麻省理工学院公开课 MIT OpenCourseWare http://ocw.mit.edu

18.01 **一元微积分** Single Variable Calculus

第五单元 处理“无穷”

Unit 5 Dealing with Infinity

第 35 讲 不定型和洛必达法则
第 36 讲 反常积分
第 37 讲 无穷级数和收敛
第 38 讲 泰勒级数
第 39 讲 泰勒级数（二）

douTintin14

第 35 讲 不定型和洛必达法则

Indeterminate forms /L'Hôpital's rule

上个单元学习了积分技巧，本单元处理一些和积分有关的细节问题。

洛必达法则

洛必达法则用来计算特定形式的极限。例如：

$$x\ln x\ ,\ x\to 0^+。$$

$$xe^x\ ,\ x\to\infty。$$

$$\frac{\ln x}{x}\ ,\ x\to\infty。$$

例 1：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-1}{x^2-1}$

代入 x=1 的话，得到的是 $\dfrac{0}{0}$，这就是一种不定式。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x^2-1}=\frac{(x^{10}-1)/(x-1)}{(x^2-1)/(x-1)}$$

分子和分母都是差商，极限趋向于函数的导数。例如：

$f(x)=x^{10}-1$；$f(1)=0$，

$\lim\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\to f'(1)$。

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x^2-1}=\frac{10x^9}{2x}=5$$

系统化地看待这个问题，求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，并且有 $f(a)=g(a)=0$。

则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)/(x-a)}{g(x)/(x-a)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))/(x-a)}{\lim\limits_{x\to a}(g(x)-g(a))/(x-a)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

得到洛必达法则：

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

成立条件包括 1. $f(a)=g(a)=0$；2.等式右侧的极限存在。

老师讲定理的思路比较清晰，首先给一个特例，特例包含洛必达法则的思想，然后将之系统化，然后推广到普适的状态。

例 2：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 5x}{2\cos 2x}=\dfrac{5}{2}$

例 3：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\sim\dfrac{-\sin x}{2x}\sim\dfrac{-\cos x}{2}\sim-\dfrac{1}{2}$

第一次求导之后得到的表达式的极限仍然是不定式，因此再次对分子分母分别求导，最后得到了极限值。

比较一下应用近似法来计算极限的过程。

在例 2 中，线性近似可得 $\sin u \approx u$（$u \to 0$）。因此有：

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} \approx \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

同理，在例 3 中代入余弦函数的二阶近似公式，有 $\frac{\cos x - 1}{x^2} \approx \frac{(1-\frac{x^2}{2})-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$。

与之相比，洛必达法则的优点在于它可以处理某些更诡异的极限计算。因为在洛必达法则中，自变量取值可以是"±∞"，并且函数值 $f(x)$和 $g(x)$也可以是"±∞"。即除了$\frac{0}{0}$类型的极限，洛必达法则也可以处理$\frac{\infty}{\infty}$型的极限。此外，等式右侧的极限值也可以是"±∞"。

例 4：$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \sim \frac{1/x}{-1/x^2} \sim -x = 0$

原问题并不是不定型的极限，将之变为分式就形成了无定型的极限。

例 5：$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-px} \sim \frac{x}{e^{px}} \sim \frac{1}{pe^{px}} \sim 0$

由此可以得出结论：当 x 趋近于无穷时，x 比 e^{px}（$P>0$）的增长要缓慢。

例 5′：$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{px}}{x^{100}} = (\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{px}{100}}}{x})^{100} = (\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{p}{100}e^{\frac{px}{100}}}{1})^{100} \sim \infty$

当 x 趋近于无穷时，e^{px}（$P>0$）的增长要比 x 的任何次幂都要快。

例 6：$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} \sim \frac{1/x}{1/3(x^{-2/3})} = 3x^{-1/3} \to 0$

自然对数比 x 的任何次幂增长速度都要慢。

例：$\lim\limits_{x\to 0} x^x$

$x^x = e^{x\ln x}$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \sim \frac{1/x}{-1/x^2} \sim -x = 0$。因此 $\lim\limits_{x\to 0} x^x \to e^0 = 1$。

注意 $\frac{\sin x}{x^2} \sim \boxed{\frac{\cos x}{2x} \sim \frac{-\sin x}{2}} \to 0$ 是错误的，我们用线性近似去处理，$\sin x \approx x$，得到 $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \to \infty$。这是因为在出现 $\frac{\cos x}{2x}$ 时，已经不是无定型了，不能再次使用洛必达法则进行处理，它是$\frac{1}{0}$，因此趋近于无穷。

