Домашнее задание

1.1.36 $3A-2B$; $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & 16\end{pmatrix}$$

1.1.37 $2B-5A$; $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ -6 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 10\\ -15 & 10 & 0\end{pmatrix}$

$$2\cdot\begin{pmatrix}0 & 5 & 10\\ -15 & 10 & 0\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ -6 & 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10 & 20\\ -30 & 20 & 0\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}0 & 10 & 20\\ -30 & 20 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

1.1.38 $A-\lambda\cdot E$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & -2-\lambda\end{pmatrix}$$

1.1.39 $4A-7B$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & 3\\ 2 & 0 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 7 & -5\\ -8 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -2 & 5\end{pmatrix}$

$$4\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & 3\\ 2 & 0 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix}-7\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 7 & -5\\ -8 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -8 & 20 & 12\\ 8 & 0 & -12 & 4\\ 20 & -4 & 0 & 16\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0 & -14 & -49 & 35\\ 56 & -7 & -21 & 0\\ -28 & -14 & 14 & -35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -22 & -29 & 47\\ 64 & -7 & -33 & 4\\ -8 & -18 & 14 & -19\end{pmatrix}$$

1.1.40 $5A-3B+2C$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ -3 & 2 & 7\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 5\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}$

$$5\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ -3 & 2 & 7\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-5 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 5\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & -10 & 0\\ 15 & 25 & 5\\ -5 & 10 & 20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15 & -3 & 6\\ 9 & -6 & -21\\ -12 & 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & 6 & 2\\ 4 & 0 & 10\\ 12 & 8 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-10 & -13 & 6\\ 24 & 19 & -16\\ -17 & 10 & 23\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & 6 & 2\\ 4 & 0 & 10\\ 12 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & -7 & 8\\ 28 & 19 & -6\\ -5 & 18 & 27\end{pmatrix}$$

1.1.41 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2\\ 3\cdot 0+4\cdot 1 & 3\cdot(-1)+4\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 0\cdot 2+(-1)\cdot 4\\ 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 7 & 10\end{pmatrix}$$

1.1.42 $A=(1\ \ -2\ \ 3\ \ 0)$, $B=\mathrm{colon}(5,-3,-4,1)$

$A\cdot B=(1\ \ -2\ \ 3\ \ 0)\cdot\mathrm{colon}(5,-3,-4,1)=$

$=(1\cdot 5+(-2)\cdot(-3)+3\cdot(-4)+0\cdot 1)=(-1)$

$$B \cdot A = colon(5,-3,-4,1) \cdot (1 \ \ -2 \ \ 3 \ \ 0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot(-2) & 5\cdot 3 & 5\cdot 0 \\ -3\cdot 1 & -3\cdot(-2) & -3\cdot 3 & -3\cdot 0 \\ -4\cdot 1 & -4\cdot(-2) & -4\cdot 3 & -4\cdot 0 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot(-2) & 1\cdot 3 & 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 & 0 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ -4 & 8 & -12 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>1.1.43</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = colon(-4,-3,5)$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot colon(-4,-3,5) = \begin{pmatrix} 2\cdot(-4)+0\cdot(-3)+3\cdot 5 \\ -1\cdot(-4)+2\cdot(-3)+1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$B_{3\times 1} \cdot A_{2\times 3}$ – не существует.

<u>1.1.44</u> $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3\cdot 2+5\cdot(-3)+(-1)\cdot 5 & 3\cdot 4+5\cdot 0+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 2+(-2)\cdot(-3)+0\cdot 5 & 2\cdot 4+(-2)\cdot 0+0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3+4\cdot 2 & 2\cdot 5+4\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+4\cdot 0 \\ -3\cdot 3+0\cdot 2 & -3\cdot 5+0\cdot(-2) & -3\cdot(-1)+0\cdot 0 \\ 5\cdot 3+1\cdot 2 & 5\cdot 5+1\cdot(-2) & 5\cdot(-1)+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$$

