ЛЕКЦИЯ 11

Исчисление Ито

В этой лекции мы продолжаем исследовать интеграл Ито. В частности, мы изучим один из главных инструментов для стохастических интегралов: формулу Ито.

11.1 Свойства интеграла Ито

Интеграл Ито, несмотря на его специфику, не только обладает простейшими свойствами известных нам интегралов, но и приобретает несколько новых. Мы уже упоминали изометрию Ито, добавим ещё несколько фактов. Далее для краткости мы будем по возможности опускать зависимость от ω там, где это не вызывает неопределённости.

Теорема 11.1. *Верны следующие свойства для любых $f, g \in \mathcal{V}(S,T)$:*

1. *(Аддитивность) для всех $U \in [S,T]$ выполняется $\int_S^T f dW_t = \int_S^U f dW_t + \int_U^T f dW_t$;*
2. *(Линейность) Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $\int_S^T (f + \lambda g) dW_t = \int_S^t f dW_t + \lambda \int_S^T g dW_t$;*
3. *$\mathbb{E}\left[\int_S^T f dW_t\right] = 0$.*

▷ Не будем останавливаться на первых двух, они возникают из свойств самого предела. Интересно третье; напомним, что по условию, если $f \in \mathcal{V}(S,T)$, то она является случайным процессом, согласованным с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, порождённой Винеровским процессом W. Это означает, что $f(t,\cdot)$ является $\mathcal{F}_t$-измеримой случайной величиной и её можно вынести за знак условного матожидания при условии $\mathcal{F}_t$. С помощью формулы полного матожидания получим для простой функции

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T \phi_n dW_t\right] = \sum_j \mathbb{E}\left[\phi_n(t_j)\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)\right] =$$
$$= \sum_j \mathbb{E}\left[\phi_n(t_j)\mathbb{E}\left[\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] = 0,$$

так как условное матожидание равно $\mathbb{E}\left[W_{t_{j+1}-t_j}\right] = 0$. Это верно для любого n, поэтому будет верно и для предела, то есть,

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T f dW_t\right] = 0$$

□

Добавим ещё одно не очень ожидаемое с первого взгляда свойство.

Теорема 11.2. *Пусть $f \in \mathcal{V}(0,T)$. Случайный процесс $M_t(\omega) = \int_0^t f(s,\omega)dW_s(\omega)$, проиндексированный $t \in [0,T]$, является мартингалом относительно фильтрации, порождённой Винеровским процессом W.*

▷ Проверим прямо, пусть $t' < t$, тогда по свойству аддитивности интеграл можно разбить на две части:

$$\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_{t'}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t'} f(s,\omega)dW_s(\omega) + \int_{t'}^t f(s,\omega)dW_s \mid \mathcal{F}_{t'}\right].$$

Первая часть – это в точности $M_{t'}$, так как интеграл $\mathcal{F}_{t'}$-измерим и его можно вытащить из-под условного матожидания, а вторая равна нулю по только что доказанному свойству 3. □

Другое не очень ожидаемое свойство – непрерывность траекторий кумулятивного интеграла.

Теорема 11.3. *Пусть $f \in \mathcal{V}(0,T)$. Случайный процесс $M_t(\omega) = \int_0^t f(s,\omega)dW_s(\omega)$, проиндексированный $t \in [0,T]$, имеет непрерывную модификацию.*

Так, если даже функция $f \in \mathcal{V}(0,T)$ была разрывной, то в силу непрерывности траекторий Винеровского процесса интеграл будет непрерывно зависеть от верхнего предела. Наконец, не забываем про изометрию, которую в этот раз мы докажем.

