Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс - это пример процесса, на основе которого можно понять связь между более общими случайными процессами и цепями Маркова. Эта связь основана на задании процесса с помощью независимых приращений. Мы уже встречались с независимыми приращениями, когда изучали Винеровский процесс. В цепях Маркова аналогом независимых приращений является свойство независимости перехода из состояния $X_{t-1} = i$ в состояние $X_t = j$ от переходов в предыдущие моменты времени.

5.1 Мотивационный пример

Допустим, мы хотим описать поведение n пользователей приложения Яндекс.Такси. Зафиксируем интервал времени (t, s), например $(00:00 - 01:30)$. Пусть Y_i - случайная величина, моделирующая решение пользователя вызвать такси в интервале времени (t, s). Она подчиняется распределению Бернулли с параметром $p_n(t, s) = P(Y_i = 1)$, тогда число вызовов такси в заданный интервал времени можно описать случайной величиной $\nu^n = \sum\limits_{i=0}^{n} Y_t$. Если число пользователей n велико, то логично рассмотреть предельное распределение случайной величины ν^n. Введем следующее допущение: пусть среднее число заказов такси в заданный интервал времени (t, s) равно $\lambda(s - t)$. Тогда предельное распределение случайной величины ν^n - распределение Пуассона с параметром $\lambda(s - t)$.

5.2 Предельная теорема Пуассона

Теорема 5.1. *Пусть $X_i, i = 1, 2, ..., n$ - набор независимых Бернуллиевских случайных величин с параметром $p_n = P(X_i = 1)$. Определим ν^n как число успехов в n независимых испытаниях Бернулли, т.е. $\nu^n = \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\nu^n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$.*

Доказательство. Для начала запишем распределение случайной величины ν_n при фиксированном n:

$$P(\nu_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k}.$$

Теперь рассмотрим предел при $n \to \infty$ первого множителя:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!} \cdot n(n-1)...(n-k+1) p_n^k =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!} 1(1 - \frac{1}{n})...(1 - \frac{k-1}{n})(np_n)^k = \frac{1}{k!}\lambda^k.$$

Рассмотрим второй множитель:

$$\lim_{n\to\infty}(1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\exp[(n-k)\ln(1-p_n)] = \lim_{n\to\infty}\exp[(1-\frac{k}{n})\cdot n(-p_n)] = \exp(-\lambda).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} P(\nu_n = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k \exp(-\lambda).$$

□

Определение 5.1. *Распределение вероятностей на дискретном множестве $\mathbb{Z}_+$, задаваемое формулой*

$$p(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp^{-\lambda}\mathbb{1}\{k \geq 0\}, \tag{5.1}$$

называется распределением Пуассона с параметром λ, обозначаемым как $Pois(\lambda)$.

Упражнение 5.1. *Покажите, что формула 5.1 в самом деле задает распрделение вероятностей.*

5.3 Определение процесса Пуассона

Давайте построим процесс Пуассона $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, задав его приращения $X_t - X_s \quad \forall s < t \in \mathbb{R}_+$, а потом с помощью теоремы Колмогорова докажем, что такой процесс существует.

Определение 5.2. *Пусть $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ - случайный процесс с пространством значение $\Xi = \mathbb{Z}_+$ (σ-алгебра $\mathcal{F}$ состоит из всех подмножеств), обладающий следующими свойствами:*

1. *$X_0 = 0$ почти наверное,*
2. *$X_t - X_s \sim Pois(\lambda(t-s))$, где $\lambda > 0$ - параметр, $0 \leq s < t$,*
3. *$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ - независимые случайные величины $\forall 0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k$.*

Такой процесс называется процессом Пуассона.

5.3.1 Проверка теоремы Колмогорова

Для начала давайте найдем выражение для мер $\nu_{t_1,...,t_k}(A_1,...,A_k) = P(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_k} \in A_k)$, задающих конечномерные распределения, для упорядоченных моментов времени $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k$ (примем $t_0 = 0$). Пусть $\{\eta_i\}_{i-1}^k$ - независимые случайный величины, каждая из которых имеет распределение Пуассона $Pois(\lambda(t_i - t_{i-1}))$ (см. формулу 5.1). С помощью этих величин мы закодируем приращения процесса Пуассона. Рассмотрим случайный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_1 + \eta_2, ..., \eta_1 + ... + \eta_k)$. По определению процесса Пуассона его конечномерное распределение для времен $t_1, ...t_k$ совпадают с распределениями вектора η.