<u>1.1.45</u> $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot1+3\cdot0+1\cdot4 & -2\cdot(-2)+3\cdot(-3)+1\cdot(-4) & -2\cdot(-3)+3\cdot1+1\cdot5 \\ 5\cdot1+4\cdot0+0\cdot4 & 5\cdot(-2)+4\cdot(-3)+0\cdot(-4) & 5\cdot(-3)+4\cdot1+0\cdot5 \\ 2\cdot1+(-1)\cdot0+(-5)\cdot4 & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-3)+(-5)\cdot(-4) & 2\cdot(-3)+(-1)\cdot1+(-5)\cdot5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & -11 \\ -18 & 19 & -32 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+(-2)\cdot5+(-3)\cdot2 & 1\cdot3+(-2)\cdot4+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot1+(-2)\cdot0+(-3)\cdot(-5) \\ 0\cdot(-2)+(-3)\cdot5+1\cdot2 & 0\cdot3+(-3)\cdot4+1\cdot(-1) & 0\cdot1+(-3)\cdot0+1\cdot(-5) \\ 4\cdot(-2)+(-4)\cdot5+5\cdot2 & 4\cdot3+(-4)\cdot4+5\cdot(-1) & 4\cdot1+(-4)\cdot0+5\cdot(-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & -2 & 16 \\ -13 & -13 & -5 \\ -18 & -9 & -21 \end{pmatrix}$$

<u>1.1.46</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$(AB)\cdot C = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot2+(-1)\cdot(-3) & 1\cdot0+(-1)\cdot1 \\ -1\cdot2+1\cdot(-3) & -1\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot3+(-1)\cdot2 & 5\cdot(-1)+(-1)\cdot3 \\ -5\cdot3+1\cdot2 & -5\cdot(-1)+1\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot(BC) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\cdot 3+0\cdot 2 & 2\cdot(-1)+0\cdot 3\\ -3\cdot 3+1\cdot 2 & -3\cdot(-1)+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & -2\\ -7 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 6+(-1)\cdot(-7) & 1\cdot(-2)+(-1)\cdot 6\\ -1\cdot 6+1\cdot(-7) & -1\cdot(-2)+1\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -8\\ -13 & 8\end{pmatrix}$$

1.1.47 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

$$(AB)\cdot C=\left(\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-5)+3\cdot 2 & 1\cdot 3+3\cdot(-1)\\ 2\cdot(-5)+5\cdot 2 & 2\cdot 3+5\cdot(-1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\right)=\text{[по св-ву ассоц]}=$$

$$=(A\cdot B)\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

1.1.48 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$

$$(A\cdot B)\cdot C=\left(\begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-3)+(-3)\cdot(-2) & 1\cdot 2+(-3)\cdot 5 & 1\cdot 0+(-3)\cdot(-1)\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -13 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\left(3\cdot(-2)+(-13)\cdot 0+3\cdot 3 \quad 3\cdot 4+(-13)\cdot 2+3\cdot(-1) \quad 3\cdot(-3)+(-13)\cdot 5+3\cdot 2 \quad 3\cdot 0+(-13)\cdot(-2)+\right.$$

$$\left.+3\cdot 4\right)=\begin{pmatrix}3 & -17 & -68 & 38\end{pmatrix}$$

$A\cdot(BC) = [\text{асс-ть}] = (AB)\cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -17 & -68 & 38 \end{pmatrix}$

<u>1.1.49</u> $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$(AB)\cdot C = \left(\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5\cdot 3 + 0\cdot(-2) + 3\cdot 4 & -5\cdot 0 + 0\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 3 + 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 & 4\cdot 0 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 3 \\ 2\cdot 3 + (-3)\cdot(-2) + 2\cdot 4 & 2\cdot 0 + (-3)\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ 1\cdot 3 + 5\cdot(-2) + 3\cdot 4 & 1\cdot 0 + 5\cdot 1 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -2 \\ 20 & 3 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot(-2) + 9\cdot 3 \\ 6\cdot(-2) + (-2)\cdot 3 \\ 20\cdot(-2) + 3\cdot 3 \\ 5\cdot(-2) + 14\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot(BC) = [\text{асс-ть}] = (AB)\cdot C = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$$

<u>1.1.50</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = ?$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Д-ть, что $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8)

1) $n=1$: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

2) при n – истинно, проверим при $n+1$:

$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+n\cdot0 & 1\cdot1+n\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&n+1\\0&1\end{pmatrix}$ +

3) Значит, $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

1.1.51 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $A^n=?$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{(*)}{\cdot}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot0+1\cdot0\\0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0\\0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Д-ть, что $A^n=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

1) при $n=1$: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

2) при n – истинно, проверим при $n+1$:

