

手征微扰场论

王旭

2021 年 12 月 22 日

目录

1	介绍	1
1	简介	1
2	流代数	2
2	介子的手征拉氏量	5
1	手征的 power-counting	5
2	外源	5
3	两个常数	7
4	最低阶手征拉氏量	9
5	$\pi - \pi$ 散射的例子	9
6	超出领头阶	12
3	重子	17
1	拉氏量	17
2	Goldberger-Treiman 关系	18
3	πN 散射	19

1 介绍

该章主要参考 [1] [2]。

1 简介

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 (\bar{q}_i i \not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (1.1)$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$, $T^a = \lambda^a/2$ 。仅考虑动能项时, 具有 $U(3)_L \times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏, 系统的对称群为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$, 其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在, $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 遭到了破坏, 但当粒子质量相同时, 依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项,

$$\sum_i m_i \bar{q}_i q_i = \sum_{i,j} \bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} \quad (1.2)$$

其中 $M = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 。如果我们将质量项升级为场, 在最后结果的时候在取回常数, 并假设其在手征变换下进行如下变换,

$$M \rightarrow RML^\dagger \quad (1.3)$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 变换下不变, 由于质量项引起的系统对称性破缺是显式破缺。

但除质量项的显式破缺外, 当考虑夸克凝聚的时候, 系统也会自发破缺, 考虑 QCD 真空

$$\langle 0 | \bar{q}_{R,i} q_{L,j} | 0 \rangle = \Lambda^3 \delta_{ij} \quad (1.4)$$

其中 Λ 具有质量量纲 [3]。上式在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下按照 $(3, \bar{3})$ 变换如下,

$$L_{im} \langle 0 | \bar{q}_{R,n} q_{L,m} | 0 \rangle R_{nj}^\dagger = \Lambda^3 U_{ij} \quad (1.5)$$

其中 $U_{ij} = (LR^\dagger)_{ij}$ 为 $SU(3)$ 中的矩阵。当 $L = R$ 时, $\Sigma_{ij} = \delta_{ij}$, 对应真空没有变化, 说明 QCD 凝聚在 $SU(3)_V$ 下不变。当 $L \neq R$ 时, Σ_{ij} 代表此时系统已经变换到了一个和 (1.4) 不同的真空。如果此时没有质量项的显式破缺, 则两个真空简并。

我们可以采用和质量类似的方式, 将 U 升级为场, 并将其参数化为

$$U(x) = \exp\left[\frac{2i}{f} \phi(x)\right], \quad \phi(x) = T^a \phi^a(x) \quad (1.6)$$

其中, $\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子, T^a 是 $SU(3)$ 群的生成元。

当 $N=2$ 时,

$$\phi \equiv \sum_{a=1}^3 \phi_a \sigma^a = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

当 $N=3$ 时,

$$\phi \equiv \sum_{a=1}^8 \phi_a \lambda^a = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

2 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前, 我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下, 拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

由于上述协变导数是作用到色空间中, 因此在 $U(3)_L \times U(3)_R$ 味群作用下保持不变。

考虑整体的 $U(3)_L \times U(3)_R$ 群变换, 则场的变化如下

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\varepsilon_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\varepsilon_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

拉氏量的变换为

$$\delta \mathcal{L}_0 = \bar{q}_R \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R \right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_L \right) \gamma^\mu q_L \quad (1.11)$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$L_a^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R$$

$$L^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \quad (1.12)$$

其中带有下指标 a 的流称为八重态, 不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q \quad (1.13)$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \quad (1.14)$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒, 对应重子数守恒, 而单态轴矢流在考虑量子修正之后出现反常 $\partial_\mu A^\mu = \frac{3g_3^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\rho\sigma}$ 。

但是实际的 QCD 是具有质量项的, 因此手征对称性遭到破坏, 矢量流和轴矢流在经典情况下也不严格守恒, 有

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_a^\mu &= i\bar{q} \left[\mathcal{M}, \frac{\lambda_a}{2} \right] q, \\ \partial_\mu A_a^\mu &= i\bar{q} \gamma_5 \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M} \right\} q, \\ \partial_\mu V^\mu &= 0, \\ \partial_\mu A^\mu &= 2i\bar{q} \gamma_5 \mathcal{M} q, \end{aligned} \quad (1.15)$$

其中 $\mathcal{M} = \text{diag}\{m_u, m_d, m_s\}$ 为质量矩阵。可以看出, 如果三种夸克质量一样, 则质量矩阵为单位矩阵, 矢量流严格守恒。如果质量矩阵很小, 矢量流和轴矢流也近似守恒。由于 u、d 夸克质量相近, 且远小于 s 夸克质量, 因此 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 群对称性就比 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称性要好很多。

根据 (1.12) 定义三个荷算符:

$$\begin{aligned} Q_{La}(t) &= \int d^3x q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t, \vec{x}) \\ Q_{Ra}(t) &= \int d^3x q_R^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_R(t, \vec{x}) \\ Q_V(t) &= \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) q(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{aligned} [Q_{La}, Q_{Lb}] &= if_{abc} Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = if_{abc} Q_{Rc} \\ [Q_{La}, Q_{Rb}] &= [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

验证第一个对易关系:

$$\begin{aligned} [Q_{La}, Q_{Lb}] &= \int d^3x d^3y \left[q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t, \vec{x}), q_L^\dagger(t, \vec{y}) \frac{\lambda_b}{2} q_L(t, \vec{y}) \right] \\ &= \int d^3x d^3y \left[q^\dagger(t, \vec{x}) P_L \frac{\lambda_a}{2} q(t, \vec{x}), q^\dagger(t, \vec{y}) P_L \frac{\lambda_b}{2} q(t, \vec{y}) \right] \\ &= \int d^3x d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) q^\dagger(t, \vec{x}) P_L \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} q(t, \vec{y}) \\ &\quad - \int d^3x d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) q^\dagger(t, \vec{y}) P_L \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} q(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

$$=if_{abc} \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) P_L \frac{\lambda_c}{2} q(t, \vec{x}) = if_{abc} Q^{Lc}$$

除此之外，还可以得到流之间的对易关系如下：

$$\begin{aligned}
[V_a^0(t, \vec{x}), V_b^\mu(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) if_{abc} V_c^\mu(t, \vec{X}), \\
[V_a^0(t, \vec{x}), V^\mu(t, \vec{y})] &= 0, \\
[V_a^0(t, \vec{x}), A_b^\mu(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) if_{abc} A_c^\mu(t, \vec{X}), \\
[A_a^0(t, \vec{x}), V_b^\mu(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) if_{abc} A_c^\mu(t, \vec{X}), \\
[A_a^0(t, \vec{x}), V^\mu(t, \vec{y})] &= 0, \\
[A_a^0(t, \vec{x}), A_b^\mu(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) if_{abc} V_c^\mu(t, \vec{X}).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

