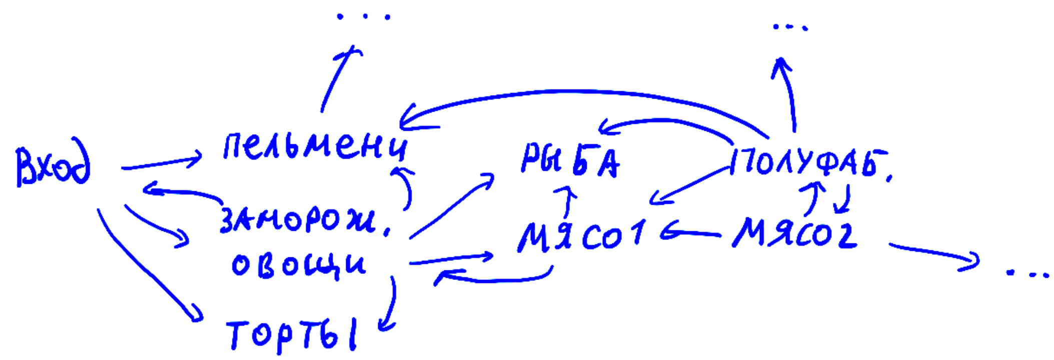
ЛЕКЦИЯ 4

Цепи Маркова

В этой лекции мы строим ещё один простой процесс с далеко идущими последствиями. Многие с ним знакомятся даже не зная слова случайный процесс, но именно взгляд с более расширенного фундамента случайных процессов позволяет вывести понимание и приложения этой модели на принципиально новый уровень.

4.1 Конструкция цепи Маркова

Предположим, у нас есть датасет положений клиента в магазине во времени. Каждое такое наблюдение – это набор дискретных меток $x_{t_1}, .., x_{t_k}$, каждая из которых показывает ID отдела, где находился клиент в момент t_i. Мы хотели бы построить математическую модель таких данных. Это помогло бы исследовательским целям, включая в частности (но не только) тестирование новых инновационных методик, основанных на искусственном интеллекте. А ещё подобные модели – очень дешёвый способ провести предварительные тесты, связанные с АБ-тестированием: в онлайн-тестах данные добываются легко, но в оффлайне – это отдельная боль, время и риски.



Формально нас интересует $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ - случайный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, описывающий поведение клиента магазина. На первом этапе (но позже мы немного обобщим) мы не учитываем время, проведённое клиентом в каждом отделе, начиная с очень простого подхода. Нас, таким образом, интересует прежде всего то, как именно клиент перемещается между отделами. В данном случаи моменты времени t принимают дискретные значение в $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}$. Пусть $\Xi = \{1, 2, ...r\}$ - пространство состояний (множество значений, которые могут принимать случайные величины X_t). Т.к. Ξ - конечное пространство, логичнее всего ввести на нем наибольшую σ-алгебру $\mathcal{G} = 2^{\Xi}$, состоящую из всех возможных подмножеств Ξ.

Чтобы определить случайный процесс X, нам нужно задать согласованное (т.е. удовлетворяющее теореме Колмогорова) семейство совместных распределений

$$F(t_1, .., t_n; A_1, .., A_n) = P\left(X_{t_1} \in A_1, .., X_{t_n} \in A_n\right), \quad A_1, ..., A_n \in \mathcal{G}.$$

Мы будем делать это для моментов времени $t_0, t_1, .., t_n$ и для одноэлементных множеств вида $A = \{a\}$. Задаём $\mu \in [0,1]^{1\times r}$ - это вектор-строка, описывающая распределение стартовой точки, а также $p_{ij}(t)$ - вероятности перехода из состояния i в состояние j в момент времени t.

$$\mu = (P(X_{t_0} = 1), ...P(X_{t_0} = r)) \in [0,1]^{1\times r},$$
$$p_{ij}(t) = P(X_{t+1} = j | X_t = i).$$

Поскольку p_{ij} – честные условные вероятности, сумма по j должна быть равна 1 для каждого i, t. Далее начнём с того, что определим

$$P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_n = i_n\right) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(0) p_{i_1 i_2}(1) ... p_{i_{n-1} i_n}(n-1).$$

Позади этой конструкции находится достаточно простая модель:

1. Старт $X_0 \sim \mu$;

2. Далее на каждом шаге t переход из состояния i в j происходит с вероятностью $p_{ij}(t)$.