$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, т.к. (*) +

3) Значит, $A^n=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

1.1.52 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $A^n=?$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1\cdot0+0 & 0\cdot1+1\cdot0+0 & 0+1\cdot1+0\\0+0+1\cdot0 & 0\cdot1+0+1\cdot0 & 0+0\cdot1+1\cdot0\\0+0+0 & 0\cdot1+0+0 & 0+0\cdot1+0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot0+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0\\0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0\\0\cdot0+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \boxed{0\cdot B=0} \Rightarrow$$ все дальнейшие матрицы $=0$

Значит: $n=1$: $A^1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$n=2$: $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$n\geqslant3$: $A^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$

1.1.53 $f(x)=2x^2-3x+1,\ A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$x^2=A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$f(A)=2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+1\cdot E=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&0\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&6\end{pmatrix}$$

1.1.54 $f(x)=3x^2+2x+5,\ A=\begin{pmatrix}2&-3\\0&4\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&-3\\0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+(-3)\cdot0&2\cdot(-3)+(-3)\cdot4\\0\cdot2+4\cdot0&0\cdot(-3)+4\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-18\\0&16\end{pmatrix}$$

$$f(A)=3\cdot\begin{pmatrix}4&-18\\0&16\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\0&4\end{pmatrix}+5\cdot E=$$

$$=\begin{pmatrix}12&-54\\0&48\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-6\\0&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&-60\\0&56\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&-60\\0&61\end{pmatrix}$$

1.1.55 $f(x)=2x^3-x^2+3,\ A=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot(-1)+2\cdot(-3)&-1\cdot2+2\cdot1\\-3\cdot(-1)+1\cdot(-3)&-3\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0\\0&-5\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-5&0\\0&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\cdot(-1)+0\cdot(-3)&-5\cdot2+0\cdot1\\0\cdot(-1)+(-5)\cdot(-3)&0\cdot2+(-5)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-10\\15&-5\end{pmatrix}$$

$$f(A)=2\cdot\begin{pmatrix}5&-10\\15&-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&0\\0&-5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-20\\30&-10\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-20\\30&-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&-20\\30&-2\end{pmatrix}$$

1.1.56 $f(x)=4x^3-2x^2+3x-2,\ A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot(-2)+3\cdot 1 & -2\cdot 3+3\cdot 0\\ 1\cdot(-2)+0\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cdot(-2)+(-6)\cdot 1 & 7\cdot 3+(-6)\cdot 0\\ -2\cdot(-2)+3\cdot 1 & -2\cdot 3+3\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-20 & 21\\ 7 & -6\end{pmatrix}$$

$$f(A)=4\cdot\begin{pmatrix}-20 & 21\\ 7 & -6\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}7 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-80 & 84\\ 28 & -24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-14 & 12\\ 4 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-94 & 96\\ 32 & -30\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-100 & 105\\ 35 & -30\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-102 & 105\\ 35 & -32\end{pmatrix}$$

1.1.57 $f(x)=x^2-3x+2,\ A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-3)\cdot 0+0\cdot 3 & 1\cdot(-3)+(-3)\cdot 2+0\cdot(-3) & 1\cdot 0+(-3)\cdot 1+0\cdot 2\\ 0\cdot 1+2\cdot 0+1\cdot 3 & 0\cdot(-3)+2\cdot 2+1\cdot(-3) & 0\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot 2\\ 3\cdot 1+(-3)\cdot 0+2\cdot 3 & 3\cdot(-3)+(-3)\cdot 2+2\cdot(-3) & 3\cdot 0+(-3)\cdot 1+2\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 9 & -21 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(A)=\begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 9 & -21 & 1 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 9 & -21 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 0 & -6 & -3 \\ -9 & 9 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

