ЛЕКЦИЯ 12

Стохастические дифференциальные уравнения

Мы давно собирались, но теперь мы хорошо подготовлены к тому, чтобы разобраться, как думать про стохастические дифференциальные уравнения. В этой лекции мы посмотрим, что ещё интересного можно вытащить из формулы Ито.

12.1 Стохастические дифференциальные уравнения

Одно из, наверное, самых красивых применений формулы Ито – это решение стохастических дифференциальных уравнений (в смысле Ито). Такие уравнения уже отдалённо возникали в начале предыдущей лекции, теперь мы готовы определить их формально. Для простоты будем рассматривать одномерный случай, но на многомерный случай все результаты несложно обобщаются.

Определение 12.1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *– вероятностное пространство,* W *– одномерный Винеровский процесс на нём,* $b, \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Интегральное уравнение на случайный процесс* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \tag{12.1}$$

где второй интеграл понимается в смысле Ито, называют стохастическим дифференциальным уравнением Ито.

Уравнение 12.1, как правило записывают в дифференциальной форме, как в предыдущей главе:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

Отсюда и идёт название *дифференциальное уравнение*, хотя на самом деле это более короткая запись интегрального уравнения. Как ни странно, несмотря на кажущуюся дальность от настоящих дифференциальных уравнений, для подобного уравнения есть аналогичная теорема существования и единственности, которую, правда, технически существенно сложнее доказать.

Теорема 12.1. *Пусть* $T > 0$*, функции* $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* W *– одномерный Винеровский процесс на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Пусть выполнены*

1. *(Условие роста) Существует константа* C *такая, что для всех* t *и* x *верно*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \le C(1 + |x|);$$

2. *(Условие Липшица) Существует константа $D > 0$ такая, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq D|x - y|;$$

3. *(Нач. условие) Z – случайная величина, независимая от Винеровского процесса и такая, что $\mathbb{E}[Z^2] < \infty$.*

Тогда существует и единственно решение $(X_t)_{t\in[0,T]}$ дифференциального уравнения

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = Z \text{ п.н.}.$$

Стохастические дифференциальные уравнения возникают ровно в тех ситуациях, которые мы обсуждали на предыдущей лекции: когда есть детерминированная модель, но хочется добавить случайный шум.

Пример 12.1. *Рост суммы банковского вклада с капитализацией и непрерывным начислением процентов со ставкой r% годовых описывается обыкновенным дифференциальным уравнением*

$$\frac{dX}{dt} = rX, \ X(0) = X_0.$$

Известно решение этой задачи Коши:

$$X(t) = X_0 e^{rt}.$$

Как быть, если процентная ставка подвержена некоторым случайным возмущениям, например, от биржи? Можем записать модель в виде стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dX_t = (rdt + \sigma dW_t)X_t.$$

Из решения уравнения без Винеровского процесса можно предложить преобразование $g(t,x) = \ln x$ (попробуйте мысленно поделить обе части на X_t и обратить внимание на то, что слева). Используя формулу Ито, для процесса $Y_t = \ln X_t$ получим

$$dY_t = \frac{1}{X_t}dt - \frac{1}{2X_t^2}(dX_t)^2,$$
$$dY_t = (r - \sigma^2/2)dt + \sigma dW_t.$$

Перейдя к интегральной форме, получим решение:

$$\ln X_t = \ln X_0 + (r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t.$$

Так X – это в точности процесс геометрического Броуновского движения с параметрами $r, \sigma, X_0 \in \mathbb{R}$, которое мы рассматривали в Лекции 4.

Пример 12.2. *Рассмотрим уравнение*

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dW_t$$

с ненулевыми $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$ и некоторым начальным условием X_0. Без члена с dW_t получим обыкновенное уравнение с известным решением $X_0 e^{-\theta t}$, однако попробовав формулу Ито, поймём, что нужно немного внимательнее быть со знаком в экспоненте. Рассмотрим

$$Y_t = X_t e^{\theta t}$$

и применим формулу Ито, получим, что

$$dY_t = \sigma e^{\theta t} dW_t$$

или, в интегральной форме и с обратной заменой $X_t = e^{-\theta t} Y_t$,

$$X_t = X_0 e^{\theta t} + \sigma \int_0^t e^{\theta(s-t)} dW_s.$$

Можно показать, что X – гауссовский процесс и, дополнительно, по формуле интегрирования по частям

$$\int_0^t e^{\theta(s-t)} dW_s = W_t - \int_0^t e^{\theta(s-t)} W_s ds.$$

Посчитав ковариационную функцию и матожидание, мы увидим, что X – это в точности процесс Орнштейна-Уленбека из Лекции 4.