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_k} \in A_k) = \\
&\qquad = \sum_{z_i \in A_i} P(\eta_1 = z_1, \eta_1 + \eta_2 = z_2, ..., \eta_1 + ... + \eta_k = z_k) = \\
&\qquad = \sum_{z_i \in A_i} P(\eta_1 = z_1, \eta_2 = z_2 - z_1 ..., \eta_k = z_k - z_{k-1}) = \\
&\qquad = \sum_{z_i \in A_i} p(z_1; \lambda t_1) p(z_2 - z_1; \lambda(t_2 - t_1))...p(z_k - z_{k-1}; \lambda(t_k - t_{k-1})).
\end{aligned}
$$

Несложно показать, что меры согласованы, а следовательно, процесс Пуассона существует. Давайте сделаем это:

1. Для произвольного набора моментов времени (не обязательного упорядоченного) $t_1, ...t_k$ найдем такую (сортирующую) перестановку σ, что $\sigma(t_1) \le ... \le \sigma(t_k)$, и зададим меру следующим образом:

$$\nu_{t_1,...,t_k}(A_1, ...A_k) = \nu_{\sigma(t_1),...,\sigma(t_k)}(\sigma(A_1), ..., \sigma(A_k)).$$

2. Пусть $t_1, .., t_k, t_{k+1}$ – упорядченный набор времён и $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k$, рассмотрим

$$
\begin{aligned}
&\nu_{t_1,..,t_k,t_{k+1}}(A_1, ...A_k, \mathbb{Z}_+) = \\
&= \sum_{z_1 \in A_1,...,z_{k+1} \in \mathbb{Z}_+} p(z_1; \lambda t_1) p(z_2 - z_1; \lambda \Delta t_1)..p(z_k - z_{k-1}; \lambda \Delta t_{k-1}) p(z_{k+1} - z_k; \lambda \Delta t_k) = \\
&= \sum_{z_1 \in A_1,...z_k \in A_k} \left[p(z_1; \lambda t_1) p(z_2 - z_1; \lambda \Delta t_1)...p(z_k - z_{k-1}); \lambda \Delta t_{k-1}) \sum_{z_{k+1} \in \mathbb{Z}_+} p(z_{k+1} - z_k; \lambda \Delta t_k) \right].
\end{aligned}
$$

Рассмотрим последнюю сумму:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{z_{k+1} \in \mathbb{Z}_+} p(z_{k+1} - z_k); \lambda(t_{k+1} - t_k)) = \sum_{z_{k+1} \in \mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^{(z_{k+1} - z_k)}}{(z_{k+1} - z_k)!} \exp^{-\lambda} \mathbb{1}\{z_{k+1} - z_k \ge 0\} = \\
&= \sum_{z_{k+1} - z_k \ge 0} \frac{\lambda^{(z_{k+1} - z_k)}}{(z_{k+1} - z_k)!} \exp^{-\lambda} = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^m}{m!} \exp^{-\lambda} = 1.
\end{aligned}
$$

В итоге

$$
\begin{aligned}
&\nu_{t_1,...,t_k,t_{k+1}}(A_1, ...A_k, \mathbb{Z}_+) = \\
&= \sum_{z_1 \in A_1,...z_k \in A_k} p(z_1; \lambda t_1) p(z_2 - z_1; \lambda(t_2 - t_1))...p(z_k - z_{k-1}); \lambda(t_k - t_{k-1})) = \\
&= \nu_{t_1,...,t_k}(A_1, ...A_k).
\end{aligned}
$$

5.4 Траектории процесса Пуассона

Траектории процесса Пуассона можно рассматривать как пути на графе $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \mathbb{Z}_+$, при этом переходы между вершинами совершаются не в дискретные моменты времени $t \in \mathbb{Z}_+$, а в непрерывные $t \in \mathbb{R}_+$. Путь на графе, описывающий процесс Пуассона, определяет последовательность вершин $V_0 \neq V_1 \neq V_2 \neq V_3 ...$. Заметим, что по определению процесса Пуассона пути на графе начинаются в вершине $V_0 = 0$ почти наверное. Рассуждая в терминах марковских цепей, можно сказать, что начальное распределение сосредоточено в нуле.

