Teorema di Cayley-Hamilton, forma canonica e triangolazioni.

Versione del 2 Maggio 2011

Argomenti scelti sulla triangolazione di matrici, il teorema di Cayley-Hamilton e sulla forma canonica delle matrici 3×3 per i corsi di Geometria 1 e Teoria dei Gruppi.

Testo di riferimento consigliato per questi argomenti:

S.Lang, *Algebra Lineare*, Boringhieri, Torino 1989

Indice

1 Triangolazione di matrici. **2**

2 Teorema di Cayley-Hamilton. **3**

3 Matrici nilpotenti. **6**

4 Forma canonica delle matrici 3×3. **8**

5 Esempi. **12**

1 Triangolazione di matrici.

In questa sezione dimostriamo per le matrici complesse (e per le matrici reali *con tutti gli autovalori reali)* l'esistenza di una base ortonormale in cui la matrice assume una forma triangolare. Ovvero che le matrici in ipotesi sono triangolabili.

Teorema 1.1 *Sia A una matrice complessa, allora esiste in $\mathbb{C}^n$ una base ortonormale in cui la matrice assume una forma triangolare.*

Prova. La dimostrazione procede per induzione. Consideriamo in $\mathbb{C}^n$ un prodotto hermitiano. Il caso delle matrici 1×1 è banale. Consideriamo ora una matrice **complessa** $n \times n$. Esiste sicuramente almeno un autovalore e un autovettore:

$$Av_1 = \lambda v_1$$

E possiamo prendere $\|v_1\| = 1$. Sia E il sottospazio generato da v_1 e consideriamo il suo complemento ortogonale F :

$$\mathbb{C}^n = E \oplus F$$

Per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ si ha la scomposizione **unica**:

$$Av = kv_1 + w$$

dove $w \in F$ e k dipendono da v. Definiamo ora una applicazione lineare $A_1 : \mathbb{C}^n \to F$:

$$A_1(v) = w$$

La restrizione di A_1 al sottospazio F è una matrice $n-1 \times n-1$ che per l'ipotesi induttiva è **triangolabile**, esiste cioè una base ortonormale $\{v_2, v_3, ...v_n\}$ di F in cui:

$$\begin{aligned}
A_1(v_2) &= a_{22}v_2 \\
A_1(v_3) &= a_{23}v_2 + a_{33}v_3 \\
&....... \\
A_1(v_n) &= a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + ... + a_{nn}v_n
\end{aligned}$$

Aggiungendo il vettore v_1 abbiamo allora una base ortogonale di tutto $\mathbb{C}^n$ che triangolarizza la matrice $n \times n$ da cui siamo partiti. Otteniamo infatti, dalla scomposizione unica $Av = kv_1 + w$ applicata ai vettori della base:

$$\begin{aligned}
A(v_1) &= \lambda v_1 \\
A(v_2) &= k_1 v_1 + a_{22}v_2 \\
A(v_3) &= k_2 v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3 \\
&....... \\
A_1(v_n) &= k_n v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + ... + a_{nn}v_n
\end{aligned}$$

■

Osservazione 1.1 *La forma triangolare è quindi:*

$$\begin{pmatrix} \lambda & k_1 & k_2 & ... & k_n \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice sono gli elementi della diagonale, perchè il polinomio caratteristico di una matrice triangolare è:

$$P_A(x) = (\lambda - x)(a_{22} - x) ... (a_{nn} - x)$$

Osservazione 1.2 *La dimostrazione non fornisce un procedimento costruttivo della base che triangolarizza, vedremo in seguito (forma canonica di Jordan) esplicitamente almeno per le matrici* 3×3, *un procedimento costruttivo.*

Osservazione 1.3 *La dimostrazione ovviamente vale anche se la matrice è reale e ha* ***tutti*** *gli autovalori reali.*

2 Teorema di Cayley-Hamilton.

In questa sezione enunciamo e dimostriamo un risultato molto importante, il cosiddetto teorema di Cayley-Hamilton.

