18.01 **一元微积分** Single Variable Calculus

第三单元 积分入门

Unit 3 Intro to Integration

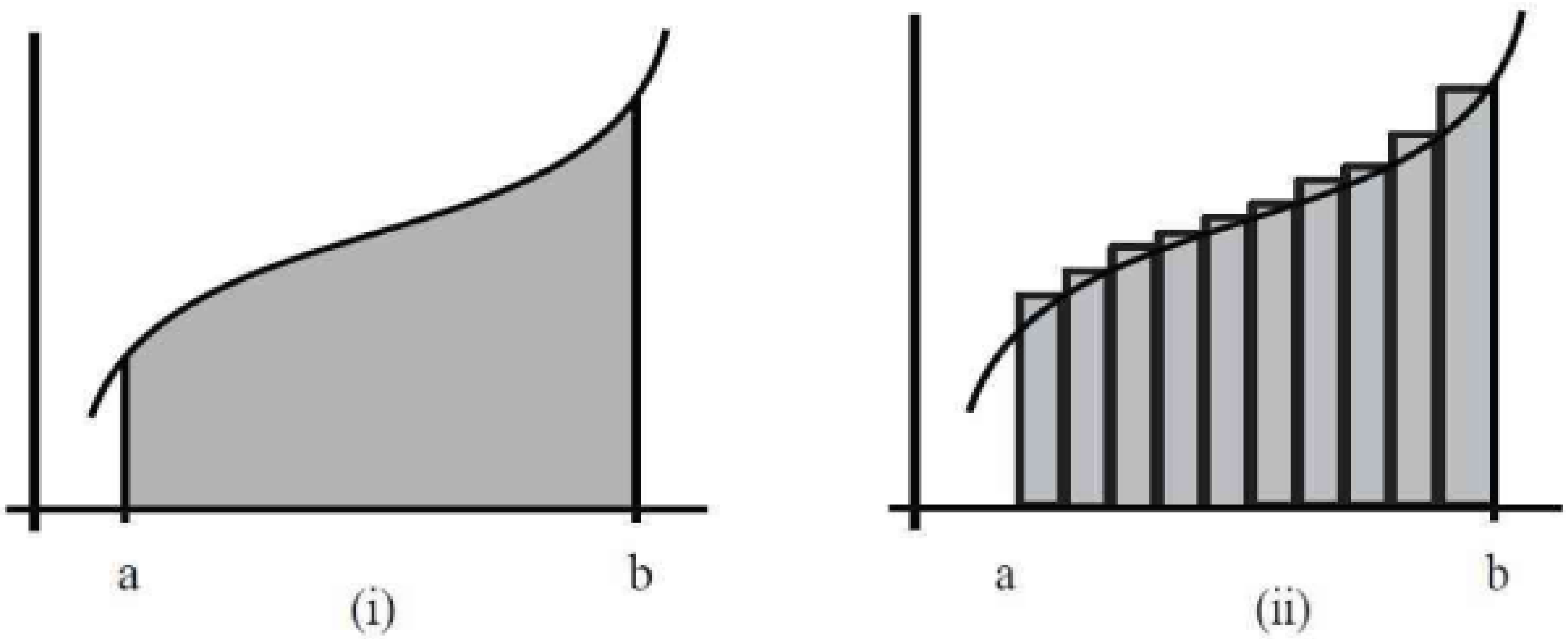
douTintin14

第 18 讲 定积分

Definite Integrals

曲线下的面积

用几何法来描述定积分，就是求曲线下的面积。（在下半节课会接触到积分的另一种意义：累计和。）



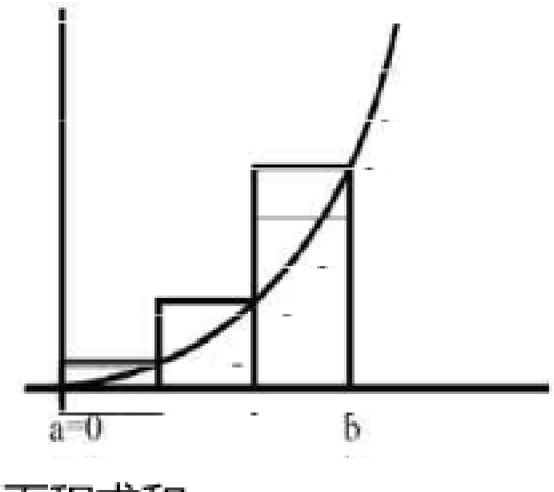
$$S=\int_a^b f(x)dx$$

定积分和不定积分符号的区别就是划定了起始点 a 和终点 b。

计算面积的方法：

1. 划分为“矩形”；
2. 将矩形面积相加；
3. 修正计算：对矩形取极限，宽度变为无穷小。

例 1：$f(x)=x^2$，$a=0$，b 任意。



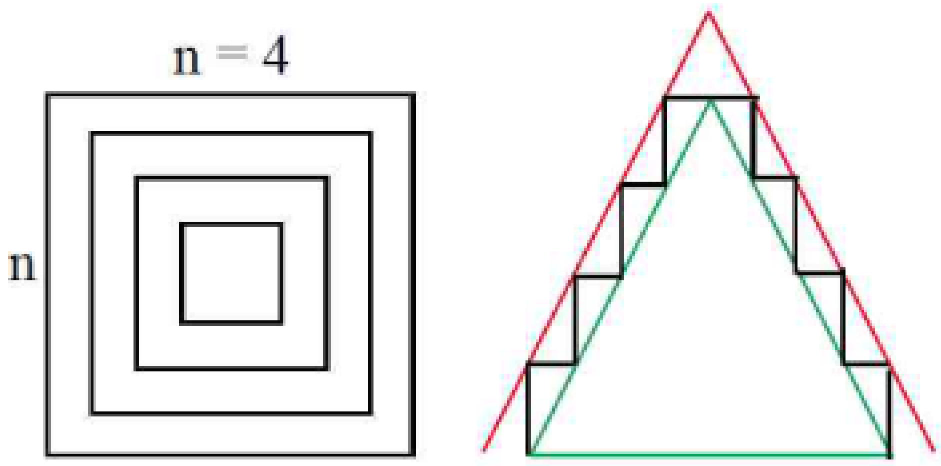
x	高度 $f(x)$
b/n	$(b/n)^2$
$2b/n$	$(2b/n)^2$
$3b/n$	$(3b/n)^2$

对矩形面积求和：

$$S=\underbrace{(b/n)}_{底}\underbrace{(b/n)^2}_{高}+\underbrace{(b/n)}_{底}\underbrace{(2b/n)^2}_{高}+\cdots+(b/n)(nb/n)^2$$

$$S=(\frac{b}{n})^3(1^2+2^2+\cdots+n^2)=b^3(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3})$$

用几何技巧来求取 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的值，搭一座金字塔：



底层为 n^2 块砖块，向上一层为$(n\text{-}1)^2$，以此类推。从剖面图可以看到，金字塔的体积小于外接椎体的体积$\frac{1}{3}(n+1)^3$，而大于内接椎体的体积$\frac{1}{3}n^3$。则有：

$$\frac{1}{3}n^3<1^2+2^2+\cdots+n^2<\frac{1}{3}(n+1)^3$$

得到：

$$\frac{1}{3}<\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}<\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^3\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}$$

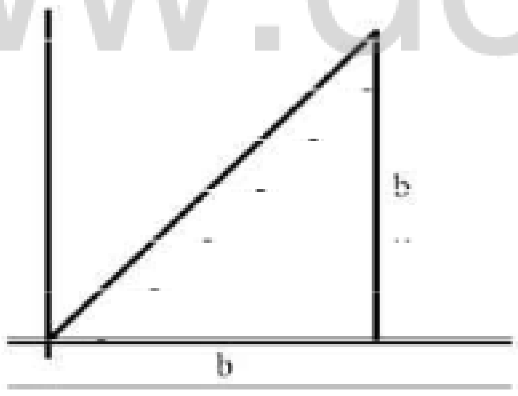
因此取极限可得$S=\int_0^b x^2dx\to b^3(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3})=\frac{1}{3}b^3$

引入和号$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$来简化表达式，则有：

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\to\frac{1}{3}$$

则$S=(b/n)(b/n)^2+(b/n)(2b/n)^2+\cdots+(b/n)(nb/n)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}(\frac{ib}{n})^2=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$

例 2：$f(x)=x$。



$$S=\frac{1}{2}b^2$$

例 3：$f(x)=1$。则$S=b$。

得到：

$f(x)$	$\int_0^b f(x)dx$
x^2	$b^3/3$
x	$b^2/2$
$x^0=1$	b

黎曼和

定积分的一般步骤：

1.将从 a 到 b 的区间划分为 n 步（n 个小区间）则每一步的小增量为 $\frac{b-a}{n}=\Delta x$。

2.在每个小区间上取任意的函数值 $f(c_i)$ 作为高度值，与底 Δx 相乘并进行加和。得到 $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} \int_a^b f(x)dx$，该公式即为黎曼和。

例：积分可以解释为"累积和"。

财务问题，时间变量 t 单位为"年"，借款率 $f(t)$ 单位为"美元/年"。

每天都借款，则 $\Delta t=\frac{1}{365}$。借款率在变化，第 45 天借款为 $f(t)\Delta t=f(\frac{45}{365})\frac{1}{365}$，则整年的借款额为 $\sum_{i=1}^{365} f(\frac{i}{365})\Delta t=\int_0^1 f(t)dt$。但是借款是有利息的，当借款额本金为 P，借款时间为 T 时，则欠银行的欠款为 Pe^{rT}，其中 r 是利率。例如第 45 天借的钱，会在此后的 365-45 天之内计利息，因此到年底这笔钱的欠款为 $f(\frac{45}{365})\frac{1}{365}e^{r(1-\frac{45}{365})}$。

因此年末时的欠款就是每一天借款的欠款加和：

$$\sum_{i=1}^{365}(f(\frac{i}{365})\Delta t)e^{r(1-\frac{i}{365})} \to \int_0^1 e^{r(1-t)}f(t)dt$$

第 19 讲 微积分第一定理

First fundamental theorem of calculus

微积分基本定理

微积分基本定理（Fundamental Theorem of Calculus FTC1）：

若 $F'(x)=f(x)$ ，则有 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

引入符号 $F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$ 简化公式，$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b$。

例 1：$F(x)=\frac{x^3}{3}$ ，$F'(x)=x^2$。

则根据微积分第一定理 $\int_a^b x^2dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$ ，上节课的例子中，起始点 $a=0$，则有 $\int_0^b x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^b=\frac{b^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{b^3}{3}$。

例 2：求曲线 $f(x)=\sin x$ 一个波峰之下的面积。

$\int_0^\pi \sin xdx=(-\cos x)\big|_0^\pi=-\cos\pi-(-\cos 0)=2$

例 3：$\int_0^1 x^{100}dx=\frac{x^{101}}{101}\bigg|_0^1=\frac{1}{101}$

微积分基本定理的直观解释：

距离 $x(t)$ 和速度 $x'(t)=dx/dt=v(t)$。则有运动的距离为 $\int_a^b v(t)dt=x(b)-x(a)$ ，用"黎曼和"的概念来理解就是 $\sum_{i=1}^n v(t_i)\Delta t\cong\int_a^b v(t)dt=x(b)-x(a)$。

注意路程和距离的区别，路程为 $\int_a^b |v(t)|dt$。

将积分运算推广到 $f(x)<0$ 的情况，例如对例 2 中正弦函数的一个周期进行积分。

例 4：$\int_0^{2\pi}\sin xdx=(-\cos x)\big|_0^{2\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos 0)=0$

因此上一节课对积分的几何解释是不完全的，积分应该等于函数曲线在 X 轴以上的面积减去在 X 轴之下的面积。

定积分的性质

① $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

② $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$

③ $a<b<c$ ，$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

④ $\int_a^a f(x)dx=0$

⑤$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$，从这个性质来看，性质 3 的条件其实是不必要的。

