1. Случайные процессы: определения

Упражнение 1.1. *Пусть случайные величины $U \sim Bernoulli(1/3)$ и $V \in \mathcal{U}[0,1]$ независимы, а случайный процесс задаётся как $X_t = Ue^t + V$.*

1. *Нарисуйте траектории процесса X.*
2. *Опишите семейство конечномерных распределений процесса X.*
3. *Найдите матожидание и ковариационную функцию процесса X.*

Упражнение 1.2. *Пусть $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ – процесс гауссовского белого шума с дисперсией 1 и заданы числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Процесс $(X_t)_{t\in T}$ определим как*

$$X_{t+1} = \alpha\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t+1}.$$

Найдите матожидание и ковариационную функцию процесса X. Проверьте, является ли процесс стационарным в широком смысле.

Упражнение 1.3. *Докажите, что в случае гауссовского процесса из стационарности в широком смысле следует стационарность в узком смысле.*

Упражнение 1.4. *Пусть $T \in \mathbb{R}$, $(X_t)_{t\in T}$ – гауссовский процесс с $m(t) = 0$. Проверьте, будет ли процесс стационарным (в широком смысле), если ковариационная функция*

1. *квадратичная $K(t,s) = (ts)^2$;*
2. *функция Орнштейна-Уленбека $K(t,s) = e^{-\frac{|t-s|}{2l}}$ с параметром $l \in \mathbb{R}$.*

Упражнение 1.5. *(2.5 балла) Пусть $T \in \mathbb{R}$, $(X_t)_{t\in T}$ – гауссовский процесс с $m(t) = 0$ и $K(t,s) = ts$. Докажите, что траектории процесса – это прямые, исходящие из 0.*

Упражнение 1.6. *(2.5 балла) Пусть $T \in \mathbb{R}$, $(X_t)_{t\in T}$ – гауссовский процесс с $m(t) = 0$ и $K(t,s) = f(t)f(s)$ для некоторой s. Объясните (и докажите), какой вид имеют траектории процесса.*