

# Броуновское движение: из физики в финансы

*Эта лекция – небольшой экскурс в финансовую математику. Мы начнём с того, что попробуем понять, как Броуновское движение из физики оказалось в финансах, а затем рассмотрим одну базовую модель для финансового моделирования: геометрическое Броуновское движение. Наконец, посмотрим на некоторые финансовые задачи, которые приходится решать с помощью подобных моделей.*

## 3.1 Откуда идёт финансовая математика

Можно сказать, что финансовая математика возникла примерно в 30-х годах XX века, когда уже были биржи и люди как-то умели анализировать временные ряды (согласно нашим определениям, временной ряд – это вещественнозначный случайный процесс в дискретном времени). По утверждению А.Н. Ширяева, до этого по сути вся финансовая математика сводилась в самом сложном случае к подсчёту сложных процентов [23, Гл.1]. В 30-х годах уже сформировался какой-то статистический инструментарий, данные стали привлекать интерес экономистов. В это время выходит несколько работ, посвящённых исследованию финансовых рядов, среди которых стоит упомянуть [1, 17, 2], где анализировались архивные данные цен. Вывод этих работ был весьма интересный: очень похоже, что логарифмы приращений цен  $\ln S_t/S_{t-1}$  в этих рядах ведут себя как независимые. Эти работы, к сожалению, не получили в своё время должного внимания, как сейчас можно предполагать, отчасти из-за того, что экономисты тогда верили (некоторые до сих пор верят), что в экономических рядах есть разные ритмы и циклы, а отчасти из-за того, что для экономики проблема динамики цен была сильно второстепенна. В целом, и сейчас макроэкономика, в основном, занимается несколько другими вопросами. Третья причина была в том, что далеко не все экономисты тогда владели статистикой, которая ещё не была сильно распространена.

Поворотным моментом стала в 1953г. работа Кендалла [13], которая вышла в другое время, написана более зрелым статистическим языком и опубликована в журнале Королевского Статистического Общества. В ней автор анализирует различные ценовые временные ряды: месячные средние цены на пшеницу в Чикаго (1883-1934), на хлопок в Нью-Йорке (1816-1951), а также недельные данные цен 19 акций (1928-1938). Кендалл пришёл, более обоснованно, к тем же выводам, что и предыдущие статьи. Изначально его

работа была нацелена на то, чтобы выявить цикличность в поведении цен, но к своему великому удивлению он обнаружил (и эта фраза вошла в историю), что исследуемые ряды выглядят как если бы "the Demon of Chance drew a random number.. and added it to the current price to determine the next .. price". Иными словами, если положить, что логарифмы процесса цен в дискретном времени  $H_t = \ln S_t / S_{t-1}$  независимы, то процесс логарифмов цен – это случайное блуждание, то есть, процесс вида

$$\ln S_t = \ln S_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$  – процесс (предположительно, гауссовского) белого шума с нулевым матожиданием и начальная цена  $S_0 \in \mathbb{R}$  фиксирована. Следовательно, сами цены ведут себя как

$$S_t = S_0 e^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t}.$$

Как это ни удивительно, но подобные идеи возникали ранее: например, в работе Башелье *Théorie de la Speculation* (1900) [3] уже была другая, но похожая гипотеза. Башелье предположил, что цены сами являются случайным блужданием (*модель Башелье*)

$$S_{k\Delta} = S_{(k-1)\Delta} + \varepsilon_{k\Delta}$$

с гауссовским белым шумом  $\varepsilon_{k\Delta} \sim N(0, \Delta)$ ,  $\Delta$  – шаг дискретизации по времени. Однако, понятно, что никому в то время не нравилась идея со случайными блужданиями. Во-первых, это процесс, который нельзя предсказать (можно, но наилучший прогноз цены в будущем – это цена сегодня). Во-вторых, в такой модели цены могут быть отрицательными, то есть, нельзя сказать, что она адекватна. Заметим, что в пределе (в подходящем смысле) при  $k = t/\Delta$  и  $\Delta \rightarrow 0$  мы приходим к процессу в непрерывном времени

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \quad (3.1)$$

где  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  – это уже известный нам Винеровский процесс.