1.1.58 $f(x)=3x^2+5x-2$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot2+3\cdot0+(-3)\cdot5 & 2\cdot3+3\cdot1+(-3)\cdot(-2) & 2\cdot(-3)+3\cdot4+(-3)\cdot1 \\ 0\cdot2+1\cdot0+4\cdot5 & 0\cdot3+1\cdot1+4\cdot(-2) & 0\cdot(-3)+1\cdot4+4\cdot1 \\ 5\cdot2+(-2)\cdot0+1\cdot5 & 5\cdot3+(-2)\cdot1+1\cdot(-2) & 5\cdot(-3)+(-2)\cdot4+1\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -11 & 15 & 3 \\ 20 & -7 & 8 \\ 15 & 11 & -22 \end{pmatrix}$$

$$f(A)=3\cdot\begin{pmatrix} -11 & 15 & 3 \\ 20 & -7 & 8 \\ 15 & 11 & -22 \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -33 & 45 & 9 \\ 60 & -21 & 24 \\ 45 & 33 & -66 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & 15 & -15 \\ 0 & 5 & 20 \\ 25 & -10 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -23 & 60 & -6 \\ 60 & -16 & 44 \\ 70 & 23 & -61 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -25 & 60 & -6 \\ 60 & -18 & 44 \\ 70 & 23 & -63 \end{pmatrix}$$

1.1.59 $f(x)=x^3-x^2+5,\ A=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot3+1\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot(-1)+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot2\\ 3\cdot1+(-1)\cdot3+0\cdot0 & 3\cdot0+(-1)\cdot(-1)+0\cdot0 & 3\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot2\\ 0\cdot1+0\cdot3+2\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot(-1)+2\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot3+3\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot(-1)+3\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0+3\cdot2\\ 0\cdot1+1\cdot3+3\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot(-1)+3\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot0+3\cdot2\\ 0\cdot1+0\cdot3+4\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot(-1)+4\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+4\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&7\\3&-1&6\\0&0&8\end{pmatrix}$$

$$f(A)=\begin{pmatrix}1&0&7\\3&-1&6\\0&0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&4\\3&-2&3\\0&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&4\\3&3&3\\0&0&9\end{pmatrix}$$

1.1.60 $f(x)=2x^3-x^2+3x-2$, $A=\begin{pmatrix}2&-3&4\\0&5&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&-3&4\\0&5&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3&4\\0&5&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot2+(-3)\cdot0+4\cdot(-2) & 2\cdot(-3)+(-3)\cdot5+4\cdot(-1) & 2\cdot4+(-3)\cdot(-1)+4\cdot3\\ 0\cdot2+5\cdot0+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot(-3)+5\cdot5+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot4+5\cdot(-1)+(-1)\cdot3\\ -2\cdot2+(-1)\cdot0+3\cdot(-2) & -2\cdot(-3)+(-1)\cdot5+3\cdot(-1) & -2\cdot4+(-1)\cdot(-1)+3\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4&-25&23\\2&26&-8\\-10&-2&2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-4&-25&23\\2&26&-8\\-10&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3&4\\0&5&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4\cdot2+(-25)\cdot0+23\cdot(-2) & -4\cdot(-3)+(-25)\cdot5+23\cdot(-1) & -4\cdot4+(-25)\cdot(-1)+23\cdot3\\ 2\cdot2+26\cdot0+(-8)\cdot(-2) & 2\cdot(-3)+26\cdot5+(-8)\cdot(-1) & 2\cdot4+26\cdot(-1)+(-8)\cdot3\\ -10\cdot2+(-2)\cdot0+2\cdot(-2) & -10\cdot(-3)+(-2)\cdot5+2\cdot(-1) & -10\cdot4+(-2)\cdot(-1)+2\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-54&-136&78\\20&132&-42\\-24&18&-32\end{pmatrix}$$

$$f(A)=2\cdot\begin{pmatrix}-54&-136&78\\20&132&-42\\-24&18&-32\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}-4&-25&23\\2&26&-8\\-10&-2&2\end{pmatrix}+3\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}2&-3&4\\0&5&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-108&-272&156\\40&264&-84\\-48&36&-64\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 4 & 25 & -23 \\ -2 & -26 & 8 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 0 & 15 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -104 & -247 & 133 \\ 38 & 238 & -76 \\ -38 & 38 & -66 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 0 & 15 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -98 & -256 & 145 \\ 38 & 253 & -79 \\ -44 & 35 & -57 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 & -256 & 145 \\ 38 & 251 & -79 \\ -44 & 35 & -59 \end{pmatrix}$$

<u>1.1.61</u> $A = (1 \;\; 2 \;\; 3)$, $B = colon(4, 5, 6)$

$A_{1\times3} \cdot B_{3\times1} = C_{1\times1}$

$B_{3\times1} \cdot A_{1\times3} = C'_{3\times3}$

Матрица $1\times1 \neq$ матрице $3\times3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не коммутируют

