Диффузия

На этой неделе мы займёмся более детальным изучением решений дифференциальных уравнений Ито. Связующим мостом между стохастическим и детерминированным миром являются диффузионные процессы, которые с точки зрения фиизики можно рассматривать через призму макромасштаба (через плотности, описательные характеристики) и микромасштаба (через описание стохастической динамики отдельных частиц).

14.1 Процесс диффузии

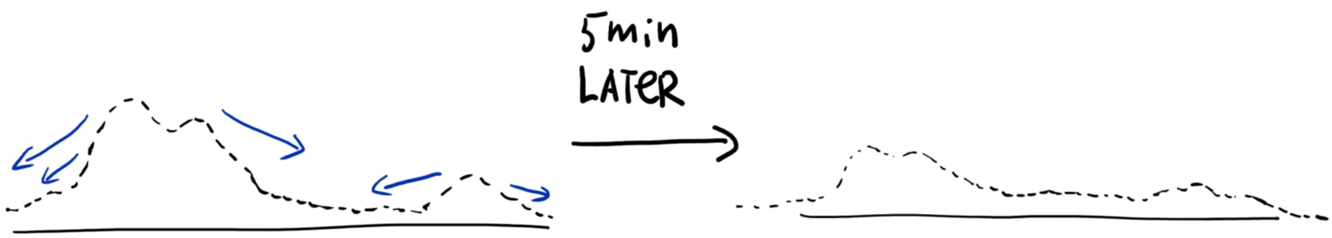
Диффузия – это чисто физическое название. Наверняка все мы помним что-то из курса школьной физики, где диффузией называется взаимное проникновение частиц разных веществ. Также диффузией называют рассеивание энергии, например, тепла. В 3d-рендеринге можно встретить название материала *diffuse*, поверхность из такого материала рассеивает поток света, очень слабо его отражая.

Всё это очень похожие с точки зрения математики модели, при этом они находятся в области молекулярно-кинетической теории, изучающую системы очень большого количества непредсказуемо двигающихся молекул или частиц.

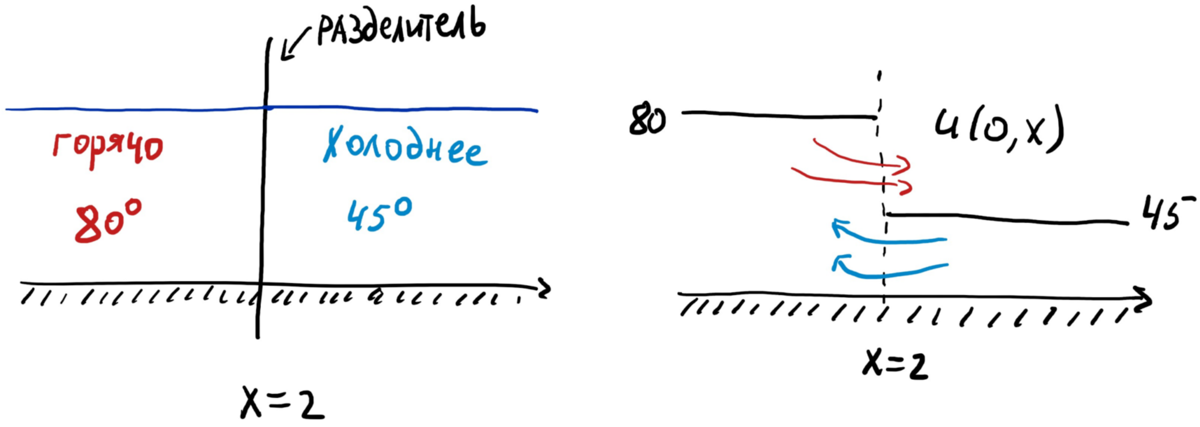
Пример 14.1. *Известное уравнение теплопроводности, называемое тоже уравнением диффузии, выглядит так:*

$$\partial_t u = \Delta u.$$

Здесь $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, записываемое как $u(t, x)$ задаёт уровень тепла (температуру, если записать с правильными константами) в момент $t \in \mathbb{R}_+$ в точке пространства $x \in \mathbb{R}^d$.