Чтобы использовать теорему Колмогорова о существовании, нужно обобщить для произвольных моментов времени. Сначала обобщим до последовательных моментов времени $t_0, t_0+1, .., t_0+n$:

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t_0} = i_{t_0}, X_{t_0+1} = i_{t_1}, X_{t_0+2} = i_{t_2}, ..., X_{t_0+n} = i_{t_n}\right) = \\
&= \sum_{i_0, .., i_{t_0-1} \in \Xi} \mu_0 p_{i_0 i_1}(0) p_{i_1 i_2}(1) ... p_{i_{t_0-1} i_{t_0}}(t_0 - 1) p_{i_{t_0} i_{t_0+1}}(t_0) .. p_{i_{t_0+n-1} i_{t_0+n}}(t_0 + n - 1).
\end{aligned}$$

Чтобы обобщить до совсем произвольных моментов $t_1 < .. < t_n$, нужно тоже рассмотреть вероятность для моментов $t'_0 = 0, .., t'_{n+k} = t_n$ и просуммировать по всем $i_{t'_j}$ таким, что $t'_j \notin t_1, .., t_n$.

Для неупорядоченных моментов времени мы применяем такой же приём, как и с Винеровским процессом. Для любой перестановки $\sigma \in S_n$ отсортированного набора $t_1, .., t_n$

$$F(t_{\sigma(1)}, .., t_{\sigma(n)}; A_{\sigma(1)}, .., A_{\sigma(n)}) = F(t_1, .., t_n;\ A_1, .., A_n),$$

автоматически удовлетворяя перестановочное условие согласованности. Проверим второе условие согласованности:

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{t_1} = i_{t_1}, ..., X_{t_n} = i_{t_n}, X_{t_{n+1}} \in \Xi\right) = \\
&= \sum_{i_{t_{n+1}} \in \Xi} P\left(X_{t_1} = i_{t_1}, ..., X_{t_n} = i_{t_n}, X_{t_{n+1}} = i\right) = \\
&= \sum_{i_{t'_1} .. i_{t'_{n+k}} i_{t_{n+1}}} P\left(X_{t_1} = i_{t_1}, ..., X_{t_n} = i_{t_n}, X_{t_{n+1}} = i_{t_{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Поскольку $p_{ij}(t)$ по конструкции честная условная вероятность и последний индекс встречается только в последнем множителе, они пропадут. Таким же образом пропадут промежуточные от $t_n + 1$ до $t_{n+1} - 1$ (если они есть).

Вывод: по теореме Колмогорова о существовании существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P_0)$ и случайный процесс X на нём с заданным семейством конечномерных распределений. Такой процесс называется *цепью Маркова* в дискретном времени. Множество значений Ξ обычно в терминологии называют множеством *состояний*.

4.2 Стохастические матрицы

Это всё выглядит достаточно громоздко, но мы сделали полезную вещь: показали, что есть бесконечная последовательность случайных величин с заданной нами структурой взаимосвязей. Иными словами, случайный процесс.

Для практических целей удобно произвести некоторое упрощение. Переходные вероятности $p_{ij}(t)$ удобно записать в виде матрицы $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j=1}^r \in \mathbb{R}^{r\times r}$. Однако не любая матрица задает семейство переходных вероятностей. Для этого нужно, чтобы её элементы $p_{ij}(t)$ в самом деле были условными вероятностями $P(X_{t+1} = j|X_t = i)$. Это значит:

1. Элементы матрицы должны быть неотрицательны:
$$p_{ij}(t) = P(X_{t+1} = j|X_t = i) \geq 0,$$
2. Сумма элементов в любой строке должна быть равна единице:
$$\sum_{j=1}^{r} p_{ij}(t) = P(X_{t+1} \in \Xi|X_t = i) = 1.$$

Матрицы, удовлетворяющие выше перечисленным свойствам, называются *стохастическими.*

Определение 4.1. *По теореме Колмогорова начальное распределение μ и набор стохастических матриц $(P(t))_{t\in\mathbb{Z}_\geq}$ задают цепь Маркова, определяемую с помощью согласованного семейства совместных распределений.*

Оказывается, что практически всё, что мы хотим знать про вероятности, связанные с цепью Маркова, мы можем получить из переходной матрицы и стартовых вероятностей.

