手征微扰场论

王旭

2021 年 12 月 17 日

目录

1 介绍

该章主要参考 [1] [2]。

1 简介

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3}(\bar{q}_i \mathrm{i}\not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}^{a\mu\nu} \tag{1.1}$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}gT^a A^a_\mu$, $T^a = \lambda^a/2$。仅考虑动能项时，具有 $U(3)_L \times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏，系统的对称群为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$，其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在，$SU(3)_L \times SU(3)_R$ 遭到了破坏，但当粒子质量相同时，依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项，

$$\sum_i m_i \bar{q}_i q_i = \sum_{i,j} \bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} \tag{1.2}$$

其中 $M = diag(m_u, m_d, m_s)$。如果我们将质量项升级为场，在最后结果的时候在取回常数，并假设其在手征变换下进行如下变换，

$$M \to RML^\dagger \tag{1.3}$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 变换下不变，由于质量项引起的系统对称性破缺是显式破缺。

但除质量项的显式破缺外，当考虑夸克凝聚的时候，系统也会自发破缺，考虑 QCD 真空

$$\langle 0|\bar{q}_{R,i} q_{L,j}|0\rangle = \Lambda^3 \delta_{ij} \tag{1.4}$$

其中 Λ 具有质量量纲 [3]。上式在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下按照 $(3, \bar{3})$ 变换如下，

$$L_{im}\langle 0|\bar{q}_{R,n} q_{L,m}|0\rangle R^\dagger_{nj} = \Lambda^3 U_{ij} \tag{1.5}$$

其中 $U_{ij} = (LR^\dagger)_{ij}$ 为 $SU(3)$ 中的矩阵。当 $L = R$ 时，$\Sigma_{ij} = \delta_{ij}$，对应真空没有变化，说明 QCD 凝聚在 $SU(3)_V$ 下不变。当 $L \neq R$ 时，Σ_{ij} 代表此时系统已经变换到了一个和（1.4）不同的真空。如果此时没有质量项的显式破缺，则两个真空简并。

我们可以采用和质量类似的方式，将 U 升级为场，并将其参数化为

$$U(x) = exp[\frac{2\mathrm{i}}{f}\phi(x)],\ \phi(x) = T^a \phi^a(x) \tag{1.6}$$

其中，$\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子，T^a 是 $SU(3)$ 群的生成元。

当 N=2 时，

$$\phi \equiv \sum_{a=1}^{3} \phi_a \sigma^a = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - \mathrm{i}\phi_2 \\ \phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

当 N=3 时，

$$\phi \equiv= \sum_{a=1}^{8} \phi_a \lambda^a = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

2 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前，我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下，拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} \mathrm{i} \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} \mathrm{i} \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \tag{1.9}$$

由于上述协变导数是作用到色空间中，因此在 $U(3)_L \times U(3)_R$ 味群作用下保持不变。

考虑整体的 $U(3)_L \times U(3)_R$ 群变换，则场的变化如下

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = exp\left(-\mathrm{i} \sum_{a=1}^{8} \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-\mathrm{i}\varepsilon_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = exp\left(-\mathrm{i} \sum_{a=1}^{8} \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-\mathrm{i}\varepsilon_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

拉氏量的变换为

$$\delta\mathcal{L}_0 = \bar{q}_R \left(\sum_{a=1}^{8} \partial_\mu \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R\right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left(\sum_{a=1}^{8} \partial_\mu \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R\right) \gamma^\mu q_L \tag{1.11}$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$\begin{aligned} L_a^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R \\ L^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中带有下指标 a 的流称为八重态，不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 q \tag{1.13}$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \tag{1.14}$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒，对应重子数守恒，而单态轴矢流在考虑量子修正之后出现反常 $\partial_\mu A^\mu = \frac{3g_3^2}{32\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{G}_a^{\mu\nu}\mathcal{G}_a^{\rho\sigma}$。

但是实际的 QCD 是具有质量项的，因此手征对称性遭到破坏，矢量流和轴矢流在经典情况下也不严格守恒，有

$$\begin{aligned}
\partial_\mu V_a^\mu =& \mathrm{i}\bar{q}\Big[\mathcal{M}, \frac{\lambda_a}{2}\Big] q, \\
\partial_\mu A_a^\mu =& \mathrm{i}\bar{q}\gamma_5\Big\{\frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M}\Big\} q, \\
\partial_\mu V^\mu =& 0, \\
\partial_\mu A^\mu =& 2\mathrm{i}\bar{q}\gamma_5\mathcal{M}q,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

其中 $\mathcal{M} = diag\{m_u, m_d, m_s\}$ 为质量矩阵。可以看出，如果三种夸克质量一样，则质量矩阵为单位矩阵，矢量流严格守恒。如果质量矩阵很小，矢量流和轴矢流也近似守恒。由于 u、d 夸克质量相近，且远小于 s 夸克质量，因此 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 群对称性就比 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称性要好很多。

根据（1.12）定义三个荷算符：

$$\begin{aligned}
Q_{La}(t) &= \int \mathrm{d}^3x q_L^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2} q_L(t,\vec{x}) \\
Q_{Ra}(t) &= \int \mathrm{d}^3x q_R^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2} q_R(t,\vec{x}) \\
Q_V(t) &= \int \mathrm{d}^3x q^\dagger(t,\vec{x}) q(t,\vec{x})
\end{aligned} \tag{1.16}$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{gathered}
[Q_{La}, Q_{Lb}] = \mathrm{i}f_{abc}Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = \mathrm{i}f_{abc}Q_{Rc} \\
[Q_{La}, Q_{Rb}] = [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0
\end{gathered} \tag{1.17}$$