Упражнение 12.1. *Процесс Орнштейна-Уленбека, возвращающийся к заданному среднему $\mu \in \mathbb{R}$ будет иметь уравнение*

$$dX_t = (\mu - X_t)dt + \sigma dW_t.$$

Используя формулу Ито и предыдущий пример, запишите решение этого уравнения (если будет оставаться неупрощаемый интеграл по dt в правой части, то это нормально).

Вполне естественно, что далеко не все стохастические дифференицальные уравнения решаются аналитически. Для целей финансового моделирования используются часто модели, для которых можно что-то доказать, но, как правило, решаются уравнения численными методами (как это делать, см. последнюю главу лекции). Например, мы уже упоминали, что геометрическое Броуновское движение (процесс GBM) можно использовать как базовый строительный блок, в котором можно заменять процентную ставку и волатильность различными случайными процессами и моделями временных рядов, получая при этом более сложную динамику, моделируемую с помощью более сложного дифференциального уравнения (в смысле Ито). Рассмотрим в этом свете две новых модели, которые ранее не встречались.

Пример 12.3. *Модель процентных ставок, похожая на Упражнение 12.1,*

$$dR_t = \theta(\mu - R_t)dt + \sigma dW_t, \quad \theta > 0, \ \mu > 0$$

в финансовой литературе называется моделью Вашичека (Vašiček) и известна с 1977го года. Обощением модели Вашичека является модель Хола-Уайта (Hull-White), предложенная в 1990 году:

$$dR_t = (\theta(t) - \alpha R(t))dt + \sigma(t)dW_t.$$

Интуитивно, $\theta(t)$ позволяет описывать некоторую детерминированную динамику (например, тренд или сезонность), а член $-\alpha R(t)$ даёт компонент от процесса Орнштейна-Уленбека, заставляя решение двигаться в сторону значения $\theta(t)$. Наконец, $\sigma(t)$ позволяет отказаться от постоянной волатильности и описывать её некоторой детерминированной функцией. Обобщение этой модели на случай переменного $\alpha(t)$ тоже называется моделью Хола-Уайта.

Пример 12.4. *Другим обобщением модели Вашичека явилась модель Кокса-Ингерсолла-Росса (1985), которая связала волатильность с самой процентной ставкой.*

$$dR_t = \theta(\mu - R_t)dt + \sigma\sqrt{R_t}dW_t, \quad \theta > 0.$$

В этой модели помимо уже известных эффектов стремления к среднему, описывается также и феномен большей волатильности при большей процентной ставке. Интересно, что при любых (!) положительных θ, μ, σ значение R_t остаётся неотрицательным, более того, ноль не достигается, если волатильность достаточно мала по сравнению с $\theta\mu$, то есть, при $2\theta\mu \geq \sigma^2$.

Все эти модели можно оценивать из данных реализаций временного ряда, однако построение таких процедур – это вопрос исследовательского уровня.

12.2 Численные методы решения

Наконец, давайте попробуем привести несколько методов для численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Последнее пригождается, например, для вычисления квантилей статистики ADF-теста (расширенный критерий Дики-Фулера).

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{12.2}$$

с начальным условием $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Положим, что решение существует и единственно. Общая идея состоит в том, чтобы ввести дискретизацию по времени и затем построить итеративный алгоритм.

Первый простейший метод, как и в обыкновенных дифференциальных уравнениях, – это *явный метод Эйлера* (для стохастических уравнений такой метод называют также *методом Эйлера-Маруямы*):

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} + b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta W_k, \quad X_0 = x_0$$
$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}.$$

Можно показать, что средняя ошибка метода имеет порядок $O(\sqrt{\Delta t})$, на полпорядка меньше, чем для обыкновенного дифференциального уравнения. Тем не менее, в силу вычислительной эффективности часто именно он используется для многих задач.