На самом деле путь на графе, соответствующей почти любой реализации процесса Пуассона, является последовательностью $(0, 1, 2, 3, ...)$. Это означает, что если за ξ_i мы обозначим время, проведенное в вершине $V_{i-1} = i - 1$ до перехода в вершину $V_i = i$, то процесс Пуассона удовлетворяет следующему свойству:

$$X_t = \sup\{n \geq 0 : \sum_{i \leq n} \xi_i \leq t\}. \tag{5.2}$$

При этом время между скачками ξ_i имеет показательное распределение:

$$P(\xi_i = t) = \lambda \exp(-\lambda t) \mathbb{1}\{t \geq 0\}. \tag{5.3}$$

Заметим, что это распределение не зависит от номера скачка i и от момента предыдущего скачка ξ_{i-1}, т.е. случайные величины ξ_i являются независимыми и одинаково распределенными. Таким образом, траектория - кусочно-постоянная, непрерывная справа, скачки равны 1.

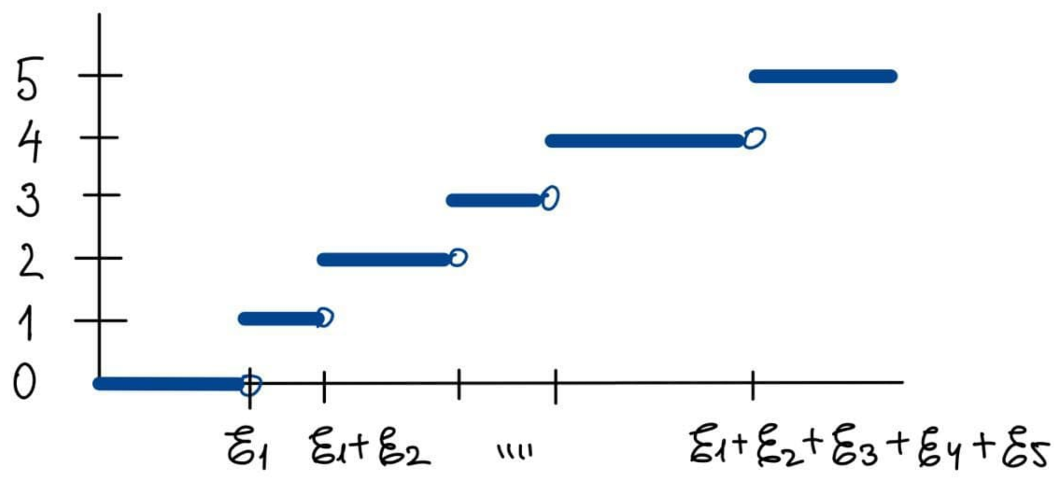

Рис. 5.1: Траектория Пуассоновского процесса

Теорема 5.2. *(Эквивалентное определение процесса Пуассона)*
Процесс Пуассона можно также задать как процесс $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, проводящий случайное время $\xi_i \sim Exp(\lambda)$ в состоянии $i-1$, а затем попадающий в состояние i, $i = 1, 2, ...$, т.е.

$$X_t = \sup\{n \geq 0 : \sum_{i\leq n} \xi_i \leq t\},$$
$$P(\xi_i = t) = \lambda \exp(-\lambda t)\mathbb{1}\{t \geq 0\},$$

где ξ_i - независимые случайные величины.

