麻省理工学院公开课 MIT OpenCourseWare http://ocw.mit.edu

18.01 **一元微积分** Single Variable Calculus

第一单元 导数

Unit 1 Derivatives

douTintin14

红色字体是我扯淡的部分，谢谢观赏……

念书的时候就发现这个世界上居然有两种微积分：一种美式的，简单直接，重点放在数学的应用性；另一种苏制的，复杂精细，重点似乎在抽象性和完备性。

很不幸，我们一个工科专业被划分到和理学院一起学习那种复杂精细的微积分，老师基本是从集合论和实数集讲起，后面有大段应用 Epsilon-Delta 语言的严格证明，教学内容有很大一部分应该是属于“数学分析”甚至“实分析”。当然把大家整得苦不堪言……

老实说，两种讲法的效果应该说是各（gao）有（xia）利（li）弊（pan），严格的论证过程确实能够锤炼逻辑思维，并且可以帮助全面深入理解这一数学分支。但对于我们这种学习微积分是以应用这一数学工具为主要目的的工科专业而言，把时间都搭在严格论证上未免有些得不偿失，毕竟学时有限，后半程在应用和微分方程方面，老师反而讲得比较简略了。这感觉就如同你报了“刺客“专业，选了一门叫”论剑“的基础课，以为课本会是《独孤九剑》结果却是《干将莫邪的前世今生》。

讲真，其实 MIT 这个微积分讲得也没啥特别过人之处，跟他们的“线代”没法比，要说特点我觉得就是课程的内容设置比较务实，难度非常适中，把授课目标定在希望能让大多数学了这门课的人能够用好微积分，而不是终生对其保持敬畏。引入一些概念，比如自然对数时，颇费了一番心思。还有串联每单元相关内容方面，做的确实比较好，主线清晰，就是抱着“生怕学生不懂”的态度在教学。

不过这套公开课出来之后，国内的老师对其批评声音要更多一些，很多人明确说大专都不会讲这么简单，根本没有抓住精髓之类的，我觉得还是挺无语的。国内教育在外语、数学和写作三件事情上一直是大炮打蚊子的状态，从初等教育到高等教育概莫如是，你给它换盘蚊香，它还觉得太 low 了。

第一单元 **导数 Derivatives**

A 导数是什么？

- 几何解释　Geometric interpretation
- 物理学解释　Physical interpretation
- 对众多领域都很重要（经济、政治、科学、金融、物理……）

B 如何对你所知的任意函数求导

- 例如 $\frac{d}{dx}\left(e^{x\arctan x}\right)$

  完成本单元的课程后会掌握上述函数的求导技巧

第 01 讲 导数和变化率

Derivatives & Rate of Change

几何观点下的导数

如何求函数 $y=f(x)$在 P（x_0，y_0）点的切线 $y-y_0=m(x-x_0)$？确定该直线需要知道两点，其一是曲线上的点 P，满足 $y_0=f(x_0)$；其二就是切线的斜率 $m=f'(x_0)$，它就是函数 $f(x)$在 x_0 的导数。

函数 $f(x_0)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$的定义，就是过该点 P（x_0，y_0）的切线的斜率。

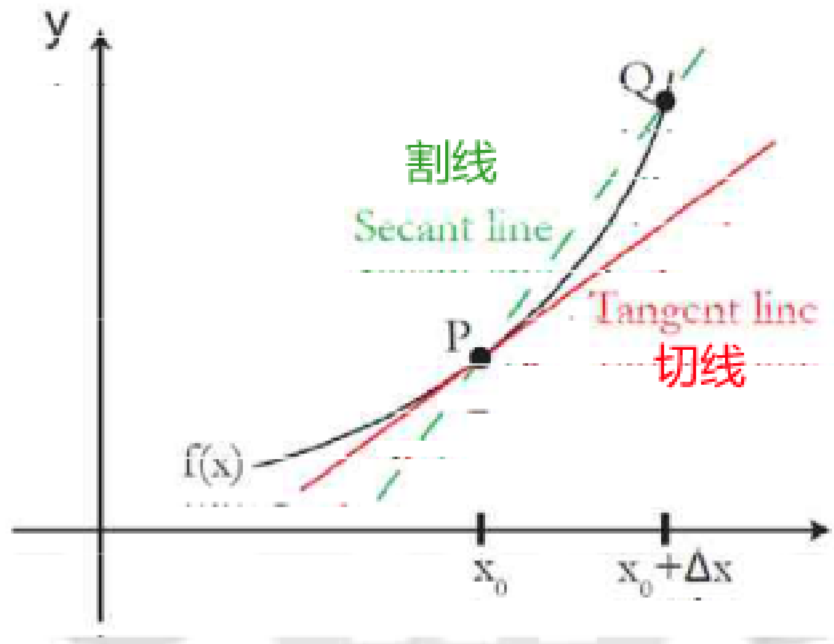


图 1 函数曲线及其割线与切线

切线是什么？

- 它不仅仅是与弧线有一个公共交点的直线。
- 它其实是割线（与弧线有两个公共交点的直线）的极限状态。当两个交点之一的 Q 点向 P 点（P 点固定）趋近，使得两点间的距离退化为零时的一种极限状态。

割线 PQ 之斜率的极限就是切线的斜率，即为导数。

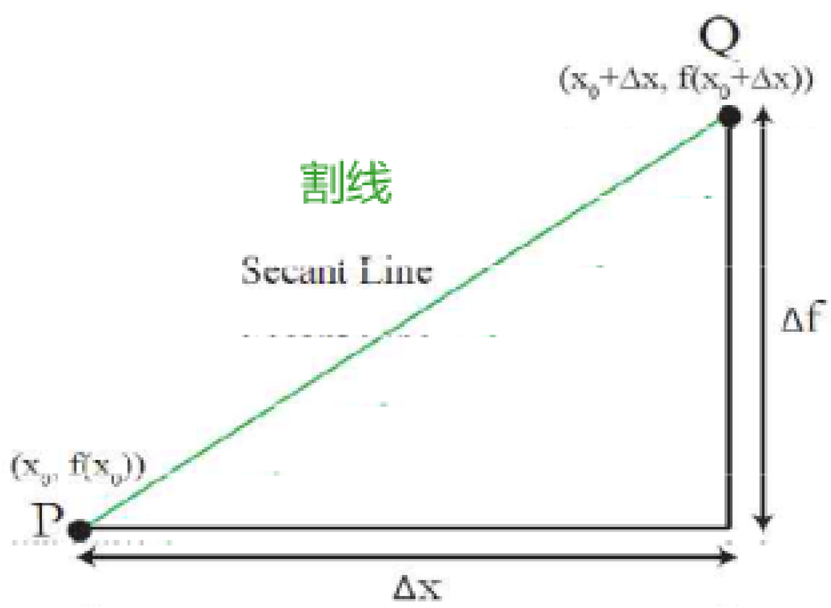


图 2 导数的几何定义

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

差商　　　函数f 在x_0处的导数

例 1：$f(x)=1/x$ 求导

求导数时要注意不要一开始就试图代入 Δx=0，否则你最终得到就是 $\Delta f/\Delta x=0/0$，正确的操作需要做约分。

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\dfrac{1}{x_0+\Delta x}-\dfrac{1}{x_0}}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)x_0}\right]=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0}\right]=\frac{-1}{(x_0+\Delta x)x_0}$$

取极限 $\Delta x\to$0，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x_0+\Delta x)x_0}=-\frac{1}{{x_0}^2}$$

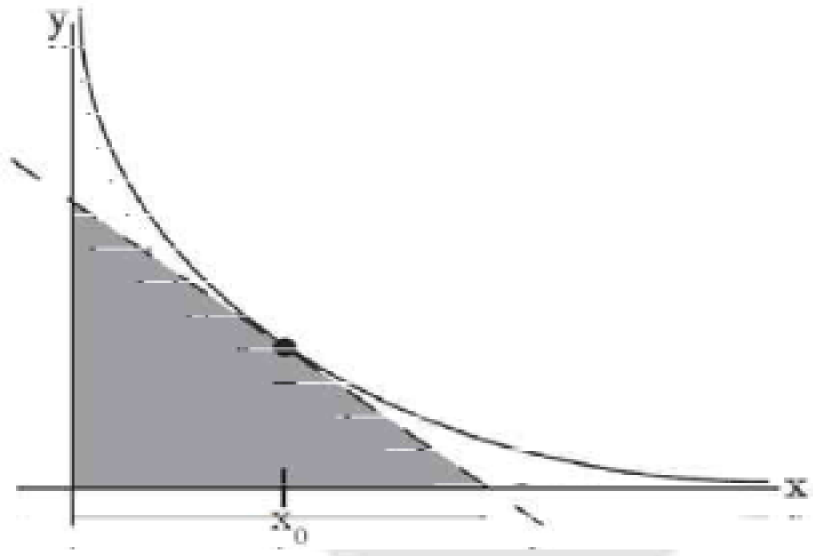


图 3$f(x)=1/x$ 的函数图像

因此导数 $f'(x_0)=\dfrac{-1}{x_0^2}$

导数值始终是负的，且 $\Delta x\to\infty$时 $f'(x_0)$ 绝对值越来越小，这都与图中切线斜率相符。

例 1⁺：计算一下切线与 X 轴 Y 轴共同圈出的面积，就是图 3 中的阴影部分。

首先写出过 P（x_0，y_0）点切线的数学表达式：

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)=\frac{-1}{{x_0}^2}(x-x_0)$$

