ЛЕКЦИЯ 9

Процессы Леви: 2

Как далеко могут завести ограничения процесса Леви? Насколько сложные процессы можно получать? Ответы на эти вопросы мы будем обсуждать в этой лекции.

9.1 Что общего у трёх процессов?

Что объединяет три рассмотренных процесса: Винеровский, Пуассоновский и сложенный Пуассоновский? Все они процессы Леви, то есть, обладают свойством независимых стационарных приращений.

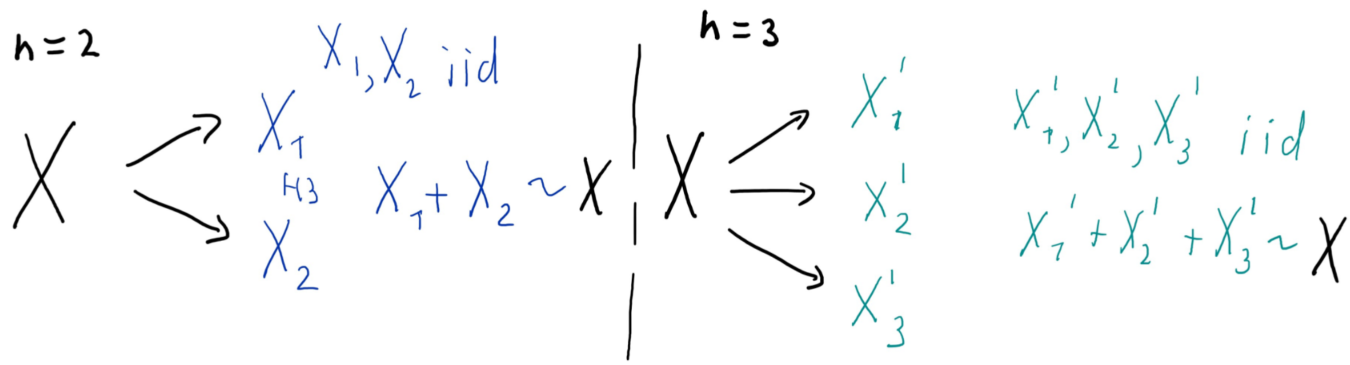
Это очень сильный факт: получается, что если X – процесс Леви, то *любая* случайная величина X_t представима в виде суммы n независимых и одинаково распределённых случайных величин:

$$X_t = \sum_{i=1}^{n}(X_{ti/n} - X_{t(i-1)/n}).$$

Каждое из приращений в силу стационарности имеет одно и тоже распределение, совпадающее с распределением $X_{t/n}$. При этом число $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ можно брать произвольным.

Определение 9.1. *Случайная величина X такая, что для всех n существуют n независимых случайных величин X_i с одинаковым распределением и распределение случайных величин X и $X_1 + .. + X_n$ равны, называется бесконечно делимой.*

Многие являются таковыми, но многие нет.



Упражнение 9.1. *Проверьте, является ли бесконечно делимым распределение*

1. *Пуассона $Poisson(\lambda)$;*

2. *Равномерное $Uniform[a, b]$;*

3. *Бернуллиевское $Ber(p)$ и биномиальное $Binomial(n,p)$;*

4. *Гауссовское $N(\mu, \sigma^2)$,*

На прошлой неделе мы вспоминали про характеристическую функцию, в случае процесса Леви мы получили, что

$$\mathbb{E}\left[e^{i\xi X_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\xi X_{t/n}}\right]^n,$$

причём для всех t и n, что наводит на мысль, что эти характеристические функции обладают своей структурой.

