麻省理工学院公开课 MIT OpenCourseWare http://ocw.mit.edu

18.01 **一元微积分** Single Variable Calculus

第四单元 积分技巧

Unit 4 Techniques of Integration

第 26 讲 三角函数的积分及三角替换
第 28 讲 反向变量替换、配方
第 29 讲 部分分式
第 30 讲 分部积分
第 31 讲 参数方程、弧长和表面积
第 32 讲 极坐标和极坐标下的面积
第 33 讲 复习四

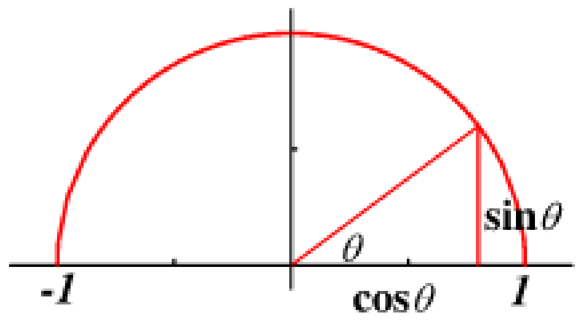
douTintin14

第 26 讲 三角函数积分和三角代换

Trigonometric integrals and substitution

三角函数基本知识

三角函数的基本知识就是三角恒等式，一些几何关系可以从单位圆上看出来。



$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$
$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

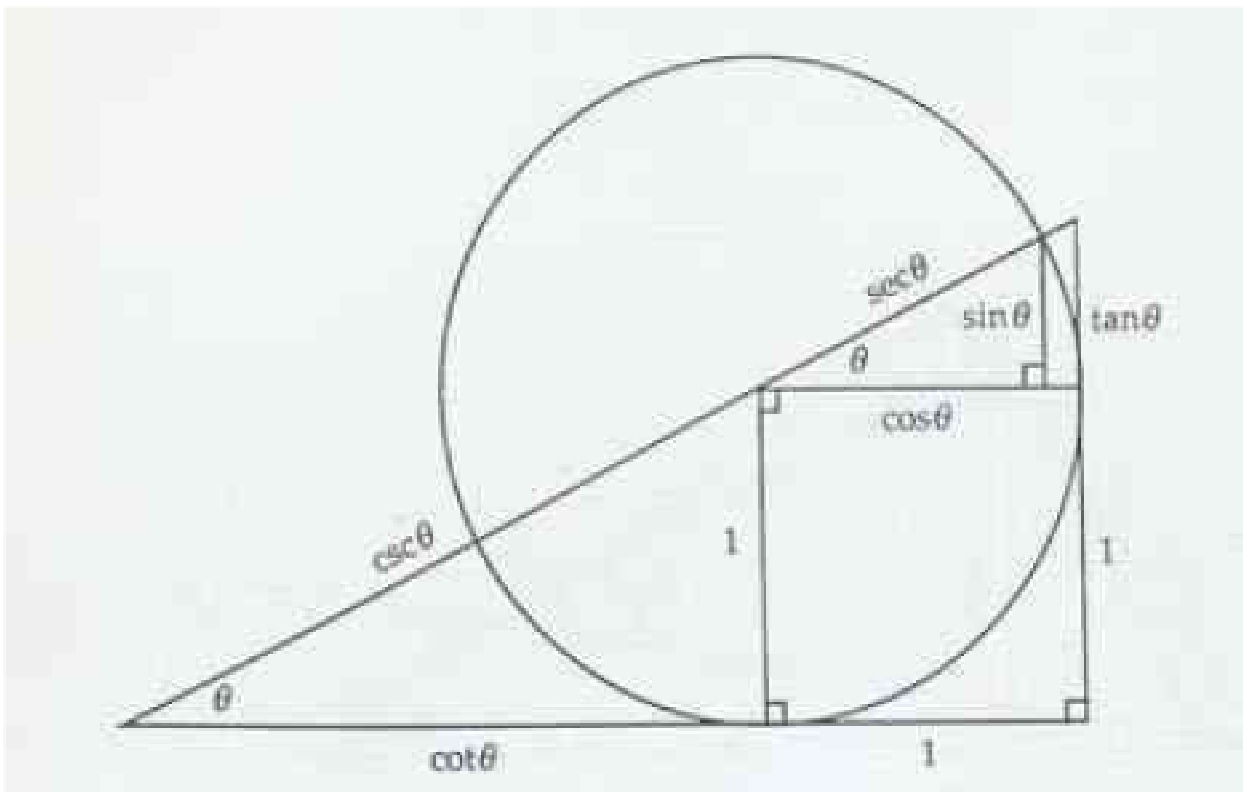
半角公式：用 $\cos 2\theta$ 来表示 $\cos\theta$。

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta-\sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta-(1-\cos^2\theta) \\ &= 2\cos^2\theta-1\end{aligned}$$

因此有

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

我很喜欢下面这张图，标示出了基本的三角函数。



三角函数的微积分：

$d\sin x=(\cos x)dx$，等式两侧积分得到 $\int\cos x dx=\sin x+C$。

同理：$d\cos x=(-\sin x)dx$，$\int \sin dx=-\cos x+C$。

通过这些三角函数的基本微积分公式和三角恒等式可以完成涉及三角函数的复杂微积分计算。

例如$\int \sin^n x\cos^m xdx$，其中 m，n 为非负整数。此类方程在傅里叶变换中经常出现。

首先讨论容易的情形：m，n 中至少一个为奇数。

例：$\int \sin^n x\cos xdx$

作变量替换$u=\sin x$，则$du=\cos xdx$。

$$\int \sin^n x\cos xdx=\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C=\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}+C$$

例：$\int \sin^3 x\cos^2 xdx$

作变量替换$u=\cos x$，则$du=-\sin xdx$。

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^2 xdx &=\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin xdx\\ &=\int (\cos^4 x-\cos^2 x)(-\sin x)dx\\ &=\int (u^4-u^2)du\\ &=\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+C\\ &=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C\end{aligned}$$

例：$\int \sin^3 xdx$

$$\begin{aligned}\int \sin^3 xdx &=\int (1-\cos^2 x)\sin xdx\\ &=-\int (1-u^2)du\\ &=-u+\frac{u^3}{3}+C\\ &=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C\end{aligned}$$

讨论较困难的情况，没有奇数次方，只有偶指数。此时需要用到半角公式。

例：$\int \cos^2 xdx$

$$\int \cos^2 xdx=\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}+C$$

例：$\int \sin^2 x\cos^2 xdx$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^2 xdx &=\int (\frac{1-\cos 2x}{2})(\frac{1+\cos 2x}{2})dx\\ &=\int (\frac{1-\cos^2 2x}{4})dx\end{aligned}$$

