

# 手征微扰场论

王旭

2021 年 10 月 7 日

## 目录

<b>1</b>	<b>有效量子力学</b>	<b>2</b>
1	1D 散射 . . . . .	2
1.1	利用 $\delta$ 函数来模仿方势阱 . . . . .	2
2	3D 散射 . . . . .	3
2.1	3D 散射中的 $\delta$ 函数 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>手征拉氏量</b>	<b>4</b>
1	流代数 . . . . .	5
2	Goldstone 玻色子的非线性实现 . . . . .	5

## 1 有效量子力学

该章主要参考 [1]。当我们在描述低能理论时，我们不需要知道其在高能区的表现。代价就是需要引入大量参数，而这些参数只能由实验给出。在考察有效量子场论前，我们先看看有效量子力学。

由于在相对论量子力学中，粒子与粒子的相互作用是点点相互作用，因此我们希望通过  $\delta$  函数来模拟散射势。

### 1 1D 散射

考虑量子力学中的一维散射问题，假设有一方势阱，其函数为

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{2m\Delta}, & 0 \leq x \leq \Delta \\ 0, & \text{其余情况} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $m$  为粒子质量， $\Delta$  为势阱宽度， $\frac{\alpha^2}{2m\Delta^2}$  为势阱深度。可以通过计算薛定谔方程得到反射系数  $R$  为

$$R = \left[ \frac{4\kappa^2 k^2 \csc^2(\kappa\Delta)}{(k^2 - \kappa^2)} + 1 \right]^{-1} \quad (1.2)$$

其中

$$k = \sqrt{2mE}, \quad \kappa = \sqrt{k^2 + \frac{\alpha^2}{\Delta^2}} \quad (1.3)$$

在低能时，我们可以按照  $k$  展开反射系数，

$$R = -\frac{4}{\alpha^2 \sin^2 \alpha} \Delta^2 k^2 + \mathcal{O}(\Delta^4 k^4) \quad (1.4)$$

可以看到当  $k \rightarrow 0$  时， $R \rightarrow 1$ ，称这种相互作用为相关相互作用。

#### 1.1 利用 $\delta$ 函数来模仿方势阱

考虑此时有一  $\delta$  势阱，

$$V(x) = -\frac{g}{2m\Delta} \delta(x) \quad (1.5)$$

此处引入  $\Delta$  来保证  $g$  是无量纲的。依旧通过薛定谔方程可以计算得出反射系数为，

$$R = \left[ 1 + \frac{4k^2 \Delta^2}{g^2} \right]^{-1} = 1 - \frac{4k^2 \Delta^2}{g^2} + \mathcal{O}(k^4) \quad (1.6)$$

在低能情况下，与 (1.4) 比较可得，

$$g = \alpha \sin \alpha \quad (1.7)$$

称为“匹配条件”。

## 2 3D 散射

首先，**可以普遍证明**，对于任意势场， $k \cot \delta$  可以展开为

$$k \cot \delta = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \mathcal{O}(k^4) \quad (1.8)$$

考虑一  $s$  波的散射，势函数如下，

$$V = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{m\Delta^2}, & r < \Delta \\ 0, & r > \Delta \end{cases} \quad (1.9)$$

其中  $a$  是散射长度， $r$  是有效力程。同样可以通过求解薛定谔方程得到  $k \cot \delta$  的关系式，为

$$k \cot \delta = \frac{k(k \sin \kappa \Delta + \kappa \cot k \Delta \cos \kappa \Delta)}{k \cot k \Delta \sin \kappa \Delta - \kappa \cos \kappa \Delta} \quad (1.10)$$