<u>1.1.62</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$(*)\left\{\begin{array}{l} \exists\, A \cdot B = C \Rightarrow \text{эл-т} = c_{ij} \\ \;\; B \cdot A = C' \Rightarrow \text{эл-т} = c'_{ij} \\ \exists\, AB = BA \Rightarrow \forall i,j : c_{ij} = c'_{ij} \end{array}\right.$$

$\measuredangle\, c_{11}$ и c'_{11}:

$c_{11} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 = -5 + 4 = -1$ из (*)

$\Rightarrow$

$c'_{11} = -5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = -5 + 9 = 4$

$\Rightarrow AB \neq BA \Rightarrow$ не коммутируют

1.1.63 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\measuredangle\ c_{11}$ и c'_{11}:

$c_{11} = 2\cdot 0 + (-3)\cdot(-4) = 12$ из (*) $\Rightarrow$

$c'_{11} = 0\cdot 2 + (-2)\cdot 4 = -8$

$\Rightarrow AB \neq BA \Rightarrow$ не коммутируют

1.1.64 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

$\measuredangle\ c_{21}$ и c'_{21}:

$c_{21} = 3\cdot(-2) + 2\cdot(-3) + 5\cdot(-4) = -32$ из (*) $\Rightarrow$

$c'_{21} = -3\cdot 2 + (-2)\cdot 3 + 5\cdot 4 = 8$

$\Rightarrow AB \neq BA \Rightarrow$ не коммутируют

1.1.65 $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\cdot b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\cdot c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta\cdot d \end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix} a\cdot\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\cdot\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\cdot\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\cdot\delta \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha\cdot a &= a\cdot\alpha \\ \beta\cdot b &= b\cdot\beta \\ \gamma\cdot c &= c\cdot\gamma \\ \delta\cdot d &= d\cdot\delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\cdot B = B\cdot A \Rightarrow \text{коммутируют}$$

1.1.66 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -4 & 5 & -6\\ -7 & 8 & -9\end{pmatrix}$

$\not\exists\ C_{11}$ и C'_{11}:

$C_{11}=1\cdot(-1)+2\cdot(-4)+3\cdot(-7)=-30$ из (*) $\Rightarrow$

$C'_{11}=-1\cdot1+2\cdot4+(-3)\cdot7=-14$

$\Rightarrow AB\neq BA \Rightarrow$ не коммутируют.

1.1.67 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 5 & -6 & 7 & 8\\ -9 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & 5 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 0 & -9\\ 8 & 7 & -6 & 5\\ 4 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$\not\exists\ C_{11}$ и C'_{11}:

$C_{11}=1\cdot(-6)+2\cdot2+(-3)\cdot8+4\cdot4=-10$ из (*) $\Rightarrow$

$C'_{11}=-6\cdot1+5\cdot5+4\cdot(-9)+3\cdot3=-8$

$\Rightarrow AB=BA \Rightarrow$ не коммутируют

1.1.68 $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -6 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 6 & -3 & -3\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & -6 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 6 & -3 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot7+7\cdot(-5)+3\cdot6 & 2\cdot(-6)+7\cdot3+3\cdot(-3) & 2\cdot1+7\cdot1+3\cdot(-3)\\ 3\cdot7+9\cdot(-5)+4\cdot6 & 3\cdot(-6)+9\cdot3+4\cdot(-3) & 3\cdot1+9\cdot1+4\cdot(-3)\\ 1\cdot7+5\cdot(-5)+3\cdot6 & 1\cdot(-6)+5\cdot3+3\cdot(-3) & 1\cdot1+5\cdot1+3\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 7\cdot 2+(-6)\cdot 3+1\cdot 1 & 7\cdot 7+(-6)\cdot 9+1\cdot 5 & 7\cdot 3+(-6)\cdot 4+1\cdot 3 \\ -5\cdot 2+3\cdot 3+1\cdot 1 & -5\cdot 7+3\cdot 9+1\cdot 5 & -5\cdot 3+3\cdot 4+1\cdot 3 \\ 6\cdot 2+(-3)\cdot 3+(-3)\cdot 1 & 6\cdot 7+(-3)\cdot 9+(-3)\cdot 5 & 6\cdot 3+(-3)\cdot 4+(-3)\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Значит, $AB = BA \Rightarrow$ коммутируют.