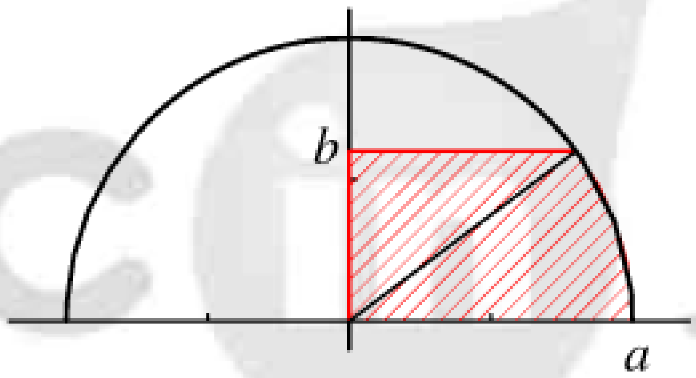
$$=\int(\frac{1}{8}-\frac{\cos(4x)}{8})dx$$
$$=\frac{1}{8}x-\frac{\sin 4x}{32}+C$$

另一种方法：

$$\int\sin^2 x\cos^2 xdx \quad =\int(\sin x\cos x)^2 dx$$
$$=\int(\frac{\sin 2x}{2})^2 dx$$
$$=\int\frac{1}{4}(\frac{1-\cos(4x)}{2})dx$$
$$=\frac{1}{8}x-\frac{\sin 4x}{32}+C$$

三角代换

例：求图形中阴影的面积。



通常的求法是 $\text{Area}=\int ydx$，但是此处 y 包含两段，第一段为直线，后一段为圆弧，这样需要划分为两个区域进行计算，相对复杂。因此选择另一个方向进行积分计算，即：

$$\text{Area}=\int xdy=\int_0^b\sqrt{a^2-y^2}dy$$

这个被积函数之前并没有处理过，需要用三角代换的方法才能得到其积分。

从圆的几何关系可以得到 $x=a\cos\theta$ ，$y=a\sin\theta$ 。

$$\int xdy=\int_0^b\sqrt{a^2-y^2}dy \quad =\int a\cos\theta da\sin\theta$$
$$=\int a^2\cos^2\theta d\theta$$
$$=a^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4})\Big|_0^{\arcsin\frac{b}{a}}$$
$$=a^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{2})\Big|_0^{\arcsin\frac{b}{a}}$$
$$=\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin(\frac{b}{a})$$

重点在于将具有平方和开方的被积函数形式转化为三角函数的形式。此外，在

注意积分上下限的同时，还需要注意为了回代方便，要避免使用 2θ 的三角函数形式，因此需要变回 θ 的三角函数。

解的第一项就是三角形面积，而后一项则是扇形面积，两者加和就是所求面积。

第 28 讲 反向变量替换、配方

Integration by inverse substitution; completing the square

三角恒等式

继续讨论三角函数积分和三角代换：

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ，

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ ，$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$。

$\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

三角函数的微积分

正切微分 $\dfrac{d\tan x}{dx} = \dfrac{d\dfrac{\sin x}{\cos x}}{dx} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

正割微分 $\dfrac{d}{dx}\sec x = \dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$

正切积分 $\int \tan x dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\dfrac{1}{\cos x} d\cos x = -\ln(\cos x) + C$

正割积分 $\int \sec x dx = \int \dfrac{1}{\cos x} dx$ ，直接计算情况并不明朗，用另一种方法进行讨论：

$$\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = (\sec x + \tan x)\sec x$$

记 $u = (\sec x + \tan x)$ ，则有 $u' = u \cdot \sec x$ ，即 $\sec x = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{d}{dx}\ln u$ ，等号两侧积分得到：

$$\int \sec x dx = \int \frac{d}{dx}\ln u = \ln u = \ln(\sec x + \tan x) + C$$

通过前面推导得到的一些结论，可以去求解大部分三角函数的积分。

例：$\int \sec^4 x dx$

作变量替换 $u = \tan x$ ，则 $du = \sec^2 x dx$。

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x dx &= \int (1 + \tan^2 x)\sec^2 x dx \\ &= \int (1 + u^2) du \\ &= u + \frac{u^3}{3} + C \\ &= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

三角代换

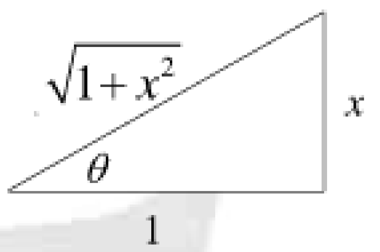
例：$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

方程中最难处理的是$\sqrt{1+x^2}$，需要把它变为容易处理的形式。利用三角函数的关系，令$x=\tan\theta$，则有$\sqrt{1+x^2}=\sec\theta$，$dx=\sec^2\theta d\theta$。

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta\sec\theta}d\theta \\
&= \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta \\
&= \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u}+C \\
&= -\frac{1}{\sin\theta}+C \\
&= -\csc\theta + C \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C
\end{aligned}$$

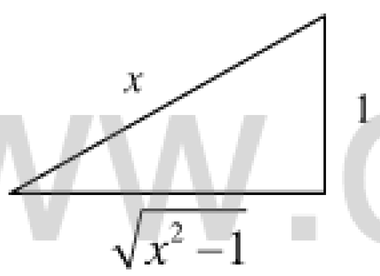
当推导过程中遇到正割、余割、正切等函数时，最好化成正弦余弦函数来处理。

令$u=\sin\theta$，则$du=\cos\theta d\theta$。



答案也可以写作$=-\csc(\arctan x)+C$。从这里可以看到，通过图形辅助可以得到反三角函数的三角函数，即复合函数的值。

例：$\tan(arc\csc x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$



$\theta = arc\csc x$

$x=\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\text{斜边}}{\text{对边}}$

$\tan\theta=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

总结适合应用三角替换的函数形式：

被积函数包含：	三角代换：	被积函数变为：
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\cos\theta$	$a\sin\theta$
	$x=a\sin\theta$	$a\cos\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	$a\sec\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$a\tan\theta$

配方

实际遇到的情况中，被积函数中根号下的表达式不会如表格中那么简单，比如有时候会包含中间项。

例：$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$

重点在于将根号下带有中间项的表达式，表示为完全平方和另一个数的和或者差，然后用三角代换的方法就可解。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}} = \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-2^2}}dx$$

