ЛЕКЦИЯ 2

Винеровский процесс

В этой лекции мы построим и исследуем один из самых важных и самых известных процессов в непрерывном времени в финансовой математике: Винеровский процесс. Винеровский процесс – это базовый блок построения финансовых моделей, с его помощью определяются строятся стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения. Мы начинаем с интересного физического примера – Броуновского движения – и затем с помощью теоремы Колмогорова о существовании строим случайный процесс, который помогает описать это явление, и доказываем несколько его полезных свойств. По пути мы рассмотрим вопрос о непрерывности траекторий Винеровского процесса и заново посмотрим на гауссовские процессы, которые мы исследовали в лекции 2.

2.1 Броуновское движение

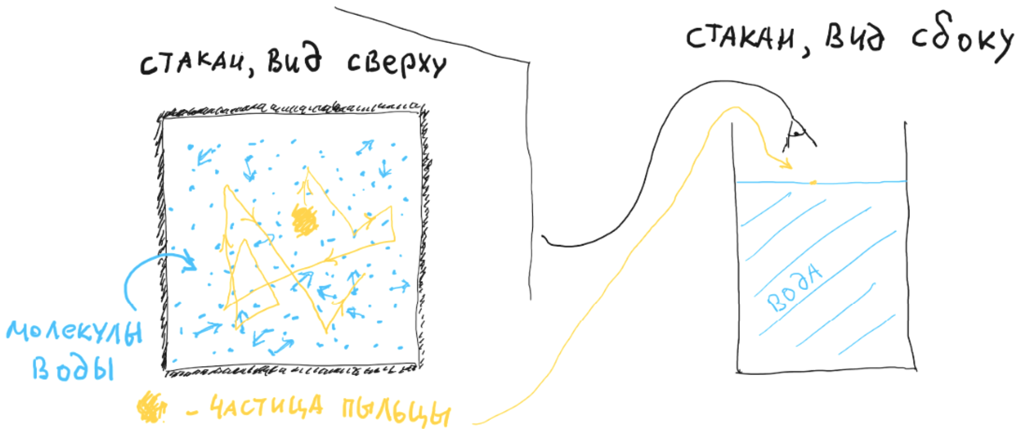

Рис. 2.1: Хаотичный процесс движений частицы пыльцы на поверхности воды

Броуновское движение – известное физическое явление, про которое рассказывают ещё в школьном курсе физики. История его уходит в 19й век, когда в 1828г. Роберт Браун обратил внимание на необычное хаотическое движение частичек пыльцы в жидкости. Интуитивное объяснение данного явления достаточно простое: молекулы жидкости находятся в постоянном движении и случайным образом соударяются, а частица пыльцы значительно больше их и обладает большей инерцией. Молекулы жидкости, таким образом, подталкивают пыльцу случайным образом в разных направлениях. Чем меньше частица, тем быстрее и хаотичнее она движется (Рис. 2.1). Несмотря на то, что про Броуновское движение написано даже в школьных учебниках по физике, его математическую модель долгое время было очень непросто построить и это потребовало много времени и усилий со стороны как физиков, так и математиков, так как в 19м веке инструментарий был принципиально другой.

Броуновское движение описывается с помощью Винеровского процесса, названного в честь Норберта Винера, который занимался этой задачей почти через 100 лет после открытия Роберта Брауна. Как нам известно из лекции 2, мы можем задавать случайный процесс путём задания измеримого пространства значений $(\Xi, \mathcal{G})$, индексного постранства T и семейства мер $\nu_{t_1,..,t_k}$ на $(\Xi^k, \mathcal{G}^k)$ для всех конечных наборов $t_1, .., t_k \in T$. Последние будут конечномерными распределениями итогового процесса.