⑥积分估计：$f(x) \le g(x)$，$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx\,(b>a)$

例 5：$e^x \ge 1$，$x \ge 0$ 为起点。比较可得到 $\int_0^b e^x dx \ge \int_0^b 1dx \Rightarrow e^b - 1 \ge b$，$e^b \ge 1+b$。

从 $e^x \ge 1+x$，$x \ge 0$ 为起点。可得 $\int_0^b e^x dx \ge \int_0^b (1+x)dx \Rightarrow e^b - 1 \ge b + b^2/2$，$e^b \ge 1+b+b^2/2$。

继续重复这一过程所得到的多项式是 e^x 的近似公式。

变量替换

$\int_{u_1}^{u_2} g(u)du = \int_{x_1}^{x_2} g(u(x))u'(x)dx$，其中 $u = u(x)$，$du = u'(x)dx$，$u_1 = u(x_1)$，$u_2 = u(x_2)$。

注意：只有在 $u'(x)$ 没有改变符号的时候才成立。

例 6：$\int_1^2 (x^3+2)^5 x^2 dx \Leftrightarrow \int_3^{10} u^5 \frac{1}{3} du = \frac{1}{18} u^6 \Big|_3^{10}$

需要注意的是变量替换之后，积分上下限也要随之改变。

例 7：

$\int_{-1}^1 x^2 dx \ne \int_1^1 u \frac{1}{2\sqrt{u}} du = 0$，问题出在 $dx = \frac{1}{2x} du \ne \frac{1}{2\sqrt{u}} du$，符号发生了变化，此处 $x = \pm\sqrt{u}$。

在 $u'(x)$ 的符号发生变换的时候，正确的计算方法是分段进行计算。

第 20 讲 微积分第二定理

Second fundamental theorem

微积分第一定理 FTC1：

若有 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。之前用之计算积分值。本讲中应用 $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ 的形式，用导函数 $f(x)$ 的性质来理解原函数 $F(x)$。

比较微积分基本定理和中值定理

$\Delta F=F(b)-F(a)$，$\Delta x=b-a$。则微积分基本定理为 $\Delta F=\int_a^b f(x)dx$。若用 Δx 除以等式两侧，则得到 $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，所得即 $f(x)$ 的平均值。

从黎曼和的角度理解平均的含义，$a=0$，$b=n$，$\dfrac{f(1)+\cdots+f(n)}{n}\approx\dfrac{\int_0^n f(x)dx}{n}$，此处的 $\Delta x=1$。

换一个角度来看，微积分第一定理为 $\Delta F=\left[\text{Ave}(F')\right]\Delta x$。

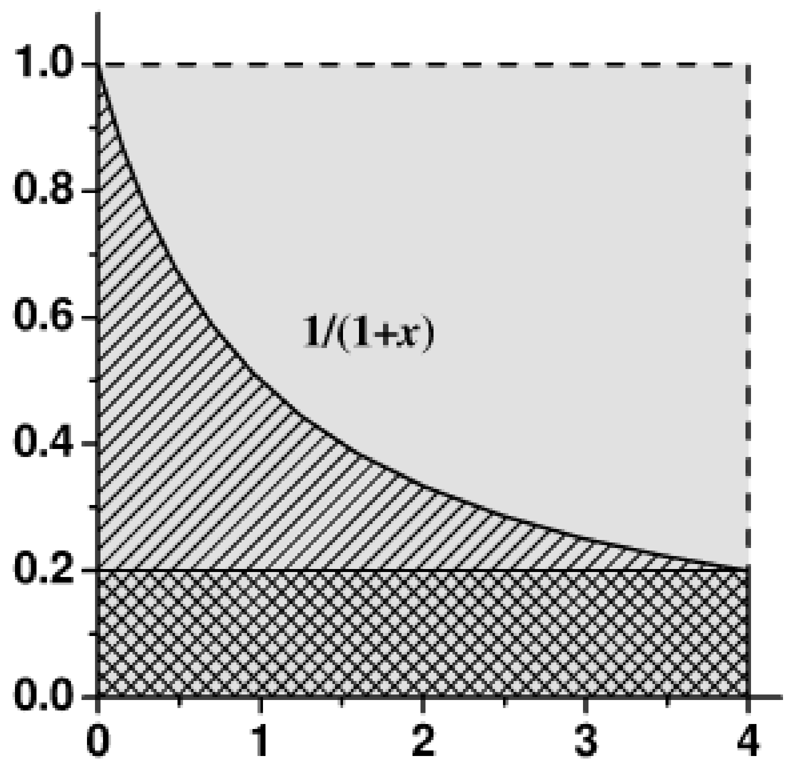
而中值定理为 $\Delta F=F'(c)\Delta x$。但并不确定 c 在定义域之间的位置。而可以确定的只是 $(\min F')\Delta x\le\Delta F=F'(c)\Delta x\le(\max F')\Delta x$。

例：$F'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$F(0)=1$。中值定理显示 $A<F(4)<B$，求 A 和 B？

根据中值定理有 $F(4)-F(0)=F'(c)(4-0)=\dfrac{1}{1+c}4$，可得 $9/5<F(4)<5$。

而根据 FTC 有 $F(4)-F(0)=\int_0^4\dfrac{1}{1+x}dx$，则有 $\dfrac{4}{5}=\int_0^4\dfrac{1}{5}dx<F(4)-F(0)<\int_0^4 dx=4$。

从几何上讲不等式的意义是：积分值在上下黎曼和之间，这里取的黎曼和是最粗糙的情况，即只取一个"矩形"计算面积。



此处可以看出，中值定理给出的是含糊的状态，用积分中最粗略的计算就可以得到相同的结论，因此不提倡使用中值定理指导计算。

微积分第二定理

已知一个连续函数 $f(x)$，定义新函数 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ ，其中 $a\le t\le x$，则 $G(x)$满足 $G'(x)=f(x)$。

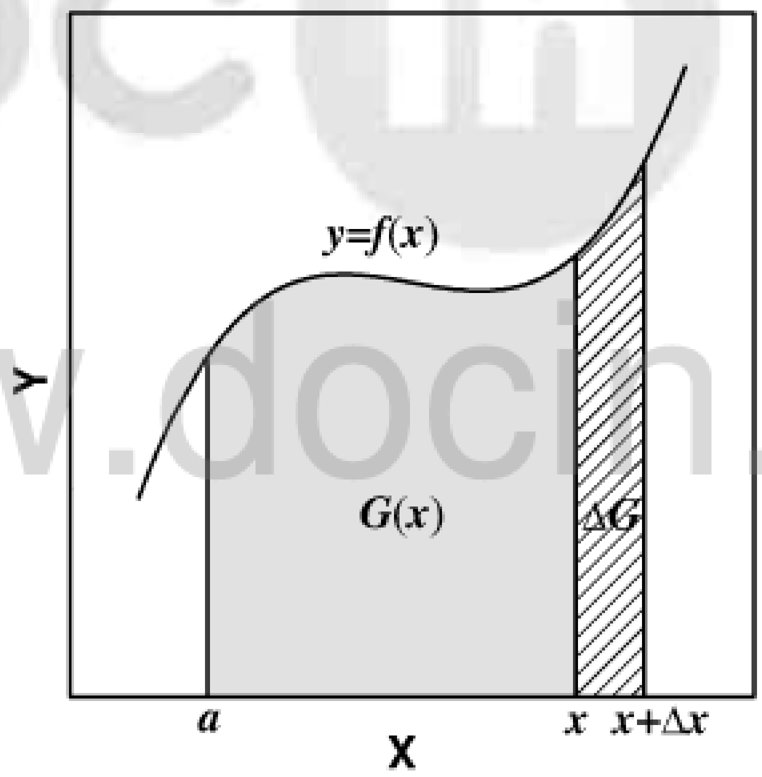
从微分方程的角度，$G(x)$是 $\begin{cases} y'=f \\ y(a)=0 \end{cases}$ 的解。

例：$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{dt}{t^2}=$ ？

此处 $G(x)=\int_1^x \frac{dt}{t^2}=\int_1^x f(t)dt$ ，$f(t)=\frac{1}{t^2}$ ，因此 $G'(x)=f(x)=\frac{1}{x^2}$。

可以通过求 $G(x)$的表达式进行验算，$G(x)=\int_1^x \frac{dt}{t^2}=-t^{-1}\Big|_1^x=-\frac{1}{x}+1$。对 $G(x)$求导有 $G'(x)=\frac{1}{x^2}$。

证明微积分基本定理



第二定理：

$\Delta G(x)\approx \Delta x\cdot f(x)$ ，因此有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta G(x)}{\Delta x}=f(x)$。（注意此处用到了“连续”的性质。）定理得证。

第一定理：

存在 $F(x)$满足 $F'(x)=f(x)$,定义函数 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$,则 $F'(x)=G'(x)=f(x)$ ，则 $F(x)=G(x)+C$ 。则有 $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)=G(b)=\int_a^b f(x)dx$ 。

例：利用前例中的函数说明第一定理的证明过程。

$F(x)=-\frac{1}{x}$，$f(x)=\frac{1}{x^2}$，$G(x)=1-\frac{1}{x}$。

则有 $\int_1^2 \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}\Big|_1^2=(1-\frac{1}{t})\Big|_1^2$。

用导函数 $f(x)$ 的性质来理解原函数 $F(x)$

例：$L'(x)=\frac{1}{x}$，$L(1)=0$。

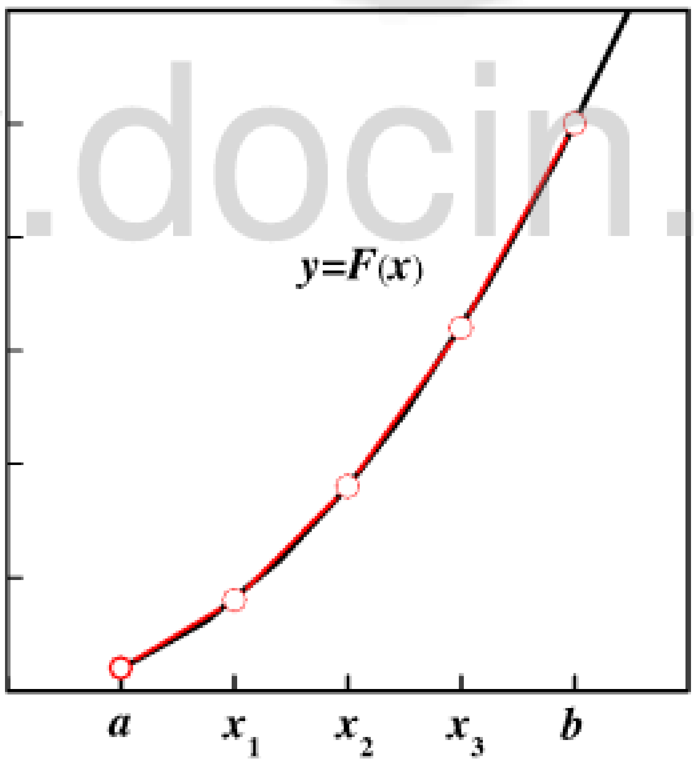
微积分第二定理给出 $L(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$。从一个初等函数出发得到了一个超越函数。利用这个方法可以创造一些“新”函数。

例：$y'=e^{-x^2}$，$y(0)=0$。得到 $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$。此处的 $F(x)$ 不能用已知的其它函数（三角函数、对数函数、指数函数……）的形式表现出来，它是超越函数。