配方，然后做代换 $u=x+2$ ，$du=dx$ 。

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u^2-4}}du$$

三角代换 $u=2\sec\theta$ ，$du=2\sec\theta\tan\theta d\theta$ 。

$$= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{2\tan\theta}d\theta$$

$$= \int \sec\theta d\theta$$

$$= \ln(\sec\theta+\tan\theta)+C$$

回代 $\sec\theta=\frac{u}{2}$ ， $\tan\theta=\frac{\sqrt{u^2-4}}{2}$ 。

$$= \ln(\frac{u}{2}+\frac{\sqrt{u^2-4}}{2})+C$$

回代 $u=x+2$

$$= \ln(\frac{x+2}{2}+\frac{\sqrt{x^2+4x}}{2})+C$$

第 29 讲 部分分式

Partial fractions

继续关于积分的讨论，今天介绍的方法可以处理具有如下表达式的函数，即所谓的比例函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$，其表达式是两个多项式的比。

将 rational number 称为"有理数"实际上是一种误译，其真实含义是比例数，表示该数为两整数之比，而所谓"无理数"则应是非比例数，即无法表示为两个整数之比。因此所谓有理函数（rational function）也应该称为比例函数。

部分分式法

将函数表达式拆分成一些可以积分的简单分式。

例 1：$\int(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2})dx$

$$\int(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2})dx=\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$$

如果被积函数不是以这种容易积分的形式直接给出，例如例 1 中的分式通分得到比例函数的形式：$\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}=\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{4x-1}{x^2+x-2}$，该如何得到容易积分的函数表达式并计算其积分？

这里面对的是代数问题，即如何将函数转化为容易积分的分式。

掩盖法：

$$\frac{4x-1}{x^2+x-2}=\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)} \quad ①分母因式分解$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \quad ②利用未知数作为分子建立等式$$

③求出未知数 A 和 B。（掩盖法）

等式两侧乘以$(x\text{-}1)$，得到$\frac{4x-1}{x+2}=A+\frac{B}{x+2}(x-1)$。代入 x=1 就可以消去后面带有 B 的一项，得到 A=1。

等式两侧乘以$(x+2)$，得到$\frac{4x-1}{x-1}=\frac{A}{x-1}(x+2)+B$。代入 x=-2 就可以得到 B=3。

实际应用中可以不再重复这么详尽的步骤，在$\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}$中，直接掩盖住$(x\text{-}1)$，代入 x=1 计算得到 A=1。掩盖住$(x+2)$，代入 x=-2 计算得到 B=3。

掩盖法要求分母的多项式 $Q(x)$具有分立的线性因子并且分子的最高次必须小于分母。

例 2：$\dfrac{x^2+3x+8}{(x-1)(x-2)(x+5)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+5}$

当分母遇到重根或者说是相同的因式时，要改变建立方法：

$\dfrac{x^2+2}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$。

事实上，这和整数的分母展开很相似，$\dfrac{7}{16}=\dfrac{0}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}$。

在这种情况下，用掩盖法可以很容易求得 B 和 C，但是不能得到 A。

掩盖住$(x+2)$，代入 x=-2 就可以得到 C=2/3。

掩盖住$(x-1)^2$，代入 x=1 就可以得到 B=1。用详细的解法处理就是等式两侧乘以 $(x-1)^2$ 得到 $\dfrac{x^2+2}{(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}(x-1)^2+B+\dfrac{C}{x+2}(x-1)^2$。代入 x=1 得到 B=1。

但是不能通过两侧乘以$(x-1)$的方法求 A，因为无法消去 B。

代入 x=0 以及 B=1 和 C=2/3，可以求得 A=1/3。在求解其它问题过程中，如果 0 已经被用过了，就要代入其它数字，但要尽量保证计算容易进行。

例 3：分母中有一个二次项。

$\dfrac{x^2}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

分母中有因子在实数范围内无法进一步分解，其所对应的分式的分子就要写成多项式，这里的分母是二次式，分子是一次。也可以应用复数，将分母的因子都分解到一次，再用掩盖法求解。

上式中仍可用掩盖法求得 A=1/3。要求的 B 和 C，等式两端同时乘以整个分母：

$x^2=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$

比较等式两侧的参数，可以得到：

x^2 项	$1=\dfrac{1}{2}+B$	求得 $B=\dfrac{1}{2}$
x^0 项	$0=\dfrac{1}{2}-c$	求得 $C=\dfrac{1}{2}$

注意：此处没有带入一次项，因为会有很多交叉计算从而增加运算量。

$$\int\frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)}dx=\int\frac{1/2}{x-1}dx+\int\frac{x/2}{x^2+1}dx+\int\frac{1/2}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$$

其实，例 2 也可以写成$\dfrac{x^2+2}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{Ax+B_1}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$。

其中$\dfrac{Ax+B_1}{(x-1)^2}=\dfrac{A(x-1)+A+B_1}{(x-1)^2}=\dfrac{A}{(x-1)}+\dfrac{A+B_1}{(x-1)^2}=\dfrac{A}{(x-1)}+\dfrac{B}{(x-1)^2}$。从这里也

可以看到为什么建立分式的时候要有分母为二次的分式。

讨论 $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ 的情况。

例 4：$\dfrac{x^3}{(x-1)(x+2)}$

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^3}{x^2+x-2} = (x-1) + \frac{3x-2}{x^2+x-2}$$

1.首先将因子形式变回多项式的表达式形式。

2.用长除法将假分式变为真分式。

$$\begin{array}{r|llll}
 & x & -1 & & \\
\hline
x^2+x-2 & x^3 & & & \\
 & x^3 & +x^2 & -2x & \\
\hline
 & & -x^2 & +2x & \\
 & & -x^2 & -x & +2 \\
\hline
 & & & 3x & -2
\end{array}$$

后面一项的比例函数可以用掩盖法进行积分。

第 30 讲 分部积分

Integration by parts

部分分式

首先将前一讲的部分分式的内容过一遍，给出一个通用求解过程。当被积函数是比例函数$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$的形式，通过代数方法将其分解为容易进行积分的分式形式。

第零步：带余除法$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\text{商}+\dfrac{\text{余式}}{Q(x)}$，余式的阶数要低于分母。

第一步：分母因式分解$\dfrac{\cdots}{(x+4)^2(x^2+2x+3)(x^2+4)^3}$

第二步：建立等式：

$$=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{(x+2)^3}+\frac{A_4}{(x+2)^4}+\frac{B_0x+C_0}{x^2+2x+3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+4}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+4)^2}+\frac{B_3x+C_3}{(x^2+4)^3}$$

未知数的个数等于分母的阶。

第三步：掩盖法求解，但对于上式，其实只能解出 A_4。其它参数只能两侧乘以分母，然后比较各阶的参数列出方程求解，本例是一个 12 个方程 12 个未知数的方程组。