Упражнение 4.1. *Докажите, что если $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$ - стохастическая матрица, $\mu = (\mu_1, ...\mu_r)$ - распределение вероятностей, то μQ - также распределение вероятностей.*

Упражнение 4.2. *Докажите, что если $Q', Q'' \in \mathbb{R}^{r\times r}$ - стохастические матрицы, то $Q := Q'Q''$ - также стохастическая матрица.*

Можем получить базовые свойства такого процесса, анализируя наше изначальное задание через конечномерные распределения. Как и в случае Винеровского процесса с независимыми приращениями, первое свойство получается, если вы присмотритесь внимательно к тому, как именно мы строили меру.

Теорема 4.1. *Для цепи Маркова, порожденной начальным распределением μ и стохастическими матрицами $P(t)$, выполняются следующие равенства:*

$$P(X_n = j|X_0 = i_0, X_1 = i_1, ...X_{n-1} = i) = P(X_n = j|X_{n-1} = i) = p_{ij}(n-1), \tag{4.1}$$

$$P\left(X_{t+s} = j|X_t = i\right) = (P(t)...P(t+s-1))_{ij}, \tag{4.2}$$

$$P\left(X_t = j\right) = (\mu P(0)P(1)...P(t-1))_j. \tag{4.3}$$

$\triangleright$

Первое свойство не так очевидно как кажется, но, как иногда говорят, в него легко поверить. Давайте докажем 4.1. Для этого запишем определение условной вероятности $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, а после этого используем определение совместного распределения сечений цепи Маркова.

$$P(X_k = j|X_0 = i_0, X_1 = i_1, ...X_{k-1} = i_{k-1}) = \frac{P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ...X_{k-1} = i_{k-1}, X_k = j)}{P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ...X_{k-1} = i_{k-1})} =$$

$$= \frac{\mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(1) p_{i_1 i_2}(2) ... p_{i_{n-2} i_{n-1}}(n-1) p_{i_{n-1} i_n}(n)}{\mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(1) p_{i_1 i_2}(2) ... p_{i_{n-2} i_{n-1}}(n-1)} = p_{i_{n-1} i_n}(n).$$

Полученный факт называют ещё *Марковским свойством.*

Для доказательства формулы 4.2 снова используем определение условной вероятности, после этого применим формулу полной вероятности. А в конце используем матричную запись для стохастических матриц $P(t)$, порождающих цепь Маркова.

$$P\left(X_{t+s} = j|X_t = i\right) = \frac{P(X_{t+s} = j, X_t = i)}{P(X_t = i)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_0, i_1, ... i_{t-1}, i_{t+1}, ... i_{t+s-1} \in \Xi} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ...X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i, ...X_{t+s-1} = i_{t+s-1} X_{t+s} = j)}{\sum\limits_{i_0, i_1, ... i_{t-1} \in \Xi} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ...X_{t-1} = i_{t-1} X_t = i)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_0, i_1, ... i_{t-1} \in \Xi} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(0) ... p_{i_{t-1} i}(t-1) \sum\limits_{i_{t+1}, ... i_{t+s-1} \in \Xi} p_{i i_{t+1}}(t) ... p_{i_{t+s-1} j}(t+s-1)}{\sum\limits_{i_0, i_1, ... i_{t-1} \in \Xi} \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(1) ... p_{i_{t-1} i}(t-1)} =$$

$$= \sum_{i_{t+1},...i_{t+s-1}\in\Xi} p_{ii_{t+1}}(t+1)p_{i_{t+1}i_{t+2}}(t+2)...p_{i_{t+s-2}i_{t+s-1}}(t+s-1)p_{i_{t+s-1}j}(t+s-1) =$$

$$= \left(P(t)P(t+1)...P(t+s-1)\right)_{ij}.$$

Аналогично доказывается утверждение 4.3: используем формулу полной вероятности, а после этого используем определение совместного распределения цепи Маркова, а также матричную запись для стохастических матриц $P(t)$.

$$P\left(X_t = j\right) = \sum_{i_0,i_1,...i_{t-1}\in\Xi} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ...X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = j) =$$

$$= \sum_{i_0,i_1,...i_{t-1}\in\Xi} \mu_{i_0}p_{i_0i_1}(1)...p_{i_{t-2}i_{t-1}}(t-1)p_{i_{t-1}j}(t) = \left(\mu P(1)P(2)...P(t)\right)_j.$$

□

4.3 Однородная цепь Маркова

Отдельного внимание заслуживает случай, когда переходная матрица не зависит от времени.