验证第一个对易关系：

$$\begin{aligned}
[Q_{La}, Q_{Lb}] =& \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y \Big[q_L^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda^a}{2} q_L(t,\vec{x}), q_L^\dagger(t,\vec{y})\frac{\lambda^a}{2} q_L(t,\vec{y})\Big] \\
=& \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y \Big[q^\dagger(t,\vec{x})P_L\frac{\lambda^a}{2} q(t,\vec{x}), q^\dagger(t,\vec{y})P_L\frac{\lambda^a}{2} q(t,\vec{y})\Big]) \\
=& \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) q^\dagger(t,\vec{x})P_L\frac{\lambda_a}{2}\frac{\lambda_b}{2} q(t,\vec{y}) \\
&- \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) q^\dagger(t,\vec{y})P_L\frac{\lambda_a}{2}\frac{\lambda_b}{2} q(t,\vec{x})
\end{aligned}$$

$$=\mathrm{i}f_{abc}\int \mathrm{d}^3x q^\dagger(t,\vec{x})P_L\frac{\lambda_c}{2}q(t,\vec{x}) = \mathrm{i}f_{abc}Q^{Lc}$$

除此之外，还可以得到流之间的对易关系如下：

$$\begin{aligned}
[V_a^0(t,\vec{x}),V_b^\mu(t,\vec{y})] =&\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\mathrm{i}f_{abc}V_c^\mu(t,\vec{X}),\\
[V_a^0(t,\vec{x}),V^\mu(t,\vec{y})] =&0,\\
[V_a^0(t,\vec{x}),A_b^\mu(t,\vec{y})] =&\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\mathrm{i}f_{abc}A_c^\mu(t,\vec{X}),\\
[A_a^0(t,\vec{x}),V_b^\mu(t,\vec{y})] =&\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\mathrm{i}f_{abc}A_c^\mu(t,\vec{X}),\\
[A_a^0(t,\vec{x}),V^\mu(t,\vec{y})] =&0,\\
[A_a^0(t,\vec{x}),A_b^\mu(t,\vec{y})] =&\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\mathrm{i}f_{abc}V_c^\mu(t,\vec{X}).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

2 介子的手征拉氏量

1 手征的 power-counting

手征拉氏量一般具有如下形式

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \cdots , \tag{2.1}$$

其中只包含偶数项。这主要是由于 Lorentz 不变性以及质量项是 $\sim \mathcal{O}(q^2)$ 的。

对于给定费曼图，在 $p_i \mapsto tp_i$ 以及 $m_q \mapsto t^2 m_q$ 变换下，若不变振幅变换如下

$$M(tp_i, t^2 m_q) = t^D M(p_i, m_q), \tag{2.2}$$

则称 D 是一个图的手征阶数。手征阶数的计算公式如下

$$D = nN_L - 2N_I + \sum_{k=1}^{\infty} 2kN_{2k}, \tag{2.3}$$

其来源简单阐述如下，在上述标度变化下，传播子的变换如下

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \frac{\mathrm{i}}{k^2 - M^2 + \mathrm{i}\epsilon} &\mapsto \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \frac{\mathrm{i}}{t^2(k^2/t^2 - M^2 + \mathrm{i}\epsilon)} \\ &\overset{k=tk'}{=} t^{n-2} \int \frac{\mathrm{d}^n k'}{(2\pi)^n} \frac{\mathrm{i}}{k'^2 - M^2 + \mathrm{i}\epsilon},\end{aligned} \tag{2.4}$$

因此内线的变换为 t^{n-2}，而顶点的变换为

$$\delta^n(q) q^{2k} \mapsto t^{2k-n} \delta^n q q^{2k}, \tag{2.5}$$

因此内线的变化为 t^{2k-n}，此外由于散射矩阵的不变性，以及 $S \sim \delta^n(q)M$，因此需要加上一个 n 来补偿 δ 函数的影响，此时我们可以得到

$$D = n + (n-2)N_I + \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}(2k - n). \tag{2.6}$$

再考虑到一张图中独立圈数、内线数、顶点数之间的关系 $N_L = N_I - (N_V - 1)$，其中 $N_V = \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}$，即可得到上式。

2 外源

该章主要参考 [1]。

通常在量子场论中，紫外的微观理论与红外的理论可以截然不同，如 QCD。低能有效作用量是通过积掉一些高能的自由度来得到的。但是在实际操作中很难实行，我们往往首先猜测红外的场以及可能的对称性，然后写下与对称性自洽的有效有效作用，最后再在实验中进行检验。

首先考虑 QCD 的拉氏量如下，

$$\mathcal{L}^0_{QCD}=\sum_{i=1}^{3}\bar{q}_i\mathrm{i}\not{D}q_i-\frac{1}{4}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}^{a\mu\nu},\tag{2.7}$$

上述拉氏量具有 $SU(3)_L\times SU(3)_R$ 的味道对称性，如果想要引入局域的味道空间的变换，我们需要引入以下外源（类似于规范理论中的规范场）[4] [5]，

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}^0_{QCD}+\mathcal{L}_{ext},\tag{2.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ext}=&\sum_{a=1}^{8}v^\mu_a\bar{q}\gamma_\mu\frac{\lambda_a}{2}q+v^\mu_{(s)}\frac{1}{3}\bar{q}\gamma_\mu q+\sum_{a=1}^{8}a^\mu_a\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda_a}{2}q\\&-\sum_{a=0}^{8}s_a\bar{q}\lambda_a q+\sum_{a=0}^{8}p_a\mathrm{i}\bar{q}\gamma_5\lambda_a q\\=&\bar{q}\gamma_\mu\Big(v^\mu+\frac{1}{3}v^\mu_{(s)}+\gamma_5a^\mu\Big)q-\bar{q}(s-\mathrm{i}\gamma_5p)q,\end{aligned}\tag{2.9}$$

其中

$$v_\mu=v^a_\mu\frac{\lambda_a}{2},a_\mu=a^a_\mu\frac{\lambda_a}{2},s_\mu=s^a_\mu\frac{\lambda_a}{2},p_\mu=p^a_\mu\frac{\lambda_a}{2},\tag{2.10}$$

分别是引入的矢量、轴矢量、标量和赝标量外场。当我们取外源 $v^\mu=v^\mu_{(s)}=a^\mu=p=0$ 以及 $s=diag(m_u,m_d,m_s)$ 是，上述拉氏量回到原始 QCD 拉氏量。

我们可以将上述拉氏量通过手征投影算符改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\mathcal{L}^0_{QCD}+\bar{q}_L\gamma^\mu\Big(l_\mu+\frac{1}{3}v^{(s)}_\mu\Big)q_L+\bar{q}_R\gamma_\mu\Big(r_\mu+\frac{1}{3}v^{(s)}_\mu\Big)\\&-\bar{q}_R(s+\mathrm{i}p)q_L-\bar{q}_L(s-\mathrm{i}p)q_R,\end{aligned}\tag{2.11}$$