2 介子的手征拉氏量

1 手征的 power-counting

手征拉氏量一般具有如下形式

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \cdots, \quad (2.1)$$

其中只包含偶数项。这主要是由于 Lorentz 不变性以及质量项是 $\sim \mathcal{O}(q^2)$ 的。

对于给定费曼图，在 $p_i \mapsto tp_i$ 以及 $m_q \mapsto t^2 m_q$ 变换下，若不变振幅变换如下

$$M(tp_i, t^2 m_q) = t^D M(p_i, m_q), \quad (2.2)$$

则称 D 是一个图的手征阶数。手征阶数的计算公式如下

$$D = nN_L - 2N_I + \sum_{k=1}^{\infty} 2kN_{2k}, \quad (2.3)$$

其来源简单阐述如下，在上述标度变化下，传播子的变换如下

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} &\mapsto \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{t^2(k^2/t^2 - M^2 + i\epsilon)} \\ &\stackrel{k=tk'}{=} t^{n-2} \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{i}{k'^2 - M^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

因此内线的变换为 t^{n-2} ，而顶点的变换为

$$\delta^n(q) q^{2k} \mapsto t^{2k-n} \delta^n(q) q^{2k}, \quad (2.5)$$

因此内线的变化为 t^{2k-n} ，此外由于散射矩阵的不变性，以及 $S \sim \delta^n(q)M$ ，因此需要加上一个 n 来补偿 δ 函数的影响，此时我们可以得到

$$D = n + (n-2)N_I + \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}(2k-n). \quad (2.6)$$

再考虑到一张图中独立圈数、内线数、顶点数之间的关系 $N_L = N_I - (N_V - 1)$ ，其中 $N_V = \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}$ ，即可得到上式。

2 外源

该章主要参考 [1]。

通常在量子场论中，紫外的微观理论与红外的理论可以截然不同，如 QCD。低能有效作用量是通过积掉一些高能自由度来得到的。但是在实际操作中很难实行，我们往往首先猜测红外的场以及可能的对称性，然后写下与对称性自洽的有效作用，最后再在实验中进行检验。

首先考虑 QCD 的拉氏量如下,

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{i=1}^3 \bar{q}_i i \not{D} q_i - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu}, \quad (2.7)$$

上述拉氏量具有 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的味道对称性, 如果想要引入局域的味道空间的变换, 我们需要引入以下外源 (类似于规范理论中的规范场) [4] [5],

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \mathcal{L}_{ext}, \quad (2.8)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ext} = & \sum_{a=1}^8 v_a^\mu \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda_a}{2} q + v_{(s)}^\mu \frac{1}{3} \bar{q} \gamma_\mu q + \sum_{a=1}^8 a_a^\mu \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \\ & - \sum_{a=0}^8 s_a \bar{q} \lambda_a q + \sum_{a=0}^8 p_a i \bar{q} \gamma_5 \lambda_a q \\ = & \bar{q} \gamma_\mu \left(v^\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu \right) q - \bar{q} (s - i \gamma_5 p) q, \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中

$$v_\mu = v_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, a_\mu = a_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, s_\mu = s_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, p_\mu = p_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, \quad (2.10)$$

分别是引入的矢量、轴矢量、标量和赝标量外场。当我们取外源 $v^\mu = v_{(s)}^\mu = a^\mu = p = 0$ 以及 $s = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 是, 上述拉氏量回到原始 QCD 拉氏量。

我们可以将上述拉氏量通过手征投影算符改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{QCD}^0 + \bar{q}_L \gamma^\mu \left(l_\mu + \frac{1}{3} v_\mu^{(s)} \right) q_L + \bar{q}_R \gamma_\mu \left(r_\mu + \frac{1}{3} v_\mu^{(s)} \right) \\ & - \bar{q}_R (s + i p) q_L - \bar{q}_L (s - i p) q_R, \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 $r_\mu = v_\mu + a_\mu, l_\mu = v_\mu - a_\mu$ 。如果想要上述拉氏量在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下保持不变, 即

$$\begin{aligned} q_R & \mapsto V_R(x) q_R \\ q_L & \mapsto V_L(x) q_L, \end{aligned} \quad (2.12)$$

则需要外场作如下变换

$$\begin{aligned} r_\mu & \mapsto V_R r_\mu V_R^\dagger + i V_R \partial_\mu V_R^\dagger, \\ l_\mu & \mapsto V_L l_\mu V_L^\dagger + i V_L \partial_\mu V_L^\dagger, \\ v_\mu^{(s)} & \mapsto v_\mu - \partial_\mu \Theta, \\ s + i p & \mapsto V_R (s + i p) V_L^\dagger, \\ s - i p & \mapsto V_L (s - i p) V_R^\dagger. \end{aligned} \quad (2.13)$$

除了要求拉氏量在上述局域 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下保持不变之外, 我们还要求拉氏量能够满足 C、P、T 对称。由于 CPT 定理的存在, 因此我们可以只考虑 C、P 变换下上述外场的变换情况。

在 P 变换下, 夸克场和拉氏量的变换为

$$q_f(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \gamma_0 q_f(t, -\vec{x}), \mathcal{L}(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \mathcal{L}(t, -\vec{x}), \quad (2.14)$$

因此外场的变换为

$$v^\mu \xrightarrow{P} v_\mu, v_\mu^{(s)} \xrightarrow{P} v_\mu^{(s)}, a^\mu \xrightarrow{P} -a_\mu, s \xrightarrow{P} s, p \xrightarrow{P} -p. \quad (2.15)$$

同理可得 C 变换下外场的变换为

$$v_\mu \xrightarrow{C} -v_\mu^T, v_\mu^{(s)} \xrightarrow{C} -v_\mu^{(s)T}, a_\mu \xrightarrow{C} a_\mu^T, s \xrightarrow{C} s^T, p \xrightarrow{C} p^T. \quad (2.16)$$

考虑一个简单的例子, QED 是 U(1) 规范理论, 而 U(1) 群是 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的子群。我们可以令

$$r_\mu = l_\mu = -e\mathcal{A}_\mu Q, \quad (2.17)$$

其中 $Q = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$, 此时可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ext}} &= -e\mathcal{A}_\mu (\bar{q}_L Q \gamma_\mu q_L + \bar{q}_R Q \gamma_\mu q_R) = -e\mathcal{A}_\mu \bar{q} Q \gamma_\mu q \\ &= -e\mathcal{A}_\mu \left(\frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma_\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma_\mu s \right) = -e\mathcal{A}_\mu J^\mu, \end{aligned} \quad (2.18)$$

即光子场和夸克场的耦合。

3 两个常数

首先我们已经将破缺的 8 个 Goldstone 玻色子参数化为

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\phi(x)}{F_0}\right), \quad (2.19)$$

其中 ϕ 取自 (1.8) 式, F_0 为手征极限下 π 介子的真空衰变常数, 带有质量量纲。U 在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 群下的变换方式为

$$U(x) \mapsto RU(x)L^\dagger. \quad (2.20)$$

此时, 我们能写下的包含最少导数且保证手征不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger). \quad (2.21)$$

考虑无穷小的 $SU(3)_L$ 变换, 可以得到左手流为

$$J_{La}^\mu = i \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a \partial^\mu U^\dagger U), \quad (2.22)$$

同理可得右手流为

$$J_{Ra}^\mu = -i\frac{F_0^2}{4}\text{Tr}(\lambda_a U \partial^\mu U^\dagger). \quad (2.23)$$

定义矢量流和轴矢流分别为

$$J_{Va}^\mu = J_{Ra}^\mu + J_{La}^\mu = -i\frac{F_0^2}{4}\text{Tr}(\lambda_a [U, \partial^\mu U^\dagger]), \quad (2.24)$$

$$J_{Aa}^\mu = J_{Ra}^\mu - J_{La}^\mu = -i\frac{F_0^2}{4}\text{Tr}(\lambda_a \{U, \partial^\mu U^\dagger\}). \quad (2.25)$$

