Системы линейных алгебраических уравнений.

2.1.32

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{array}\right)_{\text{II}-2\text{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} r(A)=1 \\ r(A|B)=2 \end{array}\right| \Rightarrow r(A) < r(A|B) \Rightarrow$$ сист. несовместна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ решений нет.

Ответ: система несовместна, решений нет. ■

2.1.33

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \end{array}\right)_{\text{II}-2\cdot\text{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 1 \Rightarrow$ сист. совместна $\Big|$ $\Rightarrow$ сист. неопредел.

$n = 2 \quad \Rightarrow r < n$

$r = 1 \Rightarrow$ одна гл. перемен.;

$n-r=2-1=1 \Rightarrow$ одна своб. перемен.

$|a_{11}|=|3|=3\neq 0 \Rightarrow x$ - гл. перем

y - своб. перем.

$3x+2y=5$

$x=\frac{5-2y}{3}$

$\exists\, y=t$, тогда $x=\frac{5-2t}{3}$

$\Rightarrow$ общ. реш.: $\left(\frac{5-2t}{3};t\right)$

$\exists\, t=1$, тогда: $(1;1)$ - частное решение

Ответ: сист. совм., неопределенна

Общ. реш.: $\left(\frac{5-2t}{3};t\right)$

Частн. реш.: $(1;1)$ ■

2.1.34

$$\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ -2x_1+3x_2=0 \\ -2x_1-4x_2=1 \end{cases}$$

□

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \text{II}+2\text{I} \\ \text{III}+2\text{I}\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

$r(A)=2$
$r(A|B)=3$ $\Big|$ $\Rightarrow r(A)<r(A|B) \Rightarrow$ сист. несовместна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ решений нет

Ответ: система несовместна,

решений нет.

2.1.35

$$\begin{cases} x-\sqrt{3}y=1 \\ \sqrt{3}x-3y=\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x+y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/3 & 1 & -\sqrt{3}/3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ II-\sqrt{3}\,I \\ \sqrt{3}\,III+I \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=1 \Rightarrow$ сист. совм.
$n=2 \Rightarrow r<n$ $\Big|$ $\Rightarrow$ сист. неопред.

$r=1 \Rightarrow$ одна гл. перем.

$n-r=2-1=1 \Rightarrow$ одна своб. перем.

$|a_{11}|=|1|=1\neq 0 \Rightarrow$ x - гл. перем.

y - своб. перем.

$x-\sqrt{3}y=1$

$x=1+\sqrt{3}y$

$\exists\, y=t$, тогда $x=1+\sqrt{3}t$

$\Rightarrow$ общ. реш.: $(1+t\sqrt{3};\ t)$

$\exists\, t=\sqrt{3}$, тогда: $(4;\ \sqrt{3})$ – частное реш.

Ответ: сист. совместна, неопределенна

Общ. реш.: $(1+t\sqrt{3};\ t)$

Частн. реш.: $(4;\ \sqrt{3})$ ■

2.1.36

$$\begin{cases} 3x-y=-5 \\ 2x+3y=4 \\ -x+\frac{1}{3}y=\frac{5}{3} \\ x+1{,}5y=2 \end{cases}$$

□

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & \frac{1}{3} & 5/3 \\ 1 & 1{,}5 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 3\mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\frac{1}{3}\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\frac{1}{3}\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 \Rightarrow$ сист. совм.
$n = 2 \Rightarrow r = n$
$\Rightarrow$ система определенна

$\begin{cases} 3x - y = -5 \\ 11y = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Ответ: система совм., определ.

о.р. = ч.р. : $(-1; 2)$

2.1.37

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - 4y - 3z = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3\,\underline{II} - 2\,\underline{I} \\ 3\,\underline{III} - \underline{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & -20 & -13 & -19 \\ 0 & 11 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 20\,\underline{IV} + 11\,\underline{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & -20 & -13 & -19 \\ 0 & 0 & -123 & -369 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 \Rightarrow$ сист. совм.
$n = 3 \Rightarrow r = n$
$\Rightarrow$ сист. определ.

$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ -20y - 13z = -19 \\ -123z = -369 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ -20y = 20 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$

о.р. = ч.р. = (2 ; -1 ; 3)

Ответ: система совм., определ.

о.р. - ч.р. : (2; -1; 3) ■

2.1.38

$$\begin{cases} -x + y - 3z = 5 \\ 3x - y - z = 2 \\ 2x + y - 9z = 0 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \underline{II} + 3\underline{I} \\ \underline{III} + 2\underline{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & 17 \\ 0 & 3 & -15 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2\underline{III} - 3\underline{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} r(A) = 2 \\ r(A|B) = 3 \end{array}\right| \Rightarrow r(A) < r(A|B) \Rightarrow \text{сист. несовм.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ решений нет

Ответ: система несовместна, решений нет. ■

2.1.39

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\,\underline{II} - 3\,\underline{I} \\ 2\,\underline{III} - 3\,\underline{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 11\cdot\underline{III} + \underline{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 \Rightarrow$ сист. совм.

$n = 3 \Rightarrow n = r$

$\Rightarrow$ сист. определ.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 11y - z = 0 \\ 120z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 11y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ общ. реш., частн. реш. $(0; 0; 0)$

Ответ: система совм., определ.

о.р. = ч.р.: $(0; 0; 0)$

■

2.1.40

$$\begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3\mathrm{II} - \mathrm{I} \\ 3\mathrm{III} - 2\mathrm{I} \\ 3\mathrm{IV} - \mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} + \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} + 2\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 \Rightarrow$ сист. совм.

$n = 3, \Rightarrow r < n$

$\Rightarrow$ сист. неопред.

$r = 2 \Rightarrow$ две гл. переменных

$n - r = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ одна своб. перем.

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \Rightarrow X, Y \text{ - гл. перем.}$$

Z - своб. перем.

$$\begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ -7y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \left(5z - \frac{2z}{7}\right)/3 \\ y = \frac{2z}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{11z}{7} \\ y = \frac{2z}{7} \end{cases}$$

] $z = t$, тогда $\begin{cases} x = \frac{11t}{7} \\ y = \frac{2t}{7} \end{cases}$

=> общ. реш.: $\left(\frac{11t}{7}; \frac{2t}{7}; t\right)$

] $t = 0$, тогда $(0;0;0)$ – частное реш.

Ответ: сист. совместна, неопред.

общ. реш.: $\left(\frac{11t}{7}; \frac{2t}{7}; t\right)$

частн. реш.: $(0;0;0)$ ■

2.1.41

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3\cdot\mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ 3\cdot\mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV} - \mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 7 & 23 \\ 0 & 2 & -2 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 5\mathrm{III} + \mathrm{II} \\ 5\cdot\mathrm{IV} - 2\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 36 & 108 \\ 0 & 0 & -12 & -36 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ 3\mathrm{IV} + \mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 36 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) \overset{3}{=}>$ сист. совм. | => сист. определ.

$n = 3 => r = n$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_2 + x_3 = -7 \\ 36x_3 = 108 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5 - x_3 - 2x_2}{3} \\ x_2 = \frac{-7 - x_3}{5} \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

=> общ. реш., частн. реш. $(2; -2; 3)$

Ответ: сист. совм., определ.

о.р. = ч.р. : $(2; -2; 3)$ ■

2.1.42

$$\begin{cases} 2\sqrt{5}x_1 - x_2 + \sqrt{5}x_3 = 1 \\ 10x_1 - \sqrt{5}x_2 + 5x_3 = \sqrt{5} \\ -2x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_2 - x_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\sqrt{5} & -1 & \sqrt{5} & 1 \\ 10 & -\sqrt{5} & 5 & \sqrt{5} \\ -2 & \sqrt{5}/5 & -1 & -1/\sqrt{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - \sqrt{5}\cdot I \\ III + 1/\sqrt{5}\cdot I \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2\sqrt{5} & -1 & \sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(B) = 1 \Rightarrow$ сист. совм.
$n = 3 \Rightarrow r < n$
$\Rightarrow$ сист. неопред.

$r = 1 \Rightarrow$ одна гл. перемен.

$n - r = 3 - 1 = 2 \Rightarrow$ две своб. перемен.

$|a_{11}| = |2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5} \neq 0 \Rightarrow x_1$ - гл. перем.

x_2, x_3 - своб. перем.

$$2\sqrt{5}x_1 - x_2 + \sqrt{5}x_3 = 1$$

$$x_1 = \frac{x_2 - \sqrt{5}x_3 + 1}{2\sqrt{5}}$$

Пусть $x_2 = t_1;\ x_3 = t_2$, тогда $x_1 = \dfrac{t_1 - \sqrt{5}t_2 + 1}{2\sqrt{5}}$

Значит о.р.: $\left(\dfrac{t_1 - \sqrt{5}t_2 + 1}{2\sqrt{5}};\ t_1;\ t_2\right)$

Пусть $t_1 = 0;\ t_2 = 1$: $\left(\dfrac{-5+\sqrt{5}}{10};\ 0;\ 1\right)$ - ч.р.

Ответ: сист. совместна, неопред.

о.р.: $\left(\dfrac{t_1 - \sqrt{5}t_2 + 1}{2\sqrt{5}};\ t_1;\ t_2\right)$

ч.р.: $\left(\dfrac{-5+\sqrt{5}}{10};\ 0;\ 1\right)$ ■

2.1.43

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II}-2\text{I} \\ \text{III}-3\text{I} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III}-4\text{II} \end{array} \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=2 \Rightarrow$ сист. совм. | $\Rightarrow$ сист. неопред.

$n=4 \Rightarrow r<n$

$r=2 \Rightarrow$ две гл. перем.

$n-r=4-2=2 \Rightarrow$ две своб. перем.

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow x_3, x_4 - \text{гл. перем.}$$

x_1, x_2 – своб. перем.

