Броуновское движение: из физики в финансы

Эта лекция – небольшой экскурс в финансовую математику. Мы начнём с того, что попробуем понять, как Броуновское движение из физики оказалось в финансах, а затем рассмотрим одну базовую модель для финансового моделирования: геометрическое Броуновское движение. Наконец, посмотрим на некоторые финансовые задачи, которые приходится решать с помощью подобных моделей.

3.1 Откуда идёт финансовая математика

Можно сказать, что финансовая математика возникла примерно в 30-х годах XX века, когда уже были биржи и люди как-то умели анализировать временные ряды (согласно нашим определениям, временной ряд – это вещественнозначный случайный процесс в дискретном времени). По утверждению А.Н. Ширяева, до этого по сути вся финансовая математика сводилась в самом сложном случае к подсчёту сложных процентов [29, Гл.1]. В 30-х годах уже сформировался какой-то статистический инструментарий, данные стали привлекать интерес экономистов. В это время выходит несколько работ, посвящённых исследованию финансовых рядов, среди которых стоит упомянуть [1, 21, 2], где анализировались архивные данные цен. Вывод этих работ был весьма интересный: очень похоже, что логарифмы приращений цен $\ln S_t/S_{t-1}$ в этих рядах ведут себя как независимые. Эти работы, к сожалению, не получили в своё время должного внимания, как сейчас можно предполагать, отчасти из-за того, что экономисты тогда верили (некоторые до сих пор верят), что в экономических рядах есть разные ритмы и циклы, а отчасти из-за того, что для экономики проблема динамики цен была сильно второстепенна. В целом, и сейчас макроэкономика, в основном, занимается несколько другими вопросами. Третья причина была в том, что далеко не все экономисты тогда владели статистикой, которая ещё не была сильно распространена.

Поворотным моментом стала в 1953г. работа Кендалла [14], которая вышла в другое время, написана более зрелым статистическим языком и опубликована в журнале Королевского Статистического Общества. В ней автор анализирует различные ценовые временные ряды: месячные средние цены на пшеницу в Чикаго (1883-1934), на хлопок в Нью-Йорке(1816-1951), а также недельные данные цен 19 акций (1928-1938). Кендалл пришёл, более обоснованно, к тем же выводам, что и предыдущие статьи. Изначально его работа была нацелена на то, чтобы выявить цикличность в поведении цен, но к своему великому удивлению он обнаружил (и эта фраза вошла в историю), что исследуемые ряды выглядят как если бы "..the Demon of Chance drew a random number.. and added it to the current price to determine the next .. price". Иными словами, если положить, что логарифмы процесса цен в дискретном времени $H_t = \ln S_t/S_{t-1}$ независимы, то процесс логарифмов цен – это случайное блуждание, то есть, процесс вида

$$\ln S_t = \ln S_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ – процесс (предположительно, гауссовского) белого шума с нулевым матожиданием и начальная цена $S_0 \in \mathbb{R}$ фиксирована. Следовательно, сами цены ведут себя как

$$S_t = S_0 e^{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_t}.$$

Как это ни удивительно, но подобные идеи возникали ранее: например, в работе Башелье Théorie de la Speculation (1900) [3] уже была другая, но похожая гипотеза. Башелье предположил, что цены сами являются случайным блужданием (*модель Башелье*)

$$S_{k\Delta} = S_{(k-1)\Delta} + \varepsilon_{k\Delta}$$

с гауссовским белым шумом $\varepsilon_{k\Delta} \sim N(0,\Delta)$, Δ – шаг дискретизации по времени. Однако, понятно, что никому в то время не нравилась идея со случайными блужданиями. Во-первых, это процесс, который нельзя предсказать (можно, но наилучший прогноз цены в будущем – это цена сегодня). Во-вторых, в такой модели цены могут быть отрицательными, то есть, нельзя сказать, что она адекватна. Заметим, что в пределе (в подходящем смысле) при $k = t/\Delta$ и $\Delta \to 0$ мы приходим к процессу в непрерывном времени

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \tag{3.1}$$

где $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – это уже известный нам Винеровский процесс.