Шаг 1. Для начала нужно задать пространство состояний, индексов и определить семейство мер, на основе которого мы построим случайный процесс. Рассматриваем одномерную модель, многомерный случай строится аналогично, об этом есть заметка в конце лекции. Фиксируем $\Xi = \mathbb{R}$ и $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, борелевскую сигма-алгебру, а также индексное пространство $T = \mathbb{R}_+$, которое будет выполнять роль времени. Зададим также функцию $p : T \times \Xi \times \Xi \to \mathbb{R}$ для $t > 0$ как

$$p(t, x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}. \tag{2.1}$$

Заметьте, что при фиксированных t, x или при фиксированных t, y функция p является плотностью гауссовского распределения $\mathcal{N}(0, t)$. Фиксируем число $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ и теперь зададим для любого конечного отсортированного по возрастанию набора $t_1, .., t_k \in T$ меры $\nu_{t_1,..,t_k}$ как

$$\nu_{t_1,..,t_k}(A_1 \times .. \times A_k) := \int_{A_1 \times .. \times A_k} p(t_1, \tilde{x}, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) ... p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 ... dx_k \ . \tag{2.2}$$

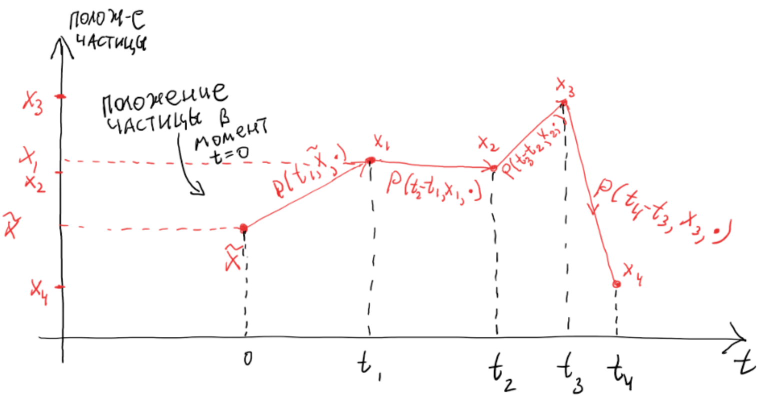

Рис. 2.2: При условии текущего положения x_k следующее x_{k+1} будет иметь нормальное распределение в соответствии с функцией p.

Теперь обобщим на случай неотсортированного набора. Пусть $t_1,..,t_k$ – отсортированный набор, как выше, σ – перестановка $\{1,..,k\}$, зададим произвольную неотсортированную последовательность как $t_{\sigma(1)},..,t_{\sigma(k)}$ и определим её меру как

$$\nu_{t_{\sigma(1)},..,t_{\sigma(k)}}(A_{\sigma(1)} \times .. \times A_{\sigma(k)}) := \nu_{t_1,..,t_k}(A_1 \times .. \times A_k), \tag{2.3}$$

то есть, мера, соответствующая неотсортированному набору, – это мера, соответствующая отсортированному набору тех же индексов.

Шаг 2. Положим набор индексов отсортированным; заметим, что случай неотсортированного множества индексов можно обработать с помощью (2.3). Фиксируем произвольный(отсортированный) набор $t_1,..,t_k \in T$ и измеримых множеств $A_1,..,A_k \in \mathcal{G}$ и положим, что σ – это перестановка на множестве $\{1,..,k\}$. Заметим теперь, что

$$\nu_{t_1,..,t_k}(A_{\sigma(1)}\times..\times A_{\sigma(k)}) := \int_{A_{\sigma(1)}\times..\times A_{\sigma(k)}} p(t_1,\tilde{x},x_1)p(t_2-t_1,x_1,x_2)...p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)dx_1...dx_k,$$

где мы поменяли порядок интегрирования. Так, теперь мы берём интеграл по области, где $x_1 \in A_{\sigma(1)},\ ..,\ x_k \in A_{\sigma(k)}$. Это эквивалентно тому, что мы поменяем местами переменные с помощью σ^{-1}, а множества менять местами не будем. В итоге имеем

$$\nu_{t_{\sigma^{-1}(1)},..,t_{\sigma^{-1}(k)}}(A_1 \times .. \times A_k) = \nu_{t_1,..,t_k}(A_{\sigma(1)} \times .. \times A_{\sigma(k)}),$$

подтверждая первое условие согласованности.

