Процессы Леви

Мы уже знакомы с обширным арсеналом нетривиальных случайных процессов, среди которых были Винеровский и Пуассоновский процессы. В этой лекции мы посмотрим на более общий класс процессов: процессы Леви, – и поймём как далеко может завести идея независимых и стационарных приращений.

8.1 Хорошо иметь хорошие разрывы

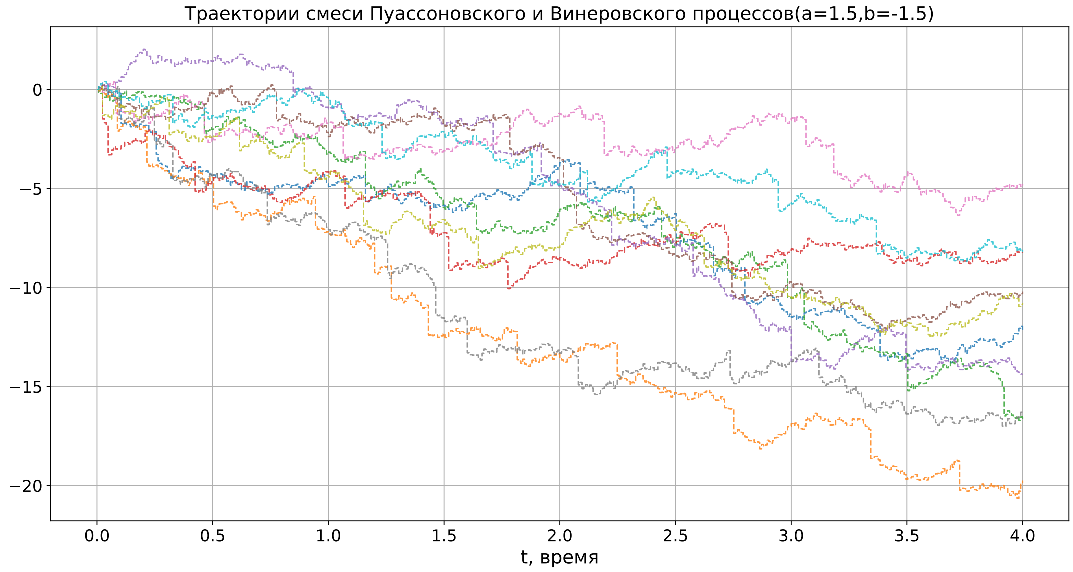
Мы строили Винеровский и Пуассоновский процессы очень похожим образом, но за счёт разных деталей получали принципиально разные свойства траекторий. У первого непрерывные траектории, у второго – кусочно константные и причём неубывающие. Для моделирования финансовых рядов мы до сих пор использовали Винеровский процесс, но он имеет существенный недостаток: траектории непрерывны; процесс GBM как экспонента непрерывной функции тоже будет иметь непрерывные траектории. При этом давайте взглянем на один типичный финансовый ряд:

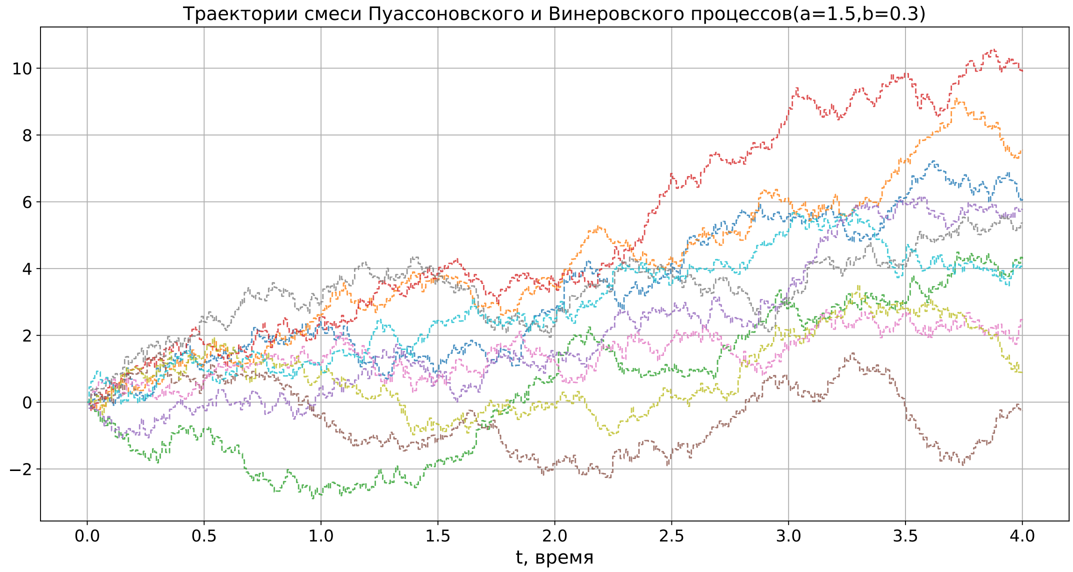
Рис. 8.1: Цены торгов акций British Petroleum, биржа NASDAQ