Теорема 3.1. *(Донскер, вариант) Пусть (U_n) – последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с матожиданием 0 и дисперсией 1. Рассмотрим*

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} U_k$$

и для $t \in [0,+\infty)$ линейную интерполяцию S_n, функцию

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + \frac{1}{\sqrt{n}}(nt-[nt])U_{[nt]+1}.$$

Тогда при $n \to \infty$ конечномерные распределения процесса X_n с индексами t сходятся к конечномерным распределениям Винеровского процесса W.

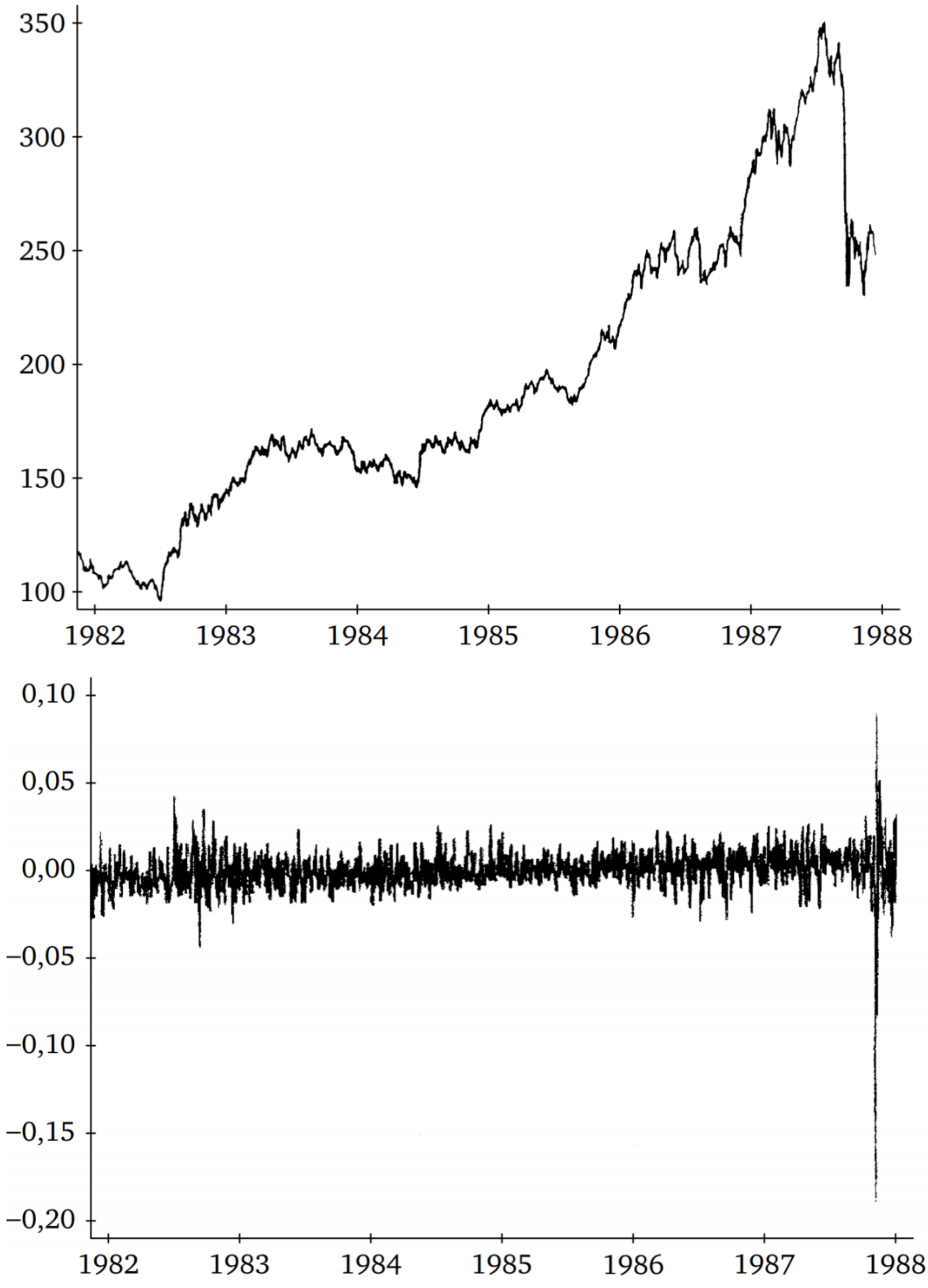

Рис. 3.1: Индекс S&P500 (верх) и его логарифмы приращений (низ), Рис. из [29, Гл. 1].