**Теорема 3.1.** (*Донскер, вариант*) Пусть  $(U_n)$  – последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с матожиданием 0 и дисперсией 1. Рассмотрим

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n U_i$$

и для  $t \in [0, +\infty)$  линейную интерполяцию  $S_n$ , функцию

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} U_k + \frac{1}{\sqrt{n}} (nt - [nt]) U_{[nt]+1}.$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$  конечномерные распределения процесса  $X_n$  с индексами  $t$  сходятся к конечномерным распределениям Винеровского процесса  $W$ .

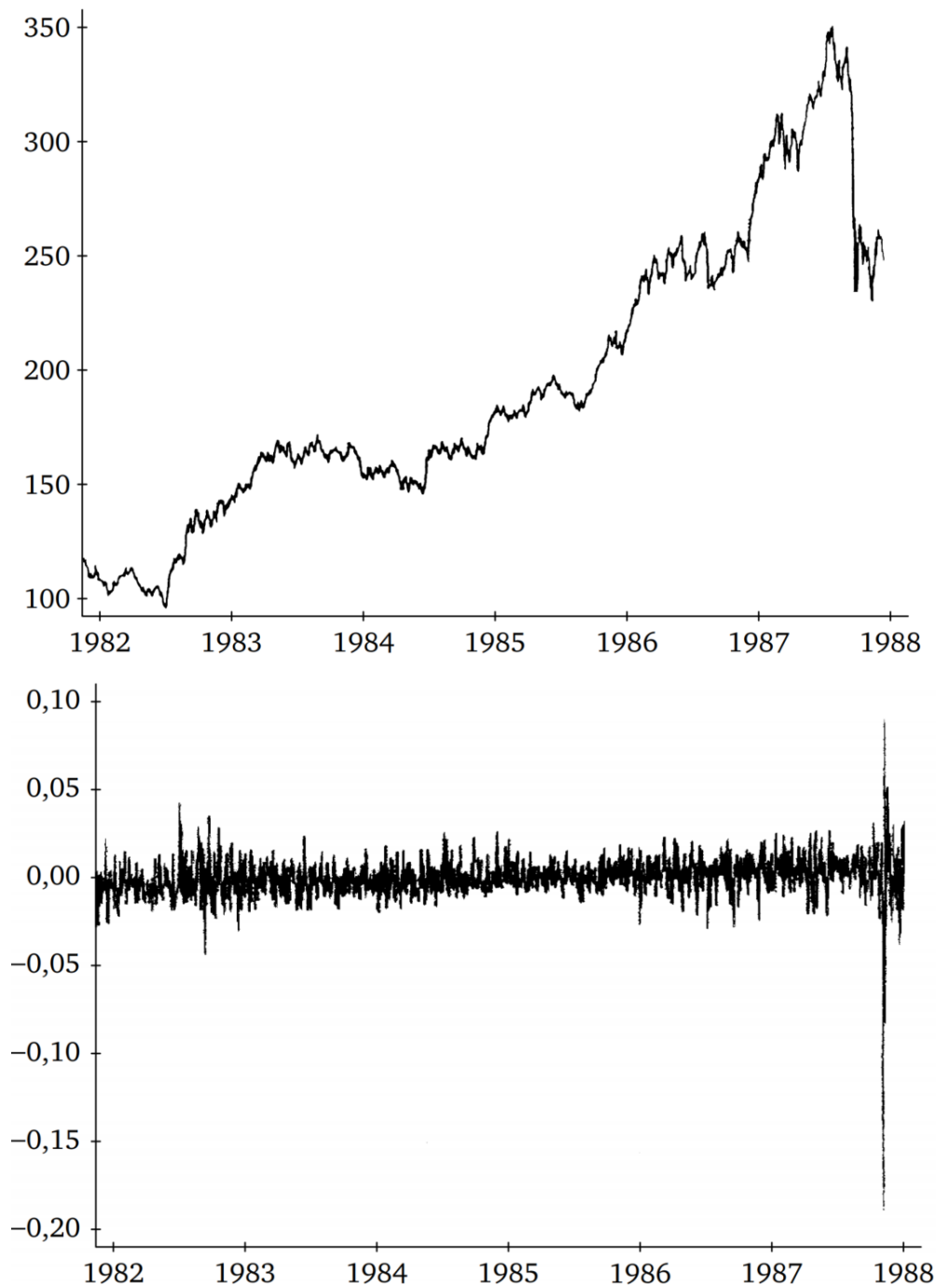


Рис. 3.1: Индекс S&P500 (верх) и его логарифмы приращений (низ), Рис. из [23, Гл. 1]. Несмотря на то, что гипотеза бел шума очень притягательна, в реальности она не до конца адекватна: оказывается, что последовательность шумов устроена более сложно и для её описания используют более сложные модели временных рядов.