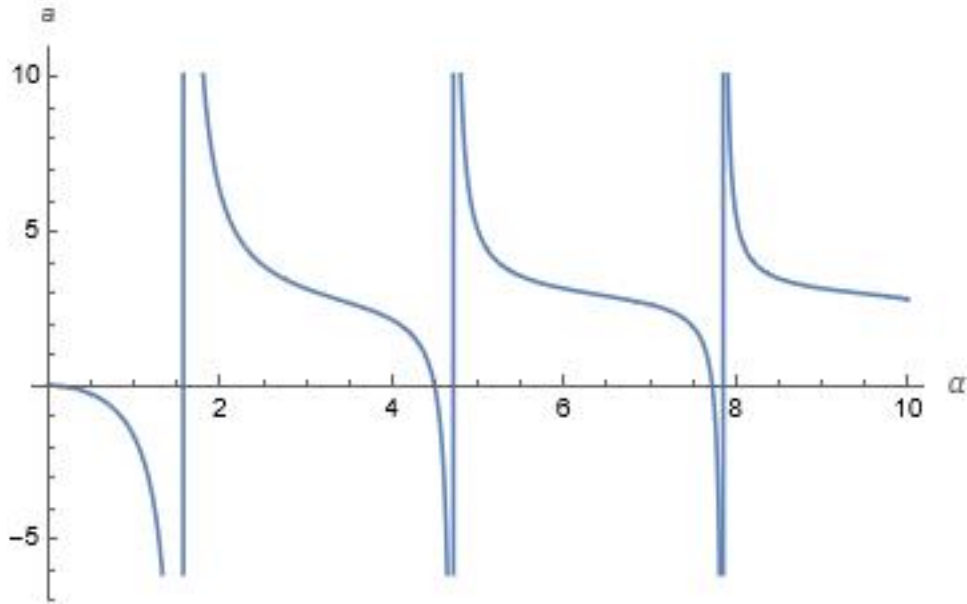
将其按照  $k^2$  展开可得，

$$k \cot \delta = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\tan \alpha}{\alpha} - 1 \right)^{-1} + \mathcal{O}(k^2) \quad (1.11)$$

与 (1.8) 比较可得，

$$a = -\Delta \left( \frac{\tan \alpha}{\alpha} - 1 \right) \quad (1.12)$$

其关系如图所示，



可以看到，势  $\alpha$  随散射长度  $a$  的变化，当  $\alpha_c = (2n+1)\pi/2$  时， $a$  出现奇异性，对应着束缚态的出现。

### 2.1 3D 散射中的 $\delta$ 函数

我们首先给出 3D 散射下散射振幅

$$f = \frac{1}{k \cot \delta - i k} \quad (1.13)$$

观察 (1.12)，由于  $\alpha$  是  $\mathcal{O}(1)$ ，因此  $a \sim \mathcal{O}(\Delta)$ ，因此当势阱宽度趋于 0 时，散射振幅也趋于 0，这种相互作用称为无关相互作用。因此无法用  $\delta$  函数来模拟球势阱。

如果我们用场  $\psi$  表示散射粒子，拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \left( i \partial_t + \frac{\nabla^2}{2M} \right) \psi - \frac{C_0}{4} (\psi^\dagger \psi)^2 \quad (1.14)$$

## 2 手征拉氏量

该章主要参考 [2]

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 (\bar{q}_i i \not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (2.1)$$

其中  $D_\mu = \partial_\mu - i g T^a A_\mu^a$ ， $T^a = \lambda^a/2$ 。仅考虑动能项时，具有  $U(3)_L \times U(3)_R$  的对称性。量子化之后  $U(1)_A$  被破坏，系统的对称群为  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ ，其中  $U(1)_V$  对应着重子数。由于质量项的存在， $SU(3)_L \times SU(3)_R$  遭到了破坏，但当粒子质量相同时，依旧会保持  $SU(3)_V$  的对称性。

考虑质量项，

$$\sum_i m_i \bar{q}_i q_i = \sum_{i,j} \bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} \quad (2.2)$$

其中  $M = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 。如果我们将质量项升级为场，在最后结果的时候在取回常数，并假设其在手征变换下进行如下变换，

$$M \rightarrow R M L^\dagger \quad (2.3)$$

则拉氏量依然在  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  变换下不变。

除质量项的显式破缺外，当考虑夸克凝聚的时候，也会产生自发破缺，考虑 QCD 真空

$$\langle 0 | \bar{q}_{R,i} q_{L,j} | 0 \rangle = \Lambda^3 \delta_{ij} \quad (2.4)$$

其中  $\Lambda$  具有质量量纲。其在  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  下按照  $(3, \bar{3})$  变换。在手征变换下，

$$L_{im} \langle 0 | \bar{q}_{R,n} q_{L,m} | 0 \rangle R_{nj}^\dagger = \Lambda^3 U_{ij} \quad (2.5)$$

其中  $U_{ij} = (LR^\dagger)_{ij}$ 。当  $L = R$  时，真空没有变化，此时恰好对应  $SU(3)_V$ 。

我们可以采用和质量类似的方式，将  $U$  升格为场，并将其参数化为

$$U(x) = \exp\left[\frac{i}{f}\phi(x)\right], \quad \phi(x) = T^a\phi^a(x) \quad (2.6)$$

其中， $\phi^a(x)$  为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子。

当  $N=2$  时，

$$\phi \equiv \sum_{i=1}^3 \phi_a \sigma^a = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

当  $N=3$  时，

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

## 1 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前，我们首先讨论与手征相关的流代数。由 Noether 定理知道，假设场  $\Phi_i(x)$  进行如下的变化

$$\Phi_i(x) \rightarrow \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) + i\delta\Phi_i(x) = \Phi_i(x) - i\epsilon_a F_{a,i}[\Phi_i(x)] \quad (2.9)$$

## 2 Goldstone 玻色子的非线性实现

## 参考文献

- [1] David B Kaplan. lectures on effective field theory” . *arXiv preprint nuclth/0510023*, 5, 5.
- [2] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.