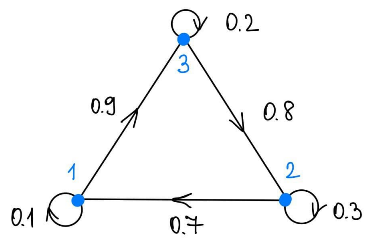
Определение 4.2. *Цепь Маркова называется однородной, если стохастические матрицы, ее определяющие, не зависят от времени, т.е.* $P(t) = P, \forall t \in \mathbb{N}$.

Такую цепь Маркова можно представить в виде ориентированного взвешенного графа $G = (V, E, W)$. Множество вершин графа V соответствует пространству состояний $\Xi = \{1, 2, ...r\}$ цепи Маркова. Ребро графа $e_{ij} \in E$ имеет вес W_{ij} равный вероятности перехода p_{ij} из состояния i в состояние j. Любая реализация случайного процесса, соответствующего цепи Маркова, представляется как путь в графе. Следовательно, однородную цепь Маркова можно представить как распределение вероятностей на пространстве путей в полученном графе.

Пример 4.1. *Марковской цепи с переходными вероятностями*

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

соответствует следующий граф:



Упражнение 4.3. *Для однородной цепи Маркова, порожденной начальным распределением μ и стохастической матрицей P найдите вероятность перехода за s шагов $P(X_{t+s} = j|X_t = i)$ и распределение вероятностей для X_t, используя доказанные выше факты.*

Аналогия с графами здесь не случайна: во взвешенном графе матричная степень A^n матрицы смежности даёт в ячейке $(A^n)_{ij}$ количество путей $i \to j$ длины n. В случае же переходной матрицы за счёт стохастичности мы получаем в $(P^n)_{ij}$ вероятность пройти путь $i \to j$ ровно за n шагов при условии старта в i.

4.4 Эргодическая теорема

Вернемся к нашему примеру с отделами магазина. Предположим, покупатель первый раз пришел в магазин, он еще не привык к расположению отделов, поэтому перемещается по ним случайным образом. Однако с течением времени (если он достаточно долго ходит) он в теории изучит расположение отделов и привыкнет, забывая о том, откуда он вообще пришёл (это похоже на психологическую драму...). Если мы предполагаем что такое явление может иметь место, то в теории можно посмотреть и оценить, как часто он посещает каждый из отделов, один из вариантов – вычислить вероятности $\lim\limits_{s\to\infty} P(X_s = j)$. Насколько вообще это может быть разумным подходом? И вообще существуют ли такие пределы и от чего они зависят? Этими вопросами в частности занимается эргодическая теория, очень известный раздел динамических систем, который в частности (но не только) в качестве примеров рассматривает цепи Маркова.

Оказывается, что при некоторых предположениях такой предел существует и более того, не зависит от начального распределения μ. То есть, клиент, как и свойственно в принципе людям, через долгое время вообще забывает, с какого отдела он начинал изучать магазин.

Определение 4.3. *Стохастическая матрица P называется эргодической, если существует такое T, что $(P^{(T)})_{ij} = p_{ij}^{(T)} > 0$ для всех i, j.*

Заметим, что поскольку множество возможных состояний $\Xi = 1, 2, ..r$ конечно, можно найти такое α что $(P^{(T)})_{ij} = p_{ij}^{(T)} \geq \alpha$ для всех i, j.

Условие эргодичности не очень удобно проверять, но есть эквивалентные ему условия, которые можно несложно доказать.

Упражнение 4.4. *Докажите, что стохастическая матрица P эргодическая тогда и только тогда, когда*

1. *Из любой вершины в любую есть путь конечной длины с ненулевой вероятностью;*
2. *Не существует периодических состояний. Периодом состояния i называют*

$$T = GCD\{t : \ P(X_t = i | X_0 = i) > 0\},$$

если $T = 1$, то состояние апериодично, иначе периодично с периодом T.

