лекция 10

Стохастический интеграл Ито

В этой лекции мы определяем известный стохастический интеграл: Интеграл Ито. Как мы увидим, к интегралу Ито естественно приходят в попытке записать более общие дифференциальные уравнения, включающие в себя случайные процессы.

10.1 Дифференциальные уравнения с ¨шумом¨

Рассмотрим классическую задачу Коши из курса обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X(t)), \quad X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad X(0) = x_0.$$

Её решение – это некоторая траектория $X(t)$, такая что она начинается в x_0, так как $X(0) = x_0$. Не секрет, что такие уравнения часто встречаются в физике, а также во многих других областях. Тем не менее, подобные модели обладают естественным ограничением: часто правая часть *идеальна*. Но что делать, если, например, в динамике полёта самолёта нужно учесть ветер? Очевидно, что подобные эффекты не вполне понятно, как описать в силу их хаотичности. Второе важное ограничение – это теорема о существовании решения, которая требует непрерывности правой части, а для единственности требует ещё липшицевости (по X). Таким образом, не всякая функция хорошо подойдёт для модели на основе обыкновенного дифференциального уравнения.

Давайте попробуем посмотреть на эту задачу с несколько эвристической точки зрения, что если мы просто добавим случайный *шум*?

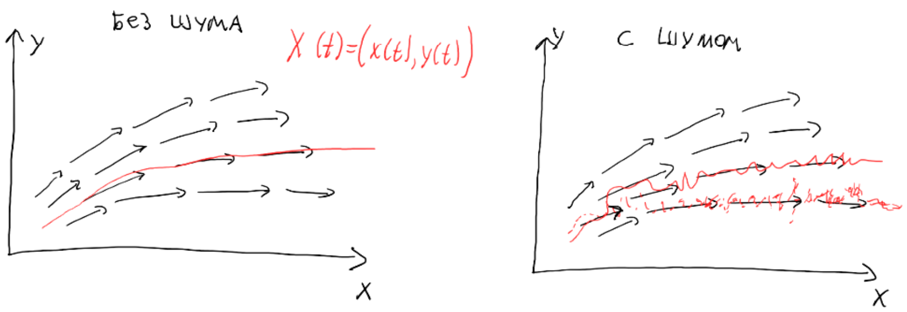

Рис. 10.1: Случайный шум меняет векторное поле и, соответственно, траектории.

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \xi_t,$$

где $(\xi_t)_{\mathbb{R}_+}$ – это некоторый случайный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (соответственно $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ тоже будет случайным процессом). Мы использовали также функцию $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для добавления шуму некоторой вариативности. Какие естественные практические предположения мы могли бы сделать насчёт шума? К примеру, такие:

1. ξ_{t_1} и ξ_{t_2} независимы для любых $t_1 \neq t_2$;
2. Процесс ξ стационарен в узком смысле;
3. $\mathbb{E}\,[\xi_t] = 0$.

Процесс белого гауссовского шума ξ_t подошёл бы, но, к сожалению, он не обладает непрерывными траекториями и, следовательно, у нас проблема с существованием решения. Оказывается, вообще не бывает нетривиального процесса ξ с непрерывными траекториями и свойствами 1-3.

Утверждение 10.1. *Если выполнены свойства (1)-(3), то вероятность того, что траектория будет непрерывна в счётном числе точек равна 0, за исключением случая, когда* $\xi_t = 0$ *почти наверное.*

▷ Эта задача немного похожа на задачу про разрывность белого шума из первых лекций. Сейчас однако ничего не известно про распределение ξ_t, поэтому мы используем такой подход: если процесс ξ имеет непрерывные траектории, то процесс

$$\xi_t^{(N)} = \begin{cases} N, & \xi_t > N, \\ \xi_t, & \xi_t \in [-N, N], \\ -N, & \xi_t < -N \end{cases}$$

тоже будет иметь непрерывные траектории. Заметим, что этот процесс обладает дисперсией и кроме того

$$\mathrm{Var}\left[\xi_t^{(N)} - \xi_s^{(N)}\right] = 2\mathrm{Var}\left[\xi_t^{(N)}\right] > 0,$$

