Эконометрика: предположения

В этой лекции мы разберём в общем, как можно проверять предположения линейной регрессии.

7.1 Вспомним предположения

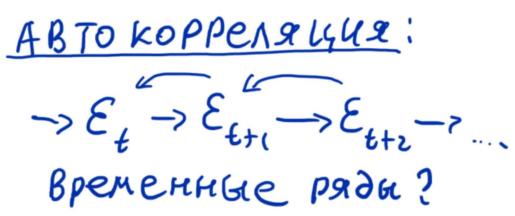
Давайте вспомним предположения Гаусса-Маркова, они же предположения линейной регрессии, которая в сокращённом виде записывается как

$$Y = X\theta + \varepsilon, \quad \theta \in \mathbb{R}^k, \quad X \in \mathbb{R}^{n\times k}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^n.$$

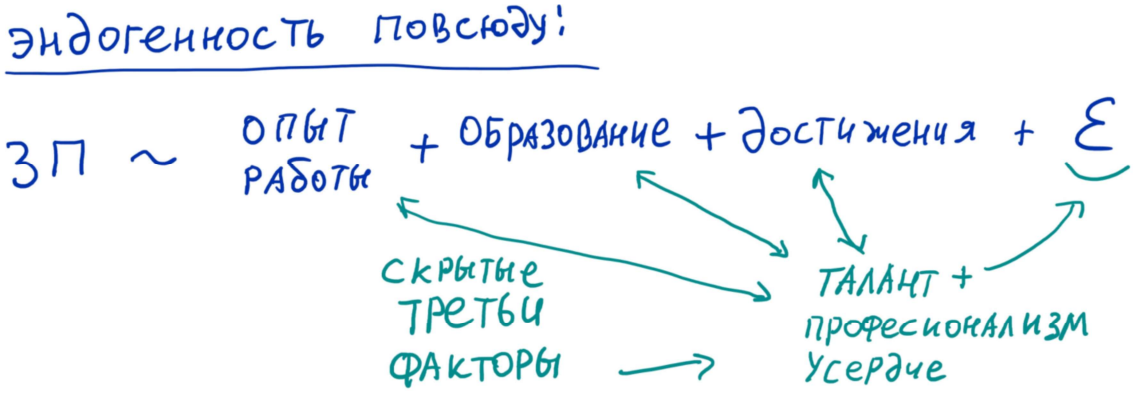
1. Модель корректна: все признаки, влияющие на Y учтены;
2. X детерминирована и колонки линейно независимы;
3. ε_i независимы в совокупности и одинаково распределены, не зависят от наблюдений X_i, имеют нулевое матожидание и одинаковую дисперсию σ^2.

Эти предположения могут нарушаться, в реальности так и происходит.

1. Модель *неидентифицирована* (не все факторы учтены) – это крайне сложно проверить и обычно модель строится из каких-то практических соображений, опыта и экспертных мыслей (например, со знанием макроэкономики или финансовой математики). Часто нужно обратиться к теории за идеями о том, какие признаки включать в модель. Для проверки полноты модели можно использовать R^2, если выполнены другие предположения регрессии.
2. Если колонки в X линейно зависимы или число обусловленности матрицы X^TX очень большое (столбцы примерно линейно зависимы), то это называют проблемой *мультиколлинеарности*.
3. Остатки ε_i могут быть коррелированы (*автокорреляция*).



4. Остатки ε_i могут быть зависимы от $X_{i\cdot}$ (*эндогенность*) в силу различных факторов. Например, дисперсия зарплат выше у людей с более высоким уровнем образования, цены на квартиры сильнее колеблются в районе малых площадей и так далее.



5. Очень близкая и пересекающаяся с предыдущей – проблема *гетероскедастичности* (разной дисперсии остатков), случай с одинаковой дисперсией остатков называется *гомоскедастичностью* и для проверки этой проблемы существуют специальные тесты на гомоскедастичность.

Про то, как эти проблемы можно решать, мы поговорим в следующий раз, а сейчас посмотрим, как можно детектировать эти проблемы с помощью статистических критериев.

