18.01 **一元微积分** Single Variable Calculus

第二单元 微分的应用

Unit 2 Applications of Differentiation

douTintin14

第 09 讲 线性和二阶近似

Linear and Quadratic Approximations

线性近似

线性近似可以用一个公式概括：

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

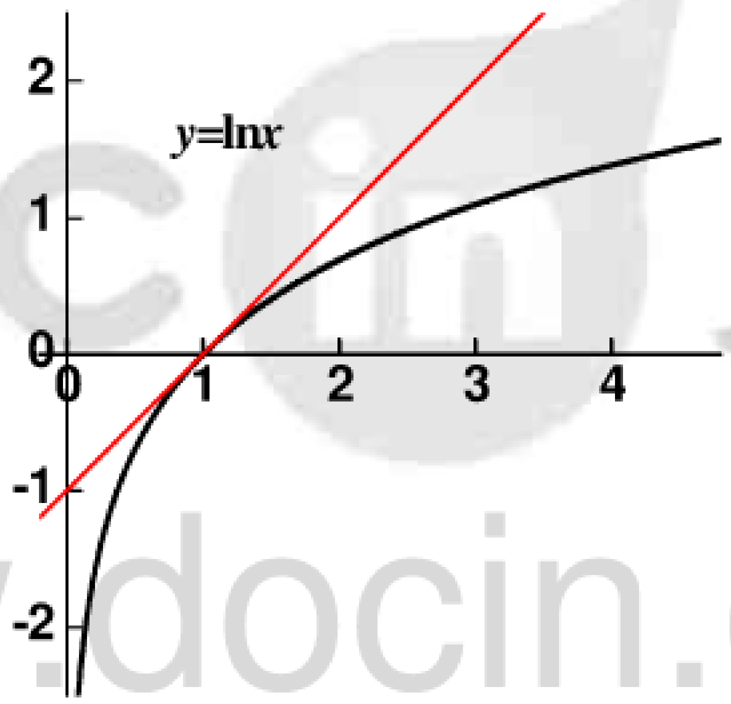
假设存在一条曲线 $y=f(x)$，那么在曲线的切点上该曲线近似于其切线。公式右侧就是切线的表达式。

例 1：$f(x)=\ln x$，导数公式为 $f'(x)=1/x$.

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(1) = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = 1$$

$$\ln x \approx f(1) + f'(x_0)(x-1) = 0 + 1\cdot(x-1) = x - 1$$



因此近似公式为 $\ln x \approx x-1$。注意仅在切点即 $x=1$ 点附近，曲线近似于该切线。

导数的定义是：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

逆向看待这个公式就是 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$

因此在切点附近有 $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$。这和线性近似的公式等价。等式左侧是平均变化率，右侧是无穷小时间的变化率，两者在切点附近基本相等。

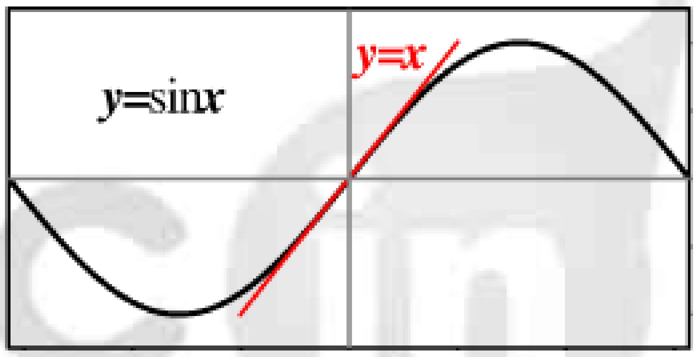
> 证明 $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$ 与线性近似公式的等价性。
>
> $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$
>
> $\Leftrightarrow \Delta f(x) \approx f'(x_0)\Delta x$，其中 $\Delta x = x - x_0$。

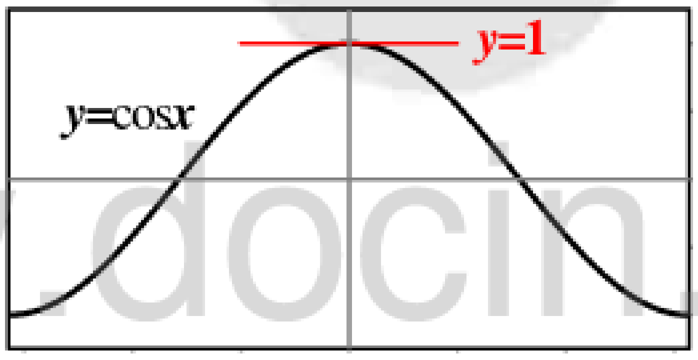
$$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

若近似公式以 $x_0=0$ 作为基点，则公式变得更为简单 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$。注意不同公式对应的基点（切点）不同，近似只在该点附近成立。

对函数 $\sin x$，$\cos x$，e^x，$\ln(1+x)$，$(1+x)^r$ 在 $x=0$ 点进行线性近似。

	f'	$f(0)$	$f'(0)$
$\sin x\approx x$	$\cos x$	0	1
$\cos x\approx 1$	$-\sin x$	1	0
$e^x\approx 1+x$	e^x	1	1
$\ln(1+x)\approx x$	$1/(1+x)$	0	1
$(1+x)^r\approx 1+rx$	$r(1+x)^{r-1}$	1	r





此处讨论的自然对数的线性近似 $\ln(1+x)\approx x$ 与例 1 是等价的，但是我们希望以 $x=0$ 为基点，而 0 点处导函数为无穷大无法直接做线性近似，因此将 x 移动到 $1+x$。通过代换 $u=x+1$ 可以验证两者相同。

线性近似的应用：

例 2：$\ln(1.1)=?$

应用公式 $\ln(1+x)\approx x$，得到 $\ln(1.1)\approx 0.1$。线性近似的主要作用就是简化函数，给出近似结果，一个合理的近似常常可以帮助解决问题。

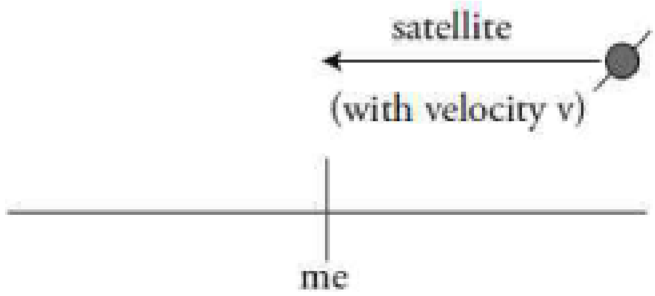
例 3：求函数 $\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}}$ 在 0 点的线性近似公式。

$$\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}}=e^{-3x}(1+x)^{-1/2}\approx(1-3x)(1-\frac{1}{2}x)=1-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}x^2\approx 1-\frac{7}{2}x$$

最后只要剩下线性部分，高次项再次丢弃。

需要注意的是：1）对表达式直接求导，再列成线性近似的表达式，与分别列成线性近似表达式相乘所得结果完全相同。2）就算括号中分别求到二次项，最后非线性部分也依然会被完全舍弃掉，最后得到的线性近似公式也和现在求得的表达式相同。这都是因为高阶项不会影响线性部分，或者可以认为过函数曲线上的某点，仅有一条切线。

例 4：



卫星上的时间 T 和地面时间 T' 之间的关系符合狭义相对论，称为时间膨胀：

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

用 u 替换 v^2/c^2，则有 $(1-u)^{-1/2} \approx 1+u/2$，因此有 $T' \approx T(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})$。

二阶近似

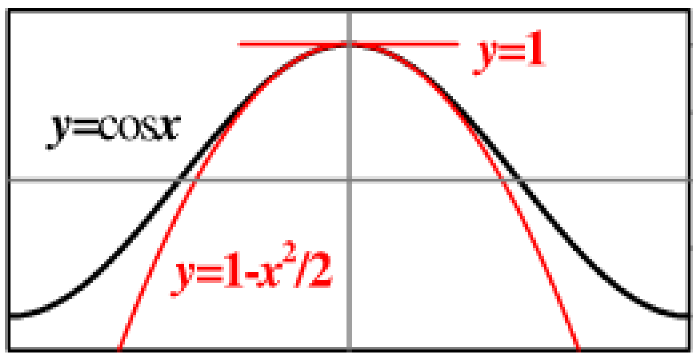
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$，用二阶近似公式计算得到 $\ln(1.1) \approx 0.095$。