если только не $\xi_t = 0$ почти наверное. Покажем, что траектория с ненулевой вероятностью имеет разрыв в точке t_0, тогда и изначальный процесс тоже будет его иметь. Рассмотрим подпоследовательность $\{t_k\} \to t_0$, последовательность $\xi_{t_k}^{(N)}$ сходится почти наверное к $\xi_{t_0}^{(N)}$ тогда и только тогда, когда для всех $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\geq n} |\xi_{t_k}^{(N)} - \xi_{t_0}^{(N)}| > \varepsilon\right) = 0.$$

Предел берётся поточечно и всегда есть. Этот критерий удобен тем, что мы можем проанализировать предельную величину под вероятностью с помощью леммы Фату:

$$\mathbb{E}\left[\left(\limsup_{k\geq n} |\xi_{t_k}^{(N)} - \xi_{t_0}^{(N)}|\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\limsup_{k\geq n} |\xi_{t_k}^{(N)} - \xi_{t_0}^{(N)}|^2\right] \geq \limsup_{k\geq n} \mathbb{E}\left[|\xi_{t_k}^{(N)} - \xi_{t_0}^{(N)}|^2\right] = 2\mathrm{Var}\left[\xi_{t_0}^{(N)}\right] > 0.$$

Следовательно, вероятность не может быть нулевой ни для какой подпоследовательности и

$$\mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \lim_{t \to t_0} \xi_t^{(N)}(\omega) = \xi_{t_0}^{(N)}(\omega)\right) < 1.$$

В силу независимости, вероятность того, что хотя бы в счётном числе точек функция будет непрерывна одновременно равна нулю. □

Давайте теперь посмотрим на задачу со стороны дискретной модели – попробуем обойти эти тонкие вопросы. Зададим конечный набор времён $t_0 = 0, t_1, .., t_{N-1} = T \in \mathbb{R}_+$ и запишем явный метод Эйлера (аппроксимируем производную конечной разностью); добавив в него шумовой член, мы получим вполне понятную модель в дискретном времени:

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} + b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})Y_k \Delta t_k, \tag{10.1}$$

где $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k$. Рассмотрим поближе $Y_k \Delta t_k$: давайте введём процесс W_{t_k} как

$$W_{t_{k+1}} = W_{t_k} + Y_k \Delta t_k, \quad W_{t_0} = 0.$$

Мы выше предполагали, что шумы $Y_k \Delta t_k$ должны быть независимыми и стационарными в узком смысле. Для процесса W требования для шума означают, что

1. W имеет независимые приращения;
2. Приращения W стационарны в узком смысле;
3. Приращения имеют нулевое матожидание.

Один из процессов в непрерывном времени $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, который удовлетворяет этим свойствам и имеет непрерывные траектории, – это хорошо известный нам Винеровский процесс. Перепишем (10.1) с этой новой информацией и избавимся от процесса ξ:

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} + b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta W_k, \quad \Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}. \tag{10.2}$$

Эти уравнения мы можем переписать в виде сумм:

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_0} + \sum_{j=0}^{k} b(t_j, X_{t_j})\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k} \sigma(t_j, X_{t_j})\Delta W_j. \tag{10.3}$$

Вопрос теперь состоит в следующем: если уменьшать шаг дискретизации Δt, то кажется, что мы получим интегральное уравнение

$$X_t = X_{t_0} + \int_0^T b(t, X_t)dt + \text{ "} \int_0^T \sigma(t, X_t)dW_t \text{ "}. \tag{10.4}$$

С первым интегралом понятно: он возникал и в обыкновенных дифференциальных уравнениях (интегральное уравнение без второго интеграла называется *уравнением Вольтерра*). Что такое второй интеграл? Поскольку мы говорим о случайных величинах, то в каком смысле можно показать его существование? На этот вопрос есть разные ответы, но мы рассмотрим один очень популярный.

