Обзор теории вероятности

Главная цель этой лекции – напомнить необходимые базовые понятия из теории вероятности, которые потом мы будем постоянно использовать в течение курса. Мы начинаем с понятия сигма-алгебры, измеримых множеств, измеримых пространств, измеримых функций и меры. Далее мы говорим о понятии независимости и случайных величинах и заканчиваем кратким обзором конструкции интеграла Лебега и определениями матожидания, дисперсии и ковариации случайных величин.

0.1 Вероятностное пространство

0.1.1 Измеримое пространство

Измеримое пространство - это пространство, на котором можно задать меру. Давайте вспомним, как оно строится.

Определение 0.1. *Пространство элементарных событиый - это некоторое непустое множество, обычно обозначаемое Ω , элементы которого $\omega \in \Omega$ называются элементарными событиями.*

Определение 0.2. *Совокупность $\mathcal{G}$ подмножеств множества Ω называется алгеброй (множеств), если выполняются следующие три условия:*

1. $\Omega \in \mathcal{G}$
2. *из* $C \in G$ *следует, что* $\Omega \setminus C \in \mathcal{G}$
3. *из* $C_1, ...C_n \in \mathcal{G}$ *следует, что* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{G}$

Пример 0.1. *Наименьшая алгебра состоит всего из двух элементов:* $\{\Omega, \emptyset\}$.

Наибольшая алгебра - это алгебра всех возможных подмножеств множества Ω.

Пример 0.2. *Пусть задано конечное или счетное разбиение на Ω (совокупность непересекающихся подмножеств $\{B_i\}_{i\in I}$, такое что $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$). Тогда это разбиение порождает алгебру, состоящую из элементов вида $C = \bigcup\limits_{i\in J\subset I} B_i$, где J - это любое подмножество индексов.*

Упражнение 0.1. *Докажите, что любая конечная алгебра порождается каким-то разбиением.*

Определение 0.3. *Алгебра $\mathcal{F}$ называется σ-алгеброй, если она замкнута относительно счетных объединений, т.е. если $C_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} C_i \in \mathcal{F}$.*

Пример 0.3. *Рассмотрим множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Множество всех его подмножеств будет σ-алгеброй.*

Пример 0.4. *На вещественной прямой $\mathbb{R}$ чаще всего используют σ-алгебру, порожденную открытыми множествами. Она называется борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и задается как наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества. Причина, по которой сигма-алгебра всех подмножеств неудобна состоит в том, что на ней в общем случае нельзя определить вероятностную меру – в этой сигма-алгебре существуют множества, мера которых не определена (вне зависимости от выбранной меры!), так называемые неизмеримые множества.*

Пример 0.5. *Аналогично можно задать борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^n$.*

Определение 0.4. *Измеримым пространством называется пара $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω – пространство элементарных событий, а $\mathcal{F}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств Ω. Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ называются измеримыми множествами.*

0.1.2 Измеримые функции

Измеримые функции - это базовое понятие для задания случайной величины.

Определение 0.5. *Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ задана функция $f : \Omega \to \Xi$ в другое измеримое пространство $(\Xi, \mathcal{G})$. Тогда функция f называется измеримой, если прообраз любого измеримого множества измерим, т.е. $\forall A \in \mathcal{G}\ f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.*

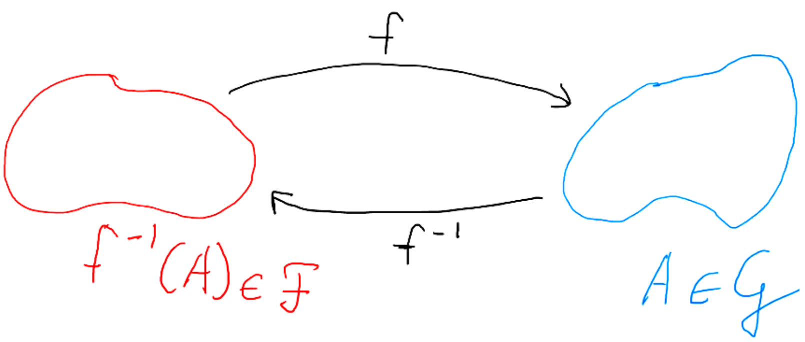

Рис. 1: Измеримая функция $f : \Omega \to \Xi$ переводит измеримые множества (относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}$) в измеримые множества (относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}$)

Иными словами, мы требуем, чтобы измеримые множества отображались такой функцией в измеримые множества (измеримость множеств определяется относительно заданных сигма-алгебр). Такая регулярность позже позволяет корректно определять вероятностные меры, порождённые случайной величиной.