将 U 做泰勒展开, 我们可以得到轴矢流最低阶为

$$J_{Aa}^\mu = -F_0 \partial^\mu \phi_a + \dots, \quad (2.26)$$

此时我们可以计算轴矢流在 Goldstone 玻色子和真空态之间的矩阵元为

$$\langle 0 | J_{Aa}^\mu(x) | \phi_b(p) \rangle = \langle 0 | -F_0 \partial^\mu \phi_a(x) | \phi_b(x) \rangle = ip^\mu F_0 \exp(-ip \cdot x) \delta_{ab}, \quad (2.27)$$

从中我们可以看到 F_0 的物理意义。

严格的对称性破缺我们可以得到严格的零质量 Goldstone 玻色子, 但是通过实验我们知道 π, K 等介子是有质量的, 因此我们必须引入 QCD 中显式的质量破缺项, 且假设质量矩阵按照 (1.3) 进行变换。则此时我们能写下的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}(\mathcal{M} U^\dagger + U \mathcal{M}^\dagger), \quad (2.28)$$

其中下标 s.b. 代表对称性破缺。通过比较其基态能量密度关于夸克质量的导数和 QCD 中相应量

$$\langle \mathcal{H}_{\text{eff}} \rangle_{\min} = -F_0^2 B_0 (m_u + m_d + m_s), \quad (2.29)$$

$$\left. \frac{\partial \langle 0 | \mathcal{H}_{\text{QCD}} | 0 \rangle}{\partial m_q} \right|_{m_u=m_d=m_s=0} = \frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle_0 \quad (2.30)$$

可得,

$$3F_0^2 B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle_0, \quad (2.31)$$

即 B_0 与标量单态夸克凝聚有关。

接着将 U 进行泰勒展开, 我们可以得到

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = -\frac{B_0}{2} \text{Tr}(\phi^2 \mathcal{M}) + \dots \quad (2.32)$$

代入 (1.8) 式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\phi^2 \mathcal{M}) = & 2(m_u + m_d) \pi^+ \pi^- + 2(m_u + m_s) K^+ K^- + 2(m_d + m_s) K^0 \bar{K}^0 \\ & + (m_u + m_d) \pi^0 \pi^0 + \frac{2}{\sqrt{3}} (m_u - m_d) \pi^0 \eta + \frac{m_u + m_d + 4m_s}{3} \eta^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

为简单起见, 令 $m_u = m_d = \hat{m}$, 因此我们可以得到在最低阶 Goldstone 玻色子质量和夸克质量的关系

$$M_\pi^2 = 2B_0\hat{m}, \quad (2.34)$$

$$M_k^2 = B_0(\hat{m} + m_s), \quad (2.35)$$

$$M_\eta^2 = \frac{2}{3}B_0(\hat{m} + 2m_s). \quad (2.36)$$

此时我们可以得到著名的 Gell-Mann-Okubo 关系:

$$4M_K^2 = 3M_\eta^2 + M_\pi^2. \quad (2.37)$$

4 最低阶手征拉氏量

有了上面的准备之后, 我们就可以开始构造手征拉氏量了。

首先, 我们需要定义场算符的协变导数, 以场算符 A 为例, 协变导数为

$$D_\mu A = \partial_\mu A - i r_\mu A + i A l_\mu. \quad (2.38)$$

可以验证, 协变导数在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 群下的变换方式为

$$D_\mu A \mapsto R(D_\mu A)L^\dagger. \quad (2.39)$$

由于有效拉氏量中会包含任意高阶的导数项, 因此我们还需要引入外场的场强张量

$$f_{R\mu\nu} = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \quad (2.40)$$

$$f_{L\mu\nu} = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu]. \quad (2.41)$$

接着我们定义一个标量和赝标量外场的线性组合项 $\chi = 2B_0(s + ip)$ 。

由于手征拉氏量是按照外动量阶数展开的, 因此我们需要知道它们关于外动量的阶数, 如下所示,

$$U = \mathcal{O}(q^0), D_\mu U = \mathcal{O}(q), r_\mu, l_\mu = \mathcal{O}(q), f_{L,R\mu\nu} = \mathcal{O}(q^2), \chi = \mathcal{O}(q^2), \quad (2.42)$$

因此可以写出满足对称性要求的二阶的手征拉氏量如下 [5],

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger], \quad (2.43)$$

在这里我们舍弃了不满足 P 宇称的 $\text{Tr}[\chi U^\dagger - U \chi^\dagger]$ 项, 其中包含两个低能常数 F_0 和 B_0 。

5 $\pi - \pi$ 散射的例子

考虑一个 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 的二阶拉氏量, 即 $m_u = m_d = 0$, 而 m_s 依旧取其物理值, 且令 $r_\mu = l_\mu = 0$,

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger), \quad (2.44)$$

其中

$$\chi = 2B\mathcal{M} = 2B \begin{pmatrix} \hat{m} & 0 \\ 0 & \hat{m} \end{pmatrix},$$

$$U = \exp\left(i\frac{\phi}{F}\right), \phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i \tau_i = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix},$$

不带有下标 0 的 F 和 B 表示我们此时考虑的对称性是 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 。我们将

$$U = 1 + i\frac{\phi}{F} - \frac{1}{2}\frac{\phi^2}{F^2} - \frac{i}{6}\frac{\phi^3}{F^3} + \frac{1}{24}\frac{\phi^4}{F^4} + \dots \quad (2.45)$$

代入, 可得

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2^{2\phi} + \mathcal{L}_2^{4\phi} + \dots, \quad (2.46)$$

因为 \mathcal{L} 不包含三点相互作用, 因此最低阶相互作用项为

$$\mathcal{L}_2^{4\phi} = \frac{1}{6F^2}(\phi_i \partial^\mu \phi_i \partial_\mu \phi_j \phi_j - \phi_i \phi_i \partial_\mu \phi_j \partial^\mu \phi_j) + \frac{M^2}{24F^2} \phi_i \phi_i \phi_j \phi_j, \quad (2.47)$$

其中 $M^2 = 2B\hat{m}$ 。

我们可以计算上述相互作用项的矩阵元, 例如

$$\langle p_c, c; p_d, d | \phi_i \partial^\mu \phi_i \partial_\mu \phi_j \phi_j | p_a, a; p_b, b \rangle \quad (2.48)$$

的收缩方式共 24 种, 以其中一种为例

$$\begin{aligned} & \langle p_c, c; p_d, d | \phi_i \partial^\mu \phi_i \partial_\mu \phi_j \phi_j | p_a, a; p_b, b \rangle \\ & \Rightarrow \delta_{ic} i p_d^\mu \delta_{id} (-i p_{a\mu} \delta_{ja} \delta_{jb}) = p_a \cdot p_d \delta_{ab} \delta_{cd} \end{aligned}$$

