Стецук Максим Николаевич 2 группа

Вариант 23

Задание 1 Найти обратную матрицу методом присоединённой матрицы (с использованием алгебраических дополнений) для данной матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\-1&1&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$$

□

1) $\det A=\begin{vmatrix}2&2&2\\-1&1&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot1+2\cdot(-1)\cdot2+2\cdot(-1)\cdot1-2\cdot1\cdot2-2\cdot(-1)\cdot1-2\cdot(-1)\cdot1=$

$=2-4-2-4+2+2=-4$

2) $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot1-(-1)\cdot1=2$; $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\2&1\end{vmatrix}=-(-1+2)=-1$;

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\2&1\end{vmatrix}=(-1)\cdot1-2\cdot1=-3$; $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix}=-(2\cdot1-2\cdot1)=0$;

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&2\\2&1\end{vmatrix}=2\cdot1-2\cdot2=-2$; $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&2\\2&1\end{vmatrix}=-(2-4)=2$;

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2&2\\1&-1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-2\cdot1=-4$; $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-(2\cdot(-1)-2\cdot(-1))=0$;

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&2\\-1&1\end{vmatrix}=2\cdot1-2\cdot(-1)=4$.

3) $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\0&-2&2\\-4&0&4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2&0&-4\\-1&-2&0\\-3&2&4\end{pmatrix}$

4) $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\widetilde{A}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-4\\-1&-2&0\\-3&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$ ■

Задание 2 Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}4&-3\\-1&2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\5&1\end{pmatrix}$$

□ $A\cdot X\cdot C=B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$

$\det A=\begin{vmatrix}4&-3\\-1&2\end{vmatrix}=8-3=5$; $\det C=\begin{vmatrix}-2&-2\\1&0\end{vmatrix}=0-(-2)=2$;

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\cdot\tilde{C}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}c_{22} & -c_{12}\\ -c_{21} & c_{11}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}2\cdot3+3\cdot5 & 2\cdot5+3\cdot1\\ 1\cdot3+4\cdot5 & 1\cdot5+4\cdot1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}21 & 13\\ 23 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}21\cdot0+13\cdot(-1) & 21\cdot2+13\cdot(-2)\\ 23\cdot0+9\cdot(-1) & 23\cdot2+9\cdot(-2)\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-13 & 16\\ -9 & 28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{10} & \frac{8}{5}\\ -\frac{9}{10} & \frac{14}{5}\end{pmatrix}$$ ■

Задание 3. Решить СЛАУ по формулам Крамера

$$\begin{cases}-2x_1+4x_2=3\\ 1\cdot x_1+2\cdot x_2=5\end{cases}$$

□

$$D=\det A=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(-2)\cdot2-4\cdot1=-8$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=3\cdot2-4\cdot5=6-20=-14;\ D_2=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=(-2)\cdot5-3\cdot1=-10-3=-13$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-14}{-8}=\frac{7}{4};\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-13}{-8}=\frac{13}{8}.$$

Ответ: $\left(\frac{7}{4};\frac{13}{8}\right)$ ■

Задание 4. СЛАУ Исследовать систему линейных уравнений. Для совместных систем найти общее решение, одно частное решение. Найти Ф.С.Р для соответствующей однородной системы уравнений.

$$\begin{cases}1\cdot x_1+2\cdot x_2+2\cdot x_3+3x_4=1\\ 6\cdot x_1-3x_2-3x_3-x_4=-9\\ -7x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3-2x_4=8\\ 3x_1-9x_2-9x_3-10x_4=-12\end{cases}$$

□

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9\\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8\\ 3 & -9 & -9 & -10 & -12\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ II-6\cdot I\\ III+7\cdot I\\ IV-3\cdot I\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15\\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15\\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ III+II\\ IV-II\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=2 \Rightarrow$ сист. совм.
$n=4 \Rightarrow r<n$ | $\Rightarrow$ сист. неопред.

$r=2 \Rightarrow$ две гл. переменные

$n-r=4-2=2 \Rightarrow$ две своб. переменные

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -15 \end{vmatrix} = 1\cdot(-15)-2\cdot 0 = -15 \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2 \text{ - гл. переменные}$$

x_3, x_4 - своб. переменные

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1 \\ -15x_2-15x_3-19x_4=-15 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=1-2x_2-2x_3-3x_4 \\ x_2=1-x_3-\frac{19}{15}x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=1-2\cdot(1-x_3-\frac{19}{15}x_4)-2x_3-3x_4 \\ x_2=1-x_3-\frac{19}{15}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=-1-\frac{7}{15}x_4 \\ x_2=1-x_3-\frac{19}{15}x_4 \end{cases}$$

$\exists\, x_3=t_1$; $\exists\, x_4=t_2$.

$$\begin{cases} x_1=-1-\frac{7}{15}t_2 \\ x_2=1-t_1-\frac{19}{15}t_2 \end{cases}$$

Значит, о.р.: $(-1-\frac{7}{15}t_2; 1-t_1-\frac{19}{15}t_2; t_1; t_2)$

$\exists\, t_1=1; t_2=15 \Rightarrow$ ч.р.: $(-1-7; 1-1-19; 1; 15)=(-8; -19; 1; 15)$

однородная система:
$$\begin{cases} 1x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=0 \\ -7x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3-2x_4=0 \\ 3x_1-9x_2-9x_3-10x_4=0 \end{cases}$$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -9 & -9 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim [\text{см. неоднор. систему}] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=2 \Rightarrow$ сист. совм.
$n=4 \Rightarrow r<n$ | $\Rightarrow$ сист. неопред.

