Теория вероятности

Быстрое введение в базовые понятия теорвера

Стецук Максим Николаевич

tulenchikplay@yandex.ru

РГПУ им. А.И.Герцена

ИВТ-3 1гр.2п.гр.

Обзор содержания презентации

1. **Основные определения и понятия**
   - События и их классификация
   - Классическое определение вероятностей
   - Свойства вероятностей и относительная частота
2. **Формулы комбинаторики**
   - Основные формулы
   - Пример решения задачи
3. **Теоремы сложения и умножения вероятностей**
   - Сложение вероятностей
   - Умножение вероятностей
   - Независимые и противоположные события
   - Появления хотя бы одного события
   - Пример решения задачи

События и их виды

Определение

Событием в теории вероятностей называется всякий факт, который может произойти в результате некоторого испытания. Наблюдаемые нами события можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные, случайные.

Событие достоверное, если при всех испытаниях рассматриваемое событие всегда наступает.

Событие невозможное, если при всех испытаниях событие никогда не наступает.

Событие случайное, если в результате испытания событие может появиться или не появиться. Например, выигрываем на купленный билет лотереи.

Классическое определение вероятностей

Определение

Пространством элементарных исходов называется множество всех взаимно исключающихся исходов испытания. Его обозначают Ω.

Те исходы, при которых интересующее нас событие наступает, назовем благоприятствующими этому событию.

Определение

Вероятностью события называется отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n равновозможных несовместных элементарных исходов испытания и обозначается $p(A)$, т.е. $p(A) = \frac{m}{n}$.

Свойства вероятностей и относительная частота

Свойства вероятностей

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события заключена между нулем и единицей: $0 \leq p(A) \leq 1$

Определение

Относительной частотой события Относительной частотой события называется отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний и обозначается $w(A)$.

Основные формулы комбинаторики

- Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающихся только порядком следования. Число всех возможных перестановок из n различных элементов равно $P_n = n!$.
- Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком следования. Число возможных размещений из n различных элементов по k равно $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по k, которые отличаются составом элементов. Число возможных сочетаний из n различных элементов по k равно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример

Условие задачи

В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение

Общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно взять 6 деталей из 10, т.е. $n = C_{10}^{6}$. Подсчитаем исходы, благоприятствующие интересующему нас событию: 4 стандартных из 7 можно взять C_7^4 способами, при этом остальные 2 детали должны быть нестандартными, их можно взять из 3 нестандартных деталей C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_7^4 * C_3^2$. Искомая вероятность равна $p(A) = \frac{C_7^4 * C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{5*6*7*3*24}{6*7*8*9*10} = 0,5$.

Сложение вероятностей

Суммой $A + B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.
Суммой нескольких событий $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема (Сложения вероятностей несовместимых событий)

Вероятность появления одного из двух несовместимых событий, равна сумме вероятностей этих событий: $p(A + B) = p(A) + p(B)$.

Следствие

Вероятность появления одного из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:
$p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$.

Умножение вероятностей

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в их одновременном осуществлении. Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.
Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема (Умножения вероятностей)

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло $p(AB) = p(A) * p_A(B)$.

Умножение вероятностей

Следствие

Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли $p(A_1 A_2 \cdots A_n) = p(A_1) * p_{A_1}(A_2) \cdots p_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1}}(A_n)$.

Независимые и противоположные события

Независимые события

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е. $p_A(B) = p(B)$. Для независимых событий вероятность совместного появления равна произведению вероятностей этих событий: $p(AB) = p(A) * p(B)$ Несколько событий называют независимыми в совокупности, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Если события $A_1, A_2, \cdots, A_n$ независимы в совокупности, то
$p(A_1 A_2 \cdots A_n) = p(A_1) * p(A_2) * \cdots * p(A_n)$

Противоположные события

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если оно наступает тогда, когда A не наступает. Для противоположных событий справедливо равенство: $p(A) + p(\overline{A}) = 1$

Появления хотя бы одного события

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \cdots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \cdots, \overline{A_n}$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A_1}) * \cdots * p(\overline{A_n})$$

В частности, если события $A_1, A_2, \cdots, A_n$, имеют одинаковую вероятность p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна $p(A) = 1 - q^n$, где $q = 1 - p$.
Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Теорема (Сложения вероятностей совместных событий)

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$

Пример

Условие задачи

В урне 5 белых и 6 черных шаров. Из урны извлекаются шары до появления черного шара. Найти вероятность, что произведено ровно три извлечения, если: а) после каждого извлечения шар возвращается в урну; б) извлеченные шары откладываются в сторону.

Решение

Обозначим через A_i событие, состоящее в появлении черного шара при i -ом извлечении. Тогда интересующее нас событие $A = \overline{A_1} * \overline{A_2} * A_3$. Но в пункте а) эти события независимы, поэтому $p(A) = p(\overline{A_1}) * p(\overline{A_2}) * p(A_3) = \frac{5}{11} * \frac{5}{11} * \frac{6}{11} = \frac{150}{1331} \approx 0,11$. А в пункте б) эти события зависимы, поэтому

$p(A) = p(\overline{A_1}) * p_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) * p_{\overline{A_1 A_2}}(A_3) = \frac{5}{11} * \frac{4}{10} * \frac{6}{9} = \frac{4}{33} \approx 0,12$

На этом наше введение в основы теорвера заканчивается

Продолжать разбор и сильнее погружаться в теорию вероятности мы будем на следующих занятиях)