

手征微扰场论

王旭

2021 年 10 月 10 日

目录

1	有效量子力学	2
1	1D 散射	2
1.1	利用 δ 函数来模仿方势阱	2
2	3D 散射	3
2.1	3D 散射中的 δ 函数	4
2	手征拉氏量	4
1	流代数	5
2	Goldstone 玻色子的实现	6

1 有效量子力学

该章主要参考 [?]. 当我们在描述低能理论时, 我们不需要知道其在高能区的表现。代价就是需要引入大量参数, 而这些参数只能由实验给出。在考察有效量子场论前, 我们先看看有效量子力学。

由于在相对论量子力学中, 粒子与粒子的相互作用是点点相互作用, 因此我们希望通过 δ 函数来模拟散射势。

1 1D 散射

考虑量子力学中的一维散射问题, 假设有一方势阱, 其函数为

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{2m\Delta}, & 0 \leq x \leq \Delta \\ 0, & \text{其余情况} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 m 为粒子质量, Δ 为势阱宽度, $\frac{\alpha^2}{2m\Delta^2}$ 为势阱深度。可以通过计算薛定谔方程得到反射系数 R 为

$$R = \left[\frac{4\kappa^2 k^2 \csc^2(\kappa\Delta)}{(k^2 - \kappa^2)} + 1 \right]^{-1} \quad (1.2)$$

其中

$$k = \sqrt{2mE}, \quad \kappa = \sqrt{k^2 + \frac{\alpha^2}{\Delta^2}} \quad (1.3)$$

在低能时, 我们可以按照 k 展开反射系数,

$$R = -\frac{4}{\alpha^2 \sin^2 \alpha} \Delta^2 k^2 + \mathcal{O}(\Delta^4 k^4) \quad (1.4)$$

可以看到当 $k \rightarrow 0$ 时, $R \rightarrow 1$, 称这种相互作用为相关相互作用。

1.1 利用 δ 函数来模仿方势阱

考虑此时有一 δ 势阱,

$$V(x) = -\frac{g}{2m\Delta} \delta(x) \quad (1.5)$$

此处引入 Δ 来保证 g 是无量纲的。依旧通过薛定谔方程可以计算得出反射系数为,

$$R = \left[1 + \frac{4k^2 \Delta^2}{g^2} \right]^{-1} = 1 - \frac{4k^2 \Delta^2}{g^2} + \mathcal{O}(k^4) \quad (1.6)$$

在低能情况下, 与 (1.4) 比较可得,

$$g = \alpha \sin \alpha \quad (1.7)$$

称为“匹配条件”。

2 3D 散射

首先，**可以普遍证明**，对于任意势场， $k \cot \delta$ 可以展开为

$$k \cot \delta = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \mathcal{O}(k^4) \quad (1.8)$$

考虑一 s 波的散射，势函数如下，

$$V = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{m\Delta^2}, & r < \Delta \\ 0, & r > \Delta \end{cases} \quad (1.9)$$

其中 a 是散射长度， r 是有效力程。同样可以通过求解薛定谔方程得到 $k \cot \delta$ 的关系式，为

$$k \cot \delta = \frac{k(k \sin \kappa \Delta + \kappa \cot k \Delta \cos \kappa \Delta)}{k \cot k \Delta \sin \kappa \Delta - \kappa \cos \kappa \Delta} \quad (1.10)$$