因此对应如图1所示的费曼图, 可以得到其散射振幅为

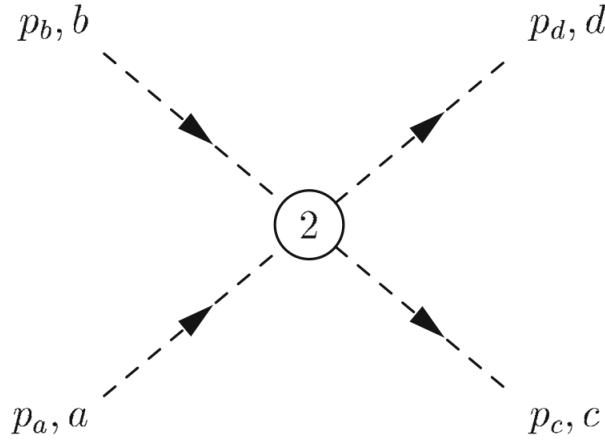
$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & i \left[\delta_{ab} \delta_{cd} \frac{s - M^2}{F^2} + \delta_{ac} \delta_{bd} \frac{t - M^2}{F^2} + \delta_{ad} \delta_{bc} \frac{u - M^2}{F^2} \right] \\ & - \frac{i}{3F^2} (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) (\Lambda_a + \Lambda_b + \Lambda_c + \Lambda_d), \end{aligned} \quad (2.49)$$

其中 $\Lambda_k = p_k^2 - M^2$ 。通常对于 $\pi_a(p_a) + \pi_b(p_b) \rightarrow \pi_c(p_c) + \pi_d(p_d)$ 过程的 T 矩阵 ($\mathcal{M} = iT$) 可以参数化为

$$T_{ab;cd}(p_a, p_b; p_c, p_d) = \delta_{ab} \delta_{cd} A(s, t, u) + \delta_{ac} \delta_{bd} A(t, s, t) + \delta_{ad} \delta_{bc} A(u, t, s) \quad (2.50)$$

其中 $A(s, t, u) = A(s, u, t)$ 。可以看出在 $\mathcal{O}(q^2)$ 阶,

$$A(s, t, u) = \frac{s - M^2}{F^2}. \quad (2.51)$$

Figure 1: 最低阶 $\pi\pi$ 散射

除了手征之外，我们还通常利用同位旋对称性来研究 $\pi\pi$ 散射，在 $SU(2)$ 极限下， π 介子组成同位旋三重态，因此强相互作用是同位旋不变的。对于 T 矩阵，我们可以写出

$$\langle I', I'_3 | T | I, I_3 \rangle = T^I \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3} \quad (2.52)$$

因此 $\pi\pi$ 散射的同位旋振幅可以根据 (2.50) 式拆解为 [4]

$$\begin{aligned} T^{I=0} &= 3A(s, t, u) + A(t, u, s) + A(u, s, t), \\ T^{I=1} &= A(s, t, u) - A(u, s, t), \\ T^{I=2} &= A(t, u, s) + A(u, s, t). \end{aligned} \quad (2.53)$$

计算开启域附近的 T 矩阵，我们可以得到 s 波的散射长度

$$T^{I=0}|_{\text{thr}} = 32\pi a_0^0, \quad T^{I=2}|_{\text{thr}} = 32\pi a_0^2, \quad (2.54)$$

其中 a 的上标代表同位旋，下标代表 s 波散射。由于玻色对称性， $T^{I=1} = 0$ 。结合手征理论，我们可以得到两个散射长度的值。

首先，我们有

$$A(s_{\text{thr}}, t_{\text{thr}}, u_{\text{thr}}) = \frac{3M_\pi^2}{F_\pi^2}, \quad (2.55)$$

其中 F_π 、 M_π 和 F 、 M 的区别仅在 $\mathcal{O}(p^4)$ 开始显现。在这里，我们先用带有下标的表示。因此，对于不同的同位旋振幅我们有

- I=0:

$$\begin{aligned}
T^{I=0}|_{\text{thr}} &= [3A(s, t, u) + A(t, u, s) + A(u, s, t)]|_{\text{thr}} \\
&= [2A(s, t, u) + A(s, t, u) + A(t, u, s) + A(u, s, t)]|_{\text{thr}} \\
&= \frac{6M_\pi^2}{F_\pi^2} + \frac{[s + t + u - 3M_\pi^2]|_{\text{thr}}}{F_\pi^2} \\
&= \frac{7M_\pi^2}{F_\pi^2}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

- I=2:

$$\begin{aligned}
T^{I=2}|_{\text{thr}} &= [A(t, u, s) + A(u, s, t)]|_{\text{thr}} \\
&= [A(t, u, s) + A(u, s, t) + A(s, t, u) - A(s, t, u)]|_{\text{thr}} \\
&= \frac{M_\pi^2}{F_\pi^2} - \frac{3M_\pi^2}{F_\pi^2} \\
&= -\frac{2M_\pi^2}{F_\pi^2}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

代回 (2.54) 式, 我们可以得到

$$a_0^0 = \frac{7M_\pi^2}{32F_\pi^2} = 0.159, \quad a_0^2 = -\frac{M_\pi^2}{16\pi F_\pi^2} = -0.0454, \tag{2.58}$$

在这里我们代入了 $F_\pi = 92.4\text{MeV}$ 和 $M_\pi = M_{\pi^+} = 139.57\text{MeV}$ 。

6 超出领头阶

我们在这里直接给出 $\mathcal{O}(q^4)$ 的拉氏量 [5]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 &= L_1 \left\{ \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \right\}^2 + L_2 \text{Tr}[D_\mu (D_\nu U)^\dagger] \text{Tr}[D^\mu U (D^\nu U)^\dagger] \\
&\quad + L_3 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger] + L_4 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \\
&\quad + L_5 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)] + L_6 [\text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)]^2 \\
&\quad + L_7 [\text{Tr}(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger)]^2 + L_8 \text{Tr}(U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) \\
&\quad - iL_9 \text{Tr}[f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger D^\nu U] + L_{10} \text{Tr}(U f_{\mu\nu}^L U^\dagger f_R^{\mu\nu}) \\
&\quad + H_1 \text{Tr}(f_{\mu\nu}^R f_R^{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^L f_L^{\mu\nu}) + H_2 \text{Tr}(\chi \chi^\dagger).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

这里每项前面的系数同 F_0 和 B_0 一样, 目前没法通过理论决定, 只能由实验给出。

$\mathcal{O}(q^4)$ 阶的 Goldstone 玻色子的质量

为了计算 Goldstone 玻色子的自能, 在这里我们忽略外场, 且假设 $m_u = m_d = \hat{m}$, m_s 取其物理质量。首先, 最低阶拉氏量给出的费曼传播子为

$$\Delta_{F\phi}(p) = \frac{1}{p^2 - M_{\phi,2}^2} + i\epsilon, \quad \phi = \pi, K, \eta, \tag{2.60}$$

Figure 2: $\mathcal{O}(q^4)$ 阶的自能图

其中 $M_{\pi,2}^2 = 2B_0\hat{m}$, $M_{K,2}^2 = B_0(\hat{m} + m_s)$, $M_{\eta,2}^2 = \frac{2}{3}B_0(\hat{m} + 2m_s)$, 下标 2 表示手征二阶给出的结果。用 $-\mathrm{i}\Sigma_\phi(p^2)$ 代表单粒子不可约图, 则完整的传播子为