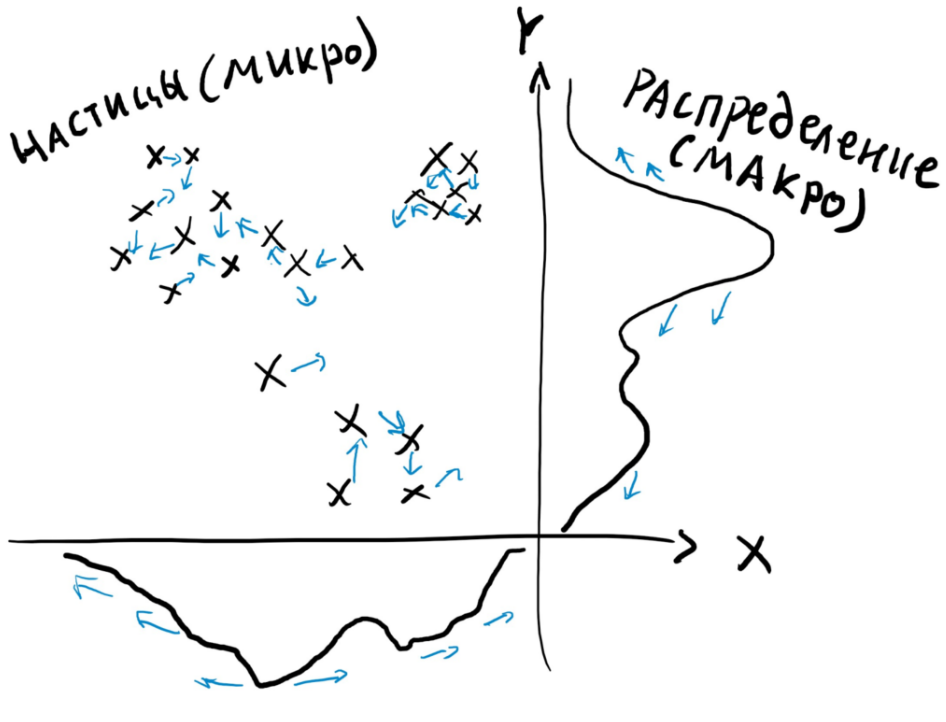


Такое уравнение выводится во многом интуитивными аргументами и с использованием предположения достаточной гладкости функции $u(t, x)$, но оказывается, что у него *есть и не везде гладкие решения, которые изначально такой подход не позволяет получить. Например, в среде может быть разделитель, который отделяет область с двумя разными температурами.*

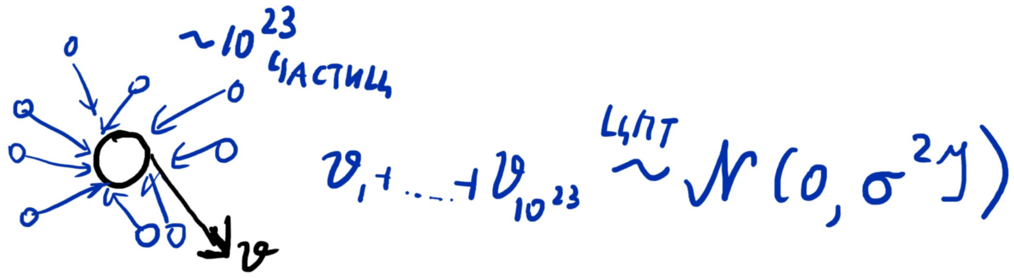


В силу физики после того, как разделитель убрали, температура должна уравниваться, плавно меняясь, потому что диффузия – это перетекание частиц вещества.

Явления, похожие на диффузию, всегда связаны с большим количеством частиц, поэтому уравнения в частных производных описывают в некотором смысле изменение их плотности, но не говорят, где будет каждая частица в какой момент.



Как можно описать одну конкретную частицу во время диффузии? Здесь на помощь приходит модель Броуновского движения, где есть одна инородная частица, всё происходит в стакане, и эта частица претерпевает соударения от соседних частиц жидкости. В силу того, что соударений очень много и они (можно предположить) независимы и маловероятно, что очень большие, то работает центральная предельная теорема: при условии, что частица была в точке $X_s = x_s$, её положение в момент t будет $X_t \sim N(x_s, \sigma^2(t-s))$.



Это обычная модель Броуновского движения, которую можно записать в виде стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0.$$

Это сильное упрощение, потому что в исследовании явлений диффузии есть ещё различные внешние факторы и неоднородность среды. Поэтому для нас моделью диффузии будет являться более общее дифференциальное уравнение в смысле Ито (можно рассматривать также уравнения Стратоновича)

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

где

$$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$$

и W_t – m-мерный Винеровский процесс. Мы до самого конца (если не оговорено иного) будем исследовать однородные по времени диффузии, чтобы упростить выкладки. Неоднородный случай можно несложно обобщить, например, рассматривая время как отдельный процесс.

Определение 14.1. *Решение стохастического дифференциального уравнения в смысле Ито*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \ X_0 = x_0$$

при условии, что решение существует и слабо единственно (если есть 2, то конечномерные распределения одинаковы), назовём (однородной по времени) диффузией Ито.

Что может быть однородной по времени диффузией?

Пример 14.2. *Уравнение для процесса Орнштейна-Уленбека*

$$dX_t = -X_t dt + dW_t$$

является простым примером очень интересного класса диффузий. Пусть

$$p(x) = e^{-x^2/2},$$

тогда это уравнение можно записать как

$$dX_t = \nabla_x \ln p(X_t)dt + dW_t,$$

уравнения такого типа задают диффузию Ланжевена (Langevin diffusion), которая обладает очень большим количеством интересных свойств, мы уже видели её в действии в домашних заданиях.

Оказывается, что такой процесс действительно будет однородным по времени, достаточно только убрать зависимость от t из коэффициентов. Обозначим $X_t^{s,x}, t \geq s$ решение уравнения процесса диффузии с начальным условием $X_s = x$. Тогда можно заметить из интегральной формы записи, что