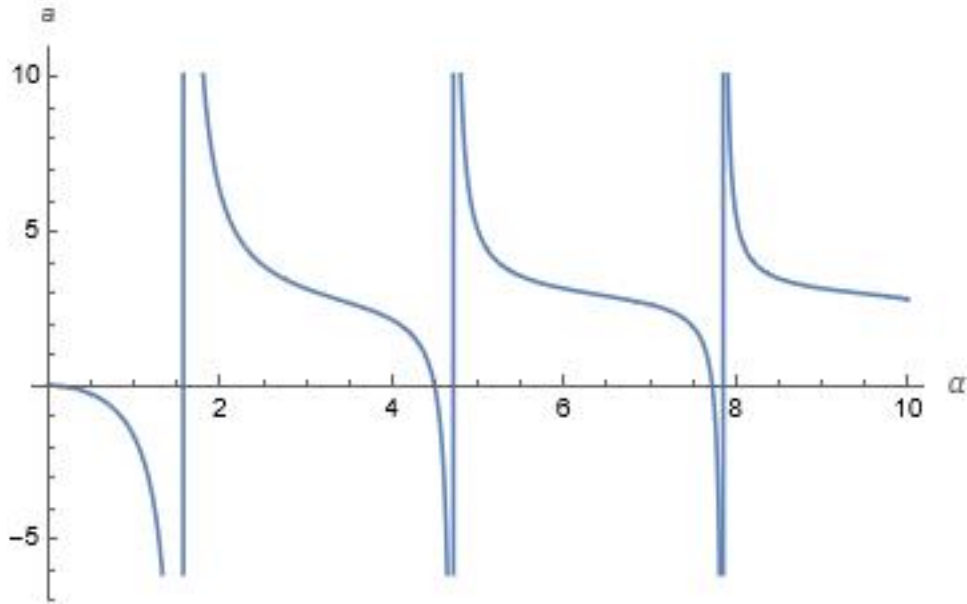
将其按照 k^2 展开可得，

$$k \cot \delta = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} - 1 \right)^{-1} + \mathcal{O}(k^2) \quad (1.11)$$

与 (1.8) 比较可得，

$$a = -\Delta \left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} - 1 \right) \quad (1.12)$$

其关系如图所示，



可以看到，势 α 随散射长度 a 的变化，当 $\alpha_c = (2n+1)\pi/2$ 时， a 出现奇异性，对应着束缚态的出现。

2.1 3D 散射中的 δ 函数

我们首先给出 3D 散射下散射振幅

$$f = \frac{1}{k \cot \delta - i k} \quad (1.13)$$

观察 (1.12)，由于 α 是 $\mathcal{O}(1)$ ，因此 $a \sim \mathcal{O}(\Delta)$ ，因此当势阱宽度趋于 0 时，散射振幅也趋于 0，这种相互作用称为无关相互作用。因此无法用 δ 函数来模拟球势阱。

如果我们用场 ψ 表示散射粒子，拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \left(i \partial_t + \frac{\nabla^2}{2M} \right) \psi - \frac{C_0}{4} (\psi^\dagger \psi)^2 \quad (1.14)$$

2 手征拉氏量

该章主要参考 [?]

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 (\bar{q}_i i \not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (2.1)$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - i g T^a A_\mu^a$ ， $T^a = \lambda^a/2$ 。仅考虑动能项时，具有 $U(3)_L \times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏，系统的对称群为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ ，其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在， $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 遭到了破坏，但当粒子质量相同时，依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项，

$$\sum_i m_i \bar{q}_i q_i = \sum_{i,j} \bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} \quad (2.2)$$

其中 $M = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 。如果我们将质量项升级为场，在最后结果的时候在取回常数，并假设其在手征变换下进行如下变换，

$$M \rightarrow R M L^\dagger \quad (2.3)$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 变换下不变。

除质量项的显式破缺外，当考虑夸克凝聚的时候，也会产生自发破缺，考虑 QCD 真空

$$\langle 0 | \bar{q}_{R,i} q_{L,j} | 0 \rangle = \Lambda^3 \delta_{ij} \quad (2.4)$$

其中 Λ 具有质量量纲。其在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下按照 $(3, \bar{3})$ 变换。在手征变换下，

$$L_{im} \langle 0 | \bar{q}_{R,n} q_{L,m} | 0 \rangle R_{nj}^\dagger = \Lambda^3 U_{ij} \quad (2.5)$$