Пример 9.1. *Рассмотрим Пуассоновский процесс X интенсивностью λ, его характеристическую функцию можно вычислить как характеристическую функцию Пуассоновского распределения:*

$$\phi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}\left[e^{i\xi X_t}\right] = e^{\lambda t(e^{i\xi}-1)}.$$

Пример 9.2. *С другой стороны, для Винеровского процесса W характеристическая функция*

$$\phi_{W_t}(\xi) = \mathbb{E}\left[e^{i\xi W_t}\right] = e^{-\frac{t\xi^2}{2}}.$$

Пример 9.3. *Для сложенного Пуассоновского процесса X с интенсивностью λ и распределением размера прыжка $Y_i \sim F$ задача будет немного посложнее, но тут достаточно зафиксировать N_t и использовать формулу полного матожидания, чтобы получить*

$$\phi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}\left[e^{i\xi X_t}\right] = e^{\lambda t\left(\mathbb{E}\left[e^{i\xi Y}\right]-1\right)}$$

или в более популярном виде

$$\phi_{X_t}(\xi) = e^{\lambda t \int_{\mathbb{R}}(e^{i\xi y}-1)dF(y)}.$$

Если мы будем рассматривать новые и новые процессы Леви, характеристическая функция будет сильно напоминать что-то похожее на эти примеры.

9.2 Экспонента процесса Леви

Оказывается, это часть достаточно общего факта про бесконечно делимые распределения. Для таких распределений есть теорема, фиксирующая вид характеристических функций.

Теорема 9.1. *(Формула Леви-Хинчина) Если X – бесконечно делимая случайная величина, то характеристическая функция имеет вид*

$$\mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right] = \exp\left(a\xi i - \frac{\sigma^2\xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus 0}\left(e^{i\xi y} - 1 - i\xi y \mathbb{1}(|y|<1)\right)d\nu(y)\right),$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}$, ν – сигма-конечная (не обязательно конечная!) мера, удовлетворяющая свойству

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 0}(1 \wedge y^2)d\nu(y) < \infty.$$

Мы не будем доказывать эту формулу, потому что она потребует очень много времени и приёмов. Но давайте посмотрим, чем это помогает в исследовании характеристических функций процесса Леви.

Теорема 9.2. *(Формула Леви-Хинчина, версия 2) Пусть X – это процесс Леви, тогда*

$$\phi_{X_t}(\xi) = e^{t\Psi(\xi)},$$

где

$$\Psi(\xi) = a\xi i - \frac{\sigma^2\xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus 0} \left(e^{i\xi y} - 1 - i\xi y \mathbb{1}(|y| < 1)\right) d\nu(y)$$

и a, σ, ν – тройка из формулы Леви-Хинчина для X_1.

Рассмотрим характеристическую функцию для X_{t+s}, где для краткости зафиксируем ξ и обозначим

$$\phi_{X_{t+s}}(\xi) = \mathbb{E}\left[e^{i\xi X_{t+s}}\right] = \zeta_\xi(t+s).$$

По независимости стационарности приращений

$$\zeta_\xi(t+s) = \mathbb{E}\left[e^{i\xi X_{t+s}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\xi(X_{t+s}-X_t)}\right]\mathbb{E}\left[e^{i\xi X_t}\right] = \zeta(s)\zeta(t).$$

Такое свойство мы уже видели ранее, попробуем вычислить производную и составить дифференциальное уравнение:

$$\zeta'_\xi(t) = \lim_{s\to 0+} \frac{\zeta_\xi(t+s) - \zeta_\xi(t)}{s} = \zeta(t)\zeta'(0).$$

Ещё мы знаем, что $\zeta_\xi(0) = 1$. Есть лишь одна функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению с таким условием:

$$\zeta_\xi(t) = e^{\zeta'_\xi(0)t}.$$

Можно считать $\zeta'_\xi(0) = \Psi(\xi)$, некоторой функцией от ξ, таким образом мы получили, что

$$\phi_{X_t}(\xi) = e^{t\Psi(\xi)}.$$

Теперь если мы возьмём $t = 1$ и вспомним о том, что X_1 – бесконечно делимая величина и для неё верна формула Леви-Хинчина, мы получим искомый результат. □

Функцию $\Psi(\xi)$ называют *характеристической экспонентой* процесса Леви, а тройку (a, σ^2, ν) из формулы Леви-Хинчина – *тройкой Леви(Lévy triplet)*. Что мы можем узнать из подобного представления? Посмотрим подробнее:

$$\Psi(\xi) = \exp\left(a\xi i - \frac{\sigma^2\xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\xi y} - 1 - i\xi y \mathbb{1}(|y| < 1)\right) d\nu(y)\right).$$