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2=3 \\ x_4=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=1-3x_1-4x_2 \\ x_4=1 \end{cases}$$

$\exists\, x_1=t_1,\ x_2=t_2 \Rightarrow x_3=1-3t_1-4t_2$

$\Rightarrow$ общее решение: $(t_1;\ t_2;\ 1-3t_1-4t_2;\ 1)$

$\exists\, t_1=-1;\ t_2=2$

Значит: ч.р. $=(-1;\ 2;\ -4;\ 1)$

Ответ: сист. совм., неопределенна

о.р.: $(t_1; t_2; 1-3t_1-4t_2; 1)$

ч.р.: $(-1; 2; -4; 1)$

2.1.44

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+0\cdot x_3+3x_4=4 \\ x_1+x_2-2x_3+0\cdot x_4=0 \\ 3x_1+0\cdot x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+0\cdot x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2+4x_3-3x_4=-3 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -3 & -3 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} \\ 2\cdot \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ 2\cdot \mathrm{III}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \\ 2\mathrm{V}-\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -11 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -9 & -10 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}+3\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}+\mathrm{II} \\ \mathrm{V}-\mathrm{II} \end{array} \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ 10\mathrm{IV}-3\mathrm{III} \\ 5\mathrm{V}+6\mathrm{III} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -150 & -150 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \mathrm{V}-30\mathrm{IV} \end{array} \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 4 \Rightarrow$ сист. совм. $\Big|$ $\Rightarrow$ сист. опред.

$n = 4 \Rightarrow n = r$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ -10x_3 - 20x_4 = -20 \\ -5x_4 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_3 + 20x_4 = 20 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Ответ: сист. совм., определенна

о.р. = ч.р.: $(1; -1; 0; 1)$.

2.1.45

$$\begin{cases} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9 \\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3 \\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16 \\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17 \\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 45 & -28 & 34 & -52 & 9 \\ 36 & -23 & 29 & -43 & 3 \\ 35 & -21 & 28 & -45 & 16 \\ 47 & -32 & 36 & -48 & -17 \\ 27 & -19 & 22 & -35 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 15\,II - 12\,I \\ 9\,III - 7\,I \\ 45\,IV - 47\,I \\ 5\,V - 3\,I \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 45 & -28 & 34 & -52 & 9 \\ 0 & -9 & 27 & -21 & -63 \\ 0 & 7 & 14 & -41 & 81 \\ 0 & -124 & 22 & 264 & -1188 \\ 0 & -11 & 8 & -19 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 9\cdot III + 7\cdot II \\ 9\,IV - 124\,II \\ 9\,V - 11\,II \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 45 & -28 & 34 & -52 & 9 \\ 0 & -9 & 27 & -21 & -63 \\ 0 & 0 & 315 & -516 & 288 \\ 0 & 0 & -3150 & 5160 & -2880 \\ 0 & 0 & -225 & 60 & 720 \end{array}\right) IV \leftrightarrow V \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 45 & -28 & 34 & -52 & 9 \\ 0 & -9 & 27 & -21 & -63 \\ 0 & 0 & 315 & -516 & 288 \\ 0 & 0 & -225 & 60 & 720 \\ 0 & 0 & -3150 & 5160 & -2880 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ 315\,IV + 225\,III \\ V + 10\,III \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 45 & -28 & 34 & -52 & 9 \\ 0 & -9 & 27 & -21 & -63 \\ 0 & 0 & 315 & -516 & 288 \\ 0 & 0 & 0 & -97200 & 291600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=4 \Rightarrow$ сист. совм.

$n=4 \Rightarrow n=r$

$\Rightarrow$ сист. определена.

$$\begin{cases} 45x_1-28x_2+34x_3-52x_4=9 \\ -9x_2+27x_3-21x_4=-63 \\ 315x_3-516x_4=288 \\ -97200x_4=291600 \end{cases} \qquad \begin{cases} 45x_1-28x_2+34x_3=-147 \\ -9x_2+27x_3=-126 \\ 315x_3=-1260 \\ x_4=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45x_1 - 28x_2 = -11 \\ -9x_2 = -18 \\ x_3 = -4 \\ x_4 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 45x_1 = 45 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -4 \\ x_4 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -4 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

Ответ: сист. совм., определенна

о.р.=ч.р.: $(1; 2; -4; -3)$

2.1.46

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\boxed{II} - \boxed{I} \\ 2\boxed{III} - \boxed{I} \\ 2\boxed{IV} - 3\boxed{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \boxed{III} + 3\boxed{II} \\ 3\boxed{IV} + 13\boxed{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 68 \end{array}\right) \boxed{III} \leftrightarrow \boxed{IV} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 \Rightarrow$ сист. совм. | $\Rightarrow$ сист. неопредел.

$n = 5 \Rightarrow r < n$

$r = 3 \Rightarrow$ три гл. перем.

$n - r = 5 - 3 = 2 \Rightarrow$ две своб. перем.

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 0 -$$

$$- 2 \cdot 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 - 0 + 12 - 0 = 12 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_3, x_4, x_5$ – гл. перем.

x_1, x_2 – своб. перем.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_3 + x_5 = 5 \\ -2x_5 = 68 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 103 \\ 3x_3 = 39 \\ x_5 = -34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 38 \\ x_3 = 13 \\ x_5 = -34 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 19 - 2x_2 - 3x_1 \\ x_3 = 13 \\ x_5 = -34 \end{cases}$$

] $x_1 = t_1$; $x_2 = t_2$, тогда $x_4 = 19 - 2t_2 - 3t_1$

Значит общ. реш.: $(t_1; t_2; 13; 19 - 2t_2 - 3t_1; -34)$

] $t_1 = 1$; $t_2 = 2$, тогда: $(1; 2; 13; 12; -34)$ – частн. реш.

Ответ: сист. совм., неопределенна

о.р.: $(t_1; t_2; 13; 19 - 2t_2 - 3t_1; -34)$

ч.р.: $(1; 2; 13; 12; -34)$

2.1.47

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \underline{\mathrm{II}} - 2\underline{\mathrm{I}} \\ \underline{\mathrm{III}} - 3\underline{\mathrm{I}} \\ \underline{\mathrm{IV}} - 2\underline{\mathrm{I}} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \underline{\mathrm{III}} - 2\underline{\mathrm{II}} \\ \underline{\mathrm{IV}} + \underline{\mathrm{II}} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \underline{\mathrm{IV}} + 2\underline{\mathrm{III}} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$r(A) = 3$

$r(A|B) = 4$ $\Rightarrow r(A) < r(A|B) \Rightarrow$ сист. несовм $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ решений нет.

Ответ: система несовместна, решений нет.

(2.2.16) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$\square$

$f(-2) = -8 : 4a - 2b + c = -8$

$f(1) = 4 : a + b + c = 4$

$f(2) = -4 : 4a + 2b + c = -4$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = -8 \\ a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = -4 \end{cases}$$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = $$
$$= 4 - 8 + 2 - 4 + 2 - 8 = -12 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$; $A_{22} = +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -16$

$A_{31} = +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$; $A_{33} = +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -16 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & -16 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-12}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3\\ 3 & 0 & -3\\ -2 & -16 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & -1/3 & 1/4\\ -1/4 & 0 & 1/4\\ 1/6 & 4/3 & -1/2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1/12 & -1/3 & 1/4\\ -1/4 & 0 & 1/4\\ 1/6 & 4/3 & -1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\ 4\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8/12-4/3-1\\ 2+0-1\\ -4/3+16/3+2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 6\end{pmatrix}\Rightarrow(-3;1;6)$$

2) $D=\det A=-12$

$$D_1=\begin{vmatrix}-8 & -2 & 1\\ 4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-8)\cdot1\cdot1+(-2)\cdot1\cdot(-4)+1\cdot4\cdot2-1\cdot1\cdot(-4)$$

$$-(-2)\cdot4\cdot1-(-8)\cdot1\cdot2=-8+8+8+4+8+16=36$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4 & -8 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & -4 & 1\end{vmatrix}=4\cdot4\cdot1+(-8)\cdot1\cdot4+1\cdot1\cdot(-4)-1\cdot4\cdot4-$$

$$-(-8)\cdot1\cdot1-4\cdot1\cdot(-4)=16-32-4-16+8+16=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}4 & -2 & -8\\ 1 & 1 & 4\\ 4 & 2 & -4\end{vmatrix}=4\cdot1\cdot(-4)+(-2)\cdot4\cdot4+(-8)\cdot1\cdot2-$$

$$-(-8)\cdot1\cdot4-(-2)\cdot1\cdot(-4)-4\cdot4\cdot2=-16-32-16+32-$$

$$-8-32=-72$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{36}{-12}=-3;\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-12}{-12}=1;\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-72}{-12}=6$$

$$\Rightarrow(-3;1;6)$$

Ответ: $(-3;1;6)$

2.2.17 $f(x) = a \cdot 3^x + bx^2 + c$

$\square$

$f(0)=2 : a + 0 \cdot b + c = 2$

$f(1)=-1 : 3a + b + c = -1$

$f(2)=4 : 9a + 4b + c = 4$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a + 0 \cdot b + c = 2 \\ 3a + b + c = -1 \\ 9a + 4b + c = 4 \end{cases}$$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 4 = 1 + 0 + 12 - 9 - 0 - 4 = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$$

$\Rightarrow$ Этим способом решить нельзя

2) $D = \det A = 0$

$\Rightarrow$ Этим способом решить нельзя.

