Диффузия

По умолчанию все задачи 5 баллов, если не оговорено иного. Это единственный листок с задачами из ДЗ-4, который весит 35 баллов (будет ещё ноутбук на 35 баллов). Везде $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ – одномерный Винеровский процесс (непрерывная модификация) с $W_0 = 0$.

Упражнение 1.1. *В стране Тропико построили предсказательную модель для цен на уголь:*

$$X_t = X_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}, -$$

модель геометрического Броуновского движения с $\mu = 0.02, \sigma = 0.2$ *и* $X_0 = 100$ *дублонов. Найдите матожидание первого момента времени, когда*

1. *цена будет больше* 120 *дублонов.*

2. *цена будет меньше* 80 *дублонов.*

Упражнение 1.2. *Используя уравнение Фоккера-Планка, докажите, что динамика Винеровского процесса не имеет стационарного распределения. Покажите, что с точностью до константы единственная стационарная мера (но она даже не вероятностная) – это мера Лебега*

$$\lambda((a, b)) = b - a.$$

Упражнение 1.3. *Рассмотрим Броуновское движение на отрезке* $[0, 1]$ *и на окружности* $[0, 1)$ *(это как отрезок, но при проходе через* 1 *точка оказывается в* 0 *и наоборот). Такие вещи не так очевидно симулировать с помощью стохастического дифференциального уравнения, но относительно легко исследовать с помощью уравнения Фоккера-Планка. Исследуйте стационарное распределение для процессов ниже.*

1. *Отражающие края на отрезке* $[0, 1]$*. Производную* $\partial_x p$ *можно интерпретировать как поток вероятности через точку* x *в момент* t*. Поэтому моделировать отражение от стенок можно с помощью отражающих граничных условий*

   $$\partial_x p(t, 1) = \partial_x p(t, 0) = 0.$$

   Так частица будет отскакивать от краев обратно в отрезок без потери энергии: поток нулевой, следовательно, следовательно, если частица двигалась вправо со скоростью v*, то с той же скоростью она должна вернуться в обратную сторону.*

2. *Периодические края на окружности* $[0, 1)$*. Представим себе окружность, на одной точке которой запускается Винеровский процесс. Его координата – это угол, который мы измеряем от* 0 *(соотвествует* 0*) до* 1 *(соответствует* 2π*). С обычным Винеровским процессом такой связан как*

   $$\widetilde{W_t} = W_t \ mod\ 1.$$

Придумайте подходящее граничное условие для плотности такого процесса на $[0, 1]$ *и найдите стационарную плотность.*

Упражнение 1.4. *Пусть*

$$C(t, x) = \mathbb{E}\left[e^{-\mu(T-t))}(X_T - K)_+ \mid X_t = x\right]$$

это честная цена евро-опциона call на актив

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

Выведите дифференциальное уравнение в частных производных для цены опциона и выпишите для него подходящее граничное условие, используя обратное уравнение Колмогорова и генератор.

Упражнение 1.5. *Пусть* W *– одномерный Винеровский процесс с началом в нуле (модификация с непрерывными траекториями), а* τ_w *– это время*

$$\tau_w = \inf\{t \geq 0 : \ W_t \geq w\}$$

для $w \geq 0$*. Докажите, что* τ_w *– это момент остановки относительно фильтрации Винеровского процесса. Покажите, что* $(\tau_w)_{w \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ *– это процесс Леви (Normal Inverse Gaussian, NIG-процесс). Найдите плотность сечения этого процесса (вам поможет закон отражения).*

Упражнение 1.6. *Пусть задана модель GBM*

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

Покажите, что при $\mu < \sigma^2/2$ *значение* $X_t \to 0$ *почти наверное при* $t \to \infty$*. (Вам поможет лемма Бореля-Кантелли или закон больших чисел для Винеровского процесса).*

Найдите вероятность того, что процесс превзойдёт уровень R *при условии, что* $X_0 = x < R$*.*

Упражнение 1.7. *Пусть задана модель GBM*

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

Покажите, что при $\mu > \sigma^2/2$ *значение* $X_t \to \infty$ *почти наверное при* $t \to \infty$*. (Вам поможет лемма Бореля-Кантелли или закон больших чисел для Винеровского процесса).*

Найдите вероятность того, что процесс упадёт ниже уровня R *при условии, что* $X_0 = x > R$*.*