例：几何定义了半径为 1 的圆的面积 π，它是一个超越数，并且它不是任何以有理数为系数的代数方程的解。

对数函数同样也是超越函数，只有在微积分里会得到这些函数。

这部分内容是微积分的核心之一。通常在积分这一部分都是以导函数 $f(x)$ 为已知，因此几乎都是给出导函数的函数曲线，从函数曲线下的面积来说明原函数 $F(x)$ 和积分的内在含义，但实际上也可以从原函数的函数图像上来理解定积分。



初值点 $y_0=F(a)$，根据中值定理，存在 $a\le c_1\le x_1$，满足 $f(c_1)=\frac{F(x_1)-F(a)}{x_1-a}$，即 $F(x_1)=F(a)+f(c_1)(x_1-a)$。同理可得 $F(x_2)=F(x_1)+f(c_2)(x_2-x_1)$ ……

因此有 $F(b)=F(a)+\sum f(c_i)(x_i-x_{i-1})$。将间断变为无穷小，$x_i\le c_i\le x_i+dx$。则有 $c_i\to x_i$，$\Delta x=x_i-x_{i-1}\to dx$，原式中的加和变为积分 $F(b)=F(a)+\int_a^b f(x)dx$。因此两个函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 如果导函数相同，则即使初值有所不同，但在 $[a,b]$ 区域内

的增量$\int_a^b f(x)dx$是相同的。

如果定义一个函数$G(x)=\int_a^x f(t)dt$，那么它的函数值就是，以$f(x)$为斜率在$[a,x]$区域上的增量，显然有$G(a)=\int_a^a f(t)dt=0$，即增量是从 0 开始的。

个人觉得在初涉微分方程时，初值、斜率、增量的理解方式可能更为方便一些。

第 21 讲 积分在对数和几何上的应用

Applications to logarithms and geometry

应用微积分基本定理

微积分第二定理：$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$。

例：$y'(x) = \frac{1}{x}$。

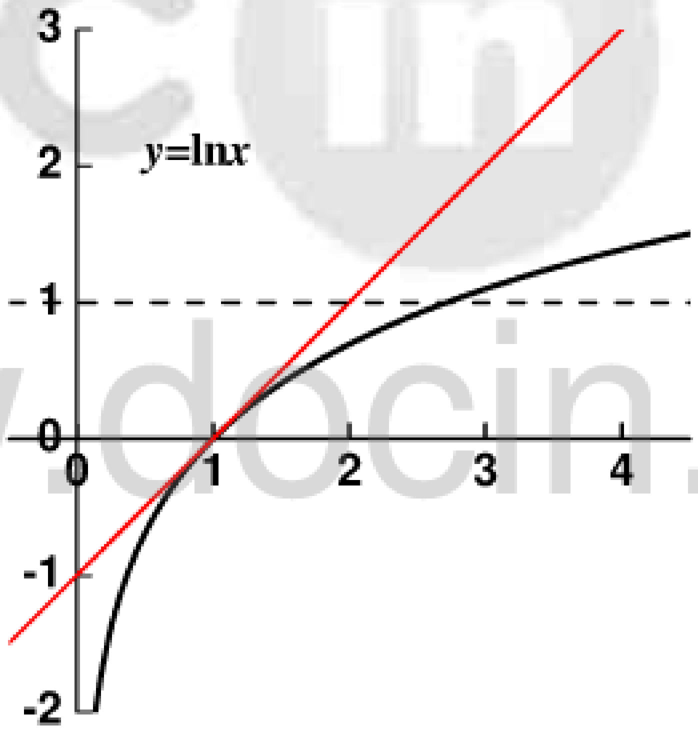
则有 $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$，这就是对数函数的定义。对它进行推演，可以得到对数函数的各种性质。

1. $L'(x) = \frac{1}{x}$，$L(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$。这两个性质唯一决定了对数函数。

2. $L''(x) = -\frac{1}{x^2}$，由此可知函数为处处下凹。

3. $L'(1) = 1$。

由以上条件可以对函数进行构图。



函数曲线和 y=1 交点的横坐标就是 e，即 e 满足 $L(e)$=1。

当 0<x<1 时，有 $L(x)$<0。可以归因于：

1.$L(x)$为递增函数而 $L(1)$=0；

2. $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt < 0$。

例：从积分的角度讨论 $L(ab) = L(a) + L(b)$。

将 $L(ab)$的积分形式进行拆分得$\int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$，而$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{adu}{au} = \int_1^b \frac{du}{u}$。

因此有$\int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_1^b \frac{dt}{t} \Rightarrow L(ab) = L(a) + L(b)$。

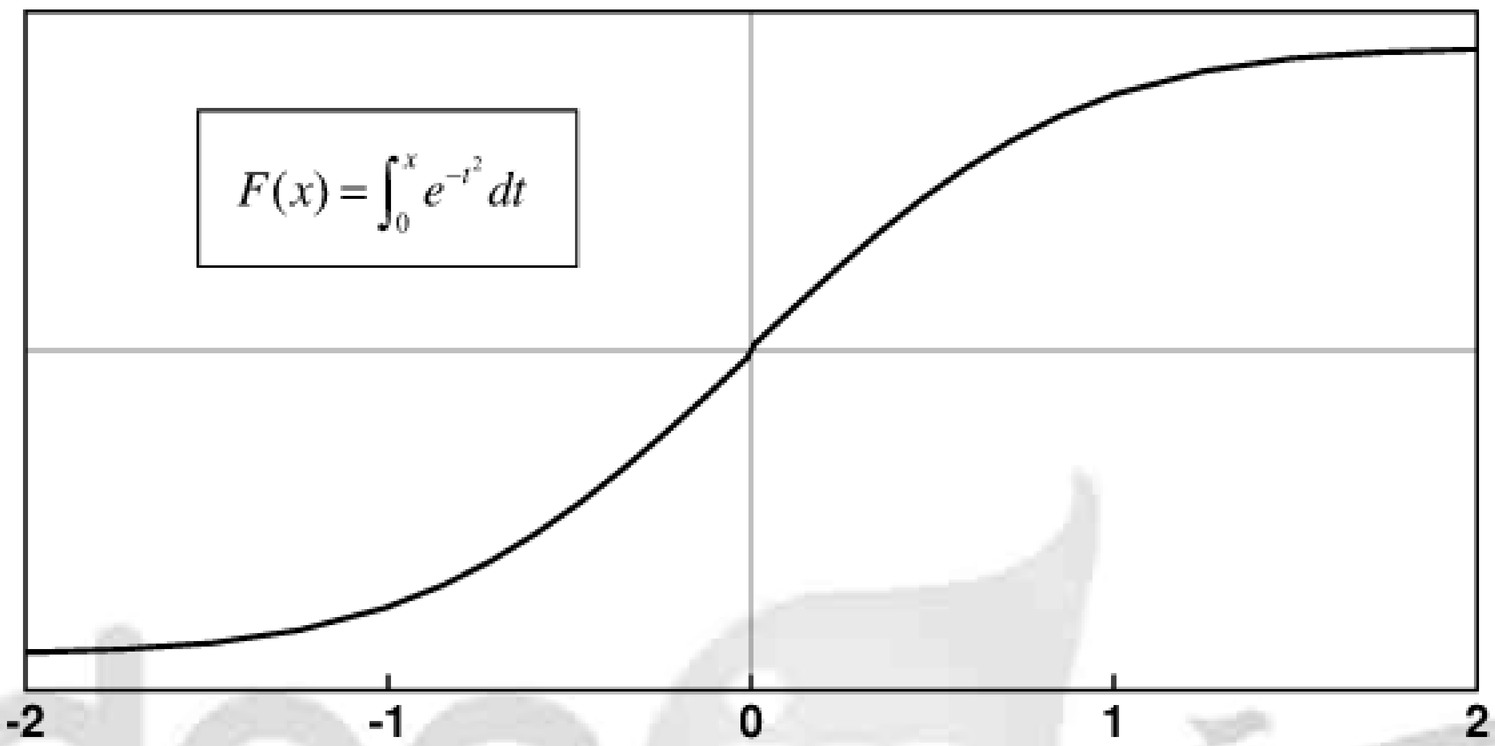
例：

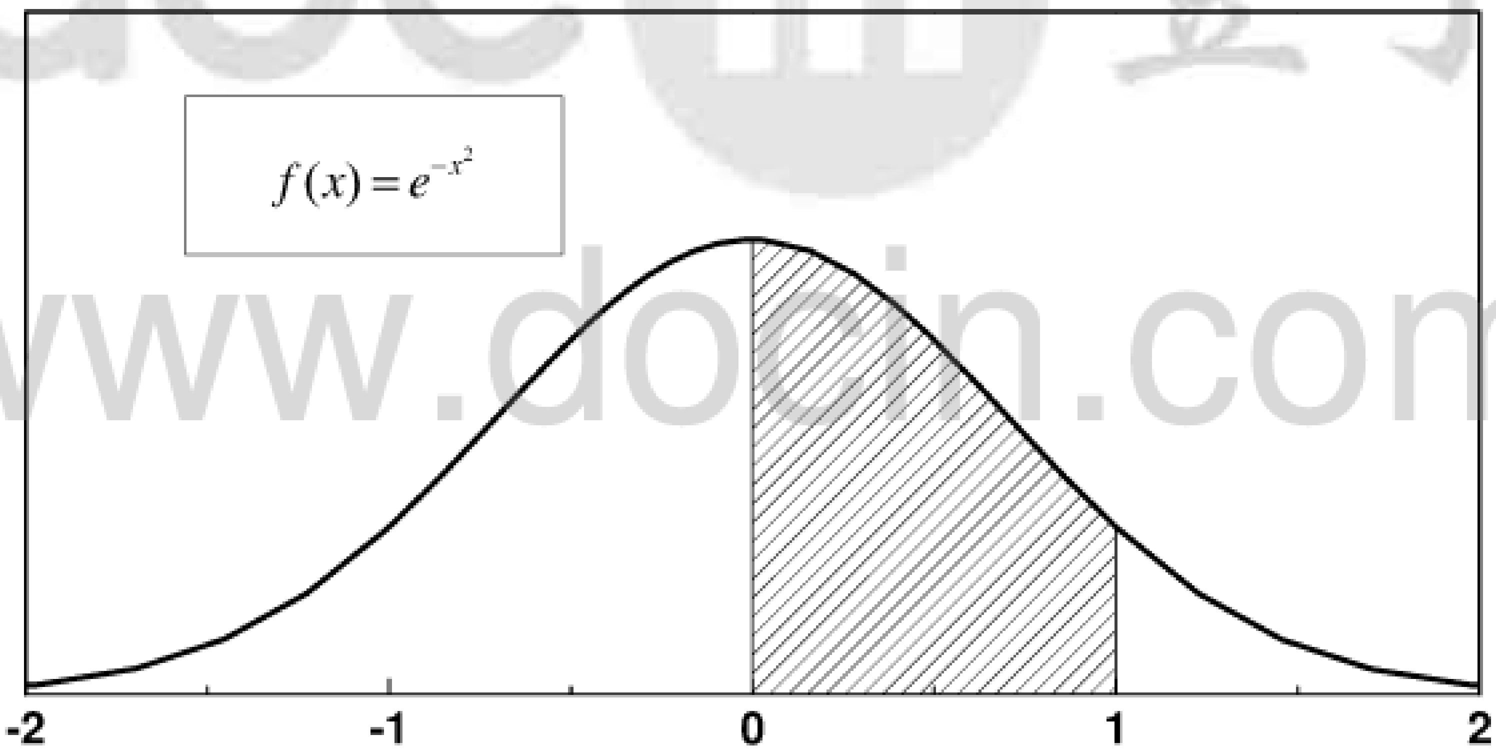
对于一个新函数的研究方法就是讨论其性质并作图。

1. $F'(x)=e^{-x^2}$ ，$F(0)=0$ ，原函数为递增函数；

2. $F''(x)=2xe^{-x^2}$ ，$F'(0)=1$ ，当 $x>0$ 时，原函数为下凹，$x<0$ 时，原函数为上凸函数。

原函数具有奇函数基本性质 $F(-x)=-F(x)$ 。





导函数是偶函数 $f(-x)=f(x)$ 。原函数的值是导函数曲线下的面积，因为导函数是对称的偶函数，所以原函数也是对称的，但是是以零作为积分下限进行计算，所有若 x 取负值，则面积值也为负，所以原函数在 $x<0$ 时为负。

