6.2.2 $x_n = 2^{n+1}$

$x_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4$

$x_2 = 2^{2+1} = 2^3 = 8$

$x_3 = 2^{3+1} = 2^4 = 16$

$x_4 = 2^{4+1} = 2^5 = 32$

Ответ: 4, 8, 16, 32.

6.2.3 $x_n = n^2 + 2n + 3$

$x_1 = 1^2 + 2\cdot 1 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$x_2 = 2^2 + 2\cdot 2 + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

$x_3 = 3^2 + 2\cdot 3 + 3 = 9 + 6 + 3 = 18$

$x_4 = 4^2 + 2\cdot 4 + 3 = 16 + 8 + 3 = 27$

Ответ: 6, 11, 18, 27.

6.2.4 $x_n = (-1)^n + 1$

$x_1 = (-1)^1 + 1 = -1 + 1 = 0$

$x_2 = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$x_3 = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$

$x_4 = (-1)^4 + 1 = 1 + 1 = 2$

Ответ: 0, 2, 0, 2.

6.2.5 $x_n = \frac{n+1}{n^2}$

$x_1 = \frac{1+1}{1^2} = \frac{2}{1} = 2$

$x_2 = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}$

$x_3 = \frac{3+1}{3^2} = \frac{4}{9}$

$x_4 = \frac{4+1}{4^2} = \frac{5}{16}$

Ответ: $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}$.

6.2.6 $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

$x_1 = \sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$x_2 = \sin\left(\frac{\pi \cdot 2}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$

$x_3 = \sin\left(\frac{\pi \cdot 3}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$x_4 = \sin\left(\frac{\pi \cdot 4}{2}\right) = \sin(2\pi) = 0$

Ответ: $1, 0, -1, 0$.

6.2.7 $x_n = -n \cdot x_{n-1}$; $x_1 = -1$

$x_2 = -(2)\cdot(-1) = (-2)\cdot(-1) = 2$

$x_3 = -(3)\cdot 2 = -3\cdot 2 = -6$

$x_4 = -(4)\cdot(-6) = (-4)\cdot(-6) = 24$

Ответ: $-1, 2, -6, 24$.

6.2.13 $x_n = (-1)^n$

$-2 < (-1)^n < 2 \Rightarrow M = 2,\ |(-1)^n| < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ послед-ть ограничена

6.2.14 $x_n = n^3 + 2n$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^3 + 2n > 0 \Rightarrow x_n > 0 \Rightarrow M = 0$

$\nexists M: \forall n\ x_n < M$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ послед-ть ограничена снизу

6.2.15 $x_n = -\ln(n)$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow \ln(n) \geq 0 \Rightarrow -\ln(n) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n < 1 \Rightarrow M = 1$

$\nexists M: \forall n\ x_n > M$ $\Rightarrow$ послед-ть ограничена сверху

6.2.16 $x_n = \frac{n+1}{n}$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1 : \forall n : 0 < \frac{n+1}{n} < 3$, т.к. $\forall n : x_n > x_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n| < 3 \Rightarrow M = 3 \Rightarrow$ послед-ть ограничена

(6.2.17) $x_n = (-1)^n \cdot n$

в зависимости от чётности „n" знак члена последовательности чередуется. $n \to +\infty \Rightarrow$ значения будут стремится и к $+\infty$, и к $-\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow$ послед-ть не ограничена.

(6.2.18) $x_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2k \\ \sqrt{n} & \text{при } n = 2k+1 \end{cases}$

$x_1 = \sqrt{1} = 1$, $n = 1 = 2 \cdot 0 + 1$

$x_2 = 1$, $n = 2 = 2 \cdot 1$

$x_3 = \sqrt{3}$, $n = 3 = 2 \cdot 1 + 1$

$x_4 = 1$, $n = 4 = 2 \cdot 2$

$x_5 = \sqrt{5}$, $n = 5 = 2 \cdot 2 + 1$

$\Downarrow$

$x_n > 0$ и стремится к $+\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ послед-ть ограничена снизу

6.2.20 $x_n = n - \frac{1}{n}$

$x_{n+1} = n+1 - \frac{1}{n+1}$

$$x_n < x_{n+1}$$
$$\Updownarrow$$
$$n - \frac{1}{n} < n - \frac{1}{n+1} + 1$$

=> послед-ть строго монотонная

$x_{n+1} - x_n = n - \frac{1}{n+1} - n + \frac{1}{n} + 1 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + 1 > 1$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \geq 0 \ \forall n$

Ответ: строго возрастающая, ограниченная снизу послед-ть

6.2.21 $x_n = \cos\frac{\pi n}{2}$

$x_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$; $x_2 = \cos\pi = -1$; $x_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$;

$x_4 = \cos 2\pi = 1$; $x_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ldots$

=> будет происходить повторение значений через каждые 4 значения:

$$\begin{cases} n = 4k: & x_n = 1 \\ n = 4k+1: & x_n = 0 \\ n = 4k+2: & x_n = -1 \\ n = 4k+3: & x_n = 0 \end{cases}$$

=> послед-ть немонотонная,

$|x_n| \leq 1$ => ограниченная

Ответ: немонотонная, ограниченная послед-ть.