Шаг 3. Фиксируем произвольный(отсортированный) набор $t_1,..,t_k,t_{k+1} \in T$, нужно проверить, что

$$\nu_{t_1,..,t_k,t_{k+1}}(A_1 \times ... \times A_k \times \mathbb{R}) = \nu_{t_1,..,t_k}(A_1 \times ... \times A_k).$$

Используя конкретный вид меры $\nu_{t_1,..,t_k,t_{k+1}}$, мы можем вычислить последний интеграл:

$$\nu_{t_1,..,t_k,t_{k+1}}(A_1 \times ... \times A_k \times \mathbb{R}) = \tag{2.4}$$
$$= \int_{A_1} ... \int_{A_k}\int_{\mathbb{R}} p(t_1,\tilde{x},x_1)...p(t_k-t_{k-1},x_k,x_{k+1})dx_1...dx_k dx_{k+1} = \tag{2.5}$$
$$= \int_{A_1} ... \int_{A_k} p(t_1,\tilde{x},x_1)...p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)\left\{\int_{\mathbb{R}} p(t_k-t_{k-1},x_k,x_{k+1})dx_{k+1}\right\}dx_1...dx_k. \tag{2.6}$$

Заметим, что интеграл в скобках – это интеграл по $\mathbb{R}$ от плотности гауссовского распределения и он равен 1 для любых фиксированных $t_k - t_{k-1}, x_k$. Всё, что остаётся, – это и есть желаемый результат:

$$\nu_{t_1,..,t_k,t_{k+1}}(A_1 \times ... \times A_k \times \mathbb{R}) = \tag{2.7}$$
$$= \int_{A_1} ... \int_{A_k} p(t_1,\tilde{x},x_1)...p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)dx_1...dx_k = \tag{2.8}$$
$$= \nu_{t_1,..,t_k}(A_1 \times ... \times A_k). \tag{2.9}$$

Итак, второе условие согласованности тоже выполнено.

Согласно Теореме 1.1, существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и случайный процесс $(W_t)_{t\in T}$ на нём с конечномерными распределениями $\nu_{t_1,..,t_k}$, заданными выше. Построенный процесс $(W_t)_{t\in T}$ называется одномерным Винеровским процессом (другое название – Броуновское движение) с началом в точке $\tilde{x}$.

Такой процесс уже обладает несколькими интересными свойствами.

Утверждение 2.1. *Процесс $(W_t)_{t\in T}$ – гауссовский.*

Доказательство. Рассмотрим конечный набор сечений $W_{t_1}, .., W_{t_k}$, запишем его в виде вектора $Z = [W_{t_1}..W_{t_k}]^\top$. Для доказательства гауссовости нужно посчитать характеристическую функцию $f(\xi)$ и сравнить её с гауссовской.

$$f(\xi) := \mathbb{E}\left[e^{i\xi^\top Z}\right] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\xi^\top x} p(t_1, \tilde{x}, x_1)...p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)dx_1...dx_k, \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_k \end{bmatrix}, \xi := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ .. \\ \xi_k \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Запишем интеграл в виде повторного и рассмотрим самый последний интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_k x_k} p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)dx_k;$$

это по определению – характеристическая функция распределения $\mathcal{N}(x_{k-1}, t_k - t_{k-1})$, которая нам известна:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_k x_k} p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)dx_k = e^{ix_{k-1}\xi_k - \frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})\xi_k^2}. \tag{2.11}$$

Будем вычислять повторный интеграл далее, получим снова, что интеграл – это характеристическая функция гауссовского распределения от аргумента $\xi_{k-1} + \xi_k$ и с другими параметрами:

$$e^{-\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})\xi_k^2} \int_{\mathbb{R}} e^{ix_{k-1}(\xi_{k-1}+\xi_k)} p(t_{k-1} - t_{k-2}, x_{k-2}, x_{k-1})dx_{k-1} = \tag{2.12}$$

$$= e^{ix_{k-2}(\xi_{k-1}+\xi_k) - \frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})\xi_k^2 - \frac{1}{2}(t_{k-1} - t_{k-2})(\xi_{k-1}+\xi_k)^2}. \tag{2.13}$$