$\sin x \approx x$

$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$



各个网站挂出来的公开课的课号有差异，原因是每一单元过后 MIT 进行随堂测试会占去一节课，比如上一单元最后一节课是第 7 讲，但是本单元第一节课是第 9 讲。有的网站没有调整课号，顺着排列下来，因此会造成差异。因为老师后来在课上提过具体课时，因此笔记中按照现在的序列来记录。

第 10 讲 曲线构图

Curve Sketching

继续讨论近似的问题。回顾上一讲的一个例子：

$$T' = T(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \approx T(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})$$

因此有 $\frac{\Delta T}{T} = \frac{T'-T}{T} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$

因此误差比率与 v^2/c^2 成正比，并且系数为 1/2。

线性近似在工程中应用广泛，人们关心“输入改变量”和“输出改变量”之间的线性关系。用线性近似去替代复杂的方程非常必要，比如此问题中实际上还要考虑卫星的速度变化、观察视角、加速度、卫星重力与地表的差异、广义相对论效应等等，叠加形成的公式要复杂得多，但取线性近似公式就相对简单。

二阶近似

在线性近似精度不够的时候才会使用二阶近似。

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2}$$

基点为 0，在 0 附近符合该二阶近似。

二次函数的二阶近似就是其本身：

$$\begin{aligned} f(x) &= a + bx + cx^2 & f(0) &= a \\ f'(x) &= b + 2cx & f'(0) &= b \\ f''(x) &= 2c & f''(0) &= 2c \end{aligned}$$

由此可以看出二阶近似公式中的二次项系数中为什么会有 1/2。

几个函数的二阶近似公式：

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin x \approx x \\ &\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \\ &e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\ &\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 \\ &(1+x)^r \approx 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 \end{aligned}}$$

之前我们讨论自然对数时引入了数列 $a_k = (1+\frac{1}{k})^k \to e(k \to \infty)$，如果用线性近

似的公式讨论，则异常简单，$\ln a_k = k\ln(1+\frac{1}{k}) \approx k(\frac{1}{k}) = 1$。因为线性近似仅在基点附近吻合，因此当 k 趋近于无穷大时，a_k 的自然对数趋近于 1。

若求收敛的速度，则要取差 $\ln a_k - 1$，观察其趋近于 0 的速度。这时候需要用到二阶近似公式 $\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$。

例：在 x=0 点附近求函数 $e^{-3x}/\sqrt{1+x}$ 的二阶近似公式。

$$e^{-3x}(1+x)^{-1/2} \approx \left[1-3x+\frac{1}{2}(-3x)^2\right]\left[1+(-\frac{1}{2})x+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^2\right]$$

$$\Rightarrow e^{-3x}(1+x)^{-1/2} \approx 1-3x-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{8}x^2 = 1-\frac{7}{2}x+\frac{51}{8}x^2$$

此处可以弃去高次项（x^3，x^4），因为所求只是二阶近似。

对于 $f(x) = \ln(1+x)$ 有：

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

因此有 $\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$。

对于 $f(x) = (1+x)^r$ 有：

$$f(x) = (1+x)^r \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = r(1+x)^{r-1} \qquad f'(0) = r$$

$$f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2} \qquad f''(0) = r(r-1)$$

因此有 $(1+x)^r \approx 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2$。

曲线构图

目标：通用过应用一阶导数和二阶导数的正负性，得到函数 f 的图像。

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 递增。

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 递减。

$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ 递增$\Rightarrow f(x)$ 为凸函数。

$f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ 递减$\Rightarrow f(x)$ 为凹函数。

注意：中国大陆数学界某些机构关于函数凹凸性定义和国外的定义是相反的。Convex Function 在国内的数学书中指凹函数，Concave Function 指凸函数。感觉好奇怪，比较反直观，但是据说经济学方面的书定义又是反过来的。

二阶导数的几何定义是函数曲线的弯曲状态，二阶导数大的地方，曲线的峰陡峭尖锐，二阶导数导数小的地方，曲线变化平缓。

例： $f(x)=3x-x^3$

可求得 $f'(x)=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$ 。

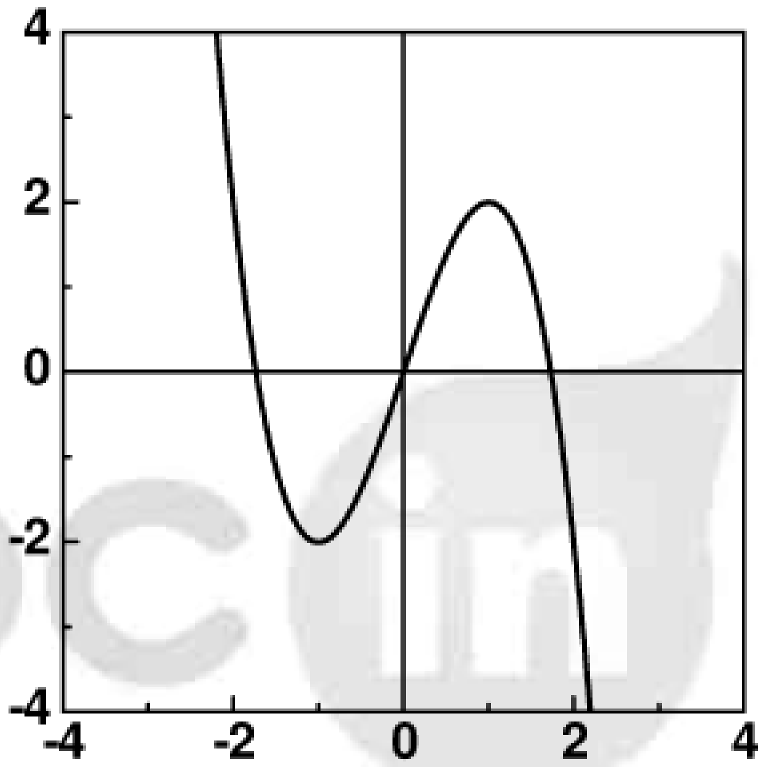
由此可知，$-1<x<1$时，$f'(x)>0$则 $f(x)$ 递增。而 $x>1$ 或 $x<-1$时，$f'(x)<0$ 则 $f(x)$ 递减。

定义：如果 $f'(x_0)=0$ ，则称点 x_0 为函数 $f(x)$的驻点。为 $y_0=f(x_0)$ 函数的驻点值。

本例中，函数的驻点为 1，-1。驻点值分别为 $f(1)=2$，$f(-1)=-2$。

函数满足 $f(0)=0$，因此函数图像经过原点。

函数为奇函数，因此关于原点对称。

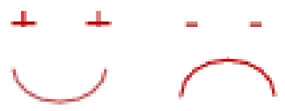


还要注意的就是函数在边界的表现，即通常情况下 $x\to\pm\infty$时函数值的大小。本例中，x 趋向于正无穷时，函数值趋向于负无穷，而 x 趋向于负无穷时，函数值趋向于正无穷。

$f''(x)=-6x$ ，因此有 $x>0$ 时，$f''(x)<0$ ，函数为凹函数；$x<0$，$f''(x)>0$ ，函数为凸函数。原点处 $f''(x)=0$ ，称为函数的拐点。

课程进度慢了，后面连续数节课亦是如此，因此课程内容和课程名字不是特别相符。

关于二阶导数，我不记得在哪里看到过这么一幅表情图了，可以帮助记忆二阶导数正负性和函数曲线凸凹性的关系。



第 11 讲 极值问题

Max/Min Problems

首先继续讲构图，双曲线。

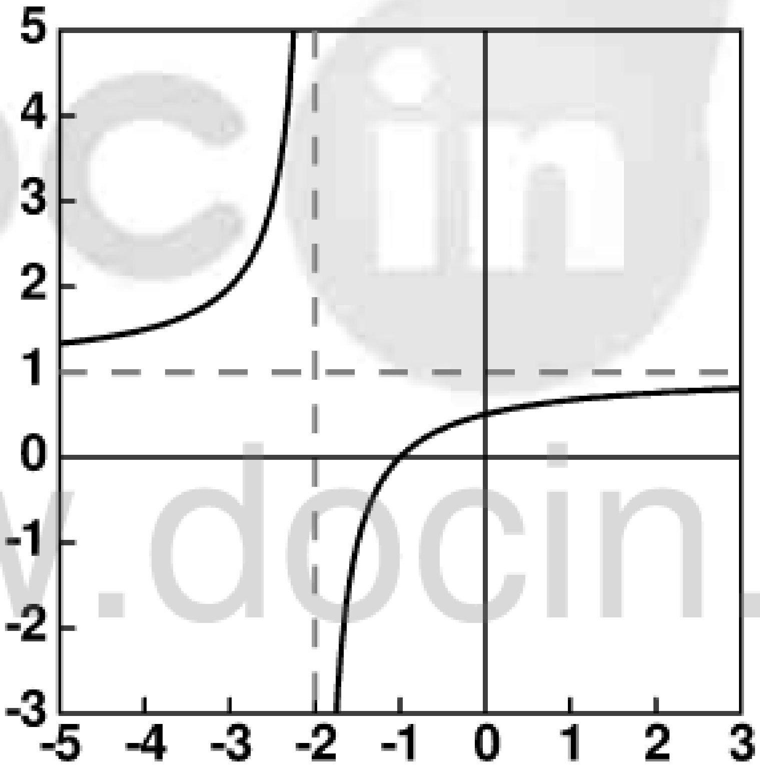
例：$f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ ，$f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}\neq 0$ 因此该函数曲线没有驻点。用初等数学中的描点法来打破僵局，其中最重要的点是函数的不连续点，此例中为 x=-2。

