Теория информации

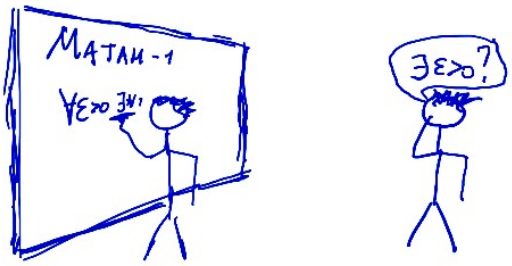
На этой неделе мы рассмотрим основы теории информации, которая напрямую адресует вопрос о том, что такое информация, как её измерять и какое отношение информация имеет к вероятности и статистике.

2.1 Передача информации

Пока неформально определим, что информация – это факт некоторого события, которое описывается случайной величиной или набором случайных величин. Об этом событии (реализации случайных величин) можно кому-то рассказать, тем самым совершив передачу информации. Если мы начинаем задумываться о том, как именно *рассказывается*, то мы приходим к огромному числу сценариев, которые, тем не менее, все объединяются схемой ниже.

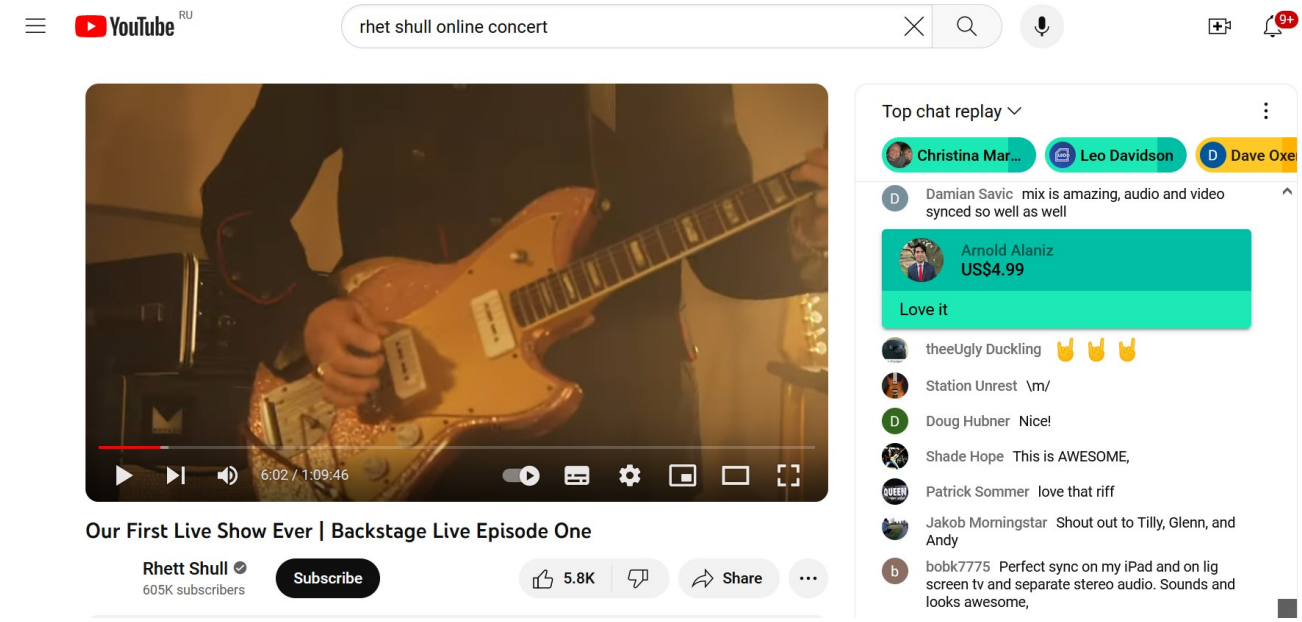
Попробуем на примере понять, за что отвечает каждое звено этой схемы.