原函数有两条渐近线，$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。

为了将函数值极限变为 1，数学家拼凑出一个函数，即误差函数：

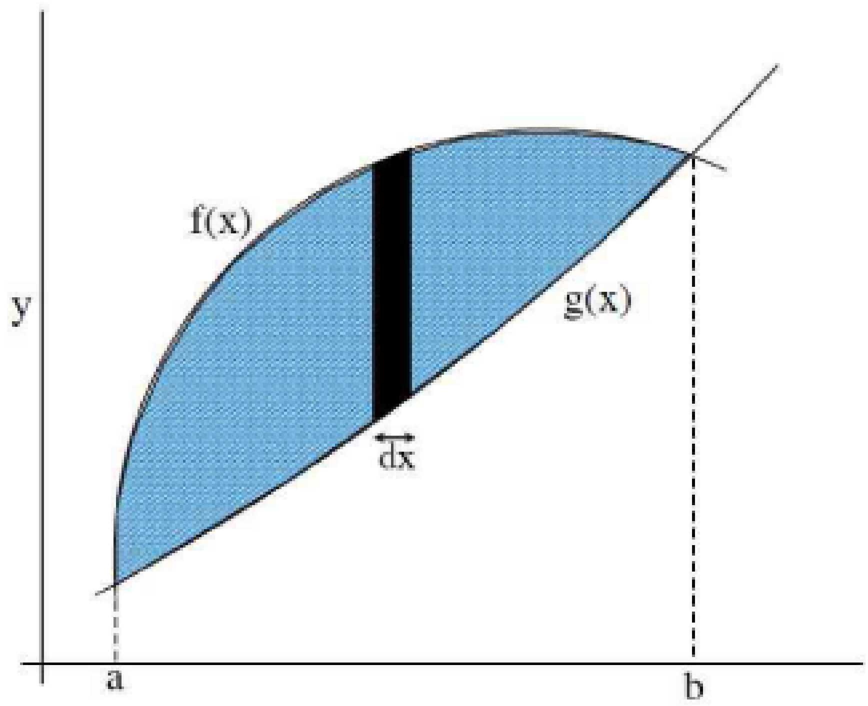
$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}F(x)$$

另一种变体是标准正态分布：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(-\frac{x^2}{2})}$。

利用积分创造的函数还有很多，例如：

菲涅尔积分：$C(x)=\int_0^x \cos(t^2)dt$ ，$S(x)=\int_0^x \sin(t^2)dt$。经常出现在傅里叶分析中的函数 $H(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$。黎曼假设：$Li(x)=\int_2^x \dfrac{dt}{\ln t}$ 约等于小于 x 的质数的个数。

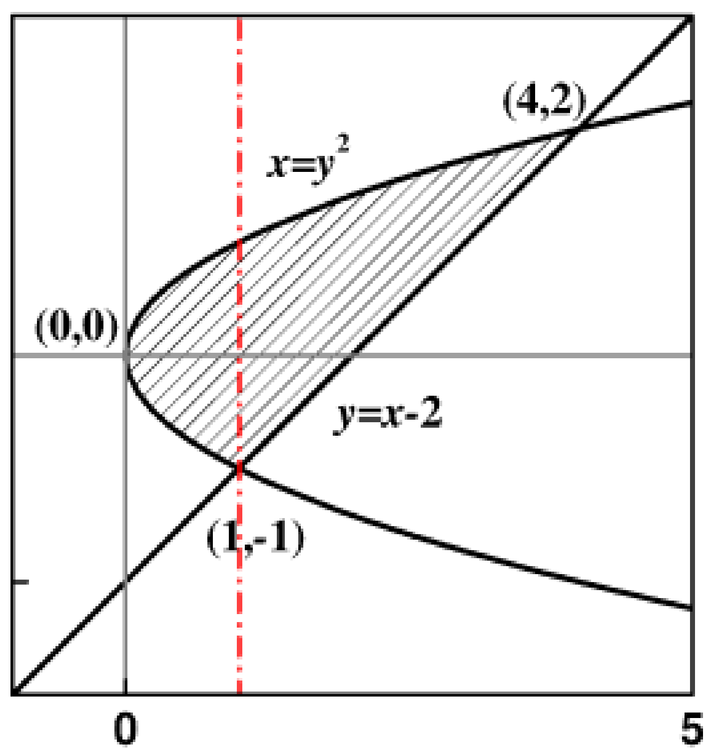
求两条曲线之间的面积



用黎曼和的思路来计算面积，则每个小区间之内的宽度为 dx，而高度为 $f(x)$-$g(x)$。将所有的区块相加得到 $\int_a^b (f(x)-g(x))dx=$ 面积。在此类问题中，我们面对的问题包括几个方面：首先确定被积函数，确定取极限的基本信息积分上下限，最后才是计算积分，主要目的是建立积分。

例：求 $x=y^2$ 和 $y=x$-2 之间的面积。

首先画图，确认所求区域。



第一种方法：按照前述黎曼和的思路来求取面积，但是面临一个问题，积分的下限实际上是由两段函数曲线构成的，在交叉点之前是抛物线的下半部分，在之后

则是直线，因此需要分成两部分进行讨论。

图像中有三个点很重要，其一是（0,0）,还有就是抛物线和直线的两个交点。

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x-2 \end{cases} \Rightarrow y = y^2 - 2 \Rightarrow (y-2)(y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, y = -1 \\ x = 4, y = 2 \end{cases}$$

积分区域的顶部就是 $y=\sqrt{x}$，底部左侧曲线则是 $y=-\sqrt{x}$，底部右侧曲线是 $y=x-2$。左侧区域是从 x=0 到 x=1，右侧区域从 x=1 到 x=4。

因此，面积为左右两部分加和，面积 $= \underbrace{\int_0^1 (\underset{\text{顶}}{\sqrt{x}} - (\underset{\text{底}}{-\sqrt{x}}))dx}_{\text{左侧}} + \underbrace{\int_1^4 (\underset{\text{顶}}{\sqrt{x}} - (\underset{\text{底}}{x-2}))dx}_{\text{右侧}}$。

第二种方法：从 Y 的方向进行积分。积分区域是从 y=-1 到 y=2，积分的顶部是直线方程 x=y+2，底部是 $x=y^2$，因此面积= $\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy$。

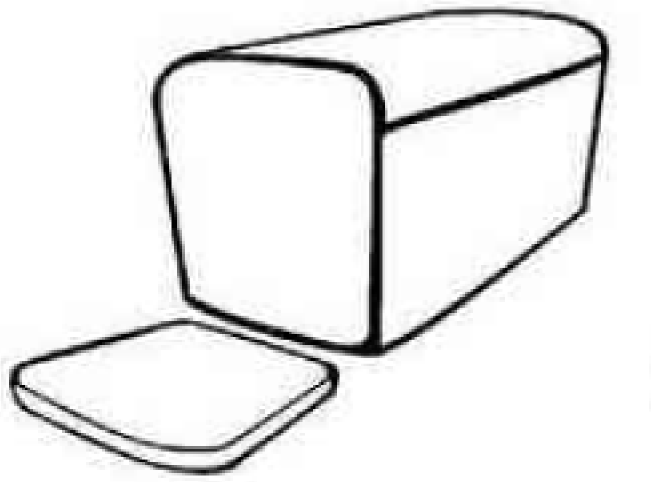
吐槽一下，课程中，老师一直会现场立刻解答学生的问题。这本来是个挺好的事情，省得下课后大家都忘记了。但是不得不说，问题都好 low，几乎见不到什么能给我启发的问答。有时候我会疑惑，MIT 的学生就这个水准啊，绝对比我当年的本科同学差多了，可是为啥人家老美在科技方面比我们强很多呢？我自己感觉排除所谓创造性强弱方面的原因，对于数理工具的掌握和应用能力也是很大的原因。不觉得这个课程难，是因为用到的抽象思维能力很少，课程设置中将过于理论化的逻辑推演都删掉了，讲得都是最实用的部分，教学目的就是让学生能将微积分应用得像四则运算一样，这样培养出来的人，应用数学工具的能力要优于把大把时间都用在做证明的人。

第 22 讲 圆盘法和壳层法求体积

Volumes by disks and shells

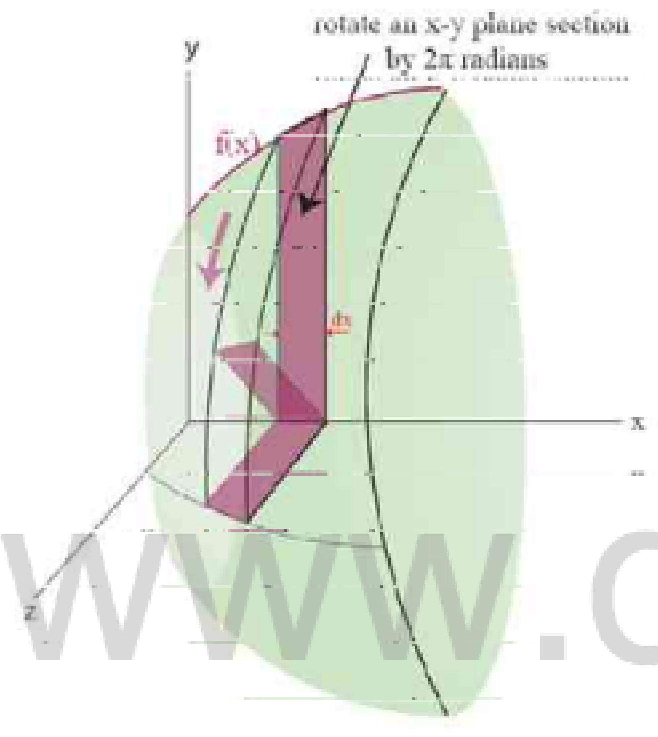
圆盘法

本讲继续讲如何建立和应用积分，首先是用切片求体积。



每个切片的体积等于表面积乘以厚度，为 $\Delta V = A\Delta x$，取极限为是 $dV = Adx$。因此，整个面包的体积就是 $V = \int A(x)dx \approx \sum A\Delta x$。

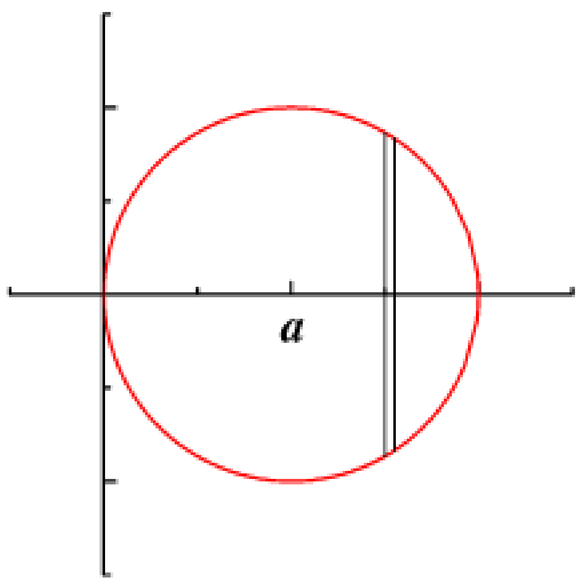
旋转体问题：



XY 平面上的一段曲线 $y=f(x)$ 沿着 X 轴旋转形成三维旋转体，求其体积。

取切片，切片为圆盘状，因此这种方法因此称为圆盘法，其厚度为 dx，表面积遵从圆面积公式，半径为 $y=f(x)$，体积为 $dV = (\pi y^2)dx$。

例：半径为 a 的球体体积。



切片体积为 $dV = (\pi y^2)dx$。

从圆的公式得到 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow y^2 = a^2 - (x-a)^2 = 2ax - x^2$。