Generalizziamo prima ai polinomi di matrici il teorema del resto, valido per i polinomi reali o complessi. Il teorema del resto dice il resto della divisione di un polinomio $p(x)$ di grado ≥ 1 per il polinomio $(x - a)$ è $p(a)$. Ovvero:

$$p(x) = q(x)(x - a) + p(a)$$

Sia ora

$$p(x) = a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + ... + a_q$$

un polinomio di grado $q \geq 1$ e A una matrice reale o complessa.

Teorema 2.1 ***Teorema del resto.*** *Vale la seguente formula matriciale:*

$$p(x) I = Q(x)(xI - A) + p(A)$$

dove I *è la matrice identità,* $Q(x)$ *è una matrice i cui elementi sono polinomi in* x *e* $p(A)$ *è il polinomio matriciale ottenuto sostituendo la matrice* A *all'indeterminata* x *nel polinomio* $p(x)$.

Prova. Poniamo

$$p(x) I = Q(x)(xI - A) + S \tag{1}$$

Cerchiamo di determinare la matrice $Q(x)$ ponendo:

$$Q(x) = x^{q-1}R_1 + x^{q-2}R_2 + ... + R_q$$

Dove le R_i sono matrici che non dipendono da x. Sostituendo nella (1) otteniamo:

$$\left(a_0x^q + a_1x^{q-1} + ... + a_q\right) I = \left(x^{q-1}R_1 + x^{q-2}R_2 + ... + R_q\right)(xI - A) + S$$

Uguagliando i coefficienti delle potenze distinte di x otteniamo la catena di equazioni:

$$\begin{aligned} R_1 &= a_oI \\ R_2 - R_1A &= a_1I \\ ... &= ... \\ R_q - R_{q-1}A &= a_{q-1}I \\ S - R_qA &= a_qI \end{aligned}$$

Queste equazioni possono essere risolte in successione. Abbiamo quindi dimostrato l'esistenza di $Q(x)$. Moltiplichiamo ora la prima equazione per A^q, la seconda per A^{q-1}, e così via fino alla penultima che si moltiplica per A e l'ultima per I. Otteniamo allora:

$$\begin{aligned} R_1A^q &= a_oA^q \\ R_2A^{q-1} - R_1A^q &= a_1A^{q-1} \\ ... &= ... \\ R_qA - R_{q-1}A^2 &= a_{q-1}A \\ S - R_qA &= a_qI \end{aligned}$$

Sommando tutte queste equazioni otteniamo:

$$S = p(A)$$

Cioè $S = 0 \Longleftrightarrow p(A) = 0$. ∎

Teorema 2.2 ***Teorema di Cayley-Hamilton:*** *ogni matrice è radice del suo polinomio caratteristico. Ovvero*

$$p_A(A) = 0$$

Prova. Ricordiamo che

$$p_A(x) = \det(A - xI) = (-1)^n \det(xI - A)$$

Osserviamo che dalla formula dello sviluppo per righe del determinante di una matrice B si ottiene:

$$(\det B) \cdot I = \widetilde{B}^t B$$

dove $\widetilde{B}^t$ è la trasposta della matrice dei complementi algebrici.

Ponendo $B = (-1)^n \det(xI - A)$ otteniamo:

$$p_A(x)I = (-1)^n \det(xI - A) \cdot I = \widetilde{(xI - A)}^t (xI - A)$$

Per cui, applicando a questo caso il teorema precedente, otteniamo subito che $Q(x) = \widetilde{(xI - A)}^t$ e

$$S = p_A(A) = 0$$

■

Il teorema di Cayley-Hamilton ha interessanti conseguenze:

Teorema 2.3 *Sia A una matrice $n \times n$, allora A^n è combinazione lineare delle matrici $I, A, A^2, ...A^{n-1}$.*

Prova. Basta infatti scrivere il polinomio caratteristico

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_1 x^{n-1} + ... + \det A$$

E applicare Cayley-Hamilton:

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + a_1 A^{n-1} + ... + (\det A) \cdot I = 0$$

E quindi:

$$A^n = (-1)^{n+1} \left(a_1 A^{n-1} + ... + (\det A) \cdot I\right)$$

■

Osservazione 2.1 *E' anche chiaro che **ogni** potenza A^m con $m \geq n$ è combinazione lineare delle matrici $I, A, A^2, ...A^{n-1}$. Infatti basta dividere m per n, con resto r, ottenendo quindi*

$$A^m = A^{kn+r} = (A^n)^k A^r$$

e, nel prodotto a destra, basta sostituire a ogni occorrenza di A^n la sua espressione come combinazione lineare di $I, A, A^2, ...A^{n-1}$.