Первые два слагаемых – это части гауссовской характеристической экспоненты. Второе можно переписать в другом виде и тоже увидеть

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 0}\left(e^{i\xi y}-1-i\xi y\mathbb{1}(|y|<1)\right)d\nu(y)=$$
$$=\nu\left(\mathbb{R}\setminus(-1,1)\right)\int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\xi y}-1\right)d\mu(y)+\int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\xi y}-1-i\xi y\right)d\rho(y),$$

где μ и ρ – это меры

$$\mu=\frac{\nu|_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)}}{\nu\left(\mathbb{R}\setminus(-1,1)\right)},\quad \rho=\nu|_{(-1,1)\setminus 0}.$$

Первое слагаемое – это часть характеристической экспоненты сложенного процесса Пуассона с интенсивностью $\lambda=\nu\left(\mathbb{R}\setminus(-1,1)\right)$ и распределением размера прыжка μ с прыжками больше 1. Что такое второе слагаемое? Это экспонента так называемого *компенсированного сложенного Пуассоновского процесса* с прыжками не более 1. Так в этом контексте называют сложенный Пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda=\rho((-1,1))$, распределением размера прыжка $\rho/\rho((-1,1))$, и ещё с вычтенным матожиданием

$$X_t=\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-\lambda\mathbb{E}\left[Y_1\right],\quad Y_1,..\sim_{iid}\rho/\rho((-1,1)).$$

Очень важно условие интегрируемости для меры ν

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 0}(1\wedge y^2)d\nu(y)<\infty.$$

В силу этого условия первый Пуассоновский процесс имеет прыжки больше 1, но при этом константную интенсивность, а второй имеет (в теории может иметь) бесконечную интенсивность, но прыжки размером не более 1.

9.3 Разложение Леви-Ито и отказ от плотности

По сути, мы только что разложили процесс Леви на части. Если это провести формально, то получается, что и обратно мы можем по тройке Леви восстановить соответствующий процесс Леви.

Теорема 9.3. *(Формула Леви-Хинчина, версия 3) Если заданы $a\in\mathbb{R}$, $\sigma^2\in\mathbb{R}$ и на вероятностном пространстве сигма-конечная мера ν на $\mathbb{R}\setminus 0$ такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 0}(1\wedge y^2)d\nu(y)<\infty,$$

то существует вероятностная мера на Ω и процесс Леви (X_t) с характеристической экспонентой

$$\Psi(\xi)=a\xi i-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}+\int_{\mathbb{R}\setminus 0}\left(e^{i\xi y}-1-i\xi y\mathbb{1}(|y|<1)\right)d\nu(y).$$

Таким образом, процесс Леви можно определить, определяя характеристическую экспоненту, причём чаще всего сложные процессы Леви задаются именно таким образом: задаётся тройка Леви (a, σ^2, ν), где чуть ли не самую важную роль играет *мера Леви* ν. Структура характеристической экспоненты позволяет более детально разложить процесс на уже известные нам составляющие.

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$$

$at + \sigma W_t$

слож. Пуас. (прыжки >1, конечная интенсивность)

скомпенсир. слож. Пуас. (прыжки <1 возможна ∞ интенсивность !)

Теорема 9.4. *(Разложение Леви-Ито) Пусть X_t – это процесс Леви, тогда он раскладывается в сумму независимых процессов*

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)},$$

где

1. *Процесс $X_t^{(1)} = at + \sigma W_t$ – Винеровский процесс со сносом a и дисперсией σ^2;*
2. *Процесс $X_t^{(2)}$ – сложенный Пуассоновский процесс с конечной константной интенсивностью и прыжками размера больше 1;*
3. *Процесс $X_t^{(3)}$ – сложенный скомпенсированный Пуассоновский процесс с (возможно бесконечной) интенсивностью и прыжками размера не более 1.*

Давайте ещё раз посмотрим на известные нам примеры и сделаем несколько наблюдений.