Если требуется делать более точные вычисления, то для автономных уравнений (b и σ не зависят от t) есть следующий метод, называемый *методом Мильштейна*:

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} + b(X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(X_{t_k})\Delta W_k + \frac{1}{2}b(X_{t_k})b'(X_{t_k})((\Delta W_k)^2 - \Delta t_k), \quad X_0 = x_0$$
$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}.$$

Такой метод имеет среднюю ошибку порядка $O(\Delta t)$ и почти так же эффективен, как и метод Эйлера. Требуется, правда, автономность(что не всегда выполняется) и дифференцируемость b.

Наконец, есть аналоги методов Рунге-Кутты для стохастических дифференциальных уравнений, но записываются они более сложно.

12.3 Формула Блэка-Шоулза

Формулу Блэка-Шоулза можно вывести, если знать модель позади процесса цен. Эта формула получается для случая Европейского опциона на $d = 1$ товар. В модели Блэка-Шоулза рассматривается рынок состоящий из безрискового актива B_t (банковский счёт), растущего за счёт постоянной процентной ставки r, и рискового актива на бирже с ценами X_t. Математически они изменяются как

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x_0,$$
$$dB_t = rB_t, B_0 = 1.$$

Инвестор может распределять свой капитал между двумя активами. Поскольку второй актив безрисковый, удобнее рассматривать его как бэйзлайн и смотреть, сколько можно получить по сравнению с ним. Второе уравнение решается легко, это просто $B_t = e^{rt}$. Так, можно рассматривать преобразованный ряд цен

$$\widetilde{X}_t = X_0 e^{(\mu - r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

В любом случае, если мы оцениваем опцион, то правильнее его оценивать исходя из преобразованного ряда, потому что нет смысла работать с рисковым активом, если он растёт медленнее безрискового. Итак, мы имеем модель цены

$$X_t = X_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t},$$

где мы опускаем тильду И напишем μ вместо $\mu - r$ для красоты, держа в уме, что ряд преобразованный.

Вспомним евро-опцион, его цена – это максимально возможный выигрыш при самом выгодном использовании (при условии, что опцион уже на руках). Европейский опцион можно использовать (или не использовать), в момент истечения T, то есть, нам нужно посчитать

$$P_t = e^{-\mu(T-t)}\mathbb{E}\left[f(X_T) \mid X_t = x\right].$$

Функция выплат f в случае евро-опциона выглядит как

$$f(x) = (K-x)_+ \quad (Put)$$

или

$$f(x) = (x-K)_+ \quad (Call).$$

Рассмотрим формулу для Call, для Put она выводится точно так же. Здесь помогает точное вычисление и знание распределения X_T:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(X_T) \mid X_t = x\right] &= \mathbb{E}\left[(X_T-K)\mathbb{1}(X_T > K) \mid X_t = x\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}(X_T > k) \mid X_t = x\right] - K\mathbb{P}\left(X_T > K \mid X_t = x\right).\end{aligned}$$

При условии $X_t = x$ распределение цены актива

$$X_T \sim logN\left((\mu-\sigma^2/2)(T-t) + \ln x,\ \sigma^2(T-t)\right).$$

По этой причине вероятность

$$\mathbb{P}\left(X_T > K \mid X_t = x\right) = \Phi\left(\frac{\ln(x/K) + (\mu-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

Чтобы это получить, достаточно заметить, что $\ln X_T$ имеет нормальное распределение, у которого $\Phi(x)$ – это функция распределения.