其中 $r_\mu=v_\mu+a_\mu,l_\mu=v_\mu-a_\mu$。如果想要上述拉氏量在 $SU(3)_L\times SU(3)_R$ 下保持不变，即

$$\begin{aligned}q_R&\mapsto V_R(x)q_R\\q_L&\mapsto V_L(x)q_L,\end{aligned}\tag{2.12}$$

则需要外场作如下变换

$$\begin{aligned}r_\mu&\mapsto V_Rr_\mu V_R^\dagger+\mathrm{i}V_R\partial_\mu V_R^\dagger,\\l_\mu&\mapsto V_Ll_\mu V_L^\dagger+\mathrm{i}V_L\partial_\mu V_L^\dagger,\\v^{(s)}_\mu&\mapsto v_\mu-\partial_\mu\Theta,\\s+\mathrm{i}p&\mapsto V_R(s+\mathrm{i}p)V_L^\dagger,\\s-\mathrm{i}p&\mapsto V_L(s-\mathrm{i}p)V_R^\dagger.\end{aligned}\tag{2.13}$$

除了要求拉氏量在上述局域 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下保持不变之外，我们还要求拉氏量能够满足 C、P、T 对称。由于 CPT 定理的存在，因此我们可以只考虑 C、P 变换下上述外场的变换情况。

在 P 变换下，夸克场和拉氏量的变换为

$$q_f(t,\vec{x}) \overset{P}{\mapsto} \gamma_0 q_f(t,-\vec{x}), \mathcal{L}(t,\vec{x}) \overset{P}{\mapsto} \mathcal{L}(t,-\vec{x}), \tag{2.14}$$

因此外场的变换为

$$v^\mu \overset{P}{\mapsto} v_\mu, v^\mu_{(s)} \overset{P}{\mapsto} v^{(s)}_\mu, a^\mu \overset{P}{\mapsto} -a_\mu, s \overset{P}{\mapsto} s, p \overset{P}{\mapsto} -p. \tag{2.15}$$

同理可得 C 变换下外场的变换为

$$v_\mu \overset{C}{\mapsto} -v^T_\mu, v^{(s)}_\mu \overset{C}{\mapsto} -v^{(s)T}_\mu, a_\mu \overset{C}{\mapsto} a^T_\mu, s \overset{C}{\mapsto} s^T, p \overset{C}{\mapsto} p^T. \tag{2.16}$$

考虑一个简单的例子，QED 是 U(1) 规范理论，而 U(1) 群是 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的子群。我们可以令

$$r_\mu = l_\mu = -e\mathcal{A}_\mu Q, \tag{2.17}$$

其中 $Q = diag(2/3, -1/3, -1/3)$，此时可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ext}} &= -e\mathcal{A}_\mu(\bar{q}_L Q\gamma_\mu q_L + \bar{q}_R Q\gamma_\mu q_R) = -e\mathcal{A}_\mu \bar{q} Q\gamma_\mu q \\ &= -e\mathcal{A}_\mu\Big(\frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s\Big) = -e\mathcal{A}_\mu J^\mu,\end{aligned} \tag{2.18}$$

即光子场和夸克场的耦合。

3 两个常数

首先我们已经将破缺的 8 个 Goldstone 玻色子参数化为

$$U(x) = \exp\Big(\frac{\mathrm{i}\phi(x)}{F_0}\Big), \tag{2.19}$$

其中 ϕ 取自（1.8）式，F_0 为手征极限下 π 介子的真空衰变常数，带有质量量纲。U 在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 群下的变换方式为

$$U(x) \mapsto RU(x)L^\dagger. \tag{2.20}$$

此时，我们能写下的包含最少导数且保证手征不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F_0^2}{4}\mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger). \tag{2.21}$$

考虑无穷小的 $SU(3)_L$ 变换，可以得到左手流为

$$J^\mu_{La} = \mathrm{i}\frac{F_0^2}{4}\mathrm{Tr}(\lambda_a \partial^\mu U^\dagger U), \tag{2.22}$$

同理可得右手流为

$$J_{Ra}^{\mu}=-\mathrm{i}\frac{F_0^2}{4}\mathrm{Tr}(\lambda_a U\partial^{\mu}U^{\dagger}). \tag{2.23}$$

定义矢量流和轴矢流分别为

$$\begin{aligned} J_{Va}^{\mu}=&J_{Ra}^{\mu}+J_{La}^{\mu}=-\mathrm{i}\frac{F_0^2}{4}\mathrm{Tr}(\lambda_a[U,\partial^{\mu}U^{\dagger}]), &(2.24)\\ J_{Aa}^{\mu}=&J_{Ra}^{\mu}-J_{La}^{\mu}=-\mathrm{i}\frac{F_0^2}{4}\mathrm{Tr}(\lambda_a\{U,\partial^{\mu}U^{\dagger}\}). &(2.25)\end{aligned}$$

将 U 做泰勒展开，我们可以得到轴矢流最低阶为

$$J_{Aa}^{\mu}=-F_0\partial^{\mu}\phi_a+\cdots, \tag{2.26}$$

此时我们可以计算轴矢流在 Goldstone 玻色子和真空态之间的矩阵元为

$$\langle 0|J_{Aa}^{\mu}(x)|\phi_b(p)\rangle=\langle 0|-F_0\partial^{\mu}\phi_a(x)|\phi_b(x)\rangle=\mathrm{i}p^{\mu}F_0\mathrm{exp}(-\mathrm{i}p\cdot x)\delta_{ab}, \tag{2.27}$$

从中我们可以看到 F_0 的物理意义。

严格的对称性破缺我们可以得到严格的零质量 Goldstone 玻色子，但是通过实验我们知道 π,K 等介子是有质量的，因此我们必须引入 QCD 中显式的质量破缺项，且假设质量矩阵按照（1.3）进行变换。则此时我们能写下的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}}=\frac{F_0^2B_0}{2}\mathrm{Tr}(\mathcal{M}U^{\dagger}+U\mathcal{M}^{\dagger}), \tag{2.28}$$