$r=2 \Rightarrow$ две гл. переменные

$n-r=4-2=2 \Rightarrow$ две своб. переменные

ан-но неоднор. системе: x_1, x_2 - гл. переменные

x_3, x_4 - своб. переменные

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ -15x_2-15x_3-19x_4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-\frac{7}{15}x_4 \\ x_2=-x_3-\frac{19}{15}x_4 \end{cases}$$

$\exists\, x_3=t_1;\ x_4=t_2$

$$\begin{cases} x_1=-\frac{7}{15}t_2 \\ x_2=-t_1-\frac{19}{15}t_2 \end{cases}$$

Значит, о.р.: $\left(-\frac{7}{15}t_2;-t_1-\frac{19}{15}t_2;t_1;t_2\right)$

$$\left(-\frac{7}{15}t_2;-t_1-\frac{19}{15}t_2;t_1;t_2\right)=\left(0\cdot t_1+\left(-\frac{7}{15}t_2\right);(-t_1)+\left(-\frac{19}{15}t_2\right);t_1+0\cdot t_2;\right.$$

$$\left.0\cdot t_1+t_2\right)=(0\cdot t_1;(-1)\cdot t_1;1\cdot t_1;0\cdot t_1)+\left(-\frac{7}{15}\cdot t_2;-\frac{19}{15}\cdot t_2;0\cdot t_2;1\cdot t_2\right)=$$

$$=t_1\cdot(0;-1;1;0)+t_2\left(-\frac{7}{15};-\frac{19}{15};0;1\right)$$

$\Rightarrow$ Ф.С.Р. однор. СЛАУ: $\left\{(0;-1;1;0),\left(-\frac{7}{15};-\frac{19}{15};0;1\right)\right\}$

Ответ: сист. совм. и неопред.

для неоднород. СЛАУ: о.р. $\left(-1-\frac{7}{15}t_2;1-t_1-\frac{19}{15}t_2;t_1;t_2\right)$

ч.р. $(-8;-19;1;15)$

для однород. СЛАУ: Ф.С.Р. $\left\{(0;-1;1;0),\left(-\frac{7}{15};-\frac{19}{15};0;1\right)\right\}$ ■

Задание 5 Даны векторы $\overline{a}=-4\overline{i}+1\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=-3\overline{i}+3\overline{j}+1\cdot\overline{k}$, $\overline{c}=-2\overline{i}-1\overline{j}-2\overline{k}$

Найти:

5.1) Координаты орта вектора $\overline{c}$

5.2) Координаты вектора $5\overline{a}+3\overline{b}+2\overline{c}$

5.3) Разложение вектора по базису i,j,k: $2\overline{a}+7\overline{b}-3\overline{c}$

5.4) Проекцию вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$

5.5) Скалярное произведение векторов $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})$

5.6) Векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$

□

5.1) $\overline{c}=(-2;-1;-2)$ $\qquad \overline{c}^0=\frac{\overline{c}}{|\overline{c}|}$

$|\overline{c}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3\Rightarrow\overline{c}^0=\frac{1}{3}\cdot(-2;-1;-2)=\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

5.2) $5\overline{a}+3\overline{b}+2\overline{c}=5\cdot(-4;1;2)+3\cdot(-3;3;1)+2\cdot(-2;-1;-2)=$
$=(-20;5;10)+(-9;9;3)+(-4;-2;-4)=(-33;12;9)$

5.3) $2\overline{a}+7\overline{b}-3\overline{c}=2\cdot(-4\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k})+7\cdot(-3\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k})-3\cdot(-2\overline{i}-\overline{j}-2\overline{k})=$
$=-8\overline{i}+2\overline{j}+4\overline{k}-21\overline{i}+21\overline{j}+7\overline{k}+6\overline{i}+3\overline{j}+6\overline{k}=-23\overline{i}+26\overline{j}+17\overline{k}$

5.4) $\bar{b}=(-3;3;1)$; $\bar{c}=(-2;-1;-2)$

$пр_{\bar{c}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\bar{b};\bar{c}})$

$\bar{b}\cdot\bar{c}=|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos\varphi=|\bar{c}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi=|\bar{c}|\cdot пр_{\bar{c}}\bar{b}$

$\Rightarrow пр_{\bar{c}}\bar{b}=\dfrac{\bar{b}\cdot\bar{c}}{|\bar{c}|}$

$|\bar{c}|=3$ (см. п. 5.1)

$\bar{b}\cdot\bar{c}=(-3;3;1)\cdot(-2;-1;-2)=(-3)\cdot(-2)+(3)\cdot(-1)+1\cdot(-2)=6-3-2=1$

$\Rightarrow пр_{\bar{c}}\bar{b}=\dfrac{\bar{b}\cdot\bar{c}}{|\bar{c}|}=\dfrac{1}{3}$

5.5) $\bar{a}=(-4;1;2)$; $\bar{b}=(-3;3;1)$; $\bar{c}=(-2;-1;-2)$

$\bar{b}+\bar{c}=(-3;3;1)+(-2;-1;-2)=(-5;2;-1)$

$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=(-4;1;2)\cdot(-5;2;-1)=(-4)\cdot(-5)+1\cdot2+2\cdot(-1)=20+2-2=20$

5.6) $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=$

$=\bar{i}(1-6)-\bar{j}\cdot(-4+6)+\bar{k}\cdot(-12+3)=-5\bar{i}-2\bar{j}-9\bar{k}$