1）求取在 x=-2 函数的左右极限，$f((-2)^+)=\dfrac{-2+1}{(-2)^+ +2}=-\dfrac{1}{0^+}=-\infty$ ，计算另一侧极限可得 $f((-2)^-)=\dfrac{-2+1}{(-2)^- +2}=-\dfrac{1}{0^-}=+\infty$ 。

2）讨论两侧边界的状态：$x\to\pm\infty$。

$f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{1+1/x}{1+2/x}\to 1$

3）因为一阶导数恒不为 0，因此曲线中没有驻点，即没有上升下降的折返。



用导数的正负性进行检查：

一阶导数恒大于零 $f'(x)>0$ ，在两个区域 $-\infty<x<-2$ ，$-2<x<+\infty$ 都是单调递增。二阶导数 $f''(x)=-\dfrac{2}{(x+2)^3}$ ，在 $-2<x<+\infty$ 有 $f'(x)<0$ ，函数为凸函数；在 $-\infty<x<-2$ 有 $f'(x)>0$ ，函数为凹函数。二阶导数同样也告诉我们曲线不可能为波浪状。

作图步骤：

第一步：描点。a）标记函数的不连续点，特别是函数值趋向于无穷的点；b）边界点，例如无穷远处；c）容易求取的函数点。

第二步：a）求出一阶导数为零的点 $f'(x)=0$ ；b）求出驻点和其函数值。

第三步：判断一阶导数在每个驻点或者不连续点为端点的区间内的正负性。

第四步：判断二阶导数的正负性，判断函数的凹凸性，求出 $f''(x)=0$ 点为拐点。

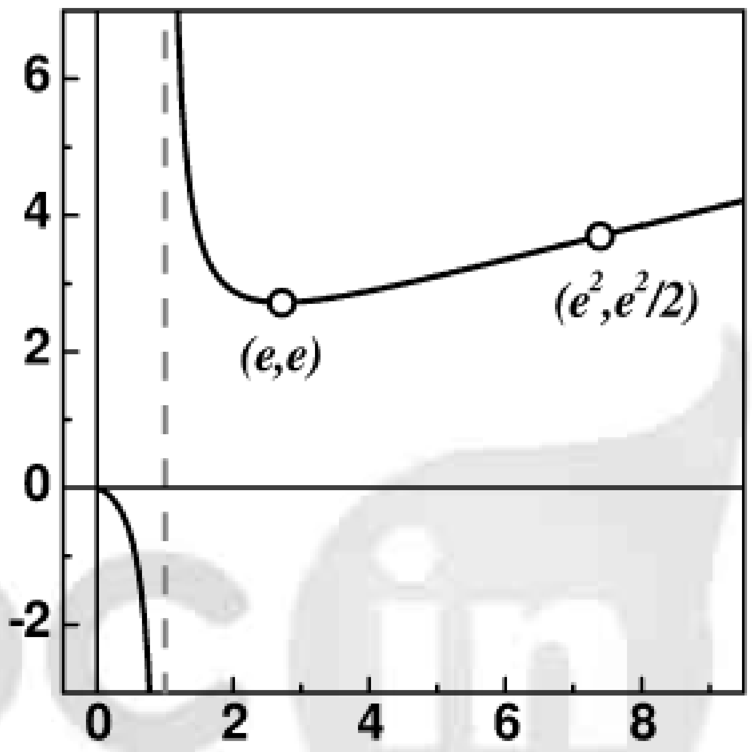
第五步：将以上信息组合。

例： $f(x)=x/\ln x, x>0$ 按照前述步骤作图。

1a）$f(1^+)=\dfrac{1}{\ln 1^+}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$，$f(1^-)=-\infty$。

1b）$f(0^+)=\dfrac{0^+}{\ln 0^+}=\dfrac{0^+}{-\infty}=0$，$f(10^{10})=\dfrac{10^{10}}{\ln 10^{10}}=\dfrac{10^{10}}{10\ln 10}\gg 1\to\infty$。

2）$f'(x)=\dfrac{\ln x - x(1/x)}{(\ln x)^2}=\dfrac{(\ln x)-1}{(\ln x)^2}$，找到 $f'(x)=0$ 的驻点为 $x=e$，$f(e)=e$。



3）$f'(x)=\dfrac{(\ln x)-1}{(\ln x)^2}$

$\frac{-}{+}<0$	$0<x<1$	衰减
$\frac{-}{+}<0$	$1<x<e$	衰减
$\frac{+}{+}>0$	$e<x$	递增

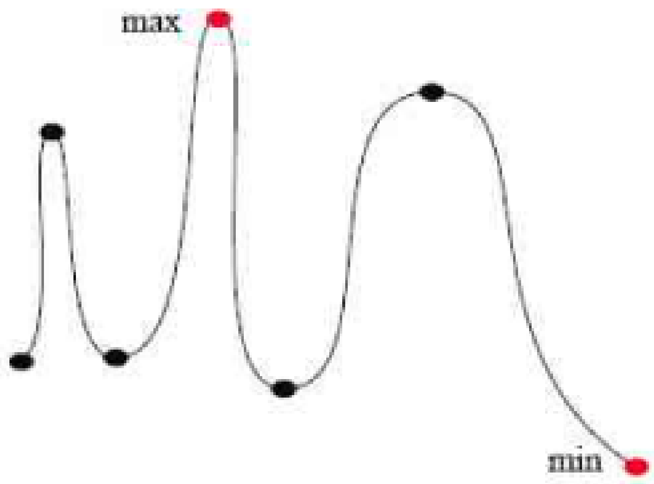
在 x=0 点，其右导数 $f'(0^+)=0$，因此 0 点处是从水平状态出发的。

4）$f''(x)=-(\ln x)^{-2}\dfrac{1}{x}+2(\ln x)^{-3}\dfrac{1}{x}=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$

$\frac{+}{-}<0$	$0<x<1$	凹
$\frac{+}{+}>0$	$1<x<e^2$	凸
$\frac{-}{+}<0$	$e^2<x$	凹

随 x 变大后，二阶导数一直较小，因此曲线非常变化平缓，不像老师课上画的曲线那么夸张。

极值问题



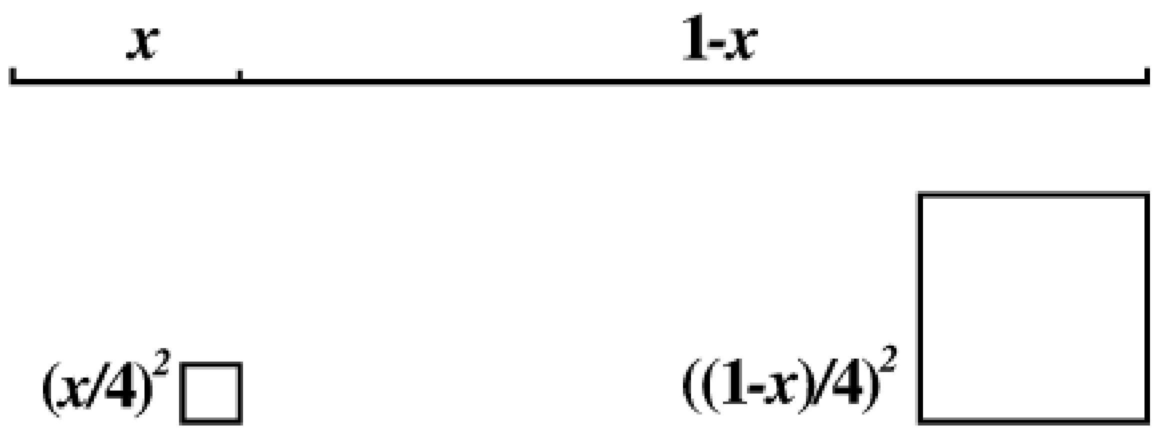
在图像上很容易找到最大和最小值，但是作图过程可能很复杂。分析函数极值点关键是找到驻点、边界点和不连续点。例如上例中需要关注的有 5 个点，0^+，1^-，1^+，e，$+\infty$。