不要生硬地应用洛必达法则，有的极限一眼可见，或者有简单的代数处理就可以看出其极限，不用不停地尝试求导。

第 36 讲 反常积分

Improper integrals

洛必达法则

本单元的主要内容是处理“无穷”，包含了极限和积分的内容。首先我们讨论洛必达法则的内容，这里我们处理$\frac{\infty}{\infty}$的情况。

如果$x \to a \begin{cases} f(x) \to \infty \\ g(x) \to \infty \\ f'(x)/g'(x) \to L \end{cases}$，则有$f(x)/g(x) \to L$。若其中$\begin{pmatrix} a = \pm\infty \\ L = \pm\infty \end{pmatrix}$，法则依然成立。

函数的增长速度：

$f(x) \underset{x\to\infty}{<<} g(x)$即$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\big/g(x) \to 0$。表示法中隐含了两个函数都大于零。

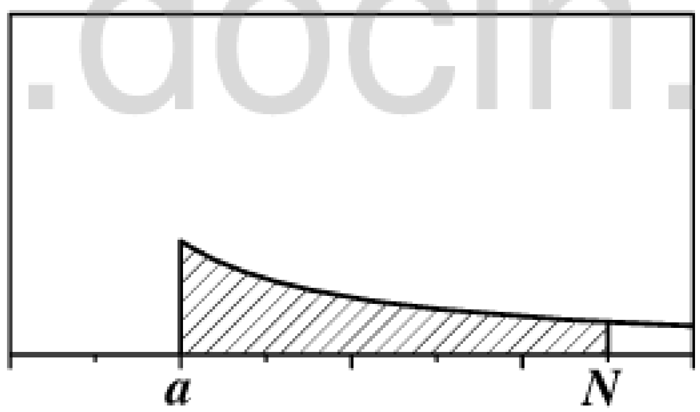
例：$\ln x << x^p << e^x << e^{x^2} \to \infty$

慢　中速　快　很快

同样也可以评价函数的衰减速度：$\frac{1}{\ln x} >> \frac{1}{x^p} >> e^{-x} >> e^{-x^2} \to 0$

反常积分

定义$\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx$，如果极限存在则该函数“收敛”，否则该函数“发散”。



几何化的解释，该函数下的面积是有限的，则该函数收敛。若面积为无限，则函数发散。

例 1：$\int_0^\infty e^{-kx}dx$

$\int_0^N e^{-kx}dx = -\frac{1}{k}(e^{-kN}-1) \sim \frac{1}{k}$，因此$\int_0^\infty e^{-kx}dx = \frac{1}{k}$。

另一种方法是直接求被积函数的积分形式，然后将“无穷”作为上下限代入积分结果：$\int_0^\infty e^{-kx}dx = -\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{k}e^{-\infty} - (-\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$。

本例有一定物理学背景，它代表粒子衰减的平均衰减度，即在 0 至 T 的时间之

内辐射粒子数为：$\int_0^T Ae^{-kt}dt$，则最终的粒子总数为$\int_0^\infty Ae^{-kt}dt = A/k$。

例 2：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

在概率论中，我们可能要计算函数曲线下的从某个值开始到趋向于无穷的状态下的面积是多少，它通常代表一个可能性很低的状态发生的概率究竟是多少，在金融数学中经常会碰到这类问题，这也是我们关心并且学习处理"无穷"状态的原因，它确实有现实的意义存在。

例 3：$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$

$\int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N - \ln 1 \to \infty$，因此$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$是发散的。

讨论分母是 x 的不同次幂时，函数的收敛发散情况。

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^\infty = \frac{\infty^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$

可以看到p=1是临界值，函数的变化趋势为$\begin{cases} p<1, \infty \\ p=1, \ln\infty - \ln 1 \sim \infty \\ p>1, 1/(p-1) \end{cases}$。因此$p \le 1$时，函数发散，$p>1$时函数收敛。

极限的比较

当 x 趋向于无穷时，若两函数相互接近$f(x) \sim g(x)$，即$f(x)/g(x) \to 1$，则函数$\int_a^\infty f(x)dx$和函数$\int_a^\infty g(x)dx$同收敛或者同发散。

例：$\int_{100}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+10}} \sim \int_{100}^\infty \frac{dx}{x}$

例：$\int_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+3}}$

$\frac{1}{\sqrt{x^3+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$，因此有$\int_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+3}} \sim \int_{10}^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$。

例：$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$

$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$，在 x>1 时有$e^{-x^2} \le e^{-x}$，因此：

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx \le 2\int_0^1 e^{-x^2}dx + 2\int_1^\infty e^{-x}dx$$

