Ранг матрицы

Домашняя работа

1.3.17

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{II}+2\cdot I \\ \boxed{III}+4\cdot I \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & -5 & 5 & -25 & 35 \\ 0 & -15 & 15 & -75 & 105 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \boxed{III}-3\cdot II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & -5 & 5 & -25 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

2 ненулевых строки $\Downarrow$ $rang(A)=2$

1.3.18

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{II}-3\cdot I \\ \boxed{III}-3\cdot I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \boxed{III}+2\cdot II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -22 & 0 \end{pmatrix};$$

3 ненулевых строки $\Downarrow$ $rang(A)=3$

1.3.19

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{I \leftrightarrow \boxed{III}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{II}-5\cdot I \\ \boxed{III}-3\cdot I \\ \boxed{IV}-7\cdot I \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \boxed{III}-\frac{2}{3}\cdot II \\ \boxed{IV}-\frac{4}{3}II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \boxed{III}\leftrightarrow\boxed{IV} \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 ненулевых строки
$\Downarrow$
$rang(A)=3$

1.3.20

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III-I-II \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II-2\cdot I \\ \\ IV-2\cdot I \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV+II \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 24\cdot II-I \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 0 & 29 & -12 & 0 & -58 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 ненулевых строки
$\Downarrow$
$rang(A)=3$

1.3.21

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II-2\cdot I \\ III-I \\ IV-I \\ V-2\cdot I \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}+\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-2\cdot\mathrm{II} \\ \mathrm{V}-3\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 ненулевых строки

$\Downarrow$

$rang(A)=2$

1.3.22

$$\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \mathrm{I}\cdot\frac{1}{17} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -\frac{28}{17} & \frac{45}{17} & \frac{11}{17} & \frac{39}{17} \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-24\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-25\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-31\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{V}-42\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{-28}{17} & \frac{45}{17} & \frac{11}{17} & \frac{39}{17} \\ 0 & -37+\frac{24\cdot 28}{17} & 61-\frac{24\cdot 45}{17} & 13-\frac{24\cdot 11}{17} & 50-\frac{24\cdot 39}{17} \\ 0 & -7+\frac{25\cdot 28}{17} & 32-\frac{25\cdot 45}{17} & -18-\frac{25\cdot 11}{17} & -11-\frac{25\cdot 39}{17} \\ 0 & 12+\frac{31\cdot 28}{17} & 19-\frac{31\cdot 45}{17} & -43-\frac{31\cdot 11}{17} & -55-\frac{31\cdot 39}{17} \\ 0 & 13+\frac{42\cdot 28}{17} & 29-\frac{42\cdot 45}{17} & -55-\frac{42\cdot 11}{17} & -68-\frac{42\cdot 39}{17} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -\frac{28}{17} & \frac{45}{17} & \frac{11}{17} & \frac{39}{17} \\ 0 & \frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{86}{17} \\ 0 & \frac{581}{17} & -\frac{581}{17} & -\frac{581}{17} & -\frac{1162}{17} \\ 0 & \frac{1072}{17} & -\frac{1072}{17} & -\frac{1072}{17} & -\frac{2144}{17} \\ 0 & \frac{1397}{17} & -\frac{1397}{17} & -\frac{1397}{17} & -\frac{2794}{17} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - II\cdot\frac{581}{43} \\ IV - II\cdot\frac{1072}{43} \\ V - II\cdot\frac{1397}{43} \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -\frac{28}{17} & \frac{45}{17} & \frac{11}{17} & \frac{39}{17} \\ 0 & \frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{43}{17} & -\frac{86}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 ненулевых строки
$\Downarrow$
$rang(A)=2$

1.3.23

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $M_1^{(1)} = |a_{11}| = |3| = 3 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 1$

2) $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3) - (-1)\cdot 4 =$

$= -9 + 4 = -5 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 2$

3) $M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot 0 +$

$+ (-1)\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 3 - 2\cdot(-3)\cdot 1 - (-1)\cdot 4\cdot 0 - 3\cdot 3\cdot 3 =$

$= 0 - 3 + 24 + 6 - 27 = 0$

4) т.к M_3 - единственный, а M_4 составить нельзя (матрица 3x3) $\Rightarrow rang(A)<3$

5) $\left.\begin{matrix} rang(A) \geq 2 \\ rang(A) < 3 \end{matrix}\right| \Rightarrow rang(A)=2$

6) Значит базисный минор должен быть второго порядка $\Rightarrow M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