10.2 Первая попытка: простые функции

Итак, фиксируем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и непрерывную модификацию Винеровского процесса W, начинающегося в нуле. Мы хотим определить интеграл типа

$$\int_S^T f(t,\omega)dW_t(\omega)$$

для каких-то подходящих (определим чуть позже) функций $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$. По некоторой аналогии с интегралами Лебега и Римана, мы можем сначала определить интеграл в кавычках для *простых функций*, которые зададим следующим образом. Фиксируем некоторое разбиение отрезка $[S,T]$ состоящее из точек $t_0 = S, t_1, .., t_{N-1} = T$. Простой функцией (см. Рис. 10.2) назовём функцию $\phi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ вида

$$\phi(t,\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(\omega) \mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t).$$

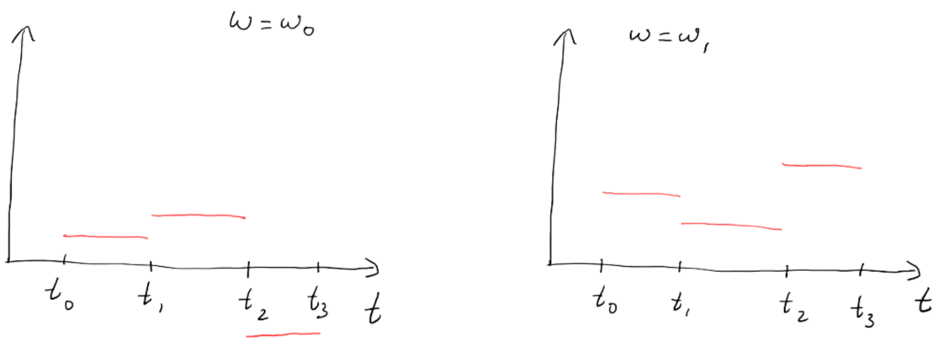

Рис. 10.2: Простые функции при фиксированном $\omega \in \Omega$ кусочно константные по времени

Для простых функций интеграл можно определить, например, так:

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dW_t(\omega) := \sum_{j=0}^{N-1} e_j(\omega)(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)). \tag{10.5}$$

Пример 10.1. *Определим равномерную сетку* $t_j = jT/n,\ j = 0, .., n$ *на отрезке* $[0,T]$ *и рассмотрим две простых функции с с* $e_j(\omega) = W_{t_j}$ *и* $e_j(\omega) = W_{t_{j+1}}$*:*

$$\phi^{(1)}(t,\omega) := \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_j}(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t), \tag{10.6}$$

$$\phi^{(2)}(t,\omega) := \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_{j+1}}(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t). \tag{10.7}$$

Два интеграла, согласно (10.5)*, равны*

$$F^{(1)}(\omega) = \int_0^T \phi^{(1)}(t,\omega)dW_t(\omega) := \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_j}(\omega)\left(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)\right), \tag{10.8}$$

$$F^{(2)}(\omega) = \int_0^T \phi^{(1)}(t,\omega)dW_t(\omega) := \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_{j+1}}(\omega)\left(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)\right). \tag{10.9}$$

Используя свойства независимых приращений Винеровского процесса, можно показать, что $\mathbb{E}[F_1] = 0$*, но при этом (независимыми приращениями воспользоваться не получится) в другом случае* $\mathbb{E}[F_2] = T$*. То есть, два интеграла совершенно разные даже при* $n \to \infty$*.*

Так, подобный подход работает не для любых функций f.

10.3 Интеграл Ито

Интеграл Ито определяется для специального класса функций, который, тем не менее, не является сильно ограничивающим. Пусть $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ – фильтрация, порождённая рассматриваемым Винеровским процессом W.

Определение 10.1. *Классом* $\mathcal{V}(S,T)$ *назовём класс функций* $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *таких, что*

- *Функция* f *является* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$*-измеримой;*
- f *является согласованным с фильтрацией* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *случайным процессом;*
- $\mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)^2 dt\right] \leq \infty$.

Второе требование исключает проблему, которая обозначена в примере выше. Первое и третье требования технические, но оказываются критичными при доказательстве конструкции интеграла Ито. По ходу рассуждений станет ясно, почему именно такие требования нужны.

Начнём с того, что для простых функций $\phi_n \in \mathcal{V}(S,T)$ интеграл Ито определим как в (10.5). Понятно, что в условиях $\mathcal{V}(S,T)$ функции e_j должны быть $\mathcal{F}_{t_j}$-измеримыми. Прежде всего, в свете пункта 3 отметим один интересный факт.