Ответ: нельзя решить методом обратной матрицы или по формулам Крамера

$\blacksquare$

2.2.18

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$\square$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-2) = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 + 1/3 \\ -10/3 + 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (2; -3)$$

2) $D = \det A = 3$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5-(-1) = 6$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-10 = -9$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{3} = 2;$$

$$\Rightarrow (2; -3)$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-9}{3} = -3;$$

Ответ: $(2; -3)$

$\blacksquare$

2.2.19

$$\begin{cases} x_1 - \sqrt{5}x_2 = 0 \\ 2\sqrt{5}x_1 - 5x_2 = -10 \end{cases}$$

□

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -5 \end{vmatrix} = -5 + 10 = 5 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 & \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-2\sqrt{5}; -2)$$

2) $D = \det A = 5$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{5} \\ -10 & -5 \end{vmatrix} = -10\sqrt{5}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{5} & -10 \end{vmatrix} = -10$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-10\sqrt{5}}{5} = -2\sqrt{5};$$

$$\Rightarrow (-2\sqrt{5}; -2)$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D_2} = \frac{-10}{5} = -2;$$

Ответ: $(-2\sqrt{5}; -2)$

$\blacksquare$

2.2.20

$$\begin{cases} \alpha x - y = 2 \\ 2x + \alpha y = 1 \end{cases}$$

$\square$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2+2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+2} & \frac{1}{\alpha^2+2} \\ \frac{-2}{\alpha^2+2} & \frac{\alpha}{\alpha^2+2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+2} & \frac{1}{\alpha^2+2} \\ \frac{-2}{\alpha^2+2} & \frac{\alpha}{\alpha^2+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha+1}{\alpha^2+2} \\ \frac{\alpha-4}{\alpha^2+2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+2} ; \frac{\alpha-4}{\alpha^2+2} \right)$$

2) $D = \det A = \alpha^2 + 2$

$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha + 1$; $D_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 4$;

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2+2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+2} ; \frac{\alpha-4}{\alpha^2+2} \right)$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\alpha-4}{\alpha^2+2}$$

Ответ: $\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+2} ; \frac{\alpha-4}{\alpha^2+2} \right)$ $\blacksquare$

2.2.21

$$\begin{cases} ax + 3by = 1 \\ bx + 3ay = 1 \end{cases}$$

□

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 3b \\ b & 3a \end{vmatrix} = 3a^2 - 3b^2$$

Если $3a^2 - 3b^2 = 0$; $a^2 - b^2 = 0$; $|a| = |b|$, тогда $\nexists A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ этим способом решить СЛАУ невозможно

Если $|a| \neq |b|$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{3(a^2-b^2)} \cdot \begin{pmatrix} 3a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ \frac{-b}{3(a^2-b^2)} & \frac{a}{3(a^2-b^2)} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ \frac{-b}{3a^2-3b^2} & \frac{a}{3a^2-3b^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{(a-b)(a+b)} \\ \frac{a-b}{3(a-b)(a+b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{3a+3b} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a+b} ; \frac{1}{3a+3b} \right)$$

2) $D = \det A = 3a^2 - 3b^2$

Если $|a| = |b| \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$ этим способом решить СЛАУ невозможно

Если $|a| \neq |b|$:

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3a \\ 1 & 3b \end{vmatrix} = 3a-3b$; $D_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a-b$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3a-3b}{3a^2-3b^2} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a+b}; \frac{1}{3a+3b}\right)$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{a-b}{3a^2-3b^2} = \frac{1}{3a+3b}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{a+b}; \frac{1}{3a+3b}\right)$, $|a| \neq |b|$

2.2.22

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 4x + 5y + 6z = 19 \\ 7x + 8y + 0 \cdot z = 1 \end{cases}$$

$\square$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 0 + 84 + 96 - 105 - 0 - 48 = 27 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42$; $A_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24$; $A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$

$A_{31}=+\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}=-3$; $A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}=+6$; $A_{33}=+\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-48&42&-3\\24&-21&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-48&24&-3\\42&-21&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48&24&-3\\42&-21&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16/9&8/9&-1/9\\14/9&-7/9&2/9\\-1/9&2/9&-1/9\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-16/9&8/9&-1/9\\14/9&-7/9&2/9\\-1/9&2/9&-1/9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\19\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23/9\\-19/9\\29/9\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\frac{23}{9};-\frac{19}{9};\frac{29}{9}\right)$$

2) $D=\det A=27$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&2&3\\19&5&6\\1&8&0\end{vmatrix}=8\cdot5\cdot0+2\cdot6\cdot1+3\cdot19\cdot8-3\cdot5\cdot1-2\cdot19\cdot0-$$

$$-8\cdot6\cdot8=0+12+456-15-0-384=69$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&8&3\\4&19&6\\7&1&0\end{vmatrix}=1\cdot19\cdot0+8\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot1-3\cdot19\cdot7-8\cdot4\cdot0-$$

$$-1\cdot6\cdot1=0+336+12-399-0-6=-57$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&8\\4&5&19\\7&8&1\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot1+2\cdot19\cdot7+8\cdot4\cdot8-8\cdot5\cdot7-2\cdot4\cdot1-$$

$$-1\cdot19\cdot8=5+266+256-280-8-152=87$$

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{69}{27}=\frac{23}{9};\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{-57}{27}=\frac{-19}{9};\ z=\frac{87}{27}=\frac{29}{9}\Rightarrow\left(\frac{23}{9};\frac{-19}{9};\frac{29}{9}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{23}{9};\frac{-19}{9};\frac{29}{9}\right)$

2.2.23

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+6x_2+4x_3=-6 \\ 3x_1+10x_2+8x_3=-8 \end{cases}$$

$\square$

1) $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{vmatrix}=1\cdot6\cdot8+2\cdot4\cdot3+3\cdot2\cdot10-3\cdot6\cdot3-2\cdot2\cdot8-1\cdot4\cdot10=48+24+60-$$

$$-54-32-40=6\neq0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$A_{11}=+\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}=8$; $A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=-4$; $A_{13}=+\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}=2$;

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}=14$; $A_{22}=+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=-1$; $A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}=-4$;

$A_{31}=+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-10$; $A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2$; $A_{33}=+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=2$;

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 14 & -1 & -4 \\ -10 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 8 & 14 & -10 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 14 & -10 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4/3 & 7/3 & -5/3 \\ -2/3 & -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 4/3 & 7/3 & -5/3 \\ -2/3 & -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{13}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}\Rightarrow\left(\frac{14}{3}; -\frac{13}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

2) $D = \det A = 6$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \\ -8 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot 6\cdot 8 + 2\cdot 4\cdot(-8) + 3\cdot(-6)\cdot 10 -$$

$$- 3\cdot 6\cdot(-8) - 2\cdot(-6)\cdot 8 - 4\cdot 4\cdot 10 = 192 - 64 - 180 +$$

$$+ 144 + 96 - 160 = 28$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6)\cdot 8 + 4\cdot 4\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot(-8) - 3\cdot(-6)\cdot 3 -$$

$$- 4\cdot 2\cdot 8 - 1\cdot 4\cdot(-8) = -48 + 48 - 48 + 54 - 64 + 32 = -26$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -6 \\ 3 & 10 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot(-8) + 2\cdot 3\cdot(-6) + 4\cdot 2\cdot 10 -$$

$$- 4\cdot 6\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-8) - 1\cdot(-6)\cdot 10 = -48 - 36 + 80 - 72 + 32 +$$

$$+ 60 = 16$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-26}{6} = \frac{-13}{3} \quad \Rightarrow \left(\frac{14}{3}; \frac{-13}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Ответ: $\left(\frac{14}{3}; \frac{-13}{3}; \frac{8}{3}\right)$

2.2.24

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 6x + 5y + 4z = -2 \\ 9x + 8y + 7z = 3 \end{cases}$$

□

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot7 + 2\cdot4\cdot9 + 1\cdot6\cdot8 - 1\cdot5\cdot9 - 2\cdot6\cdot7 - 3\cdot4\cdot8 = 105 + 72 + 48$$

$$- 45 - 84 - 96 = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ этим способом решить нельзя

2) $D = \det A = 0$

$\Rightarrow$ этим способом решить нельзя

Ответ: нельзя решить методом обратной матрицы или по формулам Крамера.

■

2.2.25

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -8 \\ 2x + 3y + z = -3 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

□

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot3\cdot3 + 2\cdot1\cdot2 + 1\cdot2\cdot1 - 1\cdot3\cdot2 - 2\cdot2\cdot3 - 3\cdot1\cdot1 = 27 + 4 + 2 -$$

$$-6 - 12 - 3 = 12 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/12 & -5/12 & -1/12 \\ -4/12 & 7/12 & -1/12 \\ -4/12 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8/12 & -5/12 & -1/12 \\ -4/12 & 7/12 & -1/12 \\ -4/12 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48/12 \\ 12/12 \\ 24/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-4; 1; 2)$$

2) $D = \det A = 12$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-8)\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot(-3)\cdot 1 -$$

$$- 1\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot(-3)\cdot 3 - (-8)\cdot 1\cdot 1 = -72 - 2 - 3 + 3 +$$

$$+ 18 + 8 = -48$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -8 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot(-1) + (-8)\cdot 1\cdot 2 -$$

$$- 1\cdot(-3)\cdot 2 - (-8)\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot(-1) = -27 - 2 - 16 + 6 +$$

$$+ 48 + 3 = 12$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot(-3)\cdot 2 + (-8)\cdot 2\cdot 1 -$$

$$-(-8)\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot(-1) - 3\cdot(-3)\cdot 1 = -9 - 12 - 16 +$$

$$+ 48 + 4 + 9 = 24$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-48}{12} = -4$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{12}{12} = 1 \qquad \Rightarrow (-4; 1; 2)$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{24}{12} = 2$$

Ответ: $(-4; 1; 2)$

2.2.26

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

$\square$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a \cdot ab \cdot a + b \cdot 1 \cdot 1 + b \cdot 1 \cdot 1 - ab \cdot 1 \cdot 1 - b \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot b = a^3b - 3ab + 2b$$

$$a^3b - 3ab + 2b = b(a^3 - 3a + 2) = b \cdot (a+2)(a-1)^2$$

Если $a^3b - 3ab + 2b = 0$; $a = -2$ или $a = 1$ или $b = 0$, тогда $\nexists A^{-1}$

$\Rightarrow$ этим способом решить СЛАУ невозможно.