7.2 Проверка некоррелированности остатков

В эконометрике много внимания уделяется автокорреляции, здесь для краткости мы рассмотрим один классический критерий, но который применяется почти всегда, и один более общий.

7.2.1 Критерий Дарбина-Уотсона

Предположим, что мы применили метод наименьших квадратов и получили оценку $\hat{\theta}$ и оценки остатков

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - X_{t\cdot}\hat{\theta}.$$

Наша задача теперь состоит в том, чтобы понять, что за последовательность остатков получилась. Один из вариантов – попробовать смоделировать остатки с помощью авторегрессии

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t,$$

где η_t – последовательность независимых и одинаково распределённых нормальных шумов с нулевым средним и одинаковой дисперсией. Оказывается, что мы можем по имеющимся данным проверить гипотезу

$$H_0 : \rho = 0, \quad H_A : \rho \neq 0.$$

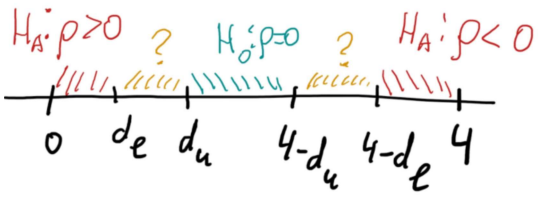
Если принимается гипотеза, то зависимости шумов типа авторегрессии нет, а если гипотеза отвергается, то в шумах есть автокорреляция и её можно убрать, совершив преобразование исходных данных. Данную гипотезу проверяет *критерий Дарбина-Уотсона*, имеющий статистику

$$T = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}$$

с табличным распределением при верной гипотезе. Эта статистика, как оказывается, принимает значения от 0 до 4 и критерий имеет одну особенность: у него есть зоны неопределённости, то есть, те значения статистики, где невозможно склониться ни к H_0, ни к H_A.

Подробнее, решение после выбора двух квантилей d_l, d_u принимается так:

1. $T \in (0, d_l)$, гипотеза отвергается, принимается $H_A : \rho > 0$;
2. $T \in (d_l, d_u)$, гипотеза не отвергается и не принимается;
3. $T \in (d_u, 4 - d_u)$, гипотеза принимается;
4. $T \in (4 - d_u, 4 - d_l)$, гипотеза не отвергается и не принимается;
5. $T \in (4 - d_l, 4)$, гипотеза отвергается, принимается $H_A : \rho < 0$.



Может показаться, что тест проверяет корреляционную структуру слишком простого вида и что зависит сильно от порядка наблюдений, но это не совсем так. Если *настоящий* порядок наблюдений в структуре корреляций отличается от того, который получился, то в тестовой статистике всё равно соседние наблюдения будут скоррелированы в силу того, как устроен процесс авторегрессии.

Пример 7.1. *Для процесса авторегрессии $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t$, где η_t – независимые и одинаково распределённые с дисперсией σ^2 и нулевым матожиданием, вычислите корреляцию между ε_t и ε_{t-k}. Она убывает с ростом k со скоростью геометрической прогрессии. Если же зависимость более общая*

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{p} \rho_i \varepsilon_{t-i} + \eta_t,$$

то критерием Дарбина-Уотсона она тоже уловится. Есть, правда, тонкость с зависимостями вроде

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-k} + \eta_t,$$

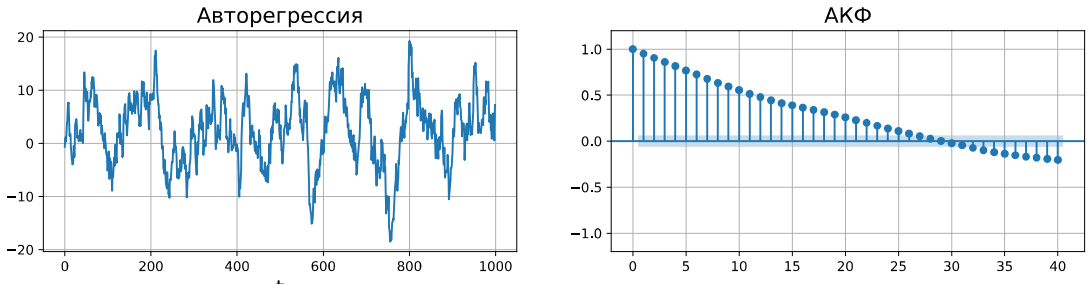
но такие случаи обычно обозначают некоторую сезонность в данных, которую можно отследить другими средствами (например, с помощью автокорреляционной функции).