第 12 讲 相关变率

Related Rates

极值问题

例 1：一条长度为 1 的绳子，裁成两段，分别围城两个正方形，求面积之和的最大值。



面积之和为 $A=(\frac{x}{4})^2+(\frac{1-x}{4})^2$

因此在极值点，导数满足为 $A'=\frac{x}{8}-\frac{1-x}{8}=0$，求得 $x=\frac{1}{2}$。则有 $A(\frac{1}{2})=\frac{1}{32}$。

在边界点上有 $A(0^+)=\frac{1}{16}$。 $A(1^-)=\frac{1}{16}$。

由此可知在驻点之上得到的是面积的最小值，而边界上则是最大值。

当求极值时，不仅要求出极值的数值，还要求出何处取得最值。本题中最小值点为(1/2，1/32)。

例 2：一个固定容积的没有顶盖的长方体盒子，求其表面积最小值。（简化条件下，底为正方形）

令长方体的高度为 y，底边为 x，则体积为 $V=x^2y$。表面积为 $A=x^2+4xy$。

从体积限制条件可得到 $y=\frac{V}{x^2}$，因此 $A=x^2+4x(\frac{V}{x^2})=x^2+\frac{4V}{x}$。

驻点满足 $A'=2x-\frac{4V}{x^2}=0$，则有 $x=2^{1/3}V^{1/3}$。

并不确定是极大值或者极小值，因此需要检查边界 $0<x<+\infty$。边界处表面积趋向于无穷大。 $A(0^+)=x^2+\frac{4V}{x}\Big|_{x=0^+}\to\infty$， $A(\infty)=x^2+\frac{4V}{x}\Big|_{x\to\infty}\to\infty$。

因此驻点就是最小值点。

另一种方法是依靠二阶导数 $A''=2+\frac{8V}{x^3}>0$,曲线为凸函数 ,因此驻点为极小值。

$x=2^{1/3}V^{1/3}$，代入求得 $y=2^{-2/3}V^{1/3}$。则有 $A=3\times2^{1/3}V^{2/3}$。

结果也可以用最优比例来表示 $A/V^{2/3}=3\cdot2^{1/3}$， $x/y=2$。

例 2 用隐函数求导法进行处理。

$V = x^2 y$ ，$A = x^2 + 4xy$ 。

对体积等式两边求导有 $\frac{d}{dx}(V = x^2 y)$

$$\Rightarrow 2xy + x^2 y' = 0$$

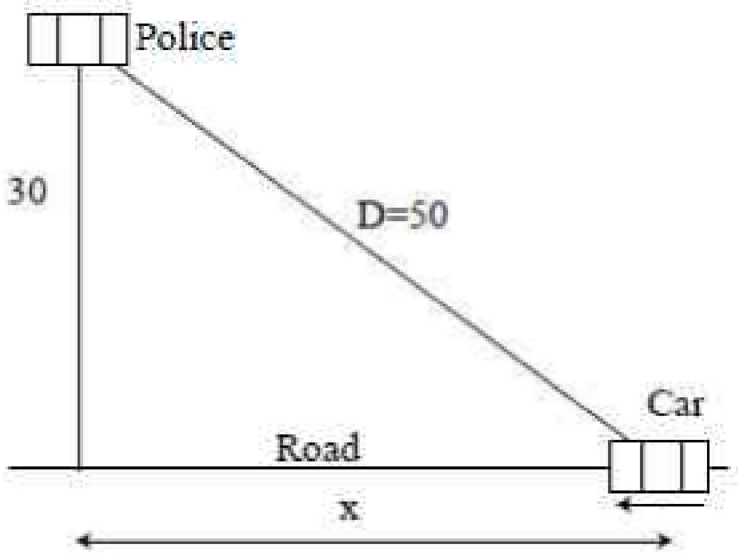
$$\Rightarrow y' = -\frac{2xy}{x^2} = -\frac{2y}{x}$$

因此有面积极值点满足 $\frac{d}{dx}A = 2x + 4y + 4xy' = 2x + 4y + 4x(\frac{2y}{-x}) = 2x - 4y = 0$ 。

得到 $x = 2y$ 时为驻点，但没有确认是极大值还是极小值。可以计算边界得到，或者求二阶导数 $\frac{d^2}{dx^2}A = 2 + 4(\frac{2y}{x}) > 0$ 。

相关变率

例：警察在离公路 30 英尺的地方监测超速情况，他距离你 50 英尺远，并且发现你的车沿着雷达方向以每秒 80 英尺的速度逼近。求是否超速（限速 v=95ft/sec）？

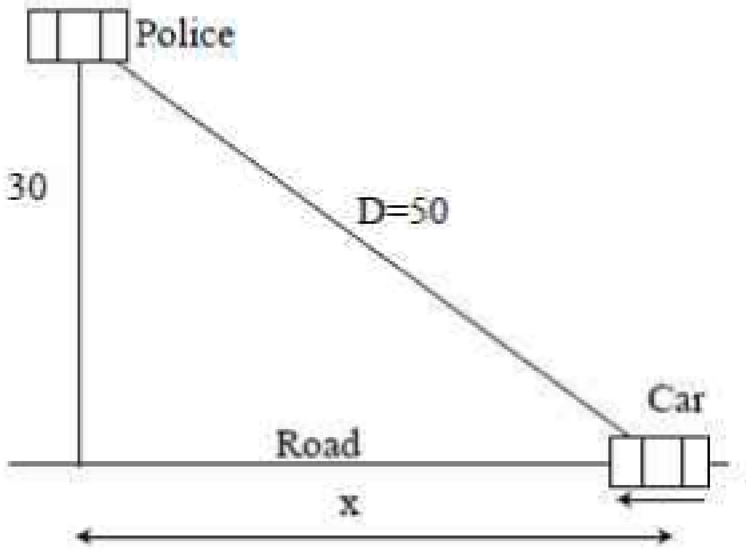


第 13 讲 牛顿迭代法及应用

Newton’s Method and Other Applications

首先继续讨论相关变率。

例 1：



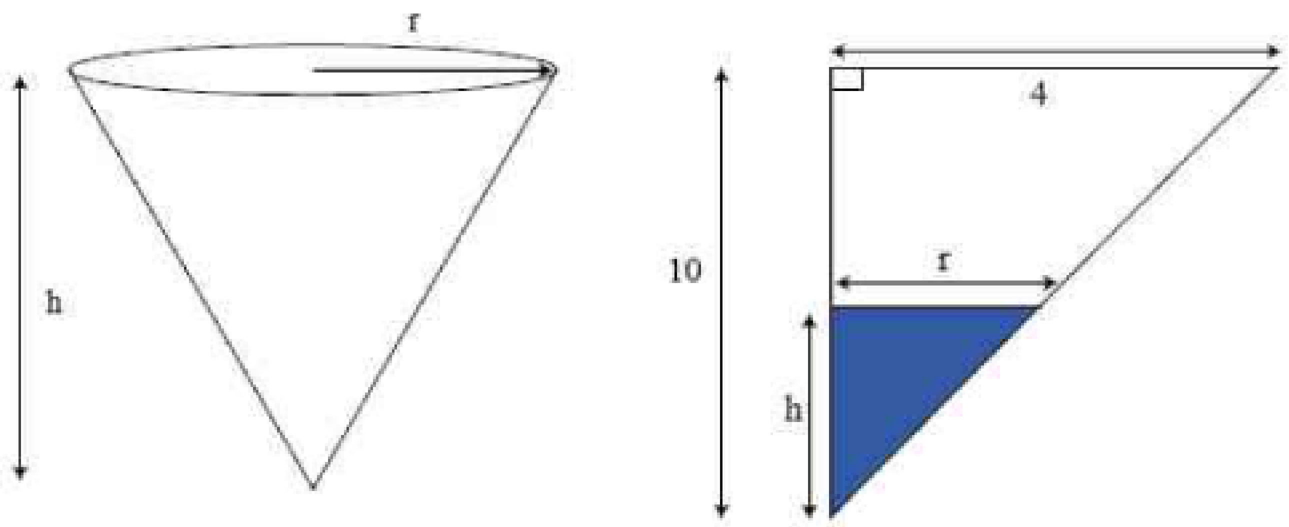
警察监测道路上的车速问题，若观察到你以 $\frac{dD}{dt}=-80\mathrm{ft/sec}$ 速度行进，那么是否超速 v=95ft/sec？