Пример 2.1. *Лектор на паре пытается дать определение предела последовательности. Источником является он сам, он сам же кодирует информацию путём слов, жестов и выражений лица. Среда передачи – пространство аудитории, в котором есть своя искажающая акустика, из-за которой, например, без усиления лектора будет очень плохо слышно на верхних рядах. Слушатели могут быть заняты своими делами в ноутбуке и минимальное внимание уделять лектору. Так сами слушатели декодируют искажённый сигнал, возможно, иногда не распознавая его в точности так, как планировалось.*



Есть и более сложные примеры.

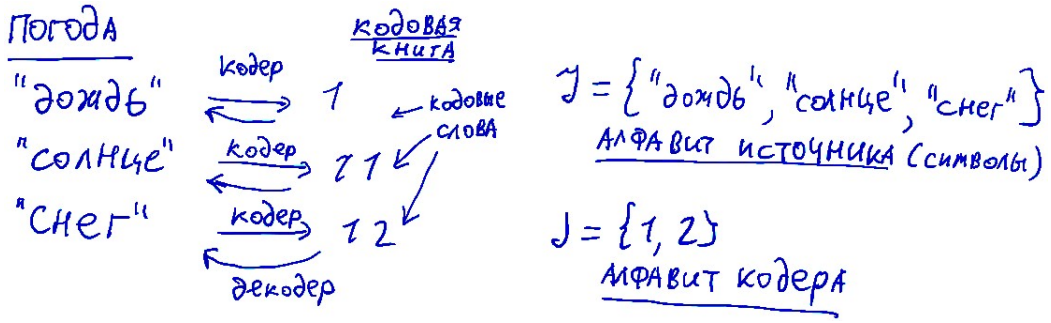
Пример 2.2. *Стрим концерта на YouTube (вот интересный случай из ковидного времени), который показывает концерт в подвале на широкую аудиторию онлайн-сервиса. Источником выступает музыкальный коллектив. Кодер представлен техническим стеком (видеозапись, микшер, обработка сигнала, эффекты...) и некоторым программным пакетом (конкретно здесь – OBS), который собирает видео и аудиосигнал, кодирует их специальным образом и пересылает на YouTube, используя ID трансляции. Канал передачи – сеть Интернет и сам YouTube. Декодером выступает браузер пользователя, который принимает видео- и аудиопоток с YouTube и воспроизводит на экране монитора и в наушниках пользователя, который является адресатом.*



В доковидное время этот же пользователь в теории мог бы просто прийти на концерт, тогда среды передачи почти нет (звуковые волны имеют механическую природу), кодер остаётся тем же, а декодер – аудиосистема концертной площадки.

В этой лекции мы главным образом будем изучать источник, возможности кодера и декодера, и попробуем понять, что можно сказать о возможностях передачи информации при самых незначительных предположениях о деталях.

2.2 Кодирование



Кодер – это некоторый механизм, преобразующий информацию в виде символов (представляющих события в широком смысле) в кодовые последовательности, а *декодер* – наоборот. Мы будем рассматривать случай, когда символов конечное число, то есть мы хотели бы уметь кодировать и декодировать конечное число m различных событий, представленных цифрами $I = \{0, .., m-1\}$ и называемых *алфавитом источника.*

Кодовые последовательности состоят из q различных кодовых знаков из специального *алфавита кодера* $J = \{0, .., q-1\}$. Очень часто $J = \{0, 1\}$, такой алфавит называется двоичным. *Код* – это отображение f, которое переводит символ u из алфавита источника в *кодовое слово* $x_1x_2..x_t$. Набор всех кодовых слов называют ещё кодовой книгой.

Вообще, мы можем как угодно строить код, коль скоро его можно однозначно декодировать. Если код – инъекция, то его называют *кодом без потерь*, а если ни одно кодовое слово не является префиксом другого, то код называется *беспрефиксным*; такой допускает однозначное декодирование, но в обратную сторону это утверждение неверно (можно рассмотреть кодовую книгу из $0, 01, 011$).