▷ Давайте для краткости запишем

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} U_k + \psi_{n,t}, \quad X_n(0) = 0 \text{ п.н. .}$$

Поскольку величины  $U_k$  независимы, одинаково распределены, имеют нулевое матожидание

ние и конечную дисперсию, для них работает классическая ЦПТ:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} U_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, t).$$

С другой стороны,  $\psi_{n,t} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} 0$ . Рассмотрим теперь вектор зависимых случайных величин для  $t_1 < \dots < t_k$ .

$$[X_{t_1}, \dots, X_{t_k}]^T.$$

Попробуем сначала перейти к приращениям:

$$\begin{bmatrix} X_n(t_1) \\ X_n(t_2) \\ \dots \\ X_n(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n(t_1) - X_n(0) \\ X_n(t_2) - X_n(t_1) \\ \dots \\ X_n(t_k) - X_n(t_{k-1}) \end{bmatrix}.$$

Вектор справа состоит из почти независимых случайных величин

$$X_n(t_p) - X_n(t_{p-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=[nt_{p-1}]+1}^{[nt_p]} U_k + \psi_{n,t_p} - \psi_{n,t_{p-1}}.$$

Причём, что важно, первая сумма и разность  $\psi_{n,t_p} - \psi_{n,t_{p-1}}$  независимы. По ЦПТ

$$X_n(t_p) - X_n(t_{p-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, t_p - t_{p-1}),$$

а целый вектор сходится к

$$[W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}]^T,$$

так как части  $\psi_{n,t_p} - \psi_{n,t_{p-1}}$  в пределе стремятся к 0 (и зависимости полностью исчезают) и разности по ЦПТ имеют гауссовское распределение как у приращения Винеровского процесса.  $\square$

По настоящему значимой точкой, после которой финансовая математика начала бурно развиваться вместе с теорией анализа временных рядов, стала работа Пола Самуэльсона [16], который ввёл в обращение на основе уже имеющихся эмпирических фактов модель цен

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \quad (3.2)$$

с параметрами  $\mu, \sigma^2$ , которую он назвал экономическим Броуновским движением, сейчас мы её знаем как геометрическое Броуновское движение. Несмотря на то, что эта модель в данный момент признана не вполне соответствующей реальности (см. например, Рис. 3.1, где, очевидно, логарифмы приращений – это не совсем белый шум), она явилась очень мощным первым шагом и на основе неё было сделано много других решений, которые применяются и сейчас. В теории временных рядов есть много моделей, которые появились, можно сказать, хотя бы отчасти благодаря геометрическому Броуновскому движению; например, это условно гауссовские модели ARCH[10] и GARCH[4]. Они были призваны улучшить эту модель, конкретнее, они моделируют параметр волатильности  $\sigma_t$  как отдельный случайный процесс.

### 3.2 Геометрическое Броуновское движение

**Определение 3.1.** Пусть  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  – это Винеровский процесс такой, что  $W_0 = 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}_+$  – параметры модели (называемые сносом, волатильностью и начальной ценой). Одномерное геометрическое Броуновское движение (geometric Brownian motion, GBM) – это процесс  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , определяемый как