Несмотря на то, что гипотеза белошумности очень притягательна, в реальности она не до конца адекватна: оказывается, что последовательность шумов устроена более сложно и для её описания используют более сложные модели временных рядов.

▷ Давайте для краткости запишем

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} U_k + \psi_{n,t},\ X_n(0) = 0 \text{ п.н. }.$$

Поскольку величины U_k независимы, одинаково распределены, имеют нулевое матожидание и конечную дисперсию, для них работает классическая ЦПТ:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]} U_k \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,t).$$

С другой стороны, $\psi_{n,t} \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0$. Рассмотрим теперь вектор зависимых случайных величин для $t_1 < .. < t_k$.

$$[X_{t_1}, .., X_{t_k}]^T.$$

Попробуем сначала перейти к приращениям:

$$\begin{bmatrix} X_n(t_1) \\ X_n(t_2) \\ .. \\ X_n(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 1 & 1 & 0 & .. & 0 \\ ... & & & & \\ 1 & 1 & 1 & .. & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n(t_1) - X_n(0) \\ X_n(t_2) - X_n(t_1) \\ .. \\ X_n(t_k) - X_n(t_{k-1}) \end{bmatrix}.$$

Вектор справа состоит из почти независимых случайных величин

$$X_n(t_p) - X_n(t_{p-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=[nt_{p-1}]+1}^{[nt_p]} U_k + \psi_{n,t_p} - \psi_{n,t_{p-1}}.$$

Причём, что важно, первая сумма и разность $\psi_{n,t_p} - \psi_{n,t_{p-1}}$ независимы. По ЦПТ

$$X_n(t_p) - X_n(t_{p-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, t_p - t_{p-1}),$$

а целый вектор сходится к

$$\left[W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, .., \quad W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right]^T,$$

так как части $\psi_{n,t_p} - \psi_{n,t_{p-1}}$ в пределе стремятся к 0 (и зависимости полностью исчезают) и разности по ЦПТ имеют гауссовское распределение как у приращения Винеровского процесса.□

По настоящему значимой точкой, после которой финансовая математика начала бурно развиваться вместе с теорией анализа временных рядов, стала работа Пола Самуэльсона [18], который ввёл в обращение на основе уже имеющихся эмпирических фактов модель цен

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}, \tag{3.2}$$

с параметрами μ, σ^2, которую он назвал экономическим Броуновским движением, сейчас мы её знаем как геометрическое Броуновское движение. Несмотря на то, что эта модель в данный момент признана не вполне соответствующей реальности (см. например, Рис. 3.1, где, очевидно, логарифмы приращений – это не совсем белый шум), она явилась очень мощным первым шагом и на основе неё было сделано много других решений, которые применяются и сейчас. В теории временных рядов есть много моделей, которые появились, можно сказать, хотя бы отчасти благодаря геометрическому Броуновскому движению; например, это условно гауссовские модели ARCH[10] и GARCH[4]. Они были призваны улучшить эту модель, конкретнее, они моделируют параметр волатильности σ_t как отдельный случайный процесс.

3.2 Геометрическое Броуновское движение

Определение 3.1. *Пусть* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– это Винеровский процесс такой, что* $W_0 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}_+$ *– параметры модели (называемые сносом, волатильностью и начальной ценой). Одномерное геометрическое Броуновское движение (geometric Brownian motion, GBM) – это процесс* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *определяемый как*