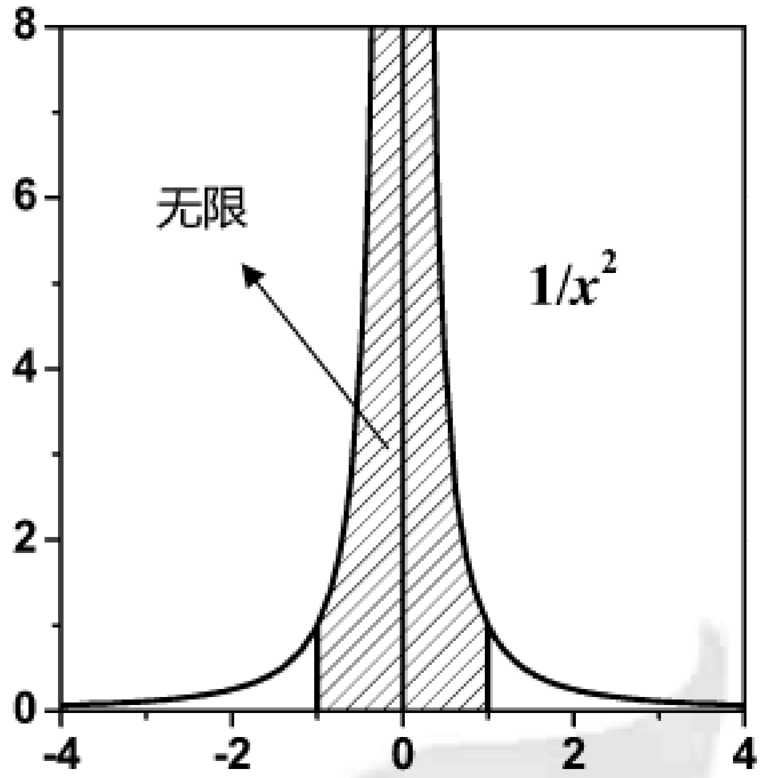
$\int_1^\infty e^{-x}dx$为收敛，因此$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$也是收敛的。

反常积分二

反常积分的第二种类型就是在积分区域内有奇点的情况。

例如：$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$，$\int_0^1 \frac{dx}{x}$，$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$。

很容易被迷惑的状态是奇点出现在积分上下限之间，这时候不能直接套用定积分的计算结果。如果直接计算则 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-x^{-1}\Big|_{-1}^{1}$，如果这样代入得到的是-2，实际上被积函数始终大于零，积分结果不可能小于零，这是由于积分区域内包含 x=0 的奇点存在。



所列出的三个函数，$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 为收敛，后两个为发散。

第 37 讲 无穷级数与收敛

Infinite series and convergence tests

反常积分

反常积分的第二种情况就是积分区域内有奇点的情况。

例：$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{x\to 0^+}\int_a^1 f(x)dx$

若计算得到这个极限是有限值，即极限存在，则称之为收敛，否则称为不收敛或者发散。

例 1：$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}\Big|_0^1 = 2$，收敛。

例 2：$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = +\infty$，发散。

讨论幂级数的反常积分：

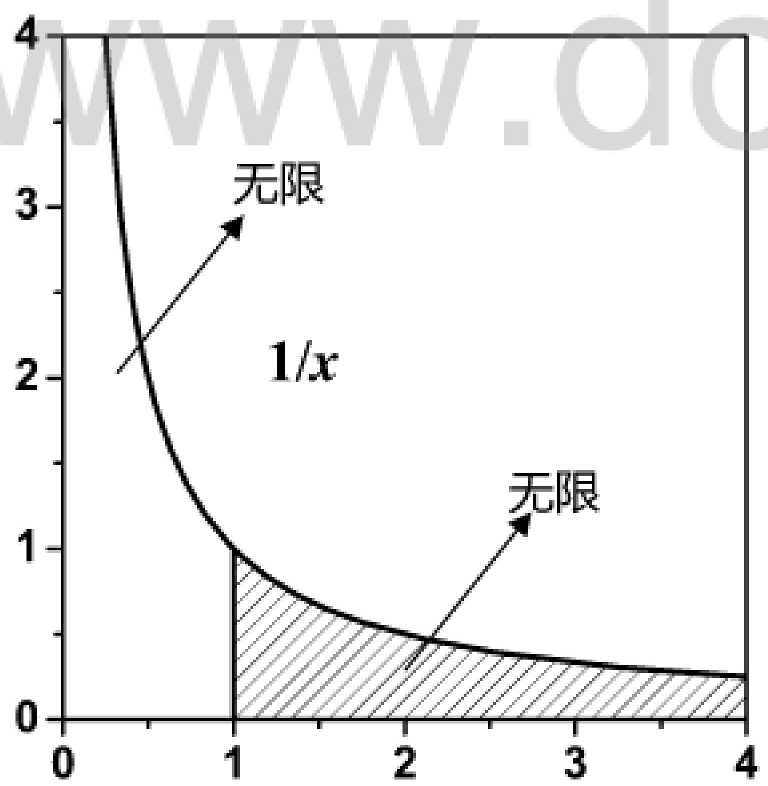
$P<1$ 时，$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$。$p \geqq 1$ 时，发散。