Упражнение 0.2. *Если $\mathcal{F}$ порождена разбиением $\{B_i\}_{i \in I}$, и функция f является $\mathcal{F}$-измеримой, тогда на каждом B_i она принимает постоянное значение.*

Пример 0.6. *Любая $\mathcal{F}$-измеримая функция порождает σ-алгебру $\mathcal{F}^f \subset \mathcal{F}$ на Ω:*

$$\mathcal{F}^f := \left\{ f^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{G} \right\}.$$

Можно показать, что $\mathcal{F}^f$ является наименьшей σ-алгеброй, относительно которой функция f измерима.

В качестве более конкретного примера рассмотрим $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, сигма алгебру

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$$

и измеримую функцию $f : \Omega \to \{0, 1\}$ такую, что для всех $\omega \in \Omega$ $f(\omega) = 1$. Зададим на $\{0, 1\}$ сигма-алгебру, состоящую из всех подмножеств. Заметим теперь, что

$$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset, \qquad f^{-1}(\{1\}) = \Omega,$$
$$f^{-1}(\{0, 1\}) = \Omega, \qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

следовательно, $\mathcal{F}^f = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}$.

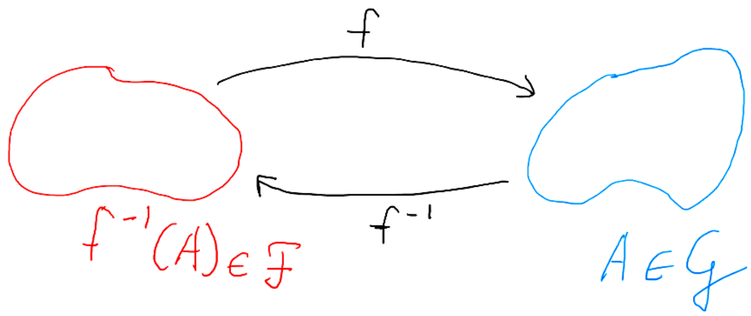

Рис. 2: Сигма-алгебра $\mathcal{F}^f$ состоит из всех прообразов измеримых множеств

Упражнение 0.3. *Докажите утверждения:*

1. *Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, $(\Omega_3, \mathcal{F}_3)$ – измеримые пространства. Если $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ и $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ измеримы, то их композиция тоже измерима.*

2. *Рассмотрим измеримые пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Если $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ и $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ измеримы, то их линейная комбинация тоже измерима.*

3. *Рассмотрим измеримые пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Если $f : \Omega \to \mathbb{R}$ и $g : \Omega \to \mathbb{R}$ измеримы, то их произведение тоже измеримо.*

0.1.3 Мера

Определение 0.6. *Пусть задано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Функция $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ называется конечной неотрицательной мерой, если для любого счетного семейства измеримых непересекающихся множеств мера объединения равна сумме мер, т.е.*

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$ *для любых* $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *таких, что* $C_i \in \mathcal{F}, C_i \cap C_j = \varnothing (i \neq j)$. *Это свойство называется* σ*-аддитивностью.*
Если $\mu(\Omega) < \infty$, *то мера называется конечной, а мера, для которой* $\mu(\Omega) = 1$, *– вероятностной.*

Пример 0.7. *Рассмотрим* $S = [0, 1]$ *и измеримое пространство* $(S, \mathcal{B}(S))$, *где* $\mathcal{B}(S)$ *– борелевская* σ*-алгебра, порождённая интервалами в* S. *На* $(S, \mathcal{B}(S))$ *можно определить меру Лебега* $\lambda(A) = b - a$ *для любого интервала* $A = (a, b) \in \mathcal{B}(S)$. *Так как* $\lambda(S) = 1$, *это вероятностная мера.*
Мера Лебега на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *определяется так же, но она не будет конечной, так как* $\mu(\mathbb{R}) = \infty$.

