Обратная матрица. Матричные уравнения.

I Обратная матрица

Обозначение: A^{-1}

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Важно: 1) Если $\exists A^{-1}$, то она единственная

2) A^{-1} - существует, если $\det A \neq 0$

def Присоединённая матрица к квадратной матрице $A = (a_{ij})$ – матрица $\widetilde{A} = (A_{ij})$, где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам a_{ij}.

Если $\det A \neq 0$: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$

Нахождение обратной матрицы

① Метод присоединённой матрицы

1) Находим $\det A \rightarrow = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

$\searrow \neq 0$, продолжаем решение

2) Находим все алгебраические дополнения A_{ij}

2) Составляем из них матрицу (A_{ij})

3) Находим присоединённую матрицу $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$

4) Находим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$

② Метод элементарных преобразований.
(Метод Гаусса)

1) К матрице „$A_{n\times n}$" справа приписываем единичную матрицу $E_{n\times n}$.

Получаем: $\Gamma=(A|E)_{n\times 2n}$

2) Элементарными преобразованиями приводим матрицу Г к ступенчатому виду $\Gamma_1=(A_1|B)_{n\times 2n}$, где A_1 - треугольная.

3) Затем элементарными преобразованиями над строками получаем $\Gamma_2=(E|A^{-1})_{n\times 2n}$

! Прежде всего необходимо проверить, что $\det A \neq 0$.

II Матричные уравнения

∃ A, B, C, X - матрицы

X - неизвестная матрица

Уравнения простейшего вида:

① $AX=B$: 1) $\det A\neq 0$

2) A^{-1}

3) $X=A^{-1}\cdot B$

② $XA = B$: 1) $\det A \neq 0$

2) A^{-1}

3) $X = B \cdot A^{-1}$

③ $A \cdot X \cdot C = B$: 1) $\det A \neq 0$

2) $\det C \neq 0$

3) A^{-1}

4) C^{-1}

5) $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$

!!! 1) Матрицы A, B, C, X - таких размеров, что выполняются все используемые операции умножения.

2) В матричных уравнениях $AX = B$, $XA = B$, $AXC = B$ с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.