Ответ: $rang(A)=2$

Базисный минор: $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

1.3.24

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1) $M_1^{(1)} = |a_{11}| = |3| = 3 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 1$

2) $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)-(-1)\cdot 4 =$

$= -9+4 = -5 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 2$

3) $M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot 2 +$

$+(-1)\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 3 - 2\cdot(-3)\cdot 1 - (-1)\cdot 4\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 3 =$

$= -18-3+24+6+8-27 = -10 \Rightarrow rang(A) \geq 3$

4) M_4 - нельзя составить, т.к. всего 3 строки и 3 столбца $\Rightarrow rang(A) < 4$

5) $\left.\begin{array}{l} rang(A) \geq 3 \\ rang(A) < 4 \end{array}\right| \Rightarrow rang(A) = 3$

Ответ: $rang(A) = 3$

Базисный минор: $|A|$

1.3.25

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) $M_1^{(1)} = |a_{11}| = |2| = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 1$

2) $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 \Rightarrow rang(A) \geq 2$

3) $M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot (-5) - 5 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot (-5) =$

$= 2 - 3 - 25 - 5 + 1 + 30 = 0$

$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot (-5) - 6 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) -$

$- 2 \cdot 5 \cdot (-5) = -6 - 5 - 30 - 6 - 3 + 50 = 0$

Других окаймляющих миноров третьего порядка не существует $\Rightarrow$
$\Rightarrow rang(A) < 3$

4) $\left.\begin{matrix} rang(A) \geq 2 \\ rang(A) < 3 \end{matrix}\right| \Rightarrow rang(A) = 2$

5) Базисный минор второго порядка: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

Ответ: $rang(A) = 2$

Базисный минор: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

<u>1.3.26</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) $M_1^{(1)} = |a_{11}| = |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 1$

2) $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow rang(A) \geq 2$

3) $M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 -$
$-(-2) \cdot 0 \cdot 0 = 2 - 3 + 3 = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 3$

4) $M_4^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 =$

$= (1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-7) + 1 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot (-7) -$

$- (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 3) + ((-2) \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-7) +$

$+ (-4) \cdot 1 \cdot 3 - (-4) \cdot (-1) \cdot (-7) - 3 \cdot 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 \cdot 3) =$

$= (0 - 21 + 9 - 0 + 3 + 9) + (2 - 21 - 12 + 28 - 3 + 6) =$

$= 0 + 0 = 0$

$M_4^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -7 & 3 & -3 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \\ -7 & 3 & -3 \end{vmatrix} - 0 =$

$= (0 + 7 - 27 - 0 - 9 - 3) + (-6 + 63 + 12 - 28 + 9 - 18) =$

$= -32 + 32 = 0$

Других окаймляющих миноров четвертого порядка не существует $\Rightarrow$

$\Rightarrow rang(A) < 4$

5) $\left.\begin{matrix} rang(A) \geqslant 3 \\ rang(A) < 4 \end{matrix}\right| \Rightarrow rang(A) = 3$

6) Базисный минор третьего порядка: $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

Ответ: $rang(A) = 3$

Базисный минор $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

<u>1.3.27</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $M_1^{(1)} = |a_{11}| = |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geqslant 1$

2) $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow rang(A) \geqslant 2$

3) $M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) +$

$+ (-2) \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot$

$\cdot (-1) \cdot (-2) = -1 + 6 - 4 - 3 - 4 - 2 = -8 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geqslant 3$

4) $$M_4^{(1)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(8+2-30+8+10+6)+(4-4+15-4-12+5)-$$

$$-(-2-8+10+2-8+10)-(1-12+4+3+4+4)=$$

$$=4+4-4-4=0$$

$$M_4^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$=(-8-4+45-12-6-20)+(-4+8-15+4+12-10)-$$

$$-(2+12-10-2+8-15)-(-2+18-4-3-8-6)=$$

$$=-5-5+5+5=0$$

Других окаймляющих миноров четвертого порядка не существует =>

$\Rightarrow rang(A)<4$

5) $$\left.\begin{matrix} rang(A)\geqslant 3 \\ rang(A)<4 \end{matrix}\right| \Rightarrow rang(A)=3$$

6) Базисный минор третьего порядка: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

Ответ: $rang(A)=3$

Базисный минор $M_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

1.3.28

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

1) $M_1^{(1)}=|a_{11}|=|2|=2\neq 0 \Rightarrow rang(A)\geq 1$

2) $M_2^{(1)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)-1\cdot 1=-3\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow rang(A)\geq 2$

3) $M_3^{(1)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}=6+3-3-3+3-6=0$