Оказывается, что для таких кодов верен по-настоящему сильный факт, который связывает длины кодовых слов и размер алфавита.

Теорема 2.1. *(Неравенство Крафта) Для данных натуральных чисел $s_1, .., s_m$ декодируемый код f с кодовыми словами длин $s_1, .., s_m$ существует тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{m} q^{-s_i} \leq 1.$$

Дополнительно, если это неравенство выполнено, то существует беспрефиксный код с этими длинами кодовых слов.

Важно, что теорема говорит только о существовании кода с заданными длинами, но не об его единственности; кроме того, если один конкретный код подчиняется неравенству, то он не обязательно декодируемый, хотя нам гарантируется, что какой-то (другой) беспрефиксный код можно построить. Мы не будем доказывать это неравенство для экономии времени, но если интересно, то это несложно и детали можно посмотреть в [11, Гл. 1.1].

Вопрос состоит в том, насколько короткие кодовые слова можно подобрать, если мы обладаем дополнительными сведениями об источнике? Для этого предположим, что источник таков, что вероятность получить символ j составляет p_j. Такие предположения вполне реалистичны: например, широко известны таблицы частот слов и символов для текстов различных типов на различных языках. Зная, что какие-то символы чаще, мы можем попробовать в среднем сэкономить на длине кодовых слов.

2.3 Энтропия и оптимальность кода

Если имеем код с известными длинами s_j кодовых слов, символ можно напрямую связать с кодовым словом, сказав, что вероятность символа p_j – это вероятность j-го кодового слова; так мы можем определить среднюю длину случайного кодового слова S как

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{j=1}^{m} p_j s_j.$$

Мы хотели бы декодируемый код, обладающий минимальной средней длиной кодового слова. С помощью неравенства Крафта задачу поиска длин оптимального кода можно формализовать:

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать } \mathbb{E}[S] \text{ по длинам } s_1, .., s_m \\ &\text{при условии } \sum_i q^{-s_i} \leq 1. \end{aligned}$$

Кроме того, в оптимальном решении можно оценить среднюю длину кодовых слов, которое задаёт ключевое ограничение в теории информации.

Теорема 2.2. *Для оптимального решения верно*

$$\min \mathbb{E}[S] \geq H_q(p_1, .., p_m),$$

где

$$H_q(p_1, .., p_m) = -\sum_i p_i \log_q p_i$$

называется энтропией дискретного распределения (p_i).

▷ Ограничения в дискретной задаче можно ослабить, позволив нецелые s_i, а затем применить метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа после введения фиктивной переменной $t \geq 0$ (чтобы избавиться от неравенства) будет равна

$$L(s; \lambda, t) = \sum_i s_i p_i + \lambda \left(1 - \sum_i q^{-s_i} - t\right).$$

Взяв производные по s_i

$$\partial_{s_i} L = p_i + \lambda q^{-s_i} \ln q$$

и приравняв к нулю, получим, что

$$s_i = -\log_q p_i + \log_q(-\lambda \ln q).$$

Продифференцировав по другим параметрам, увидим, что $\lambda < 0, t = 0$. Подставим решение в ограничение:

$$\sum_i \frac{p_i}{-\lambda \ln q} = 1,$$

что даёт $-\lambda \ln q = 1$ и для релаксированной задачи

$$s_i = -\log_q p_i$$

является оптимальным решением. □

Таким образом, энтропия выступает естественным порогом для оптимальности кодирования на самом базовом уровне. Важно отметить, что q-ичная энтропия H_q – это не безразмерная величина: она измеряется в q-ичных битах, а если $q = e$, то в натах, – и связана напрямую с длиной кодовых слов в оптимальном коде. Оказывается, что есть и близкая верхняя оценка.