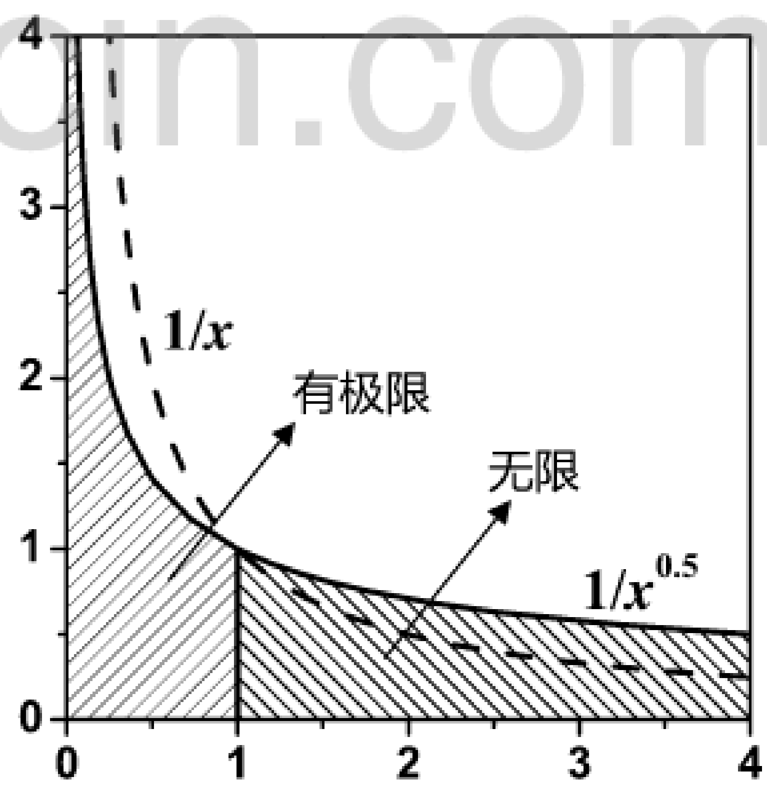
将幂级数进行对比：

$x \to 0$ 时，有 $\frac{1}{x^{1/2}} << \boxed{\frac{1}{x}} << \boxed{\frac{1}{x^2}}$。后两个函数发散。

$x \to \infty$ 时，有 $\boxed{\frac{1}{x^{1/2}}} >> \boxed{\frac{1}{x}} >> \frac{1}{x^2}$。前两个函数发散。临界点就是 $\frac{1}{x}$。

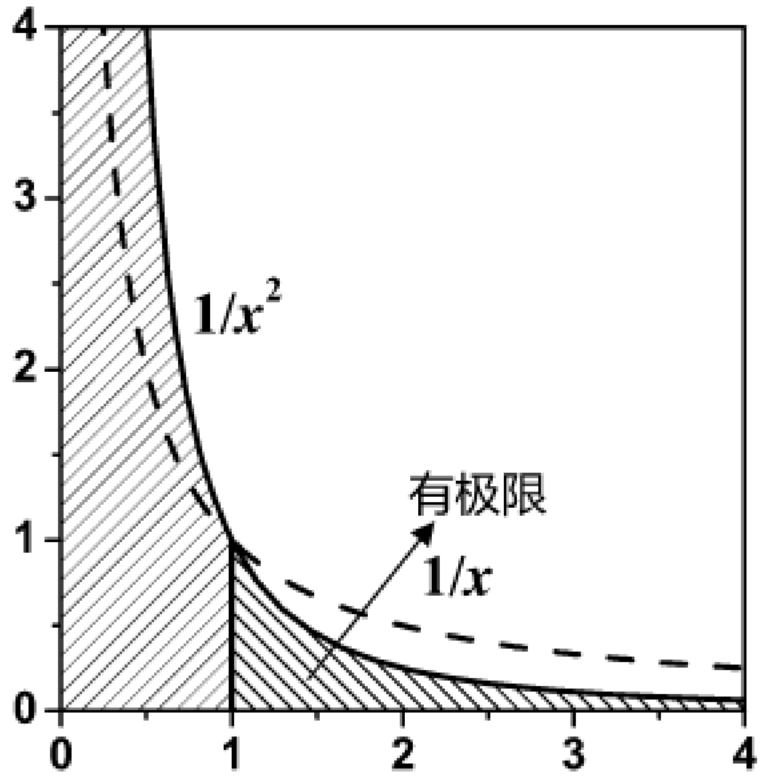
$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$，$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$