Доказательство. Для начала докажем, что из определения процесса пуассона через моменты скачков следует, что приращения независмые пуассоновские. Запише распределение для X_t через случайные веоичины ξ_i:

$$P(X_t = k) = P(\xi_1 + ... + \xi_k < t < \xi_1 + ... + \xi_k + \xi_{k+1}).$$

Случайная величина $H_k = \xi_1 + ... + \xi_k$, определяющая время перехода в состояние k, является суммой независимых экспоненциальных случайных величин с параметром λ, а поэтому имеет гамма-распределение с плотностью $f_k(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$. Также для экспоненциальной случайной величины ξ верно следующее: $P(\xi \geq x) = \exp(-\lambda x)$ при $x > 0$. Из этого следует, что

$$P(X_t = k) = \int_0^t P(\xi_{k+1} > t - x) f_k(x) dx = \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx =$$
$$= \frac{\lambda^k e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \int_0^t x^{k-1} dx = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Экспоненциальная случайная величина обладает свойством отсутствия памяти, а именно:

$$P(\xi > t + s | \xi > s) = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(\xi > t).$$

В нашем случае оно означает, что если скачок не произошел к моменту времени s, то время от момента s до следующего скачка распределено так же, как время от момента $t = 0$ до следующего скачка. То есть если нам дана информация до момента s, то мы можем как бы обнулить наше время ожидания и начать ждать заново.

Из этого свойства для $s = t_{n-1}$, следует независимость приращений:

$$P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = k_n | X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = k_{n-1}, ...X_{t_1} - X_0 = k_1) =$$
$$= P(X_{t_n - t_{n-1}} = k_n) = \frac{(\lambda(t_n - t_{n-1}))^{k_n} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}}{k_n!}.$$

Теперь докажем утверждение в обратную сторону: если процесс имеет независимые Пуассоновские приращения, то интервалы времени переходов - независимые экспоненциальные случайные величины. Первым шагом определим распределения для приращений за малый интервал времени.

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t+h} - X_t = k) = \frac{(\lambda h)^k}{k!} \exp(-\lambda h),\\
&P(X_{t+h} - X_t = 0) = \exp(-\lambda h) = 1 - \lambda h + o(h),\\
&P(X_{t+h} - X_t = 1) = (\lambda h) \exp(-\lambda h) = \lambda h + o(h),\\
&P(X_{t+h} - X_t \geq 2) = o(h).
\end{aligned}
$$

Вторым шагом рассмотрим вероятность того, что на интервале времени $(0,t]$ нет скачков размера больше 1. Для этого представим интервал $(0,t]$ как объединение $m = t/h$ непересекающихся интервалов длины h. На них приращения независимы. Поэтому эта вероятность равна

$$
[P(X_{t+h} - X_t = 0) + P(X_{t+h} - X_t = 1)]^m = [1 - \lambda h + \lambda h + o(h)]^m \to 1, m \to \infty.
$$

Последним шагом найдем совместное распределение интервалов меду скачками. Пусть $H_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i$ - время k-го скачка. Тогда плотность совместного распределения для $H_1, H_2, ...H_k$ принимает следующую форму:

$$
\begin{aligned}
&f_{H_1,...H_k}(t_1, ...t_k) = \lim_{h\to 0} \frac{P(t_1 < H_1 \leq t_1 + h, ...t_k < H_k \leq t_k + h)}{h^k} =\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{P(X_{t_1} = 0, X_{t_1+h} - X_{t_1} = 1, ...X_{t_k} - X_{t_{k-1}+h} = 0, X_{t_k+h} - X_{t_k} = 1)}{h^k} =\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(-\lambda t_1)\lambda h \exp(-\lambda h)... \exp(-\lambda(t_k - t_{k-1} - h))\lambda h \exp(-\lambda h)}{h^k} =\\
&= \lambda^k \exp(-\lambda t_k).
\end{aligned}
$$

Чтобы получить плотность совместного распределения для $\xi_1, ...\xi_k$, достаточно умножить плотность совместного распределения для $H_1, H_2, ...H_k$ на якобиан, который равен 1. Поэтому

$$
f_{\xi_1,...\xi_k}(s_1, ...s_k) = f_{H_1,...H_k}(s_1, ..., s_1 + ... + s_k) = \lambda^k \exp(-\lambda(s_1 + ... + s_k)) = \prod_{i=1}^{k} [\lambda \exp(-\lambda s_i)].
$$