$$X_t = x_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}. \tag{3.3}$$

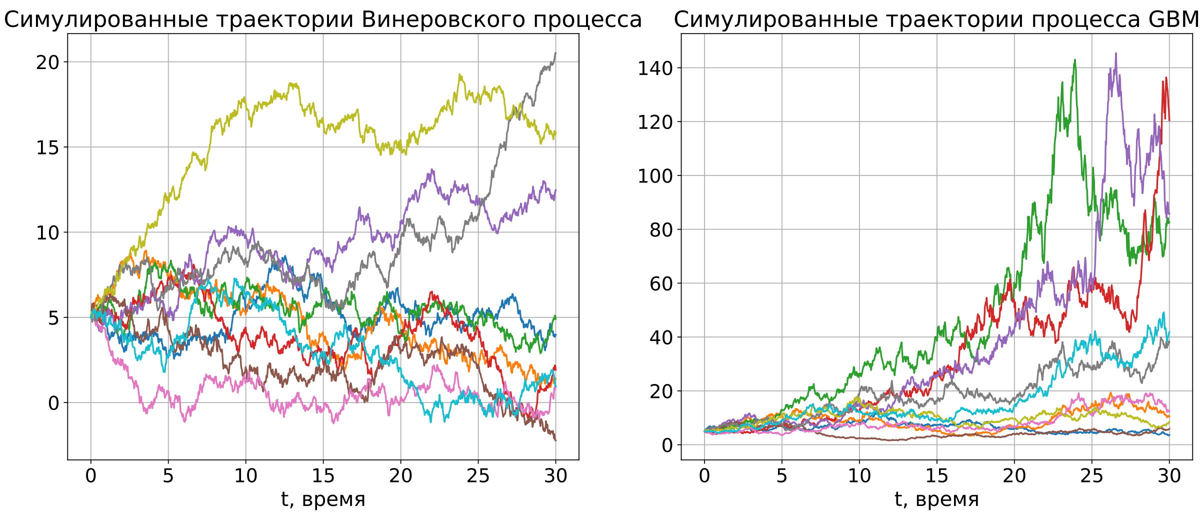

Рис. 3.2: Очевидно, что самого Винеровского процесса мало для моделирования цен (как предлагалось в [3]), поскольку он может уходить ниже нуля. При этом траектории GBM на первый взгляд очень похожи на типичные финансовые ряды.

Перечислим некоторые свойства этого процесса.

1. Легко заметить, что логарифм

$$\ln X_t = \ln X_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t$$

есть не что иное, как Винеровский процесс со сносом (из-за второго слагаемого) и волатильностью (из-за умножения на σ), и имеет нормальное распределение со средним $\ln X_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t$ и дисперсией $\sigma^2 t$. По определению, случайная величина X_t – *логнормальная*, то есть, её логарифм – нормальная величина.

Упражнение 3.1. *Докажите, что плотность логнормальной случайной величины* $X \sim LogN(\mu, \sigma^2)$ *есть*

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ *и* σ^2 *– параметры распределения* $\ln X$.

Для того, чтобы вычислить некоторые характеристики такой случайной величины нам понадобится новый объект: производящая функция моментов (Moment Generating Function, MGF).

Определение 3.2. *Пусть X – случайная величина. Производящей функцией моментов (MGF) называется функция*

$$g_X(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right],$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Производящая функция хранит информацию о моментах случайной величины и обладает многими полезными свойствами. Для нас сейчас важно, что у гауссовской случайной величины с параметрами μ и σ^2 производящая функция моментов равна

$$g_X(\lambda) = e^{\mu\lambda + \sigma^2\lambda^2/2}.$$

Упражнение 3.2. *Используя выражение для производящей функции моментов, докажите, что матожидание и ковариационная функция процесса $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ равны*

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = x_0 e^{\mu t}, \quad K(t,s) = x_0^2 e^{\mu(t+s)}\left(e^{\sigma^2 t\wedge s} - 1\right). \tag{3.4}$$

Чему равна дисперсия $\mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}\left[X_t\right])^2\right]$?

Подобная ковариационная функция означает что сечения очень сильно зависимы, причём зависимость растёт экспоненциально в зависимости от дальности сечений от нулевого, это объясняет взрывной и резкий характер траекторий процесса X_t (см. Рис. 3.2). А дисперсия показывает, что неопределённость относительно будущих значений нарастает очень быстро.

2. По заданию процесса, для любых $t, h \in \mathbb{R}_+$

$$X_{t+h} = X_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma W_h}, \tag{3.5}$$

что даёт нам некоторый инструмент для прогноза.