第四步：对各个分式积分

$$\int\frac{x}{(x^2+4)^3}dx=-\frac{1}{4}(x^2+4)^{-2}+C$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2+4)^3}dx&=\int\frac{2\sec^2\theta}{(4\sec^2\theta)^3}d\theta\\&=\frac{1}{32}\int\cos^4\theta d\theta\\&=\frac{1}{32}\int(\frac{1+\cos 2\theta}{2})^2d\theta=\cdots\end{aligned}$$

令 $x=2\tan\theta$，则 $dx=2\sec^2\theta d\theta$。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx&=\int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\end{aligned}$$

令 $x=\sqrt{2}\tan\theta-1$，则 $dx=\sqrt{2}\sec^2\theta d\theta$。

很多分式的积分比较复杂，这里强调的还是“部分分式”这种处理方法。

分部积分

分部积分法是微积分基本定理和乘法求导法则的结合。

乘法求导法则为 $(uv)' = u'v + uv'$ ，因此有 $uv' = (uv)' - u'v$ 。按照微积分基本定理有 $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$ ，或者写作 $\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx$ 。

例 1：$\int \ln xdx$

$$\begin{aligned}\int \ln xdx &= \ln x \cdot x - \int xd(\ln x) && \text{令 } u = \ln x \text{，则 } u' = \frac{1}{x}\text{。}\\ &= \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx && \text{令 } v = x \text{，则 } v' = 1\text{。}\\ &= \ln x \cdot x - x + C\end{aligned}$$

例 2：$\int (\ln x)^2 dx$

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2 dx &= (\ln x)^2 x - \int xd(\ln x)^2 && \text{令 } u = (\ln x)^2 \text{，则 } u' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\text{。}\\ &= (\ln x)^2 x - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx && \text{令 } v = x \text{，则 } v' = 1\text{。}\\ &= (\ln x)^2 x - 2\int \ln xdx \\ &= (\ln x)^2 x - 2\ln x \cdot x + 2x + C\end{aligned}$$

例 3：$\int (\ln x)^n dx$

从前面的推导可知，经过分部积分法操作，可以得到被积函数降幂的效果。

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^n dx &= (\ln x)^n x - \int xd(\ln x)^n && \text{令 } u = (\ln x)^n \text{，则 } u' = n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\text{。}\\ &= (\ln x)^n x - n\int x(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}dx && \text{令 } v = x \text{，则 } v' = 1\text{。}\\ &= (\ln x)^n x - n\int (\ln x)^{n-1}dx\end{aligned}$$

写成换算公式的形态，则有：

$$\begin{aligned}&F_n = \int (\ln x)^n dx \\ &F_n(x) = x(\ln x)^n - nF_{n-1}(x) \\ &\vdots \\ &F_1(x) = x\ln x - F_0(x) \\ &F_0(x) = x\end{aligned}$$

例 1 和 2 也可以直接从换算公式得到。

例 4：$\int x^n e^x dx$

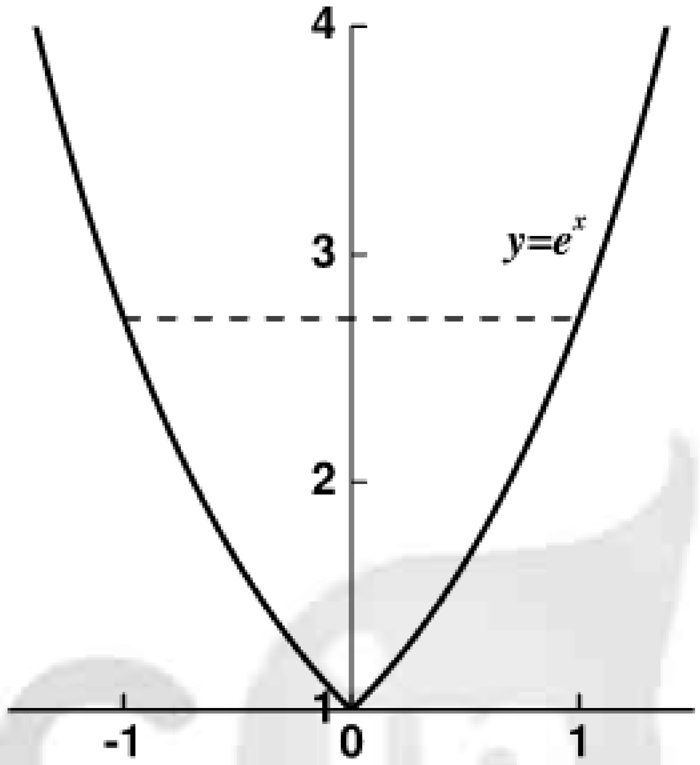
$$\begin{aligned}\int x^n e^x dx &= \int x^n de^x && \text{令 } u = x^n \text{，则 } u' = nx^{n-1}\text{。}\\ &= x^n e^x - \int e^x dx^n && \text{令 } v = e^x \text{，则 } v' = e^x\text{。}\\ &= x^n e^x - n\int e^x x^{n-1}dx\end{aligned}$$

这是一个新的递归序列，记为 $G_n(x) = \int x^n e^x dx$ 。

写成换算公式的形态，则有：

$$G_n(x) = x^n e^x - nG_{n-1}(x)$$
$$\vdots$$
$$G_1(x) = xe^x - G_0(x) = xe^x - e^x$$
$$G_0(x) = e^x$$

例：求指数函数曲线 $y = e^x$ 旋转所形成的体积。



$y = e^x$，起始点平面为 $y = 1$，最高点为 $y = e$。

可以通过水平和垂直两种方法进行切分。水平切分的到的就是圆盘，圆盘的体积就是 $\pi x^2 dy$，则整个旋转体体积为 $\int_1^e \pi x^2 dy$，其中 $x = \ln y$，因此有：

$$\int_1^e \pi x^2 dy = \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy = F_2(y)\Big|_1^e = \pi[y(\ln y)^2 - 2(y\ln y - y)]_1^e = \pi(e-2)$$