Пример 9.4. *(Винеровский процесс) Это чисто первая компонента $X_t = X_t^{(1)}$. Две другие имеют разрывы, поэтому Винеровский процесс со сносом – это единственный процесс Леви, имеющий модификацию с непрерывными траекториями.*

Пример 9.5. *(Пуассоновский процесс) Это чисто вторая компонента $X_t = X_t^{(2)}$, при этом ν – это дельта-мера $\lambda\delta_1$ в единице(прыжки всегда размера 1, интенсивность λ). И тем самым это единственный считающий процесс Леви, потому что считающий процесс прыгает на 1 и точно с константной интенсивностью, потому что отсечек в любом интервале времени конечное число.*

Пример 9.6. *(Сложенный Пуассоновский процесс) Это константа + вторая и третья компонента $X_t = a + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$, при этом ν строится так, чтобы меры*

$$\mu = \frac{\nu|_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)}}{\nu\left(\mathbb{R}\setminus(-1,1)\right)}, \quad \rho = \nu|_{(-1,1)\setminus 0}$$

удовлетворяли важному условию: $\nu((-1,1)) < \infty$ и $\nu(\mathbb{R}(-1,1)) < \infty$, – в итоге это даёт правильный Пуассоновский процесс с константной интенсивностью в показателе суммы. Распределение размера прыжков тоже зашито в ν.

9.4 Больше примеров процессов Леви

Информация о траекториях может быть извлечена из анализа меры Леви. Например, помимо проверки непрерывности, характеристическая экспонента $\Psi(\xi)$ ограничена тогда и только тогда, когда X_t – это сложенный Пуассоновский процесс, то есть, гауссовской компоненты нет и интенсивность константная. Это отдельная большая тема для обсуждений, которую не покрыть и в нескольких лекциях.

Что даёт нам такая наука? Она позволяет строить более сложные процессы Леви, чем те, которые мы рассматривали.

Пример 9.7. *(Variance-Gamma процесс, VG, Madan, Seneta 1990) Попробуем ещё раз поменять приращения, рассмотрим гамма-процесс Леви:*