$$X_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}. \quad (3.3)$$

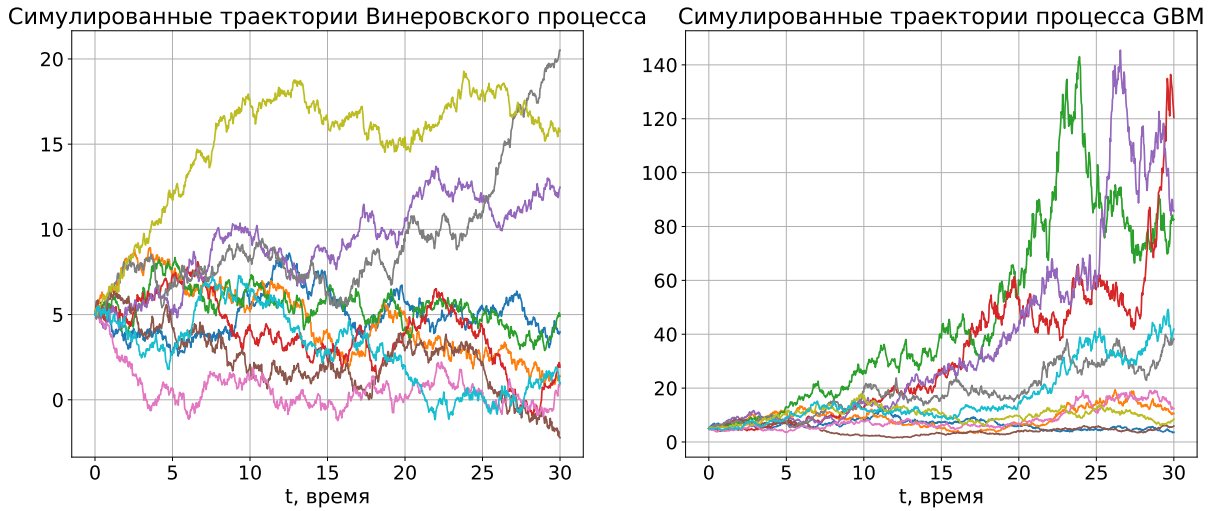


Рис. 3.2: Очевидно, что самого Винеровского процесса мало для моделирования цен (как предлагалось в [3]), поскольку он может уходить ниже нуля. При этом траектории GBM на первый взгляд очень похожи на типичные финансовые ряды.

Перечислим некоторые свойства этого процесса.

1. Легко заметить, что логарифм

$$\ln X_t = \ln X_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t$$

есть не что иное, как Винеровский процесс со сносом (из-за второго слагаемого) и волатильностью (из-за умножения на  $\sigma$ ), и имеет нормальное распределение со средним  $\ln X_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$  и дисперсией  $\sigma^2 t$ . По определению, случайная величина  $X_t$  – логнормальная, то есть, её логарифм – нормальная величина.

**Упражнение 3.1.** Докажите, что плотность логнормальной случайной величины  $X \sim \text{LogN}(\mu, \sigma^2)$  есть

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где  $\mu$  и  $\sigma^2$  – параметры распределения  $\ln X$ .

Для того, чтобы вычислить некоторые характеристики такой случайной величины нам понадобится новый объект: производящая функция моментов (Moment Generating Function, MGF).

**Определение 3.2.** Пусть  $X$  – случайная величина. Производящей функцией моментов (MGF) называется функция

$$g_X(\lambda) = \mathbb{E} [e^{\lambda X}] ,$$

где  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Производящая функция хранит информацию о моментах случайной величины и обладает многими полезными свойствами. Для нас сейчас важно, что у гауссовской случайной величины с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$  производящая функция моментов равна

$$g_X(\lambda) = e^{\mu\lambda + \sigma^2\lambda^2/2}.$$

**Упражнение 3.2.** Используя выражение для производящей функции моментов, докажите, что матожидание и ковариационная функция процесса  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  равны

$$\mathbb{E} [X_t] = x_0 e^{\mu t}, \quad K(t, s) = x_0^2 e^{\mu(t+s)} \left( e^{\sigma^2 t \wedge s} - 1 \right). \quad (3.4)$$

Чему равна дисперсия  $\mathbb{E} [(X_t - \mathbb{E} [X_t])^2]$ ?

Подобная ковариационная функция означает что сечения очень сильно зависимы, причём зависимость растёт экспоненциально в зависимости от дальности сечений от нулевого, это объясняет взрывной и резкий характер траекторий процесса  $X_t$  (см. Рис. 3.2). А дисперсия показывает, что неопределённость относительно будущих значений нарастает очень быстро.

