2. Винеровский процесс

По умолчанию все задачи 5 баллов, если не оговорено иного.

Упражнение 2.1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, $(X_t)_{t\in T}$ – гауссовский процесс с индексным пространством $T = \mathbb{R}$ и принимающий значения в $\Xi = \mathbb{R}$, обладающий нулевым матожиданием и ковариационной функцией*

$$K(t,s) = e^{-\frac{|t-s|^2}{2}}.$$

Проверьте, существует ли модификация X с непрерывными траекториями.

Упражнение 2.2. *(3 балла) Докажите, что следующие два определения $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ одномерного Винеровского процесса ($W_0 = 0$ для простоты) эквивалентны (из 1 в 2 мы доказали на лекции, докажите из 2 в 1).*

1. *(Конструкция с лекции)*
   - (a) *$W_0 = 0$ почти наверное;*
   - (b) *W – процесс с независимыми приращениями;*
   - (c) *для всех $t, s \in \mathbb{R}_+$ приращение $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$;*
2. *W – гауссовский процесс с матожиданием $\mathbb{E}[W_t] = 0$ и ковариационной функцией $K(t,s) = t \wedge s$.*

Упражнение 2.3. *(2 балла) Пусть $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – d-мерный Винеровский процесс (посмотрите конспект) и $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ – унитарная матрица, то есть, $UU^* = U^*U = I$, где I – единичная матрица размера $d \times d$. Докажите, что $X_t = UW_t$ – тоже d-мерный Винеровский процесс.*

Упражнение 2.4. *Пусть $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – одномерный Винеровский процесс с началом в нуле ($W_0 = 0$ почти наверное) и $T \in \mathbb{R}_+$. Процесс B определяется как*

$$B_t = W_t - \frac{t}{T} W_T, \quad t \in [0, T]$$

и называется Броуновским мостом. Вычислите матожидания

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T B_t B_s dt ds\right].$$

Упражнение 2.5. *(2 балла) Пусть $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – одномерный Винеровский процесс, $c > 0$. Докажите, что $\sqrt{c}W_{t/c}$ – Винеровский процесс.*

Упражнение 2.6. *(3 балла) Пусть* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– одномерный Винеровский процесс (модификация) с непрерывными траекториями. Используя усиленный закон больших чисел:*

$$\frac{W_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad \text{почти наверное,} \ -$$

докажите, что $(tW_{1/t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– тоже Винеровский процесс с непрерывными траекториями.*

Упражнение 2.7. *Пусть* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– одномерный Винеровский процесс с началом в нуле (*$W_0 = 0$ *почти наверное) и непрерывными траекториями,* $T \in \mathbb{R}_+$*, процесс* Y *определяется как*

$$Y_t = \frac{1}{t}\int_0^t W_s ds.$$

1. *Докажите, что это гауссовский процесс (вам нужно аккуратно подумать про предельные переходы).*

2. *Вычислите матожидание и ковариационную функцию процесса.*

3. *Проверьте, является ли процесс стационарным в широком смысле.*

Упражнение 2.8. *(Бонусное, 5 баллов) Пусть* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– одномерный Винеровский процесс. Докажите, что*

$$\frac{W_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \ \ \text{почти наверное.}$$

Подсказки:

1. *Полезно для растущей к бесконечности последовательности* (t_k) *с* $t_0 = 0$ *рассмотреть Винеровский процесс как*

$$W_{t_n} = \sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

2. *Ещё может понадобиться лемма Бореля-Кантелли.*

3. *Может помочь (или нет...) такой факт про гауссовское распределение (докажите, если пользуетесь)*

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \mathbb{P}\left(|X| > t\right) \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}t}e^{-t^2/2}.$$