Teorema 2.4 *Sia A una matrice $n \times n$, invertibile, allora A^{-1} è combinazione lineare delle matrici $I, A, A^2, ...A^{n-1}$.*

Prova. Come sopra, da $(-1)^n A^n + a_1 A^{n-1} + ... + (\det A)\, I = 0$, raccogliendo A si ottiene:

$$(-1)^n A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + ... = -(\det A) \cdot A^{-1}$$

■

3 Matrici nilpotenti.

Studiamo in questo paragrafo le proprietà più elementari di una importante classe di matrici, le cosiddette matrici nilpotenti.

Definizione 3.1 *Una matrice A si dice **nilpotente** se esiste un intero m tale che $A^m = 0$*

Definizione 3.2 *Si dice **indice di nilpotenza** di una matrice nilpotente **il più piccolo intero** r **per cui** $A^r = 0$*

Osservazione 3.1 ***L'indice di nilpotenza è conservato dalla relazione di similitudine.*** *Osserviamo prima di tutto che una matrice simile a una nilpotente è anch'essa nilpotente, infatti se $A^m = 0$ e $B = M^{-1}AM$ una matrice simile ad A, abbiamo subito:*

$$B^m = M^{-1}A^m M = 0$$

Mostriamo ora che l'indice di nilpotenza si conserva. Siano infatti A una matrice con indice di nilpotenza r e $B = M^{-1}AM$ una matrice simile ad A, e indichiamo con s il suo indice di nilpotenza. Otteniamo subito

$$\begin{aligned} 0 = B^s = M^{-1}A^s M &\implies A^s = 0 \Longrightarrow r \leq s \\ 0 = A^r = MB^r M^{-1} &\implies B^r = 0 \Longrightarrow s \leq r \end{aligned}$$

Il teorema di Cayley-Hamilton fornisce una caratterizzazione delle matrici nilpotenti:

Teorema 3.1 *Una matrice $n \times n$ è nilpotente se e solo se ha come unico autovalore lo zero con molteplicità algebrica n.*

Prova. Se una matrice è nilpotente l'unico autovalore possibile è lo zero:

$$Av = \lambda v \Longrightarrow 0 = A^m v = \lambda^m v \Longrightarrow \lambda = 0$$

Viceversa se una matrice $n \times n$ ha come unico autovalore lo zero con molteplicità algebrica n il suo polinomio caratteristico è $p_A(x) = (-1)^n x^n$, per cui il teorema di Cayley-Hamilton assicura che:

$$p_A(A) = (-1)^n A^n = 0$$

■

Osservazione 3.2 *E' chiaro che l'unica matrice nilpotente diagonalizzabile è la matrice nulla. Infatti per essere diagonalizzabile l'autospazio dell'autovalore zero, cioè il nucleo della matrice, deve avere dimensione n e questo implica che il rango della matrice sia zero. Le matrici nilpotenti sono però sempre triangolarizzabili, come vedremo nella prossima sezione.*

Proseguiamo il paragrafo con alcune osservazioni sui nuclei e sulle immagini delle potenze positive di una matrice data B.

Sia B una matrice $n \times n$ e consideriamo le sue potenze positive B^m, si ha:

$$\{0\} \subseteq \ker B \subseteq \ker B^2 \subseteq \ker B^3 .... \subseteq \mathbb{C}^n$$

Infatti, ad esempio:

$$v \in \ker B \Longrightarrow Bv = 0 \Longrightarrow B\,(Bv) = 0 \Longrightarrow v \in \ker B^2$$

e così via.