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\Delta_\phi(p) &= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \frac{\mathrm{i}}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + \mathrm{i}\epsilon} [-\mathrm{i}\Sigma_\phi(p^2)] \frac{\mathrm{i}}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \cdots \\ &= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - M_{\phi,2}^2 - \Sigma_\phi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

物理质量定义在传播子的极点处

$$M_\phi^2 - M_{\phi,2}^2 - \Sigma_\phi(M_\phi^2) = 0 \quad (2.62)$$

$\mathcal{O}(q^4)$ 阶的自能图如图2所示, 由图可以看出, 我们需要的相互作用拉氏量应具有如下形式

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_2^{4\phi} + \mathcal{L}_4^{2\phi}, \quad (2.63)$$

其中的 $\mathcal{L}_2^{4\phi}$ 仿照 $\pi\pi$ 散射的例子可以给出如下

$$\mathcal{L}_2^{4\phi} = \frac{1}{48F_0^2} \left\{ \text{Tr}([\phi, \partial_\mu \phi][\phi, \partial^\mu \phi]) + 2B_0 \text{Tr}(\mathcal{M}\phi^4) \right\} \quad (2.64)$$

观察 $\mathcal{L}_4^{2\phi}$ 可以发现, 由于外场等于 0, 因此其中正比于 L_9, L_{10}, H_1, H_2 的项没有贡献。此外, L_1, L_2, L_3 的项都是 $\mathcal{O}(\phi^4)$ 的, 不需要考虑。因此对于 $\mathcal{L}_4^{2\phi}$ 有贡献的只能 $L_4 - L_8$ 项。以 L_4 为例,

$$\begin{aligned} L_4 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) &= L_4 \frac{2}{F_0^2} [\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 + 2\partial_\mu \pi^+ \partial_\mu \pi^- \\ &\quad + 2\partial_\mu K^+ \partial^\mu K^- + 2\partial_\mu K^0 \partial^\mu \bar{K}^0 + \mathcal{O}(\phi^4)] \\ &\quad \times [4B_0(2\hat{m} + m_s) + \mathcal{O}(\phi^2)]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

对其余项同样分析, 则可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{2\phi} &= -\frac{1}{2} (a_\pi \pi^0 \pi^0 + b_\pi \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0) - a_\pi \pi^+ \pi^- - b_\pi \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- \\ &\quad - a_K K^+ K^- - b_K \partial_\mu K^+ \partial^\mu K^- - a_K K^0 \bar{K}^0 - b_K \partial_\mu K^0 \partial^\mu \bar{K}^0 \\ &\quad - \frac{1}{2} (a_\eta \eta^2 + b_\eta \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta), \end{aligned} \quad (2.66)$$

其中

$$\begin{aligned}
a_\pi &= \frac{64B_0^2}{F_0^2} [(2\hat{m} + m_s)\hat{m}L_6 + \hat{m}^2L_8], \\
b_\pi &= -\frac{16B_0}{F_0^2} [(2\hat{m} + m_s)L_4 + \hat{m}L_5], \\
a_K &= \frac{32B_0^2}{F_0^2} \left[(2\hat{m} + m_s)(\hat{m} + m_s)L_6 + \frac{1}{2}(\hat{m} + m_s)^2L_8 \right], \\
b_K &= -\frac{16B_0}{F_0^2} \left[(2\hat{m} + m_s)L_4 + \frac{1}{2}(\hat{m} + m_s)L_5 \right], \\
a_\eta &= \frac{64B_0^2}{3F_0^2} \left[(2\hat{m} - m_s)(\hat{m} + 2m_s)L_6 + 2(\hat{m} - m_s)^2L_7 + (\hat{m}^2 + 2m_s^2)L_8 \right], \\
b_\eta &= -\frac{16B_0^2}{F_0^2} \left[(2\hat{m} + m_s)L_4 + \frac{1}{3}(\hat{m} + 2m_s)L_5 \right].
\end{aligned} \tag{2.67}$$

在 $\mathcal{O}(q^4)$ 阶，自能具有如下形式

$$\Sigma_{\phi,4}(p^2) = A_\phi + B_\phi p^2, \tag{2.68}$$

其中 A_ϕ, B_ϕ 来自 \mathcal{L}_2 的圈图和 \mathcal{L}_4 树图的贡献。树图水平 \mathcal{L}_4 的贡献很容易从拉氏量中直接读出，如 η 项

$$-i\Sigma_{\eta,4}^{\text{tree}}(p^2) = 2i \left[-\frac{1}{2}a_\eta - b_\eta \frac{1}{2}(ip_\mu)(-ip^\mu) \right] = -i(a_\eta + b_\eta p^2), \tag{2.69}$$

观察 $\mathcal{L}_2^{4\phi}$ ，我们可以发现只有 $\phi\phi\partial\phi\partial\phi$ 和 ϕ^4 项可能存在，其余交叉项在积分之后都会消失。以 π^0 的自能为例，我们在 (2.49) 中取 $a = c = 0, b = d = j, p_a = p_c = p, p_b = p_d = k$ ，然后对中间变量积分，可以得到

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{3F_0^2} \left(-4p^2 - 4k^2 + 5M_{\pi,2}^2 \right) \frac{i}{k^2 - M_{\pi,2}^2 + i\epsilon}, \tag{2.70}$$

其中 $1/2$ 是对称因子。

我们先将维数正规化中常用的公式先写下来，

$$I(M^2, \mu^2, n) = \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = \frac{M^2}{16\pi^2} \left[R + \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \right] + \mathcal{O}(n-4), \tag{2.71}$$

$$R = \frac{2}{n-4} - [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1]. \tag{2.72}$$

因此我们可以得到 π^0 的自能图为

$$\frac{i}{6F_0^2} (-4p^2 + M_{\pi,2}^2) I(M_{\pi,2}^2, \mu^2, n). \tag{2.73}$$

在考虑所有圈贡献之后，结合树图，我们可以得到

$$\begin{aligned}
A_\pi &= \frac{M_{\pi,2}^2}{F_0^2} \left\{ -\frac{1}{6}I(M_{\pi,2}^2) - \frac{1}{6}I(M_{\eta,2}^2) - \frac{1}{3}I(M_{K,2}^2) + 32[(2\hat{m} + m_s)B_0L_6 + \hat{m}B_0L_8] \right\}, \\
B_\pi &= \frac{2}{3} \frac{I(M_{\pi,2}^2)}{F_0^2} + \frac{1}{3} \frac{I(M_{K,2}^2)}{F_0^2} - \frac{16B_0}{F_0^2} [(2\hat{m} + m_s)L_4 + \hat{m}L_5],
\end{aligned} \tag{2.74}$$