Утверждение 3.2. *Для $t, s \in \mathbb{R}_+$ таких, что $t > s$, условное матожидание*

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid X_s\right] = X_s\mathbb{E}\left[X_{t-s}\right] = X_s\mathbb{E}\left[e^{(\mu-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma W_{t-s}}\right].$$

$\triangleright$ Воспользуемся свойством (3.5) и тем, что X_s можно вынести за знак условного матожидания:

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid X_s\right] = X_s\mathbb{E}\left[e^{(\mu-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma(W_t-W_s)} \mid X_s\right].$$

Заметим теперь, что по свойству независимости приращений Винеровского процесса

$$\mathbb{E}\left[e^{(\mu-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma(W_t-W_s)} \mid X_s\right] = \mathbb{E}\left[e^{(\mu-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma(W_t-W_s)}\right]$$

и, наконец из того, что $W_t - W_s$ и W_{t-s} имеют одинаковые распределения, получаем

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid X_s\right] = X_s \mathbb{E}\left[e^{(\mu-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma W_{t-s}}\right].$$

□ Условное матожидание, как мы увидим далее, в данном случае является наилучшим прогнозом в среднеквадратичном смысле, но из-за дисперсии даже этот прогноз будет очень неточным для больших $t-s$.

3. Процесс GBM очень легко симулировать, можно предложить, например, следующий простой алгоритм, чтобы получить дискретизированную траекторию $X_{t_1}, .., X_{t_k}$, состоящую из сечений в моменты $t_1, .., t_k \in \mathbb{R}_+$:

(1) Симулировать траекторию Винеровского процесса (см. лекцию 2) $W_{t_1}, .., W_{t_k}$;

(2) Для всех $j = 1, .., k$ вычислить

$$X_{t_j} = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_{t_j}}.$$

Кратко скажем про многомерную версию. Если на рынке d товаров (акций), то мы определяем процесс $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ со значениями в $\mathbb{R}_+^d$ аналогично одномерному случаю, но вводим многомерный Винеровский процесс $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ и матрицу $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ для задания коррелированного многомерного Винеровского процесса.

Определение 3.3. *Пусть $(W_t^i)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – координаты d-мерного Винеровского процесса, а также заданы в качестве параметров $\mu_i \in \mathbb{R}^d$,, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Тогда многомерным геометрическим Броуновским движением называется процесс $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ с координатами*

$$X_t^i = x_0^i e^{\left(\mu_i - \sum_{j=1}^d a_{ij}^2/2\right)t + \sum_{j=1}^d a_{ij} W_t^j}.$$

Видно, что в многомерном случае координаты процесса зависимы через коррелированные Винеровские процессы.

3.3 Задача оценки опционов

Упрощённо, биржа существует достаточно давно для того, чтобы осуществлять сделки по продаже и покупке товаров. На бирже в качестве товаров выступают как физические товары (например, драгоценные металлы, валюта, нефть), так и ценные бумаги (акции и облигации). Работает это так: продавец приносит на биржу свой товар и ставит ценник. Далее биржа по всем продавцам вычисляет (по специальной методике, средняя, но есть тонкости) рыночную цену. С другой стороны, покупатели ставят заявки на покупку товара и тоже ставят свои цены. Как покупатели, так и продавцы могут изменять свои цены. Как только рыночная цена доходит до уровня, когда есть продавец и есть покупатель такие, что

