

1. Случайные процессы: определения

По умолчанию все задачи 5 баллов, если не оговорено иного.

Упражнение 1.1. Пусть случайные величины $U \sim \text{Bernoulli}(1/3)$ и $V \in \mathcal{U}[0, 1]$ независимы, а случайный процесс задаётся как $X_t = Ue^t + V$.

1. Нарисуйте траектории процесса X .
2. Опишите семейство конечномерных распределений процесса X .
3. Найдите матожидание и ковариационную функцию процесса X .

Упражнение 1.2. (2 балла) Пусть $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ – процесс гауссовского белого шума с дисперсией 1 и заданы числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Процесс $(X_t)_{t \in T}$ определим как

$$X_{t+1} = \alpha\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t+1}.$$

Найдите матожидание и ковариационную функцию процесса X . Проверьте, является ли процесс стационарным в широком смысле.

Упражнение 1.3. Пусть $T \in \mathbb{R}$, $(X_t)_{t \in T}$ – гауссовский процесс с $m(t) = 0$. Проверьте, будет ли процесс стационарным (в широком смысле), если ковариационная функция

1. квадратичная $K(t, s) = (ts)^2$;
2. функция Орнштейна-Уленбека $K(t, s) = e^{-\frac{|t-s|}{2l}}$ с параметром $l > 0$.

Упражнение 1.4. (3 балла) Пусть X, Y – два независимых (любые конечные наборы сечений X независимы с любым конечным набором сечений Y) гауссовских процесса со значениями в $\Xi = \mathbb{R}$, проиндексированные $T = \mathbb{R}$. Докажите, что сумма $X + Y$ – тоже гауссовский процесс и найдите его матожидание и ковариационную функцию.

Упражнение 1.5. Докажите, что в случае гауссовского процесса из стационарности в широком смысле следует стационарность в узком смысле.

Упражнение 1.6. (2.5 балла) Пусть $T \in \mathbb{R}$, $(X_t)_{t \in T}$ – гауссовский процесс с $m(t) = 0$ и $K(t, s) = ts$. Докажите, что траектории процесса – это прямые, исходящие из 0.

Упражнение 1.7. (2.5 балла) Пусть $T \in \mathbb{R}$, $(X_t)_{t \in T}$ – гауссовский процесс с $m(t) = 0$ и $K(t, s) = f(t)f(s)$ для некоторой f . Объясните (и докажите), какой вид имеют траектории процесса.