Если $\rho = 1$, то значение статистики будет близко к нулю; если же $\rho = -1$, то статистика близка к 4. Поэтому критерий отвергает гипотезу, когда значения слишком маленькие или слишком большие. Наличие областей неопределённости можно неформально связать с тем, что сама статистика положительна, а в зонах неопределённости неясно, положительное ρ, отрицательное, или же вообще 0. Таблицу проверки выше можно использовать и для односторонних альтернатив $H_A : \rho > 0$ и $H_A : \rho < 0$, если скорректировать уровень значимости квантилей.

7.2.2 Критерий Льюнга-Бокса и Бокса-Пирса

Вместо того, чтобы рассматривать корреляцию на один шаг, можно добавлять больше, но в авторегрессии это технически сложнее. Можно подойти со стороны автокорреляционной функции (АКФ)

$$\rho_p = corr(\varepsilon_{t+p}, \varepsilon_t).$$



Критерий *Льюнга-Бокса* использует выборочную АКФ $\hat{\rho}_k$, где просто вместо точной корреляции подставляется выборочная, подсчитанная по данным, и проверяет

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_p = 0, \quad H_A : \exists \rho_j \neq 0.$$

Статистика критерия

$$T = n(n+2) \sum_{j=1}^{p} \frac{\hat{\rho}_j^2}{n-j}.$$

имеет асимптотическое распределение $\chi^2(p)$. Приближённой версией этого критерия является критерий *Бокса-Пирса*, который имеет похожую статистику

$$T = n \sum_{j=1}^{k} \hat{\rho}_j^2.$$

с тем же асимптотическим распределением, но критерий Льюнга-Бокса оказывается ближе к распределению хи-квадрат.

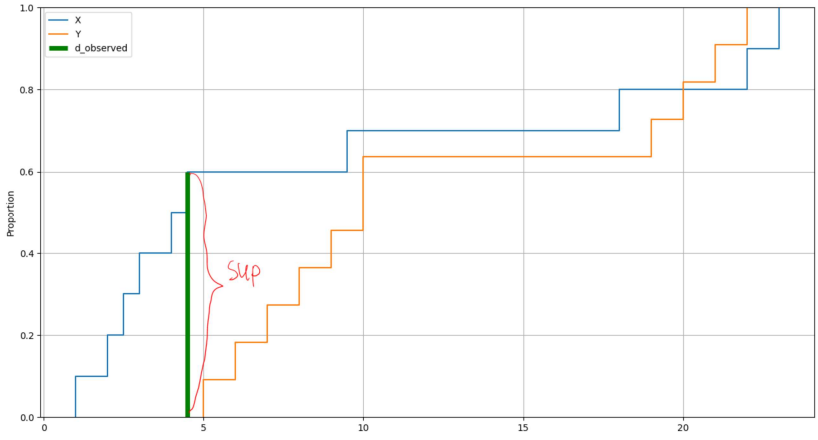
Важно заметить, что в отличие от критерия Дарбина-Уотсона эти критерии асимптотические и требуют много данных. Обычно не проверяют корреляций очень высоких порядков, но нужно понимать также, что в высоких порядках выборочные оценки корреляции сильно затрудняются из-за ограниченности выборки. Данные критерии и многие похожие особенно развиты в области временных рядов, где подобные модели автокорреляции занимают особое место.

7.3 Проверка гауссовости

Если мы уже приняли решение о том, что, вероятно, остатки $\varepsilon_1, .., \varepsilon_n$ некоррелированы, то чтобы пользоваться классическими критериями для параметров линейной регрессии нужно либо много данных, чтобы использовать асимптотические критерии, либо проверить гауссовость остатков, чтобы убедиться, что можно использовать критерии для регрессии с гауссовскими остатками.