Определение 0.7. *Если снабдить измеримое пространство* $(\Omega, \mathcal{F})$ *вероятностной мерой* P, *тогда оно будет называться вероятностным пространством и обозначаться* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *а измеримые функции* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *– случайными величинами.*

Определение 0.8. *Пусть* P *– вероятностная мера на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Если утверждение, зависящее от* $\omega \in \Omega$, *выполняется для подмножества* $A \subset \Omega$, *такого, что* $P(A) = 1$, *то говорят, что утверждение выполняется почти наверное.*

Пример 0.8. *Случайную величину* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *рассматривают как отображение из измеримого пространства* $(\Omega, \mathcal{F})$ *в измеримое пространство* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *т.к. она переводит* $\mathcal{F}$*-измеримые множества в* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-измеримые множества. Если на* $(\Omega, \mathcal{F})$ *задана вероятностная мера* P, *то случайная величина* X *естественным образом индуцирует вероятностную меру на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *как*

$$P^X(B) := P(X^{-1}(B)) = P\left(\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in B\}\right)$$

для любых $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Чаще всего используют короткую нотацию* $P(X \in B) := P^X(B)$, *чтобы обозначить вероятность того, что случайная величина принимает значения во множестве* B.
Меру P^X *в этом случае в англоязычной литературе часто называют pushforward-мерой меры* P *при отображении* X.

0.2 Независимость

Независимость - это свойство, описывающее взаимосвязь двух или более событий, σ-алгебр или случайных величин.

Определение 0.9. *Пусть задано вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *и* $A, B \in \mathcal{F}$.

Если $P(B) \neq 0$, то условной вероятностью события A при условии события B называется число $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

События A и B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, что эквивалентно следующему равенству $P(A|B) = P(A)$.

События $A_1, A_2, ...A_n \in \mathcal{F}$ называются независимыми в совокупности, если $P(A_{i_1}, A_{i_2}, ...A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k})$ для любых неповторяющихся индексов $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$.

Определение 0.10. *σ-алгебры $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...\mathcal{F}_n$ называются независимыми, если любой набор событий $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, ...A_n \in \mathcal{F}_n$ независим.*

Мы уже знаем, что случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ порождает σ-алгебу $\mathcal{F}^X$, состоящую из множеств вида $X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Определение 0.11. *Случайные величины $X_1, X_2, ...X_n$ независимы, если они порождают независимые σ-алгебры $\mathcal{F}^{X_1}, \mathcal{F}^{X_2}, ...\mathcal{F}^{X_n}$.*

Упражнение 0.4. *(Эквивалентное определение независимости) Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Докажите, что случайные величины $X_1, .., X_n$ независимы тогда и только тогда, когда для любых $A_1, .., A_n \in \mathcal{F}$*

$$P(X_1 \in A_1, .., X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)..P(X_n \in A_n).$$

Для набора случайных величин можно требовать разной структуры независимости. Самая сильная – независимость в совокупности.

Определение 0.12. *Случайные величины $X_1, X_2, ...X_n$ независимы в совокупности, если любое подмножество $X_{i_1}, .., X_{i_k},\ k \leq n$ из этого набора – это независимые случайные величины.*

Пример 0.9. *В классической статистике выборкой называют набор независимых(в совокупности) и одинаково распределённых (с распределением F) случайных величин. Часто пишут $X_1, .., X_n \sim^{i.i.d.} F$, i.i.d означает independent and identically distributed.*

0.3 Интеграл Лебега

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – пространство с мерой P (не обязательно вероятностной). Мы построим интеграл Лебега для ограниченных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для неограниченных требуется существенно больше технической работы. Мы приведём общую схему, которая может быть критична для понимания, но за всеми техническими деталями рекомендуем [22, Гл.3.1].

Рассмотрим не более, чем счетное множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, состоящее из непересекающихся измеримых множеств $A_i,\ i = 1, 2, ..N$, где N может равняться бесконечности. Начнём с рассмотрения положительных простых функций $f_{\mathcal{A}} : \Omega \to \mathbb{R}_+$, то есть, таких, что они равны константе на каждом A_i: $f_{\mathcal{A}}(\omega) = a_i \geq 0$ для всех $\omega \in A_i$. Определим интеграл Лебега для таких функций как

$$\int_\Omega f_{\mathcal{A}}(\omega)dP := \sum_{i=1}^{N} a_i P(A_i), \tag{1}$$

если ряд сходится.