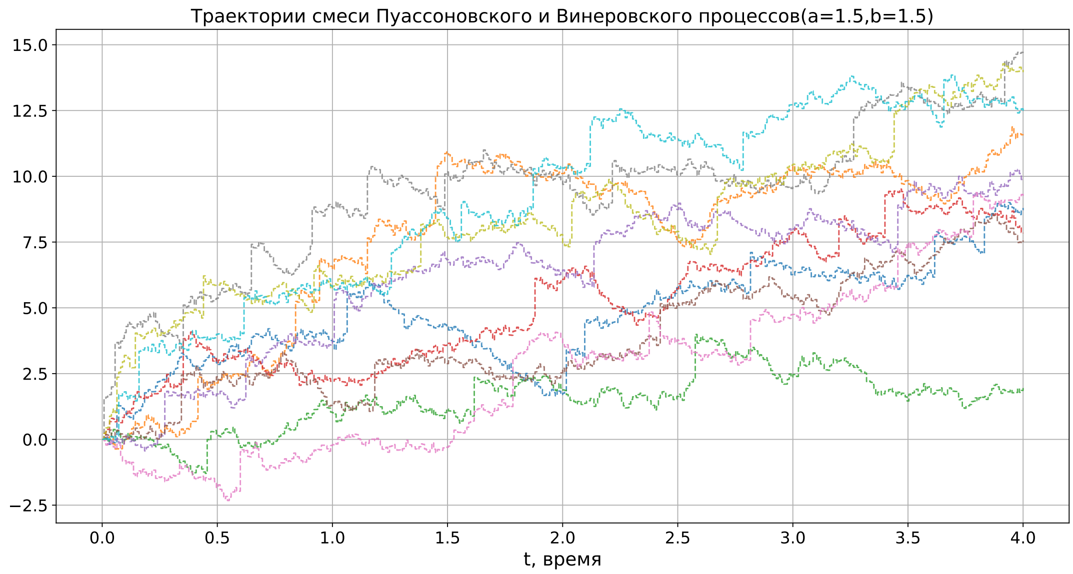
В данных заметны резкие прыжки цен за счёт каких-то шоковых событий, приводящих инвесторов к резким решениям, из-за которых цена актива может резко падать или возрастать, а потом снова приходить в более спокойный режим. Мы могли бы, например, использовать процесс Пуассона N_t, рассмотрев процесс

$$X_t = aW_t + bN_t, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Процесс X_t будет иметь прыжки в траекториях, причём в силу свойств траекторий N_t и W_t, траектории X_t будут непрерывны справа и иметь не совпадающий с ним предел слева. Но для практических целей ни один такой процесс не подойдёт: прыжки происходят только в одну сторону (в зависимости от знака b) и прыжки имеют каждый раз один и тот же размер b (ниже $b = 3$).







Мы хотели бы построить процесс более общего вида, который был бы лишен таких ограничивающих черт и был бы более гибким с точки зрения большого количества возможных различных процессов такого класса.