Важно помнить, что, как мы в какой-то момент упоминали, критерии согласия проверяют гипотезу против очень общей альтернативы и для получения достаточной мощности критерия нужно набрать достаточно большую выборку.

7.3.1 Критерий Колмогорова



Для проверки гипотезы о распределении у нас есть критерии согласия и главный из них – это критерий Колмогорова и похожие на него. Критерий Колмогорова (его называют также *k-тестом*) используется для проверки гипотезы о распределении для выборки из непрерывных случайных величин, конкретнее, проверяем

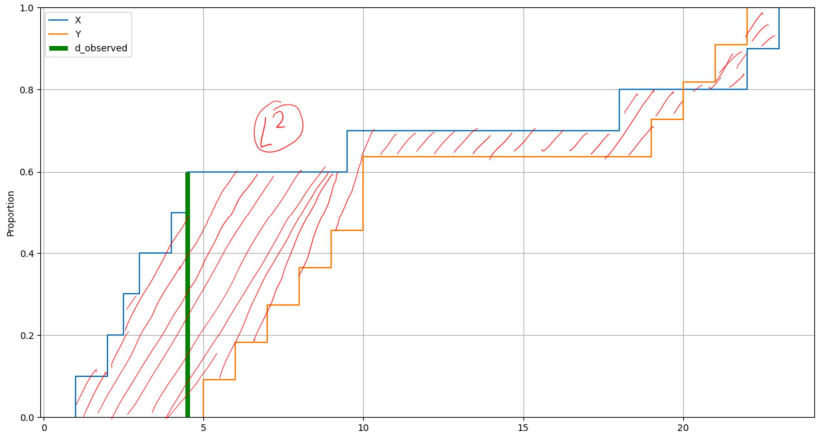
$$H_0 : \forall x \;\; F(x) = F_0(x), \quad H_A : F(x) \neq F_0(x),$$

альтернатива здесь максимально общая. Критерий Колмогорова смотрит на максимальное расстояние между гипотетической и эмпирической функцией распределения, его статистика

$$T = \sqrt{n} \sup_x |F_0(x) - \hat{F}(x)|$$

имеет распределение Колмогорова и критическая область расположена правее квантили $k_{1-\alpha}$ – большая разность говорит скорее о разных распределениях.

7.3.2 Критерии Крамера-Мизеса и Андерсона-Дарлинга



Другой интересной идеей оказывается посмотреть не на супремум, а на L^2 расстояние, то есть, на площадь разности $\hat{F}(x) - F_0(x)$. Общий подход к построению таких критериев – построить статистику типа

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(F_0(x)) \left(F_0(x) - \hat{F}(x)\right)^2 f_0(x) dx,$$

где $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – это весовая функция, которая помогает лучше учесть особенности распределения. Например, можно детальнее смотреть в середину, можно смотреть в целом на всё одинаково, а можно основное внимание уделять хвостам распределения.

Мы всё так же проверяем

$$H_0 : \forall x \;\; F(x) = F_0(x), \quad H_A : F(x) \neq F_0(x),$$

и первый критерий основан на идее статистики

$$T = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \left(F_0(x) - \hat{F}(x)\right)^2 f_0(x)dx,$$

и называется критерием *Крамера-Мизеса*. Как видно, весовая функция у этого критерия равна единице, то есть, он в равной степени учитывает разницу по всей прямой. У этой статистики, которая выражается суммой

$$T = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i-1}{2n} - F_0(X_i)\right)^2.$$

Критерий Андерсона-Дарлинга похожий и имеет статистику

$$T = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{F_0(x)(1-F_0(x))} \left(F_0(x) - \hat{F}(x)\right)^2 f_0(x)dx,$$

увеличивающую вес ошибки по мере приближения к краям, тем самым лучше анализируя разницу на хвостах распределения. Значение статистики вычисляют как

$$T = -n - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n} \ln \frac{F(X_i)}{1 - F(X_{n+1-i})}.$$

Оба критерия имеют критическую область справа от квантили $q_{1-\alpha}$, сами квантили берутся из достаточно сложных распределений, подсчитанных исходя из того, что $F_0^{-1}(X_i)$ имеет равномерное распределение. Там задействована даже теория случайных процессов. Подробнее можно узнать, например, в [1]. К счастью, оба критерия уже имеют устоявшуюся имплементацию и есть в готовом виде, например, в statsmodels.