Интересный факт про периодичность – это то, что период T не означает, что можно вернуться за T шагов с ненулевой вероятностью. Периодичность означает лишь, что если возвращение происходит, то только во времена кратные T в силу особенной структуры переходов.

Пример 4.2. *Эргодической матрицей будет, например,*

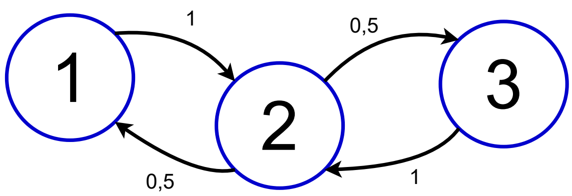
$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Менее очевидный пример – это

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

в таком графе уже будут петли.

Неэргодические цепи можно легко получать, если, например, в графе будет не 1 связная компонента, а несколько, либо если есть периодичное состояние. Есть гораздо менее очевидные примеры вроде такого:



Можете ли вы привести свой нетривиальный пример неэргодичной цепи?

Если матрица эргодическая, то для неё верна эргодическая теорема.

Теорема 4.2. *(Эргодическая теорема) Пусть цепь Маркова порождена начальным распределением μ и эргодической матрицей P. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *распределение вероятностей $P(X_s = j)$ для случайной величины X_s сходится к π независимо от начального распределения μ, т.е. $\lim\limits_{s\to\infty}(\mu P^{(s)})_j = \pi_j$.*

2. *распределение π единственно и инвариантно относительно стохастической матрицы P, т.е. $\pi P = \pi$.*

3. *переходные вероятности за s шагов сходятся к распределению π, т.е. $\lim\limits_{s\to\infty} p_{ij}^{(s)} = \pi_j$.*

Определение 4.4. *Распределение π из предыдущей теоремы называется инвариантным или стационарным распределением эргодической цепи Маркова.*

Существует много разных доказательств эргодической теоремы, мы попробуем это сделать используя теорию метрических пространств и сжимающих отображений, потому что в более общем случае Марковских процессов рассуждение очень похожее, но требует другого набора инструментов. Мы используем общие аргументы, которые приходят из функционального анализа, но если вы до этого момента не были с ним знакомы, для вас всё, что нужно ниже. Если вы знаете уже, что такое метрика и полное метрическое пространство, можете немного пролистать.

Начнём с того, что вспомним (или построим) фундамент, заодно освоив новый и широко используемый инструмент.

Определение 4.5. *Метрикой на пространстве $\mathcal{X}$ называется $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющая свойствам*

1. *$d(x, y) \geq 0$ в общем, но $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.*

2. *Симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$.*

3. *Неравенство треугольника: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.*

По своей сути метрика – это расстояние между точками. Если на $\mathcal{X}$ можно определить метрику d, то $(\mathcal{X}, d)$ называют *метрическим пространством.*

Второй кирпичик – это критерий Коши, который мы все помним из классики матанализа: числовая последовательность (x_n) сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T > 0 : \forall k, m > T \ |x_k - x_m| < \varepsilon.$$

В случае метрических пространств это условие выглядит похоже:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T > 0 : \forall k, m > T \ d(x_k, x_m) < \varepsilon.$$

Но не всегда верен критерий Коши. Если верен, то такое пространство называют *полным метрическим пространством.*

К счастью для нас, рассматриваемое нами пространство – это по сути множество конечномерных векторов, про которое с L^p метрикой известно, что оно полное и это показывается через критерий Коши для числовых последовательностей. В качестве метрики возьмём L^1 расстояние с небольшой поправкой:

$$d(\mu', \mu'') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \mid \mu_i' - \mu_i'' \mid .$$

Отображение $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *сжимающее*, если есть $q < 1$ такой, что для всех $x, y \in \mathcal{X}$ расстояние $d(Ax, Ay) < qd(x, y)$. В качестве отображения у нас выступает стохастическая матрица.

Для технической стороны нам понадобится несколько фактов, но они все возникают из того, что нам понадобится показать сжимающее отображение. А из него при помощи критерия Коши мы докажем сходимость последовательности

$$\mu_{t+1} = \mu_t P$$

со стартом $\mu_0 = \mu$.