其中下标 s.b. 代表对称性破缺。通过比较其基态能量密度关于夸克质量的导数和 QCD 中相应量

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{H}_{\text{eff}}\rangle_{min}&=-F_0^2B_0(m_u+m_d+m_s), &(2.29)\\ \frac{\partial\langle 0|\mathcal{H}_{\text{QCD}}|0\rangle}{\partial m_q}\Big|_{m_u=m_d=m_s=0}&=\frac{1}{3}\langle\bar{q}q\rangle_0 &(2.30)\end{aligned}$$

可得，

$$3F_0^2B_0=-\langle\bar{q}q\rangle_0, \tag{2.31}$$

即 B_0 与标量单态夸克凝聚有关。

接着将 U 进行泰勒展开，我们可以得到

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}}=-\frac{B_0}{2}\mathrm{Tr}(\phi^2\mathcal{M})+\cdots \tag{2.32}$$

代入（1.8）式，我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\phi^2\mathcal{M})=&2(m_u+m_d)\pi^+\pi^-+2(m_u+m_s)K^+K^-+2(m_d+m_s)K^0\bar{K}^0\\ &+(m_u+m_d)\pi^0\pi^0+\frac{2}{\sqrt{3}}(m_u-m_d)\pi^0\eta+\frac{m_u+m_d+4m_s}{3}\eta^2.\end{aligned} \tag{2.33}$$

为简单起见，令 $m_u = m_d = \hat{m}$，因此我们可以得到在最低阶 Goldstone 玻色子质量和夸克质量的关系

$$M_\pi^2 = 2B_0\hat{m}, \tag{2.34}$$

$$M_k^2 = B_0(\hat{m} + m_s), \tag{2.35}$$

$$M_\eta^2 = \frac{2}{3}B_0(\hat{m} + 2m_s). \tag{2.36}$$

此时我们可以得到著名的 Gell-Mann-Okubo 关系：

$$4M_K^2 = 3M_\eta^2 + M_\pi^2. \tag{2.37}$$

4 最低阶手征拉氏量

有了上面的准备之后，我们就可以开始构造手征拉氏量了。

首先，我们需要定义场算符的协变导数，以场算符 A 为例，协变导数为

$$D_\mu A = \partial_\mu A - \mathrm{i}r_\mu A + \mathrm{i}Al_\mu. \tag{2.38}$$

可以验证，协变导数在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 群下的变换方式为

$$D_\mu A \mapsto R(D_\mu A)L^\dagger. \tag{2.39}$$

由于有效拉氏量中会包含任意高阶的导数项，因此我们还需要引入外场的场强张量

$$f_{R\mu\nu} = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - \mathrm{i}[r_\mu, r_\nu], \tag{2.40}$$

$$f_{L\mu\nu} = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - \mathrm{i}[l_\mu, l_\nu]. \tag{2.41}$$

接着我们定义一个标量和赝标量外场的线性组合项 $\chi = 2B_0(s + \mathrm{i}p)$。

由于手征拉氏量是按照外动量阶数展开的，因此我们需要知道它们关于外动量的阶数，如下所示，

$$U = \mathcal{O}(q^0), D_\mu U = \mathcal{O}(q), r_\mu, l_\mu = \mathcal{O}(q), f_{L,R\mu\nu} = \mathcal{O}(q^2), \chi = \mathcal{O}(q^2), \tag{2.42}$$

因此可以写出满足对称性要求的二阶的手征拉式量如下 [5]，

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4}\mathrm{Tr}[D_\mu U(D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4}\mathrm{Tr}[\chi U^\dagger + U\chi^\dagger], \tag{2.43}$$

在这里我们舍弃了不满足 P 宇称的 $\mathrm{Tr}[\chi U^\dagger - U\chi^\dagger]$ 项，其中包含两个低能常数 F_0 和 B_0。

5 $\pi - \pi$ 散射的例子

考虑一个 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 的二阶拉氏量，即 $m_u = m_d = 0$，而 m_s 依旧取其物理值，且令 $r_\mu = l_\mu = 0$，

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{4}\mathrm{Tr}(\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger) + \frac{F^2}{4}\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger), \tag{2.44}$$

其中

$$\chi = 2B\mathcal{M} = 2B\begin{pmatrix} \hat{m} & 0 \\ 0 & \hat{m} \end{pmatrix},$$

$$U = \exp\Big(\mathrm{i}\frac{\phi}{F}\Big), \phi = \sum_{i=1}^{3}\phi_i\tau_i = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\phi^- & -\pi^0 \end{pmatrix},$$

不带有下标 0 的 F 和 B 表示我们此时考虑的对称性是 $SU(2)_L \times SU(2)_R$。我们将

$$U = 1 + \mathrm{i}\frac{\phi}{F} - \frac{1}{2}\frac{\phi^2}{F^2} - \frac{\mathrm{i}}{6}\frac{\phi^3}{F^3} + \frac{1}{24}\frac{\phi^4}{F^4} + \cdots \tag{2.45}$$

代入，可得

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2^{2\phi} + \mathcal{L}_2^{4\phi} + \cdots, \tag{2.46}$$

因为 $\mathcal{L}$ 不包含三点相互作用，因此最低阶相互作用项为

$$\mathcal{L}_2^{4\phi} = \frac{1}{6F^2}(\phi_i\partial^\mu\phi_i\partial_\mu\phi_j\phi_j - \phi_i\phi_i\partial_\mu\phi_j\partial^\mu\phi_j) + \frac{M^2}{24F^2}\phi_i\phi_i\phi_j\phi_j, \tag{2.47}$$

其中 $M^2 = 2B\hat{m}$。

我们可以计算上述相互作用项的矩阵元，例如

$$\langle p_c, c; p_d, d|\phi_i\partial^\mu\phi_i\partial_\mu\phi_j\phi_j|p_a, a; p_b, b\rangle \tag{2.48}$$

的收缩方式共 24 种，以其中一种为例

$$\langle p_c, c; p_d, d|\phi_i\partial^\mu\phi_i\partial_\mu\phi_j\phi_j|p_a, a; p_b, b\rangle$$

$$\Rightarrow \delta_{ic}\mathrm{i}p_d^\mu\delta_{id}(-\mathrm{i}p_{a\mu}\delta_{ja}\delta_{jb}) = p_a\cdot p_d\delta_{ab}\delta_{cd}$$