(6.2.22) $x_n = -\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

$$x_n = \frac{-n^2-1}{n^2} = -\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2} = -1 - \frac{1}{n^2}$$

$$x_n < x_{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$-1 - \frac{1}{n^2} < -1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$ => строго монотонная послед-ть

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$$

$x_n < 0$, т.к. $-1 - \frac{1}{n^2} < 0$

=>

$x_n \geq -2$, т.к. $\frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{n^2} \geq -2$

=> послед-ть ограничена

Ответ: строго возрастающая, ограниченная послед-ть.

(6.2.23) $x_n = -\sqrt{n}$

Знак послед-ти „$-$" => при $\uparrow n$, x_n убывает. $\sqrt{n} \to +\infty$ =>

=> $x_n \to -\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}: x_n > x_{n+1}$ =>

=> убывающая прогрессия => строго монотонная

$\forall n: x_n < 0 \Rightarrow$ прогрессия ограничена сверху

Ответ: строго убывающая, ограниченная сверху послед-ть.

6.2.24 $x_n = \pi, \pi, \pi \dots$

$\forall n: x_n = x_{n+1} \Rightarrow$ послед-ть невозрастающая/неубывающая $\Rightarrow$ монотонная

$\forall n: |x_n| < 2\pi \Rightarrow M = 2\pi \Rightarrow$ ограниченная

Ответ: монотонная, ограниченная послед-ть.

6.2.26 $\{x_n\} = \{(-1)^n\}; \{y_n\} = \{(-2)^n\}$

$\square$

$\{x_n + y_n\} = \{(-1)^n + (-2)^n\} = \{(-1)^1 + (-2)^1, (-1)^2 + (-2)^2, (-1)^3 + (-2)^3, \dots\} = \{-1-2, 1+4, -1-8, \dots\} = \{-3, 5, -9, \dots\}$

$\{x_n - y_n\} = \{(-1)^n - (-2)^n\} = \{-1-(-2), 1-4, -1-(-8), \dots\} = \{1, -3, 7, \dots\}$

$\{x_n \cdot y_n\} = \{(-1)^n \cdot (-2)^n\} = \{((-1)\cdot(-2))^n\} = \{2^n\} = \{2, 4, 8, \dots\}$

$\{x_n / y_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{(-2)^n}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$

$\blacksquare$

(6.2.27) $\{x_n\} = \{n^2+1\}$; $\{y_n\} = \{n\}$

$\square$

$\{x_n + y_n\} = \{n^2+1+n\} = \{n^2+n+1\} = \{3, 7, 13, \ldots\}$

$\{x_n - y_n\} = \{n^2+1-n\} = \{n^2-n+1\} = \{1, 3, 7, \ldots\}$

$\{x_n \cdot y_n\} = \{(n^2+1)\cdot n\} = \{n^3+n\} = \{2, 10, 30, \ldots\}$

$\{x_n / y_n\} = \{(n^2+1)/n\} = \{n + \frac{1}{n}\} = \{1+\frac{1}{1}, 2+\frac{1}{2},$
$3+\frac{1}{3}, \ldots\} = \{2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, \ldots\}$

$\blacksquare$

(6.2.28) $\{x_n\} = \{n\}$; $\{y_n\} = \{3n\}$; $\alpha = 2$, $\beta = -1$

$\alpha \cdot x_n + \beta y_n = ?$

$\square$

$\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n = 2 \cdot \{n\} - 1 \cdot \{3n\} = \{2n\} - \{3n\} =$
$= \{2n - 3n\} = \{-n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

$\blacksquare$

(6.2.29) $\{x_n\} = \{(\sqrt{2})^n\}$; $\{y_n\} = \{1\}$; $\alpha = \{\sqrt{2}\}$; $\{\beta\} = \{-5\}$

$\square$

$\alpha \cdot x_n + \beta \cdot y_n = \sqrt{2} \cdot \{(\sqrt{2})^n\} + (-5) \cdot \{1\} = \{(\sqrt{2})^{n+1}\} +$
$+ \{-5\} = \{(\sqrt{2})^{n+1} - 5\} = \{-3, 2\sqrt{2} - 5, -1, \ldots\}$

$\blacksquare$