三角形给出的几何关系式为：$30^2+x^2=D^2$。

利用显函数微分：$\frac{dx}{dt}=\frac{d\sqrt{D^2-30^2}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{D^2-30^2}}2D\frac{dD}{dt}=\frac{D}{\sqrt{D^2-30^2}}\frac{dD}{dt}$

利用隐函数微分：$2x\frac{dx}{dt}=2D\frac{dD}{dt}$。直接可以带入数值 $2\times 40\frac{dx}{dt}=2\times 50\frac{dD}{dt}$，得到 $\frac{dx}{dt}=-100\mathrm{ft/sec}$，已超速。

例 2：向圆锥容器中注水速度为每分钟 2 立方英尺，求水面到达 5 英尺时，水面的上升速度。

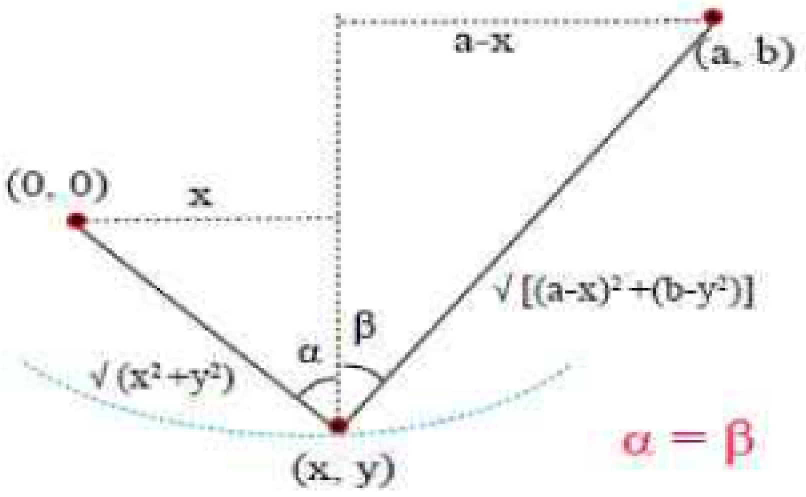


将题目的已知条件翻译成数学语言：

圆锥的底面半径和高有关系 $\frac{r}{h}=\frac{4}{10}$，圆锥体积为 $V=\frac{1}{3}r^2h\pi$，则有圆锥体积为高度的函数 $V=\frac{1}{3}r^2h\pi=(\frac{4}{10}h)^2h\frac{1}{3}\pi=\frac{4\pi}{75}h^3$。

等式两侧求导得到注水速度为 $\frac{d}{dt}V=\frac{4\pi}{75}3h^2\frac{dh}{dt}$=2，代入高度 h=5，则在该点高度的上升速度为 $\frac{dh}{dt}=\frac{1}{2\pi}$。

例 3：



在两固定点(0,0)和(a,b)之间有一条长绳，长绳上挂一重物，物体可能处于的位置的连线为一条弧线，而弧线的最低点即为重力作用下物体自然下垂到达的实际位置，记为点(x,y)，最低点满足 $y'=0$。

由几何关系可以得到长绳的两段长度分别为 $\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$。

则有 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}=L$。

对等式两侧求微分得到 $\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{2}\frac{2(a-x)(-1)+2(b-y)(-1)y'}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}=0$。

带入 $y'=0$ 得到 $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}$，即 $\sin\alpha=\sin\beta$。

从力学上分析，绳子上的张力是相等的，很容易得到角度相等。

而从几何上可以得出物体位置曲线为椭圆曲线，固定绳子的两点就是椭圆的焦点。如果将弧线认为是椭圆镜面，则从一个焦点射出的光线经过反射后会穿过另一个焦点。从一个焦点击打出的小球撞击椭圆曲面后，都会到达另一个焦点，无论其撞击点在哪里。

牛顿迭代法

例：求 x^2=5。

这相当于求 $f(x)=x^2-5=0$ 的解。

牛顿迭代法：从一个猜测点 x_0 出发，$x_0=2$ 离所求方程的解很近。在(2，$f(2)$)点做函数曲线的切线，和 X 轴相交于一点 x_1，则 x_1 是新的猜测点，它距离方程的解更近了一些，然后重复这个过程。

切线的表达式为 $y-y_0=m(x-x_0)$ 与 X 轴交点即为 x_1 满足 $0-y_0=m(x_1-x_0)$。整理得到 $x_0-\frac{y_0}{m}=x_1$，即 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$。牛顿迭代通项公式为 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$。

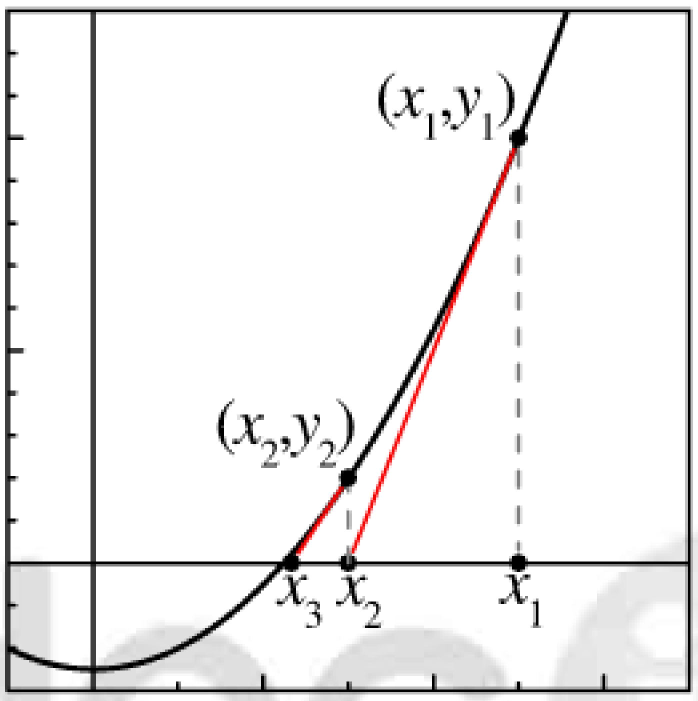
本例中，x_0=2，$f(x)=x^2-5$。

$f'(x)=2x$ ，$x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^{\ 2}-5}{2x_n}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{5}{2x_n}$。

带入得到：

$x_1=\dfrac{1}{2}\cdot 2+\dfrac{5}{4}=\dfrac{9}{4}$

$x_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{4}+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{161}{72}$......



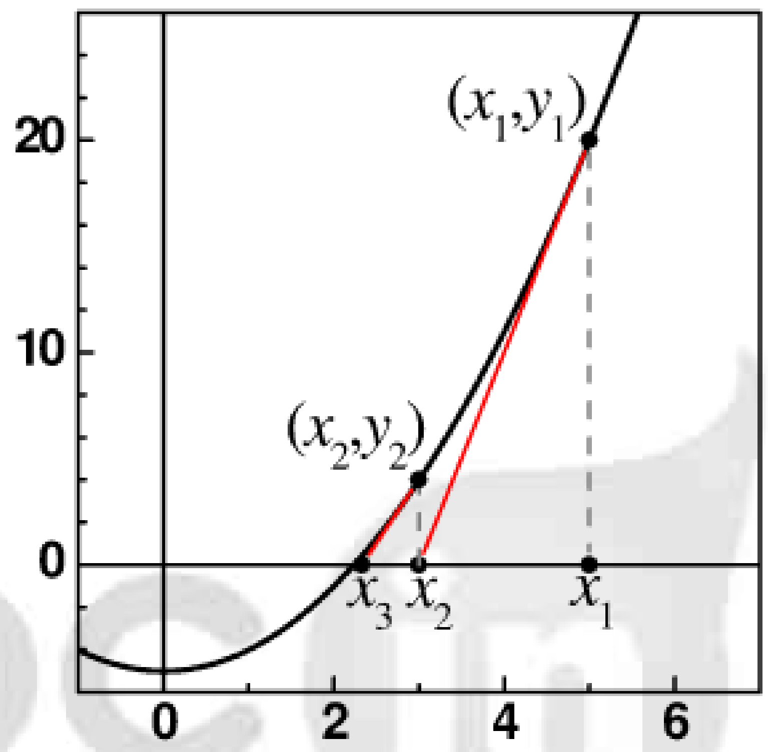
n	$\sqrt{5}-x_n$
0	2×10^{-1}
1	10^{-1}
2	4×10^{-5}
3	4×10^{-10}