因此对应如图1所示的费曼图，可以得到其散射振幅为

$$\begin{aligned}\mathcal{M} =& \mathrm{i}\Big[\delta_{ab}\delta_{cd}\frac{s-M^2}{F^2} + \delta_{ac}\delta_{bd}\frac{t-M^2}{F^2} + \delta_{ad}\delta_{bc}\frac{u-M^2}{F^2}\Big] \\ &- \frac{\mathrm{i}}{3F^2}(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})(\Lambda_a + \Lambda_b + \Lambda_c + \Lambda_d),\end{aligned} \tag{2.49}$$

其中 $\Lambda_k = p_k^2 - M^2$。通常对于 $\pi_a(p_a) + \pi_b(p_b) \to \pi_c(p_c) + \pi_d(p_d)$ 过程的 T 矩阵（$\mathcal{M} = \mathrm{i}T$）可以参数化为

$$T_{ab;cd}(p_a, p_b; p_c, p_d) = \delta_{ab}\delta_{cd}A(s,t,u) + \delta_{ac}\delta_{bd}A(t,s,t) + \delta_{ad}\delta_{bc}A(u,t,s) \tag{2.50}$$

其中 $A(s,t,u) = A(s,u,t)$。可以看出在 $\mathcal{O}(q^2)$ 阶，

$$A(s,t,u) = \frac{s-M^2}{F^2}. \tag{2.51}$$

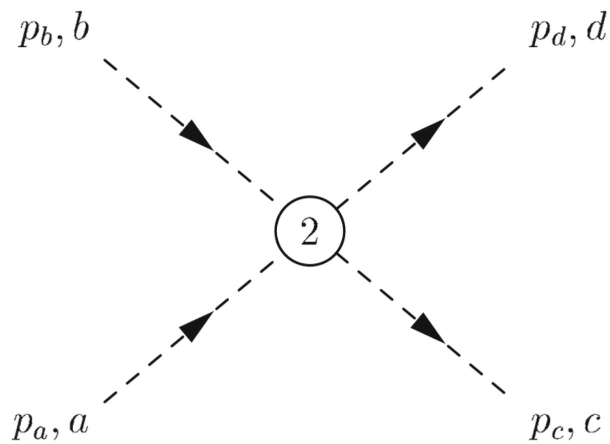


Figure 1: 最低阶 $\pi\pi$ 散射

除了手征之外，我们还通常利用同位旋对称性来研究 $\pi\pi$ 散射，在 $SU(2)$ 极限下，π 介子组成同位旋三重态，因此强相互作用是同位旋不变的。对于 T 矩阵，我们可以写出

$$\langle I', I_3'|T|I, I_3\rangle = T^I \delta_{II'}\delta_{I_3 I_3'} \tag{2.52}$$

因此 $\pi\pi$ 散射的同位旋振幅可以根据（2.50）式拆解为 [4]

$$\begin{aligned} T^{I=0} &= 3A(s,t,u) + A(t,u,s) + A(u,s,t), \\ T^{I=1} &= A(s,t,u) - A(u,s,t), \\ T^{I=2} &= A(t,u,s) + A(u,s,t). \end{aligned} \tag{2.53}$$

计算开启域附近的 T 矩阵，我们可以得到 s 波的散射长度

$$T^{I=0}|_{\text{thr}} = 32\pi a_0^0,\ T^{I=2}|_{\text{thr}} = 32\pi a_0^2, \tag{2.54}$$

其中 a 的上标代表同位旋，下标代表 s 波散射。由于玻色对称性，$T^{I=1} = 0$。结合手征理论，我们可以得到两个散射长度的值。

首先，我们有

$$A(s_{\text{thr}}, t_{\text{thr}}, u_{\text{thr}}) = \frac{3M_\pi^2}{F_\pi^2}, \tag{2.55}$$

其中 F_π、M_π 和 F、M 的区别仅在 $\mathcal{Q}(p^4)$ 开始显现。在这里，我们先用带有下标的表示。因此，对于不同的同位旋振幅我们有

- I=0:

$$
\begin{aligned}
T^{I=0}|_{\rm thr} =&[3A(s,t,u)+A(t,u,s)+A(u,s,t)]|_{\rm thr} \\
=&[2A(s,t,u)+A(s,t,u)+A(t,u,s)+A(u,s,t)]|_{\rm thr} \\
=&\frac{6M_\pi^2}{F_\pi^2}+\frac{[s+t+u-3M_\pi^2]|_{\rm thr}}{F_\pi^2} \\
=&\frac{7M_\pi^2}{F_\pi^2}.
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

- I=2:

$$
\begin{aligned}
T^{I=2}|_{\rm thr} =&[A(t,u,s)+A(u,s,t)]|_{\rm thr} \\
=&[A(t,u,s)+A(u,s,t)+A(s,t,u)-A(s,t,u)]|_{\rm thr} \\
=&\frac{M_\pi^2}{F_\pi^2}-\frac{3M_\pi^2}{F_\pi^2} \\
=&-\frac{2M_\pi^2}{F_\pi^2}.
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

代回（2.54）式，我们可以得到

$$
a_0^0=\frac{7M_\pi^2}{32F_\pi^2}=0.159,\ a_0^2=-\frac{M_\pi^2}{16\pi F_\pi^2}=-0.0454,
\tag{2.58}
$$