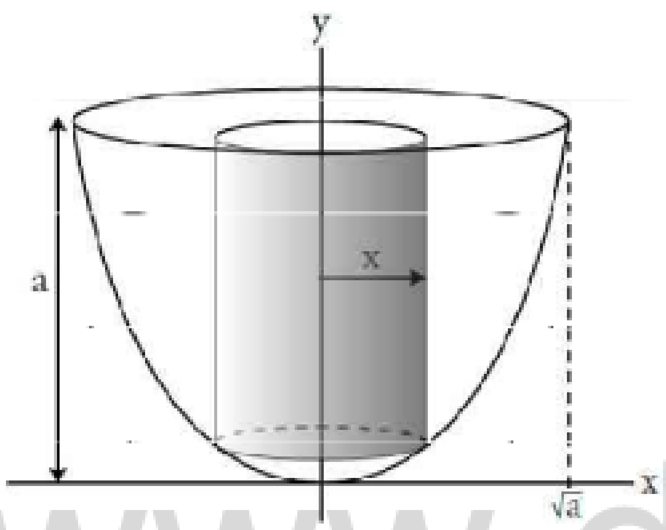
代入可得球体体积为$V=\int_0^{2a}\pi(2ax-x^2)dx=\pi(ax^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^{2a}=\frac{4}{3}\pi a^3$。需要注意积分的上下限。

注 1：推导过程不仅得到了球体积公式，同样得到球冠的体积$V=\pi(ax^2-\frac{x^3}{3})$。例如取 $x=a$ 则有半球体积为$V=\pi(ax^2-\frac{a^3}{3})=\pi\frac{2}{3}a^3$。

例：液体中包含大量的粒子，其中大粒子的半径为 $10^{-6}m$，而小粒子的半径为 $10^{-9}m$，大粒子非常容易发生团聚，其原因就是小粒子将它们推挤在一起，或者将大粒子推挤到粘附于容器壁上。定量分析这一现象中粒子更倾向于团聚还是粘附于容器壁，需要计算大粒子的实际占有体积，这就涉及到两个球体周围夹层的重叠问题。而这个夹层实际上可以视为两个球冠拼接而成，需要用到之前的公式来解决。

还是在强调应用，虽然完全就是叙述了另一个故事。

壳层法



曲线 $y=f(x)$沿着 X 轴旋转形成三维旋转体，求这个坩埚的体积。本例中 $y=x^2$。

此时"切片"的形状为壳层，因此称为壳层法。其厚度为 dx，高度为 $a-y=a-x^2$，上下沿的周长为 $2\pi x$，因此：

$$dV=2\pi x(a-y)dx=2\pi x(a-x^2)dx$$

$$V=\int_0^{\sqrt{a}}2\pi(ax-x^3)dx=2\pi(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^4}{4})\Big|_0^{\sqrt{a}}=\frac{\pi a^2}{2}$$

仍需要注意积分的上下限。

注：要注意实际应用中的单位问题。

前例中，若取$a=100cm$，则有$V=\frac{\pi}{2}(100)^2cm^3\approx16L$。

而如果取$a=1m$，则$V=\frac{\pi}{2}(100cm)^3\approx1600L$。

需要理解其中内涵的差别，两个解答都没有错误，但是两者不等价，因为对于 $y=x^2$ 的解读方式不同，所以计算的坩埚形状完全不同。高度为 $100cm$ 的坩埚，其半径是 $10cm$；而高度为 $1m$ 的坩埚，其半径是 $1m$。

重视应用中的问题。

下一讲将介绍煮沸上例中坩埚里的水，水温随着坩埚深度连续变化，底层 100 度，而顶层为 70 度。因此，T=100-30y......

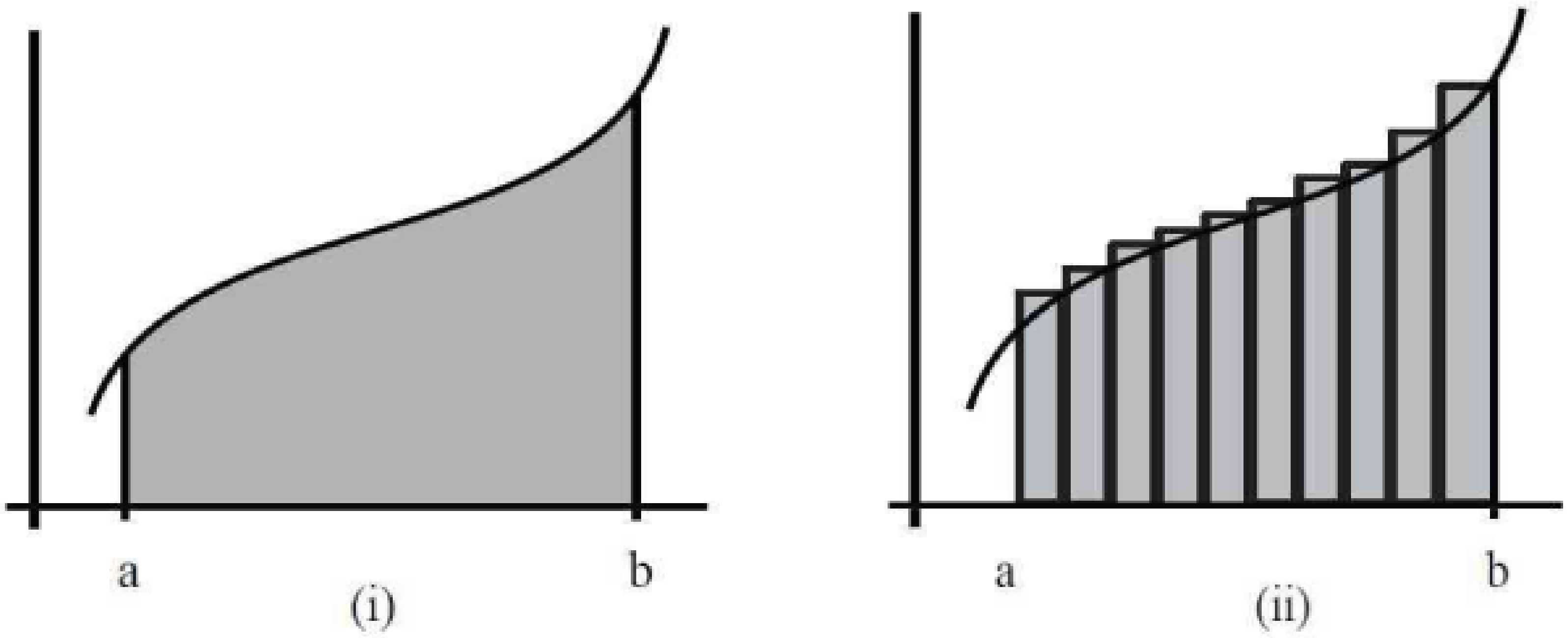
第 23 讲 功、平均值、概率

Work, average value, probability

平均值

取一串数字的平均，等价于黎曼和的形式。取极限则趋向于一个积分式，称之为连续平均：

$$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\to\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$；

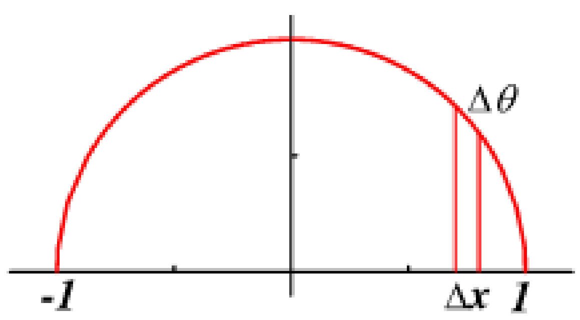
$y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)\cdots y_n=f(x_n)$；

计算面积取平均为 $\frac{(y_1+y_2+\cdots+y_n)\Delta x}{b-a}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，其中 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$，即 $\frac{\Delta x}{b-a}=\frac{1}{n}$，代换回去即可得到前面列出的连续平均公式。

例 1：$f(x)=C$

得到 $\frac{1}{b-a}\int_a^b Cdx=C$。

例 2：点在单位半圆上的平均高度？



$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 计算得到 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$。这里不用求得解析解再代入数值计算，因为积分求的是半圆的面积，因此代入面积公式即可。

例 3：点在单位半圆上，对弧度求平均高度？

求平均的区域是 $0 \le \theta \le \pi$ ，因此积分前的因子为 $\frac{1}{\pi}$ ，均值= $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{2}{\pi}$ 。

从概率角度来解释这两个例子的区别，例 2 就是如果在 X 轴上任意取点，取点概率为等可能时，则 x 所对应的 y 的均值为 $\pi/4$；而例 3 就是在圆弧上任意取点，取点概率为等可能，则对应的 y 的均值为 $2/\pi$。在接近于弧顶位置，即 Y 轴位置的时候，$d\theta$ 和 dx 差距不大；接近于 X 轴的位置，$d\theta$ 所占权重就变得比 dx 大，而这部分的 y 值较小，因此弧度对应的平均值要小于 x 所对应的平均值。

两者的差异在于权重的区别，在 X 轴上的等可能和在弧线上取等可能不是一回事。

加权平均值

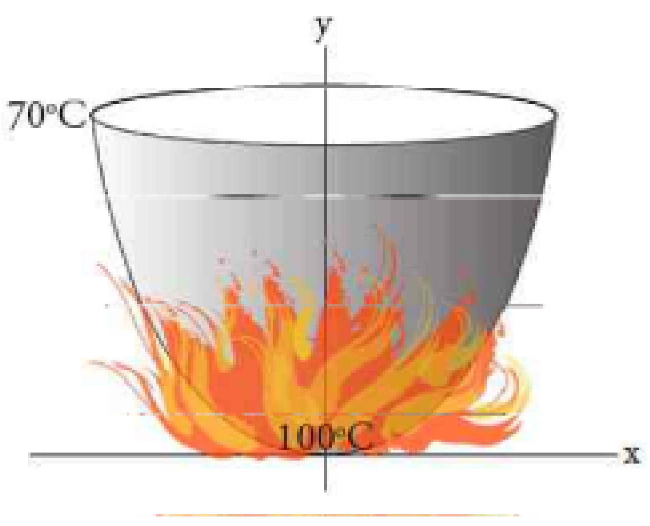
从上面两个例子中引出一个新的概念：加权平均值。

加权平均值= $\dfrac{\int_a^b f(x)w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}$ 。

例如常函数的加权平均值为，均值= $\dfrac{\int_a^b cw(x)dx}{\int_a^b w(x)dx} = \dfrac{c\int_a^b w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx} = c$ 。

离散情况的例子：先后以 10，20 和 30 的价格购买股票，则购买的均价应该为三个价格的加权平均 $\dfrac{10w_1 + 20w_2 + 30w_3}{w_1 + w_2 + w_3}$ 。而上文的公式就是连续条件下的公式。

例：煮沸上一讲例子中坩埚里的水，坩埚高度 1m，锅口的直径为 2m，锅截面轮廓线符合方程 $y=x^2$。水温随着坩埚深度连续变化，底层 100 度，而顶层为 70 度。求所需的加热能量。



温度沿着 Y 轴是连续分布的，而在各个水平面上温度都是常数。将每一层所需的能量相加就得到了所需的能量。温度为连续变化，因此有 T=100-30y。所以可得能量累积的公式为：

$$\int_0^1 T(\pi x^2)dy = \int_0^1 (100-30y)(\pi x^2)dy = \int_0^1 (100\pi y - 30y^2)dy = (50\pi y^2 - 10\pi y^3)\Big|_0^1 = 40\pi$$