Утверждение 11.4. *(Изометрия Ито) Для всех $f \in \mathcal{V}(S,T)$ верна изометрия Ито:*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)^2 dt\right].$$

▷ Добавим и вычтем под квадратом:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f dW_t - \int_S^T \phi_n dW_t + \int_S^T \phi_n dW_t\right)^2\right].$$

Если раскрыть скобки, то получим

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f dW_t - \int_S^T \phi_n dW_t\right)^2\right] +$$
$$+ 2\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-\phi_n)dW_t \int_S^T \phi_n dW_t\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi_n dW_t\right)^2\right],$$

где первое слагаемое по определению интеграла Ито стремится к нулю. Если последнее сходится, то оно ограничено: в этом случае с помощью неравенства Коши-Буняковского можно показать, что кросс-член сойдётся к нулю. Докажем, что последнее слагаемое стремится к искомому интегралу, для этого рассмотрим, вспомнив про изометрию Ито для простых функций,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi_n dW_t\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\int_S^T f^2 dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T (\phi_n^2 - f^2)dt\right].$$

Если сведём выражение под интегралом к полному квадрату, то по свойству аппроксимирующей функции он будет стремиться к нулю, останется только посмотреть на остаток:

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (\phi_n^2 - f^2)dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T (\phi_n - f)^2 dt\right] - 2\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-\phi_n) f dt\right].$$

Остаток в свою очередь тоже стремится к нулю, так как по неравенству Коши-Буняковского для подходящего скалярного произведения

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f-\phi_n) f dt\right] \le \sqrt{\mathbb{E}\left[\int_S^T (\phi_n - f)^2 dt\right] \mathbb{E}\left[\int_S^T f^2 dt\right]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

11.2 Процессы Ито

В обычном математическом анализе мы на самом деле почти никогда не вычисляем интегралы по определению, поэтому не удивительно, что в безусловно более сложном случае с интегралом Ито такой путь является ещё более громоздким. В анализе обычно мы используем набор формул и правил, частично вытекающих из дифференциального исчисления. В случае случайных прцоессов, как мы видели, с такой стороны зайти не получится – у нас есть только теория интеграла Ито.

Рассмотрим два примера с прошлой лекции. Как и раньше, обозначим за $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ модификацию одномерного Винеровского процесса с непрерывными траекториями и потребуем $W_0 = 0$ почти наверное.

Пример 11.1. *Мы показали, что $\int_0^t 1 dW_s = W_t$; на это можно посмотреть под другим углом: Винеровский процесс W представим как интеграл Ито, конкретнее,*

$$W_t = \int_0^t dW_s.$$

Пример 11.2. *Мы также в прошлой лекции по определению посчитали*

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2}.$$

Заметим теперь, что процесс $(W_t^2/2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ представим как сумма привычного нам интеграла и интеграла Ито:

$$\frac{W_t^2}{2} = \int_0^t \frac{1}{2}dt + \int_0^t W_s dW_s.$$

Эта идея представления случайного процесса в виде суммы привычного интеграла и интеграла Ито на самом деле оказывается очень общей и очень часто применимой в практических расчётах.

Определение 11.1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *– вероятностное пространство,* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– одномерный Винеровский процесс. Процессом Ито называют процесс вида*

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dW_s, \tag{11.1}$$

где $u, v : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *функции для которых для любого конечного* $T \in \mathbb{R}_+$ *верно*

1. $v \in \mathcal{V}(0,T)$*, при этом согласована с фильтрацией Винеровского процесса* W*;*
2. *интеграл* $\int_0^t |u(s,\omega)|ds < \infty$ *почти наверное для любого* $t \in \mathbb{R}_+$.

Зависимость от ω мы далее будем по возможности опускать для упрощения формул. Равенство (11.1) принято для краткости записывать в *дифференциальной форме*

$$dX_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dW_t, \quad X_0 \text{ задано.}$$

Так получается короче, лучше видно связь с дифференциальными уравнениями, но это не более, чем мнемоническое правило, которое, тем не менее, оказывается очень полезным и d частично наследует часть свойств привычного дифференциала, но дифференциалом строго не является.

11.3 Формула Ито и интегрирование по частям

Оказывается, достаточно регулярное преобразование процесса Ито тоже является процессом Ито.

Теорема 11.5. *(Формула Ито) Пусть* X *– процесс Ито записанный как*

$$dX_t = udt + vdW_t,$$

где $u, v : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *– непрерывные функции из определения процесса Ито. Если* $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *лежит в* $C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *(дважды непрерывно дифференцируема), то процесс*

$$Y_t = g(t, X_t)$$

тоже является процессом Ито с представлением

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2,$$

причём $(dX_t)^2 = dX_t \cdot dX_t$ *вычисляется согласно правилам*

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0, \quad dW_t \cdot dW_t = dt.$$

$\triangleright$ Доказательство этой формулы достаточно объёмное, но с интересными идеями, поэтому мы попробуем набросать примерную схему.