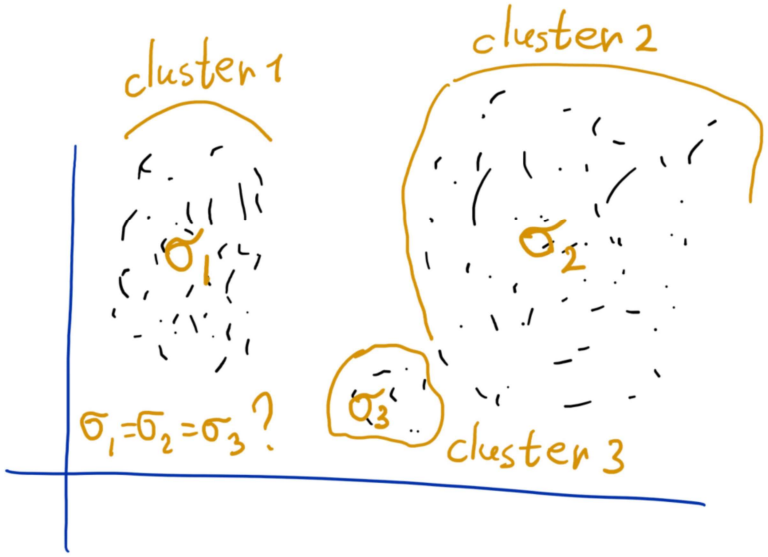
7.4 Проверка гомоскедастичности

Прежде всего заметим, что просто проверить общую гипотезу о ковариационной матрице остатков невозможно без дополнительных предположений о её структуре – остатков n, а различных элементов в матрице $n(n+1)/2$. Всё же, если мы проверили некоррелированность, то задача становится проще, теперь там интересны ковариационные матрицы остатков вида

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

Однако и здесь мы не можем оценить σ_i^2, так как их n штук, столько же, сколько и данных. При дополнительных предположениях, многие из которых пришли из практических приложений эконометрики, возможно построить частично такую оценку и скорректировать оценку метода наименьших квадратов. Об этом позже.

Для проверки гипотез сложности похожи, но если мы приняли предположение о некоррелированности, то для сравнения σ_i между собой уже можно построить статистический критерий при дополнительных структурных предположениях. Такие критерии называются тестами на гетероскедастичность или на гомоскедастичность.



Проверяем гипотезу

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_r^2, \quad H_A : \exists i, j \ \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2.$$

для построения теста нужно предположить дополнительную структуру. В *критерии Бартлетта* предполагается, что есть r различных дисперсий в различных областях пространства объясняющих переменных (например, разная дисперсия цены квартиры для разных категорий площади). Исходя из этого выборку делят на r кластеров (часто из чисто практических соображений), наследуя кластерную структуру из пространства объясняющих переменных, затем внутри каждого оценивают дисперсию остатков $\hat{\sigma_i}^2$ далее оценивают Q-статистику Бартлетта Q/l, вычисляя

$$Q = n \ln \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{n} \hat{\sigma}_i^2 \right) - \sum_{i=1}^{r} n_i \ln \hat{\sigma}_i^2, \quad l = 1 + \frac{1}{3(r-1)} \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n} \right).$$

