

# 手征微扰场论

王旭

2021 年 10 月 11 日

## 目录

<b>1</b>	<b>手征拉氏量</b>	<b>2</b>
1	流代数 . . . . .	3
2	Goldstone 玻色子的实现 . . . . .	4
2.1	QCD 中的 Goldstone 玻色子 . . . . .	4

## 1 手征拉氏量

该章主要参考 [1]

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 (\bar{q}_i i \not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (1.1)$$

其中  $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$ ,  $T^a = \lambda^a/2$ 。仅考虑动能项时, 具有  $U(3)_L \times U(3)_R$  的对称性。量子化之后  $U(1)_A$  被破坏, 系统的对称群为  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ , 其中  $U(1)_V$  对应着重子数。由于质量项的存在,  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  遭到了破坏, 但当粒子质量相同时, 依旧会保持  $SU(3)_V$  的对称性。

考虑质量项,

$$\sum_i m_i \bar{q}_i q_i = \sum_{i,j} \bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} \quad (1.2)$$

其中  $M = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 。如果我们将质量项升级为场, 在最后结果的时候在取回常数, 并假设其在手征变换下进行如下变换,

$$M \rightarrow RML^\dagger \quad (1.3)$$

则拉氏量依然在  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  变换下不变。

除质量项的显式破缺外, 当考虑夸克凝聚的时候, 也会产生自发破缺, 考虑 QCD 真空

$$\langle 0 | \bar{q}_{R,i} q_{L,j} | 0 \rangle = \Lambda^3 \delta_{ij} \quad (1.4)$$

其中  $\Lambda$  具有质量量纲。其在  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  下按照  $(3, \bar{3})$  变换。在手征变换下,

$$L_{im} \langle 0 | \bar{q}_{R,n} q_{L,m} | 0 \rangle R_{nj}^\dagger = \Lambda^3 U_{ij} \quad (1.5)$$

其中  $U_{ij} = (LR^\dagger)_{ij}$ 。当  $L = R$  时, 真空没有变化, 此时恰好对应  $SU(3)_V$ 。

我们可以采用和质量类似的方式, 将  $U$  升格为场, 并将其参数化为

$$U(x) = \exp\left[\frac{i}{f} \phi(x)\right], \quad \phi(x) = T^a \phi^a(x) \quad (1.6)$$

其中,  $\phi^a(x)$  为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子。

当 N=2 时,

$$\phi \equiv \sum_{i=1}^3 \phi_a \sigma^a = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

当 N=3 时,

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

## 1 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前, 我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下, 拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \quad (1.9)$$

在  $U(3)_L \times U(3)_R$  群下, 场的变化如下

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} &\mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \exp \left( -i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\varepsilon_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} &\mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = \exp \left( -i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\varepsilon_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.10)$$

则拉氏量的变换为

$$\delta \mathcal{L}_0 = \bar{q}_R \left( \sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R \right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left( \sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_L \right) \gamma^\mu q_L \quad (1.11)$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$\begin{aligned} L_a^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R \\ L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \end{aligned} \quad (1.12)$$

其中带有下指标  $a$  的流称为八重态, 不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q \quad (1.13)$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \quad (1.14)$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒, 对应重子数守恒, 而单态轴矢流在量子化之后出现反常。

定义三个荷算符

$$\begin{aligned} Q_{La}(t) &= \int d^3x q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t, \vec{x}) \\ Q_{Ra}(t) &= \int d^3x q_R^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_R(t, \vec{x}) \\ Q_V(t) &= \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) q(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$  的李代数

$$\begin{aligned} [Q_{La}, Q_{Lb}] &= if_{abc} Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = if_{abc} Q_{Rc} \\ [Q_{La}, Q_{Rb}] &= [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

## 2 Goldstone 玻色子的实现

在手征极限下，系统拉氏量 (1.9) 具有  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$  的对称性，但当考虑夸克凝聚的时候，基态只有  $SU(3)_V \times U(1)_V$  的对称性，系统的对称性发生了自发破缺，生成了 8 个无质量的 Goldstone 玻色子。由于真实的夸克带有微小质量，因此拉氏量不具备严格的  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$  的对称性，破缺得到的 Goldstone 玻色子带有质量。

一般考虑，假设有大群  $G$ ，以及它的子群  $H$ ，拉氏量具有群  $G$  对称性，基态具有群  $H$  对称性，则会生成  $n = n_G - n_H$  个 Goldstone 玻色子，每个 Goldstone 玻色子用  $\phi_i$  标记，为光滑实函数， $i = 1, \dots, n$ ，定义一个  $n$  分量的矢量  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ ，接着定义一个实向量空间

$$M_1 = \{\Phi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^n | \phi_i : M^4 \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (1.17)$$

定义一个映射  $\varphi : G \times M_1 \rightarrow M_1$ ，满足

- $\varphi(e, \Phi) = \Phi$
- $\varphi(g_1, \varphi(g_2, \Phi)) = \varphi(g_1 g_2, \Phi)$

用  $\Phi$  表示  $M_1$  中的原点，[对应系统的基态构型](#)，则对于  $\forall h \in H$ ，存在  $\varphi(h, 0) = 0$ ，从而可以建立起  $G/H$  陪集与 Goldstone 玻色子之间的同构关系。可以验证，对于同一陪集中的元素，原点被映射到同一矢量，而不同陪集中的元素将原点映射到不同矢量。

考查 Goldstone 玻色子在群  $G$  下的变换行为，对于每一个  $\Phi$  有一个陪集  $\tilde{g}H$  与之对应，表示为

$$\varphi(g, \Phi) = \varphi(\tilde{g}h, 0)$$

接着用  $\varphi(g)$  作用到  $\Phi$  上

$$\varphi(g, \Phi) = \varphi(g, \varphi(\tilde{g}h, 0)) = \Phi'$$

即存在关系

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{g} & \Phi' \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tilde{g}H & \xrightarrow{g} & g\tilde{g}H \end{array}$$

### 2.1 QCD 中的 Goldstone 玻色子

## 参考文献

- [1] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.