第 14 讲 中值定理及不等式

Mean Value Theorem and Inequalities

牛顿迭代法

牛顿迭代法是从一个猜测值 x_0 出发，在(x_0，f(x_0))做函数的切线，并和 X 轴相交于一点 x_1，而 x_1 就是下一个猜测值，重复前面的过程，则猜测值一直在逼近方程的解，即曲线与 X 轴的交点。。



现在要分析迭代公式趋近解的情况，即进行误差分析。

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

记 x_1 和 x 之间的距离为 $E_1 = |x - x_1|$ ，x_2 和 x 之间的距离是 $E_2 = |x - x_2|$……以此类推 x_n 和 x 之间的距离为 $E_n = |\sqrt{5} - x_n|$。

与 E_1 相比，E_2 是切线和曲线与 X 轴交点的差，类似于线性近似（切线）与函数值（曲线）之间的差异，因此应该是二次方的误差水平，$E_2 \sim E_1^2$。

照此推论，每一步计算的精度都比上一步提高一倍。

E_0	E_1	E_2	E_3	E_4
10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-8}	10^{-16}

因此牛顿迭代法的误差减小速度非常好。

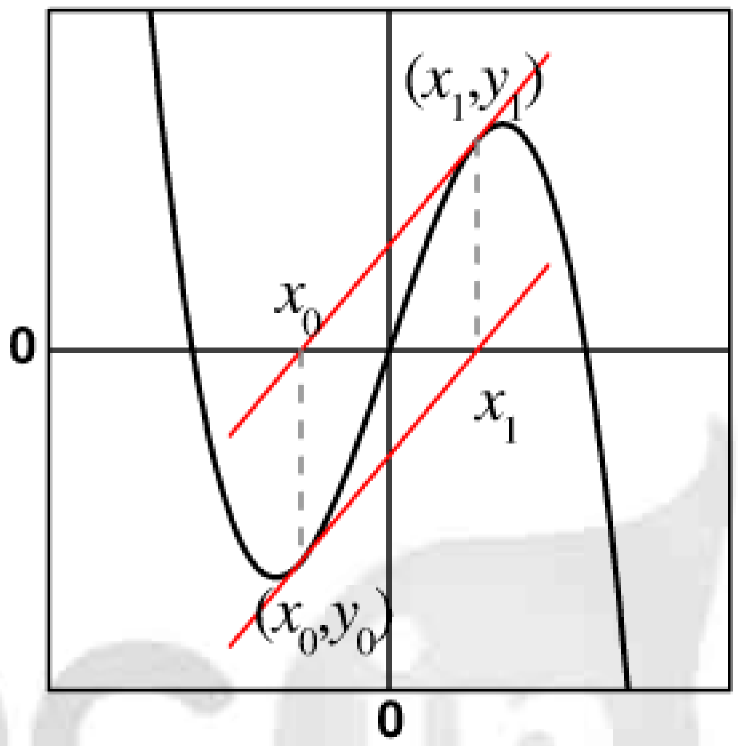
但是，牛顿迭代法要求一阶导数 $|f'|$ 不能太小，二阶导数 $|f''|$ 不能太大，初值 x_0 不能太远。

二阶导数决定了曲线的弯曲程度，也表明切线和函数曲线的差异(二阶近似中的二次项系数)，因此如果二阶导数太大对于通过切线逼近函数值的牛顿迭代法很不利。

如果 x_0 取得太远，有可能趋近于函数曲线与 X 轴的其它交点，而不是你想得到的结果。例如本例中，如果 x_0 取得太远，有可能趋近于另一个的根 $-\sqrt{5}$。

在迭代公式中，一阶导数在分母的位置 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，如果一阶导数太小，则计算结果可能发生远离，极端情况下取到一阶导数为 0 的点，切线不会再与 X 轴相交。

最后还有一种极端情况，迭代在两个数值之间循环。

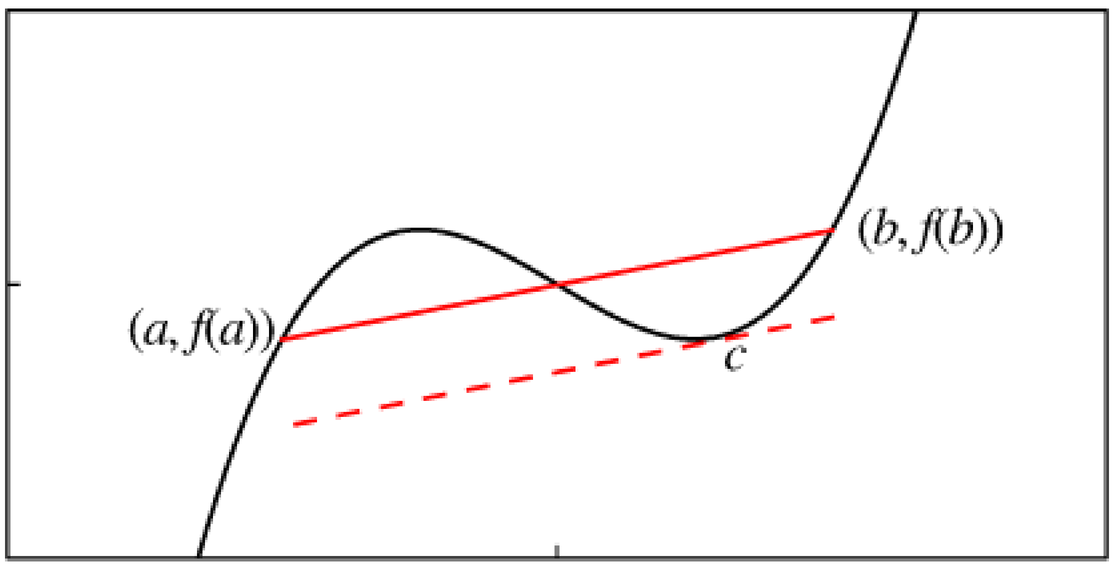


中值定理（Mean Value Theorem MVT）

如果你用时 6 小时走了 3000 英里的距离，则在某一刻你的速度恰好等于平均速度 500 英里/小时。Mean 的意思就是“平均”。

用数学语言表达：如果函数 f 在区间(a，b)之内可微并连续，则有

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$，其中 $a<c<b$。



取与割线的斜率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 相同的平行线逼近曲线，直至平移得到一条切线，则该切点为 c，且斜率为 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，满足要求。

注一：不考虑区间之外的情形。

注二：对于不连续的情况，可以举出反例，因为在不可导的点上会出问题。

中值定理推论：

1. 若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 递增。
2. 若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 递减。
3. 若 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 为常函数。

证明：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Rightarrow f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$。其中 $b-a>0$，则有：

1. $f'(c)>0$，则 $f(b)>f(a)$。
2. $f'(c)<0$，则 $f(b)<f(a)$。
3. $f'(c)=0$，则 $f(b)=f(a)$。

之前提到差商近似于导数，从中值定理知道差商就等于某处的导数，但是不确定是哪一点。

回答提问：中值定理的推论和线性近似有什么区别？

线性近似：$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\approx f'(a)$，对于距离 a 比较近的 b 成立。

中值定理：$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(c)$，$c$ 位于 a 与 b 之间。此外中值定理告诉我们“平均速度”在最高和最低速度之间 $\min f'\le\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\le\max f'$。

这段，学生问了一堆问题，基本上都因为图解法证明虽然直观但是不严密。

不等式

例 1：$e^x>1+x$

证明：令 $f(x)=e^x-(1+x)$。则起点处 $f(0)=e^0-(1+0)=0$。

求导得到 $f'(x)=e^x-1>0$（$x>0$）。因此当 $x>0$ 时，有 $f(x)>f(0)$。

即 $e^x-(1+x)>0\Rightarrow e^x>1+x$。

例 2：$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$

证明：令 $g(x)=e^x-(1+x+\dfrac{x^2}{2})$，则有 $g(0)=e^0-(1+0+0)=0$。

一阶导数为 $g'(x)=e^x-(1+x)>0$（这就是例 1 的结论）。因此当 $x>0$ 时，有 $g(x)>g(0)$。

$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ 得证。

重复这个过程，可得 $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3\times 2}+\dfrac{x^4}{4\times 3}\cdots\cdots$