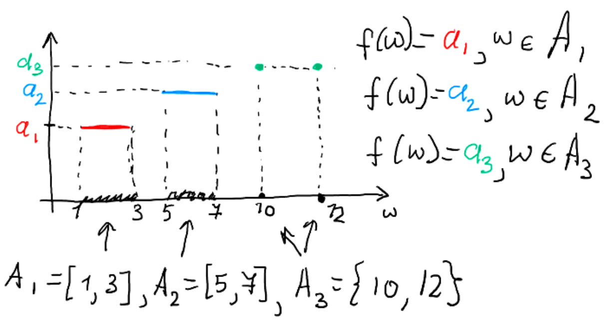

Рис. 3: Пример простой функции, равной нулю везде, кроме $x \in A_1, A_2, A_3$

Пример 0.10. *Может показаться, что мы строим интеграл точно так же, как интеграл Римана, но это не так. В отличие от последнего мы теперь перечисляем значения функции и смотрим, на каком измеримом множестве они достигаются, причём последние запросто могут быть не отрезками (см. Рис. 3). Даже на этом этапе мы определили интеграл для одной не интегрируемой по Риману функции, функции Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Зададим пространство с мерой Лебега λ как $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Функция D – простая положительная функция: на измеримом множестве $A_1 = \mathbb{Q}$ она принимает значение 1, а значение 0 она принимает на другом измеримом множестве $A_2 = \mathbb{R} \setminus A_1$. Интеграл Лебега по мере λ (мере Лебега) будет равен нулю: множество $\mathbb{Q}$ имеет меру $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Интеграл Римана такой функции не существует.

Утверждение 0.1. *Для любой положительной измеримой функции f существует последовательность $\{f_n\}$ простых положительных измеримых функций такая, что*

$$\max_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - f_n(\omega)| \to 0 \quad \textit{при } n \to 0.$$

Используя идею, что каждая ограниченная положительная измеримая функция f аппроксимируется в смысле бесконечной нормы (иначе, равномерно, как выше), мы можем определить интеграл Лебега как

$$\int_\Omega f(\omega)dP = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(\omega)dP. \tag{2}$$

Для аккуратности нужно доказать дополнительно

Утверждение 0.2. *Предел (2) не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.*

Наконец, остаётся обобщить понятие интеграла на любую ограниченную измеримую функцию. Заметим, что множества $[0,\infty)$ и $(-\infty,0)$ измеримы относительно $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, следовательно мы можем представить функцию f как разность двух измеримых функций:

$$f(\omega) = f_+(\omega) - f_-(\omega) := f(\omega)\mathbb{1}_{x: f(x)\geq 0}(\omega) - f(\omega)\mathbb{1}_{x: f(x)<0}(\omega), \tag{3}$$

для каждой из которых мы определили интеграл Лебега.

Интеграл Лебега будет обладать многими свойствами интеграла Римана (в том числе, линейностью) и будет совпадать с ним, если интеграл Римана существует.

Упражнение 0.5. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ – пространство с мерой. Покажите, что*

$$\int_A d\mu = \mu(A).$$

Матожидание случайной величины мы определяем с помощью интеграла Лебега.

Определение 0.13. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, на котором определена случайная величина X. Число $\mathbb{E}\left[X\right] := \int_\Omega X(\omega) dP$, где интеграл берётся в смысле Лебега, называют матожиданием случайной величины X.*

Число $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right]$ называется дисперсией X.

Если X, Y – две случайные величины на заданном вероятностном пространстве, то их ковариация определеяется как

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right) := \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)\left(Y - \mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right],$$

а для случайных векторов $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ определяется ковариационная матрица

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right) := \left(\mathrm{Cov}\left(X_i, Y_j\right)\right)_{i,j=1,..,n}.$$

Пример 0.11. *Пусть $X \sim Ber(p)$, то есть, она равна 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$ (распределение Бернулли). Заметим, что мера P^X на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P^X)$ определена вполне понятно, хотя мы не определили явно вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:*

$$P^X(\ (a,b)\ ) := P(X \in (a,b)\ ) = \begin{cases} p, & 1 \in (a,b),\ 0 \notin (a,b) \\ 1-p, & 1 \notin (a,b),\ 0 \in (a,b) \\ 1, & 1 \in (a,b),\ 0 \in (a,b) \\ 0, & \notin (a,b),\ 0 \notin (a,b) \end{cases}$$

Мера P^X – это пример так называемой дискретной меры, которая порождается дискретными случайными величинами. Случайная величина X – это простая функция и (согласно определению через интеграл Лебега) матожидание $\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p = p$.

Упражнение 0.6. *Как будет устроена мера P^X, если X – это случайная величина из распределения $Binomial(n, p)$ (биномиальное распределение с параметрами n, p) ?*

Упражнение 0.7. *Пусть X – это случайная величина из гауссовского распределения $\mathcal{N}(0, 1)$, она абсолютно непрерывная, то есть, имеет плотность. Как будет устроена мера P^X?*

Пример 0.12. *Бывает, что существует матожидание, но дисперсия бесконечна (например, распределение Парето). Также бывает, что не существует матожидания и, следовательно, дисперсии (распределение Коши при некоторых параметрах). Наконец, может быть матожидание, но дисперсии не существовать (распределение Стьюдента при некоторых параметрах).*

0.4 Условное матожидание

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. На основе определения условной вероятности мы можем определить условное матожидание случайной величины X при условии события $B \in \mathcal{F}$ как

$$\mathbb{E}[X \mid B] = \frac{\int_B X(\omega) dP}{P(B)},$$

если $P(B) > 0$. Но в случае $P(B) = 0$, очень частом, у нас возникнет проблема, поэтому нужно действовать по-другому.