Если $b \neq 0; a \neq -2; a \neq 1$:

$A_{11} = +\begin{vmatrix} ab & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = a^2b - b$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a + 1$; $A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & ab \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - ab$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} b & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = b - ba$; $A_{22} = +\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - ab$;

$A_{31} = +\begin{vmatrix} b & 1 \\ ab & 1 \end{vmatrix} = b - ab$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$; $A_{33} = +\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & ab \end{vmatrix} = a^2b - b$.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a^2b - b & 1-a & b-ab \\ b-ba & a^2-1 & b-ab \\ b-ba & 1-a & a^2b-b \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a^2b-b & b-ba & b-ba \\ 1-a & a^2-1 & 1-a \\ b-ab & b-ab & a^2b-b \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}=\frac{1}{a^3b-3ab+2b}\cdot\begin{pmatrix} a^2b-b & -ab+b & -ab+b \\ 1-a & a^2-1 & -a+1 \\ -ab+b & -ab+b & a^2b-b \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{a+1}{a^2+a-2} & \frac{-1}{a^2+a-2} & \frac{-1}{a^2+a-2} \\ \frac{-1}{a^2b+ab-2b} & \frac{a+1}{a^2b+ab-2b} & \frac{-1}{a^2b+ab-2b} \\ \frac{-1}{a^2+a-2} & \frac{-1}{a^2+a-2} & \frac{a+1}{a^2+a-2} \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} \frac{a+1}{a^2+a-2} & \frac{-1}{a^2+a-2} & \frac{-1}{a^2+a-2} \\ \frac{-1}{a^2b+ab-2b} & \frac{a+1}{a^2b+ab-2b} & \frac{-1}{a^2b+ab-2b} \\ \frac{-1}{a^2+a-2} & \frac{-1}{a^2+a-2} & \frac{a+1}{a^2+a-2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{a-b}{a^2+a-2} \\ \frac{ab+b-2}{a^2b+ab-2b} \\ \frac{a-b}{a^2+a-2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{a-b}{a^2+a-2};\ \frac{ab+b-2}{a^2b+ab-2b};\ \frac{a-b}{a^2+a-2}\right)$$

2) $D=\det A=a^3b-3ab+2b$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}=1\cdot ab\cdot a+b\cdot 1\cdot 1+1\cdot b\cdot b-1\cdot ab\cdot 1-$$

$$-b\cdot b\cdot a-1\cdot 1\cdot b=a^2b+b^2-ab-ab^2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a\cdot b\cdot a+1+1-b-a-a=a^2b-2a-b+2$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}=a\cdot ab\cdot 1+b\cdot b\cdot 1+1\cdot 1\cdot b-1\cdot ab\cdot 1-b\cdot 1\cdot 1-$$

$$-a\cdot b\cdot b=a^2b+b^2-ab-ab^2$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{a^2b + b^2 - ab - ab^2}{a^3b - 3ab + 2b} = \frac{b(a-1)(a-b)}{b(a+2)(a-1)^2} = \frac{a-b}{a^2+a-2}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{a^2b - 2a - b + 2}{a^3b - 3ab + 2b} = \frac{(a-1)(ab+b-2)}{b(a+2)(a-1)^2} = \frac{ab+b-2}{a^2b+ab-2b}$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{a^2b + b^2 - ab - ab^2}{a^3b - 3ab + 2b} = \frac{a-b}{a^2+a-2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a-b}{a^2+a-2}; \frac{ab+b-2}{a^2b+ab-2b}; \frac{a-b}{a^2+a-2}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{a-b}{a^2+a-2}; \frac{ab+b-2}{a^2b+ab-2b}; \frac{a-b}{a^2+a-2}\right)$, $a \neq 1, -2$; $b \neq 0$ ■

2.2.27

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

□

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (12 - 16 + 48 - 96 - 4 + 24) + (-1) \cdot (24 + 24 + 16 + 144 - 8 + 8) - 2 \cdot (-12 + 6 - 16 - 72 + 8 + 2) =$$

$$= -2 \cdot (-32) + (-1) \cdot 208 - 2 \cdot (-84) = 64 - 208 + 168 = 24 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34}\\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44}\end{pmatrix}^T=\frac{1}{\det A}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43}\\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44}\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43}\\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\Rightarrow (0;0;0;0)$

2) $D=\det A=24$

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & 4 & 8\\ 0 & 3 & -6 & 2\\ 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0$$ (нулевой столбец)

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & 4 & 8\\ 1 & 0 & -6 & 2\\ 3 & 0 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=0$$ (нулевой столбец)

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 8\\ 1 & 3 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$ (нулевой столбец)

$$D_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\ 1 & 3 & -6 & 0\\ 3 & -2 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0$$ (нулевой столбец)

$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{24} = 0$; $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{24} = 0$, $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{24} = 0$, $x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{0}{24} = 0$

$\Rightarrow (0;0;0;0)$

Ответ: $(0;0;0;0)$.

2.2.28

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ -x_1 + 0x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$$

$\square$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} -$$

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} - 0 = 3 \cdot (2 \cdot 1 \cdot (-2) +$$

$$+ 0 \cdot 7 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 \cdot 6 - 6 \cdot 1 \cdot 4 - 0 \cdot (-3) \cdot (-2) - 7 \cdot 2 \cdot 2) - 4 \cdot (1 \cdot 1 \cdot (-2) +$$

$$+ (-3) \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 - 7 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) \cdot (-2)) +$$

$$+ 5 \cdot (1 \cdot 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 \cdot 4 - 5 \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 6 \cdot 1 -$$

$$-(-1) \cdot 2 \cdot (-2)) = 3 \cdot (-92) - 4 \cdot (-88) + 5 \cdot (-20) = -276 - (-352) - 100 =$$

$$= -2470 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 0\cdot5\cdot(-2)+1\cdot0\cdot6+4\cdot7\cdot2-6\cdot5\cdot2-4\cdot1\cdot(-2)-7\cdot0\cdot0=4$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot5\cdot(-2)+1\cdot0\cdot5+3\cdot7\cdot2-5\cdot5\cdot2-3\cdot1\cdot(-2)-7\cdot0\cdot(-1))=-8$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot4\cdot(-2)+0\cdot0\cdot5+3\cdot6\cdot2-5\cdot4\cdot2-0\cdot6\cdot(-1)-3\cdot0\cdot(-2)=4$$

$$A_{14}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot4\cdot7+0\cdot5\cdot5+3\cdot6\cdot1-5\cdot4\cdot1-3\cdot0\cdot7-6\cdot5\cdot(-1))=0$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -(2\cdot5\cdot(-2)+(-3)\cdot0\cdot6+4\cdot7\cdot4-6\cdot5\cdot4-4\cdot(-3)\cdot(-2)-7\cdot0\cdot2)=52$$

$$A_{22}=+\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot(-2)+3\cdot7\cdot4+(-3)\cdot0\cdot5-5\cdot5\cdot4-3\cdot(-3)\cdot(-2)-7\cdot0\cdot1=-44$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -(1\cdot4\cdot(-2)+2\cdot0\cdot5+3\cdot6\cdot4-5\cdot4\cdot4-2\cdot3\cdot(-2)-6\cdot0\cdot1)=4$$

$$A_{24}=+\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot4\cdot7+2\cdot5\cdot5+3\cdot6\cdot(-3)-5\cdot4\cdot(-3)-3\cdot2\cdot7-6\cdot5\cdot1=12$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot(-2)+(-3)\cdot2\cdot6+7\cdot0\cdot4-6\cdot1\cdot4-(-3)\cdot0\cdot(-2)-7\cdot2\cdot2=-92$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -(1\cdot1\cdot(-2)+(-3)\cdot2\cdot5+(-1)\cdot7\cdot4-5\cdot1\cdot4-(-3)\cdot(-1)\cdot(-2)-7\cdot2\cdot1)=88$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&0&2\\5&6&-2\end{vmatrix}=1\cdot0\cdot(-2)+2\cdot2\cdot5+6\cdot(-1)\cdot4-5\cdot0\cdot4-$$
$$-2\cdot(-1)\cdot(-2)-2\cdot6\cdot1=-20$$

$$A_{34}=-\begin{vmatrix}1&2&-3\\-1&0&1\\5&6&7\end{vmatrix}=-(1\cdot0\cdot7+2\cdot1\cdot5+(-1)\cdot6\cdot(-3)-5\cdot0\cdot(-3)-$$
$$-2\cdot(-1)\cdot7-6\cdot1\cdot1)=-36$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}2&-3&4\\0&1&2\\4&5&0\end{vmatrix}=-(2\cdot1\cdot0+0\cdot5\cdot4+(-3)\cdot2\cdot4-4\cdot1\cdot4-$$
$$-0\cdot(-3)\cdot0-5\cdot2\cdot2)=60$$

$$A_{42}=+\begin{vmatrix}1&-3&4\\-1&1&2\\3&5&0\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot0+(-1)\cdot5\cdot4+(-3)\cdot2\cdot3-3\cdot1\cdot4-$$
$$-(-3)\cdot(-1)\cdot0-5\cdot2\cdot1=-60$$

$$A_{43}=-\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&0&2\\3&4&0\end{vmatrix}=-(1\cdot0\cdot0+2\cdot2\cdot3+(-1)\cdot4\cdot4-3\cdot0\cdot4-4\cdot2\cdot1-$$
$$-(-1)\cdot2\cdot0)=12$$

$$A_{44}=+\begin{vmatrix}1&2&-3\\-1&0&1\\3&4&5\end{vmatrix}=1\cdot0\cdot5+(-1)\cdot4\cdot(-3)+2\cdot1\cdot3-3\cdot0\cdot(-3)-$$
$$-(-1)\cdot2\cdot5-4\cdot1\cdot1=24$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}4&-8&4&0\\52&-44&4&12\\-92&88&-20&-36\\60&-60&12&24\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4&52&-92&60\\-8&-44&88&-60\\4&4&-20&12\\0&12&-36&24\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}=-\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix}4&52&-92&60\\-8&-44&88&-60\\4&4&-20&12\\0&12&-36&24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/6&-13/6&23/6&-5/2\\1/3&11/6&-11/6&5/2\\-1/6&-1/6&5/6&-1/2\\0&-1/2&3/2&-1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-1/6&-13/6&23/6&-5/2\\1/3&11/6&-11/6&5/2\\-1/6&-1/6&5/6&-1/2\\0&-1/2&3/2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-13\\-1\\11\\19\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\cdot(-13)+\left(-\frac{13}{6}\right)\cdot(-1)+\frac{23}{6}\cdot 11+\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 19 \\ \frac{1}{3}\cdot(-13)+\frac{11}{6}\cdot(-1)+\left(-\frac{11}{3}\right)\cdot 11+\frac{5}{2}\cdot 19 \\ \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(-13)+\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(-1)+\frac{5}{6}\cdot 11+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 19 \\ 0\cdot(-13)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)+\frac{3}{2}\cdot 11+(-1)\cdot 19 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1;\ 1;\ 2;\ -2)$$

2) $D = \det A = -24$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -13 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 11 & 4 & 5 & 0 \\ 19 & 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} + 0 -$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix} -13 & 2 & 4 \\ 11 & 4 & 0 \\ 19 & 6 & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -13 & 2 & -3 \\ 11 & 4 & 5 \\ 19 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -((-1)\cdot(2\cdot 5\cdot(-2)+(-3)\cdot 0\cdot 6+4\cdot 7\cdot 4-6\cdot 5\cdot 4-4\cdot(-3)\cdot(-2)-$$

$$-7\cdot 0\cdot 2))-1\cdot((-13)\cdot 4\cdot(-2)+6\cdot 11\cdot 4+2\cdot 0\cdot 19-19\cdot 4\cdot 4-$$

$$-6\cdot 0\cdot(-13)-11\cdot 2\cdot(-2))+2\cdot((-13)\cdot 4\cdot 7+2\cdot 5\cdot 19+11\cdot 6\cdot(-3)-$$

$$-19\cdot 4\cdot(-3)-11\cdot 2\cdot 7-6\cdot 5\cdot(-13)) = -(52)-1\cdot 108+2\cdot 92=$$

$$=-52-108+184=24$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -13 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 11 & 5 & 0 \\ 5 & 19 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -13 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 19 & 7 & -2 \end{vmatrix} -$$

$$-11\cdot\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ -1 & 1 & 2\\ 5 & 7 & -2\end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix}1 & -13 & 4\\ -1 & -1 & 2\\ 5 & 19 & -2\end{vmatrix} - 0 =$$