2. По заданию процесса, для любых  $t, h \in \mathbb{R}_+$

$$X_{t+h} = X_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})h + \sigma W_h}, \quad (3.5)$$

что даёт нам некоторый инструмент для прогноза.

**Утверждение 3.2.** Для  $t, s \in \mathbb{R}_+$  таких, что  $t > s$ , условное матожидание

$$\mathbb{E} [X_t \mid X_s] = X_s \mathbb{E} [X_{t-s}] = X_s \mathbb{E} \left[ e^{(\mu - \sigma^2/2)(t-s) + \sigma W_{t-s}} \right].$$

▷ Воспользуемся свойством (3.5) и тем, что  $X_s$  можно вынести за знак условного матожидания:

$$\mathbb{E} [X_t \mid X_s] = X_s \mathbb{E} \left[ e^{(\mu - \sigma^2/2)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} \mid X_s \right].$$

Заметим теперь, что по свойству независимости приращений Винеровского процесса

$$\mathbb{E} \left[ e^{(\mu - \sigma^2/2)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} \mid X_s \right] = \mathbb{E} \left[ e^{(\mu - \sigma^2/2)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} \right]$$

и, наконец из того, что  $W_t - W_s$  и  $W_{t-s}$  имеют одинаковые распределения, получаем

$$\mathbb{E}[X_t | X_s] = X_s \mathbb{E} \left[ e^{(\mu - \sigma^2/2)(t-s) + \sigma W_{t-s}} \right].$$

□ Условное матожидание, как мы увидим далее, в данном случае является наилучшим прогнозом в среднеквадратичном смысле, но из-за дисперсии даже этот прогноз будет очень неточным для больших  $t - s$ .

**3.** Процесс GBM очень легко симулировать, можно предложить, например, следующий простой алгоритм, чтобы получить дискретизированную траекторию  $X_{t_1}, \dots, X_{t_k}$ , состоящую из сечений в моменты  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_+$ :

- (1) Симулировать траекторию Винеровского процесса (см. лекцию 2)  $W_{t_1}, \dots, W_{t_k}$ ;
- (2) Для всех  $j = 1, \dots, k$  вычислить

$$X_{t_j} = x_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_j + \sigma W_{t_j}}.$$

Кратко скажем про многомерную версию. Если на рынке  $d$  товаров (акций), то мы определяем процесс  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  со значениями в  $\mathbb{R}_+^d$  аналогично одномерному случаю, но вводим многомерный Винеровский процесс  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  и матрицу  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  для задания коррелированного многомерного Винеровского процесса.

**Определение 3.3.** Пусть  $(W_t^i)_{t \in \mathbb{R}_+}$  – координаты  $d$ -мерного Винеровского процесса, а также заданы в качестве параметров  $\mu_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  и  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Тогда многомерным геометрическим Броуновским движением называется процесс  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  с координатами

$$X_t^i = x_0^i e^{(\mu_i - \sum_{j=1}^d a_{ij}^2/2)t + \sum_{j=1}^d a_{ij} W_t^j}.$$

Видно, что в многомерном случае координаты процесса зависимы через коррелированные Винеровские процессы.

### 3.3 Задача оценки опционов

Упрощённо, биржа существует достаточно давно для того, чтобы осуществлять сделки по продаже и покупке товаров. На бирже в качестве товаров выступают как физические товары (например, драгоценные металлы, валюта, нефть), так и ценные бумаги (акции и облигации). Работает это так: продавец приносит на биржу свой товар и ставит ценник. Далее биржа по всем продавцам вычисляет (по специальной методике, средняя, но есть тонкости) рыночную цену. С другой стороны, покупатели ставят заявки на покупку товара и тоже ставят свои цены. Как покупатели, так и продавцы могут изменять свои цены. Как только рыночная цена доходит до уровня, когда есть продавец и есть покупатель такие, что

