# Исчисление Ито

По умолчанию все задачи 5 баллов, если не оговорено иного. Везде $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ – одномерный Винеровский процесс (непрерывная модификация) с $W_0 = 0$.

**Упражнение 2.1.** *Пусть*

$$X_t = tW_t + \int_0^t W_s dW_s.$$

*Найдите представление в виде процесса Ито для*

$$Y_t = cos(X_t)t.$$

*В финальном ответе можно не подставлять $X_t$ и $dX_t$, но их нужно вычислить до конца, то есть, до уровня подстановки $dt, dW_t$.*

**Упражнение 2.2.** *Найдите плотность распределения случайной величины*

$$\left(\sqrt[3]{\int_0^t W_s^2 dW_s + \int_0^t W_s ds}\right)^2.$$

**Упражнение 2.3.** *Проверьте, является ли процесс*

$$X_t = (W_t + t)e^{-W_t - \frac{t}{2}}$$

*мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F})$, порождённой Винеровским процессом $W$.*

**Упражнение 2.4.** *Будет ли процесс $X_t^2$, где $X_t$ определён как процесс Ито*

$$dX_t = v(t,\omega)dW_t,$$

*мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F})$, порождённой Винеровским процессом $W$? Покажите, что процесс*

$$M_t = X_t^2 - \int_0^t |v(s,\omega)|^2 ds$$

*будет мартингалом при условии ограниченной $v$.*

**Упражнение 2.5.** *Докажите, что для интеграла Ито верно*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^S f(t,\omega)f(s,\omega)dW_s dW_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge S} f(s,\omega)^2 dt\right]$$

**Упражнение 2.6.** *(Бонус, 2.5 балла) Найдите конечномерные распределения (плотность, если есть) процесса*

$$Y_t = \int_0^t e^{-s} dW_s,$$

*определённого для $t \in \mathbb{R}_+$. У вас в ответах может остаться интеграл Римана. Обратите внимание(!), что интеграл Ито – предел в $L^2$, а не по распределению.*

**Упражнение 2.7.** *(Бонус, 2.5 балла)Пусть* $f \in \mathcal{V}(0, T)$ *имеет ограниченную вариацию на отрезке* $[0, T]$. *Найдите конечномерные распределения (плотность, если есть) процесса*

$$Y_t = \int_0^t f(s) dW_s,$$

*определённого на* $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. *У вас в ответах может остаться интеграл Римана. Обратите внимание(!), что интеграл Ито – предел в* $L^2$, *а не по распределению.*