在这里我们代入了 $F_\pi=92.4\mathrm{MeV}$ 和 $M_\pi=M_{\pi^+}=139.57\mathrm{MeV}$。

6 超出领头阶

我们在这里直接给出 $\mathcal{O}(q^4)$ 的拉氏量 [5]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 =&L_1\Big\{\mathrm{Tr}[D_\mu U(D^\mu U)^\dagger]\Big\}^2+L_2\mathrm{Tr}[D_\mu(D_\nu U)^\dagger]\mathrm{Tr}[D^\mu U(D^\nu)^\dagger] \\
&+L_3\mathrm{Tr}[D_\mu U(D^\mu U)^\dagger D_\nu U(D^\nu U)^\dagger]+L_4\mathrm{Tr}[D_\mu U(D^\mu U)^\dagger]\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger) \\
&+L_5\mathrm{Tr}[D_\mu U(D^\mu U)^\dagger(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)]+L_6[\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger+U\chi^\dagger)]^2 \\
&+L_7[\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger-U\chi^\dagger)]^2+L_8\mathrm{Tr}(U\chi^\dagger U\chi^\dagger+\chi U^\dagger\chi U^\dagger) \\
&-\mathrm{i}L_9\mathrm{Tr}[f_{\mu\nu}^R D^\mu U(D^\nu U)^\dagger+f_{\mu\nu}^L(D^\mu U)^\dagger D^\nu U]+L_{10}\mathrm{Tr}(Uf_{\mu\nu}^L U^\dagger f_R^{\mu\nu}) \\
&+H_1\mathrm{Tr}(f_{\mu\nu}^R f_R^{\mu\nu}+f_{\mu\nu}^L f_L^{\mu\nu})+H_2\mathrm{Tr}(\chi\chi^\dagger).
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

这里每项前面的系数同 F_0 和 B_0 一样，目前没法通过理论决定，只能由实验给出。

$\mathcal{O}(q^4)$ 阶的 Goldstone 玻色子的质量

为了计算 Goldstone 玻色子的自能，在这里我们忽略外场，且假设 $m_u=m_d=\hat{m}$，m_s 取其物理质量。首先，最低阶拉氏量给出的费曼传播子为

$$
\Delta_{F\phi}(p)=\frac{1}{p^2-M_{\phi,2}^2}+\mathrm{i}\epsilon,\ \phi=\pi,K,\eta,
\tag{2.60}
$$

Figure 2: $\mathcal{O}(q^4)$ 阶的自能图

其中 $M_{\pi,2}^2 = 2B_0\hat{m}, M_{K,2}^2 = B_0(\hat{m}+m_s), M_{\eta,2}^2 = \frac{2}{3}B_0(\hat{m}+2m_s)$，下标 2 表示手征二阶给出的结果。用 $-\mathrm{i}\Sigma_\phi(p^2)$ 代表单粒子不可约图，则完整的传播子为

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\Delta_\phi(p) &= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \frac{\mathrm{i}}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + \mathrm{i}\epsilon}[-\mathrm{i}\Sigma_\phi(p^2)]\frac{\mathrm{i}}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \cdots \\ &= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - M_{\phi,2}^2 - \Sigma_\phi(p^2) + \mathrm{i}\epsilon}.\end{aligned} \tag{2.61}$$

物理质量定义在传播子的极点处

$$M_\phi^2 - M_{\phi,2}^2 - \Sigma_\phi(M_\phi^2) = 0 \tag{2.62}$$

$\mathcal{O}(q^4)$ 阶的自能图如图2所示，由图可以看出，我们需要的相互作用拉氏量应具有如下形式

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_2^{4\phi} + \mathcal{L}_4^{2\phi}, \tag{2.63}$$

其中的 $\mathcal{L}_2^{4\phi}$ 仿照 $\pi\pi$ 散射的例子可以给出如下

$$\mathcal{L}_2^{4\phi} = \frac{1}{48F_0^2}\Big\{\mathrm{Tr}([\phi,\partial_\mu\phi][\phi,\partial^\mu\phi]) + 2B_0\mathrm{Tr}(\mathcal{M}\phi^4)\Big\} \tag{2.64}$$

观察 $\mathcal{L}_4^{2\phi}$ 可以发现，由于外场等于 0，因此其中正比于 L_9, L_{10}, H_1, H_2 的项没有贡献。此外，L_1, L_2, L_3 的项都是 $\mathcal{O}(\phi^4)$ 的，不需要考虑。因此对于 $\mathcal{L}_4^{2\phi}$ 有贡献的只能 $L_4 - L_8$ 项。以 L_4 为例，

$$\begin{aligned}L_4\mathrm{Tr}[D_\mu U(D^\mu U)^\dagger]\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger) =& L_4\frac{2}{F_0^2}[\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 + 2\partial_\mu\pi^+\partial_\mu\pi^- \\ &+ 2\partial_\mu K^+\partial^\mu K^- + 2\partial_\mu K^0\partial^\mu\bar{K}^0 + \mathcal{O}(\phi^4)] \\ &\times[4B_0(2\hat{m}+m_s) + \mathcal{O}(\phi^2)].\end{aligned} \tag{2.65}$$

对其余项同样分析，则可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4^{2\phi} =& -\frac{1}{2}(a_\pi\pi^0\pi^0 + b_\pi\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0) - a_\pi\pi^+\pi^- - b_\pi\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^- \\ &- a_K K^+K^- - b_K\partial_\mu K^\dagger\partial^\mu K^- - a_K K^0\bar{K}^0 - b_K\partial_\mu K^0\partial^\mu\bar{K}^0 \\ &- \frac{1}{2}(a_\eta\eta^2 + b_\eta\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta),\end{aligned} \tag{2.66}$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_\pi =&\frac{64B_0^2}{F_0^2}[(2\hat{m}+m_s)\hat{m}L_6+\hat{m}^2L_8],\\
b_\pi =&-\frac{16B_0}{F_0^2}[(2\hat{m}+m_s)L_4+\hat{m}L_5],\\
a_K =&\frac{32B_0^2}{F_0^2}\Big[(2\hat{m}+m_s)(\hat{m}+m_s)L_6+\frac{1}{2}(\hat{m}+m_s)^2L_8\Big],\\
b_K =&-\frac{16B_0}{F_0^2}\Big[(2\hat{m}+m_s)L_4+\frac{1}{2}(\hat{m}+m_s)L_5\Big],\\
a_\eta =&\frac{64B_0^2}{3F_0^2}\Big[(2\hat{m}-m_s)(\hat{m}+2m_s)L_6+2(\hat{m}-m_s)^2L_7+(\hat{m}^2+2m_s^2)L_8\Big],\\
b_\eta =&-\frac{16B_0^2}{F_0^2}\Big[(2\hat{m}+m_s)L_4+\frac{1}{3}(\hat{m}+2m_s)L_5\Big].
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