Утверждение 10.2. *(Изометрия Ито) Для любой простой ограниченной функции* $\phi_n \in \mathcal{V}(S,T)$ *верно тождество*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi_n(t,\omega)dW_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T \phi_n(t,\omega)^2 dt\right].$$

$\triangleright$ Мы уже определили интеграл для простой функции, раскроем скобки под знаком матожидания:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T \phi_n(t,\omega)dW_t(\omega)\right)^2\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} e_j(\omega)^2(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 + 2\sum_{i<j}^{n-1} e_i(\omega)e_j(\omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right].$$

Рассмотрим первое слагаемое, для него мы можем использовать формулу полного матожидания с условием $\mathcal{F}_{t_j}$ (это сигма-алгебра из фильтрации Винеровского процесса):

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} e_j(\omega)^2 (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} e_j(\omega)^2 \mathbb{E}\left[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} e_j(\omega)^2 \Delta_j\right].$$

Это интеграл из правой части утверждения. Второе слагаемое с кросс-членами будет равно нулю, так как из-за $i < j$

$$\mathbb{E}\left[e_i(\omega)e_j(\omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right] =$$
$$= e_j(\omega)e_i(\omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\mathbb{E}\left[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right] = 0.$$

□

Шаг 1. Пусть $g \in \mathcal{V}(S,T)$ – непрерывная по t для каждого ω и ограниченная функция.

Лемма 10.3. *Для любой такой функции $g \in \mathcal{V}(S,T)$ существует последовательность простых функций ϕ_n, что*

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (g(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt\right] \to 0, \quad \textit{при } n \to \infty.$$

▷ Проверим, что последовательность из функций

$$\phi_n(t,\omega) = \sum_{j=0}^{n} g(t_j,\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1}]}(t)$$

с равномерным разбиением точками t_j отрезка $[S,T]$ на n отрезков подходит. Для этого запишем

$$\int_S^T (g(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (g(t,\omega) - g(t_j,\omega))^2 dt.$$

в свою очередь в силу непрерывности и ограниченности g

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (g(t,\omega) - g(t_j,\omega))^2 dt \le \max_{j=0,..,n-1} \max_{t\in[t_j,t_{j+1})} (g(t,\omega) - g(t_j,\omega))^2 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_j = M_n T,$$

при этом $M_n \to 0$. □

Шаг 2. Рассмотрим теперь ограниченную (но не обязательно непрерывную) функцию $h \in \mathcal{V}$.

Лемма 10.4. *Для любой такой функции $h \in \mathcal{V}(S,T)$ существует последовательность непрерывных ограниченных функций $g_n \in \mathcal{V}(S,T)$ таких, что*

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (h(t,\omega) - g_n(t,\omega))^2 dt\right] \to 0, \quad \textit{при } n \to \infty.$$

▷Как получить непрерывную функцию из ограниченной? Один из удобных вариантов – сделать свёртку (по t) с подходящей непрерывной функцией:

$$g_n(t,\omega) = h(\cdot,\omega) * \zeta_n(\cdot),$$

где $\zeta_n(t)$ – любая непрерывная неотрицательная функция, для которой

$$\forall t \notin [-1/n, 0]\ \zeta(t) = 0, \quad \int_{-1/n}^{0} \zeta_n(t)dt = 1.$$

В силу того, что $\zeta_n(t)$ равна нулю при $t \geq 0$, после такой свёртки получится всё ещё измеримая функция и согласованная с фильтрацией (хотя это не так очевидно и требует доказательства), а ещё g_n будет непрерывной и ограниченной. Что особенно важно:

$$g_n(t,\omega) - h(t,\omega) \to 0 \quad n \to \infty.$$

□

Шаг 3. Пусть $f \in \mathcal{V}(S,T)$.

Лемма 10.5. *Для любой функции $f \in \mathcal{V}(S,T)$ существует последовательность ограниченных функций $h_n \in \mathcal{V}(S,T)$ таких, что*

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f(t,\omega) - h_n(t,\omega))^2 dt\right] \to 0, \quad \text{\textit{при} } n \to \infty.$$

▷ Проверьте, что функции

$$h_n(t,\omega) := \begin{cases} -n, & \text{если } f(t,\omega) < -n, \\ f(t,\omega), & \text{если } f(t,\omega) \in [-n,n], \\ n, & \text{если } f(t,\omega) > n, \end{cases}$$

подходят. □

Используя эти леммы мы можем определить интеграл Ито.