$$X_t - X_s \sim \Gamma(\alpha, \beta(t-s)).$$

Характеристическая экспонента такого процесса

$$\Psi_X(\xi) = -\beta \ln(1 - i\xi/\alpha).$$

А мера Леви (после некоторых непростых вычислений) имеет плотность

$$f_\nu(y) = \beta \frac{e^{-\alpha y}}{y} \mathbb{1}(y > 0)$$

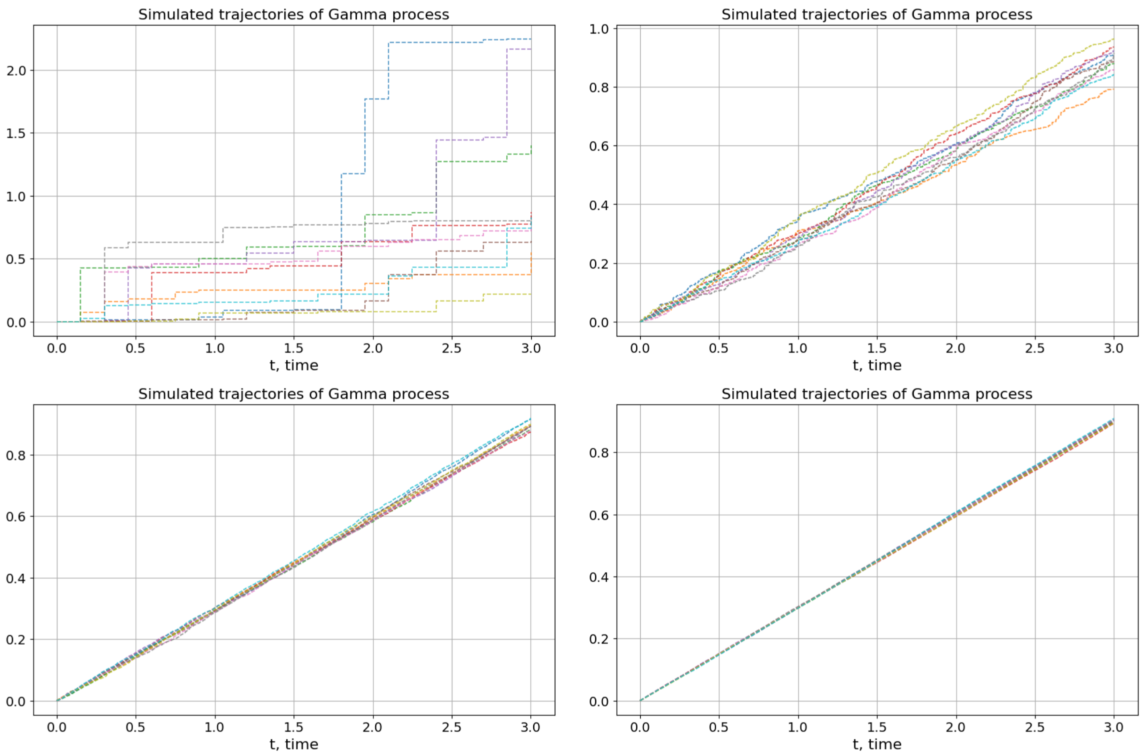
и ещё

$$\sigma = 0, \quad a = -\int_0^1 y d\nu(y).$$

Гамма-процесс, таким образом, – простейший процесс Леви с бесконечной интенсивностью прыжков, то есть, в каждом интервале их счётное количество. Это происходит по двум причинам:

1. *Мера $\nu((-1,1)) = \infty$, то есть, скомпенсированный процесс имеет бесконечную интенсивность и бесконечное число прыжков.*

2. *Прыжков всегда не более, чем счётное число. Это следует из известного факта матанализа: у любой функции прыжков (разрывов первого рода) всегда не более, чем счётное число. Именно такие разрывы имеют траектории процессов Леви.*



Смотря на симуляции очень сложно понять свойства траекторий: при разной дискретизации по времени (на картинках $20, 200, 20000, 200000$ *точек) мы получаем разную картину и при очень плотной дискретизации траектории практические прямые. Но на самом деле, процесс двигается маленькими прыжками, которых бесконечно много.*

На основе гамма-процесса можно построить одну популярную финансовую модель: Variance-Gamma(VG) процесс

$$Y_t = \mu X_t + \sigma W_{X_t}.$$

Этот процесс можно использовать, как и модель Мертона, в экспоненте изначальной модели GBM.

Это процесс с характеристической экспонентой

$$\Psi(\xi) = -\beta \ln\left(1 - i\xi c/\alpha + \beta^2\xi^2/(2\alpha)\right), \quad \alpha, c \in \mathbb{R}, \ \beta > 0.$$

У этого процесса три параметра, α *отвечает за масштаб (связано с дисперсией),* c *– параметр асимметрии распределения, а* β *– это эксцесс, тяжесть хвостов распределения.*

Симуляция такого процесса уже не такая простая, потому что приращения имеют очень сложное VG-распределение, у которого всё ещё можно записать плотность, но семплировать из неё?.. Здесь известно два пути:

1. *Авторский путь, сгенерировать независимые гамма приращения*

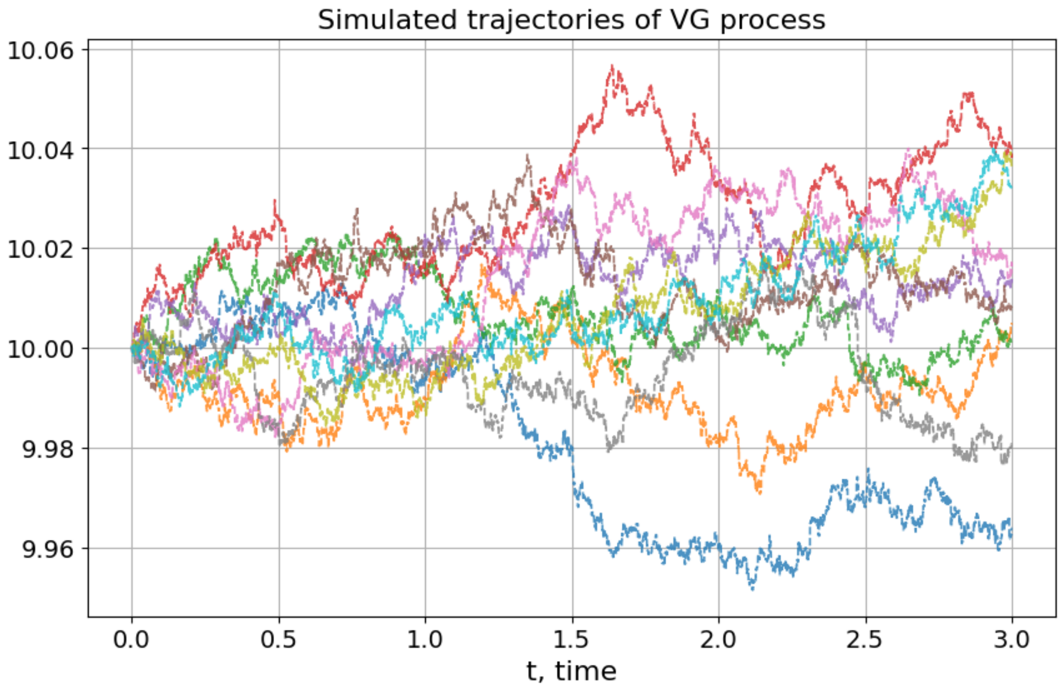
$$\Delta G_{i-1} \sim \Gamma(\alpha, \beta(t_i - t_{i-1}))$$

и далее, задав $Y_{t_0} = 0$,

$$Y_{t_i} = Y_{t_{i-1}} + \mu \Delta G_{i-1} + \sigma \sqrt{\Delta G_{i-1}} Z_i, \quad Z_i \sim_{iid} N(0,1).$$

2. *Ещё другой путь: представить VG-процесс как разность гамма-процессов с пересчитанными параметрами, семплировать два гамма-процесса и брать их разность.*

По данным такой процесс можно пытаться оценивать EM-алгоритмом, беря за основу пункт 1.



Пример 9.8. *(CGMY) Это процесс, который имеет 4 параметра* C, G, M, Y*, которые совпадают с первыми буквами имён авторов. Они имеет меру Леви с плотностью*

$$f_\nu(x) = \begin{cases} C\frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}}, & x < 0, \\ C\frac{e^{-M|x|}}{|x|^{1+Y}}, & x > 0 \end{cases}$$

и характеристическую экспоненту

$$\Psi(\xi) = C\Gamma(Y)(M - i\xi)^Y - M^Y + (G + i\xi)^Y - G^Y.$$

Мера Леви устроена так, что интенсивность прыжков бесконечная, а размер прыжка имеет разную тяжесть хвостов слева и справа. Более того, это процесс, который двигается чисто за счёт прыжков, как VG и Пуассоновские процессы. Однако за счёт бесконечной интенсивности обманчиво может показаться, что траектория практически непрерывна, как у Винеровского процесса.

9.5 Бонус: ещё один смысл меры Леви

Почему мера Леви так универсально описывает траектории целого сложного случайного процесса с разрывными траекториями? Оказывается, она имеет чёткую интерпретацию, связанную с измерениями числа прыжков. Поскольку прыжки происходят случайно, здесь мы впервые встречаем *случайные меры.*

Определение 9.2. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *– вероятностное пространство,* $(E, \mathcal{E})$ *– измеримое пространство с мерой* μ*. Тогда* $M : \Omega \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ *называется случайной мерой, если*

1. *Для всех* $\omega \in \Omega$ $M(\omega, \cdot)$ *– это мера на* $\mathcal{E}$*;*

2. *Для всех* $A \in \mathcal{E}$ $M(\cdot, A)$ *– это измеримая функция.*

Иными словами, мера выпадает как результат случайного исхода $\omega \in \Omega$; с другой стороны, мера любого множества A в таком случае – случайная величина, потому что мера множества будет зависеть от того, какая мера попадётся. В частности, нас сейчас будет интересовать конкретный типа таких случайных мер.