По индукции мы получим, что

$$\mathbb{E}\left[e^{i\xi^\top Z}\right] = e^{i\tilde{x}(\xi_1 + .. + \xi_k) - \frac{1}{2}\xi^\top C\xi} = e^{im^\top \xi - \frac{1}{2}\xi^\top C\xi}, \tag{2.14}$$

где (проверьте!)

$$m = [\tilde{x} \ ... \ \tilde{x}]^T \in \mathbb{R}^k, \quad C = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & .. & .. & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & ... & t_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ t_1 & t_2 & t_3 & ... & t_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}.$$

Это в точности характеристическая функция многомерного гауссовского распределения с матожиданием m и ковариационной матрицей C. Таким образом, $(W_t)_{t\in T}$ – гауссовский процесс с матожиданием $\mathbb{E}[W_t] = \tilde{x}$ и ковариационной функцией $K(t,s) = t \wedge s := \min(t,s)$, которую мы можем видеть в матрице C. □

Следствие 2.2. *$W_0 = \tilde{x}$ почти наверное.*

Упражнение 2.1. *Докажите, что матрица C – положительно полуопределённая, следовательно, функция $K(t,s) = t \wedge s$ является положительно полуопределённой в смысле Опр. 1.3. В доказательстве мы этого не проверили, но это требуется для того, чтобы понять, что характеристическая функция действительно соответствует гаусссовскому распределению.*

Таким образом, ещё одно определение Винеровского процесса может звучать так.

Определение 2.1. *Винеровский процесс, начинающийся в точке $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ – это гауссовский процесс $(W_t)_{t\in T}$ на индексном пространстве $T = \mathbb{R}_+$ со значениями в $\Xi = \mathbb{R}$, который имеет матожидание $\mathbb{E}[W_t] = \tilde{x}$ и ковариационную функцию $K(t,s) = t \wedge s := \min(t,s)$.*

У Винеровского процесса есть ещё одно свойство которое является очень полезным для симуляции траекторий.

Определение 2.2. *Случайный процесс $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любого конечного отсортированного по возрастанию набора $t_1, .., t_k \in T$ случайные величины*

$$X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, .., X_{t_2} - X_{t_1}$$

являются независимыми в совокупности.

Утверждение 2.3. *Винеровский процесс $(W_t)_{t\in T}$ – это процесс с независимыми приращениями.*

Доказательство. Поскольку $(W_t)_{t\in T}$ – гауссовский процесс, приращения тоже будут иметь нормальное распределение (в том числе, совместное). Для проверки независимости, таким образом, достаточно показать, что ковариация любых двух приращений равна нулю. Мы знаем точное выражение для ковариации $K(t,s) = \mathbb{E}[W_t W_s] = t \wedge s$, используя его, получим для $t_2 > t_1 > t_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W_{t_2} - W_{t_1})(W_{t_1} - W_{t_0})] &= \mathbb{E}[W_{t_2}W_{t_1}] + \mathbb{E}[W_{t_1}W_{t_0}] - t_1 - \mathbb{E}[W_{t_2}W_{t_0}] = \\ &= t_1 + t_0 - t_1 - t_0 = 0.\end{aligned}$$

□

Это утверждение позволяет сконструировать гораздо более экономный метод для симуляции процесса W, чем тот, что мы используем для гауссовких процессов. Положим, что мы хотим сгенерировать (дискретизированную) траекторию прцоесса в заданные моменты времени $t_1, .., t_k$, тогда наш алгоритм будет выглядеть так:

1. Задать стартовое значение $w_0 = \tilde{x}$;
2. Сгенерировать дискретизированную траекторию процесса гауссовского белого шума $\mathcal{N}(0, 1)$: $\xi_1, .., \xi_k$;
3. Для $j = 1, .., k$ задать $w_{t_j} = w_{t_{j-1}} + \sqrt{t_j - t_{j-1}}\xi_j$;
4. Набор $w_0, w_{t_1}, .., w_{t_k}$ – это дискретизированная траектория Винеровского процесса.