其中 $y_0=1/x_0$。

首先计算 X 轴截距，在 X 轴上 $y=0$，代入切线方程即可。

$$0-\frac{1}{x_0}=\frac{-1}{{x_0}^2}(x-x_0)=\frac{-x}{{x_0}^2}+\frac{1}{x_0}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{{x_0}^2}=\frac{2}{x_0}$$

$$\Rightarrow x=2x_0$$

因此，X 轴上的截距为 $x=2x_0$。因为本函数中 x，y 是完全对称的，$y=1/x\Rightarrow x=1/y$，所以可知 Y 轴截距为 $y=2y_0$。

三角形面积为（$2x_0$）$(2y_0$）$/2=$（$2x_0$）$(2/x_0$）$/2=2$。无论在哪里取切线，三角形面积永远等于 2。

导数的表示法

微积分的发展是多人同时展开研究并推动的，这也导致了导数有多种记法。

若 $y=f(x)$，则有 $\Delta y=\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。其中 Δ 代表改变量。

导数的表示法：

$$f' \qquad \text{牛顿表示法}$$

$$\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f=\frac{d}{dx}y \qquad \text{莱伯尼兹表示法}$$

要注意取导数的位置 x_0，表示法中经常忽略了这个信息。

比较有意思的是，英国人觉得他们在微积分领域进展比欧洲大陆慢的一个重要原因就是采用了牛顿的表达式。我觉得这也有一定道理，微积分比较核心的内容就是函数与函数之间的关系，而莱伯尼兹的表达式确实更加有效地体现了这一点。

例 2：$f(x)=x^n$，$n=1,2,3\ldots\ldots$求 f'

解：直接将 $y=f(x)$的表达式代入差商，则有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$(x+\Delta x)^n=(x+\Delta x)(x+\Delta x)\cdots(x+\Delta x)$$
$$=x^n+nx^{n-1}\Delta x+O((\Delta x)^2)$$

其中 $O(\Delta x)^2$ 为包含$(\Delta x)^2$，$(\Delta x)^3$ 乃至$(\Delta x)^n$ 诸高阶项的缩写。则

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}((x+\Delta x)^n-x^n)=\frac{1}{\Delta x}(x^n+nx^{n-1}\Delta x+O((\Delta x)^2)-x^n)=nx^{n-1}+O(\Delta x)$$

取极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=nx^{n-1}$

可得 $\boxed{\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}}$

这一结果可以扩展到多项式，例如 $\frac{d}{dx}(x^3+5x^{10})=3x^2+50x^9$。

如果你学的是苏制的微积分教程，而且大一就要修物理的话，那么就会面对这么个好玩的事儿，物理老师抱怨数学老师讲得慢，这边要用微积分了，那边还在实数里面玩儿呢，于是乎很多朋友的求微分求积分的技术都是物理老师教的。不过这两年，微积分的一些基本内容高中就给处理了，因此前面说的这种情况会越来越少了。

以切线斜率或者物理量变化率这样的概念进行类比来引入导数，从而拉开微积分的大幕，是一种非常直观的讲法。那么问题就来了，为啥有的教程要从实数集开始，一路上进展缓慢，并且被细节折腾得及其狼狈呢。这里要说到的就是，在微积

分理论发展的过程中，“无穷小”这一概念发挥过作用但也引入了危机，曾经让整个体系摇摇欲坠。经过数学家的努力所建立起来的完备的微积分理论体系，建立在极限理论基础之上，而极限理论则建立在连续性的基础之上。因此比较耿(si)直(ban)的思路就是我们从连续性讲起，然后到极限理论，然后用 Epsilon-Delta 语言推导所有的微积分定理。然而对于我等这些学渣而言，这条貌似康庄大道的主线，几乎是在对微积分有了相当的了解之后才能比较信服地接受的，因此在学习初期几乎处在战略层面毫无方向，战术层面疲于应付的状态。我想也许先学美式微积分，随后再修实分析应该是难度较低的一条路。对那些理论感兴趣的同学可以去看看《陶哲轩实分析》或者齐老师的《重温微积分》，都是很赞的书，循序渐进满足各种抖 M。

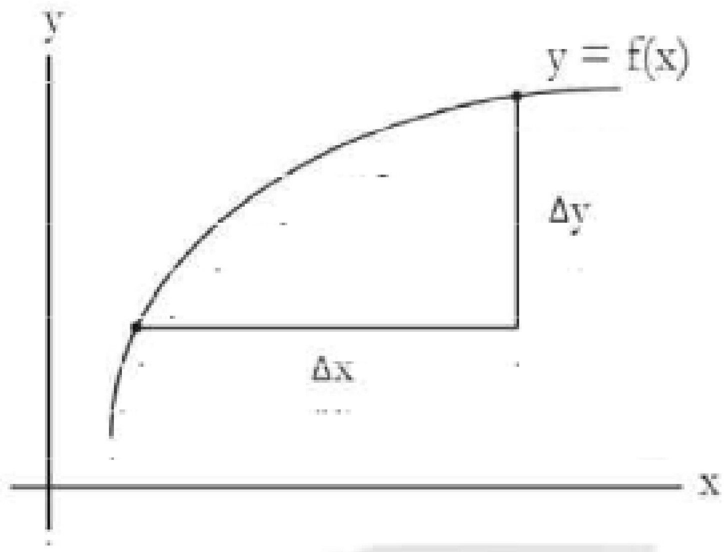
曾经听说物理老师抱怨，按照数学老师的逻辑，那物理应该从量子物理开始讲，因为这才是更“基础”的层面……

第 02 讲 极限和连续

Limits & Continuity

上一讲我们将导数定义为切线的斜率，这是导数的几何解释。这一讲将从其它角度解释导数的内涵。导数的第二种解释是“变化率”。

导数的物理学解释



$$\Delta x \to 0 \text{则有} \frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$$

当Δx 趋近于 0 时，平均速度趋近于瞬时速度，即差商趋近于导数。

物理学解释的实例：

1. q=电荷，$\frac{dq}{dt}=$电流。

2. s=距离，$\frac{ds}{dt}=$速度。

例：在万圣节，MIT 的学生有从约为 80m 高的建筑物顶上往下扔南瓜的传统。近地面条件下，物体的运动方程给出了南瓜高度 h 随时间 t 的变化：

$$h=80\text{-}5t^2$$

抛射瞬间 t=0，而 h=80。当南瓜落到地面上，h=0，可求得时间 t=4。因此南瓜的平均速度为

$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{0-80}{4-0}=\text{-}20m/s\text{。}$$

而旁观者则更感兴趣在砸到地面的瞬间南瓜的速度，即求得 t=4 时的即时速度 h'：

$$\frac{d}{dt}h=0-10t$$

因此坠地瞬间的瞬时速度为 h'=-40m/s。因为南瓜是向下运动，其高度是一直在减少的，所以速度的数值均为负。

3. T=温度，$\frac{dT}{dt}=$温度梯度。

4. 测量灵敏度。

例：GPS。太空中的卫星能确定其正下方的位置，并能接受水平面上与其相距 h 处的无线电信号，并由此推算出该位置与水平面上卫星正下方的点相距为 L。若 h 的误差为Δh。则由此可以估算 L 的误差：

$$\frac{\Delta L}{\Delta h} \approx \frac{dL}{dh}$$

极限和连续

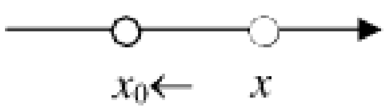
简单极限：例如$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+3}{x^2+1}=\frac{4+3}{4^2+1}=\frac{7}{17}$

导数永远不是简单极限：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，结果永远是 0/0，总是要先进行一些对消运算。