$= 3\cdot((-13)\cdot 1\cdot(-2) + 2\cdot(-3)\cdot 19 + (-1)\cdot 7\cdot 4 - 19\cdot 1\cdot 4 - 7\cdot 2\cdot(-13) -$

$-(-1)\cdot(-3)\cdot(-2)) - 11\cdot(1\cdot 1\cdot(-2) + (-3)\cdot 2\cdot 5 + (-1)\cdot 7\cdot 4 - 5\cdot 1\cdot 4 -$

$-(-1)\cdot(-3)\cdot(-2) - 7\cdot 2\cdot 1) + 5\cdot(1\cdot(-1)\cdot(-2) + (-13)\cdot 2\cdot 5 + (-1)\cdot 19\cdot 4 -$

$-5\cdot(-1)\cdot 4 - (-1)\cdot(-13)\cdot(-2) - 19\cdot 2\cdot 1) = 3\cdot(-4) - 11\cdot(-88) + 5\cdot(-196) =$

$= -12 - (-968) - 980 = -12 + 968 - 980 = -24.$

$$D_3 = \begin{vmatrix}1 & 2 & -13 & 4\\ -1 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 11 & 0\\ 5 & 6 & 19 & -2\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & -13 & 4\\ 4 & 11 & 0\\ 6 & 19 & -2\end{vmatrix} + 0 + 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 0\\ 5 & 6 & -2\end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -13\\ 3 & 4 & 11\\ 5 & 6 & 19\end{vmatrix} = 1\cdot(2\cdot 11\cdot(-2) + 4\cdot 19\cdot 4 + (-13)\cdot 0\cdot 6 - 6\cdot 11\cdot 4 -$$

$-19\cdot 0\cdot 2 - (-13)\cdot 4\cdot(-2)) + 1\cdot(1\cdot 4\cdot(-2) +$

$+3\cdot 6\cdot 4 + 2\cdot 0\cdot 5 - 5\cdot 4\cdot 4 - 3\cdot 2\cdot(-2) - 6\cdot 0\cdot 1) + 2\cdot(1\cdot 4\cdot 19 +$

$+2\cdot 11\cdot 5 + 3\cdot 6\cdot(-13) - 5\cdot 4\cdot(-13) - 3\cdot 2\cdot 19 - 6\cdot 11\cdot 1) = -108 - 4 + 64 = -48$

$$D_4 = \begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & -13\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 5 & 11\\ 5 & 6 & 7 & 19\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & -3 & -13\\ 4 & 5 & 11\\ 6 & 7 & 19\end{vmatrix} + 0 - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -13\\ 3 & 4 & 11\\ 5 & 6 & 19\end{vmatrix} -$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 7\end{vmatrix} = 1\cdot(2\cdot 5\cdot 19 + (-3)\cdot 11\cdot 6 + 4\cdot 7\cdot(-13) - 6\cdot 5\cdot(-13) -$$

$-4\cdot(-3)\cdot 19 - 7\cdot 11\cdot 2) - 1\cdot(1\cdot 4\cdot 19 + 2\cdot 11\cdot 5 + 3\cdot 6\cdot(-13) -$

$-5\cdot 4\cdot(-13) - 2\cdot 3\cdot 19 - 6\cdot 11\cdot 1) - 1\cdot(1\cdot 4\cdot 7 + 2\cdot 5\cdot 5 + 3\cdot 6\cdot(-3) - 5\cdot 4\cdot(-3) -$

$-3\cdot 2\cdot 7 - 6\cdot 5\cdot 1) = 92 - 32 - 12 = 48$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{-24} = -1;\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-24}{-24} = 1;\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-48}{-24} = 2;\ x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{48}{-24} = -2 \Rightarrow (-1; 1; 2; -2)$$

Ответ: $(-1; 1; 2; -2)$ $\blacksquare$

2.2.29

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -15 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 = -6 \\ 3x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 + 2\cdot x_4 = 11 \end{cases}$$

$\square$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 -$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(4\cdot(-2)\cdot 0 +$$

$$+5\cdot 4\cdot 6 + 2\cdot 1\cdot(-4) - 6\cdot(-2)\cdot(-4) - 2\cdot 5\cdot 0 - 1\cdot 4\cdot 4) -$$

$$-1\cdot((-1)\cdot 2\cdot 0 + 4\cdot 4\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot(-4) - 2\cdot 2\cdot(-4) - 1\cdot 4\cdot 0 - 6\cdot 4\cdot(-1))$$

$$+2\cdot((-1)\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot(-2)\cdot 2 + 1\cdot 6\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 1 - 6\cdot(-2)\cdot(-1)) =$$

$$= (-3)\cdot 48 - 1\cdot 48 + 2\cdot(-24) = -144 - 48 - 48 = -240 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\ 6 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot2+(-2)\cdot0\cdot0+6\cdot1\cdot4-0\cdot1\cdot4-6\cdot(-2)\cdot2-1\cdot0\cdot2=52$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-(1\cdot1\cdot2+(-2)\cdot0\cdot3+2\cdot1\cdot4-3\cdot1\cdot4-1\cdot0\cdot1-2\cdot(-2)\cdot2)=-6$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 6 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=1\cdot6\cdot2+2\cdot0\cdot3+2\cdot0\cdot4-3\cdot6\cdot4-2\cdot2\cdot2-0\cdot0\cdot1=-68$$

$$A_{14}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 6 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-(1\cdot6\cdot1+2\cdot1\cdot3+2\cdot0\cdot(-2)-3\cdot6\cdot(-2)-2\cdot2\cdot1-0\cdot1\cdot1)=-44$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}4 & 5 & -4\\ 6 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-(4\cdot1\cdot2+5\cdot0\cdot0+6\cdot1\cdot(-4)-0\cdot1\cdot(-4)-6\cdot5\cdot2-1\cdot0\cdot4)=76$$

$$A_{22}=+\begin{vmatrix}-1 & 5 & -4\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot1\cdot2+5\cdot0\cdot3+2\cdot1\cdot(-4)-3\cdot1\cdot(-4)-2\cdot5\cdot2-0\cdot1\cdot(-1)=-18$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 4 & -4\\ 2 & 6 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=-((-1)\cdot6\cdot2+4\cdot0\cdot3+2\cdot0\cdot(-4)-3\cdot6\cdot(-4)-4\cdot2\cdot2-0\cdot0\cdot(-1))=-44$$

$$A_{24}=+\begin{vmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & 6 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot6\cdot1+4\cdot1\cdot3+2\cdot0\cdot5-3\cdot6\cdot5-2\cdot4\cdot1-0\cdot1\cdot(-1)=-92$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}4 & 5 & -4\\ 2 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=4\cdot(-2)\cdot2+5\cdot4\cdot0+2\cdot1\cdot(-4)-0\cdot(-2)\cdot(-4)-5\cdot2\cdot2-4\cdot1\cdot4=-60$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 5 & -4\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-((-1)\cdot(-2)\cdot2+5\cdot4\cdot3+1\cdot1\cdot(-4)-3\cdot(-2)\cdot(-4)-1\cdot5\cdot2-1\cdot4\cdot(-1))=-30$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot(-4) - 3\cdot 2\cdot(-4) - 1\cdot 4\cdot 2 - 4\cdot 0\cdot(-1) = 60$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot(-2)\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 5 - 3\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 1 - 0\cdot(-2)\cdot(-1)) = 60$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(4\cdot(-2)\cdot 0 + 5\cdot 4\cdot 6 + 2\cdot 1\cdot(-4) - 6\cdot(-2)\cdot(-4) - 5\cdot 2\cdot 0 - 4\cdot 1\cdot 4) = -48$$

$$A_{42} = +\begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2)\cdot 0 + 5\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-4) - 2\cdot(-2)\cdot(-4) - 1\cdot 5\cdot 0 - 1\cdot 4\cdot(-1) = 24$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot 2\cdot 0 + 4\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 6\cdot(-4) - 2\cdot 2\cdot(-4) - 1\cdot 4\cdot 0 - 6\cdot 4\cdot(-1)) = -48$$

$$A_{44} = +\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot(-2)\cdot 2 + 1\cdot 6\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 1 - 6\cdot(-2)\cdot(-1) = -24$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 52 & -6 & -68 & -44 \\ 76 & -18 & -44 & -92 \\ -60 & -30 & 60 & 60 \\ -48 & 24 & -48 & -24 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 52 & 76 & -60 & -48 \\ -6 & -18 & -30 & 24 \\ -68 & -44 & 60 & -48 \\ -44 & -92 & 60 & -24 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A} = -\frac{1}{240}\cdot\begin{pmatrix} 52 & 76 & -60 & -48 \\ -6 & -18 & -30 & 24 \\ -68 & -44 & 60 & -48 \\ -44 & -92 & 60 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/60 & -19/60 & 1/4 & 1/5 \\ 1/40 & 3/40 & 1/8 & -1/10 \\ 17/60 & 11/60 & -1/4 & 1/5 \\ 11/60 & 23/60 & -1/4 & 1/10 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -13/60 & -19/60 & 1/4 & 1/5 \\ 1/40 & 3/40 & 1/8 & -1/10 \\ 17/60 & 11/60 & -1/4 & 1/5 \\ 11/60 & 23/60 & -1/4 & 1/10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{13}{60}\cdot(-15)+\left(\frac{-19}{60}\right)\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot(-6)+\frac{1}{5}\cdot 11 \\ \frac{1}{40}\cdot(-15)+\frac{3}{40}\cdot 3+\frac{1}{8}\cdot(-6)+\left(\frac{-1}{10}\right)\cdot 11 \\ \frac{17}{60}\cdot(-15)+\frac{11}{60}\cdot 3+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-6)+\frac{1}{5}\cdot 11 \\ \frac{11}{60}\cdot(-15)+\frac{23}{60}\cdot 3+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-6)+\frac{1}{10}\cdot 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $D=\det A=-240$