垂直切分得到的是壳层，则旋转体体积为 $\int_0^1 \pi x(e-y)dx$。

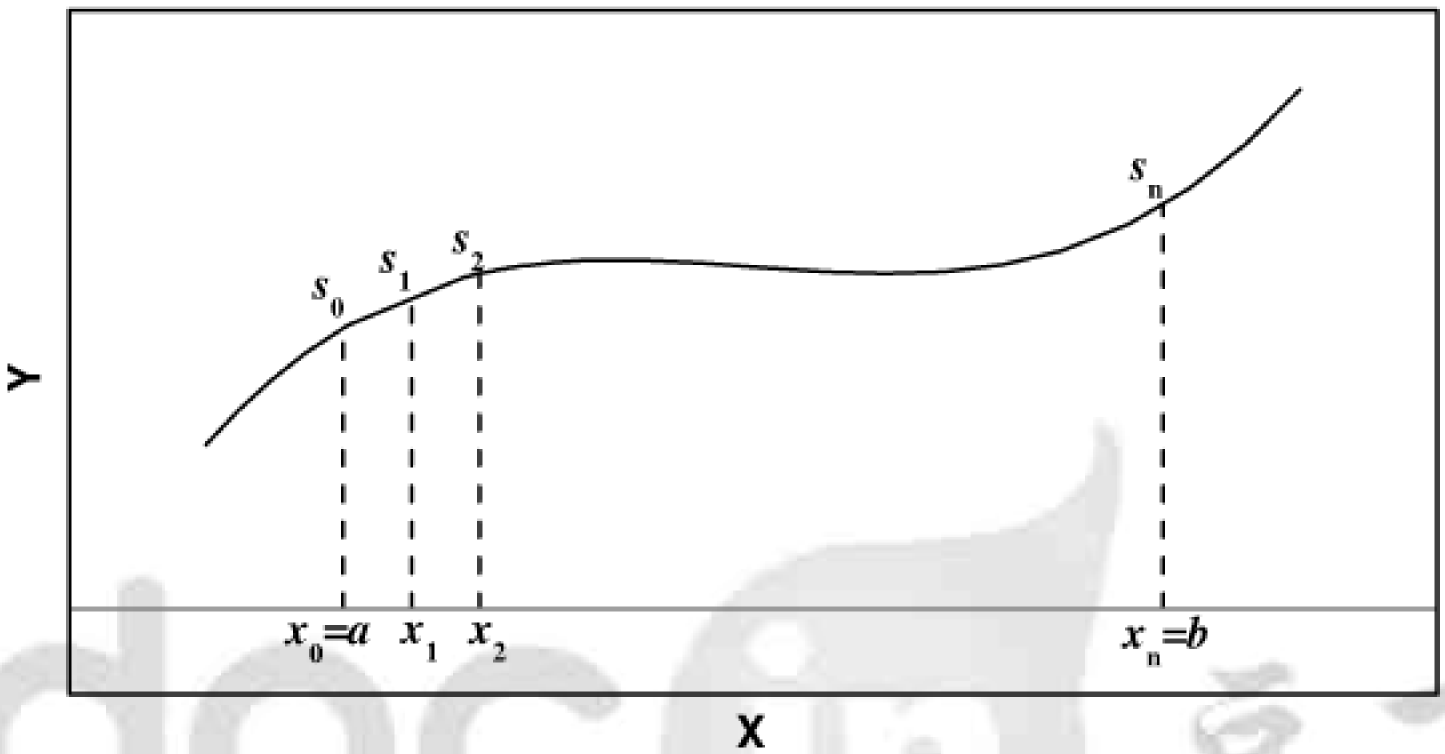
$$V = \int_0^1 2\pi x(e - e^x)dx = (2\pi e)/2 - 2\pi \int_0^1 xe^x dx = \pi e - 2\pi G_1(x)\Big|_0^1 = \pi(e-2)$$

第 31 讲 参数方程、弧长、表面积

Parametric equations, arclength, surface area

本讲从积分公式和积分方法出发，解决几何问题。后面的内容还包括多元微积分课程中的常用工具：参数方程。

弧长



沿着行驶路线做行驶标记 s_0 ,s_1 ,s_2 ,s_3……s_n ,分别对应 $a=x_0$,x_1 ,x_2 ,x_3……$b=x_n$。每一小段距离的长度 $\Delta s^2 \approx \Delta x^2 + \Delta y^2$ 。在极限的情况下，方程变为 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ 。得到 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+(dy/dx)^2}$ 。

因此弧长为 $s = \int_a^b \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx = \int ds = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ 。（ $y = f(x)$ ）

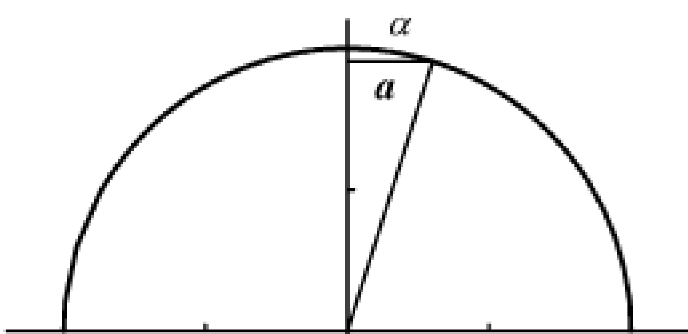
例 1： $y = mx$

因为 $y' = m$ ，所以 $ds = \sqrt{1+m^2}\,dx$ 。则 $s = \int_0^{10} \sqrt{1+m^2}\,dx = 10\sqrt{1+m^2}$ 。

函数为穿过零点的直线，因此邻边为 10，对边为 10m，所求的弧线长度就是直角三角形的斜边长度 $10\sqrt{1+m^2}$ 。

当对直线可以用这种方法求得弧长的时候，也意味着可以解决任意的函数曲线，微积分就是把复杂问题切割为极小的间断区域，在该分割区域用最简单的方法解决，然后通过极限、积分等手段求得复杂问题的结果。

例 2： $y = \sqrt{1-x^2}$



求得 $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ，因此有 $ds = \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx$ 。

得到弧长 $\alpha = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x|_0^a = \arcsin a$ 。

或者写作 $\sin\alpha = a$ ，其中包含着问题的几何解释。这个弧的半径为 1，因此弧所对圆心角的弧度为 α，而该角度的正弦就是水平位移量 a。

例 3： $y = x^2$

求得 $y' = 2x$ ，因此 $s = \int_0^a \sqrt{1+4x^2}dx$ 。

$$\int_0^a \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+\tan^2 u}\sec^2 u du$$