在 $\mathcal{O}(q^4)$ 阶，自能具有如下形式

$$
\Sigma_{\phi,4}(p^2)=A_\phi+B_\phi p^2, \tag{2.68}
$$

其中 A_ϕ, B_ϕ 来自 $\mathcal{L}_2$ 的圈图和 $\mathcal{L}_4$ 树图的贡献。树图水平 $\mathcal{L}_4$ 的贡献很容易从拉氏量中直接读出，如 η 项

$$
-\mathrm{i}\Sigma_{\eta,4}^{\mathrm{tree}}(p^2)=2\mathrm{i}\Big[-\frac{1}{2}a_\eta-b_\eta\frac{1}{2}(\mathrm{i}p_\mu)(-\mathrm{i}p^\mu)\Big]=-\mathrm{i}(a_\eta+b_\eta p^2), \tag{2.69}
$$

观察 $\mathcal{L}_2^{4\phi}$，我们可以发现只有 $\phi\phi\partial\phi\partial\phi$ 和 ϕ^4 项可能存在，其余交叉项在积分之后都会消失。以 π^0 的自能为例，我们在（2.49）中取 $a=c=0, b=d=j, p_a=p_c=p, p_b=p_d=k$，然后对中间变量积分，可以得到

$$
\mathcal{M}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{3F_0^2}\Big(-4p^2-4k^2+5M_{\pi,2}^2\Big)\frac{\mathrm{i}}{k^2-M_{\pi,2}^2+\mathrm{i}\epsilon}, \tag{2.70}
$$

其中 1/2 是对称因子。

我们先将维数正规化中常用的公式先写下来，

$$
I(M^2,\mu^2,n)=\mu^{4-n}\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\frac{\mathrm{i}}{k^2-M^2+\mathrm{i}\epsilon}=\frac{M^2}{16\pi^2}\Big[R+\ln\Big(\frac{M^2}{\mu^2}\Big)\Big]+\mathcal{O}(n-4), \tag{2.71}
$$

$$
R=\frac{2}{n-4}-[\ln(4\pi)+\Gamma'(1)+1]. \tag{2.72}
$$

因此我们可以得到 π^0 的自能图为

$$
\frac{\mathrm{i}}{6F_0^2}(-4p^2+M_{\pi,2}^2)I(M_{\pi,2}^2,\mu^2,n). \tag{2.73}
$$

在考虑所有圈贡献之后，结合树图，我们可以得到

$$\begin{aligned}A_\pi =&\frac{M_{\pi,2}^2}{F_0^2}\Big\{-\frac{1}{6}I(M_{\pi,2}^2)-\frac{1}{6}I(M_{\eta,2}^2)-\frac{1}{3}I(M_{K,2}^2)+32[(2\hat{m}+m_s)B_0L_6+\hat{m}B_0L_8]\Big\},\\ B_\pi =&\frac{2}{3}\frac{I(M_{\pi,2}^2)}{F_0^2}+\frac{1}{3}\frac{I(M_{K,2}^2)}{F_0^2}-\frac{16B_0}{F_0^2}[(2\hat{m}+m_s)L_4+\hat{m}L_5],\end{aligned} \tag{2.74}$$

其中带有 $I(M^2)$ 的项均来自于圈贡献，其余项来自树图贡献。同理可以得到其他介子的 A_ϕ, B_ϕ，如下

$$\begin{aligned}A_K =&\frac{M_{K,2}^2}{F_0^2}\Big\{\frac{1}{12}I(M_{\eta,2}^2-\frac{1}{4}I(M_{\pi,2}^2))-\frac{1}{2}I(M_{K,2}^2)\\ &+32\Big[(2\hat{m}+m_s)B_0L_6+\frac{1}{2}(\hat{m}+m_s)B_0L_8\Big]\Big\}\\ B_K =&\frac{1}{4}\frac{I(M_{\eta,2}^2)}{F_0^2}+\frac{1}{4}\frac{I(M_{\pi,2}^2)}{F_0^2}+\frac{1}{2}\frac{I(M_{K,2}^2}{F_0^2}-16\frac{B_0}{F_0^2}\Big[(2\hat{m}+m_s)L_4+\frac{1}{2}(\hat{m}+m_s)L_5\Big],\\ A_\eta =&\frac{M_{\eta,2}^2}{F_0^2}\Big[-\frac{2}{3}I(M_{\eta,2}^2)\Big]+\frac{M_{\pi,2}^2}{F_0^2}\Big[\frac{1}{6}I(M_{\eta,2}^2)+\frac{1}{3}I(M_{K,2}^2)\Big]\\ &+\frac{M_{\eta,2}^2}{F_0^2}[16M_{\eta,2}^2L_8+32(2\hat{m}+m_s)B_0L_6]+\frac{128}{9}\frac{B_0^2(\hat{m}-m_s)^2}{F_0^2}(3L_7+L_8),\\ B_\eta =&\frac{I(M_{K,2}^2)}{F_0^2}-\frac{16}{F_0^2}(2\hat{m}+m_s)B_0L_4-8\frac{M_{\eta,2}^2}{F_0^2}L_5.\end{aligned} \tag{2.75}$$

这些 A_ϕ, B_ϕ 显然都是发散的。

利用上面计算的结果我们就可以写出 $\mathcal{O}(q^4)$ 下的质量

$$M_\phi^2 = M_{\phi,2}^2 + A_\phi + B_\phi M_\phi^2 \tag{2.76}$$

$$\Rightarrow M_\phi^2 = \frac{M_{\phi,2}^2 + A_\phi}{1-B_\phi} = M_{\phi,2}^2(1+B_\phi)+A_\phi+\mathcal{O}(q^6). \tag{2.77}$$