В отличие от симуляции гауссовского процесса, нам не требуется работать с ковариационной матрицей и метод требует всего лишь $O(k)$ операций вместо как минимум $O(k^2)$.

2.2 Непрерывность траекторий

До сих пор мы не очень интересовались свойствами траекторий случайного процесса, хотя в лекции 2 мы видели, что некоторые гауссовские процессы чудесным образом обладали непрерывными (и даже гладкими) траекториями. Заметим: теорема Колмогорова (Теорема 1.1) позволяет задать случайный процесс на каком-то вероятностном пространстве, но не утверждает ничего о свойствах траекторий процесса. Дело в том, что в результате теоремы говорится о *существовании* вероятностного пространства и случайного процесса на нём (имеющего заданные конечномерные распределения), но ничего про *единственность*. По этой причине существуют случайные процессы, которые имеют одинаковые конечномерные распределения, но свойства траекторий могут отличаться.

Определение 2.3. *Пусть $(X_t)_{t\in T}$ и $(Y_t)_{t\in T}$ – два случайных процесса на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Если для всех $t \in T$*

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}\right) = 1,$$

то процесс X называется модификацией (в англ. литературе version) процесса Y.

Пример 2.1. *Рассмотрим вероятностное пространство $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mu)$, где μ – вероятностная мера, которая удовлетворяет условию $\mu(\{\omega\}) = 0 \ \forall\omega \in \mathbb{R}_+$. Зададим индексное пространство $T = \mathbb{R}_+$ и определим два простых случайных процесса :*

$$Y_t(\omega) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \omega \in \mathbb{R}_+,$$

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = \omega, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметьте, что X и Y в данном случае являются модификациями друг друга. Действительно, если мы возьмём фиксированный $t \in \mathbb{R}_+$, то

$$P(X_t = Y_t) = 1,$$

так как отличаться они будут лишь в одной точке $\omega = t$. При этом мы видим, что Y имеет непрерывные траектории (константа 0), а X всегда будет имет разрыв в одной точке.

Утверждение 2.4. *Если процесс X – модификация процесса Y то два процесса имеют одинаковые конечномерные распределения.*

Доказательство. Фиксируем моменты $t_1, .., t_k$ и рассмотрим соответствующее конечномерное распределение процесса X для произвольных измеримых $A_1, .., A_k$. Пусть событие

$$G := \left\{\omega \in \Omega \ : \ X_{t_1}(\omega) \in A_1, \ .., \ X_{t_k}(\omega) \in A_k \text{ и есть } j \text{ такой, что } Y_{t_j}(\omega) \neq X_{t_j}(\omega)\right\},$$

то есть, X_{t_i} лежат в A_i и при этом не все Y_{t_i} совпадают с X_{t_i}. Заметим, что

$$P\left(\{\omega \in \Omega \ : \ X_{t_1}(\omega) \in A_1, \ .., \ X_{t_k}(\omega) \in A_k\}\right) = \tag{2.15}$$

$$= P\left(\{\omega \in \Omega \ : \ Y_{t_1}(\omega) \in A_1, \ .., \ Y_{t_k}(\omega) \in A_k\}\right) + P\left(G\right). \tag{2.16}$$

Так как

$$P(G) \leq P\left(\bigcup_{j=1}^{k} \left\{\omega \in \Omega \ : \ Y_{t_j}(\omega) \neq X_{t_j}(\omega)\right\}\right) = 0$$

в силу того, что X – модификация Y, это означает, что

$$P\left(\{\omega \in \Omega \ : \ X_{t_1}(\omega) \in A_1, \ .., \ X_{t_k}(\omega) \in A_k\}\right) = \tag{2.17}$$

$$= P\left(\{\omega \in \Omega \ : \ Y_{t_1}(\omega) \in A_1, \ .., \ Y_{t_k}(\omega) \in A_k\}\right), \tag{2.18}$$

то есть, конечномерные распределения процессов будут совпадать. □

Если мы попробуем просимулировать Винеровский процесс, то мы увидим, что траектории очень похожи на непрерывные. В некотором конкретном смысле это действительно так. Это следует из второй известной теоремы Колмогорова.