Определение 10.2. *Интегралом Ито функции $f \in \mathcal{V}$ называется*

$$\int_S^T f(t,\omega)dW_t(\omega) := \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega)dW_t(\omega),$$

где предел понимается в смысле $L^2(\Omega)$, а $\phi_n \in \mathcal{V}(S,T)$ – это простые функции, такие, что

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T \left(f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega)\right)^2 dt\right] \to 0 \text{ \textit{при} } n \to \infty. \tag{10.10}$$

Давайте внимательно всмотримся в предел в смысле $L^2(\Omega)$, по определению это означает, что

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dW_t - \int_S^T \phi_n(t,\omega)dW_t(\omega)\right)^2\right] \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Предел, таким образом существует (по набору лемм выше) и не зависит от конкретного выбора последовательности ϕ_n (достаточно иметь (10.10)), так как есть факт более общей изометрии Ито.

Упражнение 10.1. *(Изометрия Ито) Докажите, что для всех $f \in \mathcal{V}(S,T)$ верна изометрия Ито:*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)^2 dt\right].$$

По сути нужно доказать, что для последовательности простых функций из определения

$$\int_S^T \phi_n^2(t,\omega) \to^{L^2} \int_S^T f^2(t,\omega).$$

10.4 Первые расчёты

Рассмотрим несколько примеров. Первый иллюстрирует одно из естественных свойств, а второй показывает, что интеграл Ито ведёт себя не совсем как привычный нам интеграл Римана или Лебега.

Упражнение 10.2. *Пусть $f(t,\omega) \equiv 1$. Покажите используя определение интеграла Ито, что*

$$\int_0^T 1 dW_t = W_T.$$

Пример 10.2. *Покажем, что*

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2}.$$

Винеровский процесс как функция $W : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ конечно же лежит в $\mathcal{V}(0,T)$, так как $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ согласован со своей же фильтрацией и из непрерывности траекторий следует пункт про измеримость и

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T W_t(\omega)^2 dt\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[W_t^2\right] dt = \frac{T^2}{2}.$$

Выберем аппроксимирующую последоваельность с помощью метода левых прямоугольников на равномерной сетке из $n+1$ точки t_j:

$$\int_0^T W_t(\omega)dW_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n W_{t_j}(\omega)(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)).$$

Под суммой добавим и вычтем $W_{t_{j+1}}(\omega)^2$, это позволит выделить полный квадрат:

$$\int_0^T W_t(\omega)dW_t(\omega) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n \left[\left(W_{t_{j+1}}(\omega)^2 - W_{t_j}(\omega)^2\right) - \left(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)\right)^2\right].$$

С левой стороны стоит телескопическая сумма, которая точно равна $W_{t_n}(\omega) = W_T(\omega)^2$. Что касается правого слагаемого, то мы можем показать, что в L^2 (а именно в этом смысле понимается предел в определении интеграла Ито)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n \left(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)\right)^2 = T.$$

Упражнение 10.3. *Докажите, используя свойства Винеровского процесса, последнее утверждение, которое говорит, что*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\big(W_{t_{j+1}}(\omega)-W_{t_j}(\omega)\big)^2-T\right)^2\right]\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Естественно, по определению такие интегралы нелегко вычислять, в следующей лекции мы рассмотрим формулу Ито, которая позволяет это делать существенно проще.

Литература

[1] Alfred Cowles 3rd. Can stock market forecasters forecast? *Econometrica*, 1(3):309–324, 1933.

[2] Alfred Cowles 3rd and Herbert E. Jones. Some a posteriori probabilities in stock market action. *Econometrica*, 5(3):280–294, 1937.

[3] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 17:21–86, 1900.

[4] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.

[5] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.

[6] L. Isserlis. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables, November 1918.

[7] M. G. Kendall and A. Bradford Hill. The analysis of economic time-series-part i: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 116(1):11–34, 1953.

[8] Robert C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1):125–144, 1976.

[9] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations (3rd Ed.): An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[10] Paul A. Samuelson. Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(2):369–374, 1973.

[11] Holbrook Working. A random-difference series for use in the analysis of time series. *Journal of the American Statistical Association*, 29(185):11–24, 1934.

[12] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов*. М:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[13] Синай Я.Г. Коралов Л.Б. *Теория вероятностей и случайные процессы*. МЦНМО, 2013.

[14] А.Н. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики*. МЦНМО, 2016.