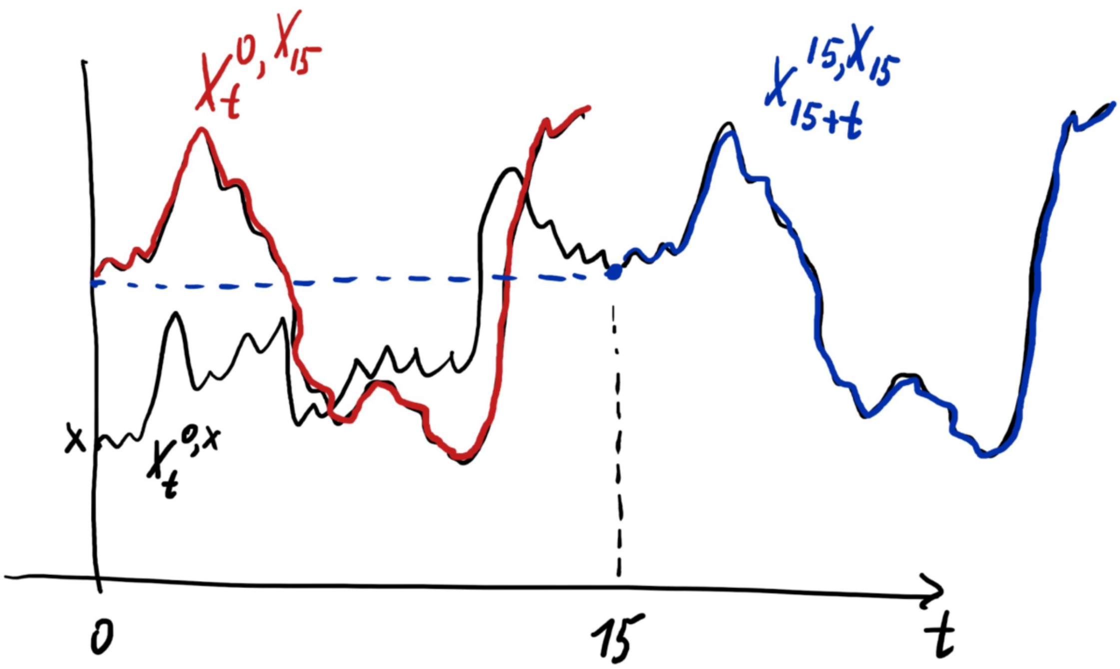
$$X_{s+h}^{s,x} = x + \int_s^{s+h} b(X_u)du + \int_s^{s+h} \sigma(X_u)dW_u$$

и, с другой стороны,

$$X_h^{0,x} = x + \int_0^h b(X_u)du + \int_0^h \sigma(X_u)dW_u.$$

Можно обратить внимание, что под интегралом используются только приращения Винеровского процесса, поэтому в первом выражении можно сделать замену на $\widetilde{W}_t = W_t - W_s$ (тоже Винеровский процесс) и увидеть

$$X_{s+h}^{s,x} = x + \int_0^h b(X_u)du + \int_0^h \sigma(X_u)d\widetilde{W}_u.$$



В силу слабой единственности решения дифференциального уравнения, решения

$$X_t^{s,x},\ t \geq s$$

и

$$X_t^{0,x},\ t \geq 0$$

имеют одинаковые конечномерные распределения. Иными словами, X – однородный по времени процесс.

14.2 Марковское свойство

Мы уже много раз почти приближались к этому вопросу, но теперь готовы обсудить его более формально.

Определение 14.2. *Процесс (X_t) обладает Марковским свойством относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)$, если для $t, h > 0$ и любой измеримой ограниченной функции f*

$$\mathbb{E}\left[f(X_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{t+h}) \mid X_t\right].$$

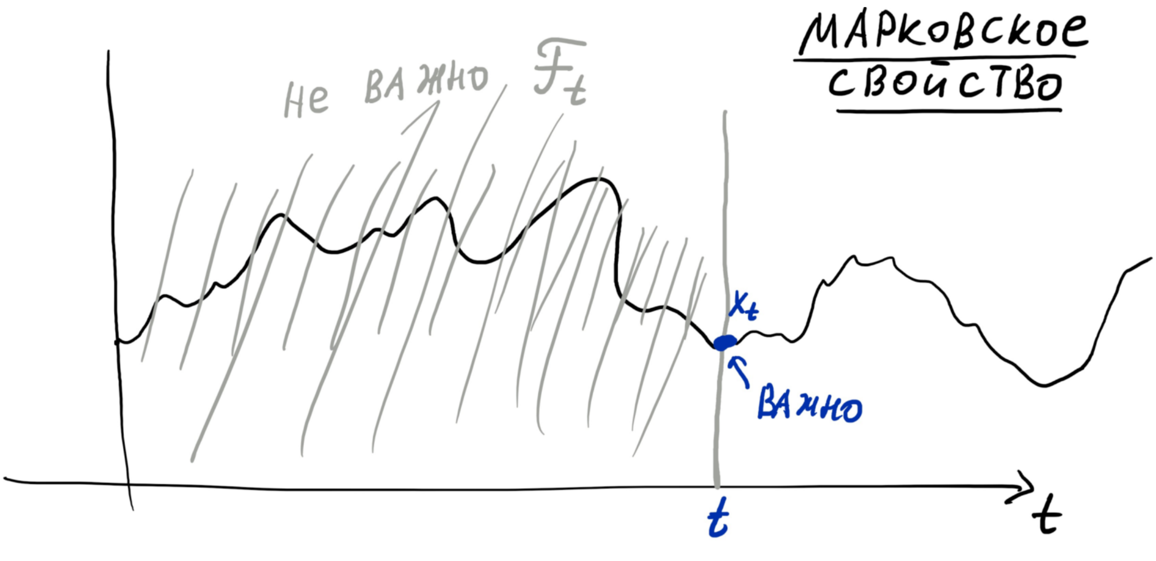
Это свойство можно увидеть также и в другом виде:

$$\mathbb{P}\left(X_t \in E_t \mid X_{t_1} \in E_{t_1}, .., X_{t_k} \in E_{t_k}\right) = \mathbb{P}\left(X_t \in E_t \mid X_{t_k} \in E_{t_k}\right)$$

для всех $t > t_k > ... > t_1$. Это мы уже видели ранее в Марковских цепях.