右极限：

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

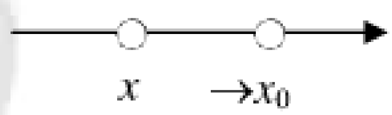
$\begin{bmatrix} x\to x_0 \\ x>x_0 \end{bmatrix}$



左极限

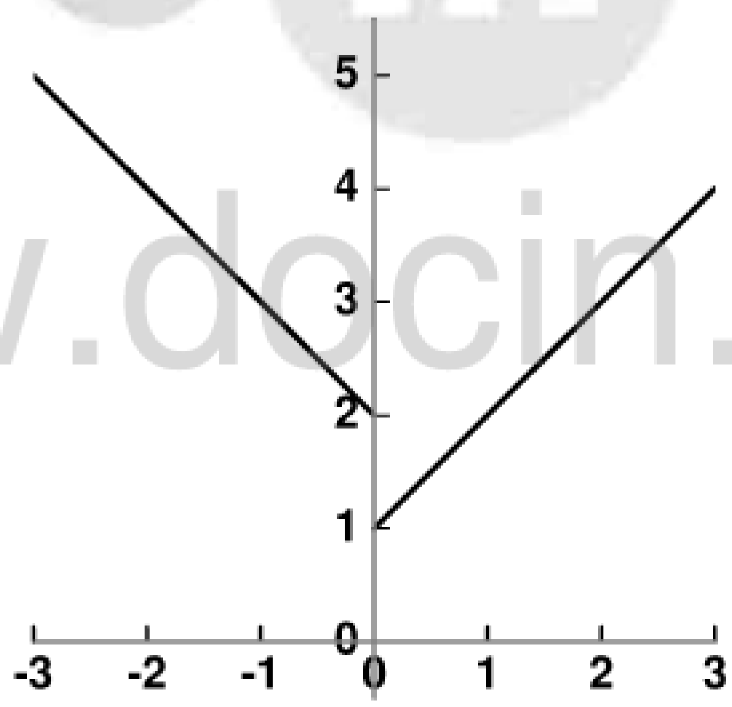
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

$\begin{bmatrix} x\to x_0 \\ x<x_0 \end{bmatrix}$



例：

$$f(x)=\begin{cases} x+1, x\ge 0 \\ -x+2, x<0 \end{cases}$$



求 x=0 点的左右极限可得：

右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$；左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x+2)=2$。求极限过程中不需要知道 x=0 点的函数值。

定义：若有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在 x_0 点连续。

定义中包含的条件是：

1，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 这一极限存在，即函数的左极限等于右极限。

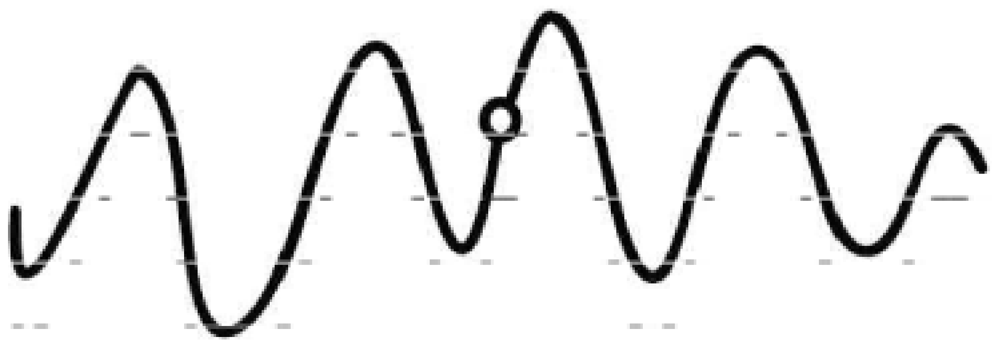
2，$f(x_0)$存在。

3，函数值$f(x_0)$和函数的极限值$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$相等。

讨论几种“不连续”的情况：

1，跳跃间断：左右极限均存在，但是不相等，前例即为跳跃间断。（MIT 的诺贝尔经济学得主 Bob Merton 在股票价格中会讨论左连续、右连续……左连续是关于过去，右连续是关于未来）连这东西都有应用啊，真是第一次听说。

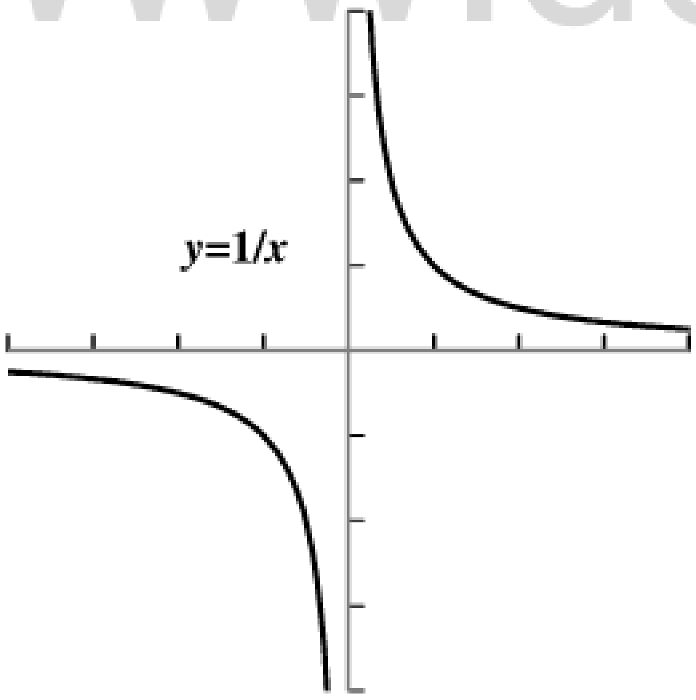
2，可去间断：左右极限存在并相等，但不等于函数值。

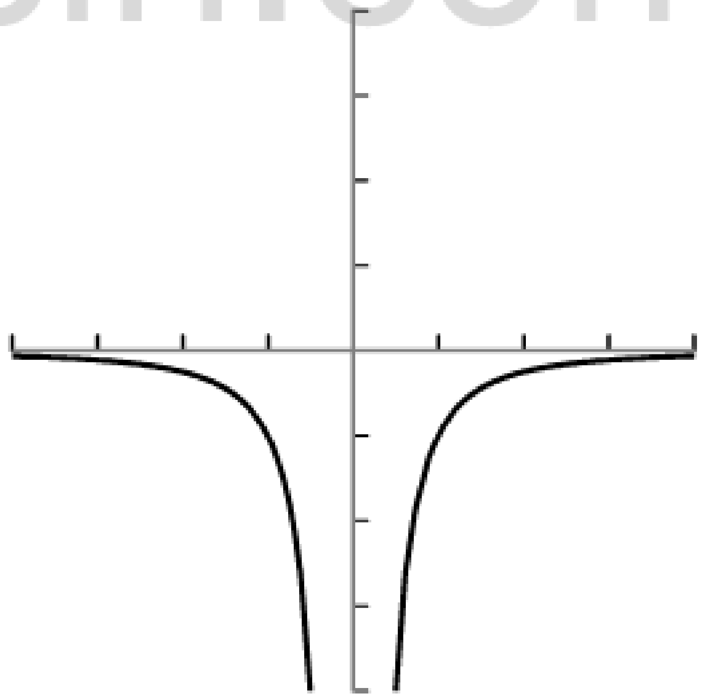


例：$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$；$g(0)=?\ \lim\limits_{x\to 0} g(x)=\dfrac{\sin x}{x}=1$，因此 0 点是可去间断点。

例：$h(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$；同样的$\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$，而函数在零点无意义，因此 0 点也是可去间断点。