Определение 0.14. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ – σ-алгебра. Условным матожиданием случайной величины X при условии $\mathcal{G}$, обозначаемое $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$, называется измеримая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$\int_A X(\omega) dP = \int_A f(\omega) dP.$$

выполнено для всех $A \in \mathcal{G}$.

Иными словами, условное матожидание – снова случайная величина.

Пример 0.13. *Проверьте, что данное определение совпадает с более ранним в случае $P(B) > 0$. При условии какой σ-алгебры будет это матожидание?*

Пример 0.14. *Пусть X, Y – две случайные величины. Условное матожидание $g(c) = \mathbb{E}[X \mid Y = c]$, обозначаемое часто более кратко как $\mathbb{E}[X \mid Y]$, есть не что иное, как условное матожидание при условии $\mathcal{F}^Y$ – σ-алгебры, порождённой Y:*

$$\mathbb{E}[X \mid Y] := \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}^Y\right].$$

Очень полезный инструмент для вычислений матожиданий от выражений, включающих в себя зависимые случайные величины – это формула полного матожидания.

Утверждение 0.3. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *– вероятностное пространство, на котором определена случайная величина* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*, и* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *– сигма-алгебра. Верна формула полного матожидания*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

Эта формула позволяет вычислять достаточно неочевидные на первый взгляд матожидания.

Упражнение 0.8. *Саша и Паша очень много играют в шашки и известно, что Саша выигрывает с вероятностью* $p > 0$. *Предположим, что их партии в шашки независимы. Какое в среднем число игр им нужно сыграть до того, как у Саши наберётся первая серия из* n *побед?*
Ответ: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^i}$.

Литература

[1] Alfred Cowles 3rd. Can stock market forecasters forecast? *Econometrica*, 1(3):309–324, 1933.

[2] Alfred Cowles 3rd and Herbert E. Jones. Some a posteriori probabilities in stock market action. *Econometrica*, 5(3):280–294, 1937.

[3] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 17:21–86, 1900.

[4] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.

[5] Michael Brin and Garrett Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.

[6] Yuansi Chen, Raaz Dwivedi, Martin J. Wainwright, and Bin Yu. Fast mixing of metropolized hamiltonian monte carlo: benefits of multi-step gradients. *J. Mach. Learn. Res.*, 21(1), jan 2020.

[7] Persi Diaconis. The markov chain monte carlo revolution. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46:179textendash205, 04 2009.

[8] Alain Durmus and Éric Moulines. High-dimensional bayesian inference via the unadjusted langevin algorithm. *Bernoulli*, 2016.

[9] Raaz Dwivedi, Yuansi Chen, Martin J Wainwright, and Bin Yu. Log-concave sampling: Metropolis-hastings algorithms are fast! In Sébastien Bubeck, Vianney Perchet, and Philippe Rigollet, editors, *Proceedings of the 31st Conference On Learning Theory*, volume 75 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 793–797. PMLR, 06–09 Jul 2018.

[10] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.

[11] L. Isserlis. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables, November 1918.

[12] Galin Jones. On the markov chain central limit theorem. *Probability Surveys*, 1, 09 2004.

[13] M. G. Kendall and A. Bradford Hill. The analysis of economic time-series-part i: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 116(1):11–34, 1953.

[14] Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, and Edward Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 06 1953.

[15] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations (3rd Ed.): An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[16] Paul A. Samuelson. Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(2):369–374, 1973.

[17] Holbrook Working. A random-difference series for use in the analysis of time series. *Journal of the American Statistical Association*, 29(185):11–24, 1934.

[18] Guangyao Zhou. Metropolis augmented hamiltonian monte carlo. In *Fourth Symposium on Advances in Approximate Bayesian Inference*, 2022.

[19] Н. В. Рекнер М. Шапошников С. В. Богачев, В. И. Крылов. *Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова*. Институт компьютерных исследований, 2013.

[20] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов*. М:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[21] Тиморин В.А. *Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными*. Москва : ВШЭ, 2017.

[22] Синай Я.Г. Коралов Л.Б. *Теория вероятностей и случайные процессы*. МЦНМО, 2013.

[23] А.Н. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики*. МЦНМО, 2016.