Osservazione 3.3 *Se la matrice A è nilpotente la catena di inclusioni dei nuclei è finita e termina con l'uguaglianza.*

Analoga catena di inclusioni vale per le immagini:

$$\{0\} \subseteq ... \subseteq \operatorname{Im} B^3 \subseteq \operatorname{Im} B^2 \subseteq \operatorname{Im} B \subseteq \mathbb{C}^n$$

Infatti, ad esempio:

$$w \in \operatorname{Im} B^2 \Longrightarrow w = B^2 v \Longrightarrow w = B\,(Bv) \Longrightarrow w \in \operatorname{Im} B$$

e così via.

Osservazione 3.4 *Se la matrice A è nilpotente la catena di inclusioni delle immagini è finita e inizia con l'uguaglianza.*

Studiamo ora il caso particolare di matrici B tali che $B^3 = 0$. Se $B^3 = 0$ allora:

$$w = Bv \Rightarrow B^2 w = B^3 v = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} B \subseteq \ker B^2 \tag{2}$$

Se l'indice di nilpotenza di B è **due** si ha anche:

$$w = Bv \text{ e } B^2 = 0 \Rightarrow B^2 v = Bw = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} B \subseteq \ker B \Rightarrow \dim\ker B \geq \dim\operatorname{Im} B \tag{3}$$

Se invece l'indice di nilpotenza è **tre** possiamo osservare anche che:

$$w = B^2 v \text{ e } B^3 = 0 \Rightarrow B^3 v = Bw = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} B^2 \subseteq \ker B \subseteq \ker B^2 \tag{4}$$

Osservazione 3.5 *Nel caso particolare di matrici 3×3 abbiamo che se $B^2 = 0$ ma $B \neq 0$ allora il teorema delle dimensioni:*

$$\dim\ker B + \dim\operatorname{Im} B = 3$$

*e la **(3)** implicano che la dimensione di $\ker B$ sia 2, se invece $B^3 = 0$ ma $B^2 \neq 0$ ancora il teorema delle dimensioni e la **(4)** implicano che la dimensione di $\ker B^2$ sia 2.*

4 Forma canonica delle matrici 3×3.

Sia ora B una matrice 3×3 nilpotente (e allora Cayley-Hamilton implica che $B^3 = 0$). Escludendo il caso banale $B = 0$, studiamo i due casi $B^2 \neq 0$ e $B^2 = 0$.

Nel primo caso prendiamo un vettore $v \notin \ker B$ e $\notin \ker B^2$ (l'ultima osservazione del paragrafo precedente dimostra che un tale vettore esiste). Dimostriamo che i vettori v, Bv, B^2v sono indipendenti. Infatti:

$$\begin{aligned} av + bBv + cB^2v = 0 &\Longrightarrow B\left(av + bBv + cB^2v\right) = aBv + bB^2v = 0 \\ &\Longrightarrow B\left(aBv + bB^2v\right) = aB^2v = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Consideriamo ora la base costituita dai vettori:

$$\begin{aligned} v_1 &= B^2v \\ v_2 &= Bv \\ v_3 &= v \end{aligned}$$

In questa base si ha:

$$\begin{aligned} Bv_1 &= 0 \\ Bv_2 &= v_1 \\ Bv_3 &= v_2 \end{aligned}$$

Cioè la matrice B assume la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se invece $B^2 = 0$, prendiamo un vettore $u \neq 0 \in \operatorname{Im} B$, $u = Bv$, e un vettore $w \neq 0 \in \ker B$ e indipendente da u. Un tale vettore esiste sempre per l'ultima osservazione del paragrafo precedente. I vettori v, Bv, w sono indipendenti:

$$\begin{aligned} av + bBv + cw = 0 &\Longrightarrow B\left(av + bBv + cw\right) = 0 \Longrightarrow a = 0 \\ bBv + cw = 0 &\Longrightarrow b, c = 0 \end{aligned}$$