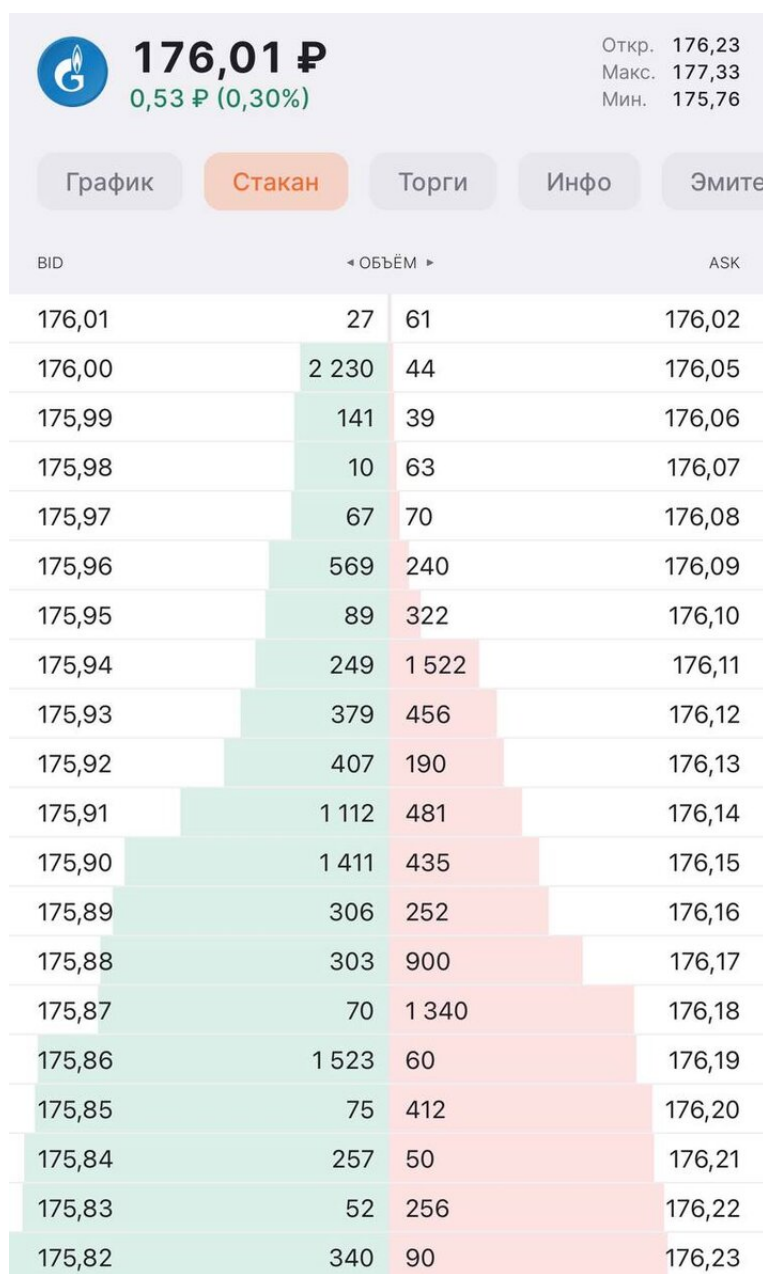


Рис. 3.3: Стакан с заявками ())

цена их обоих устраивает, биржа проводит сделку. Всё совершается через механизм биржи, продавцы и покупатели друг друга даже не знают и все расчёты проводят с биржей, где специальный клиринговый оператор занимается техническими деталями сделки.

Помимо товаров на бирже существуют производные финансовые инструменты (деривативы), наиболее популярные – опционы и фьючерсы. Чтобы понять, зачем вообще нужны деривативы, обратимся к простому примеру. Сейчас это уже кажется несколько странным сюжетом, но, скажем, в XIX веке биржи работали именно так. Фермер выращивает картофель, у него есть большое хозяйство и он использует биржу как посредника для торгов. Есть сеть ресторанов "У Егора" которая заинтересована в покупке картофеля. Естественно, на рынке бывают урожайные и неурожайные времена, поэтому цена картофеля будет



меняться со временем неопределённым образом. Для фермера продажа картофеля – это риск, так как он вложил некоторые средства в его производство и он будет разочарован и может потерять деньги, если цена на картофель будет очень низкая, когда он соберётся его продавать. С другой стороны, Егор может потерпеть большие издержки, чем хотелось бы, при покупке картофеля по высокой цене. Для таких случаев биржа предлагает решение в виде деривативов, специальных контрактов на будущие покупки или приобретения, с разными сроками действия.