Введём дискретизацию времени с равным шагом Δt и положив $t_0 = 0, t_n = T$. Заметим, что можно записать

$$g(T, X_T) - g(0, X_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta g(t_j, X_j), \quad \Delta g(t_j, X_j) = g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - g(t_j, X_{t_j}),$$

используя несложную идею телескопической суммы. Разложим каждое слагаемое в ряд Тейлора, используя то, что функция g дваждый непрерывно дифференцируема, получим

$$g(T, X_T) = g(0, X_0) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j})\Delta t + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_{t_j})\Delta X_j +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t_j, X_{t_j})(\Delta t)^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(t_j, X_{t_j})(\Delta t)(\Delta X_j) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j, X_{t_j})(\Delta X_j)^2 + R,$$

где мы обозначили $\Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$.

Попробуем понять, что происходит с этим выражением при $\Delta t \to 0$. Прежде всего, заметим, что остаток $R = o((\Delta t)^2 + max_j(\Delta X_j)^2)$ и в силу непрерывности траекторий интеграла Ито и непрерывной зависимости от параметра обычного интеграла Римана, обе компоненты убывают у нулю. Далее, вместо

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j})\Delta t \to \int_0^T \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s)ds,$$

получится интеграл Римана.

Теперь, вспомнив дискретизацию, рассмотрим подробнее

$$\Delta X_j = u(t_j, X_{t_j})\Delta t + v(t_j, X_{t_j})\Delta W_{t_j}.$$

Вернувшись к вышезаписанным суммам, можем заметить

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j \to \int_0^T \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)u(s, X_s)ds + \int_0^T \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)v(s, X_s)dW_s,$$

если первый интеграл ожидаемый, то предел в L^2 для второго следует из того, что подынтегральная функция всё ещё из класса $\mathcal{V}(0, T)$.

Перейдём далее к членам второго порядка. В силу непрерывной дифференцируемости g, мы заключаем, что

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t_j, X_{t_j})(\Delta t)^2 \right| \to 0$$

поточечно и по теореме Лебега о мажорируемой сходимости в L^2. Похожая история происходит в кросс-члене, но больше внимания нужно уделить второму слагаемому с Винеровским процессом, которое в пределе в смысле L^2 даст ноль:

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(t_j, X_{t_j})(\Delta t)(\Delta X_j)\right| = \left|\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(t_j, X_{t_j})\Delta t(u(t_j, X_{t_j})\Delta t + v(t_j, X_{t_j})\Delta W_{t_j})\right| \to 0.$$

В члене с Δt^2 тоже используется теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Интересно, что происходит в последнем члене, ради которого нам и пришлось разложить до второго порядка.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j, X_{t_j})(\Delta X_j)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j, X_{t_j})(A \cdot (\Delta t)^2 + B \cdot (\Delta t)(\Delta W_{t_j}) + C \cdot (\Delta W_{t_j})^2),$$

с какими-то конкретными выражениями A, B, C. Первые два слагаемых мы уже наблюдали выше, они в пределе дают ноль. А третье путём некоторой техники в пределе в смысле L^2 приведёт к ещё одному интегралу Римана. В итоге получим искомую формулу Ито, положив $Y_t = g(t, X_t)$. $\square$

Из этих формул видно, откуда возникли правила перемножения dt и dW_t: члены с ними в L^2 при уплотнении дискретизации сходятся в L^2 у нулю, что мы пронаблюдали в процессе доказательства.

11.4 Используем формулу Ито

Применений у формулы Ито огромное количество; она позволяет, к примеру, проще вычислять интегралы.

Пример 11.3. *Винеровский процесс W, очевидно сам является процессом Ито, так как его можно записать как*

$$W_t = W_0 + \int_0^t dW_s.$$

Предположим, мы хотим вычислить известный нам $\int_0^t W_s dW_s$. Член с dW_t возникает только из второго слагаемого формулы Ито, поэтому мы можем рассмотреть преобразование $Y_t = g(t, W_t) = W_t^2/2$ и согласно формуле Ито получить

$$d\left(\frac{W_t^2}{2}\right) = W_t dW_t + \frac{1}{2}(dW_t)^2 = W_t dW_t + \frac{1}{2}dt$$

или, в интегральной форме,

$$\frac{W_t^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^t ds + \int_0^t W_s dW_s,$$

откуда мы можем выразить

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2}.$$

Упражнение 11.1. *Вычислите с помощью формулы Ито* $\int_0^t s dW_s$*, используя преобразование* $g(t,x) = tx$*.*

Помимо формулы Ито верен также и аналог интегрирования по частям для детерминированных функций.