Это означает, что величины ξ_i являются независимыми и экспоненциально распределёнными. □

5.5 Свойства процесса Пуассона

Упражнение 5.2. *Пуассоновский процесс $(X_t^\lambda)_{t\in\mathbb{R}_+}$ с интенсивностью λ можно получить из пуассоновского процесса $(X_t^1)_{t\in\mathbb{R}_+}$ с интенсивностью 1 с помощью замены времени:*

$$
(X_t^\lambda) \sim (X_{\lambda t}^1).
$$

Упражнение 5.3. *Пусть* $(X_t^{\lambda_1})_{t\in\mathbb{R}_+}$ *и* $(X_t^{\lambda_2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ *два независимых Пуассоновских процесса. Тогда их сумма* $X_t = X_t^{\lambda_1} + X_t^{\lambda_2}$ *является Пуассоновским процессом с параметром* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Упражнение 5.4. *Пусть* $(X_t^{\lambda})_{t\in\mathbb{R}_+}$ *- Пуассоновский процесс с параметром* λ, *а* $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *- это прореженный процесс* $(X_t^{\lambda})_{t\in\mathbb{R}_+}$, *такой, что каждый скачок разрешается с вероятностью* p, *где* $0 < p < 1$. *Тогда* $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *- это процесс Пуассона с параметром* $(p\lambda)$.

5.6 Процесс Пуассона как марковская цепь с непрерывным временем

Определение 5.3. *Q-матрицей называется матрица Q, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *диагональные элементы неположительны* $q_{ii} \leq 0, \forall i$,
2. *внедиагональные элементы неотрицательны* $q_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$,
3. *выполнено условие баланса* $\sum\limits_j q_{ij} = 0$.

Элементы Q-матрицы q_{ij} описывают скорости перехода из состояния i в состояние j.

Теорема 5.3. *Пусть Q является Q-матрицей. Тогда матрица $P(t) = \exp(tQ)$ является стохастической и обладает полугрупповым свойством:*

$$P(t+s) = P(s)P(t) \quad \forall s, t \geq 0. \tag{5.4}$$

Доказательство. Напомним определение матричной экспоненты:

$$\exp(tQ) = I + \sum_{k\geq 1} \frac{(tQ)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(tQ)^k}{k!}.$$

Полугрупповое свойство следует из определения матричной экспоненты, если использовать биноминальное разложение:

$$((t+s)Q)^k = (t+s)^k Q^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l t^l s^{k-l} Q^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l (tQ)^l (sQ)^{k-l}.$$

Тогда

$$\exp((t+s)Q) = \sum_{k\geq 0} \frac{((t+s)Q)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} C_k^l (tQ)^l (sQ)^{k-l} = \sum_{k\geq 0} \sum_{l=0}^{k} \frac{(tQ)^l}{l!} \frac{(sQ)^{k-l}}{(k-l)!}$$

и

$$\exp(tQ) \cdot \exp(sQ) \sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!} (tQ)^l \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} (sQ)^m = \sum_{k\geq 0} \sum_{l=0}^{k} \frac{(tQ)^l}{l!} \frac{(sQ)^{k-l}}{(k-l)!}.$$

Теперь займемся доказательством стохастичности матрицы $P(t) = \exp(tQ)$.

Для начала заметим, что по определению $\sum_j q_{ij} = 0$, т.е. сумма элементов в строке матрицы Q равна нулю. То же самое верно и для матрицы Q^n:

$$\sum_j q_{ij}^{(n)} = \sum_{j,l} q_{il}^{(n-1)} q_{lj} = \sum_l q_{il}^{(n-1)} \sum_j q_{lj} = \sum_l q_{il}^{(n-1)} = 0.$$

Т.к. по определению

$$P(t) = \exp(tQ) = I + \sum_{k \geq 1} \frac{(tQ)^k}{k!},$$

сумма элементов в строке матрицы $P(t)$ равна 1.