$M_3^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}=6+3-3-3+3-6=0$

$M_3^{(3)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-8-6+3+3+12-4=0$

$M_3^{(4)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix}=10+4-5-4+5-10=0$

$$M_3^{(5)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 10+4-5-4+5-10=0$$

$$M_3^{(6)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -14-8+5+4-7+20=0$$

Других окаймляющих миноров третьего порядка не существует =>

$\Rightarrow rang(A) < 3$

4) $\left.\begin{matrix} rang(A) \geq 2 \\ rang(A) < 3 \end{matrix}\right| \Rightarrow rang(A) = 2$

5) Базисный минор второго порядка: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

Ответ: $rang(A) = 2$

Базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

1.3.29

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III \leftrightarrow IV \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - 2 \cdot I \\ III - I \\ IV - 3 \cdot I \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - \frac{1}{3} \cdot II \\ IV - II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - 6 \cdot III \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

Если четвёртая строка будет нулевой строкой, то rang(A) = 3. Найдём значения „λ" такие что:

$\lambda - 3 = 0$; $\lambda = 3$

Значит $\lambda = 3 \Rightarrow rang(A) = 3$

Если четвёртая строка не является нулевой, то rang(A) = 4.

т.е. при $\lambda \neq 3$, rang(A) = 4

Ответ: при $\lambda = 3$: rang(A) = 3

при $\lambda \neq 3$: rang(A) = 4

1.3.30

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{II} - \lambda \cdot I \\ \boxed{III} - 3 \cdot I \\ \boxed{IV} - 2 \cdot I \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{pmatrix} \boxed{II} \leftrightarrow \boxed{IV} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \end{pmatrix} \boxed{III} - \frac{5}{3} \cdot \boxed{II} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \end{pmatrix} \text{III} \leftrightarrow \text{IV} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 12\cdot\text{III}+(4-7\lambda)\cdot\text{II} \sim$$

$a_{32}=12\cdot(4-7\lambda)+(4-7\lambda)\cdot(-12)=0$

$a_{33}=12\cdot(10-17\lambda)+(4-7\lambda)\cdot(-30)=120-204\lambda-120+$

$+210\lambda=6\lambda$

$a_{34}=12\cdot(1-3\lambda)+(4-7\lambda)\cdot(-3)=12-36\lambda-12+21\lambda=$

$=-15\lambda$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 0 & 0 & 6\lambda & -15\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если третья строка будет нулевой, то $rang(A)=2$, Найдём „λ" такие что:

$$\begin{cases} 6\lambda=0 \\ -15\lambda=0 \end{cases}$$

Значит $\lambda=0 \Rightarrow$ При $\lambda=0$, $rang(A)=2$

Если третья строка не является нулевой, то $rang(A)=3$

т.е. при $\lambda \neq 0$, $rang(A)=3$

Ответ: при $\lambda = 0$: $rang(A)=2$

при $\lambda \neq 0$: $rang(A)=3$

1.3.31

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - I \\ III - \lambda \cdot I \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix}_{III+II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

Если вторая и третья строки будут нулевыми, то $rang(A)=1$. Найдём значения „λ" такие что:

$$\begin{cases} \lambda-1=0 \\ 1-\lambda=0 \\ \lambda-\lambda^2=0 \\ 2-\lambda-\lambda^2=0 \\ 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda-1=0 \\ -\lambda+1=0 \\ \lambda(1-\lambda)=0 \\ (1-\lambda)(\lambda+2)=0 \\ (1+\lambda)(1-\lambda^2)=0 \end{cases}$$

Значит $\lambda=1 \Rightarrow$ при $\lambda=1$, $rang(A)=1$

Если вторая строка не нулевая, а третья нулевая, то ~~то~~ $rang(A)=2$.

Найдём значения „λ" такие, что:

$$\begin{cases} \lambda-1\neq 0 \\ 1-\lambda\neq 0 \\ \lambda-\lambda^2\neq 0 \\ 2-\lambda-\lambda^2=0 \\ 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda-1\neq 0 \\ 1-\lambda\neq 0 \\ \lambda-\lambda^2\neq 0 \\ (1-\lambda)(\lambda+2)=0 \\ (1+\lambda)(1-\lambda^2)=0 \end{cases}$$

Значит таких λ не существует $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не существует λ при которых

$rang(A)=2$.

т.е. при $\lambda\neq 1$, $rang(A)=3$.

Ответ: при $\lambda=1$: $rang(A)=1$

при $\lambda\neq 1$: $rang(A)=3$