其中带有 $I(M^2)$ 的项均来自于圈贡献，其余项来自树图贡献。同理可以得到其他介子的 A_ϕ, B_ϕ ，如下

$$\begin{aligned}
A_K &= \frac{M_{K,2}^2}{F_0^2} \left\{ \frac{1}{12} I(M_{\eta,2}^2) - \frac{1}{4} I(M_{\pi,2}^2) - \frac{1}{2} I(M_{K,2}^2) \right. \\
&\quad \left. + 32 \left[(2\hat{m} + m_s) B_0 L_6 + \frac{1}{2} (\hat{m} + m_s) B_0 L_8 \right] \right\} \\
B_K &= \frac{1}{4} \frac{I(M_{\eta,2}^2)}{F_0^2} + \frac{1}{4} \frac{I(M_{\pi,2}^2)}{F_0^2} + \frac{1}{2} \frac{I(M_{K,2}^2)}{F_0^2} - 16 \frac{B_0}{F_0^2} \left[(2\hat{m} + m_s) L_4 + \frac{1}{2} (\hat{m} + m_s) L_5 \right], \\
A_\eta &= \frac{M_{\eta,2}^2}{F_0^2} \left[-\frac{2}{3} I(M_{\eta,2}^2) \right] + \frac{M_{\pi,2}^2}{F_0^2} \left[\frac{1}{6} I(M_{\eta,2}^2) + \frac{1}{3} I(M_{K,2}^2) \right] \\
&\quad + \frac{M_{\eta,2}^2}{F_0^2} [16 M_{\eta,2}^2 L_8 + 32 (2\hat{m} + m_s) B_0 L_6] + \frac{128 B_0^2 (\hat{m} - m_s)^2}{9 F_0^2} (3L_7 + L_8), \\
B_\eta &= \frac{I(M_{K,2}^2)}{F_0^2} - \frac{16}{F_0^2} (2\hat{m} + m_s) B_0 L_4 - 8 \frac{M_{\eta,2}^2}{F_0^2} L_5.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

这些 A_ϕ, B_ϕ 显然都是发散的。

利用上面计算的结果我们就可以写出 $\mathcal{O}(q^4)$ 下的质量

$$M_\phi^2 = M_{\phi,2}^2 + A_\phi + B_\phi M_\phi^2 \tag{2.76}$$

$$\Rightarrow M_\phi^2 = \frac{M_{\phi,2}^2 + A_\phi}{1 - B_\phi} = M_{\phi,2}^2 (1 + B_\phi) + A_\phi + \mathcal{O}(q^6). \tag{2.77}$$

为抵消发散，重定义 L_i 系数为

$$L_i = L_i^r + \frac{\Gamma_i}{32\pi^2} R. \tag{2.78}$$

将相关数据绘制如表1

系数	经验数值	Γ_i
L_4^r	-0.3 ± 0.5	$\frac{1}{8}$
L_5^r	1.4 ± 0.5	$\frac{3}{8}$
L_6^r	-0.2 ± 0.3	$\frac{11}{144}$
L_7^r	-0.4 ± 0.2	0
L_8^r	-0.9 ± 0.3	$\frac{5}{48}$

Table 1: 系数重整化

我们将最后所得的结果展示如下

$$\begin{aligned}
M_{\pi,4}^2 &= M_{\pi,2}^2 \left\{ 1 + \frac{M_{\pi,2}^2}{32\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{M_{\pi,2}^2}{\mu^2}\right) - \frac{M_{\eta,2}^2}{96\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{16}{F_0^2} [(2\hat{m} + m_s) B_0 (2L_6^r - L_4^r) + \hat{m} B_0 (2L_8^r - L_5^r)] \right\},
\end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}
M_{K,4}^2 = & M_{K,2}^2 \left\{ 1 + \frac{M_{\eta,2}^2}{48\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{16}{F_0^2} \left[(2\hat{m} + m_s) B_0 (2L_6^r - L_4^r) + \frac{1}{2} (\hat{m} + m_s) B_0 (2L_8^r - L_5^r) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned}
M_{\eta,4}^2 = & M_{\eta,2}^2 \left[1 + \frac{M_{K,2}^2}{16\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{M_{K,2}^2}{\mu^2}\right) - \frac{M_{\eta,2}^2}{24\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{16}{F_0^2} (2\hat{m} + m_s) B_0 (2L_6^r - L_4^r) + 8 \frac{M_{\eta,2}^2}{F_0^2} (2L_8^r - L_5^r) \right] \\
& + M_{\pi,2}^2 \left[\frac{M_{\eta,2}^2}{96\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{M_{\pi,2}^2}{\mu^2}\right) - \frac{M_{\pi,2}^2}{32\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{M_{\pi,2}^2}{\mu^2}\right) + \frac{M_{K,2}^2}{48\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{M_{K,2}^2}{\mu^2}\right) \right] \\
& + \frac{128}{9} \frac{B_0^2 (\hat{m} - m_s)^2}{F_0^2} (3L_7^r + L_8^r).
\end{aligned} \tag{2.81}$$

3 重子

1 拉氏量

首先我们用 Ψ 表示核子二重态

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

我们知道在 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ 变换下, U 和核子二重态的变换规律为

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ \Psi(x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} V_R(x)U(x)V_L^\dagger(x) \\ \exp[-i\Theta(x)]K[V_L(x), V_R(x), U(x)]\Psi(x) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

其中 $K(L, R, U) = \sqrt{RUL^\dagger}^{-1}R\sqrt{U}$, 而 $\exp[-i\Theta(x)]$ 表示 $U(1)_V$ 的变换。

我们首先定义一个叫手征联络的量

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}[u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu) + u(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger], \quad (3.3)$$

其中 u 被定义为 $u^2 = U$ 。然后我们可以定义协变导数

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + \Gamma_\mu - iv_\mu^{(s)})\Psi. \quad (3.4)$$

可以证明

$$\begin{aligned} D'_\mu \Psi' &= [\partial_\mu + \Gamma'_\mu - i(v_\mu^{(s)} - \partial_\mu \Theta)] \exp(-i\Theta) K \Psi \\ &= \exp(-i\Theta) K (\partial_\mu + \Gamma_\mu - iv_\mu^{(s)}) \Psi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

除了手征联络之外, 我们再定义一个叫 chiral vielbein 的量

$$u_\mu = i[u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu)u - u(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger], \quad (3.6)$$

其在宇称变换下, 类似于轴矢流变换。

我们考虑 πN 相互作用的有效拉氏量, 其应该具有 $\bar{\Psi}\hat{O}\Psi$ 形式, 而 \hat{O} 在 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ 应按照 $K\hat{O}K^\dagger$ 这样变换。为了保证拉氏量是厄米的, 洛伦兹不变的, 且在 C 、 P 、 T 变换下具有偶宇称, 最简单的形式为 [6]

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m + \frac{g_A}{2}\gamma^\mu\gamma_5 u_\mu)\Psi. \quad (3.7)$$

其中包含两个低能有效常数, m : 核子的质量, g_A : 轴矢流耦合常数。这两个常数同样目前没法由理论给出, 只能从实验中得到。我们把这两个量的物理取值分别记为 $m = m_N$, $g_A = g_A$, g_A 可以从中子衰变实验中给出 $g_A = 1.2694 \pm 0.0028$ 。

2 Goldberger-Treiman 关系

利用 (3.7) 式来计算赧标密度和轴矢量流在单核子态之间的矩阵元,

$$\langle N(p') | \partial_\mu A_i^\mu(0) | N(p) \rangle = \langle N(p') | \hat{m} P_i(0) | N(p) \rangle, \quad (3.8)$$

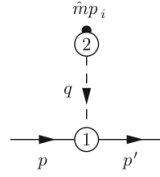
其中 $\hat{m} = m_u = m_d$ 。

赧标密度的矩阵元可以参数化为

$$\hat{m} \langle N(p') | P_i(0) | N(p) \rangle = \frac{M_\pi^2 F_\pi}{M_{\pi^2-t}} G_{\pi N}(t) i \bar{u}(p') \gamma_5 \tau_i u(p), \quad (3.9)$$

