

手征微扰场论

王旭

2021 年 12 月 6 日

目录

1	介绍	2
1	流代数	3
2	Goldstone 玻色子的实现	4
2	介子的手征拉氏量	5
1	手征的 power-counting	5
2	手征拉氏量	6

1 介绍

该章主要参考 [1] [2]。

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 (\bar{q}_i i \not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (1.1)$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$, $T^a = \lambda^a/2$ 。仅考虑动能项时, 具有 $U(3)_L \times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏, 系统的对称群为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$, 其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在, $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 遭到了破坏, 但当粒子质量相同时, 依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项,

$$\sum_i m_i \bar{q}_i q_i = \sum_{i,j} \bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} \quad (1.2)$$

其中 $M = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 。如果我们将质量项升级为场, 在最后结果的时候在取回常数, 并假设其在手征变换下进行如下变换,

$$M \rightarrow RML^\dagger \quad (1.3)$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 变换下不变。

除质量项的显式破缺外, 当考虑夸克凝聚的时候, 系统也会自发破缺, 考虑 QCD 真空

$$\langle 0 | \bar{q}_{R,i} q_{L,j} | 0 \rangle = \Lambda^3 \delta_{ij} \quad (1.4)$$

其中 Λ 具有质量量纲。其在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下按照 $(3, \bar{3})$ 变换。在手征变换下,

$$L_{im} \langle 0 | \bar{q}_{R,n} q_{L,m} | 0 \rangle R_{nj}^\dagger = \Lambda^3 U_{ij} \quad (1.5)$$

其中 $U_{ij} = (LR^\dagger)_{ij}$ 。当 $L = R$ 时, 真空没有变化, 此时恰好对应 $SU(3)_V$ 。

我们可以采用和质量类似的方式, 将 U 升级为场, 并将其参数化为

$$U(x) = \exp\left[\frac{i}{f} \phi(x)\right], \quad \phi(x) = T^a \phi^a(x) \quad (1.6)$$

其中, $\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子。

当 $N=2$ 时,

$$\phi \equiv \sum_{i=1}^3 \phi_a \sigma^a = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

当 $N=3$ 时,

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

1 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前, 我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下, 拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

由于上述协变导数是作用到色空间中, 因此在 $U(3)_L \times U(3)_R$ 味群作用下保持不变。

考虑局域的 $U(3)_L \times U(3)_R$ 群变换, 则场的变化如下

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} &\mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\varepsilon_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} &\mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\varepsilon_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.10)$$

拉氏量的变换为

$$\delta \mathcal{L}_0 = \bar{q}_R \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R \right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_L \right) \gamma^\mu q_L \quad (1.11)$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$\begin{aligned} L_a^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R \\ L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \end{aligned} \quad (1.12)$$

其中带有下指标 a 的流称为八重态, 不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q \quad (1.13)$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \quad (1.14)$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒, 对应重子数守恒, 而单态轴矢流在考虑量子修正之后出现反常 $\partial_\mu A^\mu = \frac{3g_3^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\rho\sigma}$ 。

但是实际的 QCD 是具有质量项的, 因此手征对称性遭到破坏, 矢量流和轴矢流在经典情况

下也不严格守恒，有

$$\begin{aligned}
\partial_\mu V_a^\mu &= i\bar{q}\left[\mathcal{M}, \frac{\lambda_a}{2}\right]q, \\
\partial_\mu A_a^\mu &= i\bar{q}\gamma_5\left\{\frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M}\right\}q, \\
\partial_\mu V^\mu &= 0, \\
\partial_\mu A^\mu &= 2i\bar{q}\gamma_5\mathcal{M}q,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

其中 $\mathcal{M} = \text{diag}\{m_u, m_d, m_s\}$ 为质量矩阵。可以看出，如果三种夸克质量一样，则质量矩阵为单位矩阵，矢量流严格守恒。如果质量矩阵很小，矢量流和轴矢流也近似守恒。由于 u、d 夸克质量相近，且远小于 s 夸克质量，因此 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 群对称性就比 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称性要好很多。

定义三个荷算符

$$\begin{aligned}
Q_{La}(t) &= \int d^3x q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t, \vec{x}) \\
Q_{Ra}(t) &= \int d^3x q_R^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_R(t, \vec{x}) \\
Q_V(t) &= \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) q(t, \vec{x})
\end{aligned} \tag{1.16}$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{aligned}
[Q_{La}, Q_{Lb}] &= if_{abc}Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = if_{abc}Q_{Rc} \\
[Q_{La}, Q_{Rb}] &= [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0
\end{aligned} \tag{1.17}$$