Пример 14.3. *Винеровский процесс, как и любой процесс со стационарными и независимыми приращениями (в том числе, любой процесс Леви), обладает Марковским свойством относительно своей фильтрации. Здесь помогает независимость приращения $X_t - X_s$ относительно сигма алгебры $\mathcal{F}_s$.*

Пример 14.4. *Марковские цепи, которые мы рассматривали ранее, по своей конструкции удовлетворяют Марковскому свойству.*



Учитывая однородность по времени, неудивительно, что диффузии тоже Марковские относительно правильной фильтрации.

Утверждение 14.1. *Диффузия*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

обладает Марковским свойством относительно фильтрации Винеровского процесса $(\mathcal{F}_t)$.

▷ Используем однородность по времени (так можно, потому что до времени t траектория при условии $\mathcal{F}_t$ уже реализовалась и X_t измерим):

$$\mathbb{E}\left[f(X_{t+h}^{0,x}) \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[f(X_h^{t,X_t}) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

На самом деле значение под матожиданием зависит только от X_t, потому что интеграл Ито будет пределом интегральной суммы с приращениями Винеровского процесса, которые не зависят от $\mathcal{F}_t$. При этом X_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$, поэтому полностью от условного матожидания избавиться нельзя. По этой причине

$$\mathbb{E}\left[f(X_{t+h}^{0,x}) \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{t+h}^{0,x}) \mid X_t\right].$$

□

Заметим, что X_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$, поэтому $(\sigma(X_s),\ s \le t)$, сигма-алгебра, порождённая всеми сечениями до момента t, будет вложена в фильтрацию Винеровского процесса. Поэтому X_t обладает Марковским свойством также относительно своей фильтрации.

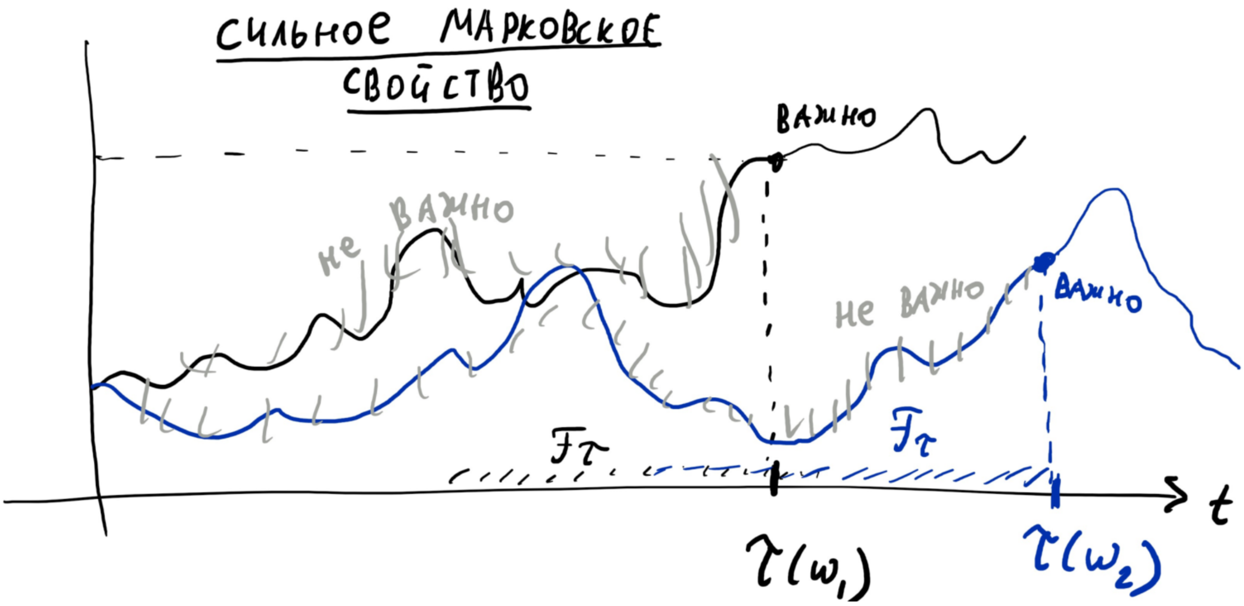
14.3 Сильное Марковское свойство

Само Марковское свойство открывает интересные горизонты: получается, что всё будущее процесса после момента t определяется только значением X_t. Поэтому это свойство часто ассоциируют с отсутствием памяти.

Один из интересных приёмов исследования процессов в финансовой математике и в семплировании состоит в том, чтобы исследовать процесс после наступления момента остановки. Скажем, если цена акции – это диффузия, и она достигла 123 рубля, то как понять, сколько ещё она продержится выше этого уровня? Если бы было что-то похожее на Марковское свойство, можно было бы сказать, что история не важна и нужно просто начать тот же процесс, но с другим начальным условием. Аналогом и обобщением Марковского свойства до уровня моментов остановки является *сильное Марковское свойство.*

Определение 14.3. *Процесс X обладает сильным Марковским свойством относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)$, если для любого времени остановки τ (относительно этой же фильтрации и почти наверное $\tau < \infty$), любой ограниченной измеримой функции f и любого $h > 0$*

$$\mathbb{E}\left[f(X_{\tau+h}) \mid \mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{\tau+h}) \mid X_\tau\right].$$



Многие примеры Марковских процессов транслируются и на этот случай, но не все.