1.1.69 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1.1.70 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

1.1.71 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^T=\text{colon}(1,2,3,4)$

1.1.72 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 4 \\ 3\cdot 1+4\cdot 2 & 3\cdot 3+4\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 2+3\cdot 4 \\ 2\cdot 1+4\cdot 3 & 2\cdot 2+4\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$$

1.1.73 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $A^T = colon(1,2,3,4)$

$A\cdot A^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot colon(1,2,3,4) = (30)$

$A^T\cdot A = colon(1,2,3,4)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1 & 1\cdot2 & 1\cdot3 & 1\cdot4\\ 2\cdot1 & 2\cdot2 & 2\cdot3 & 2\cdot4\\ 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot3 & 3\cdot4\\ 4\cdot1 & 4\cdot2 & 4\cdot3 & 4\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\\ 4 & 8 & 12 & 16\end{pmatrix}$$

1.1.74 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -7\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -2 & 5 & 1\\ 0 & -7 & 2\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -7\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -2 & 5 & 1\\ 0 & -7 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-2)\cdot(-2)+0\cdot0 & 1\cdot3+(-2)\cdot5+0\cdot(-7) & 1\cdot(-4)+(-2)\cdot1+0\cdot2\\ 3\cdot1+5\cdot(-2)+(-7)\cdot0 & 3\cdot3+5\cdot5+(-7)\cdot(-7) & 3\cdot(-4)+5\cdot1+(-7)\cdot2\\ -4\cdot1+1\cdot(-2)+2\cdot0 & -4\cdot3+1\cdot5+2\cdot(-7) & -4\cdot(-4)+1\cdot1+2\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & -7 & -6\\ -7 & 83 & -21\\ -6 & -21 & 21\end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -2 & 5 & 1\\ 0 & -7 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -7\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot3+(-4)\cdot(-4) & 1\cdot(-2)+3\cdot5+(-4)\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot(-7)+(-4)\cdot2\\ -2\cdot1+5\cdot3+1\cdot(-4) & -2\cdot(-2)+5\cdot5+1\cdot1 & -2\cdot0+5\cdot(-7)+1\cdot2\\ 0\cdot1+(-7)\cdot3+2\cdot(-4) & 0\cdot(-2)+(-7)\cdot5+2\cdot1 & 0\cdot0+(-7)\cdot(-7)+2\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}26 & 9 & -29\\ 9 & 30 & -33\\ -29 & -33 & 53\end{pmatrix}$$

1.1.75 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

$A=A^T \Rightarrow A\cdot A^T=A^T\cdot A$

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&25\end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&25\end{pmatrix}$$

1.1.76 $A=\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&2&0\\5&0&0\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}0&0&5\\0&2&0\\-3&0&0\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&2&0\\5&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&5\\0&2&0\\-3&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot0+0\cdot0+(-3)\cdot(-3) & 0\cdot0+0\cdot2+(-3)\cdot0 & 0\cdot5+0\cdot0+(-3)\cdot0\\ 0\cdot0+2\cdot0+0\cdot(-3) & 0\cdot0+2\cdot2+0\cdot0 & 0\cdot5+2\cdot0+0\cdot0\\ 5\cdot0+0\cdot0+0\cdot(-3) & 5\cdot0+0\cdot2+0\cdot0 & 5\cdot5+0\cdot0+0\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&4&0\\0&0&25\end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&5\\0&2&0\\-3&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&2&0\\5&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot0+0\cdot0+5\cdot5 & 0\cdot0+0\cdot2+5\cdot0 & 0\cdot(-3)+0\cdot0+5\cdot0\\ 0\cdot0+2\cdot0+0\cdot5 & 0\cdot0+2\cdot2+0\cdot0 & 0\cdot(-3)+2\cdot0+0\cdot0\\ -3\cdot0+0\cdot0+0\cdot5 & -3\cdot0+0\cdot2+0\cdot0 & -3\cdot(-3)+0\cdot0+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

