1. Цепи Маркова

По умолчанию все задачи 5 баллов, если не оговорено иного.

Упражнение 1.1. *Докажите, что стохастическая матрица P эргодическая тогда и только тогда, когда*

1. *Из любой вершины в любую есть путь конечной длины с ненулевой вероятностью;*
2. *Не существует периодических состояний. Периодом состояния i называют*

$$T = GCD\left\{t: \ P(X_t = i | X_0 = i) > 0\right\},$$

если $T = 1$, то состояние апериодично, иначе периодично с периодом T.

Упражнение 1.2. *(2 балла) Найти матрицу перехода за n шагов и инвариантное распределение для марковской цепи, заданной следующей переходной матрицей:*

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Будет ли эта цепь эргодической? (если используете критерий из упражнения 1, без его доказательства решение не засчитывается)

Упражнение 1.3. *(2 балла) Пусть $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ случайный процесс, принимающий значения в конечном множестве Ξ, такой, что X_t - независимые одинаково распределенные случайные величины. Можно ли задать этот процесс как марковскую цепь? Если да, то как выглядит матрица переходных вероятностей?*

Упражнение 1.4. *(3 балла) Пусть $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ процесс белого шума из распределения на* $0, 1$, *задающегося*

$$P(Y_t = 0) = P(Y_t = 1) = 1/2.$$

Рассмотрим процесс

$$X_t = \frac{Y_t + Y_{t-1}}{2}, \ t > 0.$$

- *Докажите, что X – цепь Маркова согласно конечномерным распределениям.*
- *Найдите переходную матрицу этой цепи.*

Упражнение 1.5. *Пусть $G = (V, E)$ - связный неориентированный граф, по которому случайным марковским образом движется агент. Определим вероятность перехода агента из вершины u в вершину v по ребру $(u, v) \in E$ как $p_{uv} = k_u^{-1}$, где k_u - количество вершин, смежных с u. Докажите, что у данной цепи существует инвариантное распределение и найдите его.*

!Обратите внимание, что цепь не обязана быть эргодической.

Упражнение 1.6. *(3 балла) Предложите конечный граф с числом вершин больше* 2*, удовлетворяющий условию предыдущей задачи и в случае которого цепь не будет эргодической.*

Упражнение 1.7. *(5 баллов, бонус) Пусть дана эргодическая цепь Маркова без петель (переходов с ненулевой вероятностью из вершины в себя). К ней добавляют состояние* x*, из которого переход в себя происходит с вероятностью* 1 *и из как минимум одной вершины оригинального графа есть ориентированное ребро в* x*. Вероятности перенормировали после добавления вершины так, чтобы ненулевые вероятности остались ненулевыми. Докажите, что*

1. *Новая цепь эргодическая (то есть, есть инвариантное распределение и цепь к нему сходится на бесконечном времени).*

2. *Для каждого состояния a новой цепи есть некоторый момент* T_a *(случайный момент времени), после которого цепь никогда не вернётся в a. Покажите, что* T_a *почти наверное конечна.*

3. *Покажите, что не существует состояния, кроме a, которое цепь может посетить бесконечное число раз с ненулевой вероятностью.*

Вам может понадобиться лемма Бореля-Кантелли.