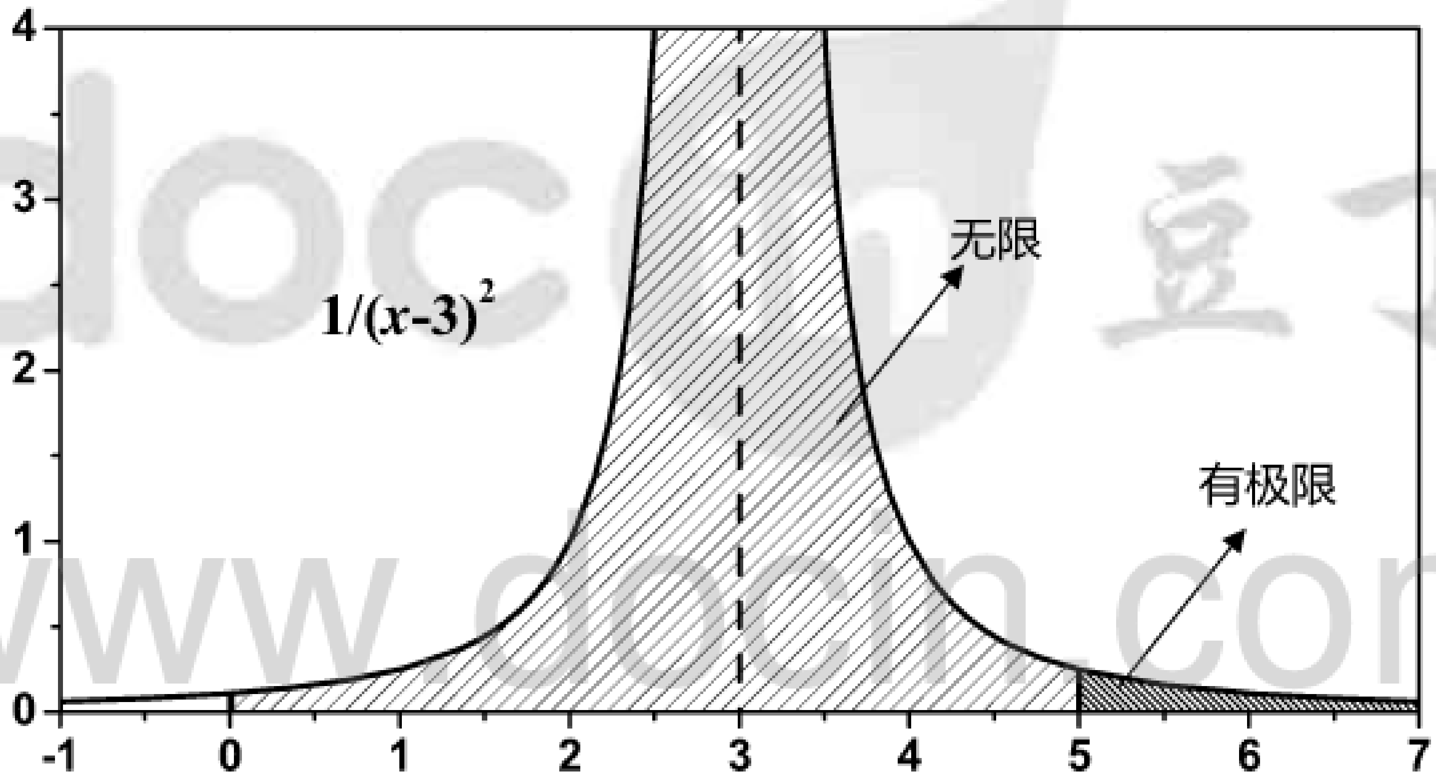


两个函数相互比较，在 $x>1$ 时，$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/2}} \geq \int_1^\infty \frac{dx}{x}$，因此 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/2}}$ 也是无限的，但是在 $x<1$ 的区域，$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/2}}$ 是收敛的。

同样地，可以对$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$进行讨论。



例：$y=\frac{1}{(x-3)^2}$



如果将函数切分为两个部分，则可以看到其中有包含奇点的一部分，它的值为无穷大。尽管另一部分是收敛的，但整个函数还是发散的。对一个被积函数，应该注意其趋向于正负极限的状态，以及在奇点上的状态。

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x-3)^2}dx=\boxed{\int_0^5\frac{dx}{(x-3)^2}}+\int_5^{\infty}\frac{dx}{(x-3)^2}$$

级数

几何级数，特例：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$，这个级数源自“芝诺悖论”。

几何级数的通式是$1+a+a^2+a^3+\cdots=\frac{1}{1-a}$（$|a|<1$）。

首先讨论一下发散的情况，当 a=1 时，$1+a+a^2+a^3+\cdots=1+1+\cdots+1=\frac{1}{1-1}=\infty$。

而当 a=-1 时，$1+a+a^2+a^3+\cdots=1-1+1-1+1\cdots+1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，这个结果事实上一直在 0,1 之间震荡，而所得平均值为 1/2。

而当 a=2 时，$1+a+a^2+a^3+\cdots=1+2+4+8\cdots=\frac{1}{1-2}=-1$，这显然是错误的，这个级数是发散的，只有在数论领域，在特定的运算规则下数学家可以令等式成立，其前提是抛弃 1>0 的概念。