注意单位是摄氏度乘以立方米，换算成能量单位还要乘以 $(\frac{1cal}{\deg \cdot cm^3})(\frac{100cm}{m})^3$ ，

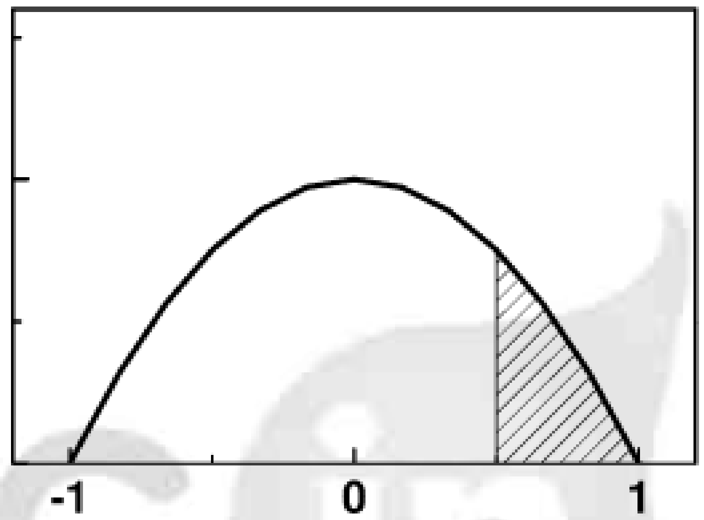
因此能量为 $40\pi\times10^3$kcal≈125×10^3kcal。

例：计算上例中的平均水温？

平均温度为$T=\dfrac{\int_0^1 T\pi y dy}{\int_0^1 \pi y dy}=\dfrac{40\pi}{\pi/2}=80^o C$。如果直接计算最高温度和最低温度的均值，则有$T=\dfrac{T_{\max}+T_{\min}}{2}=\dfrac{100+70}{2}=85^o C$，这是因为越靠近锅底部的高温部分，锅的横截面积越小，也就是高温部分的权重较小，因此实际平均值要小于 85°C。

概率

例：随机地在区域 $0<y<1-x^2$ 内选取一点，那么 $x>1/2$ 的概率是多少？



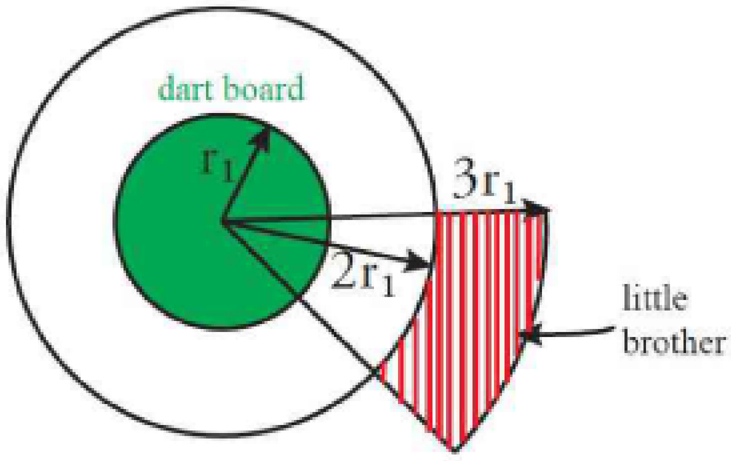
概率=$\dfrac{部分}{整体}=\dfrac{\int_{1/2}^1(1-x^2)dx}{\int_{-1}^1(1-x^2)dx}=\dfrac{5}{32}$。

求概率的通用公式是，概率=$\dfrac{\int_{x_1}^{x_2} w(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}$，其中$a\le x_1<x_2\le b$。

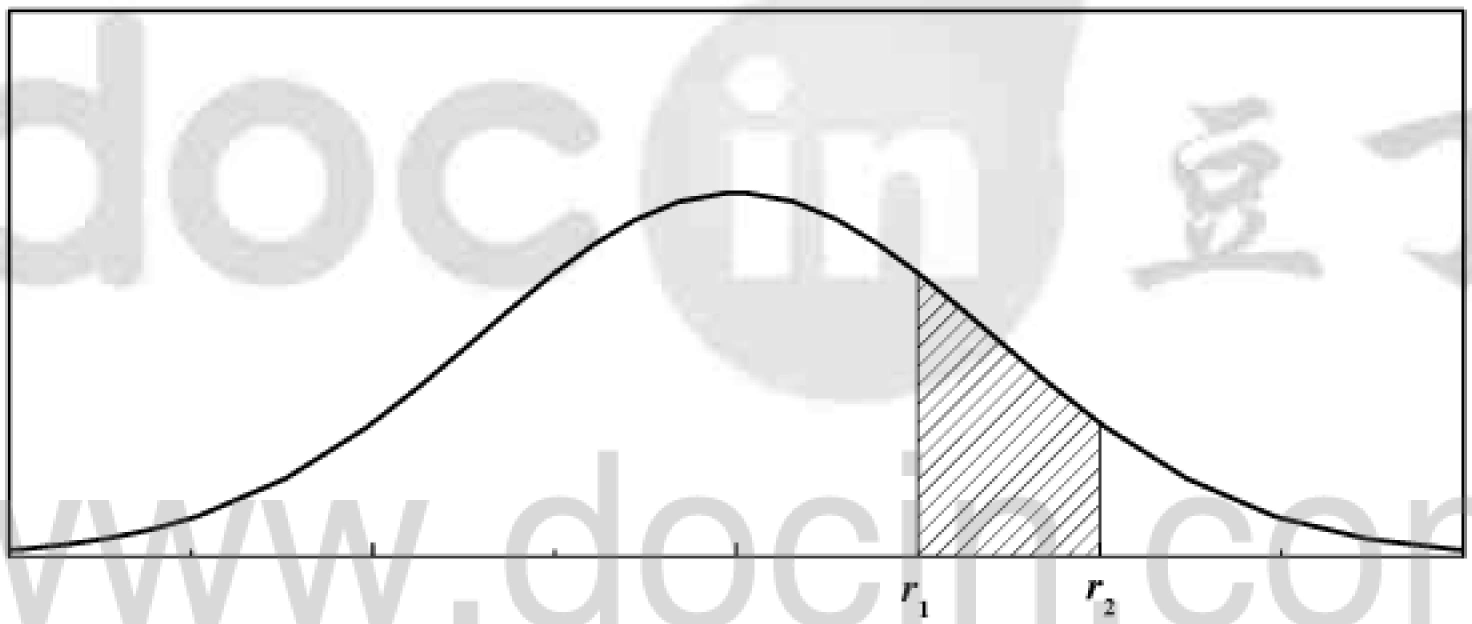
第 24 讲 数值积分

Numerical integration

例：打靶问题，在距离靶心为 r 的无穷小区域 ΔA 内被打击的次数等于 $ce^{-r^2}\Delta A$。靶子的旁边站着一个小孩，求小孩被误伤的概率。



首先来研究一下函数 e^{-r^2}。



横坐标为距离原点的半径，高度即为单位面积内被打中的次数，则明显在中心区域被击中的概率大，越远离中心则几率越小。

如果我们计算在半径从 r_1 至 r_2 的圆环内被击中的概率，实际上就是计算在圆环内被击中的次数占在整个平面上被击中次数的比例。而该比例就是函数 e^{-r^2} 绕 Y 轴旋转时所形成的旋转体中，阴影部分形成的旋转体与整个旋转体体积的比例。

计算采用壳层法，则积分上下限分别为 $r_1<r=x<r_2$，而其中 r 所在位置的圆周长就是 $2\pi r$。，厚度为 dr，而高度为 e^{-r^2}，因此被积函数为 $2\pi re^{-r^2}dr$。

则积分结果为为：$\int_{r_1}^{r_2}(2\pi r)e^{-r^2}dr=-\pi e^{-r^2}\Big|_{r_1}^{r_2}=\pi(e^{-r_1^2}-e^{-r_2^2})$。

代入参数 C 计算，则在圆环区域中被击中次数为 $C\pi(e^{-r_1^2}-e^{-r_2^2})$。

而在整个区域中被击中次数，则要在 $0\le r<\infty$ 的整个区域内进行计算，则击中数为 $C\pi(e^{-0^2}-e^{-\infty^2})=C\pi(1-0)=C\pi$。

被击中的概率为：$P(r_1<r<r_2)=\frac{\text{部分}}{\text{整体}}=\frac{C\pi(e^{-r_1^2}-e^{-r_2^2})}{C\pi(e^0-0)}=e^{-r_1^2}-e^{-r_2^2}$。

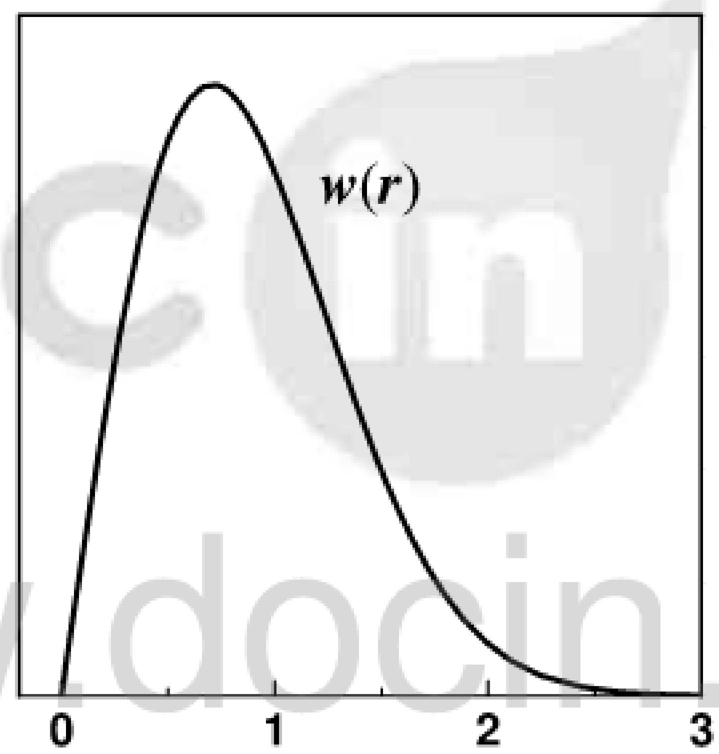
而$P(0<r<\infty)=1$。

如果已知一个 7 岁孩子击中靶子的概率为$P(0\le r<a)=\frac{1}{2}$。因此可以求出靶子的半径满足$e^{-0^2}-e^{-a^2}=\frac{1}{2}$。

如果一个小孩站在 3 点钟方向到 5 点钟方向，距离靶心 $2a$ 到 $3a$ 的距离上，则小孩被击中的概率为$(\frac{5-3}{12})P(2a\le r<3a)=\frac{1}{6}(e^{-(2a)^2}-e^{-(3a)^2})\approx\frac{1}{6}\times\frac{1}{16}\approx 1\%$。

