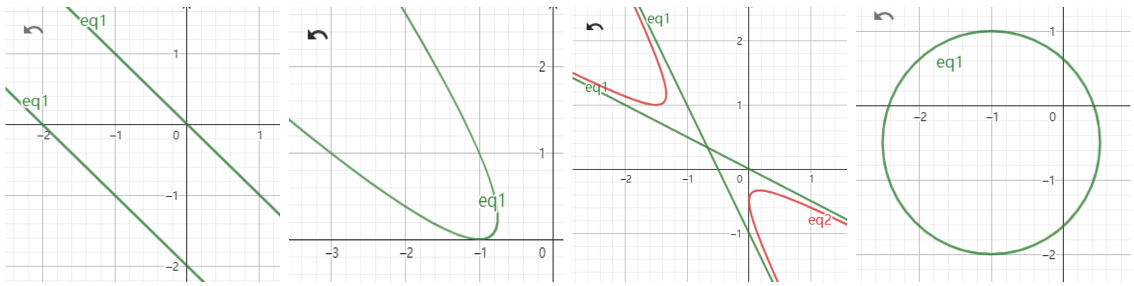


图 3: 不同情况下通式能表示出的图像：A.(1,2,1,2,2,0); B.(1,2,1,2,1,1); C.(2,5,2,1,2,0) 和 (2,5,2,1,2,1/2); D.(1,0,1,2,1,-1)

设 $\delta = D^2 - 4AF + E^2 - 4CF$，该变量可以判断多项式化为完全平方的形式后剩余的常数的符号

当 $\Delta = 0$ 时，图像是抛物线一类。若 $\varphi < 0$，则图像是抛物线；若 $\varphi = 0$，则图像是平行直线（$\delta > 0$）或重合直线（$\delta = 0$）或没有图像（$\delta < 0$）。

当 $\Delta > 0$ 时，图像是双曲线一类。若 $\varphi - F\Delta \neq 0$，则图像是双曲线；若 $\varphi - F\Delta = 0$，则图像是相交直线。

注意到，A,B,C,D,E 的值都固定时，通过改变 F 的值，所能表示出的相交直线即是所有能表示出的双曲线的渐近线。

当 $\Delta < 0$ 时，图像是椭圆一类。若 $\varphi - F\Delta > 0$，则图像是椭圆；若 $\varphi - F\Delta = 0$，则图像是一点；若 $\varphi - F\Delta < 0$，则没有图像。

<table>
<tr><td rowspan="2">$\Delta > 0$</td><td colspan="2">$\varphi - F\Delta = 0$</td><td>相交直线</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi - F\Delta \neq 0$</td><td>双曲线</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Delta = 0$</td><td rowspan="3">$\varphi = 0$</td><td>$\delta > 0$</td><td>平行直线</td></tr>
<tr><td>$\delta = 0$</td><td>重合直线</td></tr>
<tr><td>$\delta < 0$</td><td>无</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi < 0$</td><td>抛物线</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta < 0$</td><td colspan="2">$\varphi - F\Delta > 0$</td><td>椭圆</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi - F\Delta = 0$</td><td>点</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi - F\Delta < 0$</td><td>无</td></tr>
</table>

表 1: 图像类型及相应的参数的条件

该通式能表示点、（重合）直线、平行直线、相交直线、椭圆、抛物线、双曲线这些种类的图像，并且能表示出平面内任意位置、任意方向、任意形状（例如开口大小）的上述种类的图像。

## 3 结论

研究三类圆锥曲线，根据其图像特点得到归纳式 $x^2 + y^2 = (kx + b)^2$，根据代数特点得到通式 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$，分析参数并得到圆锥曲线（二次曲线）的图像随参数的变化特点。