其中 $U_{ij} = (LR^\dagger)_{ij}$ 。当 $L = R$ 时，真空没有变化，此时恰好对应 $SU(3)_V$ 。

我们可以采用和质量类似的方式，将 U 升格为场，并将其参数化为

$$U(x) = \exp\left[\frac{i}{f}\phi(x)\right], \quad \phi(x) = T^a \phi^a(x) \quad (2.6)$$

其中， $\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子。

当 $N=2$ 时，

$$\phi \equiv \sum_{i=1}^3 \phi_a \sigma^a = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

当 $N=3$ 时，

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

1 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前，我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下，拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

在 $U(3)_L \times U(3)_R$ 群下，场的变化如下

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-i\varepsilon_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-i\varepsilon_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

则拉氏量的变换为

$$\delta \mathcal{L}_0 = \bar{q}_R \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R \right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_L \right) \gamma^\mu q_L \quad (2.11)$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$L_a^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, \quad R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R$$

$$L^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, \quad R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \quad (2.12)$$

其中带有下指标 a 的流称为八重态，不带的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 q \quad (2.13)$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \quad (2.14)$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒，对应重子数守恒，而单态轴矢流在量子化之后出现反常。

定义三个荷算符

$$\begin{aligned} Q_{La}(t) &= \int d^3x q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t, \vec{x}) \\ Q_{Ra}(t) &= \int d^3x q_R^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_R(t, \vec{x}) \\ Q_V(t) &= \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) q(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{aligned} [Q_{La}, Q_{Lb}] &= if_{abc} Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = if_{abc} Q_{Rc} \\ [Q_{La}, Q_{Rb}] &= [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

2 Goldstone 玻色子的实现

在手征极限下，系统拉氏量 (2.9) 具有 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，但当考虑夸克凝聚的时候，基态只有 $SU(3)_V \times U(1)_V$ 的对称性，系统的对称性发生了自发破缺，生成了 8 个无质量的 Goldstone 玻色子。由于真实的夸克带有微小质量，因此拉氏量不具备严格的 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，破缺得到的 Goldstone 玻色子带有质量。

一般考虑，假设有大群 G ，以及它的子群 H ，拉氏量具有群 G 对称性，基态具有群 H 对称性，则会生成 $n = n_G - n_H$ 个 Goldstone 玻色子，每个 Goldstone 玻色子用 ϕ_i 标记，为光滑实函数， $i = 1, \dots, n$ ，定义一个 n 分量的矢量 $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ ，接着定义一个实向量空间

$$M_1 = \{\Phi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^n | \phi_i : M^4 \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (2.17)$$

定义一个映射 $\varphi : G \times M_1 \rightarrow M_1$ ，满足

- $\varphi(e, \Phi) = \Phi$
- $\varphi(g_1, \varphi(g_2, \Phi)) = \varphi(g_1 g_2, \Phi)$

用 Φ 表示 M_1 中的原点，[对应系统的基态构型](#)，则对于 $\forall h \in H$ ，存在 $\varphi(h, 0) = 0$ ，从而可以建立起 G/H 陪集与 Goldstone 玻色子之间的同构关系。可以验证，对于同一陪集中的元素，原点被映射到同一矢量，而不同陪集中的元素将原点映射到不同矢量。

考查 Goldstone 玻色子在群 G 下的变换行为, 对于每一个 Φ 有一个陪集 $\tilde{g}H$ 与之对应, 表示为

$$\varphi(g, \Phi) = \varphi(\tilde{g}h, 0)$$

接着用 $\varphi(g)$ 作用到 Φ 上

$$\varphi(g, \Phi) = \varphi(g, \varphi(\tilde{g}h, 0)) = \Phi'$$

即存在关系

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{g} & \Phi' \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tilde{g}H & \xrightarrow{g} & g\tilde{g}H \end{array}$$