$$D_1=\begin{vmatrix} -15 & 4 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(-6)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix} -15 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 11 & 1 & 2 \end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix} -15 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 11 & 0 & 2 \end{vmatrix}-0=(-6)\cdot(4\cdot(-2)\cdot 2+5\cdot 4\cdot 0+2\cdot 1\cdot(-4)-$$

$$-0\cdot(-2)\cdot(-4)-5\cdot 2\cdot 2-4\cdot 1\cdot 4)-6\cdot$$

$$\cdot((-15)\cdot(-2)\cdot 2+5\cdot 4\cdot 11+3\cdot 1\cdot(-4)-11\cdot(-2)\cdot(-4)-3\cdot 5\cdot 2-$$

$$-1\cdot 4\cdot(-15))+1\cdot((-15)\cdot 2\cdot 2+3\cdot 0\cdot(-4)+4\cdot 4\cdot 11-11\cdot 2\cdot(-4)-$$

$$-3\cdot 4\cdot 2-0\cdot 4\cdot(-15))=(-6)\cdot(-60)-6\cdot 210+1\cdot 180=$$

$$=360-1260+180=-720$$

$$D_2=\begin{vmatrix} -1 & -15 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} -15 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 11 & 1 & 2 \end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -15 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}-0=2\cdot((-15)\cdot(-2)\cdot 2+5\cdot 4\cdot 11+3\cdot 1\cdot(-4)-$$

$$-11\cdot(-2)\cdot(-4)-3\cdot 5\cdot 2-1\cdot 4\cdot(-15))+$$

$$+6\cdot((-1)\cdot(-2)\cdot 2+5\cdot 4\cdot 3+1\cdot 1\cdot(-4)-3\cdot(-2)(-4)-1\cdot 5\cdot 2-$$

$$-1\cdot4\cdot(-1)) + 1\cdot((-1)\cdot3\cdot2 + (-15)\cdot4\cdot3 + 1\cdot11\cdot(-4) -$$

$$-3\cdot3\cdot(-4) - 1\cdot(-15)\cdot2 - (-1)\cdot4\cdot11) = 2\cdot210 + 6\cdot30 +$$

$$+1\cdot(-120) = 420+180-120 = 480$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -15 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -15 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$-6\cdot\begin{vmatrix} -1 & -15 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 =$$

$$= 2\cdot(4\cdot3\cdot2 + 2\cdot11\cdot(-4) + 4\cdot(-15)\cdot0 - 0\cdot3\cdot(-4) -$$

$$-2\cdot(-15)\cdot2 - 4\cdot11\cdot4) - 6\cdot((-1)\cdot3\cdot2 + (-15)\cdot4\cdot3 + 1\cdot11\cdot(-4) -$$

$$-3\cdot3\cdot(-4) - 1\cdot(-15)\cdot2 - 11\cdot4\cdot(-1)) - 6\cdot((-1)\cdot2\cdot2 + 1\cdot0\cdot(-4) +$$

$$+4\cdot4\cdot3 - 3\cdot2\cdot(-4) - 0\cdot4\cdot(-1) - 1\cdot4\cdot2) = 2\cdot(-180) -$$

$$-6\cdot(-120) - 6\cdot60 = -360 + 720 - 360 = 0$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & -15 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 & -15 \\ 2 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & -6 \end{vmatrix} + 0 -$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & -15 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -6 \end{vmatrix} + 11\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)\cdot(4\cdot(-2)\cdot(-6) + 5\cdot3\cdot6 + 2\cdot1\cdot(-15) - 6\cdot(-2)\cdot(-15) -$$

$$-5\cdot2\cdot(-6) - 1\cdot3\cdot4) - 1\cdot((-1)\cdot2\cdot(-6) + 4\cdot3\cdot2 + 1\cdot6\cdot(-15) -$$

$$-2\cdot2\cdot(-15) - 1\cdot4\cdot(-6) - 6\cdot3\cdot(-1)) + 11\cdot(2\cdot(-1)\cdot1 + 4\cdot(-2)\cdot$$

$+1\cdot6\cdot5-2\cdot2\cdot5-4\cdot1\cdot1-6\cdot(-2)\cdot(-1)) = (-3)\cdot(-24)-1\cdot48+$

$+11\cdot(-24) = 72-48-264 = -240$

$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-720}{-240} = 3;\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{480}{-240} = -2;$

$\Rightarrow (3; -2; 0; 1)$

$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{-240} = 0;\ x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{-240}{-240} = 1;$

Ответ: $(3; -2; 0; 1)$.

2.2.30 $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

$\square$

$f(-1) = 3: -a + b + c = 3$

$f(1) = 1: a + b + c = 1$

$f(2) = -15: 8a + 4b + c = -15$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} -a+b+c=3 \\ a+b+c=1 \\ 8a+4b+c=-15 \end{cases}$$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot8 + 1\cdot4\cdot1 - 8\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 4\cdot1\cdot(-1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 7;\ A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -4$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{22} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -9;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 12;$

$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ A_{33} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -4 \\ 3 & -9 & 12 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 7 & -9 & 2 \\ -4 & 12 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 7 & -9 & 2 \\ -4 & 12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 7/6 & -3/2 & 1/3 \\ -2/3 & 2 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 7/6 & -3/2 & 1/3 \\ -2/3 & 2 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2}) \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot (-15) \\ \frac{7}{6} \cdot 3 + (-\frac{3}{2}) \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-15) \\ -\frac{2}{3} \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-\frac{1}{3}) \cdot (-15) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) $D = \det A = 6$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -15 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-15) + 1 \cdot 1 \cdot 4 - (-15) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = -6$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & -15 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 8 + 1 \cdot (-15) \cdot 1 - 8 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-15) \cdot (-1) = -18$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & -15 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot (-15) + 1 \cdot 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - 8 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot (-15) - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 30$$

$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-6}{6} = -1;\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-18}{6} = -3;\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{30}{6} = 5$

$\Downarrow$

$(-1; -3; 5)$

Ответ: $(-1; -3; 5)$.

2.2.31 $f(x) = a \cdot \log_3 x + bx + c$

$\square$

$f(1)=5: \ a \cdot 0 + b + c = 5$

$f(3)=8: \ a + 3b + c = 8$

$f(9)=19: \ 2a + 9b + c = 19$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} b+c=5 \\ a+3b+c=8 \\ 2a+9b+c=19 \end{cases}$$

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 9 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -6; \ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 8; \ A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2; \ A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2; \ A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \ A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3/2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + (-1/2) \cdot 19 \\ 1/4 \cdot 5 + (-1/2) \cdot 8 + 1/4 \cdot 19 \\ 3/4 \cdot 5 + 1/2 \cdot 8 + (-1/4) \cdot 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1; 2; 3)$$

2) $D = \det A = 4$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 19 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 19 + 8 \cdot 9 \cdot 1 - 19 \cdot 3 \cdot 1 - 8 \cdot 1 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \cdot 5 = -4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 19 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 8 \cdot 11 + 5 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 19 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 1 - 19 \cdot 1 \cdot 0 = 8$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 \cdot 19 + 1 \cdot 8 \cdot 2 + 1 \cdot 9 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 19 - 9 \cdot 8 \cdot 0 = 12$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{4} = -1; \; x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{4} = 2; \; x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow (-1; 2; 3)$$

Ответ: $(-1; 2; 3)$.

2.3.26

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right)_{II+2I} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 1 \Rightarrow$ сист. совм. | $\Rightarrow$ сист. неопред.

$n = 2 \Rightarrow r < n$

$r = 1 \Rightarrow 1$ глав. переменная

$n - r = 2 - 1 = 1 \Rightarrow 1$ своб. переменная

$|a_{11}^1| = |2| = 2 \neq 0 \Rightarrow x_1$ - гл. переменная

x_2 - своб. переменная

$2x_1 - x_2 = 0$

$2x_1 = x_2$

$x_1 = \frac{1}{2} x_2$

$\exists x_2 = 2t \Rightarrow x_1 = t$

о.р.: $(t; 2t)$

$(t; 2t) = (t \cdot 1; t \cdot 2) = t(1; 2)$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однород. СЛАУ: $\{(1; 2)\}$

Ответ: о.р.: $(t; 2t)$

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(1; 2)\}$ $\blacksquare$

2.3.27

$$\begin{cases} x-\sqrt{3}\cdot y=0 \\ \sqrt{3}x-3y=0 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 \end{array}\right)_{\text{II}-\sqrt{3}\cdot\text{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=1 \Rightarrow$ сист. совм.

$n=2 \Rightarrow r<n$

$\Rightarrow$ сист. неопред.

$r=1 \Rightarrow 1$ глав. перемен.

$n-r=2-1=1 \Rightarrow 1$ своб. перемен.

$|a_{11}|=|1|=1\neq 0 \Rightarrow x_1$ – гл. переменная

x_2 – своб. переменная

$x_1-\sqrt{3}\cdot x_2=0$

$x_1=\sqrt{3}x_2$

$\exists\, x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot t \Rightarrow x_1=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot t=t$

о.р.: $(t;\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot t)$

$(t;\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot t)=(t\cdot 1; t\cdot\frac{1}{\sqrt{3}})=t\cdot(1;\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(1;\frac{1}{\sqrt{3}})\}$

Ответ: о.р.: $(t;\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot t)$,

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(1;\frac{1}{\sqrt{3}})\}$

$\blacksquare$

2.3.28

$$\begin{cases} 3x+4y=0 \\ 4x-3y=0 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right)_{3\cdot II-4\cdot I} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=2 \Rightarrow$ сист. совм.

$n=2 \Rightarrow r=n$

$\Rightarrow$ сист. определ.

$$\begin{cases} 3x+4y=0 \\ -25y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

о.р.: $(0;0)$

Т.к. сист. опред, ФСР – нет

Ответ: о.р.: $(0;0)$,

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: нет. $\blacksquare$

2.3.29

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ -\sqrt{3}\cdot x_1-\sqrt{12}\cdot x_2=0 \\ 2x_1+4x_2=0 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{12} & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ II+\sqrt{3}\cdot I \\ III-2\cdot I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=1 \Rightarrow$ сист. совм. | $\Rightarrow$ сист. неопред.

