Стецук Максим 2гр. 1п. гр

Метод квадратного корня

Система ур-й:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 10 \\ 2X_1 + 13X_2 + 21X_3 + 11X_4 = 47 \\ 3X_1 + 21X_2 + 38X_3 + 31X_4 = 93 \\ 4X_1 + 11X_2 + 31X_3 + 147X_4 = 197 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 13 & 21 & 11 \\ 3 & 21 & 38 & 31 \\ 4 & 11 & 31 & 147 \end{pmatrix} = L \cdot R = R^T \cdot R =$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11} \cdot r_{12} & r_{11} \cdot r_{13} & r_{11} r_{14} \\ r_{12} \cdot r_{11} & r_{12}^2 + r_{22}^2 & r_{12} r_{13} + r_{22} r_{23} & r_{12} r_{14} + r_{22} r_{24} \\ r_{13} \cdot r_{11} & r_{13} \cdot r_{12} + r_{23} \cdot r_{22} & r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 & r_{13} r_{14} + r_{23} r_{24} + r_{33} r_{34} \\ r_{14} \cdot r_{11} & r_{14} \cdot r_{12} + r_{24} \cdot r_{22} & r_{14} r_{13} + r_{24} r_{23} + r_{34} r_{33} & r_{14}^2 + r_{24}^2 + r_{34}^2 + r_{44}^2 \end{pmatrix}$$

- $r_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$; $r_{12} = a_{12}/r_{11} = 2/1 = 2$; $r_{13} = a_{13}/r_{11} = 3/1 = 3$; $r_{14} = a_{14}/r_{11} = 4/1 = 4$
- $r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{13 - 2^2} = 3$; $r_{23} = (a_{23} - r_{12} r_{13})/r_{22} = (21 - 2 \cdot 3)/3 = 5$; $r_{24} = (a_{24} - r_{12} r_{14})/r_{22} = (11 - 2 \cdot 4)/3 = 1$

• $r_{33} = \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{38 - 3^2 - 5^2} = 2$;

$r_{34} = (a_{34} - r_{13} r_{14} - r_{23} r_{24}) / r_{33} = (31 - 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1)/2 = 7$

• $r_{44} = \sqrt{a_{44} - r_{14}^2 - r_{24}^2 - r_{34}^2} = \sqrt{147 - 4^2 - 1^2 - 7^2} = 9$

Тогда:

$$L = R^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Получим 2 треугольных матрицы!

т.к. СЛАУ: $AX = B$, а $A = L \cdot R = R^T \cdot R$ (т.к. матрица симметричная), то:

$R^T \cdot R \cdot X = B$ => решаем последовательно две системы: 1) $R^T Z = B$ (относ. Z)

2) $RX = Z$ (относ. X)

Решим системы методом подстановки:

1° $R^T Z = B$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 47 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 93 \\ 4 & 1 & 7 & 9 & 193 \end{array}\right)$$

$Z_1 = 10/1 = 10$

$Z_2 = (47 - 10 \cdot 2)/3 = 9$

$Z_3 = (93 - 3 \cdot 10 - 5 \cdot 9)/2 = 9$

$Z_4 = (193 - 4 \cdot 10 - 1 \cdot 9 - 7 \cdot 9)/9 = 9$

2° $RX = Z$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

$X_4 = 9/9 = 1$

$X_3 = (9 - 7\cdot 1)/2 = 1$

$X_2 = (9 - 1\cdot 1 - 5\cdot 1)/3 = 1$

$X_1 = (10 - 4\cdot 1 - 3\cdot 1 - 2\cdot 1)/1 = 1$

Значит: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1,\ X_4 = 1.$