Системы линейных алгебраических уравнений

! Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или несовместна, а для совместной системы выяснить, определенна она или неопределенна.

I Метод Гаусса

Алгоритм для решения СЛАУ:

1) Записываем расширенную матрицу системы: $(A|B)$

2) При помощи элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду.

$(A|B) \sim (A'|B')$

При этом: $r(A) = r(A')$, $r(A|B) = r(A'|B')$

3) • если $r(A) < r(A|B)$ => система несовместна => => решений нет!

• если $r(A) = r(A|B)$ => система совместна:

  • если $r = n$, где n - кол-во неизвестных => => система определенна => ровно 1 решение

• если $r < n$ => система неопределенна =>

=> система имеет больше одного решения

! Базисный минор - любой из отличных от нуля миноров матрицы A, порядок которого равен рангу этой матрицы

4) если система совместна и неопределенна, то находим базисный минор матрицы A', состоящий из r строк и r столбцов => => включающий в себя коэффициенты r неизвестных: $x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, \ldots, x_{kr}$.

Тогда:

$x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, \ldots, x_{kr}$ - главные переменные

Оставшиеся $n-r$ - свободные переменные

5) Запишем СЛАУ по матрице $(A' | B')$ и выразим главные переменные через свободные.

] свободные переменные принимают значения: $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$

Тогда, каждую главную переменную снизу вверх выражаем через $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$.

В каждое уравнение подставляем ранее полученные значения главных переменных, выраженных через свободные.
Получаем систему, в которой каждая из главных переменных выражена через свободные, причём каждое выражение однозначно задаёт $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kr}$.

6) Общее решение СЛАУ будет состоять из $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kr}$ выраженных через $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$ и самих $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$!!!

II Метод обратной матрицы. Формула Крамера.

1)] Система из „n" линейных ур-й с „n" неизвестными записана в матричной форме: $A \cdot X = B$, где

$$A = (a_{ij}) ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Если $\det A \neq 0 \Rightarrow$ система совместна и определенна, а её решение задаётся формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

2) Формула Крамера

$$X_k = \frac{D_k}{D}, \quad k=1,2,\dots,n,$$

где: D_k - определитель, получающийся из определителя D заменой „k"-го столбца на столбец свободных членов.

Ⅲ Однородные и неоднородные СЛАУ

! Однородная система всегда совместна, т.к. существует тривиальное реш-е $x_1=x_2=\dots=x_n=0$

Любое решение однородной системы может быть единственным образом представлено в виде: $X=\alpha_1\cdot X_1+\alpha_2\cdot X_2+\dots+\alpha_{n-r}\cdot X_{n-r}$, где $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-r}$ - некоторые числа.

! Любой набор из „n-r" решений системы, обладающих указанным св-м, называется фундаментальной системой решений системы. (Ф.С.Р. однородной системы)