# 5. Марковские процессы с конечным числом состояний, процесс Пуассона и мартингалы

**Упражнение 5.1.** *(13 баллов) Пусть заданы начальное распределение $\mu$ и $Q$-матрица $Q$, что означает $Q_{ii} \le 0, Q_{ij} \ge 0, \sum\limits_j Q_{ij} = 0$. Пусть заданы также следующие независимые случайные величины:*

1. $\xi \sim \mu$
2. $\tau_i^n \sim Exp(-Q_{ii})$
3. $\eta_i^n$ *- случайные величины со значениями в множестве $\{1, 2, ...i-1, i+1, ...n\}$ с распределением $P(\eta_i^n = j) = -Q_{ij}/Q_{ii}$*
4. $\xi^0 = \xi, \xi^n = \eta^n_{\xi^{n-1}}$
5. $\sigma^0 = 0, \sigma^n = \sigma^{n-1} + \tau^n_{\xi^{n-1}}$

*Докажите, что процесс $X_t$, заданный следующим образом: $X_t = \xi^n$ при $\sigma^n \le t < \sigma^{n+1}$, является марковским процессом с переходными матрицами $P(t) = \exp(tQ)$ и начальным распределением $\mu$. Для этого следайте следующее:*

1. *Покажите, что $\mu$ является начальным распределением.*
2. *Покажите, что $P(X_0 = i, X_t = k, X_{t+h} = j) = P(X_0 = i, X_t = k)(Q_{kj}h + o(h))$*
3. *Покажите, что $P(X_0 = i, X_t = j, X_{t+h} = j) = P(X_0 = i, X_t = j)(1 + Q_{jj}h + o(h))$*
4. *Покажите, что $\sum\limits_{k=1}^{r} P(X_0 = i, X_t = k, X_{t+h} = j) = P(X_0 = i, X_t = j) + h\sum\limits_{k=1}^{r} P(X_0 = i, X_t = k)Q_{kj} + o(h)$*
5. *Покажите, что для $R_{ij}(t) = P(X_0 = i, X_t = j)$ выполнено равенство $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{R(t+h)-R(t)}{h} = R(t)Q$*
6. *Покажите, что для $R_{ij}(t) = P(X_0 = i, X_t = j)$ выполнено равенство $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{R(t)-R(t-h)}{h} = R(t)Q$*
7. *Покажите, что $\frac{dR(t)}{dt} = R(t)Q$ при $t \ge 0$*
8. *Покажите, что $R_{ij}(t) = P(X_0 = i, X_t = j)$*
9. *Покажите, что $P(X_{t_0} - i_0, ...X_{t_k} - i_k) = \mu_{i_0} Pi_0i_1(t_1)...P_{i_{k-1}i_k}(t_k - t_{k-1})$*

**Упражнение 5.2.** *(2 балла) Докажите, что если* $\sigma, \tau$ *- моменты остановки фильтрации* $\mathcal{F}_t$, *то и* $\sigma \vee \tau$ *- момент остановки.*

**Упражнение 5.3.** *(2 балла) Пусть* $X_n$ *- процесс, согласованный с фильтрацией* $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Пусть* $M > 0, \tau(\omega) = \min(n : |X_n(\omega)| \geq M)$. *Докажите, что* $\tau$ *- момент остановки фильтрации* $\mathcal{F}_n$.

**Упражнение 5.4.** *(3 балла) Докажите, что следующие процессы являются мартингалами:*

1. $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, *где* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *- независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием;*
2. $(W_t)_{\mathbf{R}_+}$, *Винеровский процесс;*
3. $X_n = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_n]$, *где* $X$ *- интегрируемая случайная величина,* $\{F_n\}$ *- фильтрация.*

**Упражнение 5.5.** *(5 баллов) Пусть* $\xi_1, \xi_2, ...$ *- независимые случайные величины, их распределение - стандартное нормальное,* $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, $X_n = \exp(S_n - n/2)$. *Пусть* $\mathcal{F}_n^X$ *-* $\sigma$*-алгебра, порожденная случайными величинами* $X_1, ..., X_n$. *Докажите, что* $(X_n, \mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ *- мартингал.*