Allora nella base:

$$\begin{aligned} v_1 &= w \\ v_2 &= Bv \\ v_3 &= v \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} Bv_1 &= 0 \\ Bv_2 &= 0 \\ Bv_3 &= v_2 \end{aligned}$$

Cioè la matrice B assume la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riassumendo, abbiamo dimostrato che:

Teorema 4.1 *Sia B una matrice nilpotente 3×3 allora esiste una base in cui la matrice assume una delle tre forme canoniche (dette di Jordan)*

$$\dim \ker B = 3 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\dim \ker B = 2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\dim \ker B = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione 4.1 *Si potrebbe dimostrare che un risultato simile vale per matrici nilpotenti di qualsiasi ordine: si possono sempre mettere in una forma diagonale con zeri sulla diagonale e blocchi di elementi uno e zero appena sopra la diagonale (forma canonica di Jordan)*

Questo studio sulle matrici nilpotenti 3×3 si applica direttamente al caso delle matrici 3×3 con un solo autovalore di molteplicità algebrica 3.

Teorema 4.2 *Sia A una matrice 3×3 con un solo autovalore λ di molteplicità algebrica 3, allora esiste una base in cui la matrice assume una delle tre forme canoniche (dette di Jordan)*

$$\dim \ker (A - \lambda I) = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$\dim \ker (A - \lambda I) = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$\dim \ker (A - \lambda I) = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Prova. Per dimostrare il risultato basta osservare che il polinomio caratteristico in questo caso è $p_A(x) = (\lambda - x)^3$ e quindi si ottiene da Cayley-Hamilton che $(\lambda I - A)^3 = 0$ e applicare poi il teorema precedente alla matrice **nilpotente** $B = (A - \lambda I)$ ■

Osservazione 4.2 *Abbiamo anche ottenuto un risultato interessante: sia A una matrice 3×3 con un solo autovalore λ di molteplicità algebrica 3, allora può essere messa in forma di somma di una matrice diagonale e di una nilpotente che commutano fra di loro. Infatti basta osservare che $A = \lambda I + B$.*

Trascurando il caso banale in cui la matrice è diagonalizzabile, per studiare la forma canonica delle matrici 3×3 rimane il caso in cui la matrice ha due autovalori **distinti** di cui uno di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1.

Il suo polinomio caratteristico è quindi del tipo:

$$P_A\left(x\right) = \left(\lambda - x\right)^2 \left(\mu - x\right)$$

Poniamo $B = A - \lambda I$ e $C = A - \mu I$. Abbiamo dal teorema di Cayley-Hamilton che $B^2C = 0$ e sappiamo anche che $\dim \ker C = \dim \ker B = 1$. Ricordiamo anche che autospazi di autovalori distinti hanno intersezione ridotta al solo vettore nullo.

$$\ker B \cap \ker C = \{0\}$$

Osserviamo ora che dalle definizioni di B e C segue che BC è nilpotente:

$$B^2C = 0 \Longrightarrow B^2C^2 = \left(BC\right)^2 = 0$$

E' chiaro che nel nostro caso $BC \neq 0$. Infatti se $BC = 0 \Longrightarrow \operatorname{Im} C \subseteq \ker B$ e quindi $\dim \operatorname{Im} C \leq 1$, ma allora $\dim \operatorname{Im} C \leq 1 \Rightarrow \dim \ker C \geq 2$ contrariamente all'ipotesi $\dim \ker C = \dim \ker B = 1$.

Sia ora v tale che $BCv \neq 0$ e prendiamo $w_3 = Cv$. Prendiamo poi $w_1 = BCv \in \ker B$ (infatti $B^2Cv = 0$) e $w \in \ker C$. Osserviamo ora che $Aw = \mu w$ e quindi:

$$B^2 w = \left(A - \lambda I\right)\left(A - \lambda I\right) w = \left(A - \lambda I\right)\left(\mu - \lambda\right) w = \left(\mu - \lambda\right)^2 w \neq 0$$

