

2. Винеровский процесс

По умолчанию все задачи 5 баллов, если не оговорено иного.

Упражнение 2.1. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство, $(X_t)_{t \in T}$ – гауссовский процесс с индексным пространством $T = \mathbb{R}$ и принимающий значения в $\Xi = \mathbb{R}$, обладающий нулевым матожиданием и ковариационной функцией

$$K(t, s) = e^{-\frac{|t-s|^2}{2}}.$$

Докажите, что траектории X в каждой точке $t \in T$ являются почти наверное непрерывными.

Упражнение 2.2. Докажите, что следующие два определения $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ одномерного Винеровского процесса ($W_0 = 0$ для простоты) эквивалентны.

1. (Конструкция с лекции)

(a) $W_0 = 0$ почти наверное;

(b) W – процесс с независимыми приращениями;

(c) для всех $t, s \in \mathbb{R}_+$ приращение $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$;

2. W – гауссовский процесс с матожиданием $\mathbb{E}[W_t] = 0$ и ковариационной функцией $K(t, s) = t \wedge s$.

Упражнение 2.3. Пусть $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ – одномерный Винеровский процесс с началом в нуле ($W_0 = 0$ почти наверное) и $T \in \mathbb{R}_+$. Процесс B определяется как

$$B_t = W_t - \frac{t}{T} W_T, \quad t \in [0, T]$$

и называется Броуновским мостом. Вычислите матожидания

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^T B_t B_s dt ds \right].$$

Упражнение 2.4. Пусть $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ – одномерный Винеровский процесс (модификация) такой, что в каждой точке траектории почти наверное непрерывны. Используя усиленный закон больших чисел:

$$\frac{W_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{почти наверное, —}$$

докажите, что $(tW_{1/t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ – тоже Винеровский процесс с траекториями, которые в каждой точке почти наверное непрерывны.

Упражнение 2.5. Пусть $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ – одномерный Винеровский процесс, $c \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\sqrt{c}W_{t/c}$ – Винеровский процесс.

Упражнение 2.6. (Бонусное, 5 баллов) Пусть $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ – одномерный Винеровский процесс. Докажите, что

$$\frac{W_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \text{ почти наверное.}$$

Подсказки:

1. Полезно для растущей к бесконечности последовательности (t_k) с $t_0 = 0$ рассмотреть Винеровский процесс как

$$W_{t_n} = \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

2. Ещё может понадобиться лемма Бореля-Кантелли.
3. Может помочь такой факт про гауссовское распределение (докажите)

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \mathbb{P}(|X| > t) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}t} e^{-t^2/2}.$$