Фермер может приобрести у биржи (или у другого агента на бирже) *фьючерс*, контракт, который обязывает его продать какое-то количество картофеля через год (в строго определённый момент) по заранее(!) заданной цене. С другой стороны, Егор может купить похожий фьючерс, который обязывает его купить какое-то количество картофеля через год по заранее заданной цене. Тем самым, и Егор, и фермер уменьшают риск неудовлетворения от неопределённости цены картофеля через год.

Также Егор или Fried могут приобрести или оформить *опцион*, который отличается тем, что он даёт лишь право на продажу/покупку заданного количества картофеля по заданной цене через год в строго определённое время. То есть, дождавшись момента исполнения, Егор может решить, что текущая цена на бирже выше той, что указаны в опционном контракте и он просто продаст картофель, не исполняя контракта. А Fried, соответственно, может увидеть, что цена на картофель так низка, что опцион исполнять невыгодно и тоже просто купит картофель по текущей цене.

Сумма в контракте на поставку называется *страйком* (strike price). Опционы на покупку имеют приставку *call* (call-опцион), а на продажу – *put* (put-опцион), есть также двусторонние (double), в которых обе стороны осуществляют поставку. Существует много видов опционов, самые популярные – *европейские* и *американские* (на Мосбирже есть и те, и те, очень популярны опционы на индексы и валюту). Первые работают как в приведённом примере: владелец опциона ждёт конца срока действия, а потом решает, исполнять его или нет. Что касается американских опционов, то их можно исполнить в *любой момент* до конца срока действия. В опционах может быть также задана необычная *функция выплаты*: например, если опцион покупается на несколько товаров (корзина, basket-опцион), то выплата будет равняться страйку, если опцион исполняется, и сумме от продажи/покупки заданного количества всех товаров, указанных в контракте иначе.

Для простоты положим, что рассматриваем европейский опцион. Вопрос: если есть опцион, то как назначить его цену?

**Определение 3.4.** Пусть задана выплата опциона  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  и случайный процесс цен

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , принимающий значения в  $\mathbb{R}^d$ . Честной ценой европейского опциона со временем исполнения  $T > 0$  называются условное матожидание

$$\mathbb{E}[f(X_T) \mid X_0].$$

**Пример 3.1.** Рассмотрим европейский put-опцион, который позволяет продать по одной единице каждого из товаров  $1, \dots, d$  по цене  $K$  (страйк). В случае, если в момент исполнения биржевые цены  $X_i$  таковы, что продажа товаров по текущим ценам невыгодна (то есть, мы получаем меньше страйка  $K$ ), опцион выгоднее исполнить, тогда после продажи мы получим выгоду  $K - \sum_{i=1}^d X_i$ . Если же страйк ниже суммы текущих цен, то нам выгоднее не исполнять опцион, получая нулевой выигрыш. Описанный опцион имеет выплату

$$f(x_1, \dots, x_d) = \left( K - \sum_{i=1}^d x_i \right)_+,$$

где знак  $+$  означает, что всё выражение равно нулю, если в скобках число меньше нуля.

**Упражнение 3.3.** Как выглядит платёжная функция call-опциона с таким же контрактом?

Если бы биржа продавала опцион по цене ниже честной, то она бы проиграла: в среднем она сама может выиграть с ним больше, чем если продаст этот опцион. Если цена получается выше, то такой опцион, вероятно, никто не купит – в конце концов, не только биржа их умеет оценивать. В реальности же (отчасти из-за неточностей прогнозов покупателя и продавца) есть некоторое окно, окрестность честной цены, в котором покупатель и продавец могут договориться, так что оценка честной цены имеет вполне практическое значение для реализации эффективного рынка. Для случая одного товара есть знаменитая формула Блека-Шоулза (из-за которой модель геометрического Броуновского движения тоже часто называют моделью Блека-Шоулза). Её доказательство сильно техническое и мы его приводить не будем (три разных её доказательства можно найти в [23, Т.2, Гл.8]). Впрочем, это не более, чем хорошее упражнение на вычисление матожидания.

