手征微扰场论

王旭

2021 年 12 月 6 日

目录

1 介绍 **2**

1 流代数 3

2 Goldstone 玻色子的实现 4

2 介子的手征拉氏量 **5**

1 手征的 power-counting 5

2 手征拉氏量 6

1 介绍

该章主要参考 [1] [2]。

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{3}(\bar{q}_i \mathrm{i}\not{D} q_i - m_i\bar{q}_i q_i)-\frac{1}{4}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}^{a\mu\nu} \tag{1.1}$$

其中 $D_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}gT^aA^a_\mu$, $T^a=\lambda^a/2$。仅考虑动能项时，具有 $U(3)_L\times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏，系统的对称群为 $SU(3)_L\times SU(3)_R\times U(1)_V$，其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在，$SU(3)_L\times SU(3)_R$ 遭到了破坏，但当粒子质量相同时，依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项，

$$\sum_i m_i\bar{q}_i q_i=\sum_{i,j}\bar{q}_{R,i}M_{ij}q_{L,j} \tag{1.2}$$

其中 $M=diag(m_u,m_d,m_s)$。如果我们将质量项升级为场，在最后结果的时候在取回常数，并假设其在手征变换下进行如下变换，

$$M\to RML^\dagger \tag{1.3}$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L\times SU(3)_R$ 变换下不变。

除质量项的显式破缺外，当考虑夸克凝聚的时候，系统也会自发破缺，考虑 QCD 真空

$$\langle 0|\bar{q}_{R,i}q_{L,j}|0\rangle=\Lambda^3\delta_{ij} \tag{1.4}$$

其中 Λ 具有质量量纲。其在 $SU(3)_L\times SU(3)_R$ 下按照 $(3,\bar{3})$ 变换。在手征变换下，

$$L_{im}\langle 0|\bar{q}_{R,n}q_{L,m}|0\rangle R^\dagger_{nj}=\Lambda^3U_{ij} \tag{1.5}$$

其中 $U_{ij}=(LR^\dagger)_{ij}$。当 $L=R$ 时，真空没有变化，此时恰好对应 $SU(3)_V$。

我们可以采用和质量类似的方式，将 U 升级为场，并将其参数化为

$$U(x)=exp[\frac{i}{f}\phi(x)],\ \phi(x)=T^a\phi^a(x) \tag{1.6}$$

其中，$\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子。

当 N=2 时，

$$\phi\equiv\sum_{i=1}^{3}\phi_a\sigma^a=\begin{pmatrix}\phi_3 & \phi_1-\mathrm{i}\phi_2\\ \phi_1+\mathrm{i}\phi_2 & -\phi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi^0 & \sqrt{2}\pi^+\\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

当 N=3 时，

$$\phi\equiv\begin{pmatrix}\pi^0+\frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+\\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0+\frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0\\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3}\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

1 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前，我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下，拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} \mathrm{i} \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} \mathrm{i} \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \tag{1.9}$$

由于上述协变导数是作用到色空间中，因此在 $U(3)_L \times U(3)_R$ 味群作用下保持不变。

考虑局域的 $U(3)_L \times U(3)_R$ 群变换，则场的变化如下

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = exp\left(-\mathrm{i} \sum_{a=1}^{8} \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-\mathrm{i}\varepsilon_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = exp\left(-\mathrm{i} \sum_{a=1}^{8} \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-\mathrm{i}\varepsilon_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

拉氏量的变换为

$$\delta\mathcal{L}_0 = \bar{q}_R \left(\sum_{a=1}^{8} \partial_\mu \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R\right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left(\sum_{a=1}^{8} \partial_\mu \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R\right) \gamma^\mu q_L \tag{1.11}$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$\begin{aligned} L_a^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R \\ L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中带有下指标 a 的流称为八重态，不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q \tag{1.13}$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \tag{1.14}$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒，对应重子数守恒，而单态轴矢流在考虑量子修正之后出现反常 $\partial_\mu A^\mu = \frac{3g_3^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\rho\sigma}$。

但是实际的 QCD 是具有质量项的，因此手征对称性遭到破坏，矢量流和轴矢流在经典情况

下也不严格守恒，有

$$\begin{aligned}\partial_\mu V_a^\mu =& \mathrm{i}\bar{q}\Big[\mathcal{M},\frac{\lambda_a}{2}\Big]q,\\ \partial_\mu A_a^\mu =& \mathrm{i}\bar{q}\gamma_5\Big\{\frac{\lambda_a}{2},\mathcal{M}\Big\}q,\\ \partial_\mu V^\mu =& 0,\\ \partial_\mu A^\mu =& 2\mathrm{i}\bar{q}\gamma_5\mathcal{M}q,\end{aligned} \tag{1.15}$$

其中 $\mathcal{M} = diag\{m_u, m_d, m_s\}$ 为质量矩阵。可以看出，如果三种夸克质量一样，则质量矩阵为单位矩阵，矢量流严格守恒。如果质量矩阵很小，矢量流和轴矢流也近似守恒。由于 u、d 夸克质量相近，且远小于 s 夸克质量，因此 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 群对称性就比 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称性要好很多。