Пример 14.5. *Винеровский процесс обладает сильным Марковским свойством. Это оказывается очень непросто доказать и потребует от нас хорошего уровня владения остановленными сигма-алгебрами. Тем не менее, это вполне посильный факт, хотя и занимает достаточно места.*

Пример 14.6. *Любой процесс Леви обладает сильным Марковским свойством относительно своей фильтрации.*

Пример 14.7. *Можно построить процесс, который Марковский, но не сильно Марковский. К примеру, пусть $U \sim Ber(p)$. Если $U(\omega) = 1$, то процесс $X_t(\omega)$ – траектория Винеровского процесса, стартующего из 1, в целой точке t, а иначе тождественный 0. Это Марковский процесс относительно своей фильтрации. С другой стороны, если мы рассмотрим время остановки τ – k-й момент t, когда $X_t = 0$, – то случайная величина X_τ на самом деле константа 0 и порождает тривиальную сигма-алгебру, в то время как $\mathcal{F}_\tau$ включает в себя события $\{\omega :\ X_0(\omega) = 0\}$. Иначе говоря, значение $f(X_{\tau+h})$ будет зависеть от того, был ли 0 изначально, при этом значение 0 в момент достижения не даёт никакой информации о том, вся траектория ноль или нулевое значение только сейчас достигнуто.*

Оказывается, что любая диффузия является сильно Марковской и это следствие того, что мы использовали Винеровский процесс, который тоже сильно Марковский.

Утверждение 14.2. *Диффузия*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

обладает сильным Марковским свойством.

Пример 14.8. *Сильное Марковское свойство позволяет с помощью времён остановки и остановленных сигма-алгебр получать изначально не очень ожидаемые формулы для вероятности. Одним из таких примеров является закон отражения.*
Рассмотрим W, Винеровский процесс и попробуем вычислить вероятность

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} W_s \ge a\right).$$

Добавим с помощью формулы полной вероятности в рассмотрение сечение W_t:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} W_s \ge a\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} W_s \ge a,\ W_t \ge a\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} W_s \ge a,\ W_t < a\right).$$

Прежде всего, заметим, что

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} W_s \ge a,\ W_t \ge a\right) = \mathbb{P}\left(W_t \ge a\right),$$

потому что первое событие больше и содержит второе. Рассматриваем фильтрацию Винеровского процесса, задаваемую

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \le t),$$

и время остановки

$$\tau = \inf\{s :\ W_s = a\} \wedge t.$$

Воспользуемся формулой полного матожидания, перейдя к индикаторам:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} W_s \ge a,\ W_t < a\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}(\sup_{s\le t} W_s \ge a)\mathbb{1}(W_t < a) \mid \mathcal{F}_\tau\right]\right].$$

Первый индикатор измерим относительно остановленной сигма-алгебры; он имеет два значения: 1 и 0, посмотрим на прообраз каждого.

1. *Индикатор равен 1. В этом случае прообраз – это событие*

   $$\{\omega : \sup_{s\le t'} W_s \ge a\} = \{\omega : \tau(\omega) \le t'\} \cap \{\omega : \sup_{s\le t'} W_s \ge a\} \in \mathcal{F}_{t'},$$

   так что оно лежит в $\mathcal{F}_\tau$.

2. *Индикатор равен 0. Это происходит только тогда, когда $\tau = t$, а это событие из $\mathcal{F}_\tau$.*

Внутри остаётся ещё

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}(W_t < a) \mid \mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{P}\left(W_t - W_\tau < 0 \mid \mathcal{F}_\tau\right) = \mathbb{P}\left(W_t - W_\tau < 0 \mid W_\tau\right) = 1/2,$$

где нам помогло сильное Марковское свойство. Таким образом, после подстановки и небольших манипуляций получаем

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le t} W_s \ge a\right) = 2\mathbb{P}\left(W_t \ge a\right).$$

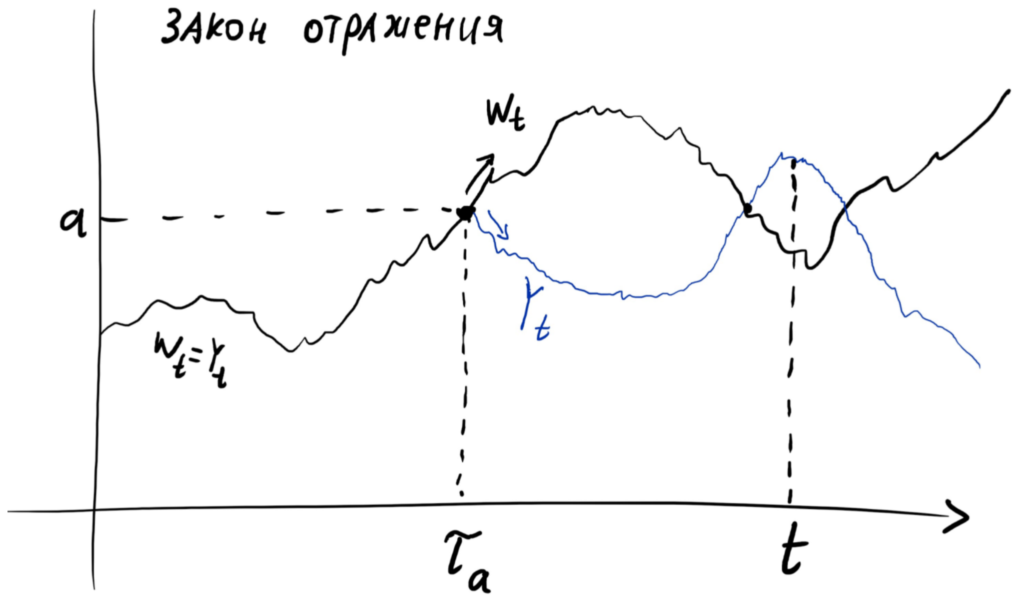
Почему это закон отражения? Есть ещё одна интерпретация. Если мы введём время остановки τ (любое строгое, то есть $\{\omega : \tau \leq t\}$ лежит в $\mathcal{F}_t$), то процесс

$$Y_t = \begin{cases} 2W_\tau - W_t, & t > \tau \\ W_t, & t \leq \tau \end{cases}$$

