

# 手征微扰场论

王旭

2021 年 9 月 12 日

## 目录

<b>1</b>	<b>有效量子力学</b>	<b>2</b>
1	1D 散射 . . . . .	2
1.1	利用 $\delta$ 函数来模仿方势阱 . . . . .	2
2	3D 散射 . . . . .	3
3	3D 散射中的 $\delta$ 函数 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>手征拉氏量</b>	<b>4</b>

## 1 有效量子力学

该章主要参考 [1]。当我们在描述低能理论时，我们不需要知道其在高能区的表现。代价就是需要引入大量参数，而这些参数只能由实验给出。在考察有效量子场论前，我们先看看有效量子力学。

由于在相对论量子力学中，粒子与粒子的相互作用是点点相互作用，因此我们希望通过  $\delta$  函数来模拟散射势。

### 1 1D 散射

考虑量子力学中的一维散射问题，假设有一方势阱，其函数为

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{2m\Delta}, & 0 \leq x \leq \Delta \\ 0, & \text{其余情况} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $m$  为粒子质量， $\Delta$  为势阱宽度， $\frac{\alpha^2}{2m\Delta^2}$  为势阱深度。可以通过计算薛定谔方程得到反射系数  $R$  为

$$R = \left[ \frac{4\kappa^2 k^2 \csc^2(\kappa\Delta)}{(k^2 - \kappa^2)} + 1 \right]^{-1} \quad (1.2)$$

其中

$$k = \sqrt{2mE}, \quad \kappa = \sqrt{k^2 + \frac{\alpha^2}{\Delta^2}} \quad (1.3)$$

在低能时，我们可以按照  $k$  展开反射系数，

$$R = -\frac{4}{\alpha^2 \sin^2 \alpha} \Delta^2 k^2 + \mathcal{O}(\Delta^4 k^4) \quad (1.4)$$

可以看到当  $k \rightarrow 0$  时， $R \rightarrow 1$ ，称这种相互作用为相关相互作用。

#### 1.1 利用 $\delta$ 函数来模仿方势阱

考虑此时有一  $\delta$  势阱，

$$V(x) = -\frac{g}{2m\Delta} \delta(x) \quad (1.5)$$

此处引入  $\Delta$  来保证  $g$  是无量纲的。依旧通过薛定谔方程可以计算得出反射系数为，

$$R = \left[ 1 + \frac{4k^2 \Delta^2}{g^2} \right]^{-1} = 1 - \frac{4k^2 \Delta^2}{g^2} + \mathcal{O}(k^4) \quad (1.6)$$

在低能情况下，与 (1.4) 比较可得，

$$g = \alpha \sin \alpha \quad (1.7)$$

称为“匹配条件”。

## 2 3D 散射

首先，**可以普遍证明**，对于任意势场， $k \cot \delta$  可以展开为

$$k \cot \delta = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \mathcal{O}(k^4) \quad (1.8)$$

考虑一  $s$  波的散射，势函数如下，

$$V = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{m\Delta^2}, & r < \Delta \\ 0, & r > \Delta \end{cases} \quad (1.9)$$

其中  $a$  是散射长度， $r$  是有效力程。同样可以通过求解薛定谔方程得到  $k \cot \delta$  的关系式，为

$$k \cot \delta = \frac{k(k \sin \kappa \Delta + \kappa \cot k \Delta \cos \kappa \Delta)}{k \cot k \Delta \sin \kappa \Delta - \kappa \cos \kappa \Delta} \quad (1.10)$$

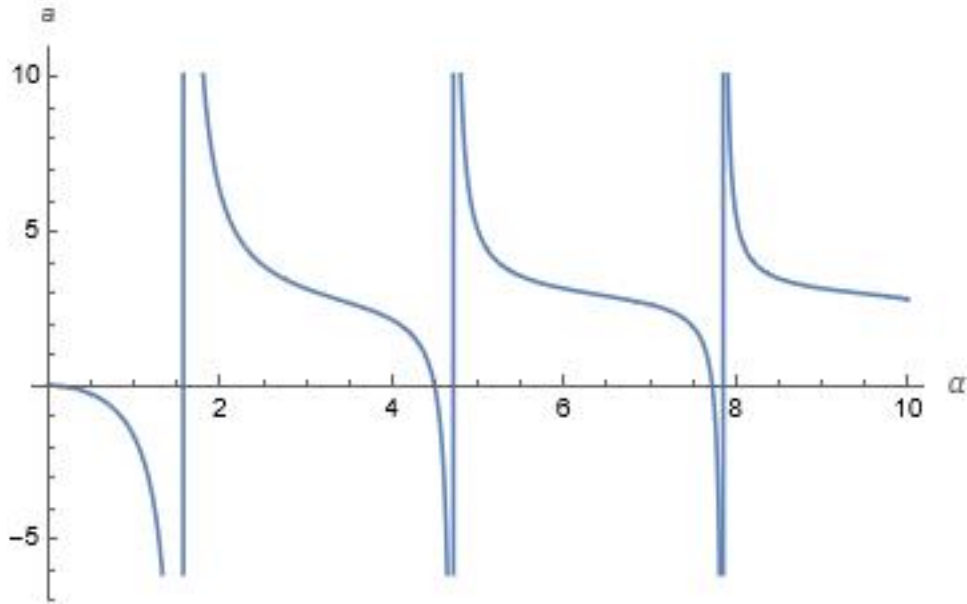
将其按照  $k^2$  展开可得，

$$k \cot \delta = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\tan \alpha}{\alpha} - 1 \right)^{-1} + \mathcal{O}(k^2) \quad (1.11)$$

与 (1.8) 比较可得，

$$a = -\Delta \left( \frac{\tan \alpha}{\alpha} - 1 \right) \quad (1.12)$$

其关系如图所示，



可以看到，势  $\alpha$  随散射长度  $a$  的变化，当  $\alpha_c = (2n+1)\pi/2$  时， $a$  出现奇异性，对应着束缚态的出现。

### 3 3D 散射中的 $\delta$ 函数

我们首先给出 3D 散射下散射振幅

$$f = \frac{1}{k \cot \delta - i k} \quad (1.13)$$

观察 (1.12)，由于  $\alpha$  是  $\mathcal{O}(1)$ ，因此  $a \sim \mathcal{O}\Delta$ ，因此当势阱宽度趋于 0 时，散射振幅也趋于 0，这种相互作用称为无关相互作用。因此无法用  $\delta$  函数来模拟球势阱。

如果我们用场  $\psi$  表示散射粒子，拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \left( i \partial_t + \frac{\nabla^2}{2M} \right) - \frac{C_0}{4} (\psi^\dagger \psi)^2 \quad (1.14)$$

## 2 手征拉氏量

该章主要参考 [2]

## 参考文献

- [1] David B Kaplan. lectures on effective field theory” . *arXiv preprint nuclth/0510023*, 5, 5.
- [2] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.