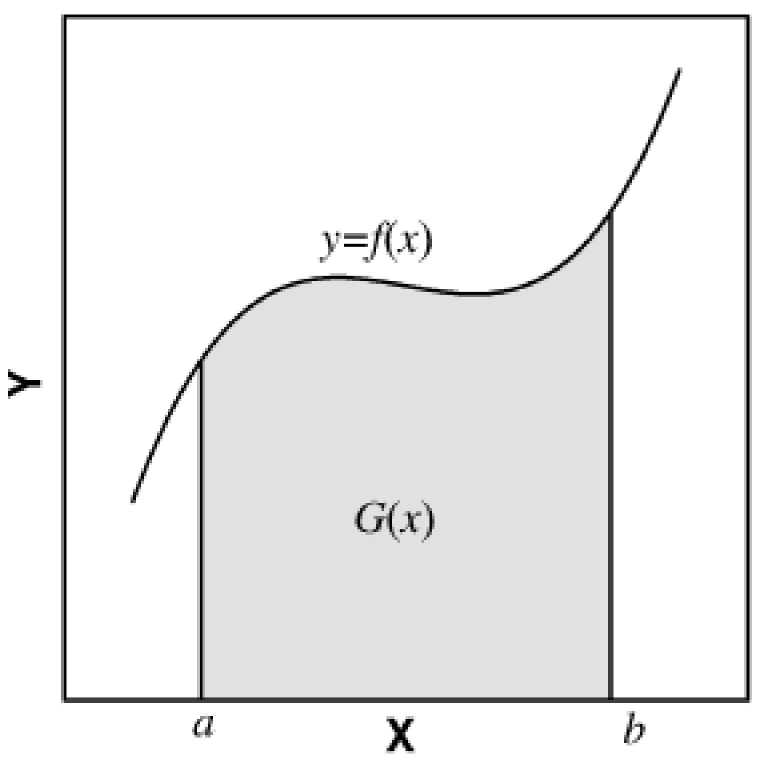
这个例子中的权重因子为$w(r)=2\pi cre^{-r^2}$。

当给出e^{-r^2}的曲线时，有一种反直觉的感受，就是在靶心处的击中可能性最高，但实际上靶心是很难击中的。权重计算给出了这个问题的解答，权重公式计算所得才是概率的分布图。



数值积分

很多积分没有解析解，因此要用数值解法求积分的值。



已知$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

$\Delta x=x_i-x_{i-1}$

$y_0=f(x_0), y_1=f(x_1),\cdots y_n=f(x_n)$

目标：求函数的均值或者和，来计算得到$\int_a^b f(x)dx$的近似值。

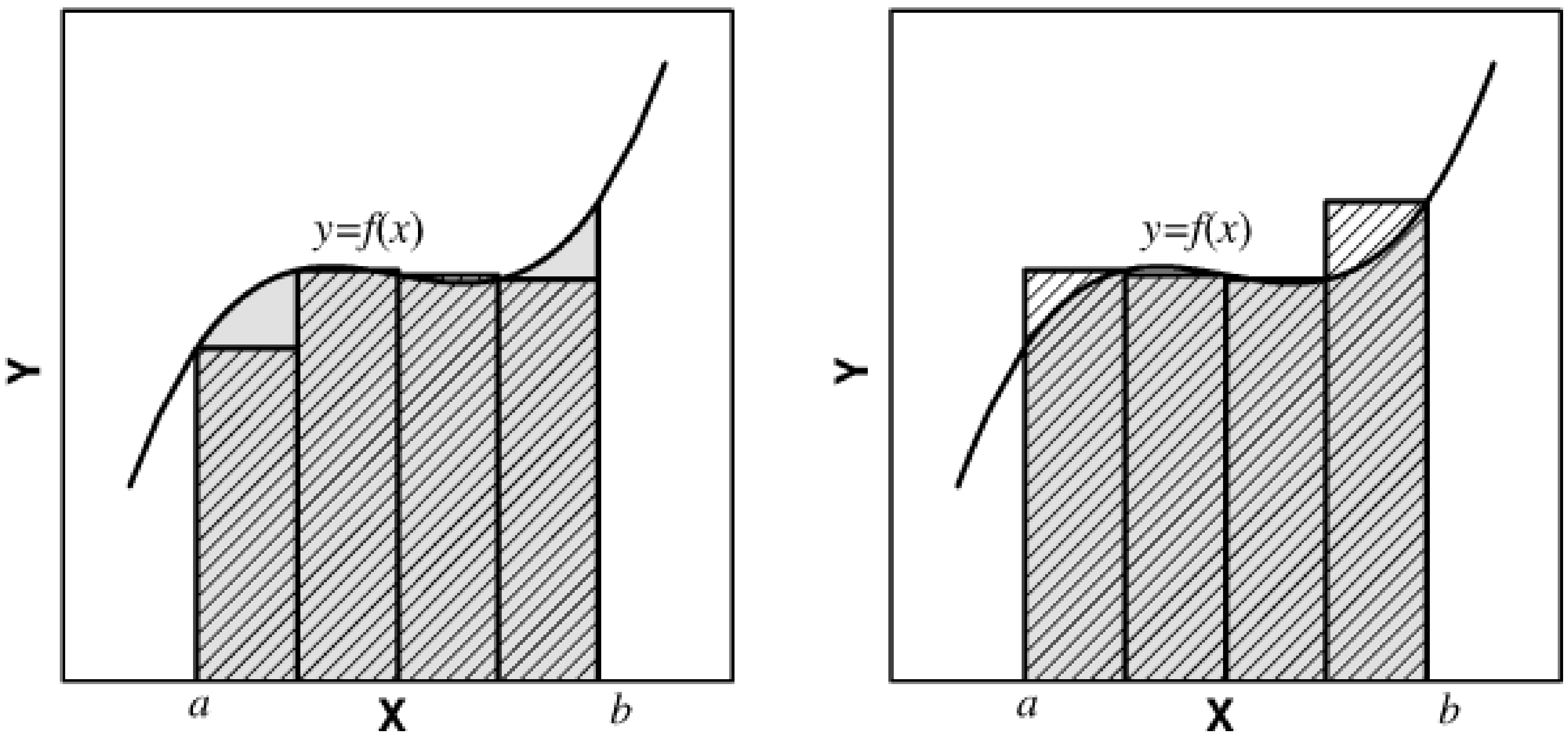
数值积分的三种方法：

1.黎曼和

2.梯形法

3.辛普森法

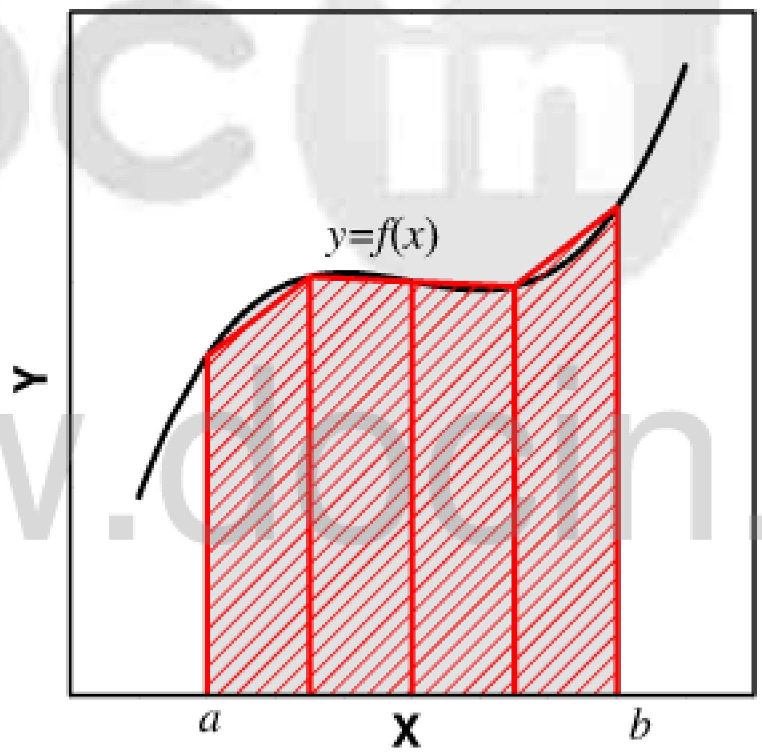
方法一：黎曼和



左和：$(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})\Delta x$。

右和：$(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\Delta x$。

方法二：梯形法



将所有间断点上的函数值连接，则每个区间上就不再是黎曼和中的矩形，而是梯形，求所有梯形面积有 $(\frac{y_0 - y_1}{2} + \cdots + \frac{y_n - y_{n-1}}{2})\Delta x = (\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2})\Delta x$。

可以看到梯形法计算结果等于“左黎曼和”和“右黎曼和”的均值。

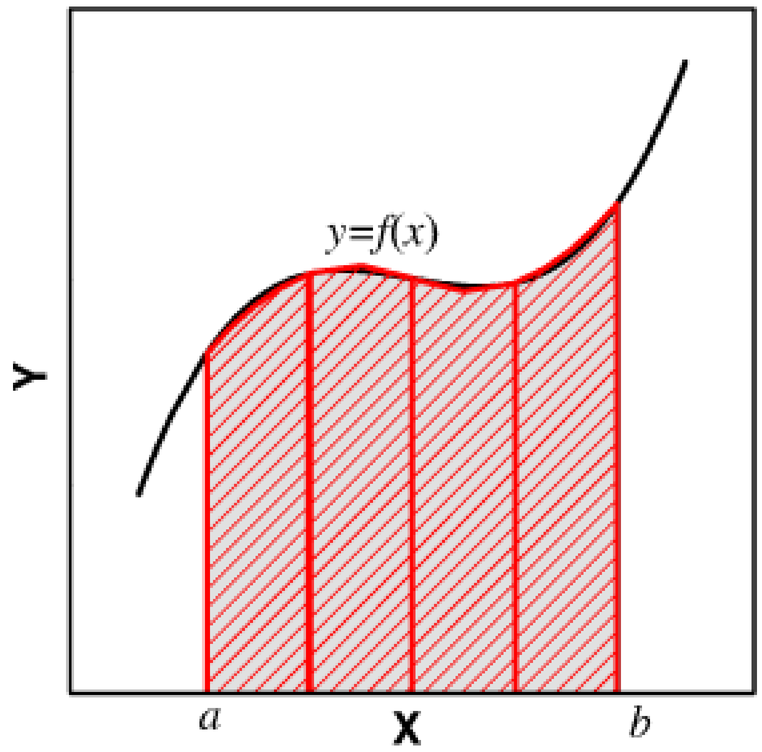
方法三：辛普森法（Simpson's Rule）

辛普森法每个单元要处理一对小分割区域，因此要求 n 为偶数。

在分割区域上用二次函数抛物线来近似函数曲线。抛物线下的面积等于底乘以平均高度，为 $2\Delta x(\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6})$。

将区域相加求和为 $\frac{2\Delta x}{6}\left[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\right]$。

则辛普森公式为 $\frac{\Delta x}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n]$。



辛普森公式：

在 x_0，x_1 和 x_2 的小区域上用二次多项式 $P(x)$来差值导函数 $y=f(x)$，使得 $P(x)$满足 $P(x_0)=y_0$，$P(x_1)=y_1$，$P(x_2)=y_2$。之后计算二次多项式函数曲线下的面积来逼近积分值。

则二次多项式的表达式为 $P(x)=a+b(x-x_1)+c(x-x_1)^2$。满足：

$$x=\begin{cases} x_0, a+b(x_0-x_1)+c(x_0-x_1)^2=y_0 \\ x_1, a=y_1 \\ x_2, a+b(x_2-x_1)+c(x_2-x_1)^2=y_2 \end{cases}$$

用 1 式和 3 式减去 2 式得到 $\begin{cases} -b\Delta x+c\Delta x^2=y_0-y_1 \\ +b\Delta x+c\Delta x^2=y_2-y_1 \end{cases}$

得到 $c=\frac{y_0-2y_1+y_2}{2\Delta x^2}$，$b=\frac{y_2-y_0}{2\Delta x}$，$a=y_1$。

用 $P(x)$替代导函数 $f(x)$进行积分计算：

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) &= \int_{x_0}^{x_2}[a+b(x-x_1)+c(x-x_1)^2]dx \\ &= [ax+\frac{1}{2}b(x-x_1)^2+\frac{1}{3}c(x-x_1)^3]\Big|_{x_0}^{x_2} \\ &= 2a\Delta x+\frac{2}{3}c\Delta x^3 \end{aligned}$$