I tre vettori w_i formano allora una base perchè sono indipendenti:

$$\begin{aligned}
aw_1 + bw + cw_3 = 0 \Longrightarrow B^2\left(aw_1 + bw + cw_3\right) = 0 \Rightarrow bB^2w = 0 \Rightarrow b = 0 \\
aw_1 + cw_3 = 0 \Rightarrow B\left(aw_1 + cw_3\right) = cBCv = 0 \Rightarrow c = 0 \\
aw_1 = 0 \Rightarrow a = 0
\end{aligned}$$

Allora nella base formata dai vettori:

$$\begin{aligned}
v_1 &= w \in \ker C \\
v_2 &= w_1 = BCv \in \ker B \\
v_3 &= w_3 = Cv
\end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
Av_1 &= \mu v_1 \\
Av_2 &= \lambda v_2 \\
Av_3 &= \left(B + \lambda I\right) Cv = BCv + \lambda Cv = v_2 + \lambda v_3
\end{aligned}$$

Cioè la matrice A assume la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Osservazione 4.3 *Anche in questo caso la matrice può essere messa in forma di somma di una matrice diagonale* $\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *e una matrice nilpotente* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Osservazione 4.4 *Questo risultato importante vale in realtà per matrici complesse (o matrici reali con tutti gli autovalori reali) di ogni dimensione. Infatti abbiamo visto che tali matrici sono triangolabili con gli autovalori sulla diagonale e la differenza tra la matrice e la sua diagonale è una matrice triangolare con solo zeri sulla diagonale, e quindi, avendo come autovalori il solo zero con molteplicità n, è nilpotente.*

Osservazione 4.5 *la forma canonica di Jordan è particolarmente utile quando si desidera calcolare l'esponenziale di una matrice. Infatti è facile calcolare l'esponenziale di matrici nilpotenti in forma canonica:*

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = I + A + \frac{A^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da queste formule allora si ricava subito, ad esempio:

$$e^{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^a & e^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^a & e^a & \frac{1}{2}e^a \\ 0 & e^a & e^a \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & e^b \\ 0 & 0 & e^b \end{pmatrix}$$

In generale, per calcolare l'esponenziale di una matrice A, ad esempio 3×3, si può mettere la matrice in forma canonica $C = M^{-1}AM$ mediante le basi costruite in questi appunti e poi applicare la formula:

$$e^A = e^{MCM^{-1}} = Me^C M^{-1}$$

Osservazione 4.6 $\begin{matrix} \mu & 0 & a \\ 0 & \lambda & b \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}b & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} \mu & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a}b & 1 & 0 \end{matrix}$

5 Esempi.

- Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha l'autovalore 1, allora $B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha nucleo di dimensione 1 con base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con base del nucleo $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

  La forma canonica di A è pertanto $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Infatti seguendo il procedimento indicato sopra: prendiamo un vettore v non appartenente al nucleo di B e non appartenente al nucleo di B^2 , ad esempio $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ costruiamo poi la base: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Bv = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B^2v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In questa base si ha:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ -\frac{2}{15} & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha autovalore 0, e ha nucleo di dimensione 1 con base $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con base del nucleo $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ La forma canonica di A è pertanto $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Infatti seguendo il procedimento indicato sopra: prendiamo un vettore v non appartenente al nucleo di A e non appartenente al nucleo di A^2, ad esempio $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ costruiamo poi la base: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2v = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Consideriamo ora la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gli autovalori sono 1 e 2: $A - 2I = B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - I = C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$., nullspace basis: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Verifichiamo che

$$B^2C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice non è diagonalizzabile. Costruiamo una base per metterla in forma canonica:

$v_1 = w \in \ker C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = w_1 = BCv \in \ker B$ prendiamo per esempio $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: allora $BCv = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_3 = w_3 = Cv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abbiamo allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Possiamo allora calcolare ad esempio:

$$e^{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e & 0 & 0\\ 0 & e^2 & e^2\\ 0 & 0 & e^2\end{pmatrix}$$

E allora:

$$e^{\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & 0 & 0\\ 0 & e^2 & e^2\\ 0 & 0 & e^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2\\ \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^2 & -\frac{1}{2}e^2\\ 0 & 0 & e^2\end{pmatrix}$$