Определение 9.3. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *– вероятностное пространство,* $(E, \mathcal{E})$ *– измеримое пространство с мерой* μ*. Тогда* $M : \Omega \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ *называется случайной Пуассоновской мерой с интенсивностью* μ*, если*

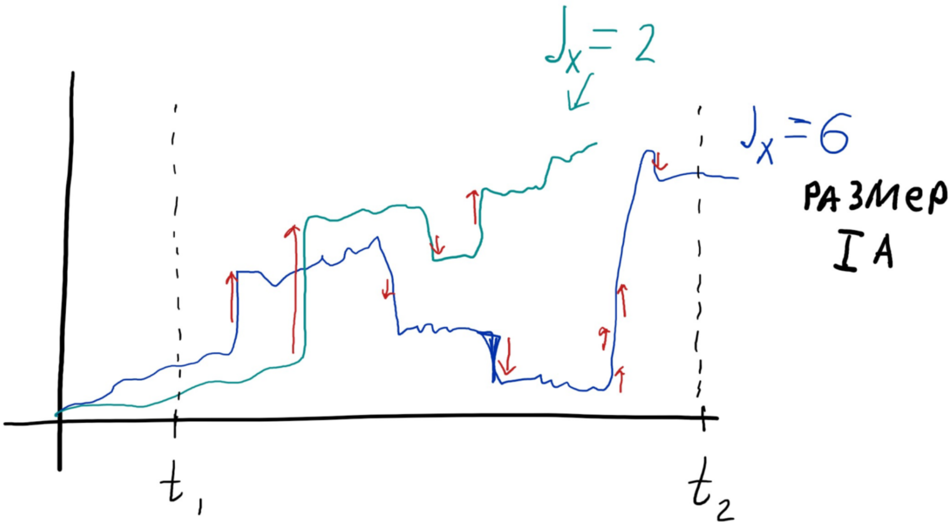
1. *Для всех* $A \in \mathcal{E}$ *при* $\mu(A) < \infty$ *случайная величина* $M(\cdot, A)$ *имеет распределение Пуассона с интенсивностью* $\mu(A)$*;*

2. *Для любого конечного набора попарно непересекающихся* $A_i \in \mathcal{E}$ *случайные величины* $M(\cdot, A_i)$ *независимы в совокупности.*

Поскольку мы думаем о процессах Леви, нас интересует Пуассоновская случайная мера, потому что прыжков счётное число и они порождены сложенными Пуассоновскими процессами. Пусть X – это процесс с càdlàg-траекториями, тогда за любой интервал (t_1, t_2) можно измерить число и размер прыжков $\Delta X_t \in A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и это количество будет случайно (в теории может быть и бесконечно):

$$J_X(t_1, t_2, A) = \#\left\{t : \ (t, \Delta X_t) \in (t_1, t_2) \times A\right\}.$$

J_X – это случайная мера.



Пример 9.9. *Рассмотрим Пуассоновский процесс с интенсивностью* λ. *Тогда* J_X *– это случайная Пуассоновская мера с интенсивностью* λdt.

В случае Пуассоновского процесса эта мера будет считать количество прыжков за фиксированный интервал времени. Мера Леви агрегирует эту информацию в одну обычную меру, описывающую интенсивность прыжков разного размера.

Определение 9.4. *Мерой Леви процесса Леви* X_t *называется*

$$\nu(A) = \mathbb{E}\left[\#\left\{t \in [0,1] : \ \Delta X_t \neq 0, \ \Delta X_t \in A\right\}\right].$$

Так, меру Леви можно рассматривать, как ожидаемое число прыжков размера из множества A за единицу времени. Если мера Леви $\nu(A)$ бесконечна, значит прыжков такого размера бесконечное количество. Как мы понимаем, сама характеристическая экспонента $\Psi(\xi)$ от времени не зависит, а в силу стационарности приращений в разных отрезках времени среднее число прыжков прямо пропорционально размеру временного отрезка.