Процесс Леви мы строим таким же образом как и раньше, но дополнительно вводим требование на свойство траекторий. Мы будем рассматривать везде $T = \mathbb{R}_{\geq 0}$ в качестве индексного пространства.

Определение 8.1. *Процесс X_t называется процессом Леви, если*

1. $X_0 = 0$ *почти наверное;*
2. *Для* $t > s$ *приращения* $X_t - X_s$ *независимы и имеют то же распределение, что* X_{t-s}, *то есть, стационарны:*
3. *Траектории процесса* X_t *в каждой точке непрерывны справа и имеют предел слева (свойство càdlàg, от французского continu à droite et limite à gauche).*

К этому моменту, нам уже ясно, что такие процессы существуют. Действительно, Винеровский и Пуассоновский процесс – это процессы Леви, потому что мы их строили ровно так: процессы с независимыми и стационарными приращениями, – и получали совсем разные процессы. Траектории càdlàg, поэтому они также обладают свойством непрерывности справа по вероятности.

Лемма 8.1. *Если* X_t *– Процесс Леви, то*

$$\forall t, \varepsilon > 0 \quad \lim_{s \to 0+} \mathbb{P}\left(|X_{t+s} - X_t| > \varepsilon\right) = 0.$$

Помимо этого, независимость и стационарность приращений даёт также многообещающее свойство бесконечной делимости сейчений.

Лемма 8.2. *Характеристическая функция* X_t *для любого* n *равна*

$$\mathbb{E}\left[e^{i\xi X_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\xi X_{t/n}}\right]^n.$$

Это свойство мы подробно будем обсуждать в следующей лекции и оно позволит получить очень удобное представление процесса Леви, позволяющее гибко моделировать любой процесс такого класса.

8.2 От классики к процессам Леви: Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс – это процесс Леви с неубывающими и кусочно константными траекториями, причём значение в точке t если изменяется, то всегда ровно на 1. Это частный случай так называемых *считающих процессов.*

Определение 8.2. *Если задана неубывающая последовательность случайных времён $(T_n)_{n\geq 1}$ и $T_n \to \inf$ почти наверное, процесс X_t вида*

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}(t \geq T_i)$$

называется считающим процессом.

Мы уже встречали считающие процессы, когда обсуждали Пуассоновский процесс. Можно представлять себе, что T_n – время происхождение некоторого события: например, в магазин зашёл посетитель (вообще, это случайно происходит). Тогда X_t – это количество людей, посетивших магазин до момента t.

Пример 8.1. *Пуассоновский процесс N_t с интенсивностью λ – это считающий процесс. Действительно, зададим последовательность $\Delta_n \sim^{iid} Exp(\lambda)$ и времена*

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i.$$

Процесс

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}(t \geq T_i)$$

в точности задаёт Пуассоновский процесс. Величины Δ_i – это интервалы между приходом клиентов, при этом мы видели, что вероятность того, что больше одного клиента одновременно зайдут в двери, равна нулю.

Считающий процесс вообще не обязан быть процессом Леви, потому что времена T_i могут быть сложно зависимыми. Пуассоновский процесс в каком-то смысле *уникальный.*

Утверждение 8.3. *Если процесс N – это считающий процесс и процесс Леви, то это Пуассоновский процесс.*

$\triangleright$ Мы предположим сейчас, что время до следующего прыжка – абсолютно непрерывная случайная величина, более общий случай обсудим в следующей лекции. Будем пользоваться конструкцией Пуассоновского процесса через интервалы прыжков. Ещё мы воспользуемся одним свойством экспоненциального распределения, которое мы уже встречали ранее: если неотрицательная абсолютно непрерывная случайная величина T для всех $t, s \geq 0$ удовлетворяет

$$\mathbb{P}\left(T > t + s \mid T > t\right) = \mathbb{P}\left(T > s\right),$$

то она имеет экспоненциальное распределение.