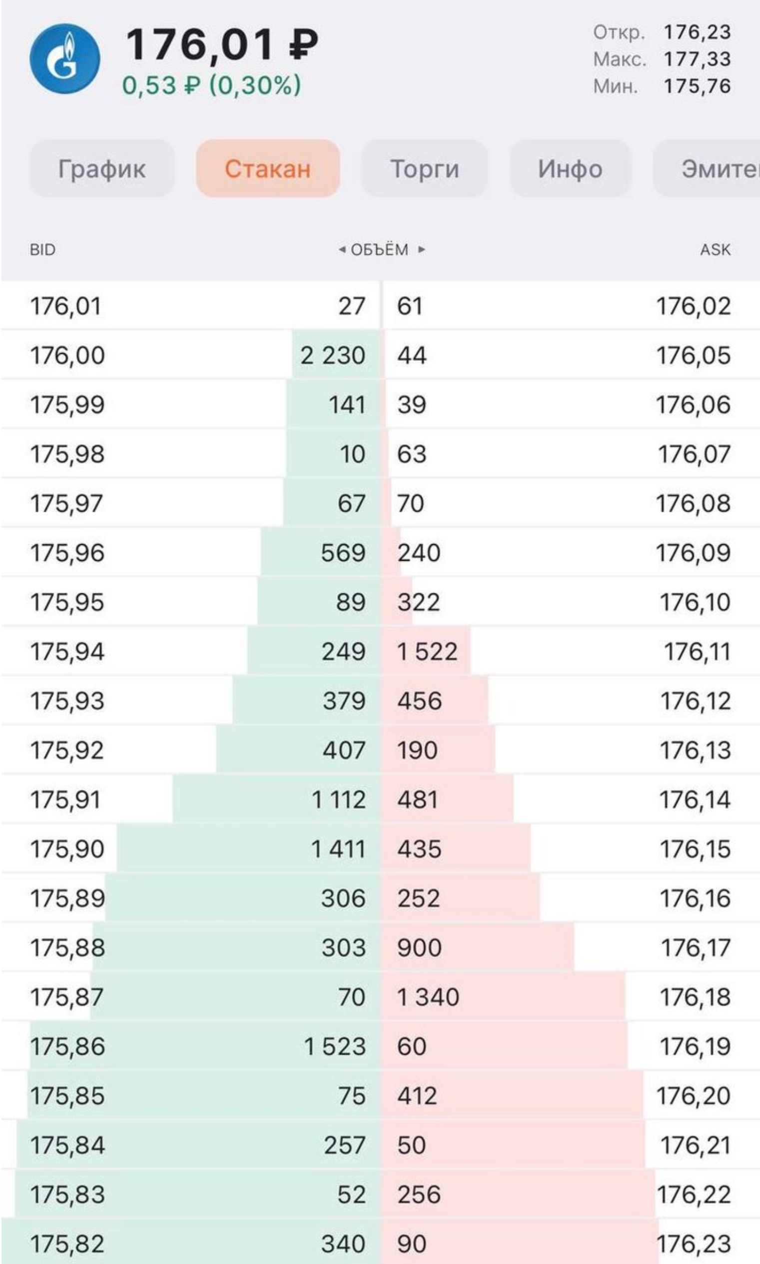

Рис. 3.3: Стакан с заявками ())

цена их обоих устраивает, биржа проводит сделку. Всё совершается через механизм биржи, продавцы и покупатели друг друга даже не знают и все расчёты проводят с биржей, где специальный клиринговый оператор занимается техническими деталями сделки.

Помимо товаров на бирже существуют производные финансовые инструменты (деривативы), наиболее популярные – опционы и фьючерсы. Чтобы понять, зачем вообще нужны деривативы, обратимся к простому примеру. Сейчас это уже кажется несколько странным сюжетом, но, скажем, в XIX веке биржи работали именно так. Фермер выращивает картофель, у него есть большое хозяйство и он использует биржу как посредника для торгов. Есть сеть ресторанов "У Егора которая заинтересована в покупке картофеля. Естественно, на рынке бывают урожайные и неурожайные времена, поэтому цена картофеля будет меняться со временем неопределённым образом. Для фермера продажа картофеля – это риск, так как он вложил некоторые средства в его производство и он будет разочарован и может потерять деньги, если цена на картофель будет очень низкая, когда он соберётся его продавать. С другой стороны, Егор может потерпеть большие издержки, чем хотелось бы, при покупке картофеля по высокой цене. Для таких случаев биржа предлагает решение в виде деривативов, специальных контрактов на будущие покупки или приобретения, с разными сроками действия.

Фермер может приобрести у биржи (или у другого агента на бирже) *фьючерс*, контракт, который обязывает его продать какое-то количество картофеля через год (в строго определённый момент) по заранее(!) заданной цене. С другой стороны, Егор может купить похожий фьючерс, который обязывает его купить какое-то количество картофеля через год по заранее заданной цене. Тем самым, и Егор, и фермер уменьшают риск неудовлетворения от неопределённости цены картофеля через год.

Также Егор или Fried могут приобрести или оформить *опцион*, который отличается тем, что он даёт лишь право на продажу/покупку заданного количества картофеля по заданной цене через год в строго определённое время. То есть, дождавшись момента исполнения, Егор может решить, что текущая цена на бирже выше той, что указаны в опционном контракте и он просто продаст картофель, не исполняя контракта. А Fried, соответственно, может увидеть, что цена на картофель так низка, что опцион исполнять невыгодно и тоже просто купит картофель по текущей цене.