第 15 讲 反导数

Antiderivatives

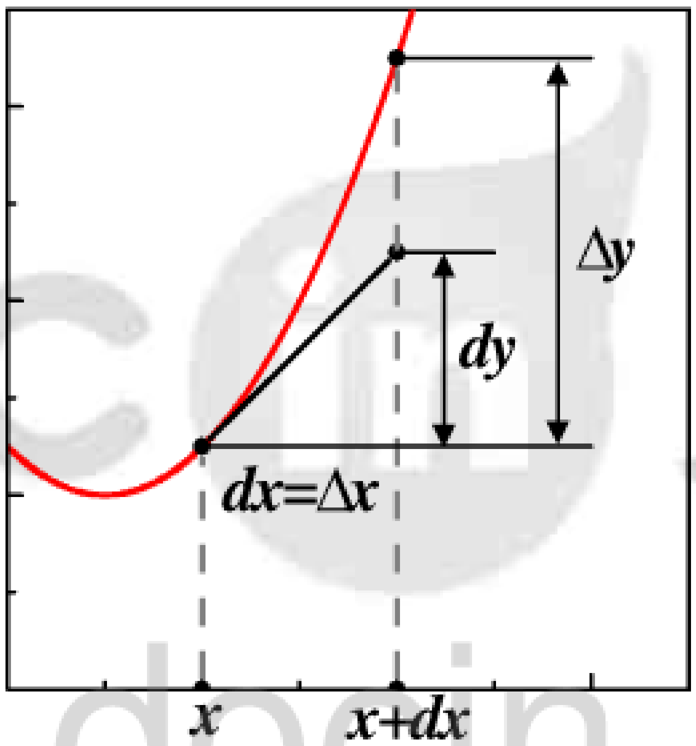
微分

从本讲开始进入积分的学习，首先引入微分的符号和概念。

存在函数 $y=f(x)$，则 y 的微分记作 dy，它的定义是 $dy=f'(x)dx$。也可以称作是 f 的微分。

将 dx 除过去就得到莱伯尼兹的导数记法 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$，因此导数就是两个无穷小量的比。用 dx 和 dy 来替代 Δx 和 Δy。

其实 dy 和 Δy 两者还是存在差异的：



例：$(64.1)^{1/3}\approx ?$

$y=x^{1/3}$，$dy=\frac{1}{3}x^{-2/3}dx$，则有 $dy=\frac{1}{3}(64)^{-2/3}dx=\frac{1}{48}dx$。

因为 $x=64, x+dx=64.1$。所以增量 $dx=0.1$。

$(64.1)^{1/3}=y+dy=4+\frac{1}{48}0.1$。

用线性近似的公式，实际上是等价的，$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$。代入数值计算，可以看到和前面的计算是相同的。

不定积分

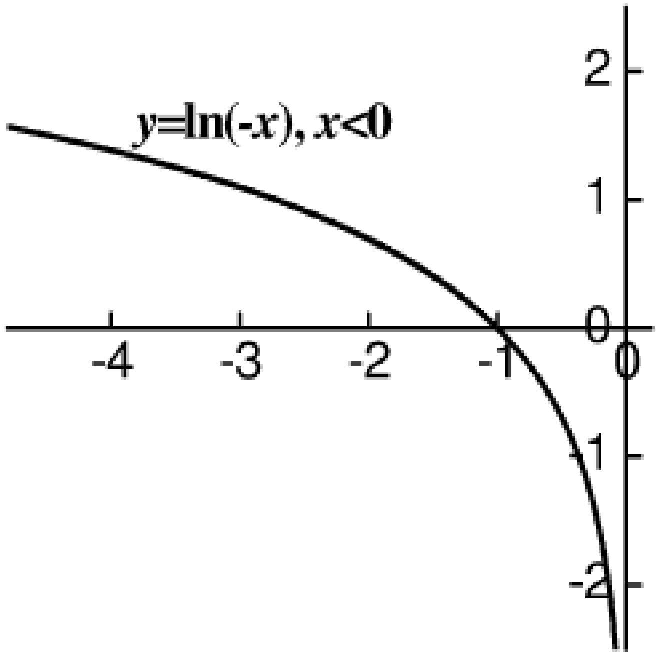
创造一个新的函数 $G(x)=\int g(x)dx$ 为 $g(x)$ 的反导数，又称为 $g(x)$ 的不定积分，其中符号“$\int$”为积分符号。$G(x)$ 满足 $G'(x)=g(x)$。

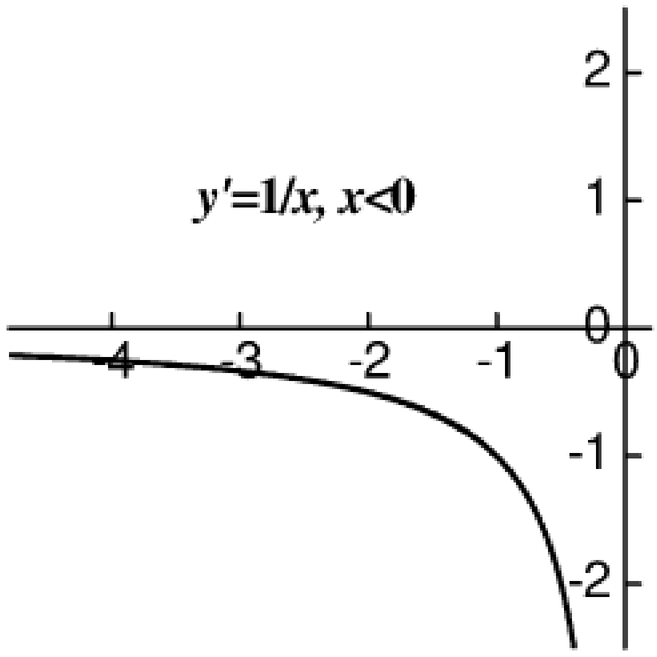
下面列出一些函数的不定积分，所谓“不定”就是因为在对一个函数求反导数时，其反导数加上一个任意常函数仍然符合反导数的条件。

1. $\int \sin x dx=-\cos x+c$

2. $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c$ ，a≠-1。

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ ，x 小于 0 的情况也符合。





4. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin x + c$

6. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

定理：如果两函数的导数相等，即 $F'(x) = G'(x)$ ，则有 $F(x) = G(x) + c$ 。

证明 若两函数满足 $F'(x) = G'(x)$ 则有 $(F-G)' = F' - G' = 0$,因此 $F(x)$-$G(x)$=c。（常函数的导数为 0，是中值定理给出的。）即 $F(x) = G(x) + c$ 。

例：$\int x^3 (x^4+2)^5 dx$

应用换元法，令 $u = x^4 + 2$ ，则有 $du = 4x^3$。

$$\int x^3 (x^4+2)^5 dx = \int \frac{u^5}{4} du = \frac{1}{24} u^6 + c = \frac{1}{24}(x^4+2)^6 + c$$

例 2：$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + c$

应用换元法，令 $u = 1 + x^2$ ，则有 $du = 2xdx$ 。

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int u^{-1/2} \frac{1}{2} du = u^{1/2} + c = \sqrt{1+x^2} + c$$

做的多了可以提前推测解的大概形式，然后求导对比，最后调整系数得到答案。

例 3：$\int e^{6x} dx = \frac{1}{6} e^{6x} + c$

例 4：$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$

例 5：$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c_1 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c_2$

例 6：$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(|\ln x|) + c$

第 16 讲 微分方程和分离变量

Differential Equations and Separation of Variables

微分方程

课程 18.03 是完整的微分方程课程，本讲只是将微分方程介绍给听众，并且只解决其中一类微分方程。

例 1：最简单的微分方程就是$\frac{dy}{dx}=f(x)$，上一讲已经讨论过结果，解函数为 $y=\int f(x)dx$。但到目前为止只介绍了一种求解方法：换元法。

例 2：$(\frac{d}{dx}+x)y=0$

$(\frac{d}{dx}+x)$算符在量子力学中的名字为湮灭算符，谐振子的基态就由这个方程决定。$(\frac{d}{dx}-x)$则为创生算符。

此微分方程与之前最大的区别是右侧不仅是关于 x 的表达式，还有 y 存在，因此之前的方法并不适用，需要用分离变量的方法进行操作。

$$\frac{dy}{dx}=-xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-xdx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int -xdx$$