Лемма 4.3. *Пусть Q стохастическая матрица, тогда для любых $\mu', \mu'' \in \mathcal{P}$*

$$d(\mu' Q, \mu'' Q) \leq (1 - \alpha) d(\mu', \mu'')$$

и при этом $\alpha \leq 1$.

$\triangleright$

Пусть $\mu', \mu'' \in \mathcal{P}$. Обозначим через $\sum^p$ суммирование по тем индексам, для которых слагаемые положительны.

Пусть Q - стохастическая матрица. Тогда $\mu' Q, \mu'' Q$ будут распределениями вероятностей. Используя доказанные выше технические утверждения, запишем оценку на $d(\mu' Q, \mu'' Q)$:

$$d(\mu' Q, \mu'' Q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \mid \mu_i' - \mu_i'' \mid .$$

Главный трюк здесь – это представить сумму модулей в удобном виде. Например, так:

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i' - \sum_{i=1}^{r} \mu_i'' = \sum_{i=1}^{r}{}^{p} (\mu_i' - \mu_i'') - \sum_{i=1}^{r}{}^{p} (\mu_i'' - \mu_i').$$

Отсюда мы получаем

$$\sum_{i=1}^{r}{}^{p} (\mu_i' - \mu_i'') = \sum_{i=1}^{r}{}^{p} (\mu_i'' - \mu_i'),$$

а ещё

$$d(\mu', \mu'') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r}{}^{p} (\mu_i' - \mu_i'') + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r}{}^{p} (\mu_i'' - \mu_i') = \sum_{i=1}^{r}{}^{p} (\mu_i' - \mu_i'').$$

Давайте разовьём эту тему явно подставив то, с чего мы начинали:

$$d(\mu' Q, \mu'' Q) = \sum_{i=1}^{r}{}^{p}((\mu' Q)_i - (\mu'' Q)_i) = \sum_{i=1}^{r}{}^{p}(\sum_{j=1}^{r} \mu'_j q_{ji} - \mu''_j q_{ji}) = \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{r}(\mu'_j - \mu''_j) q_{ji}.$$

Множеством I обозначим множество индексов слагаемых выше, которые суммируются в $\sum^p$. В такой нотации уже можно поменять порядок суммирования, тогда получим

$$= \sum_{j=1}^{r}(\mu'_j - \mu''_j)\sum_{i\in I} q_{ji} \leq \sum_{j=1}^{r}{}^{p}(\mu'_i - \mu''_i)\sum_{i\in I} q_{ji}.$$

Заметим ещё, что

$$\sum_{i\in I} q_{ji} = 1 - \sum_{i\notin I} q_{ji} = 1 - \alpha,$$

тогда если вспомнить про

$$d(\mu', \mu'') = \sum_{j=1}^{r}{}^{p}(\mu'_i - \mu''_i),$$

то в финале получим

$$d(\mu' Q, \mu'' Q) \leq (1-\alpha) d(\mu', \mu'').$$

□

Параметр α здесь очень важен: в самом общем случае стохастической матрицы Q мы можем подтвердить только, что $\alpha \leq 1$, но если мы знаем, что все $q_{ij} > 0$, то $\alpha < 1$. Этот факт мы эксплуатируем ниже, чтобы собрать доказательство эргодической теоремы.

▷ (Доказательство эргодической теоремы)

1. Для начала докажем, что распределение для X_s сходится при $s \to \infty$. Пусть $\mu_0 = \mu$ - распределение X_0, тогда $\mu_s := \mu_0 P^s$ - распределение для X_s. Будем доказывать сходимость через проверку критерия Коши, для этого попробуем посмотреть на

$$d(\mu^s, \mu^{s+t}) = d(\mu P^{(s)}, \mu P^{(s+t)}).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ должен существовать $T_0 > 0$ такой, что для любых $t > T_0, s > 0$ расстояние $d(\mu^s, \mu^{s+t}) < \varepsilon$. Отсюда в силу полноты метрического пространства мы получим, что существует предел π, то есть $d(\mu_t, \pi) \to 0$ при $t \to \infty$.

Чтобы было $\alpha < 1$ в условии, полученном выше, достаточно потребовать $q_{ij} > 0$ для всех i, j. Условие эргодичности говорит, что такая матрица есть и это P^T.