Рассмотрим теперь T_1 – время первого прыжка считающего процесса N_t, тогда

$$\mathbb{P}\left(T_1 > t + s \mid T_1 > t\right) = \mathbb{P}\left(N_{t+s} = 0 \mid N_t = 0\right).$$

Воспользуемся свойством независимости и стационарности приращений процесса Леви:

$$\mathbb{P}\left(N_{t+s}=0 \mid N_t=0\right)=\mathbb{P}\left(N_s=0\right)=\mathbb{P}\left(T_1>s\right).$$

Получается, T_1 имеет экспоненциальное распределение с некоторой константной интенсивностью λ. Аналогично мы можем проверить, что $T_k - T_{k-1}$ имеют такое же распределение.

Чтобы завершить, остаётся убедиться в том, что интервалы $T_k - T_{k-1}$ независимы, это можно получить, перейдя к считающему процессу и воспользовавшись свойством независимых приращений процесса Леви:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(T_k-T_{k-1}>\Delta_{k-1},\ \ldots,\ T_2-T_1>\Delta_1,\ T_1>t\right)= \\
&=\mathbb{P}\left(N_{T_{k-1}+\Delta_{k-1}}-N_{T_{k-1}}=0,\ \ldots,\ N_{T_1+\Delta_1}-N_{T_1}=0,\ N_t=0\right)= \\
&=\mathbb{P}\left(T_k-T_{k-1}>\Delta_{k-1}\right)\ldots\mathbb{P}\left(T_2-T_1>\Delta_1\right)\mathbb{P}\left(T_1>t\right).
\end{aligned}$$

□

8.3 От классики к процессам Леви: Винеровский процесс

Мы помним, что у Винеровского процесса (если мы возьмём правильную модификацию) траектории непрерывны и изначально из определения процесса Леви можно задаться вопросом: а какие ещё процессы Леви обладают непрерывными траекториями? Ответ на вопрос неочевидный и совершенно неожиданный.

Теорема 8.4. *Если процесс Леви X_t обладает непрерывными траекториями, то он имеет вид*

$$X_t=\gamma t+\sigma W_t,$$

где $\gamma, \sigma \in \mathbb{R}$ и W_t – это Винеровский процесс с $W_0=0$.

Таким образом, такой Винеровский процесс со сносом – единственный, обладающий таким свойством. Это свойство мы тоже обсудим в следующий раз и получим его как несложное следствие. Впрочем, его можно доказать, используя предельные теоремы.

8.4 Что-то третье: сложенный процесс Пуассона

Что мы получили? С одной стороны, есть Пуассоновский процесс: у него неотрицательные и неубывающие кусочно-константные траектории, которые имеют разрывы. С другой стороны, есть Винеровский процесс со сносом, который обладает непрерывными траекториями. Это даёт в некотором смысле две крайности, и ни одна из них не приближает нас к исходной цели: получить процесс с càdlàg-траекториями, с более гибкой моделью разрывов.

Взглянем ещё раз на считающий процесс:

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}(t \geq T_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i, \ -$$

причём ξ_i независимы. Это наблюдение приводит нас к ещё одной крайности.

Определение 8.3. *Пусть μ – вероятностное распределение, N – Пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Случайный процесс*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad Y_i \sim^{iid} \mu,$$

называется сложенным Пуассоновским процессом с распределением прыжков μ и интенсивностью прыжков λ.

Это очень гибкая модель: мы теперь контролируем частоту прыжков и их размер.

Утверждение 8.5. *Сложенный Пуассоновский процесс X_t с распределением прыжков μ и интенсивностью λ является процессом Леви.*

$\triangleright$ Проверим определение.

Во-первых, $N_0 = 0$ даёт $X_0 = 0$.

Во-вторых, траектории кусочно константные, почти как у Пуассоновского процесса, следовательно càdlàg.