得到$\ln y=-\frac{x^2}{2}+c$，取幂将 y 写成 x 的显函数则有：$y=Ae^{-x^2/2}$，$A=e^c$。

验算：$y=ae^{-x^2/2}$，则有$\frac{d}{dx}y=a\frac{d}{dx}e^{-x^2/2}=a(-x)e^{-x^2/2}=-xy$。

这个函数就是正态分布函数，因此常出现在量子力学中，阐释粒子的位置。

分离变量法

若微分方程可写成$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$的形式，则经过分离变量法有：

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

得到$H(y)=\int\frac{1}{g(y)}dy$，$F(x)=\int f(x)dx$，则有$H(y)=F(x)+c$。可求得微分方程的解的显式为$y=H^{-1}(F(x)+c)$。

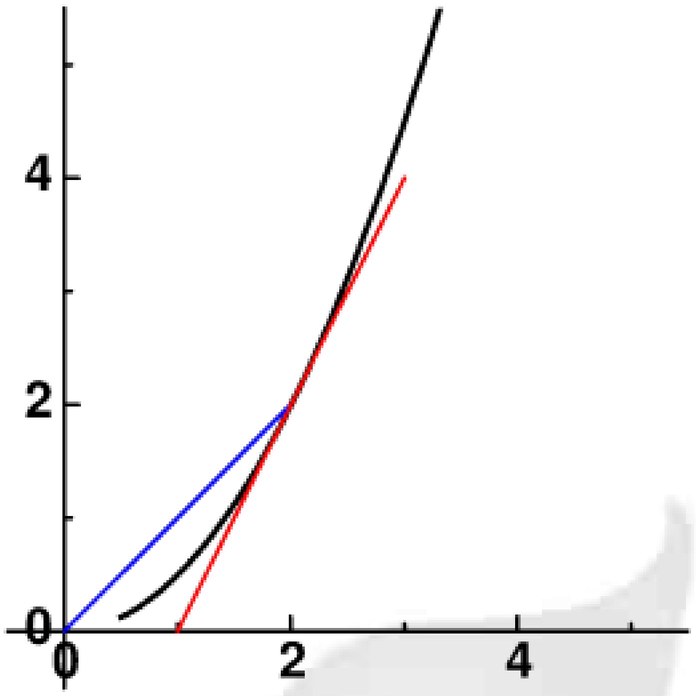
注一：上例中 y 取负值也是成立的，因此可以写成$\ln|y|=-\frac{x^2}{2}+c$，则有 $y=\pm Ae^{-x^2/2}$，而其实$a=\pm A$。另一特殊情况是解为 y=0。其实通解的形式$y=ae^{-x^2/2}$已经包含了这些情况。

注二：求不定积分时应得到$\ln y+c_1=-\frac{x^2}{2}+c_2$，因此有$\ln y=-\frac{x^2}{2}+c_2-c_1$。用

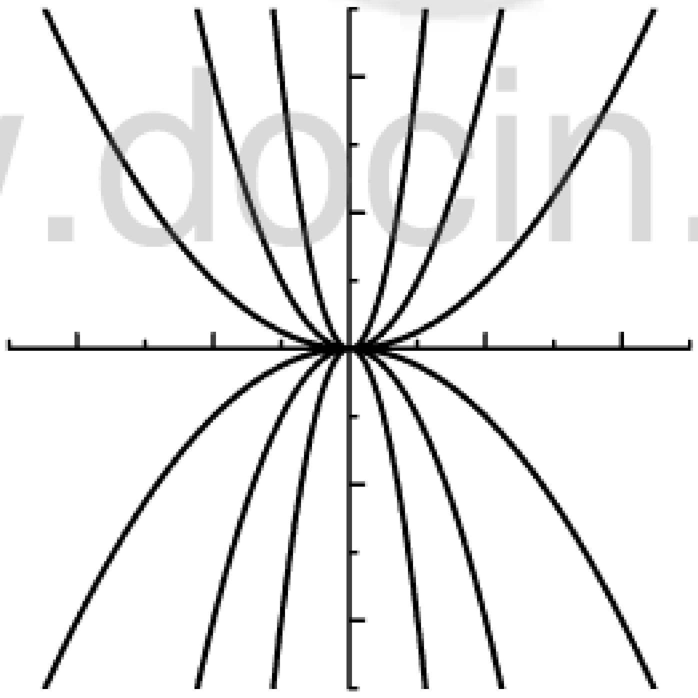
一个常数可以替代两个常数的状态。要注意在求不定积分之后常数 c 出现在加和中，但是随着后面的非线性运算，它可能出现在任何位置。

注三：用分离变量的方法求例 1，则有 $\frac{dy}{dx}=f(x)\Rightarrow dy=f(x)dx$ ，最后得到 $y=\int dy=\int f(x)dx$。

例 3：曲线上点的切线斜率是该点和原点连线斜率的两倍，求曲线表达式。



列出微分方程 $\frac{dy}{dx}=2\frac{y}{x}$ ，分离变量得到 $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2}{x}dx$ ，因此有 $\ln y=2\ln x+c$ ，最后得到 $y=Ax^2$ ，是从原点出发的抛物线。



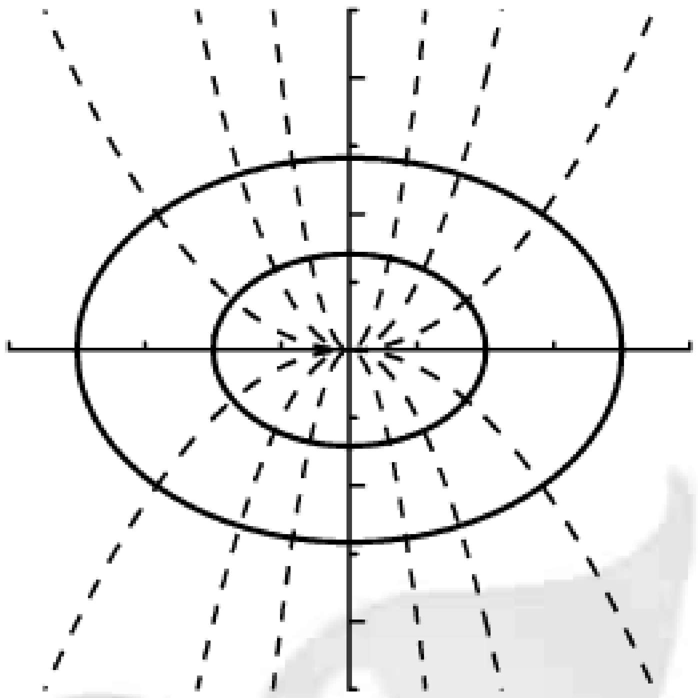
验算： $y=ax^2$ ， $\frac{d}{dx}y=2ax=\frac{2ax^2}{x}=\frac{y}{x}$ ，无论 a 取正负或者零都成立。

注：列出的微分方程中，在 x=0 点的导数是没有定义的，因此无法确定 x=0 点函数的状态。在函数图像中，在 X 轴上下取不同的分支，仍旧符合方程的要求，因为在原点处已知条件对函数没有任何限制条件。

例 4：曲线与原点出发的抛物线处处垂直，求曲线表达式。

所谓垂直即曲线斜率与抛物线斜率为负倒数，而抛物线斜率为 $2(y/x)$。

列出微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2(y/x)}=\frac{-x}{2y}$ ，分离变量得到 $2ydy=-xdx$ ，求解最后得到 $y^2=-\frac{x^2}{2}+c$ ，即 $y^2+\frac{x^2}{2}=c$。解的函数图像为椭圆。注意此处的常数只能为正，可写为 $y^2+\frac{x^2}{2}=a^2$。



写出解的显式 $y=\pm\sqrt{a^2-\frac{x^2}{2}}$ ，其实椭圆并不是函数，而显式正负号分别对应的椭圆的上下两个部分，各自都是函数。

第二单元重点

1. 线性近似/二阶近似
2. 曲线构图
3. 极值问题
4. 相关变率
5. 反导数和求微分方恒
6. 中值定理

本单元的核心内容就是通过一阶导数和二阶导数的信息，获取函数本身的信息。

这句总结说得最好，把本单元的学习目的阐释得一清二楚。我觉得学数学最可怕的状态就是不知道大方向是什么，而迷失在细节和技巧之中，无论求解或者证明一道题，或者学习一门数学分支，莫不如此。