Теорема 2.5. *(Теорема Колмогорова о непрерывности) Пусть $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – случайный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в $\Xi = \mathbb{R}$. Если для всех $T > 0$ существуют такие константы $\alpha, \beta, D > 0$, что*

$$\forall t, s \in [0, T] \quad \mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^{\alpha}\right] \leq D|t - s|^{1+\beta},$$

то существует модификация $(\widetilde{X}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ с непрерывными траекториями.

Если посмотреть немного по-другому, это означает, что в каждой точке $t \in \mathbb{R}_+$ почти наверное траектория процесса X будет непрерывной. Винеровский процесс, как оказывается, удовлетворяет этой теореме.

Утверждение 2.6. *Существует модификация Винеровского процесса $(W_t)_{t\in T}$ с непрерывными траекториями.*

Доказательство. Возьмём $\alpha = 4$, положим $t > s$ и рассмотрим

$$\mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^4\right] = \mathbb{E}\left[W_t^4 - 4W_t^3 W_s + 6W_t^2 W_s^2 - 4W_t W_s^3 + W_s^4\right].$$

Все величины выше – гауссовские и для их моментов есть формула Иссерлиса (см. конец лекции):

$$\mathbb{E}\left[W_t^4\right] = 3(\mathbb{E}\left[W_t^2\right])^2 = 3t^2, \quad \mathbb{E}\left[W_t^3 W_s\right] = 3\mathbb{E}\left[W_t^2\right]\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] = 3ts,$$
$$\mathbb{E}\left[W_t^2 W_s^2\right] = \mathbb{E}\left[W_t^2\right]\mathbb{E}\left[W_s^2\right] + 2(\mathbb{E}\left[W_t W_s\right])^2 = ts + 2s^2, \quad \mathbb{E}\left[W_s^4\right] = 3s^2, \quad \mathbb{E}\left[W_t W_s^3\right] = 3s^2.$$

В результате имеем

$$\mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^4\right] = 3t^2 - 12ts + 6(ts + 2s^2) - 12s^2 + 3s^2 = 3(t-s)^2.$$

Так, с константами $\alpha = 4, \beta = 1, D = 3$ Винеровский процесс удовлетворяет Теореме 2.5 и, следовательно, существует его непрерывная модификация. □

Упражнение 2.2. *Проверьте с помощью теоремы Колмогорова о непрерывности, что траектории одномерного гауссовского процесса с линейной ковариационной функцией $K(t, s)$ почти наверное непрерывны.*

Пример 2.2. *Рассмотрим гауссовский белый шум $(X_t)_{t\in T}$ с распределением $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Взгляд на симулированные траектории позволяет предположить, что они в каждой точке будут почти наверное разрывными. Это действительно так. Мы можем заметить, что для всех $\delta > 0$ и t, s таких, что $|t - s| < \delta$, разность $|X_t - X_s| > 0$ с вероятностью 1. Формально, однако, это потребует доказательства; приведём идею, опирающуюся на лемму Бореля-Кантелли.*

Лемма утвержадет следующее. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, (E_n) – последовательность измеримых множеств $E_n \in \mathcal{F}$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P(E_n)$ сходится, то

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0,$$

то есть, вероятность того, что бесконечное число событий из последовательности сбываются одновременно, равна нулю, если события E_n достаточно малые (согласно мере P).

