# 手征微扰场论

王旭

2021 年 10 月 14 日

## 目录

# 1 手征拉氏量

该章主要参考 [1]

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{3}(\bar{q}_i\mathrm{i}\not{D}q_i-m_i\bar{q}_iq_i)-\frac{1}{4}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}^{a\mu\nu} \tag{1.1}$$

其中 $D_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}gT^aA^a_\mu$, $T^a=\lambda^a/2$。仅考虑动能项时，具有 $U(3)_L\times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏，系统的对称群为 $SU(3)_L\times SU(3)_R\times U(1)_V$，其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在，$SU(3)_L\times SU(3)_R$ 遭到了破坏，但当粒子质量相同时，依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项，

$$\sum_i m_i\bar{q}_iq_i=\sum_{i,j}\bar{q}_{R,i}M_{ij}q_{L,j} \tag{1.2}$$

其中 $M=diag(m_u,m_d,m_s)$。如果我们将质量项升级为场，在最后结果的时候在取回常数，并假设其在手征变换下进行如下变换，

$$M\to RML^\dagger \tag{1.3}$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L\times SU(3)_R$ 变换下不变。

除质量项的显式破缺外，当考虑夸克凝聚的时候，也会产生自发破缺，考虑 QCD 真空

$$\langle 0|\bar{q}_{R,i}q_{L,j}|0\rangle=\Lambda^3\delta_{ij} \tag{1.4}$$

其中 $\Lambda$ 具有质量量纲。其在 $SU(3)_L\times SU(3)_R$ 下按照 $(3,\bar{3})$ 变换。在手征变换下，

$$L_{im}\langle 0|\bar{q}_{R,n}q_{L,m}|0\rangle R^\dagger_{nj}=\Lambda^3U_{ij} \tag{1.5}$$

其中 $U_{ij}=(LR^\dagger)_{ij}$。当 $L=R$ 时，真空没有变化，此时恰好对应 $SU(3)_V$。

我们可以采用和质量类似的方式，将 $U$ 升格为场，并将其参数化为

$$U(x)=exp[\frac{i}{f}\phi(x)],\ \phi(x)=T^a\phi^a(x) \tag{1.6}$$

其中，$\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子。

当 N=2 时，

$$\phi\equiv\sum_{i=1}^{3}\phi_a\sigma^a=\begin{pmatrix}\phi_3 & \phi_1-\mathrm{i}\phi_2\\ \phi_1+\mathrm{i}\phi_2 & -\phi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi^0 & \sqrt{2}\pi^+\\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

当 N=3 时，

$$\phi\equiv\begin{pmatrix}\pi^0+\frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+\\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0+\frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0\\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3}\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

## 1 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前，我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下，拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0=\sum_{l=u,d,s}\left(\bar{q}_{R,l}\mathrm{i}\not{D}q_{R,l}+\bar{q}_{L,l}\mathrm{i}\not{D}q_{L,l}\right)-\frac{1}{4}\mathcal{G}_{a\mu\nu}\mathcal{G}_a^{\mu\nu} \tag{1.9}$$

在 $U(3)_L\times U(3)_R$ 群下，场的变化如下

$$\begin{pmatrix}u_L\\d_L\\s_L\end{pmatrix}\mapsto U_L\begin{pmatrix}u_L\\d_L\\s_L\end{pmatrix}=exp\left(-\mathrm{i}\sum_{a=1}^{8}\varepsilon_{La}\frac{\lambda_a}{2}\right)e^{-\mathrm{i}\varepsilon_L}\begin{pmatrix}u_L\\d_L\\s_L\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u_R\\d_R\\s_R\end{pmatrix}\mapsto U_R\begin{pmatrix}u_R\\d_R\\s_R\end{pmatrix}=exp\left(-\mathrm{i}\sum_{a=1}^{8}\varepsilon_{Ra}\frac{\lambda_a}{2}\right)e^{-\mathrm{i}\varepsilon_R}\begin{pmatrix}u_R\\d_R\\s_R\end{pmatrix} \tag{1.10}$$