Теорема 11.6. *(Формула интегрирования по частям) Пусть* $f(s,\omega) = f(s)$ *зависит только от* $s \in \mathbb{R}_+$*, непрерывна и имеет ограниченную вариацию на* $[0,t]$*. Тогда*

$$\int_0^t f(s)dW_s = f(t)W_t - \int_0^t W_s df(s).$$

$\triangleright$ Мы докажем утверждение с помощью формулы Ито, усилив предположение для f, чтобы не углубляться снова в громоздкие выражения с вариацией. Если f удовлетворяет условиям для формулы Ито, то тогда

$$g(t,x) = f(t)x$$

и $X_t = W_t$ в качестве стартового процесса даёт нужный результат. $\square$

Пример 11.4. *Ответ в Упражнении 11.1 следует мгновенно, но мы можем так же просто, например, записать*

$$\int_0^t s^2 dW_s = t^2 W_t - 2\int_0^t sW_s ds.$$

Последний интеграл упростить не выйдет, но это интеграл Римана и его уже проще исследовать, в частности проще использовать методы Монте-Карло.

Существует и многомерное обобщение формулы Ито, но мы не будем особенно заострять на нём внимание – оно очень естественно, но выглядит более громоздко; подробнее можно найти в [10, Гл. 4.2].

Многомерный процесс Ито задаётся как

$$dX_t = u(t,X_t)dt + v(t,X_t)dW_t,$$

где

$$X_t = \begin{bmatrix} X_t^1 \\ ... \\ X_t^d \end{bmatrix}, \quad u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m},$$

а процесс W_t – это m-мерный Винеровский процесс.

Теорема 11.7. *Если* $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ *является дважды непрерывно дифференцируемой, то процесс*

$$Y_t = g(t,X_t)$$

является процессом Ито с представлением

$$dY_t^k = \partial_t g^k(t, X_t)dt + \nabla_x g^k(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}dX_t^T \nabla_x^2 g^k(t, X_t)dX_t, \quad k = 1, .., p.$$

где произведения раскрываются используя правила

$$dW_t^i dW_t^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ dt, & i = j, \end{cases} \quad dtdW_t^i = 0, \quad dtdt = 0.$$

Интересно, что формула Ито позволяет нам построить *почти* правила из дифференциального исчисления, используя только конструкцию интеграла Ито.

Пример 11.5. *Возьмём в качестве базового процесса $X_t = W_t$, это процесс Ито с представлением $dX_t = dW_t$ и $X_0 = 0$ почти наверное. если $f(t)$ – дифференцируемая функция, то взяв $Y_t = g(t, X_t) = f(t)$, по формуле Ито получим*

$$df(t) = f'(t)dt,$$

то есть, детерминированные функции дифференцируются так же, как раньше. Вместе с этим d всё ещё линейное отображение, как обычный дифференциал.

Пример 11.6. *С другой стороны, используя многомерную формулу Ито для двух процессов Ито X_t и Y_t при помощи трансформации $Z_t = g(t, X_t, Y_t) = X_t Y_t$ мы получим с формулой Ито*

$$dZ_t = d(X_t Y_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t dY_t.$$

По этой причине d, будучи в области определения продолженным на процессы Ито, уже не является дифференциалом, так как не выполнена формула Лейбница. Эта формула после перехода к интегральной нотации даёт ещё одно интересное наблюдение в виде более общей формулы интегрирования по частям:

$$\int_S^T X_t dY_t = X_T Y_T - X_S Y_S - \int_S^T X_t dY_t - \int_S^T dX_t dY_t.$$

Теперь, когда мы, как раньше на матанализе, обзавелись более простыми инструментами для исследования стохастических интегралов и прцоессов Ито, мы готовы с помощью этого исследовать и дифференциальные уравнения.