$n=2 \Rightarrow r<n$

$r=1 \Rightarrow 1$ гл. перемен.

$n-r=2-1=1 \Rightarrow 1$ своб. перемен.

$|a_{11}|=|1|=1\neq 0 \Rightarrow x_1$ – гл. перемен.

x_2 – своб. перемен.

$x_1+2x_2=0$

$x_1=-2x_2$

$\exists\, x_2=t \Rightarrow x_1=-2t$

о.р.: $(-2t;t)$

$(-2t;t)=(t\cdot(-2);t\cdot 1)=t\cdot(-2;1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. одноaccess. СЛАУ: $\{(-2;1)\}$

Ответ: о.р.: $(-2t;t)$,

Ф.С.Р. одпор. СЛАУ: $\{(-2;1)\}$ ■

2.3.30

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

□

$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)_{\text{II} - 2\cdot\text{I}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$r(A) = r(A|B) = 1 \Rightarrow$ сист. совм.

$n = 3 \Rightarrow r < n$

$\Rightarrow$ сист. неопред.

$r = 1 \Rightarrow 1$ гл. перемен.

$n - r = 3 - 1 = 2 \Rightarrow 2$ своб. перемен.

$|a_{11}^1| = |2| = 2 \Rightarrow x$ — гл. перемен.

y, z — своб. перемен.

$2x - y - z = 0$

$x = \frac{1}{2}\cdot y + \frac{1}{2}\cdot z$

$\exists\, y = 2t_1;\ z = 2t_2 \Rightarrow x = t_1 + t_2$

о.р.: $(t_1 + t_2;\ 2t_1;\ 2t_2)$

$(t_1 + t_2;\ 2t_1;\ 2t_2) = (t_1\cdot 1 + t_2\cdot 1;\ t_1\cdot 2 + t_2\cdot 0;\ t_1\cdot 0 + t_2\cdot 2) =$

$= (t_1\cdot 1;\ t_1\cdot 2;\ t_1\cdot 0) + (t_2\cdot 1;\ t_2\cdot 0;\ t_2\cdot 2) =$

$= t_1\cdot(1;2;0) + t_2\cdot(1;0;2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(1;2;0), (1;0;2)\}$

Ответ: о.р.: $(t_1+t_2; 2t_1; 2t_2)$

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(1;2;0), (1;0;2)\}$ ☑

2.3.31

$$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$$

□

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)_{2\cdot II - I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=2 \Rightarrow$ сист. совм.

$n=3 \Rightarrow r<n$

$\Rightarrow$ сист. неопред.

$r=2 \Rightarrow 2$ гл. переменные

$n-r=3-2=1 \Rightarrow 1$ св. переменная

$$\begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow x, y - \text{гл. перемен.}$$

z – своб. перемен.

$$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 5x+7z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ y=-\frac{7}{5}z \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{5}z \\ y=-\frac{7}{5}z \end{cases}$$

$\exists\, z=-5t \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=7t \end{cases}$

о.р.: $(t; 7t; -5t)$

$(t; 7t; -5t) = (t\cdot 1; t\cdot 7; t\cdot(-5)) = t\cdot(1; 7; -5)$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(1; 7; -5)\}$

Ответ: о.р.: $(t; 7t; -5t)$

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(1; 7; -5)\}$

2.3.32

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3 \cdot \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 19\,\text{III} - 6\,\text{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 \Rightarrow$ сист. совм.

$n = 3 \Rightarrow r = n$

$= $ сист. опред.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 19x_2 + 7x_3 = 0 \\ -23x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 19x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

о.р.: $(0; 0; 0)$

т.к. сист. опред., то Ф.С.Р однор. СЛАУ – нет.

Ответ: о.р.: $(0;0;0)$

Ф.С.Р однор. СЛАУ: нет. ■

2.3.33

$$\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 5x_1-3x_2-8x_3=0 \end{cases}$$

□

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -8 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \underline{II}-2\cdot I \\ \underline{III}-5\cdot I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \underline{III}-\underline{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=2 \Rightarrow$ сист. совм. | $\Rightarrow$ сист. неопред

$n=3 \Rightarrow r<n$ |

$r=2 \Rightarrow 2$ гл. перемен.

$n-r=3-2=1 \Rightarrow 1$ св. перемен.

$$\begin{vmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} \\ a^1_{21} & a^1_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2 \text{ — гл. переменные}$$

x_3 — своб. переменные

$$\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=0 \\ 7x_2+7x_3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+2x_3-3x_3=0 \\ x_2=-x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$$

$\exists x_3 = t \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases}$

о.р.: $(t; -t; t)$

$(t; -t; t) = (t \cdot 1; t \cdot (-1); t \cdot 1) = t \cdot (1; -1; 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(1; -1; 1)\}$

Ответ: общее решение $(t; -t; t)$

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(1; -1; 1)\}$ ■

2.3.34

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II} + \text{I} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 1 \Rightarrow$ сист. совм. $\Big| \Rightarrow$ сист. неопред.

$n = 3 \Rightarrow r < n$

$r = 1 \Rightarrow 1$ гл. перемен.

$n - r = 3 - 1 = 2 \Rightarrow 2$ своб. перемен.

$|a_{11}| = |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow x_1$ – гл. перемен.

x_2, x_3 – своб. перемен.

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$

$x_1 = 2x_2 - 3x_3$

$\exists\, x_2 = t_1;\ x_3 = t_2 \Rightarrow x_1 = 2t_1 - 3t_2$

о.р.: $(2t_1 - 3t_2;\ t_1;\ t_2)$

$(2t_1 - 3t_2;\ t_1;\ t_2) = (t_1 \cdot 2 + t_2 \cdot (-3);\ t_1 \cdot 1 + 0 \cdot t_2;\ t_1 \cdot 0 + t_2 \cdot 1) =$

$= (t_1 \cdot 2;\ t_1 \cdot 1;\ t_1 \cdot 0) + (t_2 \cdot (-3);\ t_2 \cdot 0;\ t_2 \cdot 1) =$

$= t_1 \cdot (2;1;0) + t_2 \cdot (-3;0;1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(2;1;0), (-3;0;1)\}$

Ответ: о.р.: $(2t_1 - 3t_2;\ t_1;\ t_2)$

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(2;1;0), (-3;0;1)\}$ ■

2.3.35

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot\mathrm{II} - \mathrm{I} \\ 2\cdot\mathrm{III} - \mathrm{I} \\ 2\cdot\mathrm{IV} - \mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 15 & 11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} + \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} + 3\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{array}\right) \underline{III} \leftrightarrow \underline{IV} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 \Rightarrow$ сист. совм.

$n = 3 \Rightarrow r = n$

$\Rightarrow$ сист. опред.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 20x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

о.р.: $(0;0;0)$

т.к. система определ, то Ф.С.Р. однор. СЛАУ - нет.

Ответ: о.р.: $(0;0;0)$,

Ф.С.Р. однор. СЛАУ - нет.

2.3.36

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

□

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - I \\ \\ V - I \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + II \\ IV - II \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV + III \\ V - III \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 \Rightarrow$ сист. совм. | $\Rightarrow$ сист. неопред.

$n = 6 \Rightarrow r < n$

$r = 3 \Rightarrow 3$ гл. перемен.

$n - r = 6 - 3 = 3 \Rightarrow 3$ своб. перемен.

$$\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 0\cdot0\cdot0 + 0\cdot0\cdot(-1) -$$

$$-0\cdot1\cdot(-1) - 0\cdot0\cdot1 - 0\cdot0\cdot1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1, x_2, x_3$ - гл. перемен.

x_4, x_5, x_6 - своб. перемен.

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_4 - x_5 \\ x_2 = x_4 - x_6 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$\exists\ x_4 = t_1$

$x_5 = t_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 - t_3 \\ x_3 = t_1 \end{cases}$

$x_6 = t_3$

о.р.: $(t_1 - t_2; t_1 - t_3; t_1; t_1; t_2; t_3)$

$(t_1 - t_2; t_1 - t_3; t_1; t_1; t_2; t_3) = (1\cdot t_1 + (-1)\cdot t_2 + 0\cdot t_3; 1\cdot t_1 +$
$+ 0\cdot t_2 + (-1)\cdot t_3; 1\cdot t_1 + 0\cdot t_2 + 0\cdot t_3; 1\cdot t_1 + 0\cdot t_2 + 0\cdot t_3; 0\cdot t_1 + 1\cdot t_2 +$
$+ 0\cdot t_3; 0\cdot t_1 + 0\cdot t_2 + 1\cdot t_3) = (1\cdot t_1; 1\cdot t_1; 1\cdot t_1; 1\cdot t_1; 0\cdot t_1; 0\cdot t_1)$
$+ ((-1)\cdot t_2; 0\cdot t_2; 0\cdot t_2; 0\cdot t_2; 1\cdot t_2; 0\cdot t_2) + (0\cdot t_3; (-1)\cdot t_3; 0\cdot t_3;$
$0\cdot t_3; 0\cdot t_3; 1\cdot t_3) = t_1\cdot(1;1;1;1;0;0) + t_2\cdot(-1;0;0;0;1;0) +$
$+ t_3\cdot(0;-1;0;0;0;1)$

Ответ: о.р.: $(t_1 - t_2; t_1 - t_3; t_1; t_1; t_2; t_3)$

Ф.С.Р. одноp. СЛАУ: $\{(1;1;1;1;0;0), (-1;0;0;0;1;0),$
$(0;-1;0;0;0;1)\}$

2.3.37

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - I \\ III - 3I \\ IV - I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2 \cdot III + II \\ IV - II \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&0\\0&2&-2&2&0\\0&0&6&-10&0\\0&0&3&-9&0\end{array}\right)_{2\cdot IV-III}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&0\\0&2&-2&2&0\\0&0&6&-10&0\\0&0&0&-8&0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=4 \Rightarrow$ сист. совм. | $\Rightarrow$ сист. определ.

$n=4 \Rightarrow r=n$

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+2x_4=0\\2x_2-2x_3+2x_4=0\\6x_3-10x_4=0\\-8x_4=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\\x_4=0\end{cases}$$

о.р.: $(0;0;0;0)$

т.к. сист. определ., то Ф.С.Р. однор. СЛАУ – нет.