则拉氏量的变换为

$$\delta\mathcal{L}_0=\bar{q}_R\left(\sum_{a=1}^{8}\partial_\mu\varepsilon_{Ra}\frac{\lambda_a}{2}+\partial_\mu\varepsilon_R\right)\gamma^\mu q_R+\bar{q}_L\left(\sum_{a=1}^{8}\partial_\mu\varepsilon_{La}\frac{\lambda_a}{2}+\partial_\mu\varepsilon_R\right)\gamma^\mu q_L \tag{1.11}$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$\begin{aligned}L_a^\mu&=\bar{q}_L\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}q_L,R_a^\mu=\bar{q}_R\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}q_R\\L^\mu&=\bar{q}_L\gamma^\mu q_L,R^\mu=\bar{q}_R\gamma^\mu q_R\end{aligned} \tag{1.12}$$

其中带有下指标 $a$ 的流称为八重态，不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu=R^\mu+L^\mu=\bar{q}\gamma^\mu q,A^\mu=R^\mu-L^\mu=\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q \tag{1.13}$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu=R_a^\mu+L_a^\mu=\bar{q}\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}q,A_a^\mu=R_a^\mu-L_a^\mu=\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\frac{\lambda_a}{2}q \tag{1.14}$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒，对应重子数守恒，而单态轴矢流在量子化之后出现反常。

定义三个荷算符

$$\begin{aligned}Q_{La}(t)&=\int\mathrm{d}^3xq_L^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2}q_L(t,\vec{x})\\Q_{Ra}(t)&=\int\mathrm{d}^3xq_R^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2}q_R(t,\vec{x})\\Q_V(t)&=\int\mathrm{d}^3xq^\dagger(t,\vec{x})q(t,\vec{x})\end{aligned} \tag{1.15}$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{aligned}[Q_{La}, Q_{Lb}] = \mathrm{i} f_{abc} Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = \mathrm{i} f_{abc} Q_{Rc} \\ [Q_{La}, Q_{Rb}] = [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0\end{aligned} \tag{1.16}$$

## 2　Goldstone 玻色子的实现

在手征极限下，系统拉氏量 (1.9) 具有 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，但当考虑夸克凝聚的时候，基态只有 $SU(3)_V \times U(1)_V$ 的对称性，系统的对称性发生了自发破缺，生成了 8 个无质量的 Goldstone 玻色子。由于真实的夸克带有微小质量，因此拉氏量不具备严格的 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，破缺得到的 Goldstone 玻色子带有质量。

一般考虑，假设有大群 G，以及它的子群 H，拉氏量具有群 G 对称性，基态具有群 H 对称性，则会生成 $n = n_G - n_H$ 个 Goldstone 玻色子，每个 Goldstone 玻色子用 $\phi_i$ 标记，为光滑实函数，$i = 1, ..., n$，定义一个 n 分量的矢量 $\mathbf{\Phi} = (\phi_1, ..., \phi_n)$，接着定义一个实向量空间

$$M_1 = \{\mathbf{\Phi} : M^4 \to \mathbb{R}^{\ltimes} | \phi_i : M^4 \to R\} \tag{1.17}$$

定义一个映射 $\varphi : G \times M_1 \to M_1$，满足

- $\varphi(e, \mathbf{\Phi}) = \mathbf{\Phi}$
- $\varphi(g_1, \varphi(g_2, \mathbf{\Phi})) = \varphi(g_1 g_2, \mathbf{\Phi})$

用$\mathbf{\Phi}$表示 $M_1$ 中的原点，对应系统的基态构型，则对于 $\forall h \in H$，存在 $\varphi(h, 0) = 0$，从而可以建立起 $G/H$ 陪集与 Goldstone 玻色子之间的同构关系。可以验证，对于同一陪集中的元素，原点被映射到同一矢量，而不同陪集中的元素将原点映射到不同矢量。

考查 Goldstone 玻色子在群 G 下的变换行为，对于每一个 $\mathbf{\Phi}$ 有一个陪集 $\tilde{g}H$ 与之对应，表示为

$$\varphi(g, \mathbf{\Phi}) = \varphi(\tilde{g}h, 0)$$

接着用 $\varphi(g)$ 作用到 $\mathbf{\Phi}$ 上

$$\varphi(g, \mathbf{\Phi}) = \varphi(g, \varphi(\tilde{g}h, 0)) = \mathbf{\Phi}'$$

即存在关系

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Phi} & \xrightarrow{g} & \mathbf{\Phi}' \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tilde{g}H & \xrightarrow{g} & g\tilde{g}H \end{array}$$

### 2.1　QCD 中的 Goldstone 玻色子

# 参考文献

[1] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.