2 Goldstone 玻色子的实现

在手征极限下，系统拉氏量 (1.9) 具有 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，但当考虑夸克凝聚的时候，基态只有 $SU(3)_V \times U(1)_V$ 的对称性，系统的对称性发生了自发破缺，生成了 8 个无质量的 Goldstone 玻色子。由于真实的夸克带有微小质量，因此拉氏量不具备严格的 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，破缺得到的 Goldstone 玻色子带有质量。

一般考虑，假设有大群 G，以及它的子群 H，拉氏量具有群 G 对称性，基态具有群 H 对称性，则会生成 $n = n_G - n_H$ 个 Goldstone 玻色子，每个 Goldstone 玻色子用 ϕ_i 标记，为光滑实函数， $i = 1, \dots, n$ ，定义一个 n 分量的矢量 $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ ，接着定义一个实向量空间

$$M_1 = \{\Phi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^n | \phi_i : M^4 \rightarrow \mathbb{R}\} \tag{1.18}$$

定义一个映射 $\varphi : G \times M_1 \rightarrow M_1$ ，满足

$$\bullet \varphi(e, \Phi) = \Phi$$

- $\varphi(g_1, \varphi(g_2, \Phi)) = \varphi(g_1 g_2, \Phi)$

用 Φ 表示 M_1 中的原点，[对应系统的基态构型](#)，则对于 $\forall h \in H$ ，存在 $\varphi(h, 0) = 0$ ，从而可以建立起 G/H 陪集与 Goldstone 玻色子之间的同构关系。可以验证，对于同一陪集中的元素，原点被映射到同一矢量，而不同陪集中的元素将原点映射到不同矢量。

考查 Goldstone 玻色子在群 G 下的变换行为，对于每一个 Φ 有一个陪集 $\tilde{g}H$ 与之对应，表示为

$$\varphi(g, \Phi) = \varphi(\tilde{g}h, 0)$$

接着用 $\varphi(g)$ 作用到 Φ 上

$$\varphi(g, \Phi) = \varphi(g, \varphi(\tilde{g}h, 0)) = \Phi'$$

即存在关系

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{g} & \Phi' \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tilde{g}H & \xrightarrow{g} & g\tilde{g}H \end{array}$$

2 介子的手征拉氏量

1 手征的 power-counting

手征拉氏量一般具有如下形式

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6, \quad (2.1)$$

其中只包含偶数项。这主要是由于 Lorentz 不变性以及质量项 $\sim \mathcal{O}(q^2)$ 。

对于给定费曼图，在 $p_i \mapsto tp_i$ 以及 $m_q \mapsto t^2 m_q$ 变换下，若散射振幅变换如下

$$M(tp_i, t^2 m_q) = t^D M(p_i, m_q), \quad (2.2)$$

则称 D 是一个图的手征阶数。手征阶数的计算公式如下

$$D = nN_L - 2N_I + \sum_{k=1}^{\infty} 2kN_{2k}, \quad (2.3)$$

其来源简单阐述如下，在上述标度变化下，内线的变换为 t^{n-2} ，顶点的变换为 t^{2k-n} ，由于散射矩阵的不变性，以及 $S \sim \delta^n(q)M$ ，因此需要添加一个 n 来补偿 δ 函数的影响，再考虑到一张图中独立圈数、内线数、顶点数之间的关系 $N_L = N_I - (N_V - 1)$ ，即可得到上式。

2 手征拉氏量

首先每一项的阶数如下，

$$U = \mathcal{O}(q^0), D_\mu U, r_\mu, l_\mu = \mathcal{O}(q), f_{L,R\mu\nu} = \mathcal{O}(q^2), \chi = \mathcal{O}(q^2), \quad (2.4)$$

其中 U 是 Goldstone 玻色子的实现, $U = \exp(i\phi_a \lambda_a / F_0)$, 而 r_μ, l_μ 是协变导数中的规范场, $f_{L,R\mu\nu}$ 是相应的场强张量, $\chi = 2B_0(s + ip)$ 。因此可以写出二阶的手征拉氏量如下,

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger], \quad (2.5)$$

参考文献

- [1] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] 郑汉青. 量子场论：上. 北京大学出版社, 2018.