Ответ: о.р.: $(0;0;0;0)$,

Ф.С.Р. однор. СЛАУ – нет.

$\blacksquare$

2.3.38

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0\\3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0\\4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0\end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&-4&5&3&0\\3&-6&4&2&0\\4&-8&17&11&0\end{array}\right)_{\substack{2\cdot II-3\cdot I\\ III-2\cdot I}}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&-4&5&3&0\\0&0&-7&-5&0\\0&0&7&5&0\end{array}\right)_{III+II}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 \Rightarrow$ сист. совм.

$n = 4 \Rightarrow r < n$

$\Rightarrow$ сист. неопред.

$r = 2 \Rightarrow 2$ гл. перемен.

$n - r = 4 - 2 = 2 \Rightarrow 2$ своб. перемен.

$$\begin{vmatrix} a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ a_{22}^1 & a_{23}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 28 \neq 0 \Rightarrow x_2, x_3 \text{ – гл. перемен.}$$

x_1, x_4 – своб. перемен.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ -7x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_2 = 2x_1 + 5x_3 + 3x_4 \\ x_3 = -\frac{5}{7}x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{7}x_4 \\ x_3 = -\frac{5}{7}x_4 \end{cases}$$

$$\exists\, x_1 = 2t_1;\ x_4 = 7t_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = t_1 - t_2 \\ x_3 = -5t_2 \end{cases}$$

о.р.: $(2t_1; t_1 - t_2; -5t_2; 7t_2)$

$(2t_1; t_1 - t_2; -5t_2; 7t_2) = (2\cdot t_1 + 0\cdot t_2; 1\cdot t_1 + (-1)\cdot t_2; 0\cdot t_1 +$

$+ (-5)\cdot t_2; 0\cdot t_1 + 7\cdot t_2) = (2\cdot t_1; 1\cdot t_1; 0\cdot t_1; 0\cdot t_1) +$

$+ (0\cdot t_2; (-1)\cdot t_2; (-5)\cdot t_2; 7\cdot t_2) = t_1\cdot(2; 1; 0; 0) + t_2\cdot(0; -1; -5; 7)$

Ответ: о.р.: $(2t_1; t_1 - t_2; -5t_2; 7t_2)$

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(2; 1; 0; 0), (0; -1; -5; 7)\}$

2.3.39

$$\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2\cdot x_5=0 \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6\cdot x_5=0 \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6\cdot x_5=0 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot II-5\cdot I \\ 2\cdot III-5\cdot I \\ 2\cdot IV-7\cdot I \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -18 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -18 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV+III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -18 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III+II \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ 2\cdot IV-3\cdot III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=3 \Rightarrow$ сист. совм.

$n=5 \Rightarrow r<n$

$\Rightarrow$ сист. неопред.

$r=3 \Rightarrow$ 3 гл. перем.

$n-r=5-3=2 \Rightarrow$ 2 свод. перем.

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{33} & a'_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-24)+(-1)\cdot(-6)\cdot 0 +$$

$$+0\cdot 0\cdot 4-0\cdot 1\cdot 4-0\cdot(-1)\cdot(-24)-0\cdot(-6)\cdot 2=-48\neq 0$$

$\Rightarrow x_1, x_3, x_4$ - гл. перемен.

x_2, x_5 - своб. перемен.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0 \\ -3x_2+x_3-6x_4-2x_5=0 \\ -24x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+2x_5=0 \\ -3x_2+x_3-2x_5=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_2-2x_5+2x_5=0 \\ x_3=3x_2+2x_5 \\ x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=0 \\ x_3=3x_2+2x_5 \\ x_4=0 \end{cases}$$

$\exists x_2=t_1;\ x_5=t_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_3=3\cdot t_1+2\cdot t_2 \\ x_4=0 \end{cases}$

о.р.: $(0; t_1; 3t_1+2\cdot t_2; 0; t_2)$

$(0; t_1; 3t_1+2t_2; 0; t_2)=(0\cdot t_1+0\cdot t_2; 1\cdot t_1+0\cdot t_2;$
$3\cdot t_1+2\cdot t_2; 0\cdot t_1+0\cdot t_2; 0\cdot t_1+1\cdot t_2)=(0\cdot t_1; 1\cdot t_1; 3\cdot t_1;$
$0\cdot t_1; 0\cdot t_1)+(0\cdot t_2; 0\cdot t_2; 2\cdot t_2; 0\cdot t_2; 1\cdot t_2)=$
$=t_1\cdot(0;1;3;0;0)+t_2\cdot(0;0;2;0;1)$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(0;1;3;0;0), (0;0;2;0;1)\}$

Ответ: о.р.: $(0; t_1; 3t_1+2t_2; 0; t_2)$

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\{(0;1;3;0;0), (0;0;2;0;1)\}$ ∎

2.3.40

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + a x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II} - 2\cdot\text{I} \\ 2\cdot\text{III} - \text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3\cdot\text{III} + (2a-1)\cdot\text{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2a & 0 \end{array}\right)$$

1° при $2+2a=0$; $a=-1$

$r(A) = r(A|B) = 2 \Rightarrow$ сист. совм.

$n = 3 \Rightarrow r < n$

$\Rightarrow$ сист. неопред.

$r = 2 \Rightarrow 2$ гл. перемен.

$n - r = 3 - 2 = 1 \Rightarrow 1$ св. перемен.

$$\begin{vmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2 \text{ — гл. перемен.}$$

x_3 — своб. перемен.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 = -\frac{10}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

$$\exists\, x_3 = 3t \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5t \\ x_2 = t \end{cases}$$

о.р.: $(-5t; t; 3t)$

$(-5t; t; 3t) = (t\cdot(-5);\ t\cdot 1;\ t\cdot 3) = t\cdot(-5; 1; 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ $= \{(-5; 1; 3)\}$

2^0 при $2+2a \neq 0;\ a \neq -1$

$r(A) = r(A|B) = 3 \Rightarrow$ сист. совм. $\Big| \Rightarrow$ сист. определ.

$n = 3 \Rightarrow r = n$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_2 + x_3 = 0 \\ (1+a)\cdot x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

о.р.: $(0; 0; 0)$

т.к. сист. определ. $\Rightarrow$ Ф.С.Р. – нет.

Ответ: при $a = -1$: сист. совм, неопред.,

о.р.: $(-5t; t; 3t)$

Ф.С.Р. однород. СЛАУ: $\{(-5; 1; 3)\}$

при $a \neq -1$: сист. совм., определ.,

о.р.: $(0; 0; 0)$

Ф.С.Р. однор. СЛАУ – нет. ■

2.3.41

$$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3-2x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+3x_4=0 \\ 5x_1+6x_2-4x_3-x_4=0 \\ 3x_1+5x_2-\lambda\cdot x_3=0 \end{cases}$$

$\square$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -\lambda & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \underline{\text{II}}-3\cdot\underline{\text{I}} \\ \underline{\text{III}}-5\cdot\underline{\text{I}} \\ \underline{\text{IV}}-3\cdot\underline{\text{I}} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 21 & -9 & -11 & 0 \\ 0 & 14 & -\lambda-3 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 11\cdot\underline{\text{III}}-21\cdot\underline{\text{II}} \\ 11\cdot\underline{\text{IV}}-14\cdot\underline{\text{II}} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -36 & -58 & 0 \\ 0 & 0 & -11\lambda+9 & -24 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ 36\cdot\underline{\text{IV}}+(-11\lambda+9)\cdot\underline{\text{III}} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -36 & -58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1386+638\lambda & 0 \end{array}\right)$$

1° при $-1386+638\lambda=0$

$$11\cdot(58\lambda-126)=0$$

$$58\lambda-126=0$$

$$\lambda=\frac{126}{58}$$

$r(A) = r(A|B) = 3 \Rightarrow$ сист. совм. | $\Rightarrow$ сист. неопред.

$n = 4 \Rightarrow r < n$

$r = 3 \Rightarrow 3$ гл. диаг.

$n - r = 4 - 3 = 1 \Rightarrow 1$ своб. перемен.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -36 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 \cdot (-36) + (-3) \cdot (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$- 0 \cdot 11 \cdot 1 - 0 \cdot (-3) \cdot (-36) - 0 \cdot (-3) \cdot 1 =$$

$= -396 \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3$ — гл. перемен.

x_4 — своб. перемен.

$$\sim \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 11 \cdot x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -36x_3 - 58x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{173}{99} x_4 \\ x_2 = -\frac{47}{66} x_4 \\ x_3 = -\frac{29}{18} x_4 \end{cases}$$

$\exists\, x_4 = t \Rightarrow$
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{173}{99} t \\ x_2 = -\frac{47}{66} t \\ x_3 = \frac{-29}{18} t \end{cases}$$

о.р. $\left(-\frac{173}{99}t; -\frac{47}{66}t; -\frac{29}{18}t; t\right)$

$\left(-\frac{173}{99}t; -\frac{47}{66}t; -\frac{29}{18}t; t\right) = \left(t \cdot \left(-\frac{173}{99}\right); t \cdot \left(-\frac{47}{66}\right);\right.$

$\left. t \cdot \left(-\frac{29}{18}\right); t \cdot 1\right) = t\left(-\frac{173}{99}; -\frac{47}{66}; -\frac{29}{18}; 1\right)$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\left\{\left(-\frac{173}{99}; -\frac{47}{66}; -\frac{29}{18}; 1\right)\right\}$

2° при $58\lambda - 126 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq \frac{126}{58}$

$\left.\begin{array}{l} r(A) = r(A|B) = 4 \Rightarrow \text{сист. совм.} \\ n = 4 \Rightarrow r = n \end{array}\right| \Rightarrow$ сист. определ.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 11x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -36x_3 - 58x_4 = 0 \\ (638\lambda - 1386)x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

о.р.: $(0; 0; 0; 0)$

т.к. сист. определ. $\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ – нет.

Ответ: при $\lambda = \frac{126}{58}$ – сист. совм, неопред.,

о.р.: $\left(-\frac{173}{99}t; -\frac{47}{66}t; -\frac{29}{18}t; t\right)$,

Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\left\{\left(-\frac{173}{99}; -\frac{47}{66}; -\frac{29}{18}; 1\right)\right\}$

при $\lambda \neq \frac{126}{58}$ – сист. совм, определ.,

о.р.: $(0; 0; 0; 0)$,

Ф.С.Р однор. СЛАУ – нет. $\blacksquare$