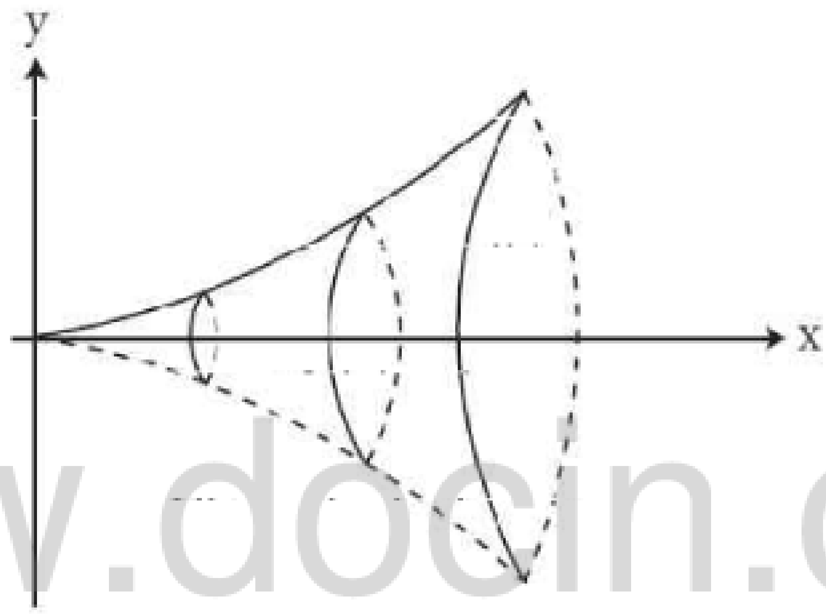
三角替换 $x = \tan u/2$

$dx = \sec^2 u du/2$

$$= [\frac{1}{4}\ln(2x+\sqrt{1+4x^2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}]\Big|_0^a$$

曲面面积

例：旋转面， $y = x^2$ 沿着 X 轴旋转一周。

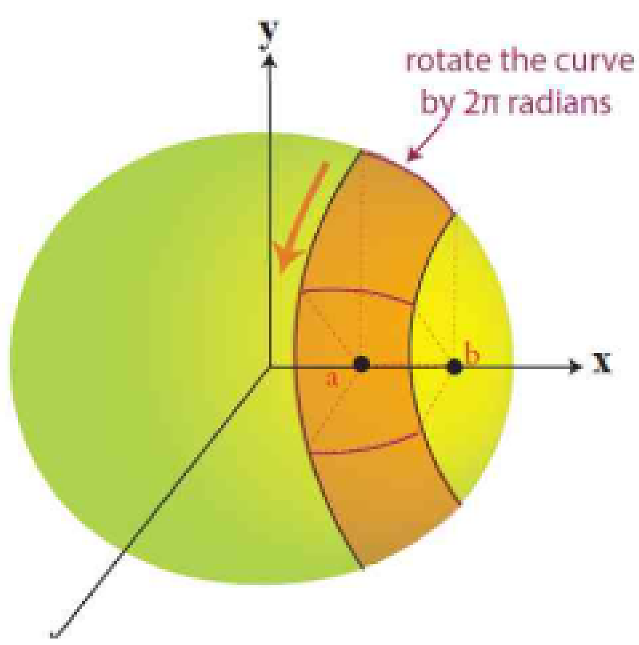


曲线上每个小段 ds 所对应的旋转面面积为 $dA = 2\pi y ds$ 。因此 $Area = \int 2\pi y ds$ 。

$A = \int_0^a 2\pi x^2 \sqrt{1+4x^2}dx$

计算较为复杂，此例的重点是建立积分的过程。

例：球面面积



球面方程是由弧线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 旋转得到的。

求得 $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ，则有 $ds=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2-x^2}}dx=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ 。

因此球面面积为 $A=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y ds=\int_{x_1}^{x_2}2\pi\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\dfrac{a^2}{a^2-x^2}}dx=2\pi a(x_2-x_1)$ 。可以用特殊情况来验证这个公式，例如半球面积为 $2\pi a(a-0)=2\pi a^2$ ，而整个球体的球面面积为 $2\pi a(a-(-a))=4\pi a^2$ 。

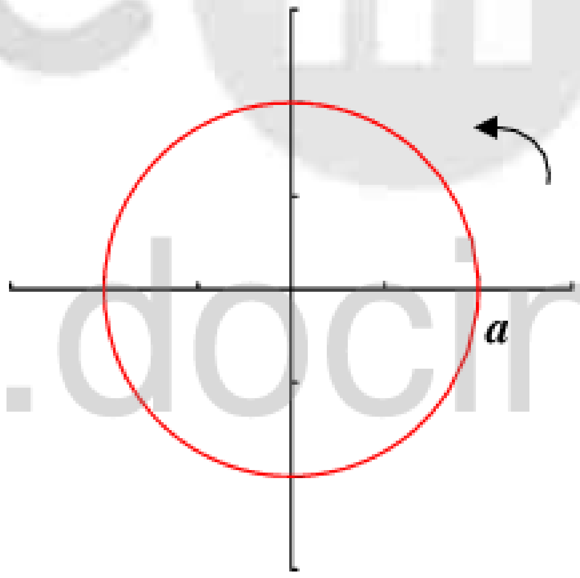
参数方程

参数方程要求从单变量思维转向多变量四维。

考虑曲线 $x=x(t)$ ， $y=y(t)$ ，其中为 t 为参数，可以想象为时间，则得到的是一条与时间有关的运行轨迹。曲线上一点为 $x(0)$，$y(0)$，其后一点为 $x(1)$，$y(1)$。这里就会包含运动方向的问题，运动是从 $x(0)$，$y(0)$朝向 $x(1)$，$y(1)$。因为 t=1 是比 t=0 更晚的时间。

例： $x=a\cos t$ ， $y=a\sin t$ 。

$x^2+y^2=a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=a^2$ ，因此这是一个圆。与简单的图形相比，参数方程给出了更多信息，即在圆上的运动状态，可以将之想象成天体轨道。



t=0， $(x,y)=(a\cos\theta,a\sin\theta)=(a,0)$ 。

t=π/2， $(x,y)=(a\cos\theta,a\sin\theta)=(0,a)$ 。

运动轨迹为在 r=a 的圆上做逆时针转动。

第 32 讲 极坐标和极坐标下的面积

Polar coordinates; area in polar coordinates

参数曲线

继续讨论圆 $x^2+y^2=a^2$ 的参数方程。

$$x=a\cos t$$

$$y=a\sin t$$

这是在 $r=a$ 的圆上逆时针转动的参数方程。在这种参数方程下，讨论弧长的问题：

$ds^2=dx^2+dy^2$，则有 $ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt$。

因为 $\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\frac{dy}{dt}=a\cos t$，所以弧长的微元 $ds=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}dt$。