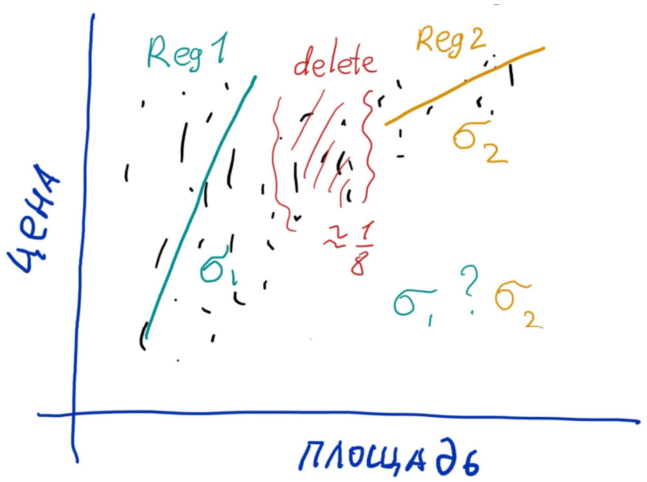
Известно, что в предположении близости выборки к нормальному распределению и верной гипотезы $Q/l \sim \chi^2(r-1)$ и критическая область находится справа от $\chi^2_{1-\alpha}$. Этот критерий очень чувствителен к отклонению выборки от нормальной, поэтому к этому тесту нужно относиться с осторожностью: нахождение статистики в критической области может также говорить о нарушении нормальности.

Другой критерий можно построить из предположения о зависимости дисперсии от одной из объясняющих переменных. Таков критерий *Голдфелда-Куандта*, основная идея которого состоит в том, что

1. Надо отсортировать данные по одной из объясняющих переменных (например, по площади квартиры);

2. Из середины отсортированного ряда нужно исключить d средних элементов (причём $(n-d)/2 > k$, числа параметров);

3. Надо построить две регрессии в каждой из половин и сравнить их по сумме квадратов остатков.



Смысл второго пункта в том, чтобы максимально разделить две группы наблюдений и получить по ним разные регрессии, которые можно сравнить. По этой причине нет смысла выкидывать мало наблюдений, так как разница будет невелика; но также нельзя выкидывать слишком много. Практическая рекомендация: мощность критерия максимальна, если оставлять в выборках $n_1 = n_2 \approx 3n/8$, то есть, выбрасывать примерно четверть наблюдений.

Когда мы оценили две регрессии и посчитали S_1, S_2, суммы квадратов остатков, для их сравнения мы можем применить асимптотический (или точный) тест Фишера. Мы проверяем гипотезу

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1, \quad H_A : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1.$$

Статистика критерия

$$F = \frac{S_2/(n_2 - p)}{S_1/(n_1 - p)},$$

где p – число параметров, имеет (как минимум, асимптотическое) распределение Фишера $F(n_2 - p, n_1 - p)$ и критическую область можно задать в зависимости от альтернативы.

Литература

[1] T. W. Anderson and D. A. Darling. Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit"Criteria Based on Stochastic Processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(2):193 – 212, 1952.

[2] Peter C Austin, Muhammad M Mamdani, David N Juurlink, and Janet E Hux. Testing multiple statistical hypotheses resulted in spurious associations: a study of astrological signs and health. *J Clin Epidemiol*, 59(9):964–969, July 2006.

[3] Erika Cule, Paolo Vineis, and Maria De Iorio. Significance testing in ridge regression for genetic data. *BMC Bioinformatics*, 12(1):372, Sep 2011.

[4] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39(1):1–38, 1977.

[5] B. Efron. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):1–26, 1979.

[6] R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35–45, 03 1960.

[7] S.J. Levitt, S.D. Dubner. *Freakonomics.* NY: Harper Trophy, 2006.

[8] Richard Lockhart, Jonathan Taylor, Ryan J. Tibshirani, and Robert Tibshirani. A significance test for the lasso. *The Annals of Statistics*, 42(2):413–468, 2014.

[9] J. Scott Long and Laurie H. Ervin. Using heteroscedasticity consistent standard errors in the linear regression model. *The American Statistician*, 54(3):217–224, 2000.

[10] Halbert White. A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48(4):817–838, 1980.

[11] Платонов Е.Н. Горяинова Е.Р., Панков А.Р. *Прикладные методы анализа статистических данных.* Изд. дом Высшей школы экономики, 2012.

[12] Ю.М. Кельберт, М.Я. Сухов. *Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т.3: теория информации и кодирования.* М.: МЦНМО, 2013.