Теорема 2.3. *(Шеннон) Для минимальной средней длины кодового слова верно*

$$H_q(p) \leq \min \mathbb{E}[S] \leq H_q(p) + 1.$$

▷ Для верхней оценки нам нужно построить набор длин кодовых слов. Например, можем всегда подобрать s_i так, чтобы

$$q^{-s_i} \leq p_i \leq q^{-s_i+1}.$$

Просуммировав неравенство слева, получим неравенство Крафта

$$\sum_i q^{-s_i} \leq 1,$$

то есть, есть декодируемый код с такими длинами. Правое неравенство утверждает, что

$$s_i \leq -\log_q p_i + 1$$

и

$$\mathbb{E}[S] \leq H_q(p) + 1.$$

□

Отсюда идёт частое сопоставление энтропии со средней длиной оптимального кода.

2.4 Кросс-энтропия и метод максимльного правдоподобия

Если мы рассмотрим два кодера с разными кодами, то можно ли понять, как дорого происходит между ними трансфер информации? В контексте языка это означает буквально следующее: если есть сообщение на одном языке в своей среде, то насколько в этой же среде оно вырастет при переводе на другой язык при условии оптимального перевода? Такой перевод можно сделать, переведя сообщение на коде 1 на естественный язык символов, а потом снова закодировав последовательность символов кодом 2.

2.4.1 Кросс-энтропия и KL-дивергенция

На этот вопрос отвечает *кросс-энтропия*, которая определяется для двух вероятностных распределений p, w, имеющих одинаковый носитель, как

$$CE(p|w) = -\sum_i p_i \log_q w_i,$$

при этом она несимметрична и читается как *кросс-энтропия из w в p*. Представим себе, что язык p изначально построен оптимально, то есть, реальные символы действительно обладают вероятностями p. Язык w строился в другом предположении, что сообщения обладают вероятностями w. И вот мы, уроженцы страны W и говорящие на w, оказываемся в стране P, где мир вероятностно устроен по-другому. Язык w станет избыточным – в мире P средняя длина кодовых слов будет выше.

Разница при переходе в мир, где код неоптимальный, занимает особое место и называется дивергенцией *Кульбака-Лейблера* или *KL-дивергенцией*

$$D_{KL}(p|w) = CE(p|w) - H(p).$$

Можно также переписать это определение в форме

$$D_{KL}(w|p) = -\sum_i p_i \log_q \frac{w_i}{p_i}.$$

По своему смыслу KL-дивергенция неотрицательна, это следует из нашей интуиции с оптимальностью выше. Это можно показать формально, используя школьное неравенство

$$\log_q x \leq \frac{x-1}{\ln q}.$$

Теорема 2.4. *(Неравенство Гиббса) Пусть p, w – два вероятностных распределения на одном и том же конечном множестве. Тогда для любого q верно*

$$\sum_i p_i \log_q \frac{w_i}{p_i} \leq 0,$$

при этом полагается $0 \log_q 0 = 0$ и $p \log_q 0 = -\infty$.

▷ Не теряя общности рассмотрим случай $q = e$. Положим, что все $p_i > 0$; иначе они дадут $0 \ln \infty = 0$ в силу асимптотики при $p \to 0$. Ключевая идея – использовать школьное неравенство, которое даёт

$$\sum_{i=0}^{m-1} p_i \ln \frac{w_i}{p_i} \leq \sum_{i=0}^{m-1} p_i \left(\frac{w_i}{p_i} - 1 \right) = \sum_{i=0}^{m-1} w_i - 1 \leq 0.$$

□

Да, KL-дивергенция может быть бесконечной.

2.4.2 Непрерывные аналоги энтропии

Мы рассматривали энтропию для дискретных распределений, можно определить её по аналогии в более общем случае. Для наглядности мы попробуем ввести определения для случая p, w – абсолютно непрерывных распределений, то есть, таких, которые обладают плотностью.

