# Процессы Леви и интеграл Ито

По умолчанию все задачи 5 баллов, если не оговорено иного.

**Упражнение 1.1.** *Пусть* $X_t$ *– процесс Леви с неубывающими траекториями (такой процесс называется субординатором). Докажите, что процесс*

$$Y_t = X_t + W_{X_t}$$

*является процессом Леви. Винеровский процесс* $W$ *и процесс* $X$ *независимы.*

**Задача с дедлайном в ДЗ4** Пусть $W$ – одномерный Винеровский процесс с началом в нуле (модификация с непрерывными траекториями), а $\tau_w$ – это время

$$\tau_w = \inf\{t \geq 0 : \ W_t \geq w\}$$

для $w \geq 0$. Докажите, что $\tau_w$ – это момент остановки относительно фильтрации Винеровского процесса. Покажите, что $(\tau_w)_{w \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ – это процесс Леви (Normal Inverse Gaussian, NIG-процесс).

**Упражнение 1.2.** *(Задача на замену предыдущей) Определим процесс*

$$X_t = P_t - t,$$

*где* $P_t$ *– сложенный процесс Пуассона с интенсивностью прыжков* $\lambda$ *и величинами прыжков из экспоненциального распределения* $Exp(\mu)$*. Найдите представление в видел тройки Леви для процесса* $X_t$*.*

**Упражнение 1.3.** *Интеграл Стратоновича определяется похожим на интеграл Ито образом для функций* $f \in \mathcal{V}(0,T)$ *и в некоторых случаях бывает удобнее:*

$$\int_0^T f(t\omega) \circ dW_t = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f((t_i + t_{i+1})/2, \omega) \Delta W_{t_i},$$

*где предел берётся в смысле* $L^2$*. В общем случае интеграл Ито и интеграл Стратоновича разные. Вычислите по определению*

$$\int_0^T W_t \circ dW_t.$$

*и сравните с интегралом Ито. Подсказка: попробуйте увидеть интеграл Ито и потом найти предел в* $L^2$ *у того, что осталось.*

**Упражнение 1.4.** *Пусть* $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *– одномерный Винеровский процесс. Вычислите*

$$\int_0^T \int_{t_1}^T \int_{t_2}^T dW_{t_3} dW_{t_2} dW_{t_1}.$$

*У вас в ответе может остаться интеграл Римана.*

**Упражнение 1.5.** *В каких-то случаях интеграл Стратоновича совпадает с интегралом Ито и это связано со свойствами траекторий интегрируемого процесса. Более того, покажите, что если существуют* $K > 0$ *и* $\gamma > 0$ *такие, что*

$$\mathbb{E}\left[|f_t - f_s|^4\right] \le K|t-s|^{2+\gamma},$$

*то для любого выбора* $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ *предел (в смысле* $L^2$*)*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_i f(t_i^*, \omega)\Delta W_{t_i} = \int_0^T f(t,\omega) dW_t.$$