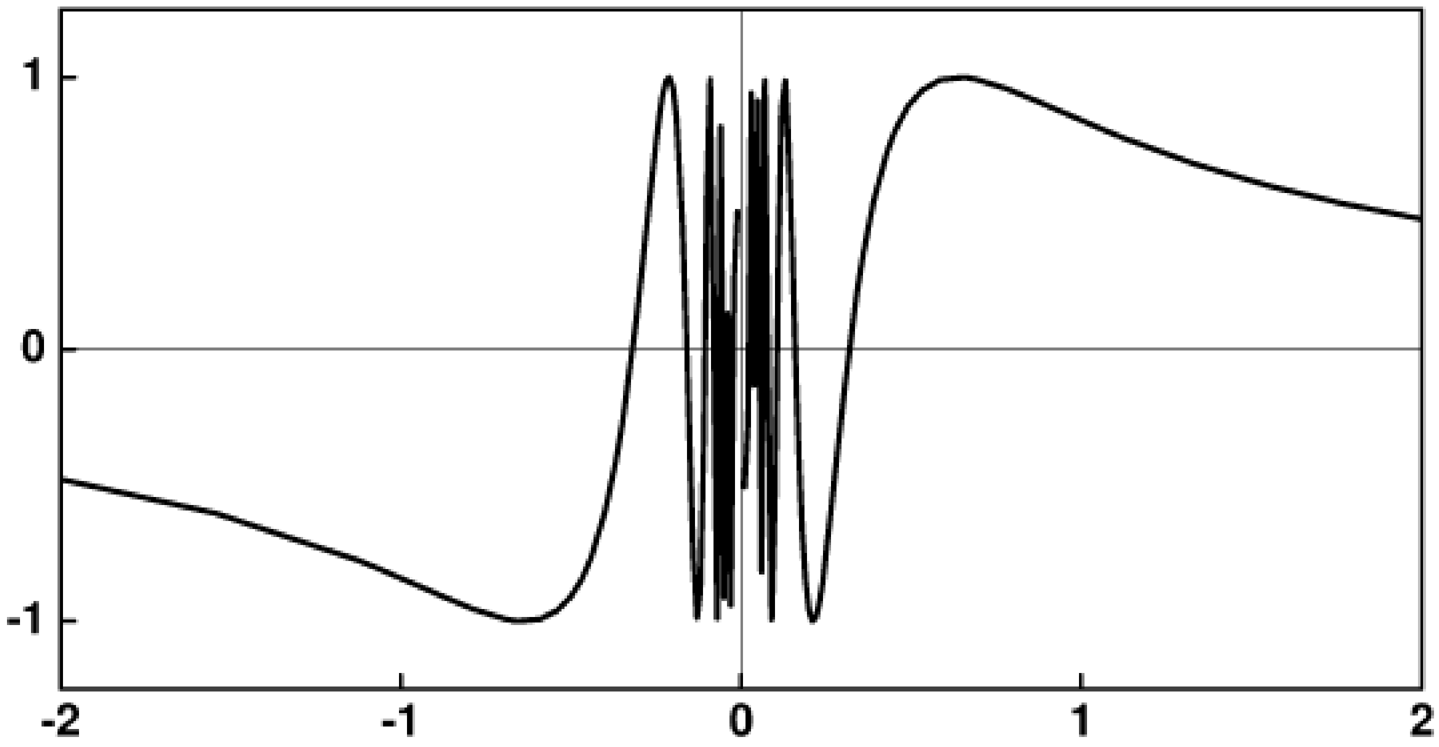
3，无穷间断：例如函数 $y=1/x$。$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$。这个函数的导函数为 $y'=-1/x^2$，也具有无穷间断，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ 左右极限一致。原函数是奇函数，求导后变为偶函数。





4，另类间断：例如 $y=\sin\dfrac{1}{x}$，当 x 趋近于 0 的时候，将无限震荡，没有左右极

限。



定理：可导必连续

若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

证明：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$。由此可知，极限等于函数值，函数在该点连续。

第 03 讲 求导公式

Derivative Formulas

求导公式：

求导公式分为两种：一种是对特殊函数求导，例如 x^n 和 $1/x$；另一种是通用的求导法则。

通用求导法则：

$\frac{d}{dx}cu(x)=c\frac{d}{dx}u(x)$，或者写作 $(cu)'=cu'$

$\frac{d}{dx}(u(x)+v(x))=\frac{d}{dx}u(x)+\frac{d}{dx}v(x)$，或者写作 $(u+v)'=u'+v'$

对多项式求导就会用到两种公式。对所有可导函数求导都是从特殊函数出发，利用通用求导法则得到其导数。

三角函数的导函数：

本讲主要是讨论三角函数的导函数：

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

首先处理正弦函数：

其差商等于 $\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}$

$$=\sin x(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x})+\cos x(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x})$$

A：$\Delta x\to 0$ 时，$(\cos\Delta x-1)/\Delta x\to 0$。

B：$\Delta x\to 0$ 时，$\sin\Delta x/\Delta x\to 1$。

因此 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\to\cos x$。得到 $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$。

对于余弦函数：

其差商等于 $\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x}{\Delta x}$

$$=\cos x(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x})-\sin x(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x})$$

因此 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\to -\sin x$。得到 $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$

下面论述红色框线里面 *A*，*B* 两个极限值的正确性。

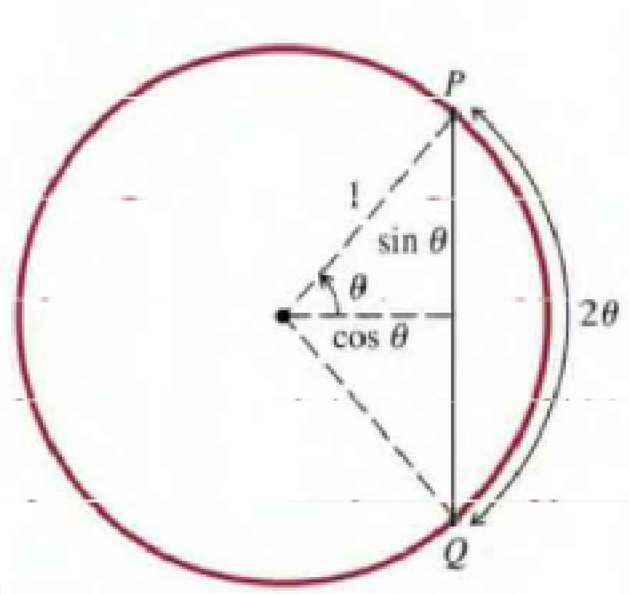
按照定义可知：

$$\left.\frac{d}{dx}\cos x\right|_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}=0$$

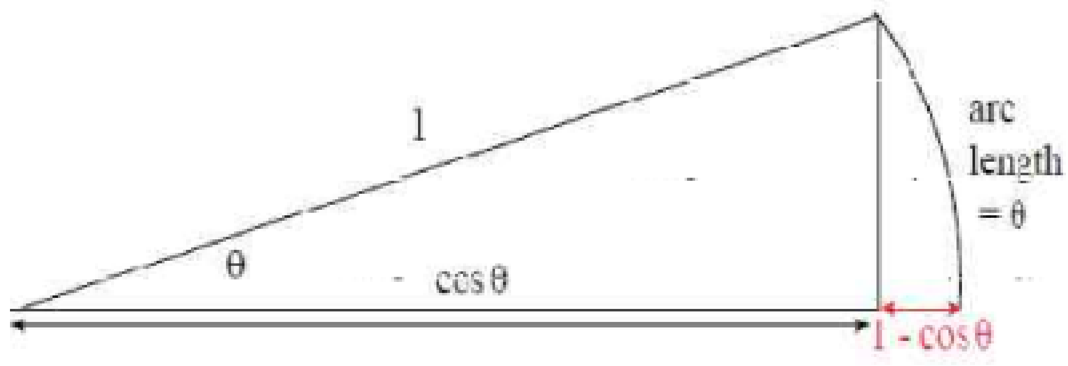
$$\left.\frac{d}{dx}\sin x\right|_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

因此利用正弦和余弦函数在 $x=0$ 处的导数值可以给出 $\frac{d}{dx}\sin x$ 和 $\frac{d}{dx}\cos x$ 在定义域上其它点的数值。

这里用几何法进行讨论 *A*，*B* 两个极限值：



在单位圆上，$\sin\theta$就是垂线的长度，而θ就是红色弧线的长度。将角度变小趋近于 0 的时候，垂线的长度 2 倍即 2θ 角所对应的弦长 $2\sin\theta$ 会接近 2θ 角对应的弧长 2θ。即 $\sin\theta/\theta\to 1$。即 *B* 得证。这个证明的主要思想就是两点之间非常短的弧近似于两点之间的线段。