тоже будет Винеровским процессом с помощью сильного Марковского свойства. То есть, мы как бы отразили траекторию вертикально относительно времени остановки τ. После момента τ оригинальный W_t идёт дальше, а новый Y_t отражается. В этом контексте два изначальных слагаемых (при τ определённом как изначально) можно рассмотреть также как

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} W_s \geq a\right) = \mathbb{P}\left(\tau \leq t,\ W_t \geq a\right) + \mathbb{P}\left(\tau \leq t,\ W_t < a\right).$$

При этом после наступления момента остановки согласно сильному Марковскому свойству стартует новый Винеровский процесс $W_{\tau+h} - W_{tau}$, который с вероятностью $1/2$ выше или ниже 0.



14.4 Генератор диффузии

Центральный вопрос для финансовой математики – уметь посчитать или получить удобное представление для матожидания типа

$$\mathbb{E}\left[f(X_\tau)\right],$$

то есть, матожидания функции от остановленного процесса. Это важно в частности для того, чтобы получать формулы для цен опционов и для задач хеджирования. С другой стороны, есть физические задачи: как мы можем использовать информацию о вероятностной модели частицы для получения статистического описания явления диффузии?

Как и в случае Марковских процессов, мы приходим к понятию чего-то похожего на Q-матрицу (такой объект называется *переходным ядром* и занимает центральное место в теории Марковских цепей). Для нас эта теория вне горизонта, но мы её ещё немного увидим в следующий раз. В контексте поставленной задачи нас будет интересовать немного другой объект, но очень похожий.

Определение 14.4. *Генератором однородной по времени диффузии X называется оператор A, действующий на функциях f как*

$$A[f](x) = Af(x) = \lim_{t\to 0+} \frac{\mathbb{E}\left[f(X_t) \mid X_0 = x\right] - f(x)}{t}.$$

Множество функций, для которых предел существует во всех x, обозначается $\mathcal{D}_A$ и называется областью определения оператора A, а множество функций таких, что предел существует в точке x, обозначается $\mathcal{D}_A(x)$.

Иногда оператор A называют также *инфинитезимальным генератором*, чтобы подчеркнуть предел из определения. Оператор A является по смыслу *производной* условного матожидания $f(X_t)$ по t, то есть, он может показать, как оно меняется во времени при развитии процесса. Конкретнее и более формально, как мы увидим, условное матожидание

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[f(X_t) \mid X_0 = x\right]$$

удовлетворяет *обратному уравнению Колмогорова*

$$\partial_t u = Au$$

с краевым условием типа

$$u(0,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$$

или

$$u(T,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

В частности, уравнение Блэка-Шоулза – частный слуай обратного уравнения Колмогорова для диффузии GBM. Мы более подробно вернёмся к этому вопросу в следующей главе.

Оказывается, что знание генератора позволяет нам получить очень полезное представление для матожидания функции от процесса.

Теорема 14.3. *Пусть Y – это процесс Ито с представлением*

$$dY_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dW_t,\ Y_0 = x.$$

Тогда для $f \in C^2$, которая отображает $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, верно

$$\mathbb{E}\left[f(Y_\tau) \mid Y_0 = x\right] = f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \nabla f(Y_s)u(s,\omega) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{ij}(s,\omega)(\nabla^2 f(Y_s))_{ij}\ ds \mid Y_0 = x\right]$$

$\triangleright$ Для начала заметим, что процесс $f(Y_t)$ – это тоже процесс Ито и по многомерной формуле Ито после некоторой арифметики получим

$$df(Y_t) = \nabla f(Y_t)dY_t + \frac{1}{2}dY_t^T\nabla^2 f(Y_t)dY_t =$$
$$= \nabla f(Y_s)u(s,\omega)dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{ij}(t,\omega)(\nabla^2 f(Y_t))_{ij}dt + \sum_{i,j}\partial_{x_i}f(Y_t)v(t,\omega)_{ij}dW_t^j.$$

Если мы сейчас возьмём матожидание от интегрального представления, то получим нужную формулу, так как последняя сумма по свойству интеграла Ито даст 0. Но чтобы получить результат не для t, а для времени остановки τ, потребуется ещё немного усилий.

Зададим время остановки τ. Первые два слагаемых уже есть в формуле, нам надо доказать, что матожидание интеграла последнего равно 0. Здесь помогает приём аппроксимации времени остановки. Обозначим

$$\partial_{x_i}f(Y_s)v(s,\omega)_{ik} = g(Y_s,\omega)$$

и тогда

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau\wedge m} g(Y_s)dW_s^j \mid Y_0 = x\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^m \mathbb{1}(s\le\tau)g(Y_s,\omega)dW_s^j \mid Y_0 = x\right].$$

Подынтегральная функция из класса интегрируемых по Ито, поэтому по свойству интеграла Ито, матожидание равно нулю. С другой стороны, если мы сравним с интегралом до τ,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\tau} g(Y_s,\omega)dW_s - \int_0^{\tau\wedge m} g(Y_s,\omega)dW_s\right)^2 \mid Y_0 = x\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_{\tau\wedge m}^{\tau} g(Y_s,\omega)dW_s\right)^2 \mid Y_0 = x\right].$$

Если вместо g рассмотреть $g\mathbb{1}(\tau\wedge m \le s \le \tau)$ и перейти к интегралу до ∞ (интеграл на самом деле всегда по конечному множетсву, поэтому так можно), получим обычную изометрию Ито и

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{\tau\wedge m}^{\tau} g(Y_s,\omega)dW_s\right)^2 \mid Y_0 = x\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\tau\wedge m}^{\tau} g(Y_s,\omega)^2 ds \mid Y_0 = x\right] \le M^2\mathbb{E}\left[\tau - \tau\wedge m \mid Y_0 = x\right] \to 0$$

при $m\to\infty$. Из сходимости в L^2 следует сходимость матожиданий, поэтому последняя сумма в случае времени остановки тоже занулится. $\square$

Из этого утверждения в одно действие можно получить выражение для генератора диффузии.