代入 c 和 a 的值，有 $\int_{x_0}^{x_2} f(x)=\frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)\Delta x$。这就是辛普森公式中参数的由来。

第 25 讲 复习三

Exam 3 review

数值方法

例 1：计算$\int_1^2 \frac{dx}{x}$。

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0.693147$$

用数值方法进行计算，只取两个间断，则三个点为 $x_0=1$，$x_1=3/2$，$x_2=2$。对应的函数值为 $y_0=1$，$y_1=2/3$，$y_2=1/2$。

梯形公式：$\Delta x(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \frac{1}{2}y_2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}) \approx 0.708$。

辛普森公式：$\frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{1}{6}(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}) \approx 0.69444$。

辛普森公式和真实值之间的误差为$|\text{Simpson's-Exactans.}| \approx (\Delta x)^4$。因此辛普森公式的精确度非常高。并且辛普森公式对于低于三次的函数给出的是精确解。

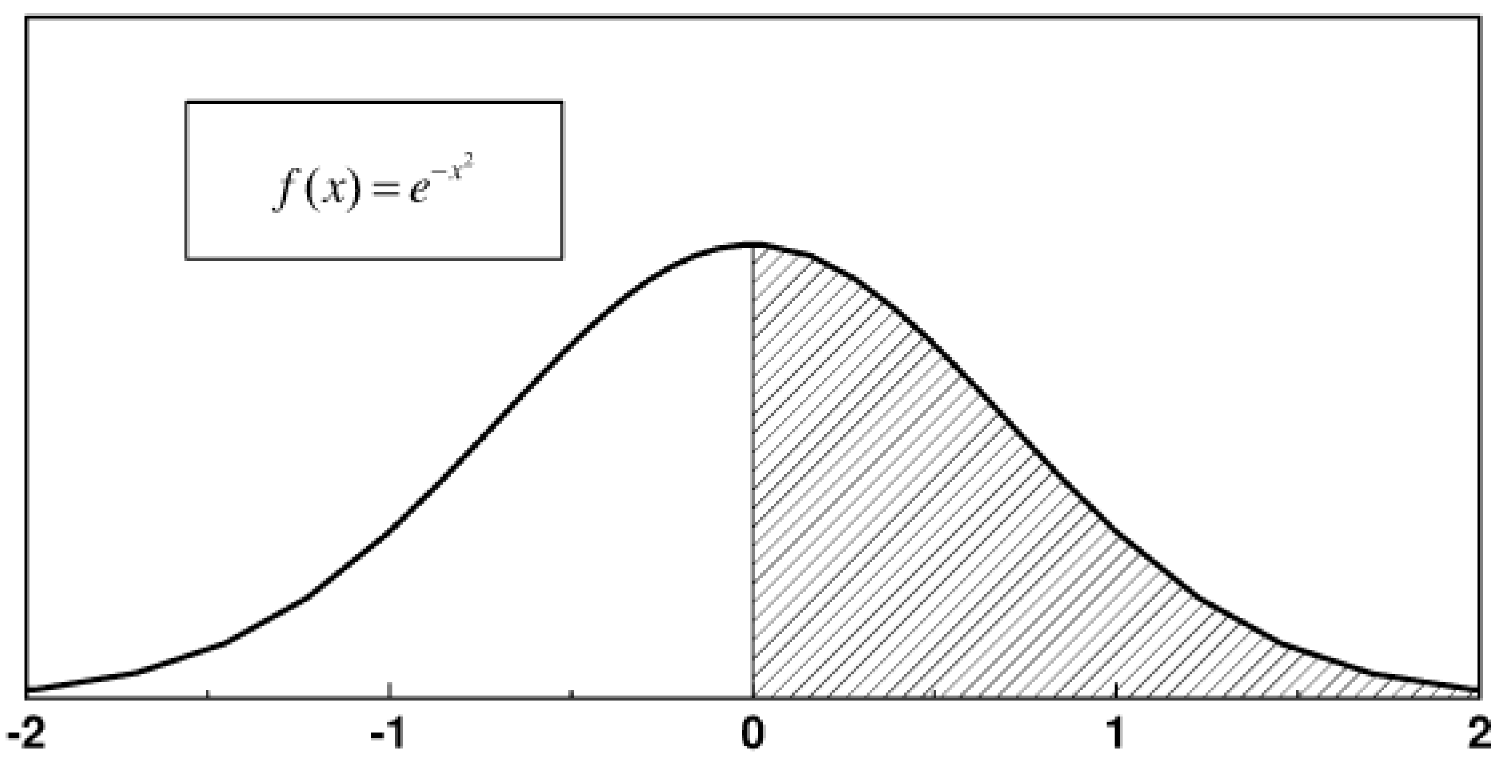
辛普森公式给出三次函数积分的精确解并不是一个特别显而易见的事实。相关内容需要对插值函数的误差进行讨论，感兴趣的朋友可以阅读 Timothy Sauer 的《数值分析》。

注：计算不能包含奇点，如上例中的 0 点。

注 2：记忆不同公式的参数：可以对于函数 $f(x)=1$ 做数值计算，验算参数是否正确。梯形公式：

$$\Delta x(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n) = \Delta x(\frac{1}{2} + n - 1 + \frac{1}{2}) = (\Delta x)n = b - a$$，其中$\Delta x = \frac{b-a}{n}$。

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ 的积分值



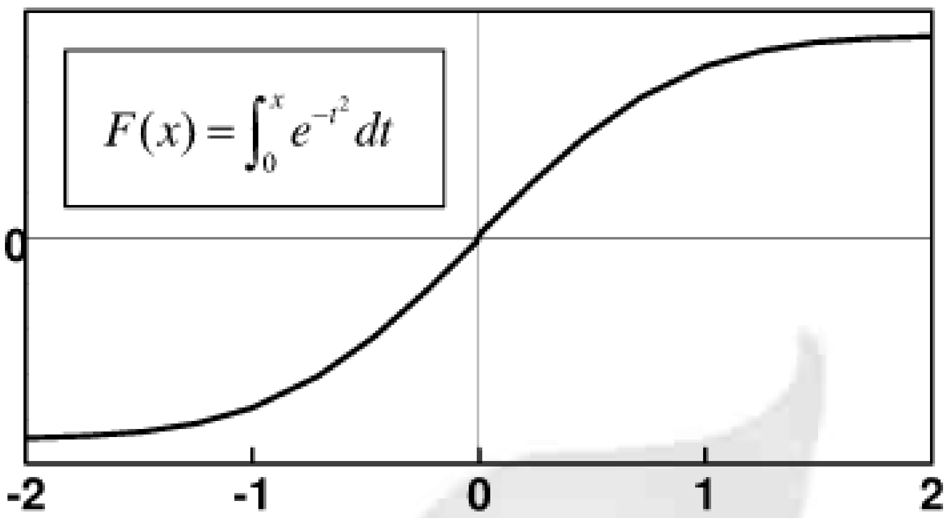
将函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 沿着 Y 轴旋转得到旋转体。则旋转体的体积为：

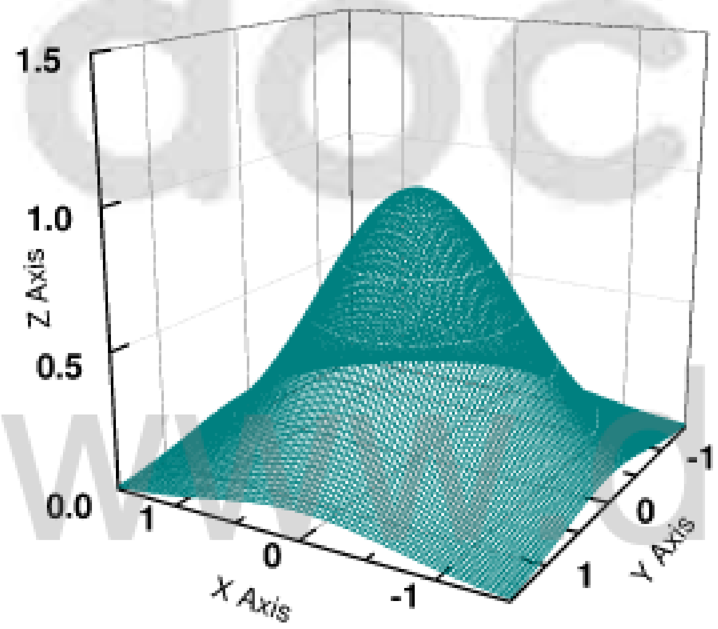
$$V=\int_0^{\infty}2\pi re^{-r^2}dr=-\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}=\pi$$

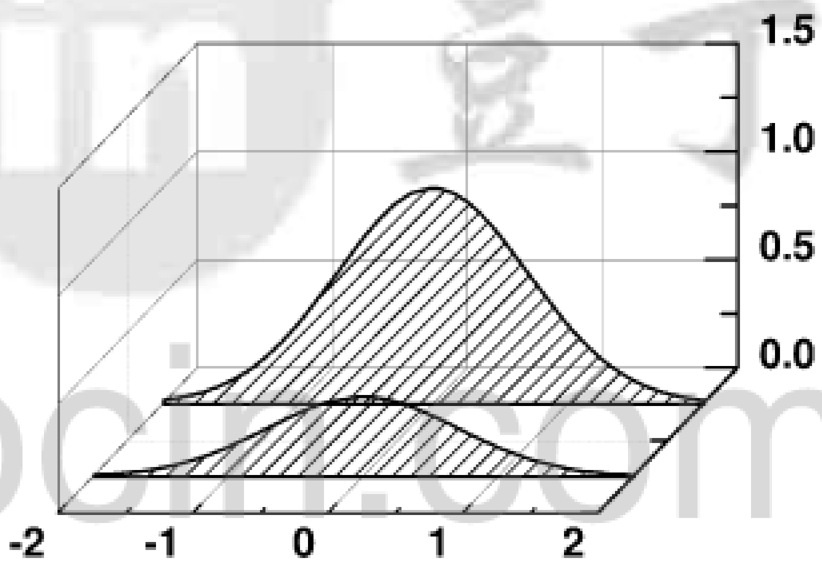
但希望求得的是函数曲线下的面积 $Q=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt$ 。

通过切割的方法再次求解旋转体的体积，在推导过程中会发现 $V=Q^2$。最终可得 $Q=\sqrt{\pi}$ 。

函数 $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ ，其在无穷大时的函数值 $F(\infty)=\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt$ 为原函数曲线 $f(x)=e^{-x^2}$ 之下面积的一半，即 $Q=F(\infty)-F(-\infty)$ ，$F(\infty)=\sqrt{\pi}/2$ 。







旋转体形状类似一个小山丘，之前我们用壳层法求得了它的体积，现在用平面分割来进行计算，则体积公式为 $V=\int_{-\infty}^{\infty}A(y)dy$ ，其中 $A(y)$为截面积，dy 为厚度，例如在 $y=b$ 的截面上面积 $A(b)$。

在 $y=b$ 的截面上，函数值满足 $e^{-r^2}=e^{-(b^2+x^2)}=e^{-b^2}e^{-x^2}$ 。则截面积为：

$$A(b)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b^2}e^{-x^2}dx=e^{-b^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=e^{-b^2}Q$$

用截面积计算体积得到 $V=\int_{-\infty}^{\infty}A(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}Qdy=Q\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy}_{Q}=Q^2$ 。

最终可得 $Q=\sqrt{\pi}$ 。

第三单元重点

1.积分计算

2.数值计算（黎曼和、梯形、辛普森）

3.面积/体积

4.平均，概率，功

5.画图 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

回答提问：黎曼和中的上和、下和、左和与右和的区别？

下和就是在就算黎曼和的时候，小分割区间内的最小函数值带入计算，上和与之相反。因此在递减函数中，下和就是右和，而上和就是左和。递增函数正好相反。