Сумма в контракте на поставку называется *страйком* (strike price). Опционы на покупку имеют приставку *call* (call-опцион), а на продажу – *put* (put-опцион), есть также двусторонние (double), в которых обе стороны осуществляют поставку. Существует много видов опционов, самые популярные – *европейские* и *американские* (на Мосбирже есть и те, и те, очень популярны опционы на индексы и валюту). Первые работают как в приведённом примере: владелец опциона ждёт конца срока действия, а потом решает, исполнять его или нет. Что касается американских опционов, то их можно исполнить в *любой момент* до конца срока действия. В опционах может быть также задана необычная *функция выплаты*: например, если опцион покупается на несколько товаров (корзина, basket-опцион), то выплата будет равняться страйку, если опцион исполняется, и сумме от продажи/покупки заданного количества всех товаров, указанных в контракте иначе.

Для простоты положим, что рассматриваем европейский опцион. Вопрос: если есть опцион, то как назначить его цену?

Определение 3.4. *Пусть задана выплата опциона* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *и случайный процесс цен*

$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$*, принимающий значения в* $\mathbb{R}^d$*. Честной ценой европейского опциона со временем исполнения* $T > 0$ *называются условное матожидание*

$$\mathbb{E}\left[f(X_T) \mid X_0\right].$$

Пример 3.1. *Рассмотрим европейский put-опцион, который позволяет продать по одной единице каждого из товаров* $1, .., d$ *по цене* K *(страйк). В случае, если в момент исполнения биржевые цены* X_i *таковы, что продажа товаров по текущим ценам невыгодна (то есть, мы получаем меньше страйка* K*), опцион выгоднее исполнить, тогда после продажи мы получим выгоду* $K - \sum_{i=1}^d X_i$*. Если же страйк ниже суммы текущих цен, то нам выгоднее не исполнять опцион, получая нулевой выигрыш. Описанный опцион имеет выплату*

$$f(x_1, .., x_d) = \left(K - \sum_{i=1}^d x_i\right)_+ ,$$

где знак $+$ *означает, что всё выражение равно нулю, если в скобках число меньше нуля.*

Упражнение 3.3. *Как выглядит платёжная функция call-опциона с таким же контрактом?*

Если бы биржа продавала опцион по цене ниже честной, то она бы проиграла: в среднем она сама может выиграть с ним больше, чем если продаст этот опцион. Если цена получается выше, то такой опцион, вероятно, никто не купит – в конце концов, не только биржа их умеет оценивать. В реальности же (отчасти из-за неточностей прогнозов покупателя и продавца) есть некоторое окно, окрестность честной цены, в котором покупатель и продавец могут договориться, так что оценка честной цены имеет вполне практическое значение для реализации эффективного рынка. Для случая одного товара есть знаменитая формула Блека-Шоулза (из-за которой модель геометрического Броуновского движения тоже часто называют моделью Блека-Шоулза). Её доказательство сильно техническое и мы его приводить не будем (три разных её доказательства можно найти в [29, Т.2, Гл.8]). Впрочем, это не более, чем хорошее упражнение на вычисление матожидания.

Утверждение 3.3. *(Формула Блека-Шоулза) Пусть* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *– одномерное геометрическое Броуновское движение с параметрами* x_0, μ, σ*. Тогда честная цена опциона call со сроком истечения* $T > 0$ *и страйком* K *равна*

$$C_T = x_0 \Phi\left(\frac{\ln \frac{x_0}{K} + T\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K\Phi\left(\frac{\ln \frac{x_0}{K} - T\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

в частности, если $K = x_0$*, то*

$$C_T = x_0\left[\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)\right],$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

функция распределения величины $\mathcal{N}(0, 1)$*.*

Для случая корзинных опционов (много товаров) формул, как правило, нет, для оценки используется метод Монте-Карло и модель цен. Положим, у биржи есть модель многомерного геометрического Броуновского движения $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ для моделирования цен на d товаров, задействованных в опционе, с параметрами $\mu \in \mathbb{R}^d$ и матрицей $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Тогда задача оценки опциона может быть решена методом Монте-Карло. В реальности могут использоваться более сложные предсказательные модели, в частности, со случайными сносом и волатильностью.