得到 $ds=adt$，即 $\frac{ds}{dt}=a$，可以理解为运动速度，因此本参数方程代表的是匀速圆周运动。

如果想改变圆周运动的运动速率，则参数方程变为 $x=a\cos kt$，$y=a\sin kt$。速度变为 $\frac{ds}{dt}=ak$。

例：

$$x=2\sin t$$

$$y=\cos t$$

参数方程所对应的直角坐标下的函数方程为 $(\frac{x}{2})^2+y^2=1$。这是一个椭圆。在坐标轴上的交点分别为：

$t=0$，$(x,y)=(2\sin\theta,\cos\theta)=(0,1)$；

$t=\pi/2$，$(x,y)=(2\sin\frac{\pi}{2},\cos\frac{\pi}{2})=(2,0)\ldots\ldots$

方程描述的是一个顺时针运动。可以求出速度方程 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{(2\cos t)^2+(-\sin t)^2}$。则有弧长 $Arc=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2 t+\sin^2 t}dt$。这不是一个初等积分，无法表示成初等函数的形式。

例：求椭圆曲线沿 Y 轴旋转得到的椭球面的表面积。

求表面积所用的微元是一小段弧长 ds 旋转得到的 dA，其旋转半径为 $x(t)$，则有 $dA=2\pi x(t)ds$。

面积 $A=\int_0^{\pi}2\pi x(t)ds=\int_0^{\pi}2\pi 2\sin t\sqrt{4\cos^2 t+\sin^2 t}dt=4\pi\int_0^{\pi}-\sqrt{3\cos^2 t+1}d\cos t$。

计算太复杂。

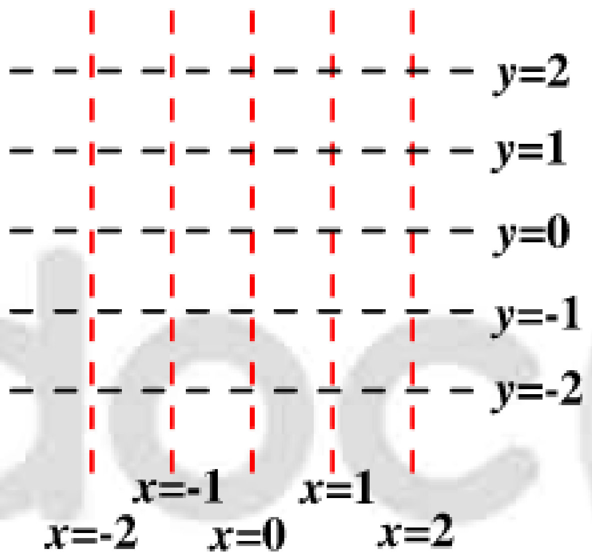
极坐标

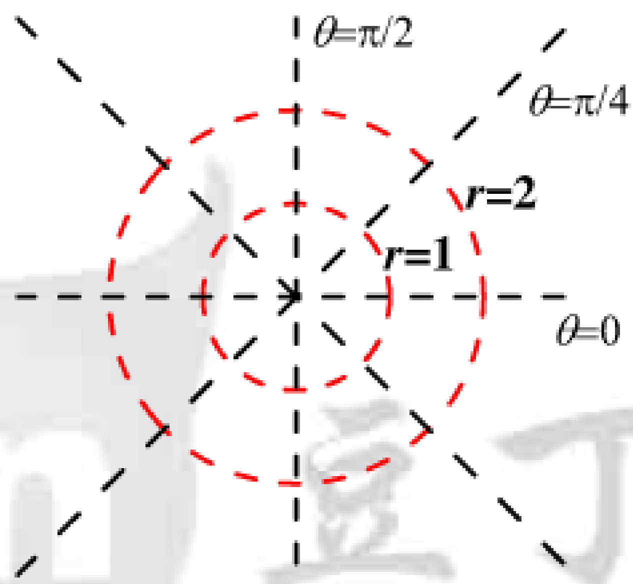
对于二维平面上的一点用另一种坐标进行描述。第一个参数是从原点到坐标点的距离 r，第二个参数是原点到坐标点的连线和极轴的夹角 θ。则原直角坐标的坐标值在极坐标下的表达式就是：

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

极坐标和直角坐标的关系式为：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1} x$$





例 1：$(x,y)=(1,-1)$

$$r = \sqrt{2}, \theta = -\frac{\pi}{4}$$
$$r = \sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}$$
$$r = -\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$$

例 2：$r = a$ 是一个圆的极坐标方程。

例 3：$\theta = c$ ，$0 \le r < +\infty$ 是一条射线。

常见的坐标取值范围：

$$0 \le r < +\infty\ ;$$
$$-\pi < \theta \le +\pi\ ;$$
$$0 \le \theta < 2\pi\ 。$$

例 4：$y = 1$

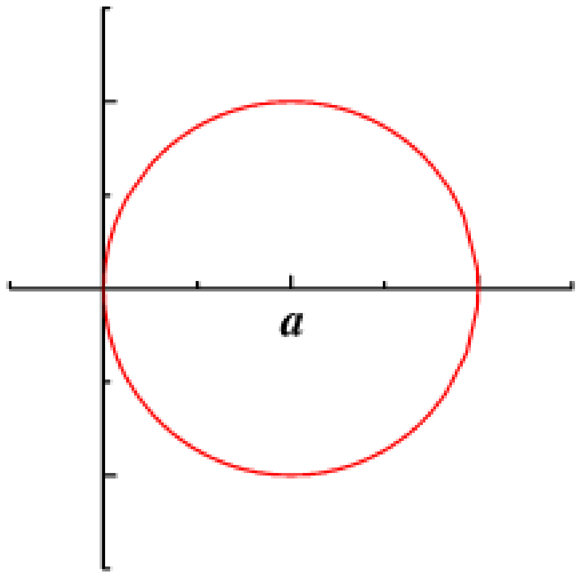
极坐标方程是 $r\sin\theta = 1$。或者写作 $r = \dfrac{1}{\sin\theta} = r(\theta)$。

例 5：圆心不在原点的圆 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$。

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 2ar\cos\theta = 0$$

得到 $r = 2a\cos\theta$。



注意取值范围 $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta < +\dfrac{\pi}{2}$。

第 33 讲 复习四

Exam 4 review

极坐标、面积

求半径 $r=a$ 圆中角度为$\Delta\theta$的扇形的面积。

圆的面积为 $A=\pi a^2$ ，因此这个扇形面积为 $\Delta A=\frac{\Delta\theta}{2\pi}\pi a^2=\frac{1}{2}a^2\Delta\theta$。

讨论一种变化的扇形：对一段弧线而言，将其细分成若干个小块，间断点和原点的连线划分出了若干个小区域，如果用圆弧来模拟划分出的每一段小弧线，则小区域就近似为扇形。小区域面积近似为扇形面积 $\Delta A\approx\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ ，取极限则微元的面积为 $dA=\frac{1}{2}r^2d\theta$。计算整个图形的面积 $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2d\theta$。