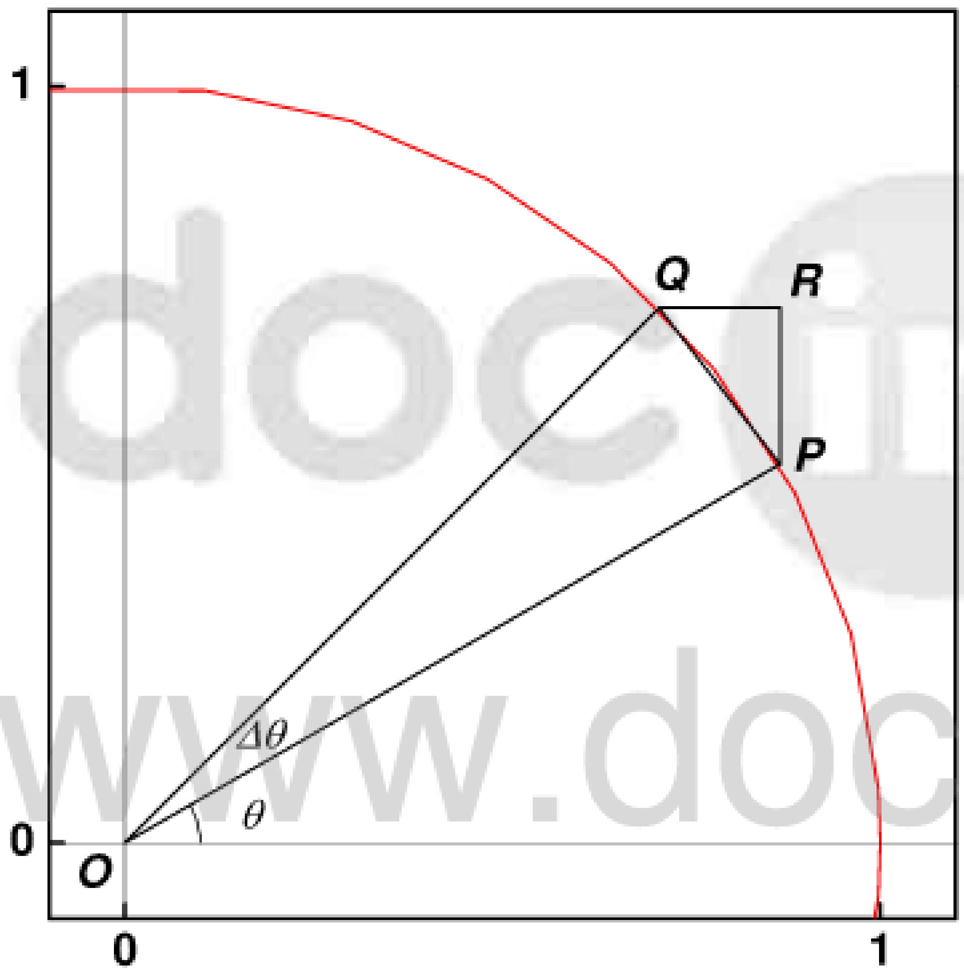


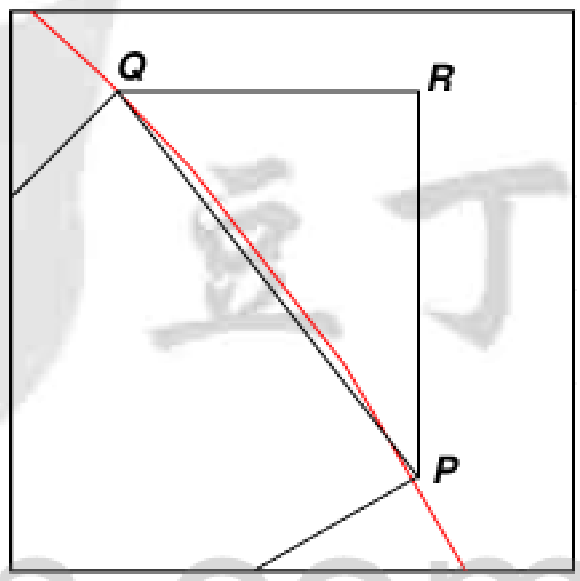
对于极限 *A*，$1-\cos\theta$ 就是图中红色的小线段的长度，当角度趋近于 0 时，它与弧长的比趋近于 0。即 *A* 得证。

这个几何法的证明看起来特别不靠谱，特别是后面这个余弦的，两个数值都趋近于 0，从几何法上证明 1-cosθ下降的更快似乎有点难。我查了一下课本《Calculus With Analytic Geometry》上的证明，后面这个极限 *A* 不是用几何法证的，我把证明列在后面供大家参考，重点还是要把 0/0 的形式转化成其它形式。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\right) \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right) \\
&= \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right) \\
&= 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}
$$

正弦函数导数的几何证明：$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$





$\sin\theta$ 的改变量$\Delta\sin\theta$ 就是 y 的改变量Δy，对应图中 PR 的长度。而 PQ 弧的长度即为$\Delta\theta$，当角度$\Delta\theta$很小时，PQ 弧近似等于 PQ 线段。因此 PQ≈$\Delta\theta$。PQ 为割线，当 Q 趋近于 P 时，割线趋近于圆弧的切线，则∠QPO 趋近于 90 度。因为 RP 为垂直于 x 轴的线段 RP⊥x 轴，而又因为 QP⊥OP，可得∠QPO 等于 OP 和 x 轴的夹角θ。PR ≈PQ$\cos\theta$≈$\Delta\theta\cos\theta$，所以有$\Delta y/\Delta\theta\approx\cos\theta$。

最后得到 $\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\sin\theta}{\Delta\theta} = \cos\theta$ ，这就是正弦函数的导数的几何意义。

下一讲要讲解导数的乘法和除法法则：

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

第 04 讲 链式法则与高阶导数

Chain Rule & Higher Derivatives

复习求导法则

$$\frac{d}{dx}cu(x)=c\frac{d}{dx}u(x)$$ ，或者写作$(cu)'=cu'$

$$\frac{d}{dx}(u(x)+v(x))=\frac{d}{dx}u(x)+\frac{d}{dx}v(x)$$ ，或者写作$(u+v)'=u'+v'$

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$ ，n=0，1，2，3......

乘法法则：

$$(uv)'=u'v+v'u$$

例：$\frac{d}{dx}(x^n\sin x)=nx^{n-1}\sin x+x^n\cos x$。

证明：

$$\begin{aligned}\Delta(uv)&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\&=(u(x+\Delta x)-u(x))v(x+\Delta x)+u(x)(v(x+\Delta x)-v(x))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

两侧取极限得到：$\frac{d}{dx}(uv)=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u$

除法法则：

$$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

证明：

$$\begin{aligned}\Delta(\frac{u}{v})&=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v(u+\Delta u)-u(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)v}\\&=\frac{uv+v\Delta u-uv-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta(\frac{u}{v})}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{\Delta x}(v\Delta u-u\Delta v)}{(v+\Delta v)v}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}$$

两侧取极限得到：$\frac{d}{dx}(\frac{u}{v})=\frac{\frac{du}{dx}v-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

例 1：$f=u/v$，$u=1$

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{v})=\frac{0v-1v'}{v^2}=-v^{-2}v'$$

例 2：$f=u/v$，$u=1$，$v=x^n$ 其中 n 为正整数。

直接将前例的求导结果代入，用 x^n 替换 v：

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^n})=-(x^n)^{-2}(x^n)'=-x^{-2n}nx^{n-1}=-nx^{-n-1}$$

实际上证明了 $\frac{d}{dx}x^{-n}=(-n)x^{(-n)-1}$，其中 n 为正整数。对比本讲座开始时列出的公式可知，已将幂函数的求导公式扩展到负整数，即 $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$，$n=0$，±1，±2，±3......

链式法则

链式法则是一条合成规则，其要点在于代换。

例 1：$y=(\sin t)^{10}=\sin^{10}(t)$。

对于这种类型的函数，求导方法在于换元。令 $x=\sin t$，则有 $y=x^{10}$。

复合函数的求导符合链式法则：

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

两侧取极限 $\Delta t\to 0$：

$$\boxed{\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

所谓的链式法则就是，复合函数的微分为两个导数的乘积。

继续对例题进行求导，记 $x=\sin t$ 为内函数，而 $y=x^{10}$ 为外函数。

$$\frac{d}{dt}(\sin t)^{10}=10x^9\cos t=10(\sin t)^9\cos t$$

例 2：$\frac{d}{dt}\sin(10t)$

$x=10t$ 为内函数，而 $y=\sin x$ 为外函数。

$$\frac{d}{dt}\sin(10t)=\cos x\cdot 10=10\cos(10t)$$

熟练以后不用列出代换的函数，直接得到结果。

高阶导数

高阶导数就是不断求导，对一阶导数求导得到二阶导数，对二阶导数求导得到三阶导数。

$u=u(x)$，u'，$u''=(u')'$，$u'''=(u'')'$，$u^{(4)}=u''''=(u''')'$

例：$u=\sin x$，$u'=\cos x$，$u''=-\sin x$，$u'''=-\cos x$，$u^{(4)}=\sin x$

高阶导数也有莱伯尼兹表示法：

一阶导数$u'=\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}u=Du$

可以将$D=\frac{d}{dx}$视为一个运算符，将一个函数转化成为另一个函数。输入 sin$x$得到 cos$x$，输入x^2得到$2x$。

二阶导数$u''=\frac{d}{dx}\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}u=(\frac{d}{dx})^2u=\frac{d^2}{dx^2}u=\frac{d^2u}{dx^2}=D^2u$

