Стецук Максим 2гр. 1п.гр.

Метод треугольной факторизации

Система ур-й:

$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 37$$

$$3x_1 + 28x_2 + 12x_3 + 47x_4 - 29x_5 = 188$$

$$4x_1 + 31x_2 + 0\cdot x_3 + 56x_4 - 29x_5 = 205$$

$$1\cdot x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 20x_4 - 14x_5 = 40$$

$$2x_1 + 12x_2 - 19x_3 + 9x_4 + 20x_5 = 240$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 11 & -5 \\ 3 & 28 & 12 & 47 & -29 \\ 4 & 31 & 0 & 56 & -29 \\ 1 & 8 & 4 & 20 & -14 \\ 2 & 12 & -19 & 9 & 20 \end{pmatrix} = L\cdot R = (*)$$

$$(*) = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} & r_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} r_{11} & l_{11} r_{12} & l_{11} r_{13} & l_{11} r_{14} & l_{11} r_{15} \\ l_{21} r_{11} & l_{21} r_{12} + l_{22} r_{22} & l_{21} r_{13} + l_{22} r_{23} & l_{21} r_{14} + l_{22} r_{24} & l_{21} r_{15} + l_{22} r_{25} \\ l_{31} r_{11} & l_{31} r_{12} + l_{32} r_{22} & l_{31} r_{13} + l_{32} r_{23} + l_{33} r_{33} & l_{31} r_{14} + l_{32} r_{24} + l_{33} r_{34} & l_{31} r_{15} + l_{32} r_{25} + l_{33} r_{35} \\ l_{41} r_{11} & l_{41} r_{12} + l_{42} r_{22} & l_{41} r_{13} + l_{42} r_{23} + l_{43} r_{33} & l_{41} r_{14} + l_{42} r_{24} + l_{43} r_{34} + l_{44} r_{44} & l_{41} r_{15} + l_{42} r_{25} + l_{43} r_{35} + l_{44} r_{45} \\ l_{51} r_{11} & l_{51} r_{12} + l_{52} r_{22} & l_{51} r_{13} + l_{52} r_{23} + l_{53} r_{33} & l_{51} r_{14} + l_{52} r_{24} + l_{53} r_{34} + l_{54} r_{44} & l_{51} r_{15} + l_{52} r_{25} + l_{53} r_{35} + l_{54} r_{45} + l_{55} r_{55} \end{pmatrix}$$

] диагональные элементы в матрице $R=1$.

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$l_{11}=a_{11}/r_{11}=1/1=1$; $l_{21}=a_{21}/r_{11}=3/1=3$;

$l_{31}=a_{31}/r_{11}=4/1=4$; $l_{41}=a_{41}/r_{11}=1/1=1$;

$l_{51}=a_{51}/r_{11}=2/1=2$; $r_{12}=a_{12}/l_{11}=7/1=7$;

$r_{13}=a_{13}/l_{11}=-3/1=-3$, $r_{14}=a_{14}/l_{11}=11/1=11$;

$r_{15}=a_{15}/l_{11}=-5/1=-5$

т.к. r_{ii} мы взяли $=1$:

$l_{22}=a_{22}-l_{21}r_{12}=28-3\cdot7=7$; $l_{32}=a_{32}-l_{31}\cdot r_{12}=31-28=3$;

$l_{42}=a_{42}-l_{41}\cdot r_{12}=8-7=1$; $l_{52}=a_{52}-l_{51}\cdot r_{12}=12-2\cdot7=-2$;

$r_{23} = (a_{23} - l_{21} \cdot r_{13}) / l_{22} = (12 - 3 \cdot (-3)) / 7 = 3$

$r_{24} = (a_{24} - l_{21} \cdot r_{14}) / l_{22} = (47 - 3 \cdot (11)) / 7 = 2$

$r_{25} = (a_{25} - l_{21} \cdot r_{15}) / l_{22} = (-29 - 3 \cdot (-5)) / 7 = -2$

$l_{33} = a_{33} - l_{31} r_{13} - l_{32} r_{23} = 0 - 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 3 = 3$

$l_{43} = a_{43} - l_{41} r_{13} - l_{42} r_{23} = 4 - 1 \cdot (-3) - 1 \cdot 3 = 4$

$l_{53} = a_{53} - l_{51} r_{13} - l_{52} r_{23} = -19 - 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 3 = -7$

$r_{34} = (a_{34} - l_{31} r_{14} - l_{32} r_{24}) / l_{33} = (56 - 44 - 6) / 3 = 2$

$r_{35} = (a_{35} - l_{31} r_{15} - l_{32} r_{25}) / l_{33} = (-29 + 20 + 6) / 3 = -1$

$l_{44} = a_{44} - l_{41} r_{14} - l_{42} r_{24} - l_{43} r_{34} = 20 - 11 - 2 - 8 = -1$

$l_{54} = a_{54} - l_{51} r_{14} - l_{52} r_{24} - l_{53} r_{34} = 9 - 22 + 4 + 14 = 5$

$r_{45} = (a_{45} - l_{41} r_{15} - l_{42} r_{25} - l_{43} r_{35}) / l_{44} = (-14 + 5 + 2 + 4) / (-1) = 3$

$l_{55} = a_{55} - l_{51} r_{15} - l_{52} r_{25} - l_{53} r_{35} - l_{54} r_{45} = 20 + 10 - 4 - 7 - 15 = 4$

Получим 2 треугольных матрицы!

т.к. наша СЛАУ: $AX = B$, а $A = L \cdot R$, то:

$LRX = B$ => решаем последовательно две системы: 1) $LZ = B$ (относительно Z)

2) $RX = Z$ (относительно X)

Решим системы методом подстановки:

1° $LZ = B$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 188 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 205 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 40 \\ 2 & -2 & -7 & 5 & 4 & 240 \end{array}\right)$$

$z_1 = 37/1 = 37$; $z_2 = (188 - 37\cdot 3)/7 = 11$

$z_3 = (205 - 4\cdot 37 - 3\cdot 11)/3 = 8$;

$z_4 = (40 - 37 - 11 - 8\cdot 4)/(-1) = 40 \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} 37 \\ 11 \\ 8 \\ 40 \\ 11 \end{pmatrix}$

$z_5 = (240 - 2\cdot 37 + 2\cdot 11 + 7\cdot 8 - 5\cdot 40)/4 = 11$

2° $RX = Z$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & -3 & 11 & -5 & 37 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$z_1 = 11/1 = 11$; $z_2 = 40 - 3\cdot 11 = 7$; $z_3 = 8 + 11 - 2\cdot 7 = 5$;

$z_4 = 11 + 2\cdot 11 - 2\cdot 7 - 3\cdot 5 = 4$; $z_5 = 37 + 5\cdot 11 - 11\cdot 7 + 3\cdot 5 - 7\cdot 4 = 2$

Значит:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$, $x_5 = 11$.