В-третьих, рассмотрим приращения для $t_1 < t_2 < ..$

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = \sum_{j=N_{t_i}+1}^{N_{t_{i+1}}} Y_j.$$

Они не имеют общих слагаемых и все Y_j независимые, значит, приращения тоже независимы и $X_t - X_s \sim X_{t-s}$. $\square$

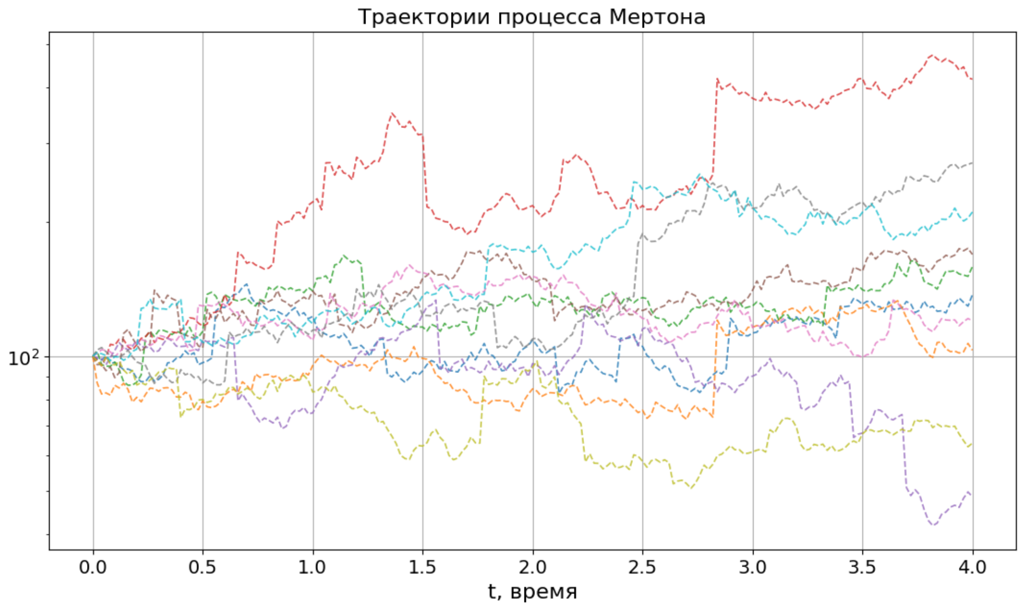
При этом сложенный процесс Пуассона не является считающим и не имеет непрерывных траекторий, поэтому даёт нам третью крайность в процессах Леви. Как мы увидим чуть позже из формулы Леви-Хинчина, само определение процесса Леви является чётким ограничением класса возможных моделей: все остальные процессы Леви – что-то среднее между этими тремя идеями. При этом гибкость и общность модели прыжков демонстрирует, что мы можем строить достаточно сложные и необычные процессы.

Пример 8.2. *(Модель Мертона[8], 1976) Почему вообще цена акций компании может расти? Прежде всего, из-за общей инфляции и реинвестировании прибыли, это нам демонстрирует модель $GBM(\mu, \sigma^2)$, где μ – это безрисковая процентная ставка реинвестирования минус процентны дивидендов(про их размер и время выплат всё известно),* *которые надо выплачивать держателям акций. Ещё рост акций может происходить за счёт привлечения внешних инвестиций в виде кредитов и масштабирования компании. Но вместе с платёжными обязательствами приходит и обязательство выплачивать долги и даже риск дефолта. В тяжёлые моменты цена акций может сильно проседать или за счёт дополнительных инвестиций наоборот сильно расти. Мертон в своей статье предложил такую модель цены X_t:*

$$X_t = x_0 e^{\gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}, \quad Y_i \sim^{iid} N(\mu, \sigma^2).$$

Это почти GBM, но в показателе экспоненты сложенный процесс Пуассона с интенсивностью λ и распределением прыжков $N(\mu, \sigma^2)$. Прыжки позволяют моделировать моменты выплат по обязательствам и дополнительных инвестиций, которые не являются открытой информацией, но оказывают резкое влияние на цену.

Гауссовское распределение – скорее технический ход, потому что в этом случае можно вывести формулу цены Европейского опциона, которая будет ощутимо более сложной, чем в случае модели Блэка-Шоулза.



Понятно, что оценка моделей типа модели Мертона по данным – это уже гораздо более сложная задача, которая не поддаётся простому методу максимального правдоподобия прежде всего потому, что мы не знаем, сколько прыжков и были ли они между двумя соседними наблюдениями, а также не знаем их размера. Это задача для EM-алгоритма.