三阶导数$u'''=\frac{d^3u}{dx^3}=D^3u$

例：$D^nx^n=?$

$$
\begin{aligned}
&Dx^n=nx^{n-1}\\
&D^2x^n=n(n-1)x^{n-2}\\
&D^3x^n=n(n-1)(n-2)x^{n-3}\\
&\ldots\ldots\\
&D^{n-1}x^n=n(n-1)(n-2)\ldots 2x\\
&D^nx^n=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1=n!
\end{aligned}
$$

取到 n+1 阶导数就是 0 了。

第 05 讲 隐函数微分法和反函数

Implicit Differentiation & Inverses

通过引入更巧妙的代数技巧来继续应用链式法则，扩展可求导函数的范围。

隐函数微分法

例 1：$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$。

到目前为止证明了 a 为整数的情况，$a=0$，±1，±2……今天要证明有理数的情况 $a=m/n$，其中 m 和 n 都是整数。

$y=x^{m/n}$ 等式两侧同时取 n 次方得 $y^n=x^m$，对等式两侧求微分，两侧都是整数次方幂，可以套用之前的公式。

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}y^n = \frac{d}{dx}x^m \\
&\Rightarrow (\frac{d}{dy}y^n)\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \\
&\Rightarrow ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{(x^{m/n})^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = ax^{a-1}
\end{aligned}$$

例 2：$x^2+y^2=1$。

这不是一个 y 的表达式，这是表现 x，y 关系的隐式。y 关于 x 的关系可以由它得到 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$。两者都成立，为方便表达取 $y=(1-x^2)^{1/2}$。

利用例 1 的结论可以求得 $y' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$，这就是所谓的"显式"（explicit）法。

用隐式法求解：对等式 $x^2+y^2=1$ 的两端求导。$2x+2yy'=0$。$y'=-x/y$。比较可知，与显式得到的结果相同。

有人提问为什么隐函数求导法给出的结果不会包括 y 取负的状态，实际上是包括的，在导数中代入 y 的表达式的时候，令 y 为正为负均可。

例 3：$y^4+xy^2-2=0$。

显式法：要首先求解 y 的表达式，将方程视为 y^2 的一元二次方程，引用求根公式得到 $y^2 = \frac{-x\pm\sqrt{x^2-4(-2)}}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{-x\pm\sqrt{x^2-4(-2)}}{2}}$ 对这种表达式求导非常麻烦。

隐式法：两侧求导，得：$4y^3y'+y^2+2xyy'-0=0 \Rightarrow y' = \frac{-y^2}{4y^3+2xy}$。从一个隐式开始微分，最后得到的也是一个隐式，而不是 y' 关于 x 的表达式。如果需要得到该表达

式，还是需要代入 y 的表达式。但是对于数值解，隐函数的优势很明显，例如本例中求曲线在 $x=1$，$y=1$ 点的导数值，则直接代入隐函数微分的结果即可得到 $y'=-1/6$。

反函数（逆函数）

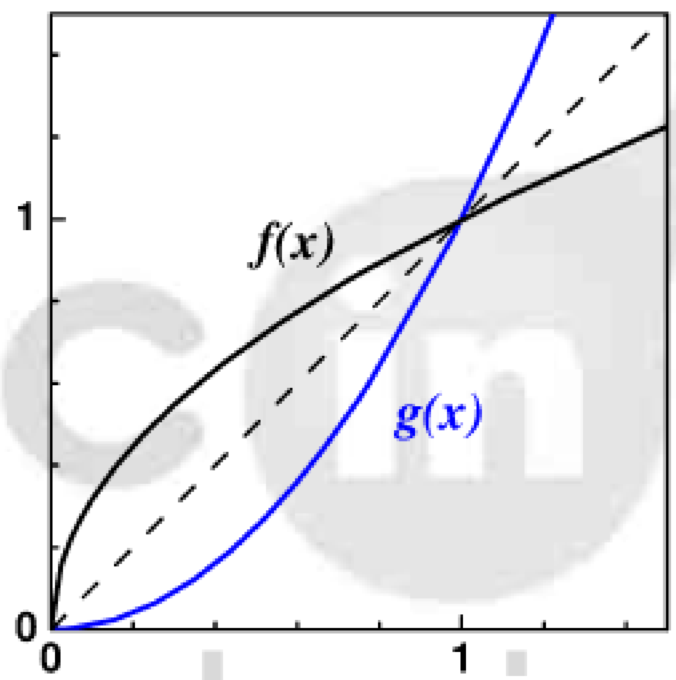
隐函数求导法的一个应用就是求反函数的导数值。

例：$y=\sqrt{x}$，$x>0$。

$y^2=x$。y 是 x 的函数 $y=f(x)$，则其反函数就是 $x=g(y)=y^2$。

通常而言，存在函数 $y=f(x)$，则其反函数 $g(y)=x$ 满足 $g(f(x))=x$，也将反函数记为 $g=f^{-1}$，或者 $f=g^{-1}$。

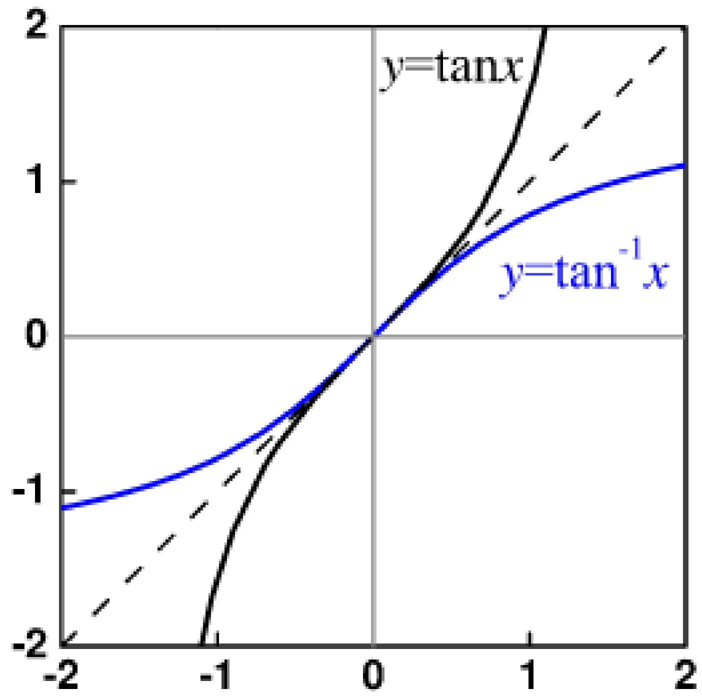
从 x-y 平面的图像上进行理解，已知 $f(x)$的图像，则 $g(y)$与其是同一条曲线。但是将 x 替代 y 得到表达式 $g(x)$，则其图像相当于 $f(x)$交换 x-y 轴的效果。即若 $f(x)$的图像包含(a,b)点，则 $g(x)$的图像包含(b,a)点，两个图像关于对角线 $y=x$ 对称。



只要知道原函数的导数，用隐函数微分法可以求导任意反函数。

例：$y=\tan^{-1}x=\arctan x$。

在等式两侧取正切，得 $\tan y=x$。



图不会像老师画的那样有多处交叉的。从后面的推导可以得到反正切函数的导数不可能大于 1，而正切函数的导数不会小于 1。因此在第一象限都从 0 点出发，

在定义域｛0，π/2｝之内，正切永远大于反正切。第三象限的情况正好相反，所以定义域内两函数没有其它交点。

$$\frac{d}{dy}\tan y=\frac{d}{dy}\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{1}{\cos^2 y}=\sec^2 y$$