Пойдём от противного: предположим, что в фиксированной точке t траектория процесса X с вероятностью больше 0 непрерывна. Это требование эквивалентно тому, что с вероятностью строго больше 0

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon)\ :\ |t - t'| < \delta \Rightarrow |X_t(\omega) - X_{t'}(\omega)| < \varepsilon.$$

Возьмём последовательность $\varepsilon_n = 1/n^2$ *и* $\delta_n = \delta(\varepsilon_n)/2$*, а также произвольные точки* $t_n \in [t - \delta_n, t + \delta_n]$*. По нашему предположению, с вероятностью больше 0 условие непрерывности соблюдается и для нашего выбора* $\varepsilon_n, \delta_n, t_n$*, значит*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{\omega \in \Omega \ : \ |X_t - X_{t_k}| < \varepsilon_k\}\right) > 0.$$

Теперь обратимся к лемме Бореля-Кантелли: пусть

$$E_n := \{\omega \in \Omega \ : \ |X_t - X_{t_n}| < \varepsilon_n\}.$$

Поскольку разность $X_t - X_{t_n}$ *– это гауссовская случайная величина с дисперсией* 2*, можно оценить (см. Рис. 2.3)*

$$P(|X_t - X_{t_n}| < \varepsilon_n) \le \frac{2\varepsilon_n}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\pi}}.$$

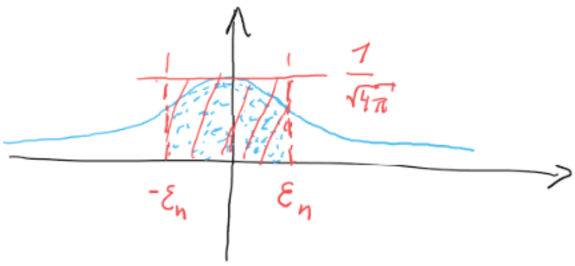

Рис. 2.3: Идея оценки вероятности события E_n: плотность нормального распределения имеет максимум в нуле, равный $1/(\sqrt{4\pi})$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\pi}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{\pi}},$$

как нам известно, будет сходиться а по лемме Бореля-Кантелли это означает, что

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{\omega \in \Omega \ : \ |X_t - X_{t_k}| < \varepsilon_k\}\right) = 0,$$

что противоречит предположению.

Правда, ничего лучше в плане гладкости про Винеровский процесс доказать не выйдет.

Теорема 2.7. *Траектории Винеровского процесса* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *почти наверное нигде не дифференцируемы.*

Эту теорему мы приводим без доказательства, так как оно достаточно техническое и опирается на лемму Бореля-Кантелли и похоже на приведённое выше. Рекомендуем, если интересно, посмотреть [10, Гл.3, Теор.1].

2.3 Многомерный Винеровский процесс

Построим теперь многомерный Винеровский процесс как случайный векторный процесс с независимыми координатами, каждая из которых является одномерным Винеровским процессом (в $\mathbb{R}^3$ он вполне будет описывать физическое Броуновское движение). Все результаты, которые были приведены выше, оказываются верны и в многомерном случае.

Зададим стартовое положение $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, индексное пространство $T = \mathbb{R}_+$, пространство значений $\Xi = \mathbb{R}^n$ и сигма-алгебру $\mathcal{G}^n$ как наименьшую сигма-алгебру, включающую в себя все декартовые произведения $A_1 \times .. \times A_n$ для всех $A_1, .., A_n \in \mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Так же, как и в начале, зададим функцию $p : T \times \Xi \times \Xi \to \mathbb{R}$ как

$$p(t, x, y) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} e^{-\frac{\|x-y\|_2^2}{2t^n}}. \tag{2.19}$$

При фиксированных t, x и t, y это плотность некоррелированного гауссовского вектора.

Упражнение 2.3. *Проверьте выполнение условий согласованности из Теоремы Колмогорова о существовании (Теорема 1.1).*

Процесс $(W_t)_{t\in T}$, построенный с помощью теоремы Колмогорова о существовании, называется многомерным Винеровским процессом. Как и одномерный Винеровский, он будет гауссовским, но в отличие от гауссовских процессов из лекции 2, будет принимать значения в $\Xi = \mathbb{R}^n$ и описание его ковариационной функции будет немного более сложным. Многомерный Винеровский процесс $(W_t)_{t\in T}$ - – это вектор состоящий из независимых одномерных Винеровских процессов (так как мы строили его именно таким образом), поэтому все теоремы, которые мы доказывали, верны и здесь (как, например, утверждение о независимости приращений), но требуют небольшого уточнения.