Теорема 14.4. *Генератор диффузии*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

задаётся как

$$Af(x) = \nabla f(x)b(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}(x)(\nabla^2 f)_{ij}(x)$$

и если $f\in C^2$, то $f\in\mathcal{D}_A$.

Наконец, первый мостик в статистическую физику.

Пример 14.9. *Броуновское движение – это диффузия*

$$dX_t = dW_t,$$

а её генератор – это почти оператор Лапласа

$$A = \Delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2.$$

По этой причине уравнение теплопроводности (оно же уравнение диффузии) связаны с Броуновским движением. Так мы ввели вероятностную модель частицы на микроуровне и поняли, что её также можно описать в макромасштабе с помощью уравнения в частных производных. Обратное уравнение Колмогорова говорит, какое будет ожидаемое значение $f(X_t)$ при условии, что частица стартовала с $X_0 = x_0$. Но есть нюанс...

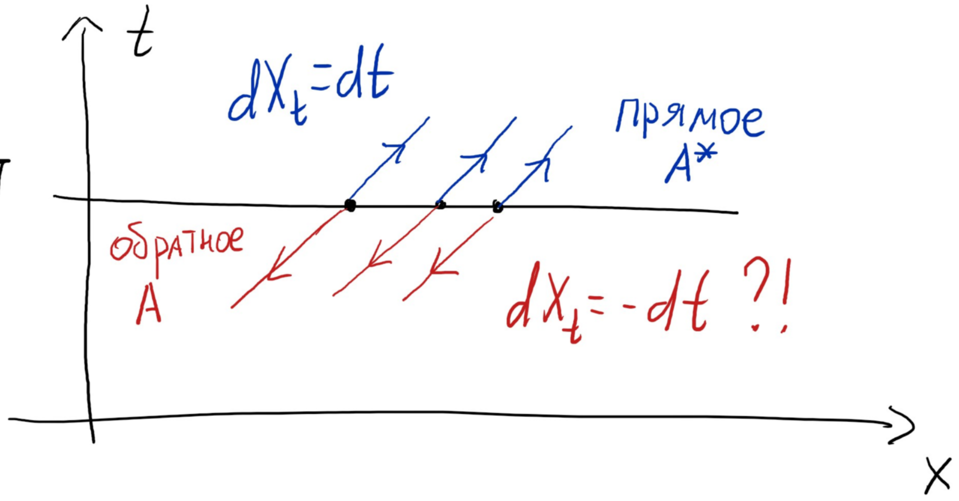
Пример 14.10. *Уравнение переноса*

$$\partial_t u + \partial_x u = 0$$

с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$ имеет решение $u(t, x) = u_0(x - t)$. Если рассмотреть это уравнение как обратное уравнение Колмогорова, то окажется, что такому генератору соответствует диффузия

$$dX_t = -dt.$$

Кажется странным, почему частицы движутся влево, если решение $u(t, x)$ наоборот сдвигается вправо. Обратное уравнение Колмогорова оценивает матожидание функции в координате частицы в момент t. Уравнение переноса говорит, что в момент t функция должна сдвинуться правее. То есть, в момент t в стартовой точке x должно быть то же значение, которое было в той точке, откуда в x за время t пришла другая частица. На формальном уровне это означает, что построенная диффузия на самом деле как бы идёт назад во времени. Поэтому это уравнение называется обратным.
Есть ещё прямое уравнение Колмогорова, которое в физике называют уравнением Фоккера-Планка, которое записывается с оператором A^*. Оператор Лапласа самосопряжённый, поэтому $A = A^*$ и Винеровский процесс действительно описывает продвижение частиц вперёд во времени, но в этом случае сопряжённым для $A = -\partial_x$ будет оператор $A^* = \partial_x$. Об этом на следующей неделе.



Пока же подытожим наш основной результат, который носит название формулы Дынкина, на основе сбора наших последних результатов.

Теорема 14.5. *(Формула Дынкина) Для диффузии*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

времени остановки τ (относительно фильтрации Винеровского процесса или процесса X, почти наверное конечного) и $f \in C^2$ верно

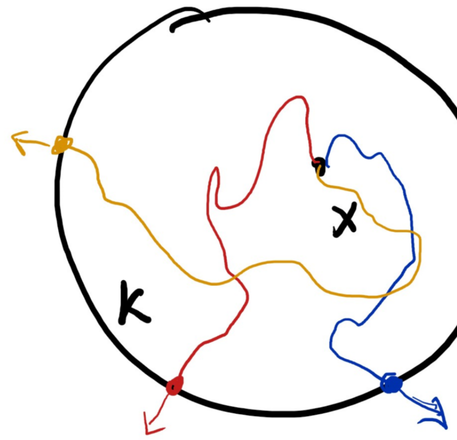
$$\mathbb{E}\left[f(X_\tau) \mid X_0 = x\right] = f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau Af(X_s)ds \mid X_0 = x\right].$$