Аналогично можем рассмотреть первое:

$$\mathbb{E}\left[X_T \mathbb{1}(X_T > K) \mid X_t = x\right] = \int_K^\infty z \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}z} e^{-\left(\ln z - \left((\mu-\sigma^2/2)(T-t)+\ln x\right)\right)^2/(2\sigma^2(T-t))} dz.$$

делаем замену $y = \ln z$, тогда

$$\int_K^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} e^{-\left(\ln z - \left((\mu-\sigma^2/2)(T-t)+\ln x\right)\right)^2/(2\sigma^2(T-t))} dz =$$
$$= \int_{\ln K}^\infty \frac{e^y}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} e^{-\left(y - \left((\mu-\sigma^2/2)(T-t)+\ln x\right)\right)^2/(2\sigma^2(T-t))} dy.$$

После выделения полного квадрата останется

$$\int_{\ln K}^\infty \frac{e^y}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} e^{-\left(y - \left((\mu-\sigma^2/2)(T-t)+\ln x\right)\right)^2/(2\sigma^2(T-t))} dy =$$
$$= e^{\ln x + \mu(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln(x/K) + (\mu+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

и в результате получим формулу

$$P_t = x\Phi\left(\frac{\ln(x/K) + (\mu+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + Ke^{-\mu(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(x/K) + (\mu-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

12.4 Уравнение Блэка-Шоулза

Вообще премию Блэку и Шоулзу, конечно, дали не за этот вывод, а за дифференциальное уравнение, которое не только позволяет вычислить цену (с позиции вычислений оно даже не очень удобно), но что важнее, открывает глаза на то, какие факторы оказывают влияние на цену. Такое уравнение было бы, вероятно, невозможно получить без развития инструментов исчисления Ито.

Всё начинается с модели цен; геометрическое Броуновское движение во многом продиктовано эмпирическими наблюдениями.

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

Пусть цена опциона (или вообще некоторого дериватива) $C(x,t)$ в момент t при цене x – это функция достаточно гладкая, чтобы можно было применить формулу Ито. Конечно, это скорее всего не так, но это позволит нам получить уравнение и в перспективе доказать, что у него есть и более реалистичные решения в подходящем смысле. Такая ситуация – не редкость. Если можно применить формулу Ито, то тогда

$$dC = \partial_t C(X_t,t)dt + \partial_x C(X_t,t)dX_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 C(X_t,t)(dX_t)^2,$$

а после упрощения и подстановки

$$dC = \left(\partial_t C(X_t,t) + \partial_x C(X_t,t)\mu X_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 C(X_t,t)\sigma^2 X_t^2\right)dt + \partial_x C(X_t,t)\sigma X_t dW_t.$$

Далее следует очень интересная идея. Согласно этому уравнению, весь риск и вся случайность динамики даётся последним слагаемым. Мы могли бы докупить в портфель ещё немного (Δ) актива X_t, чтобы исключить этот риск полностью, тогда общий капитал портфеля будет $C + \Delta X_t$, а в уравнении для портфеля

$$d(C+\Delta X_t) = \left(\partial_t C(X_t,t) + \partial_x C(X_t,t)\mu X_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 C(X_t,t)\sigma^2 X_t^2\right)dt + (\partial_x C(X_t,t)+\Delta)\sigma X_t dW_t.$$

Если мы хотим исключить случайность в динамике цены портфеля, то выбор очевиден:

$$\Delta = -\partial_x C(X_t,t).$$

Такой приём называется *дельта-хеджированием*, а величина $-\partial_x C(X_t,t)$ оценивается для деривативов и называется *дельтой*. По фундаментальной теореме оценивания (Fundamental Theorem of Asset Pricing), на полном эффективном рынке (это отдельная тема для разговоров на уровне построения специальных мер) безрисковый портфель должен расти с процентной ставкой r:

$$d(C+\Delta X_t) = r(C+\Delta X_t)dt.$$

Если приравняем теперь правую часть с тем, что было выше, и уберём с обеих сторон dt, то получим *уравнение Блэка-Шоулза* для цены опциона:

$$\partial_t C + rx\partial_x C + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_x^2 C = rC.$$

Это уравнение в частных производных на функцию $C(x,t)$, которое можно рассматривать с краевым условием $C(x,T) = c_T(x)$, то есть, известной ценой в момент истечения.

Мы получили интересный факт: некоторая функция от случайного процесса удовлетворяет вполне детерминированному дифференциальному уравнению в частных производных. И это не случайное наблюдение, далее в диффузиях мы увидим ещё больше таких примеров.