Виды матриц

1. Строчная матрица

Def: Строчная матрица – матрица состоящая из единственной строки.

$$A_{1*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

2. Столбцовая матрица

Def: Столбцовая матрица – это матрица, состоящая из одного столбца.

$$A_{n*1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = colon(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

3. Прямоугольная матрица

Def: Прямоугольная матрица – это матрица в которой количество строк не равно количеству столбцов.

$$A_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Квадратная матрица

Def: Квадратная матрица – это матрица размера n*n.

$$A_{n*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5. Нулевая матрица

Def: Это матрица, все элементы которой равны нулю.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6. Диагональная матрица

Def: Диагональная матрица – это квадратная матрица у которой все элементы не принадлежащие главной диагонали равны нулю.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

7. Скалярная матрица

Def: Скалярная матрица – это диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны между собой.

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} = diag(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$$

8. Единичная матрица

Def: Единичная матрица – это квадратная матрица с единицами на главной диагонали.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = diag(1,1, \dots ,1)$$

9. Треугольная матрица

Def: Треугольная матрица – это квадратная матрица у которой все элементы выше главной диагонали или ниже её равны нулю.

1) Верхняя треугольная матрица:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2) Нижняя треугольная матрица:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

10. Симметричная матрица

Def: Симметричная матрица – это квадратная матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали.

$$A_{3*3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

11. Транспонированная матрица

Def: Транспонированная матрица – это матрица, полученная из исходной матрицы путём замены строк на столбцы.

- $A_{n*m} = (a_{ij})$ – исходная матрица
- $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{m*n}} = (\mathrm{a}_{\mathrm{ji}})$ – транспонированная матрица

Ex:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

12. Обратная матрица

Def: Обратная матрица – это такая матрица, при умножении на которую исходная матрица даёт в результате единичную матрицу.

$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$

Ex:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$A * A^{-1} = \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = E$

13. Ортогональная матрица

Def: Ортогональная матрица – это квадратная матрица с вещественными элементами, результат умножения которой на транспонированную матрицу, равен единичной матрице.

Пусть A – ортогональная матрица:

$A * A^T = A^T * A = E$

Примечание: Для ортогональной матрицы, её обратная матрица равна её транспонированной матрице.

14. Ступенчатая матрица

Def: Ступенчатая матрица – это матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

-если эта матрица содержит нулевую строку, то все строки расположенные под ней тоже нулевые;

-если первый ненулевой элемент некоторой строки расположен в столбце с номером i, то первый ненулевой элемент следующей строки должен находиться в столбце с номером больше чем i.

$$A_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Противоположная матрица

Def: Противоположная матрица, такая, что если прибавить её к матрице A, то получится нулевая матрица.

$A + (-A) = O$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Использование матриц в различных дисциплинах

Матрицы изначально были придуманы как математические объекты, которые использовались для упрощения решения различных задач или создания новых способов решения. Они сильно упрощают работу с системами уравнений, а также их решения, также матрицы широко используются для решения задач в векторном пространстве, а именно задач по стереометрии. Одним из хороших примеров является поиск уравнения перпендикуляра между двумя плоскостями, с помощью составления матрицы из базисных векторов и коэффициентов, взятых из уравнений плоскостей. Это малая часть примеров использования матриц в такой науке, как математике.

В наше время удобство и простота использования матриц для различных задач, обрели своё распространение в различных областях человеческой деятельности. Они широко распространены не только в математике, как это было ранее, а во многих других науках и дисциплинах, таких как физика, техника, экономика, теория управления, статистика и многих других. Например, в экономике матрицы широко применяются для проведения расчетов тех или иных показателей, ведь благодаря использованию матриц, можно добиться хорошей наглядности, что очень необходимо не только в экономике, но и во многом другом. Даже привычный всем современный интернет, который практически каждый человек использует ежедневно, работает на системе, которая частично построена благодаря теории матриц. Как бы то ни было странно, несмотря на то, что матрица – математический объект, они также применяются и в тех науках, которые не имеют прямой связи с математикой, например в биологии, а именно построение биологических матриц для решения задач на синтез белка и многого другого.

Можно сказать, что, несмотря на свою незаметность, теория матриц сильно повлияла своим появлением на многие науки и дала сильный рывок для их развития.