**Утверждение 3.3.** (Формула Блека-Шоулза) Пусть  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  – одномерное геометрическое Броуновское движение с параметрами  $x_0, \mu, \sigma$  и  $r > 0$  безрисковая процентная ставка. Тогда честная цена опциона call со сроком истечения  $T > 0$  и страйком  $K$  в момент  $t < T$  равна

$$P_t = X_t \Phi \left( \frac{\ln(X_t/K) + (\mu + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - K e^{-\mu(T-t)} \Phi \left( \frac{\ln(X_t/K) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

функция распределения величины  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Для случая корзинных опционов (много товаров) формул, как правило, нет, для оценки используется метод Монте-Карло и модель цен. Положим, у биржи есть модель многомерного геометрического Броуновского движения  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  для моделирования цен на  $d$  товаров, задействованных в опционе, с параметрами  $\mu \in \mathbb{R}^d$  и матрицей  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Тогда задача оценки опциона может быть решена методом Монте-Карло. В реальности могут использоваться более сложные предсказательные модели, в частности, со случайными сносом и волатильностью.

Заметим одно важное экономическое свойство честной цены: она растёт с ростом срока истечения  $T$ . Это естественное следствие того, что долгосрочный опцион страхует большую неопределённость, чем краткосрочный. По этой причине долгосрочные опционы редкие и очень дорогие, как правило, срок истечения у них не больше двух лет. Кроме того, опционы обычно (но важна цена в момент наблюдения) после их выпуска становятся дешевле со временем, так как срок истечения приближается и страхуемая неопределённость тоже становится меньше.

Мы обсудили, как можно оценивать европейские опционы. Американские опционы и разные более экзотические варианты деривативов оценивать сложнее: для этого нужно решать задачу оптимальной остановки (в случае американского опциона) или стохастического оптимального управления (для более сложных деривативов).

# Литература

- [1] Alfred Cowles 3rd. Can stock market forecasters forecast? *Econometrica*, 1(3):309–324, 1933.
- [2] Alfred Cowles 3rd and Herbert E. Jones. Some a posteriori probabilities in stock market action. *Econometrica*, 5(3):280–294, 1937.
- [3] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 17:21–86, 1900.
- [4] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.
- [5] Michael Brin and Garrett Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] Yuansi Chen, Raaz Dwivedi, Martin J. Wainwright, and Bin Yu. Fast mixing of metropolized hamiltonian monte carlo: benefits of multi-step gradients. *J. Mach. Learn. Res.*, 21(1), jan 2020.
- [7] Persi Diaconis. The markov chain monte carlo revolution. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46:179textendash205, 04 2009.
- [8] Alain Durmus and Éric Moulines. High-dimensional bayesian inference via the unadjusted langevin algorithm. *Bernoulli*, 2016.
- [9] Raaz Dwivedi, Yuansi Chen, Martin J Wainwright, and Bin Yu. Log-concave sampling: Metropolis-hastings algorithms are fast! In Sébastien Bubeck, Vianney Perchet, and Philippe Rigollet, editors, *Proceedings of the 31st Conference On Learning Theory*, volume 75 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 793–797. PMLR, 06–09 Jul 2018.
- [10] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.
- [11] L. Isserlis. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables, November 1918.
- [12] Galin Jones. On the markov chain central limit theorem. *Probability Surveys*, 1, 09 2004.
- [13] M. G. Kendall and A. Bradford Hill. The analysis of economic time-series-part i: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 116(1):11–34, 1953.

- [14] Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, and Edward Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 06 1953.
- [15] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations (3rd Ed.): An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [16] Paul A. Samuelson. Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(2):369–374, 1973.
- [17] Holbrook Working. A random-difference series for use in the analysis of time series. *Journal of the American Statistical Association*, 29(185):11–24, 1934.
- [18] Guangyao Zhou. Metropolis augmented hamiltonian monte carlo. In *Fourth Symposium on Advances in Approximate Bayesian Inference*, 2022.
- [19] Н. В. Рекнер М. Шапошников С. В. Богачев, В. И. Крылов. *Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова*. Институт компьютерных исследований, 2013.
- [20] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов*. М:ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [21] Тиморин В.А. *Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными*. Москва : ВШЭ, 2017.
- [22] Синай Я.Г. Коралов Л.Б. *Теория вероятностей и случайные процессы*. МЦНМО, 2013.
- [23] А.Н. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики*. МЦНМО, 2016.