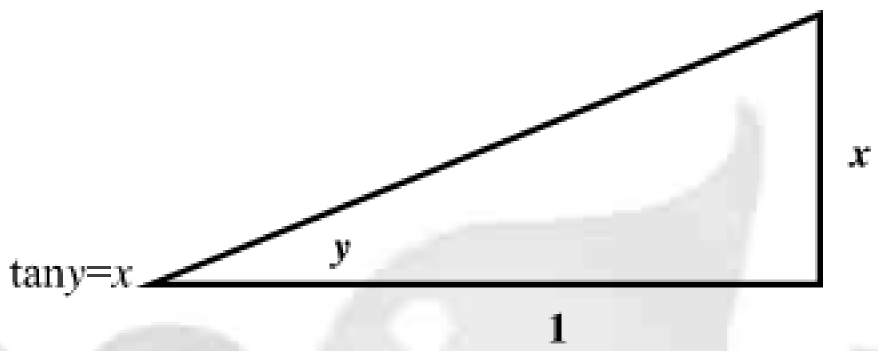
则有 $\frac{d}{dx}(\tan y=x)$ 其实我觉得等式两侧直接对 y 求导看起来更直观。

$$\Rightarrow(\frac{d}{dy}\tan y)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 y}y'=1$$

$$\Rightarrow y'=\cos^2 y$$

$\Rightarrow\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\cos^2(\tan^{-1}x)$ 太复杂，通过三角函数的关系化简。



由图形上可知 $\cos y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，则有 $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$

例：$y=\sin^{-1}x$。

$$\sin y=x$$

$$(\cos y)y'=1$$

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

得到 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

需要注意的是函数的取值范围。

第 06 讲 指数和对数

Exponential & Logarithms

首先从以 a>0 为底数的方幂开始：

$$a^0=1，a^1=a，a^2=a\times a;$$

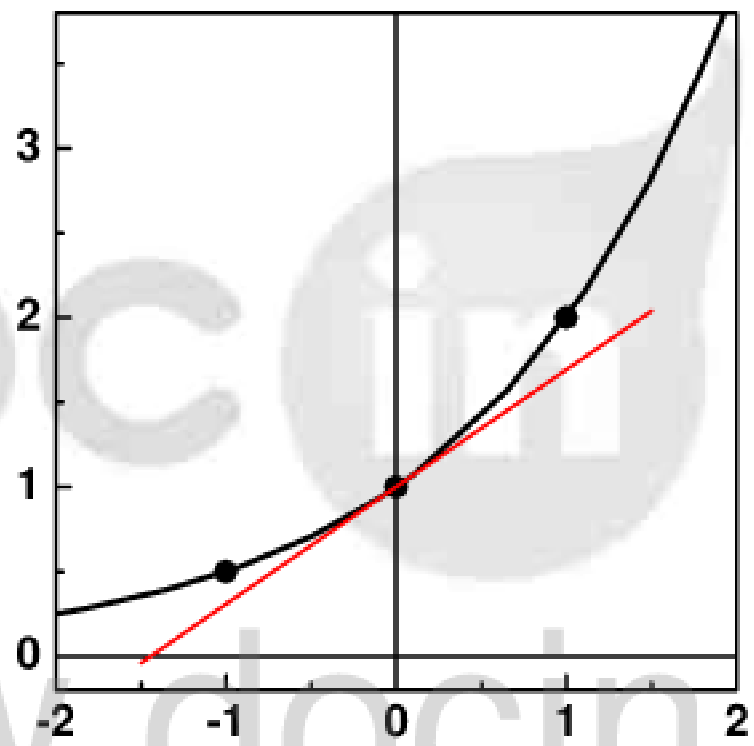
指数的运算规则：

$$a^{x_1+x_2}=a^{x_1}a^{x_2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$$

指数为有理数 m/n，则 $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$

通过上面的运算法则以插入数值的方式可以定义连续函数——指数函数 a^x（其中 x 为实数）。（插值的方式也是计算器求解开根号等指数运算的方式）



下面的目标是对指数函数求导 $\frac{d}{dx}a^x$

从定义出发进行推导：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

则有 $\frac{d}{dx}a^x=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$；

记 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=M(a)$，则有 $\frac{d}{dx}a^x=M(a)a^x$。

代入 x=0 可知 $\frac{d}{dx}a^x\Big|_{x=0}=M(a)a^0=M(a)$，因此 $M(a)$的几何解释实际上是 a^x 在 x=0 处的导数，即图中红线的斜率。由此可知一旦确定 $M(a)$，则我们可以描述 $\frac{d}{dx}a^x$ 所有的点。但是从已知的内容，我们无法确定图中的 $M(2)$。

定义常数 e，满足 $M(e)$=1。则有 $\frac{d}{dx}e^x\Big|_{x=0}=1$，$\frac{d}{dx}e^x=e^x$。

证明 e 的存在：

$f(x)=2^x$，$f'(x)=M(2)$；

将函数做 k 倍伸缩变换，用 kx 替换 x，得到 $f(kx)=2^{kx}=(2^k)^x=b^x$，其中 $b=2^k$。

$$\frac{d}{dx}b^x=\frac{d}{dx}f(kx)=kf'(x)$$

$$\left.\frac{d}{dx}b^x\right|_{x=0}=kf'(0)=kM(2)$$

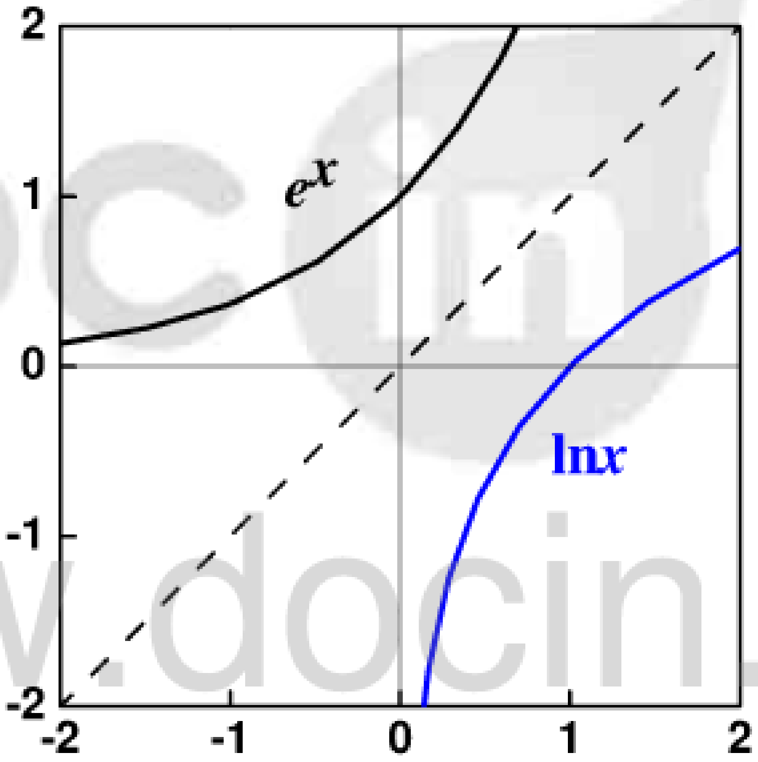
因此当 $k=1/M(2)$时，有 $b=e$。

证明了通过构造的方法可以得到一个在 $x=0$ 点导数为 1 的指数函数，该函数的底数就是 e，因此 e 是存在的。

引入自然对数 $w=\ln x$。其定义为 $y=e^x \Leftrightarrow \ln y=x$。

自然对数运算遵从对数运算法则：

$\ln(x_1+x_2)=\ln x_1+\ln x_2$；$\ln 1=0$；$\ln e=1$。



求解 $\frac{d}{dx}\ln^x$ 可以应用隐函数微分法。

$w=\ln x$，则有 $e^w=x$。两侧求导则有 $\frac{d}{dx}e^w=\frac{d}{dx}x=1$

$$\Rightarrow(\frac{d}{dw}e^w)(\frac{dw}{dx})=1$$

$$\Rightarrow e^w(\frac{dw}{dx})=1$$

$$\Rightarrow\frac{dw}{dx}=\frac{1}{e^w}=\frac{1}{x}$$

得到自然对数求导公式：

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}}$$

下面求导任意指数函数：

方法 1：$a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a}$

因此：$\dfrac{d}{dx}a^x=\dfrac{d}{dx}e^{x\ln a}=\ln a\cdot e^{x\ln a}=a^x\cdot\ln a$

得到指数函数的求导公式：

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}a^x=a^x\cdot\ln a}}$$

对比之前的公式可以得到 $M(a)=\ln a$。

例如：$\dfrac{d}{dx}2^x=\ln 2\cdot 2^x$，$\dfrac{d}{dx}10^x=\ln 10\cdot 10^x$

方法 2：对数微分法

$$\frac{d}{dx}\ln u=(\frac{d}{du}\ln u)\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

因此得到 $\boxed{(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}}$

$$u=a^x\text{时，}\frac{1}{u}\frac{d}{dx}u=\frac{d}{dx}\ln u=\ln a$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}u=u\ln a=a^x\ln a$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}a^x=a^x\cdot\ln a$$