其中 $G_{\pi N}(t)$ 是与 $\hat{m} P_i(x)$ 相关的形状因子。而 $\hat{m} P_i(x)/(M_\pi^2 F_\pi)$ 代表内插场, 因此 $G_{\pi N}(t)$ 也表示 πN 的形状因子。而 πN 耦合常数 $g_{\pi N}$ 被定义为 $g_{\pi N} = G_{\pi N}(t = M_\pi^2)$ 。

在手征最低阶展开, 我们可以得到赧标密度和 π 介子场的耦合, 再结合 (3.7) 式, 我们可以得到如下所示费曼图 其中赧标场与 π 的耦合由下面的拉式量给出



$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = i \frac{F^2 B}{2} \text{Tr}(p U^\dagger - U p) = 2BF p_i \phi_i + \dots, \quad (3.10)$$

而 πNN 三点相互作用顶点由 (3.7) 给出, 展开后可以得到

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \frac{g_A}{F} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \phi_j \tau_j \Psi. \quad (3.11)$$

因此, 对于进入的 $\pi_i(q)$ 场, 费曼规则如下

$$i \left(-\frac{1}{2} \frac{g_A}{F} \right) \gamma^\mu \gamma_5 \tau_j \delta_{ji} (-i q_\mu) = -\frac{1}{2} \frac{g_A}{F} \not{q} \gamma_5 \tau_i. \quad (3.12)$$

最后图的结果为

$$\hat{m} 2BF \frac{i}{t - M^2} \bar{u}(p') \left(-\frac{1}{2} \frac{g_A}{F} \not{q} \gamma_5 \tau_i \right) u(p) = M^2 F \frac{m g_A}{F} \frac{1}{M^2 - t} \bar{u}(p') \gamma_5 i \tau_i u(p). \quad (3.13)$$

通过与 (3.9) 比较可得

$$G_{\pi N}(t) = \frac{m}{F} g_A. \quad (3.14)$$

一般情况下我们定义 $\pi - N$ 的耦合常数为

$$g_{\pi N} = G_{\pi N}(M_\pi^2) = \frac{m}{F} g_A, \quad (3.15)$$

上式即著名的 Goldberger-Treiman 关系。

3 πN 散射

考虑最低阶的 πN 耦合, 并且假设没有外场 $l_\mu = r_\mu = v_\mu^{(s)} = 0$, 因此有

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}(u^\dagger \partial_\mu u + u \partial_\mu u^\dagger), \quad u_\mu = i(u^\dagger \partial_\mu u - u \partial_\mu u^\dagger). \quad (3.16)$$

接着同样对 u 进行展开, 我们可以得到

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{(1)} = -\frac{g_A}{2F} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \phi_a \tau_a \Psi, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{L}_{\pi\pi NN}^{(1)} = -\frac{1}{4F^2} \epsilon_{abc} \bar{\Psi} \gamma^\mu \phi_a \partial_\mu \phi_b \tau_c \Psi. \quad (3.18)$$

其中第一项表示赝矢型相互作用, 而第二项表示接触相互作用。

从上面的拉氏量中, 我们可以得到如下的费曼规则:

1. 在三点相互作用中, 对于入射的 $\pi_a(q)$, 则写下 $-\frac{1}{2} \frac{g_A}{F} \not{q} \gamma_5 \tau_a$
2. 在接触相互作用中, 入射 $\pi_a(q)$, 出射 $\pi_b(q')$, 则可以写下

$$i\left(-\frac{1}{4F^2}\right) \gamma^\mu \epsilon_{cde} [\delta_{da} \delta_{eb} i q'_\mu + \delta_{db} \delta_{ea} (-i q_\mu)] \tau_c = \frac{\not{q} + \not{q}'}{4F^2} \epsilon_{abc} \tau_c. \quad (3.19)$$

在考虑 πN 散射的时候, 我们有如下图 因此我们的不变振幅 \mathcal{M} 有

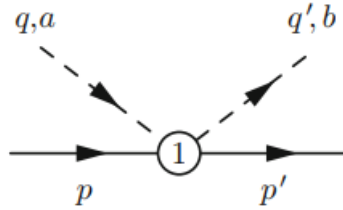


Figure 3: πN 接触项

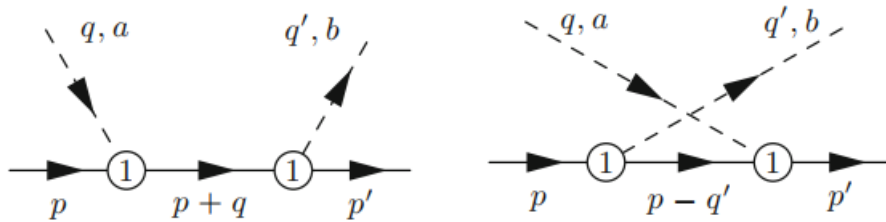


Figure 4: πN 的 s 道和 u 道

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{cont}} &= \bar{u}(p') \frac{\not{q} + \not{q}'}{4F^2} \epsilon_{abc} \tau_c u(p) = i \frac{1}{2F^2} \bar{u}(p') \frac{1}{2} (\not{q} + \not{q}') \frac{1}{2} [\tau_b, \tau_a] u(p), \\
\mathcal{M}_{s+u} &= i \frac{g_A^2}{4F^2} \bar{u}(p') (-\not{q}') \gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \not{q}' - m} \not{q} \gamma_5 \tau_b \tau_a u(p) \\
&\quad + i \frac{g_A^2}{4F^2} \bar{u}(p') \not{q} \gamma_5 \frac{1}{\not{p}' - \not{q} - m} (-\not{q}') \gamma_5 \tau_a \tau_b u(p).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

其中 s 和 u 道可以通过交换 $a \leftrightarrow b$ 和 $q \leftrightarrow -q'$ 得到, 因此我们可以只计算 s 道。使用狄拉克方程, 我们可以将 \mathcal{M}_s 化简到

$$\mathcal{M}_s = i \frac{g_A^2}{4F^2} \bar{u}(p') [(-\not{q}') + 4m^2 \gamma_5 \frac{1}{\not{p}' + \not{q}' - m} \gamma_5 + 2m] \tau_b \tau_a u(p) \tag{3.21}$$

在最低阶的树图水平上, 我们可以做 $m \rightarrow m_N, g_A \rightarrow g_A$ 替换, 利用

$$s - m_N^2 = 2m_N(\nu - \nu_B), \tag{3.22}$$

可以得到

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \gamma_5 \frac{1}{\not{p}' + \not{q}' - m_N} \gamma_5 u(p) &= \bar{u}(p') \gamma_5 \frac{\not{p}' + \not{q}' + m_N}{(p' + q')^2 - m_N^2} \gamma_5 u(p) \\
&= \frac{1}{2m_N(\nu - \nu_B)} \left[-\frac{1}{2} \bar{u}(p') (\not{q} + \not{q}') u(p) \right],
\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{s - u}{4m_N} = \frac{(p + p' \cdot q')}{2m_N}, \\
\nu_B &= -\frac{q \cdot q'}{2m_N} = \frac{t - 2M_\pi^2}{4m_N}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