Пример 14.11. *Чем ещё полезно знание генератора и формулы Дынкина? Например, можно исследовать разные глобальные свойства процессов с помощью времён остановки. Одним из интересных примеров является Винеровский процесс. Для $d = 1$ вообще сработает похожий аргумент, но там можно сильно проще, поэтому рассмотрим Винеровский процесс W в d-мерном пространстве, при этом $d \geq 2$. Какое среднее время выхода из некоторой окрестности нуля, например, множества*

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \ \|x\| \leq R\right\}?$$

Норма – это евклидова 2-норма, мы опускаем нижний индекс 2 для краткости. Это время случайное и более того, является моментом остановки

$$\tau = \inf\left\{t : W_t \notin K\right\} = \inf\left\{t : \|W_t\| = R\right\}.$$



Последнее верно в силу непрерывности траекторий и того, что мы рассматриваем инфимум, то есть, точную нижнюю грань. Генератор Винеровского процесса – это оператор Лапласа $A = \frac{1}{2}\Delta$. Присмотримся к формуле Дынкина и положим $x \in K$:

$$\mathbb{E}\left[f(W_\tau) \mid W_0 = x\right] = f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau Af(W_s)ds \mid W_0 = x\right].$$

Если бы мы подобрали такую дважды дифференцируемую функцию, которая (1) во время остановки была бы константой или очень простой случайной величиной и (2) $Af = const$, то мы получим выражение для матожидания времени остановки. Такой функцией является, например,

$$f(x) = \|x\|^2.$$

Применив формулу Дынкина, увидим

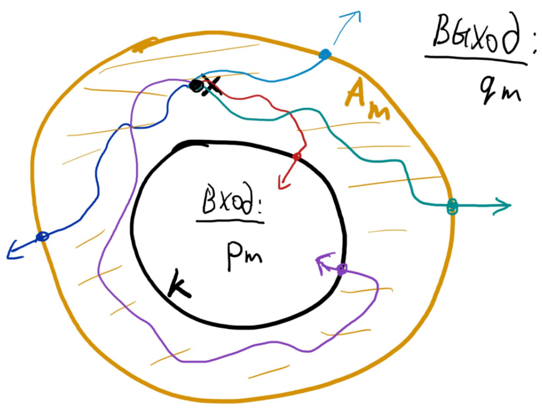
$$R^2 = \|x\|^2 + d\mathbb{E}\left[\tau \mid W_0 = x\right],$$

то есть,

$$\mathbb{E}\left[\tau \mid W_0 = x\right] = \frac{R^2 - \|x\|^2}{d}.$$

Отсюда видно ещё один момент: это время уменьшается с ростом размерности, то есть в больших размерностях процесс быстрее покидает любую окрестность нуля. Оказывается, мы можем понять, вернётся ли процесс обратно в K, если покинет её. Здесь тоже помогает формула Дынкина. давайте предположим, что процесс стартует вне K, но при этом всё ещё в ограниченном множестве, например, в

$$A_m = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \ R \le \|x\| \le 2^m R\right\}.$$



В силу динамики Винеровского процесса, он точно за конечное время выйдет из A_m, вопрос только в том, где. Есть два варианта:

1. *Через внутреннюю границу, обратно в K;*
2. *Через внешнюю границу, вовне.*

Мы обозначим вероятность сценария (1) за p_m, а вероятность сценария (2) за q_m, при этом $p_m + q_m = 1$, так как других вариантов выхода нет. Положим $W_0 = x \in A_m$ и определим момент остановки

$$\tau_m = \tau = \inf\{t : W_t \notin A_m\}.$$

Здесь помогает найти какую-нибудь функцию f, которая является гармонической, то есть $\Delta f = 0$, и при этом связана с нормой. Хорошим выбором будет

$$f(x) = \begin{cases} \ln \|x\|, & d = 2, \\ \|x\|^{2-d}, d > 2. \end{cases}$$

Такой выбор атмосферой немного навеян из физики и уравнений в частных производных, конкретнее, из уравнений диффузии, уравнений Лапласа и Гельмгольца. Что это даёт?

***Случай** $d = 2$. В этом случае формула Дынкина показывает*

$$p_m \ln R + q_m \ln(R2^m) = \ln \|x\|.$$

Справа конечное число, p_m, q_m находятся между 0 и 1, при этом с ростом m слагаемое с q_m растёт до бесконечности. Поэтому неизбежно должно быть $q_m \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, Винеровский процесс с вероятностью 1 вернётся в любую окрестность старта, то есть в $d = 2$ он обладает свойством возвратности.

***Случай** $d > 2$. Здесь такой аргумент не работает.*

$$p_m R^{2-d} + q_m (R2^m)^{2-d} = \|x\|^{2-d}.$$

Если присмотреться, то

$$p_m = \frac{\|x\|^{2-d} - q_m(R2^m)^{2-d}}{R^{2-d}},$$

при этом $(R2^m)^{2-d} \to 0$ *при* $m \to \infty$ *и* q_m *ограничена. Значит,*

$$p_m \to \frac{\|x\|^{2-d}}{R^{2-d}},$$

это число < 1. *Следовательно, с ненулевой вероятностью Винеровский процесс может и не вернуться в окрестность старта.*

На следующей неделе мы больше уйдём в сторону связи с уравнениями в частных производных, которые нам откроют способы изучения распределений сечений диффузии. Теория вероятности неожиданно успешно описывает физические феномены.