Теперь докажем, что элементы матрицы $P(t)$ неотрицательны для малых $t > 0$:

$$P(t) = I + tQ + o(t),$$
$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} + tq_{ij} + o(t).$$

Это означает, что $p_{ii}(t) > 0$ и $p_{ij}(t) > 0$ для $i \neq j$, при условии $q_{ij} > 0$.

В случае, если $q_{ij} = 0$, мы можем рассмотреть разложение Тейлора для более высоких порядков. Рассуждая по индукции, приходим к выводу: если найдется такое $n > 0$, что $q_{ij}^n > 0$, тогда $p_{ij}(t) > 0$. В противном случае $p_{ij} = 0$.

Чтобы перейти от малых $t > 0$ к произвольным $t > 0$, используем полугрупповое свойство:

$$P(t) = P\left(\frac{t}{n}\right) P\left(\frac{t}{n}\right) ... P\left(\frac{t}{n}\right) = \left[P\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

Таким образом мы доказали, что $P(t)$ является стохастической матрицей. □

Определение 5.4. *Цепь Маркова в непрерывном времени с Q-матрицей Q и начальным распределением μ - это случайный процесс $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ со значениями в $\mathbb{Z}_+$, удовлетворяющий следующим свойствам:*

1. $P(X_0 = i) = \mu_i$,
2. $P(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, ..., X_{t_n} = i_n) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1) ... p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$, $0 < t_1 < ... < t_n$,

где $p_{ij}(t)$ - это элементы матрицы $P(t) = \exp(tQ)$.

Утверждение 5.4. *Траектория Марковской цепи с непрерывным временем с Q-матрицей Q проводит в состоянии i случайное время, распределенное экспоненциально с параметром $q_i = -q_{ii}$, а затем переходит в состояние $j \neq i$ с вероятностью $\frac{q_{ij}}{q_i}$.*

Доказательство этого утверждения оставляем читателю.

Опишем конструктивный способ задания марковской цепи с непрерывным временем, аналогичный способу, которым мы строили процесс Пуассона. Зададим следующие случайные величины:

1. ξ_i^n - интервал времени, проведенный в состоянии i, между $(n-1)$-ым переходом и n-ым переходом , распределен экспоненциально с параметром $-q_{ii}$,

2. H^n - время n-го перехода,

3. η_i^n - состояние после n-го перехода из состояния i, имеет распределение $P(\eta_i^n = j) = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}$,

4. $S^n = \eta_{S^{n-1}}^n$ - n-е состояние.

Тогда процесс можно построить следующим образом:

1. $X_0 = S^0 \sim \mu$ - в начальный момент времени нулевое состояние процесса распределено по μ,

2. $H^0 = 0$, $H^n = H^{n-1} + \xi_{S^{n-1}}^n$ - генерируем момент времени n-го перехода,

3. $S^n = \eta_{S^{n-1}}^n$ - генерируем n-ое состояние,

4. $X_t = S^n$ при $t \in [H^n, H^{n+1})$ - процесс находится в состоянии S^n до следующего перехода.

Теорема 5.5. *Для Марковской цепи в непрерывном времени верны свойства, аналогичные свойствам Марковской цепи в дискретном времени:*

1. $P(X_t = j|X_0 = i) = P(X_{t+s} = j|X_s = i) = p_{ij}(t)$,

2. $P(X_{t_n} = j|X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ...X_0 = i_0) = P(X_{t_n} = j|X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = p_{ij}(t_n - t_{n-1})$,

3. $P(X_t = j) = (\mu P(t))_j$.

Доказательство. Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам свойств цепей Маркова в дискретном времени. □

Пример 5.1. *Процесс Пуассона можно описать как Марковскую цепь в непрервном времени с Q-матрицей вида*

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & ... \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & ... \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Матрицу $P(t) = \exp(tQ)$ *можно записать в следующем виде:*

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)}{2!} e^{-\lambda t} & ... \\ 0 & e^{-\lambda t} & \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t} & ... \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что строки матрицы $P(t)$ *описывают распределение Пуассона с параметром* (λt). *Доказательство оставляем читателю.*