Заметим одно важное экономическое свойство честной цены: она растёт с ростом срока истечения T. Это естественное следствие того, что долгосрочный опцион страхует большую неопределённость, чем короткосрочный. По этой причине долгосрочные опционы редкие и очень дорогие, как правило, срок истечения у них не больше двух лет. Кроме того, опционы обычно (но важна цена в момент наблюдения) после их выпуска становятся дешевле со временем, так как срок истечения приближается и страхуемая неопределённость тоже становится меньше.

Мы обсудили, как можно оценивать европейские опционы. Американские опционы и разные более экзотические варианты деривативов оценивать сложнее: для этого нужно решать задачу оптимальной остановки (в случае американского опциона) или стохастического оптимального управления (для более сложных деривативов).

Литература

[1] Alfred Cowles 3rd. Can stock market forecasters forecast? *Econometrica*, 1(3):309–324, 1933.

[2] Alfred Cowles 3rd and Herbert E. Jones. Some a posteriori probabilities in stock market action. *Econometrica*, 5(3):280–294, 1937.

[3] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 17:21–86, 1900.

[4] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.

[5] Michael Brin and Garrett Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.

[6] Yuansi Chen, Raaz Dwivedi, Martin J. Wainwright, and Bin Yu. Fast mixing of metropolized hamiltonian monte carlo: benefits of multi-step gradients. *J. Mach. Learn. Res.*, 21(1), jan 2020.

[7] Persi Diaconis. The markov chain monte carlo revolution. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46:179textendash205, 04 2009.

[8] Alain Durmus and Éric Moulines. High-dimensional bayesian inference via the unadjusted langevin algorithm. *Bernoulli*, 2016.

[9] Raaz Dwivedi, Yuansi Chen, Martin J Wainwright, and Bin Yu. Log-concave sampling: Metropolis-hastings algorithms are fast! In Sébastien Bubeck, Vianney Perchet, and Philippe Rigollet, editors, *Proceedings of the 31st Conference On Learning Theory*, volume 75 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 793–797. PMLR, 06–09 Jul 2018.

[10] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.

[11] L. Isserlis. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables, November 1918.

[12] Galin Jones. On the markov chain central limit theorem. *Probability Surveys*, 1, 09 2004.

[13] R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35–45, 03 1960.

[14] M. G. Kendall and A. Bradford Hill. The analysis of economic time-series-part i: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 116(1):11–34, 1953.

[15] Robert C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1):125–144, 1976.

[16] Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, and Edward Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 06 1953.

[17] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations (3rd Ed.): An Introduction with Applications.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[18] Paul A. Samuelson. Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(2):369–374, 1973.

[19] O. A. Stepanov. Kalman filtering: Past and present. an outlook from russia. (on the occasion of the 80th birthday of rudolf emil kalman). *Gyroscopy and Navigation*, 2(2):99–110, Apr 2011.

[20] R. L. Stratonovich. Conditional markov processes. *Theory of Probability & Its Applications*, 5(2):156–178, 1960.

[21] Holbrook Working. A random-difference series for use in the analysis of time series. *Journal of the American Statistical Association*, 29(185):11–24, 1934.

[22] L.E. Zachrisson. On optimal smoothing of continuous time kalman processes. *Information Sciences*, 1(2):143–172, 1969.

[23] Guangyao Zhou. Metropolis augmented hamiltonian monte carlo. In *Fourth Symposium on Advances in Approximate Bayesian Inference*, 2022.

[24] Н. В. Рекнер М. Шапошников С. В. Богачев, В. И. Крылов. *Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова.* Институт компьютерных исследований, 2013.

[25] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов.* М:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[26] Тиморин В.А. *Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными.* Москва : ВШЭ, 2017.

[27] Синай Я.Г. Коралов Л.Б. *Теория вероятностей и случайные процессы.* МЦНМО, 2013.

[28] Р.Л. Стратонович. *Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.* Московский государственный университет, 1966.

[29] А.Н. Ширяев. *Основы стохастической финансовой математики.* МЦНМО, 2016.