定义"部分和" $S_N=\sum_{n=0}^{N}a_n$，求和到极限就是部分和的极限值 $S=\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}S_N$。极限值存在则级数收敛，若极限不存在则级数发散。

例 1：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leftrightarrow\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}$该积分收敛，该级数也收敛。$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。

例 2：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\leftrightarrow\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{2}$。级数的和已被证明不是有理数。

例 3：调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\leftrightarrow\int_1^{\infty}\frac{1}{x}$

考察黎曼和的上和与下和。记$S_N=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{N}$，则有：

$\int_1^N\frac{dx}{x}=\ln N<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}<S_N$，因为$\ln N$发散，所以$S_N$也发散。

$\int_1^N\frac{dx}{x}=\ln N>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{N}=S_N-1$

因此有$\ln N<S_N<\ln N+1$。

积分比较

从上个例子的推导，可以得到以下结论。

如果函数 $f(x)$ 递减，并且 $f(x)>0$。则 $f(n)$ 的和满足：

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}f(n)-\int_1^{\infty}f(x)dx\right|<f(1)$$

并且$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$和$\int_1^{\infty}f(x)dx$同收敛或者同发散。因此可以把判定级数收敛或者发散的问题转换为判定积分是否收敛的问题。

极限比较：如果两个函数满足 $f(n)\sim g(n)$，即如果 $n\to\infty$，则 $f(n)/g(n)\to1$。并且两者均为正，则$\sum f(n)$和$\sum g(n)$同时收敛或者同时发散。

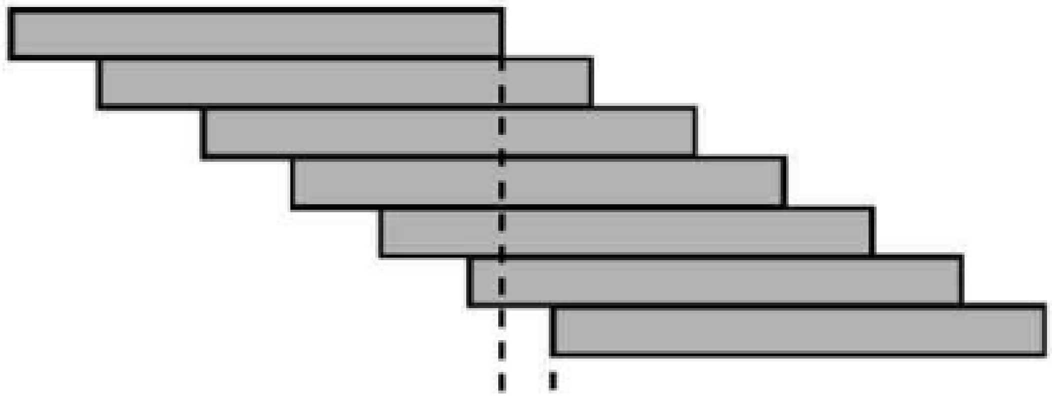
例：$\sum\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\leftrightarrow\sum\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\sum\frac{1}{n}$，因此级数发散。

例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5-n^2}}\leftrightarrow\sum\frac{1}{\sqrt{n^5}}=\sum\frac{1}{n^{5/2}}$，级数收敛。