Если мы выберем $T_0 = Tn$, то из полученной нами оценки будет

$$d(\mu^t, \mu^{t+s}) \leq (1-\alpha)^n d(\mu P^{(t-nT)}, \mu P^{(s+t-nT)}) \leq (1-\alpha)^n.$$

Тогда для точности возьмём n такой, чтобы $(1-\alpha)^n < \varepsilon$.

2. Давайте проверим, что $\pi P = \pi$.

$$\pi P = \lim_{s\to\infty} \mu P^{(s)} P = \lim_{s\to\infty} \mu P^{(s+1)} = \pi.$$

3. Теперь давайте докажем, что такое π единственно.

   Пусть $\pi_1 P = \pi_1$, $\pi_2 P = \pi_2$. Тогда

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(\pi_1 P^{(T)}, \pi_2 P^{(T)}) \leq (1-\alpha) d(\pi_1, \pi_2).$$

   Т.е. $d(\pi_1, \pi_2) = 0$, что означает, что π_1 и π_2 совпадают и распределения $\mu^s = \mu P^{(s)}$ сходятся к π независимо от начального распределения μ.

4. Попробуйте доказать последнее сами, это как в пункте 2, надо только подобрать удачно стартовое распределение.

□

Пример 4.3. *Классическими примерами неэргодических цепей Маркова являются несвязные цепи Маркова (число сообщающихся классов больше одного) и цепи с циклами.*

На этом мы завершаем наш короткий экскурс в цепи Маркова, но мы ещё к ним вернёмся при решении задач, основываясь на том базисе, что у нас уже есть.

Литература

[1] Alfred Cowles 3rd. Can stock market forecasters forecast? *Econometrica*, 1(3):309–324, 1933.

[2] Alfred Cowles 3rd and Herbert E. Jones. Some a posteriori probabilities in stock market action. *Econometrica*, 5(3):280–294, 1937.

[3] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 17:21–86, 1900.

[4] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.

[5] Michael Brin and Garrett Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.

[6] Yuansi Chen, Raaz Dwivedi, Martin J. Wainwright, and Bin Yu. Fast mixing of metropolized hamiltonian monte carlo: benefits of multi-step gradients. *J. Mach. Learn. Res.*, 21(1), jan 2020.

[7] Persi Diaconis. The markov chain monte carlo revolution. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46:179textendash205, 04 2009.

[8] Alain Durmus and Éric Moulines. High-dimensional bayesian inference via the unadjusted langevin algorithm. *Bernoulli*, 2016.

[9] Raaz Dwivedi, Yuansi Chen, Martin J Wainwright, and Bin Yu. Log-concave sampling: Metropolis-hastings algorithms are fast! In Sébastien Bubeck, Vianney Perchet, and Philippe Rigollet, editors, *Proceedings of the 31st Conference On Learning Theory*, volume 75 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 793–797. PMLR, 06–09 Jul 2018.

[10] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.

[11] L. Isserlis. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables, November 1918.

[12] Galin Jones. On the markov chain central limit theorem. *Probability Surveys*, 1, 09 2004.

[13] M. G. Kendall and A. Bradford Hill. The analysis of economic time-series-part i: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 116(1):11–34, 1953.

[14] Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, and Edward Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 06 1953.

[15] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations (3rd Ed.): An Introduction with Applications.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[16] Paul A. Samuelson. Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(2):369–374, 1973.

[17] Holbrook Working. A random-difference series for use in the analysis of time series. *Journal of the American Statistical Association*, 29(185):11–24, 1934.

[18] Guangyao Zhou. Metropolis augmented hamiltonian monte carlo. In *Fourth Symposium on Advances in Approximate Bayesian Inference*, 2022.

[19] Н. В. Рекнер М. Шапошников С. В. Богачев, В. И. Крылов. *Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова.* Институт компьютерных исследований, 2013.

[20] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов.* М:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[21] Тиморин В.А. *Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными.* Москва : ВШЭ, 2017.

[22] Синай Я.Г. Коралов Л.Б. *Теория вероятностей и случайные процессы.* МЦНМО, 2013.

[23] А.Н. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики.* МЦНМО, 2016.