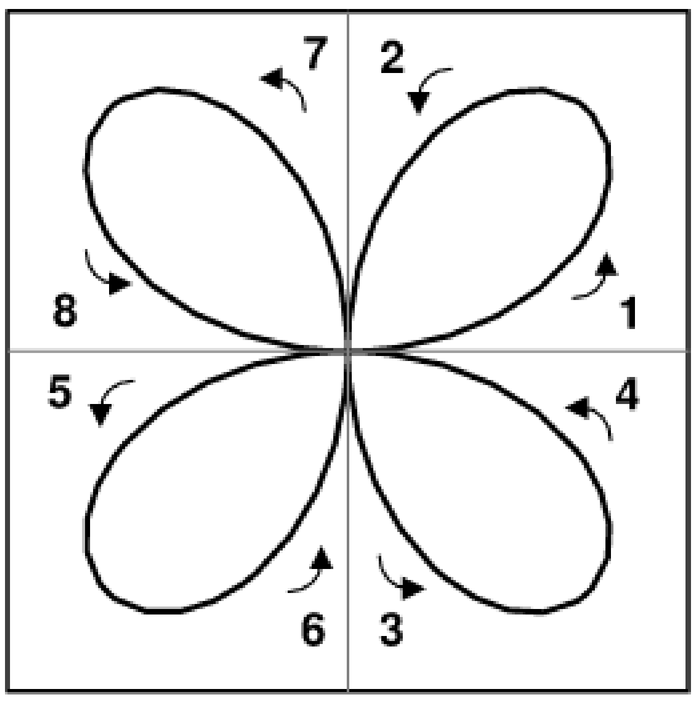
例 1：原点在$(a，0)$处，$r=a$ 的圆。

极坐标方程为 $r=2a\cos\theta$。计算其面积可得：

$$
\begin{aligned}
A &=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2d\theta \\
&=2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&=2a^2\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=a^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi a^2
\end{aligned}
$$

积分的上下限是$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le+\frac{\pi}{2}$，如果角度$\theta$超过了该界限，则径矢方向朝向第二和第三象限，但是 r 是负的，因此其所表示的点在与角θ反向的位置，仍在圆弧上。

例 2：（绘图）$r=\sin 2\theta$。



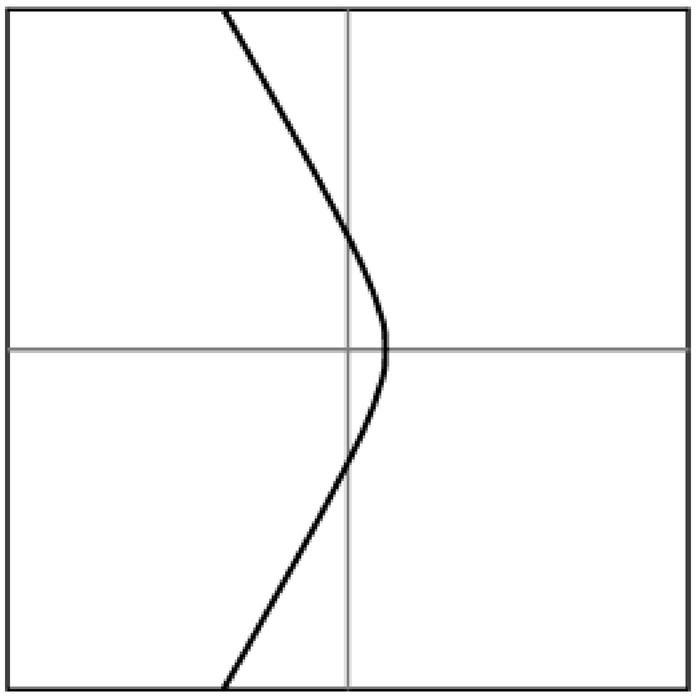
θ	r
0	0
π/4	1
π/2	0

这个图形被称为四叶玫瑰，注意图形随角度变化的顺序，如图中所示，它首先

在第一象限，然后第四象限，第三象限，第二象限，最后回到原点。

例 3：（绘图）$r=\dfrac{1}{1+2\cos\theta}$。

同样从特殊的点出发。



θ	r
0	0
π/4	1
π/2	0
2π/3	∞
-2π/3	∞

求此曲线在直角坐标系下的方程。

$$
\begin{aligned}
& r=\frac{1}{1+2\cos\theta} \\
& \Rightarrow r+2r\cos\theta=1 \\
& \Rightarrow r=1-2r\cos\theta=1-2x \\
& \Rightarrow r^2=(1-2x)^2 \\
& \Rightarrow x^2+y^2=1-4x+4x^2
\end{aligned}
$$

得到函数方程为$-3x^2+y^2+4x-1=0$。这是双曲线方程。双曲线有两个分支，当极坐标中的角度满足$\dfrac{2\pi}{3}\le\theta<+\dfrac{4\pi}{3}$时，$r$ 为负值，给出的就是双曲线的另一个分支。

双曲线实际上就是彗星轨道，而椭圆则是小行星的轨道。在双曲线中，当 $r=0$ 时，得到的是双曲线的焦点，这一点从原来直角坐标系的代数方程是无法直接看出来的。

而$dA=\dfrac{1}{2}r^2d\theta$在天文学中是一个重要参数，它出现在“开普勒定律”中，该定律指出对于星体的运行轨迹而言，面积变化率$\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}=C$为一个常数。

而实际上$r^2\dfrac{d\theta}{dt}=C$称为角动量守恒，不只是天体物理中的定律，而是普适定律。

考试重点

积分技巧：

1.三角替换

2.部分分式

3.分部积分

参数曲线：

1.弧长

2.旋转曲面的面积

3.极坐标和极坐标下的面积

应用积分的重点包括建立积分和计算积分值，建立积分要确定被积函数和积分上下限，而积分的计算是再上一个单元的内容，但实际应用中因为技巧很有限，很多积分都无法计算出来。

例：$\dfrac{x^3+21}{(x+2)^2x(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{C}{x}+\dfrac{D}{x+1}$

$$\frac{x^3+21}{(x+2)^3x(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+2)^3}$$

$$\frac{x^3+21}{(x^2+2)^2x(x^2+1)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+2}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+2)^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x+1}$$

例：$\int x\tan^{-1}xdx$

利用分部积分，这样正切函数这部分就会有效简化。

$$d\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned}\int x\tan^{-1}xdx &= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx\\ &= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C\end{aligned}$$