第 38 讲 泰勒级数

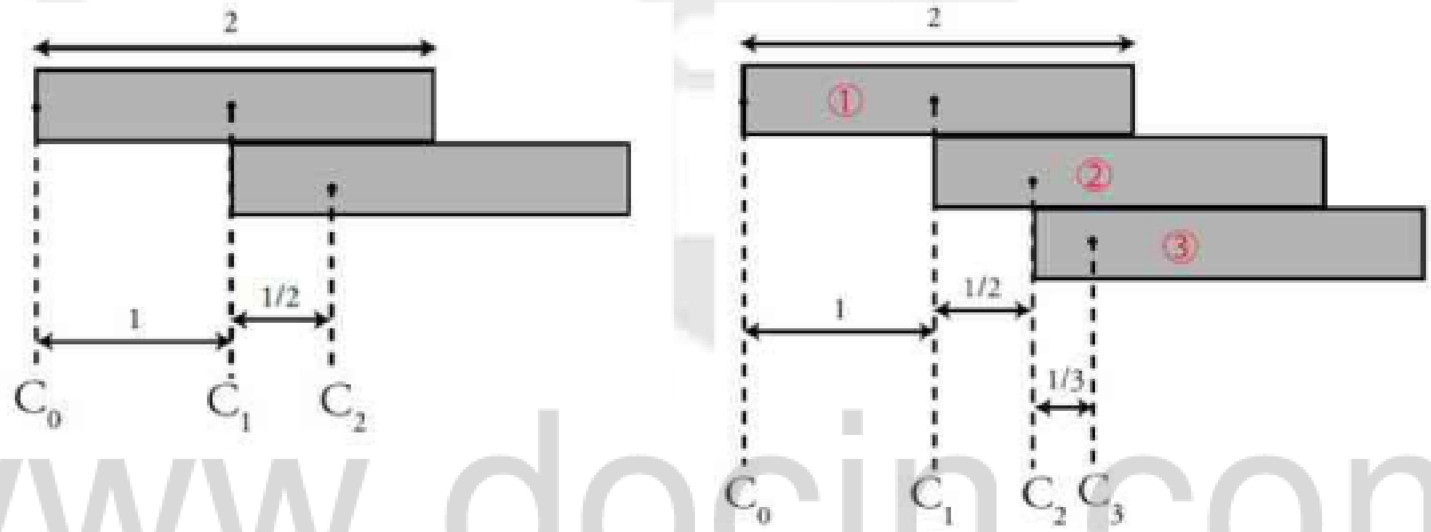
Taylor's series

级数



例：积木问题。

将积木堆积起来，上层积木依次侧移向外，能否将最上层积木完全移动至最底层积木的左侧，即顶层积木的右侧边线超出底层积木的左侧边线。或者问不断累积这种侧移，是会达到某个极限还是没有极限。



技巧在于从最上层开始进行计算以达到最佳策略。这种方法在计算中称为“贪婪算法”，在每一步都达到最大的可能，但是只能从最上层开始使用这种策略。为了讨论方便，将积木长度定为 2，那么 1 号积木最大探出量就在它的重心位置 $C_1=1$；叠加 2 号积木后的最大位移量就在 1 号和 2 号的共同重心位置。

按照此方法进行，当累加到第 N 块时，位移量为 C_N，再累加至第 N+1 块时则有 $C_{N+1}=\dfrac{NC_{N+1}+1(C_N+1)}{N+1}=C_N+\dfrac{1}{N+1}$。（将前 N 块和最后一块分别计算重力力矩加和除以所有积木的重量 $N+1$，就得到了所有积木的总体重心。）

1 号积木最大探出量为 $C_1=1$；叠加 2 号积木后的最大位移量为 $C_2=1+\dfrac{1}{2}$；叠加第三块积木后，则有 $C_3=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$。因此得到 $C_N=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{N}$。因此位移位置就是调和级数的累积和 $S_N=C_N$。则根据上次课的推导有 $\ln N<C_N=S_N<1+\ln N$。因此最大位移是发散的。并且这个数量关系给出了所达到距离和所需积木数 N 之间的关系。例如想要横跨整张桌子，则要达到距离为 24，因此有 $\ln N=24$，计算可

得到 $N=e^{24}$。这些积木摞起来的高度为 $3cm\times e^{24}=8\times10^{8}m$，这是地球到月亮距离的两倍。叠起来的积木的边缘所构成的曲线形状就是对数曲线，从这个计算也可以看出对数曲线的增长是非常缓慢的。

幂级数

已经学过一个幂级数 $1+x+x^2+\cdots=\dfrac{1}{1-x},|x|<1$。它也就是几何级数。

令 $1+x+x^2+\cdots=S$，则用 x 乘以等式两侧得 $x+x^2+x^3\cdots=Sx$。与前式相减得到 $1=S-Sx$，整理可得 $S=\dfrac{1}{1-x}$。注意：证明过程要求级数是收敛的。

幂级数 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$。$x$ 的取值若在收敛半径之内 $|x|<R$，即在收敛点集区间 $-R<x<R$ 之内时，级数收敛。$|x|>R$ 为级数的发散区域。

对于幂级数而言，当 x 在收敛半径之内时，有 $|a_nx_n|\to0$，它以指数速度衰减；在收敛半径之外，则 $|a_nx_n|$ 不趋向于零。

对于收敛的幂级数可以进行运算，其运算法则与多项式相同。可以进行加法、乘法、除法、函数复合还有微分和积分。

$$\frac{d}{dx}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

$$\int(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)dx=a_0+a_1x^2/2+a_2x^3/3+\cdots$$

泰勒公式

泰勒公式是用特殊系数的幂级数形式来表示函数的一种方法。例如函数 e^x，本身并不是一个类似于多项式的状态，通过给定特定的系数可以将之表示为级数的状态。泰勒公式 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^n(0)}{n!}x^n$。

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$
$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot2a_3x+\cdots$$
$$f'''(x)=3\cdot2a_3+4\cdot3\cdot2a_4x+\cdots$$

由 $f'''(0)=3\cdot2\cdot1\cdot a_3$ 得到 $a_3=\dfrac{f'''(0)}{3\cdot2\cdot1}$。可知参数通式为 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$。

例：$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$，$e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots$