1.1.77 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6 & 1\cdot7+2\cdot8+3\cdot9\\4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3 & 4\cdot4+5\cdot5+6\cdot6 & 4\cdot7+5\cdot8+6\cdot9\\7\cdot1+8\cdot2+9\cdot3 & 7\cdot4+8\cdot5+9\cdot6 & 7\cdot7+8\cdot8+9\cdot9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}14&32&50\\32&77&122\\50&122&194\end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+4\cdot4+7\cdot7 & 1\cdot2+4\cdot5+7\cdot8 & 1\cdot3+4\cdot6+7\cdot9\\2\cdot1+5\cdot4+8\cdot7 & 2\cdot2+5\cdot5+8\cdot8 & 2\cdot3+5\cdot6+8\cdot9\\3\cdot1+6\cdot4+9\cdot7 & 3\cdot2+6\cdot5+9\cdot8 & 3\cdot3+6\cdot6+9\cdot9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}66&78&90\\78&93&108\\90&108&126\end{pmatrix}$$

1.1.78 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\text{II}-4\cdot\text{I}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\end{pmatrix}$$

<u>1.1.79</u> $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>1.1.80</u> $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-5\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -13 & -1 \\ 0 & 8 & -13 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>1.1.81</u>

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-4\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-3\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & -10 & 5 & -15 \\ 0 & -15 & -30 & 15 & -45 \\ 0 & -5 & -10 & 5 & -15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}-3\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & -10 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.82

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-3&4\\1&2&-7&0&7\\2&-1&2&3&-11\\1&0&1&-2&5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \mathrm{II}-\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-2\mathrm{I}\\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&5&-3&4\\0&3&-12&3&3\\0&1&-8&9&-19\\0&1&-4&1&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ 3\cdot\mathrm{III}-\mathrm{II}\\ 3\cdot\mathrm{IV}-\mathrm{II}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&-1&5&-3&4\\0&3&-12&3&3\\0&0&-12&24&-60\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

1.1.83

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&0&4\\3&-1&-7&-4&7\\7&-1&-15&-8&-11\\1&-1&-3&-2&5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \mathrm{II}-3\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-7\mathrm{I}\\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&0&4\\0&-4&-4&-4&-5\\0&-8&-8&-8&-39\\0&-2&-2&-2&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \mathrm{III}-2\mathrm{II}\\ 2\cdot\mathrm{IV}-\mathrm{II}\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&0&4\\0&-4&-4&-4&-5\\0&0&0&0&-29\\0&0&0&0&7\end{pmatrix}$$

1.1.84

$$A=\begin{pmatrix}1&5&3&-10\\3&-1&1&10\\2&1&-1&0\\7&10&6&-10\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \mathrm{II}-3\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-2\mathrm{I}\\ \mathrm{IV}-7\mathrm{I}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&5&3&-10\\0&-16&-8&40\\0&-9&-7&20\\0&-25&-15&60\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ 16\cdot\mathrm{III}-9\mathrm{II}\\ 16\cdot\mathrm{IV}-25\mathrm{II}\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&5&3&-10\\0&-16&-8&40\\0&0&-40&-40\\0&0&-40&-40\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \mathrm{IV}-\mathrm{III}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&5&3&-10\\0&-16&-8&40\\0&0&-40&-40\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

1.1.85

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\8&3&-6\\-4&-1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mathrm{II}-8\mathrm{I}\\ \mathrm{III}+4\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-5&2\\0&3&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ 5\cdot\mathrm{III}+3\mathrm{II}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-5&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1.1.86

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\3&-1&2&2\\2&5&-1&0\\1&-1&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mathrm{II}-3\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-2\mathrm{I}\\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-7&5&2\\0&1&1&0\\0&-3&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ 7\cdot\mathrm{III}+\mathrm{II}\\ 7\cdot\mathrm{IV}-3\cdot\mathrm{II}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-7&5&2\\0&0&12&2\\0&0&-8&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ 3\cdot\mathrm{IV}+2\cdot\mathrm{III}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-7&5&2\\0&0&12&2\\0&0&0&28\end{pmatrix}$$

1.1.87

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1&3\\3&-2&0&-4&7\\2&2&10&-1&8\\1&-2&-4&5&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mathrm{II}-3\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-2\mathrm{I}\\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1&3\\0&-2&-6&-1&-2\\0&2&6&1&2\\0&-2&-6&6&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \mathrm{IV}\leftrightarrow\mathrm{III}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1&3\\0&-2&-6&-1&-2\\0&-2&-6&6&-1\\0&2&6&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}+\mathrm{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1&3\\0&-2&-6&-1&-2\\0&0&0&7&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$