最后我们得到 s 道极点的贡献

$$\mathcal{M}_s = i \frac{g_A^2}{4F_\pi^2} \bar{u}(p') \left[2m_N + \frac{1}{2} (\not{q} + \not{q}') \left(-1 - \frac{2m_N}{\nu - \nu_B} \right) \right] \tau_b \tau_a u(p). \tag{3.25}$$

做 $a \leftrightarrow b, q \leftrightarrow -q'$ 替换后, 我们可以直接得到 u 道的结果

$$\mathcal{M}_u = i \frac{g_A^2}{4F_\pi^2} \bar{u}(p') \left[2m_N + \frac{1}{2} (\not{q} + \not{q}') \left(1 - \frac{2m_N}{\nu + \nu_B} \right) \right] \tau_a \tau_b u(p). \tag{3.26}$$

除了手征之外, 我们简单介绍一下过程 $\pi_a(q) + N(p) \rightarrow \pi_b(q') + N(p')$ 的 T 振幅 ($\mathcal{M} = iT$):

$$\begin{aligned}
T_{ab}(p, q; p', q') &= \frac{1}{2} \{ \tau_b, \tau_a \} T^+(p, q; p', q') + \frac{1}{2} [\tau_b, \tau_a] T^-(p, q; p', q') \\
&= \delta_{ab} T^+(p, q; p', q') - i \epsilon_{abc} \tau_c T^-(p, q; p', q'),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

其中

$$T^\pm(p, q; p', q') = \bar{u}(p') \left[A^\pm(\nu, \nu_B) + \frac{1}{2} (\not{q} + \not{q}') B^\pm(\nu, \nu_B) \right] u(p). \tag{3.28}$$

由于 $\pi\pi$ 具有交叉对称性

$$T_{ab}(p, q; p', q') = T_{ba}(p, -q'; p', -q), \quad (3.29)$$

可以得到

$$\begin{aligned} A^+(-\nu, \nu_B) &= A^+(\nu, \nu_B), \quad A^-(-\nu, \nu_B) = -A^-(\nu, \nu_B), \\ B^+(-\nu, \nu_B) &= -B^+(\nu, \nu_B), \quad B^-(-\nu, \nu_B) = B^-(\nu, \nu_B). \end{aligned} \quad (3.30)$$

类似于 $\pi\pi$ 散射的同位旋分解, 对于 πN 散射, 我们有

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{2}} &= T^+ + 2T^-, \\ T^{\frac{3}{2}} &= T^+ - T^-. \end{aligned} \quad (3.31)$$

值得注意的是我们采用的 π^+ 场和通常采用的 π^+ 相差一个负号。

结合手征场论给出的结果, 我们可以得到 A^\pm, B^\pm , 绘制如表

振幅	PV	接触项	Sum
A^+	$\frac{g_A^2 m_N}{F_\pi^2}$	0	$\frac{g_A^2 m_N}{F_\pi^2}$
A^-	0	0	0
B^+	$-\frac{g_A^2}{F_\pi^2} \frac{m_N \nu}{\nu^2 - \nu_B^2}$	0	$-\frac{g_A^2}{F_\pi^2} \frac{m_N \nu}{\nu^2 - \nu_B^2}$
B^-	$-\frac{g_A^2}{F_\pi^2} \frac{m_N \nu_B}{\nu^2 - \nu_B^2} - \frac{g_A^2}{2F_\pi^2}$	$\frac{1}{2F_\pi^2}$	$\frac{1-g_A^2}{2F_\pi^2} - \frac{g_A^2}{F_\pi^2} \frac{m_N \nu}{\nu^2 - \nu_B^2}$

为了提取出散射长度, 我们讨论阈值附近的动力学

$$\nu|_{\text{thr}} = M_\pi \quad (3.32)$$

采用归一化方式

$$u(p) \rightarrow \sqrt{2m_N} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}' \rightarrow \sqrt{2m_N} (\chi'^\dagger \ 0) \quad (3.33)$$

可以得到

$$T|_{\text{thr}} = 2m_N \chi'^\dagger [\delta_{ab}(A^+ + M_\pi B^+) - i\epsilon_{abc}\tau_c(A^- + M_\pi B^-)]_{\text{thr}} \chi \quad (3.34)$$

代入

$$[\nu^2 - \nu_B^2]|_{\text{thr}} = M_\pi^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right), \quad \mu = \frac{M_\pi}{m_N} = \frac{1}{7}, \quad (3.35)$$

可以得到

$$\begin{aligned} T|_{\text{thr}} &= 2m_N \chi'^\dagger \left[\delta_{ab} \left(\frac{g_A^2 m/4N}{F_\pi^2} + M_\pi \left(-\frac{g_A^2}{F_\pi^2} \right) \frac{m_N}{M_\pi} \frac{1}{1 - \mu^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - i\epsilon_{abc}\tau_c M_\pi \left[\frac{1}{2F_\pi^2} - \frac{g_A^2}{2F_\pi^2} - \frac{g_A^2}{F_\pi^2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{1 - \mu^2/4} \right] \chi \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

质心系中微分散射截面有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{q}'|}{|\vec{q}|} \left(\frac{1}{8\pi\sqrt{s}} \right)^2 |T|^2, \quad (3.37)$$

在开启阈处

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \big|_{\text{thr}} = \left(\frac{1}{8\pi(m_N + M_\pi)} \right)^2 |T|_{\text{thr}}^2 = |a|^2. \quad (3.38)$$

s 波散射长度被定义为

$$a_{0+}^\pm = \frac{1}{8\pi(m_N + M_\pi)} T^\pm \big|_{\text{thr}} = \frac{1}{4\pi(1 + \mu)} [A^\pm + M_\pi B^\pm] \big|_{\text{thr}}, \quad (3.39)$$

下标 0+ 分别表示 s 波和总轨道角动量。代入 A, B 的值，我们有

$$a_{0+}^- = \frac{M_\pi}{8\pi(1 + \mu)F_\pi^2} [1 + \mathcal{O}(q^2)], \quad (3.40)$$

$$a_{0+}^+ = -\frac{g_A^2 M_\pi}{16\pi(1 + \mu)F_\pi^2} \frac{\mu}{1 - \mu^2/4} \sim \mathcal{O}(q^2). \quad (3.41)$$

如果代入 $a^{\frac{1}{2}} = a_{0+}^+ + 2a_{0+}^-$, $a^{\frac{3}{2}} = a_{0+}^+ - a_{0+}^-$, 则可以验证 Weiberg-Tomozawa 关系。

$$a^I = -\frac{M_\pi}{8\pi(1 + \mu)F_\pi^2} \left[I(I + 1) - \frac{3}{4} - 2 \right], \quad (3.42)$$

其中 I 是总同位旋。

参考文献

- [1] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] 郑汉青. 量子场论: 上. 北京大学出版社, 2018.
- [3] David B Kaplan. lectures on effective field theory” . *arXiv preprint nuclth/0510023*, 5, 5.
- [4] J Gasser and H Leutwyler. Chiral perturbation theory to one loop. *Annals of Physics*, 158(1):142–210, 1984.
- [5] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark. *Nuclear Physics B*, 250(1):465–516, 1985.
- [6] J Gasser, ME Sainio, and A Švarc. Nucleons with chiral loops. *Nuclear Physics B*, 307(4):779–853, 1988.