例：在近似公式中得到了 $\sin x\approx x$，$\cos x\approx1-\dfrac{x^3}{2}$。通过泰勒级数可以得到完全的函数公式。

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \cdots$$

通过比较泰勒公式形式可以知道，正弦函数、余弦函数和 e 的指数函数是同一种类型的函数。

第 39 讲 泰勒级数（二）

Taylor's series 2

虽然这一讲对外挂的名字是总复习，然而内容完全没有复习。因此干脆把名字改过来了。

幂级数

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$，多项式可视为幂级数一个特例，具有有限项。

存在数值 R，$0\le R\le\infty$。当 $|x|<R$ 时幂函数收敛，否则幂函数发散，数值 R 称为收敛半径。

在收敛半径之内，取 $a_n=\dfrac{f^n(0)}{n!}$，即用函数在 0 点处的函数值和导函数值来表达函数，就是泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$

例：$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$（$R=\infty$）

例：$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$（$R=1$）

有个学生问了个问题，大意是在 x=-1 处，在左侧收敛半径处函数趋近于无穷，因此幂级数不收敛很好理解，但是在右侧 x=1 时，函数很平滑，为什么幂级数还是不收敛呢？我觉得这个问题本质上是没有理解其中的逻辑关系。事实上是，在收敛半径范围内，泰勒级数才会收敛到对应的函数值 $f(x)$，在收敛半径之外，不管函数是什么状态，泰勒级数是不能确保收敛到 $f(x)$的，此例中的泰勒级数就是震荡状态。

关于幂级数和泰勒级数的话题，这门课程讲得相对简单，按照老师的意思是说不值得拿出来细抠，但在课本上毕竟是一章的内容——《Calculus With Analytic Geometry》中的第 14 章以及附录的一些内容，各种推导过程一直在函数、积分和级数的概念中来回切换，我觉得还是很值得读一读。

例：$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$（$R=\infty$）

在整个实数域范围内，$|a_{2n+1}x_{2n+1}|=\left|\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|=\left|\dfrac{x}{1}\right|\left|\dfrac{x}{2}\right|\left|\dfrac{x}{3}\right|\cdots\left|\dfrac{x}{2n+1}\right|\to 0$，级数收敛。

在幂级数的展开式中难以看到正弦函数的周期性，因此级数展开式也会掩盖函数的一些特性。

例：$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$

幂级数的运算

乘法：$x\cdot\sin x=(0+1\cdot x+0+\cdots)(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots)=x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^8}{7!}+\cdots$

两个奇函数之积是一个偶函数。

微分：$\cos x=(\sin x)'=1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\frac{7x^6}{7!}+\cdots=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$ 通过泰勒公式展开可以得到相同的结果。

积分：

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x)\quad=\int_0^x(1-t+t^2-t^3+\cdots)$$
$$=\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots\right]_0^x$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

收敛半径为 $R=1$。注意：这个对于自然对数的级数展开式，不是对 $\ln x$ 做展开，而是将 $\ln(1+x)$展开。

又有学生问了类似前面的问题，即函数很平滑，为什么级数不收敛。我觉得需要再解释几句：首先，强调一下逻辑关系，就是在收敛半径范围内，级数才能很好地收敛到函数值，在半径之外，不管函数性质怎么好，级数的表现都不会好，这是级数本身所决定的，而不是由函数在该点的表现来决定。其次，有人问过我为什么 e^x 增长这么快，$\ln$ 函数增长相对较慢，反而 e^x 的级数的收敛半径会无穷大，难道不是增长缓慢的更容易处理么，答案就是你选择了用幂级数来进行展开，相当于选定了一组特殊的基（线代用语）：1，x，x^2，……如果你的系数 a_0，a_1……不够给力，那么因为这组基增长很快，在收敛半径之外就把级数（一堆幂函数的加和）给带的跑偏了，相当于你要组装一个精细尺寸的东西，结果给你的积木都是巨大的，你怎么调整积木的码放方式也没有用，表现在幂级数上就是震荡，调过来又调回去……最后，还有人问那么泰勒级数不是就应用范围很小了么，很多情况下收敛半径很小啊？这只是因为一直在 0 点附近进行泰勒展开的造成的错觉，泰勒展开的通用公式为：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

变量替换：$e^{-t^2}=1+(-t^2)+\frac{(-t^2)}{2!}+\frac{(-t^2)^2}{3!}+\cdots=1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\cdots$

误差函数 $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots)$

这门课就讲完了！

再扯两句，美式教学崇尚应用的特点在它的微积分中体现尤为明显，老师几乎给每个晦涩的概念都找出应用背景，不让任何概念孤立存在。我觉得这才是给工科

的数学课，而国内的很多课程设计是给理科上的数学课。当我们每个人都闷头在“吉米多维奇”中训练技巧的时候，有没有想过那些偏题怪题和证明题一样并不能帮你把数学变成工具呢？讲真，个人认为主讲老师的水平算不上一流，课程内容设置也不是特别难，但总体说来真的很合理，特别是引入每一个概念都花了一番心思，让课程的连贯性显得很赞。还有课程的教材也是难得好书！