Теорема 2.8. *(Теорема Колмогорова о непрерывности, векторный вариант). Пусть* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– это случайный процесс со значениями в* $\Xi = \mathbb{R}^n$*. Если для любого* $T > 0$ *существуют такие константы* $\alpha, D, \beta > 0$*, что*

$$\forall t, s < T \quad \mathbb{E}\left[\|X_t - X_s\|_2^\alpha\right] \leq D\|t - s\|_2^{1+\beta},$$

то существует непрерывная версия $(\widetilde{X}_t)_{t\in T}$ *процесса* X.

Следствие 2.9. *Многомерный Винеровский процесс почти наверное имеет непрерывные траектории.*

Доказательство. Для проверки нужно всё так же взять $\alpha = 4$ и проделать те же действия, что в одномерном случае. Получится, что с константами $\alpha = 4, \beta = 1, D = n(n + 2)$ многомерный Винеровский процесс W будет удовлетворять Теореме 2.8 □

2.4 Формула Иссерлиса: моменты гауссовских векторов

Этот результат очень старый, известен также как формула Вика (переоткрытый результат в статистической физике, спустя примерно 40 лет), доказательство можно найти в [6] и в приквеле статьи. Формула комбинаторная и не очень распространена в классической вероятности, но иногда очень сильно спасает время.

Теорема 2.10. *Пусть* $[X_1, .., X_K]^\top$ *– гауссовский случайный вектор с нулевым матожиданием и ковариационной матрицей* $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,..,K}$ *и число* K *является чётным. Обозначим за* $\mathcal{P}$ *множество идеальных паросочетаний, то есть, множеств вида* $\{(i_1, i_2), .., (i_{K-1}, i_K)\}$, *где все* $i_j \in \{1, .., K\}$, *для всех* $j \neq k$ *индексы* $i_j \neq i_k$ *и при этом задействованы все элементы* $\{1, .., K\}$.

$$\mathbb{E}\left[X_1 X_2 .. X_K\right] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \prod_{(i,j) \in \pi} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \prod_{(i,j) \in \pi} \sigma_{ij}.$$

В случае, если K *нечётное, то*

$$\mathbb{E}\left[X_1 X_2 .. X_K\right] = 0.$$

В лекции мы её использовали для того, чтобы посчитать моменты Винеровского процесса, вспомним два для примера. Пусть $t > s$ – два момента времени.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[W_t^4\right] = \mathbb{E}\left[W_t W_t W_t W_t\right] = |\text{формула Ис.}| = 3\mathbb{E}\left[W_t W_t\right]\mathbb{E}\left[W_t W_t\right] = 3t^2,\\
&\mathbb{E}\left[W_t^2 W_s^2\right] = \mathbb{E}\left[W_t W_t W_s W_s\right] =\\
&= |\text{формула Ис.}| = \mathbb{E}\left[W_t^2\right]\mathbb{E}\left[W_s^2\right] + \mathbb{E}\left[W_t W_s\right]\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] + \mathbb{E}\left[W_t W_s\right]\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] = ts + 2s^2.
\end{aligned}$$

Литература

[1] Alfred Cowles 3rd. Can stock market forecasters forecast? *Econometrica*, 1(3):309–324, 1933.

[2] Alfred Cowles 3rd and Herbert E. Jones. Some a posteriori probabilities in stock market action. *Econometrica*, 5(3):280–294, 1937.

[3] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 17:21–86, 1900.

[4] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.

[5] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.

[6] L. Isserlis. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables, November 1918.

[7] M. G. Kendall and A. Bradford Hill. The analysis of economic time-series-part i: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 116(1):11–34, 1953.

[8] Paul A. Samuelson. Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(2):369–374, 1973.

[9] Holbrook Working. A random-difference series for use in the analysis of time series. *Journal of the American Statistical Association*, 29(185):11–24, 1934.

[10] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов*. М:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[11] Синай Я.Г. Коралов Л.Б. *Теория вероятностей и случайные процессы.* МЦНМО, 2013.

[12] А.Н. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики.* МЦНМО, 2016.