定义三个荷算符

$$\begin{aligned}Q_{La}(t) &= \int \mathrm{d}^3x q_L^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2}q_L(t,\vec{x})\\ Q_{Ra}(t) &= \int \mathrm{d}^3x q_R^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2}q_R(t,\vec{x})\\ Q_V(t) &= \int \mathrm{d}^3x q^\dagger(t,\vec{x})q(t,\vec{x})\end{aligned} \tag{1.16}$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{gathered}[Q_{La}, Q_{Lb}] = \mathrm{i}f_{abc}Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = \mathrm{i}f_{abc}Q_{Rc}\\ [Q_{La}, Q_{Rb}] = [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0\end{gathered} \tag{1.17}$$

2 Goldstone 玻色子的实现

在手征极限下，系统拉氏量 (1.9) 具有 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，但当考虑夸克凝聚的时候，基态只有 $SU(3)_V \times U(1)_V$ 的对称性，系统的对称性发生了自发破缺，生成了 8 个无质量的 Goldstone 玻色子。由于真实的夸克带有微小质量，因此拉氏量不具备严格的 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，破缺得到的 Goldstone 玻色子带有质量。

一般考虑，假设有大群 G，以及它的子群 H，拉氏量具有群 G 对称性，基态具有群 H 对称性，则会生成 $n = n_G - n_H$ 个 Goldstone 玻色子，每个 Goldstone 玻色子用 ϕ_i 标记，为光滑实函数，$i = 1, ..., n$，定义一个 n 分量的矢量 $\mathbf{\Phi} = (\phi_1, ..., \phi_n)$，接着定义一个实向量空间

$$M_1 = \{\mathbf{\Phi} : M^4 \to \mathbb{R}^{\ltimes} | \phi_i : M^4 \to R\} \tag{1.18}$$

定义一个映射 $\varphi : G \times M_1 \to M_1$，满足

- $\varphi(e, \mathbf{\Phi}) = \mathbf{\Phi}$

- $\varphi(g_1, \varphi(g_2, \mathbf{\Phi})) = \varphi(g_1 g_2, \mathbf{\Phi})$

用$\mathbf{\Phi}$表示 M_1 中的原点，对应系统的基态构型，则对于 $\forall h \in H$，存在 $\varphi(h, 0) = 0$，从而可以建立起 G/H 陪集与 Goldstone 玻色子之间的同构关系。可以验证，对于同一陪集中的元素，原点被映射到同一矢量，而不同陪集中的元素将原点映射到不同矢量。

考查 Goldstone 玻色子在群 G 下的变换行为，对于每一个 $\mathbf{\Phi}$ 有一个陪集 $\tilde{g}H$ 与之对应，表示为

$$\varphi(g, \mathbf{\Phi}) = \varphi(\tilde{g}h, 0)$$

接着用 $\varphi(g)$ 作用到 $\mathbf{\Phi}$ 上

$$\varphi(g, \mathbf{\Phi}) = \varphi(g, \varphi(\tilde{g}h, 0)) = \mathbf{\Phi}'$$

即存在关系

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Phi} & \xrightarrow{g} & \mathbf{\Phi}' \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tilde{g}H & \xrightarrow{g} & g\tilde{g}H \end{array}$$

2 介子的手征拉氏量

1 手征的 power-counting

手征拉氏量一般具有如下形式

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_4, \tag{2.1}$$

其中只包含偶数项。这主要是由于 Lorentz 不变性以及质量项 $\sim \mathcal{O}(q^2)$。

对于给定费曼图，在 $p_i \mapsto tp_i$ 以及 $m_q \mapsto t^2 m_q$ 变换下，若散射振幅变换如下

$$M(tp_i, t^2 m_q) = t^D M(p_i, m_q), \tag{2.2}$$

则称 D 是一个图的手征阶数。手征阶数的计算公式如下

$$D = nN_L - 2N_I + \sum_{k=1}^{\infty} 2kN_{2k}, \tag{2.3}$$

其来源简单阐述如下，在上述标度变化下，内线的变换为 t^{n-2}，顶点的变换为 t^{2k-n}，由于散射矩阵的不变性，以及 $S \sim \delta^n(q)M$，因此需要添加一个 n 来补偿 δ 函数的影响，再考虑到一张图中独立圈数、内线数、顶点数之间的关系 $N_L = N_I - (N_V - 1)$，即可得到上式。

2 手征拉氏量

首先每一项的阶数如下，

$$U=\mathcal{O}(q^0), D_\mu U, r_\mu, l_\mu=\mathcal{O}(q), f_{L,R\mu\nu}=\mathcal{O}(q^2), \chi=\mathcal{O}(q^2), \tag{2.4}$$

其中 U 是 Goldstone 玻色子的实现，$U=exp(\mathrm{i}\phi_a\lambda_a/F_0)$，而 r_μ, l_μ 是协变导数中的规范场，$f_{L,R\mu\nu}$ 是相应的场强张量，$\chi=2B_0(s+\mathrm{i}p)$。因此可以写出二阶的手征拉式量如下，

$$\mathcal{L}_2=\frac{F_0^2}{4}Tr[D_\mu U(D^\mu U)^\dagger]+\frac{F_0^2}{4}Tr[\chi U^\dagger+U\chi^\dagger], \tag{2.5}$$

参考文献

[1] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.

[2] 郑汉青. *量子场论: 上*. 北京大学出版社, 2018.