对数微分法之例 2：$v=x^x$

$$\Rightarrow\ln v=x\ln x$$

$$\Rightarrow(\ln v)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{v'}{v}=1+\ln x$$

$$\Rightarrow v'=x^x(1+\ln x)$$

例 3：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$

$\ln((1+\dfrac{1}{n})^n)=n\ln(1+\dfrac{1}{n})$

记 $\Delta x=\dfrac{1}{n}\to 0$，则上式变为 $n\ln(1+\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{\Delta x}\ln(1+\Delta x)=\dfrac{1}{\Delta x}(\ln(1+\Delta x)-\ln(1))$

而这个式子取极限正是自然对数在 $x=1$ 点的导数 $\dfrac{d}{dx}\ln x\Big|_{x=1}=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=1}=1$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]=1$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]}=e$$

GS 有一篇讨论 e^x 的文章，有兴趣的朋友可以了解以下。

http://119.90.25.27/www-math.mit.edu/~gs/papers/Paper1_ver10.pdf

第 07 讲 复习一

Review for Exam 1

特定形式的指数：

上一讲证明了数列 $a_k=(1+\frac{1}{k})^k$ 满足 $\lim_{k\to\infty}a_k=e$。

证明思路为对指数函数取对数（当遇到指数函数时，首先想到取对数）。当 k 趋近于无穷时，$\ln a_k\to 1$。因此有 $a_k=e^{\ln a_k}=e^1=e$。

利用 e 底数法和对数微分法讨论 $\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-1}$ 对所有实数成立。

方法 1（e 底数法）：

$$x^r=(e^{\ln x})^r=e^{r\ln x}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}x^r=(e^{r\ln x})'=e^{r\ln x}(r\ln x)'=e^{r\ln x}r\frac{1}{x}=\frac{x^r}{x}r=x^{r-1}r$$

方法 2（对数微分法）：

令 $u=x^r$，则有 $\ln u=r\ln x$。

由对数微分法得 $\frac{u'}{u}=(\ln u)'=\frac{r}{x}$，因此 $u'=\frac{r}{x}u=\frac{r}{x}x^r=rx^{r-1}$

两种方法本质上是一样的。

自然对数是自然的。

在经济学中，某些绝对数字是没有意义的，有意义的是比率。例如，伦敦交易所指数 FTSE100 下降了 27.9，相对于总量，$\frac{\Delta p}{p}=\frac{27.9}{6432}\approx 0.43\%$。考虑无穷小时段内的下降比例则有 $\frac{p'}{p}=(\ln p)'$，因此经济学家经常用价格总数的自然对数来讨论价格曲线，使用其它的底数 2 或者 10 会带来附加因子 ln2 或者 ln10。

复习第一单元

通用求导法则：

$(cu)'=cu'$

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+v'u$

$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$\frac{d}{dx}f(u)=f'(u)u'(x)$

隐函数微分法（反函数，对数微分法）

特殊函数求导：

$x^{r}, \sin x, \cos x, \tan x, \sec x$

$e^{x}, \ln x$

$\arctan x, \arcsin x$

链式法则附加内容：

$y = 10x + b$ 则有 $\frac{dy}{dx}$=10。

$x = 5t + a$ 则有 $\frac{dx}{dt}$=5。

y 的改变是 x 的 10 倍，而 x 的改变是 t 的 5 倍，则 y 的改变是 t 的 50 倍。采用代入法为 $y = 10(5t + a) + b = 50t + 10a + b$。则有 $\frac{dy}{dt}$=$10 \cdot 5 = 50$。此例简要解释了为什么比率是相乘的关系。

用链式法则处理除法的求导公式。

$$(\frac{1}{v})' = (v^{-1})' = -v^{-2} \cdot v'$$

同样地完整的除法求导公式可以看做链式法则和求导乘法法则的结合：

$$(\frac{u}{v})' = (uv^{-1})' = u'v^{-1} + u(-v^{-2} \cdot v') = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

练习 1

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}(\cos x)^{-1} = -(\cos x)^{-2}(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$$

练习 2

$$\frac{d}{dx}\ln(\sec x) = \frac{(\sec x)'}{\sec x} = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x$$

练习 3

$$\frac{d}{dx}(x^{10} + 8x)^6 = 6(x^{10} + 8x)^5(10x^9 + 8)$$

练习 4

$$\frac{d}{dx}e^{x\tan^{-1}x} = e^{x\tan^{-1}x}\frac{d}{dx}(x\tan^{-1}x) = e^{x\tan^{-1}x}(\tan^{-1}x + \frac{x}{1+x^2})$$

第一单元的知识点还包括：

1）导数的定义，也就是导数的意义。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

在求导过程中应用了导数定义的例子包括：$1/x$，x^n，$\sin x$，$\cos x$，a^x，uv，u/v。

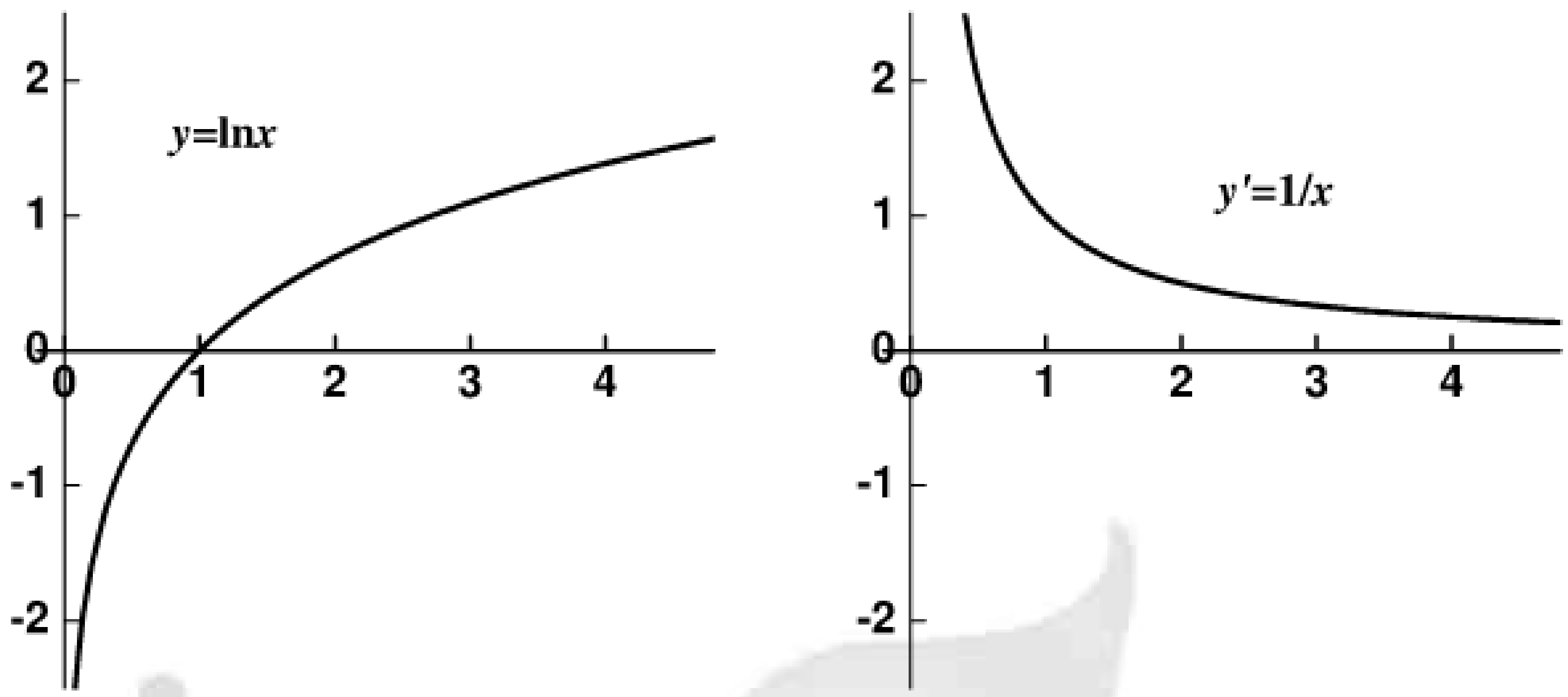
2）逆向使用公式

某个差商的极限可以是一个导数值。$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$。

例如$\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = \frac{d}{du} e^u \Big|_{u=0} = 1$

3）隐函数微分法求导公式：$\sin^{-1} x$，$\ln x$……

4）求取切线；画出导函数图像；函数可微则左右两端斜率相等。



回答提问求解$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x$

$\Rightarrow \tan y = x$，两侧取导数得到$(\sec^2 y)\, y' = 1$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$