Дифференциальная энтропия – аналог энтропии в непрерывном случае – задаётся как

$$H_q(p) = -\int_{\mathbb{R}} p(x) \log_q p(x) dx.$$

Далее, кроссэнтропия и KL-дивергенция вводятся точно так же, требуется только то, чтобы вводимые интегралы были хорошо определены:

$$CE(p|w) = -\int_{\mathbb{R}} p(x) \log_q w(x) dx, \quad D_{KL}(p|w) = -\int_{\mathbb{R}} p(x) \log_q \frac{w(x)}{p(x)} dx.$$

Можно достаточно быстро заметить, что дифференциальная энтропия и кроссэнтропия уже не имеют физического смысла, связанного с информацией, потому что они могут быть отрицательными. Несмотря на это, KL-дивергенция всё ещё остаётся неотрицательной и является одним из важных способов сравнивать распределения, которым пользуются во многих областях современной статистики и в байесовских методах.

2.4.3 Метод максимального правдоподобия

Давайте вернёмся на неделю назад и вспомним метод максимального правдоподобия. Нам дана выборка $X_1, .., X_n$, которую кратко мы обозначим за X; мы предполагаем, что она пришла из распределения p_θ. Для оценки параметров θ предлагалось с b максимизировать лог-правдоподобие

$$l(\theta, X) = \ln p_\theta(X).$$

Положим, настоящий параметр равен θ_0 (но мы его не знаем). Тогда получается, что выборка пришла из распределения p_{θ_0}, а если мы могли бы взять матожидание по X_1, то внезапно видим, что

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[l(\theta, X_1)\right] = -CE(p_{\theta_0}|p_\theta).$$

В этом смысле метод максимального правдоподобия имеет чёткую информационную интерпретацию: он подгоняет такое распределение, которое бы давало примерно оптимальное кодирование информации. Но в силу того, что θ_0 нам неизвестно, мы пользуемся тем, что есть, и пытаемся в случае выборки независимых наблюдений аппроксимировать эту высокую цель более достижимой

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[l(\theta, X)\right] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l(\theta, x_i),$$

где справа просто применена оценка Монте-Карло. Мы можем посмотреть на это ещё с другой стороны:

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[l(\theta, X)\right] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{\theta_0}\left[l(\theta, X_i)|X_i = x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l(\theta, x_i).$$

Такой взгляд тоже достаточно естественен: мы берём условное матожидание при условии того, что известно, то есть, при условии данной выборки, а по всему остальному усредняем. К этой идее мы ещё вернёмся.

Литература

[1] Peter C Austin, Muhammad M Mamdani, David N Juurlink, and Janet E Hux. Testing multiple statistical hypotheses resulted in spurious associations: a study of astrological signs and health. *J Clin Epidemiol*, 59(9):964–969, July 2006.

[2] Erika Cule, Paolo Vineis, and Maria De Iorio. Significance testing in ridge regression for genetic data. *BMC Bioinformatics*, 12(1):372, Sep 2011.

[3] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39(1):1–38, 1977.

[4] B. Efron. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):1–26, 1979.

[5] R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35–45, 03 1960.

[6] S.J. Levitt, S.D. Dubner. *Freakonomics*. NY: Harper Trophy, 2006.

[7] Richard Lockhart, Jonathan Taylor, Ryan J. Tibshirani, and Robert Tibshirani. A significance test for the lasso. *The Annals of Statistics*, 42(2):413–468, 2014.

[8] J. Scott Long and Laurie H. Ervin. Using heteroscedasticity consistent standard errors in the linear regression model. *The American Statistician*, 54(3):217–224, 2000.

[9] Halbert White. A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48(4):817–838, 1980.

[10] Платонов Е.Н. Горяинова Е.Р., Панков А.Р. *Прикладные методы анализа статистических данных*. Изд. дом Высшей школы экономики, 2012.

[11] Ю.М. Кельберт, М.Я. Сухов. *Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т.3: теория информации и кодирования*. М.: МЦНМО, 2013.