4. Цепи Маркова

Упражнение 4.1. *(2 балла) Совместное распределение для цепи Маркова задается следующим образом:*

$$P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_n = i_n\right) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(1) p_{i_1 i_2}(2) ... p_{i_{n-1} i_n}(n). \tag{4.1}$$

Как в этом случае будут выглядеть совместные распределения для произвольных моментов времени $t_1, t_2, ...t_k$ и произвольных множеств $A_1, A_2, ...A_n \in \mathcal{F}$?

Почему семейство распределений, заданное формулой 4.1, будет согласованным?

Упражнение 4.2. *(3 балла) Пусть $G = (V, E)$ - связный неориентированный граф, по которому случайным марковским образом движется агент. Определим вероятность перехода агента из вершины u в вершину v по ребру $(u, v) \in E$ как $p_{uv} = k_u^{-1}$, где k_u - количество вершин, смежных с u. Докажите, что у данной цепи существует инвариантное распределение и найдите его.*

Упражнение 4.3. *(3 балла) Пусть марковская цепь задана следующей переходной матрицей:*

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{N-1} & ... & \frac{\alpha}{N-1} \\ \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha & ... & \frac{\alpha}{N-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\alpha}{N-1} & ... & \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Найти переходные вероятности за n шагов и инвариантное распределение для этой марковской цепи.

Упражнение 4.4. *(5 балла) Найдите асимптотическое поведение матрицы P^n для цепи Маркова, заданной следующим графом*

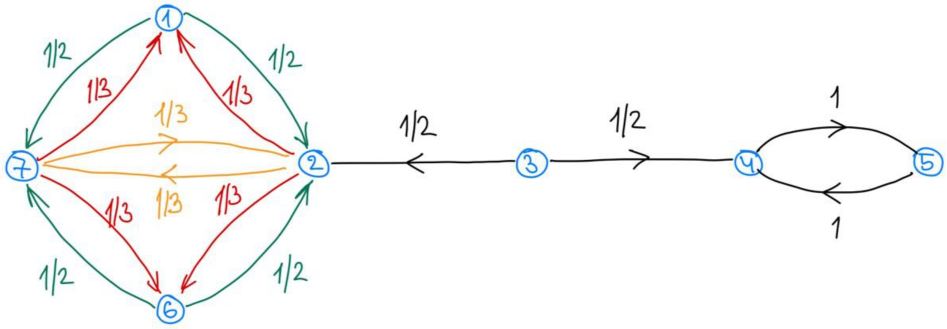

Рис. 4.1: Граф, описывающий цепь Маркова

Упражнение 4.5. *(2 балла) Проверьте условие согласованности мер, задающих цепь Маркова с непрерывным временем:*

$$F(t_1, .., t_m; A_{t_1}, .., A_{t_m}) = \sum_{i_{t_1} \in A_{t_1}, ..., i_{t_m} \in A_{t_m}} \mu_{i_0} p_{i_0 i_{t_1}}(t_1 - 0) p_{i_{t_1} i_{t_2}}(t_2 - t_1) ... p_{i_{t_{n-1}} i_{t_m}}(t_m - t_{m-1}) \tag{4.2}$$

Также проверьте марковское свойство:

$$P(X_{t_n} = j | X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, ... X_{t_{n-1}} = i) = p_{ij}(t_n - t_{n-1}), \tag{4.3}$$

где $p_{ij}(t)$ - это элементы матрицы $P(t)$.

Упражнение 4.6. *(Бонусное, 5 баллов) Докажите эргодическую теорему для цепи Маркова с непрерывным временем.*

Упражнение 4.7. *(3 балла) Пусть цепь маркова задана начальным распределением μ и полугруппой стохастическмх матриц $P(t)$. Проверьте непрерывность и дифференцируемость $P(t)$ и докажите равенство $P'(t) = P(t)Q = QP(t)$.*

Упражнение 4.8. *(3 балла) Найдите матрицу $P(t) = \exp(tQ)$ для следующей Q-матрицы:*

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

Упражнение 4.9. *(4 балла) Докажите, что матрица Q вида*

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & ... \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & ... \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

является Q-матрицей для процесса Пуассона.