为抵消发散，重定义 L_i 系数为

$$L_i = L_i^r + \frac{\Gamma_i}{32\pi^2}R. \tag{2.78}$$

将相关数据绘制如表1

我们将最后所得的结果展示如下

$$\begin{aligned}M_{\pi,4}^2 =&M_{\pi,2}^2\Big\{1+\frac{M_{\pi,2}^2}{32\pi^2F_0^2}\ln\Big(\frac{M_{\pi,2}^2}{\mu^2}\Big)-\frac{M_{\eta,2}^2}{96\pi^2F_0^2}\ln\Big(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2}\Big)\\ &+\frac{16}{F_0^2}[(2\hat{m}+m_s)B_0(2L_6^r-L_4^r)+\hat{m}B_0(2L_8^r-L_5^r)]\Big\},\end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}M_{K,4}^2 =&M_{K,2}^2\Big\{1+\frac{M_{\eta,2}^2}{48\pi^2F_0^2}\ln\Big(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2}\Big)\\ &+\frac{16}{F_0^2}\Big[(2\hat{m}+m_s)B_0(2L_6^r-L_4^r)+\frac{1}{2}(\hat{m}+m_s)B_0(2L_8^r-L_5^r)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{2.80}$$

系数	经验数值	Γ_i
L_4^r	-0.3± 0.5	$\frac{1}{8}$
L_5^r	1.4± 0.5	$\frac{3}{8}$
L_6^r	-0.2± 0.3	$\frac{11}{144}$
L_7^r	-0.4± 0.2	0
L_8^r	-0.9± 0.3	$\frac{5}{48}$

Table 1: 系数重整化

$$
\begin{aligned}
M_{\eta,4}^2 =& M_{\eta,2}^2\Big[1+\frac{M_{K,2}^2}{16\pi^2F_0^2}\ln\Big(\frac{M_{K,2}^2}{\mu^2}\Big)-\frac{M_{\eta,2}^2}{24\pi^2F_0^2}\ln\Big(\frac{M_{\eta,2}^2}{\mu^2}\Big)\\
&+\frac{16}{F_0^2}(2\hat{m}+m_s)B_0(2L_6^r-L_4^r)+8\frac{M_{\eta,2}^2}{F_0^2}(2L_8^r-L_5^r)\Big]\\
&+M_{\pi,2}^2\Big[\frac{M_{\eta,2}^2}{96\pi^2F_0^2}\ln\Big(\frac{M_{\pi,2}^2}{\mu^2}\Big)-\frac{M_{\pi,2}^2}{32\pi^2F_0^2}\ln(\frac{M_{\pi,2}^2}{\mu^2})+\frac{M_{K,2}^2}{48\pi^2F_0^2}\ln\Big(\frac{M_{K,2}^2}{\mu^2}\Big)\Big]\\
&+\frac{128}{9}\frac{B_0^2(\hat{m}-m_s)^2}{F_0^2}(3L_7^r+L_8^r).
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

3 重子

1 拉氏量

首先我们用 Ψ 表示核子二重态

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

我们知道在 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ 变换下，U 和核子二重态的变换规律为

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ \Psi(x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} V_R(x)U(x)V_L^\dagger(x) \\ \exp[-\mathrm{i}\Theta(x)]K[V_L(x), V_R(x), U(x)]\Psi(x) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

其中 $K(L,R,U) = \sqrt{RUL^\dagger}^{-1} R\sqrt{U}$，而 $\exp[-\mathrm{i}\Theta(x)]$ 表示 $U(1)_V$ 的变换。

我们首先定义一个叫手征联络的量

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}[u^\dagger(\partial_\mu - \mathrm{i}r_\mu) + u(\partial_\mu - \mathrm{i}l_\mu)u^\dagger], \tag{3.3}$$

其中 u 被定义为 $u^2 = U$。然后我们可以定义协变导数

$$D_\mu\Psi = \left(\partial_\mu + \Gamma_\mu - \mathrm{i}v_\mu^{(s)}\right)\Psi. \tag{3.4}$$

可以证明

$$\begin{aligned} D'_\mu\Psi' =& \left[\partial_\mu + \Gamma'_\mu - \mathrm{i}(v_\mu^{(s)} - \partial_\mu\Theta)\right]\exp(-\mathrm{i}\Theta)K\Psi \\ =& \exp(-\mathrm{i}\Theta)K(\partial_\mu + \Gamma_\mu - \mathrm{i}v_\mu^{(s)})\Psi. \end{aligned} \tag{3.5}$$

除了手征联络之外，我们再定义一个叫 chiral vielbein 的量

$$u_\mu = \mathrm{i}[u^\dagger(\partial_\mu - \mathrm{i}r_\mu)u - u(\partial_\mu - \mathrm{i}l_\mu)u^\dagger], \tag{3.6}$$

其在宇称变换下，类似于轴矢流变换。

我们考虑 πN 相互作用的有效拉氏量，其应该具有 $\bar{\Psi}\hat{O}\Psi$ 形式，而 $\hat{O}$ 在 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ 应按照 $K\hat{O}K^\dagger$ 这样变换。为了保证拉氏量是厄米的，洛伦兹不变的，且在 C、P、T 变换下具有偶宇称，最简单的形式为

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\Psi}(\mathrm{i}\not{D} - m + \frac{\mathrm{g_A}}{2}\gamma^\mu\gamma_5 u_\mu)\Psi. \tag{3.7}$$

其中包含两个低能有效常数，m: 核子的质量，$\mathrm{g_A}$: 轴矢流耦合常数。这两个常数同样目前没法由理论给出，只能从实验中得到。我们把这两个量的物理取值分别记为 $m = m_N$，$\mathrm{g_A} = g_A$，g_A 可以从从中子衰变实验中给出 $g_A = 1.2694 \pm 0.0028$。

2 Goldberger-Treiman 关系

利用（3.7）式来计算赝标密度和轴矢量流在单核子态之间的矩阵元，

$$\langle N(p')|\partial_\mu A_i^\mu(0)|N(p)\rangle = \langle N(p')|\hat{m}P_i(0)|N(p)\rangle, \tag{3.8}$$

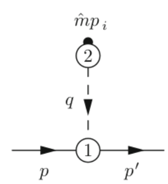
其中 $\hat{m} = m_u = m_d$。

赝标密度的矩阵元可以参数化为

$$\hat{m}\langle N(p')|P_i(0)|N(p)\rangle = \frac{M_\pi^2 F_\pi}{M_{\pi^2-t}} G_{\pi N}(t)\mathrm{i}\bar{u}(p')\gamma_5\tau_i u(p), \tag{3.9}$$

其中 $G_{\pi N}(t)$ 是与 $\hat{m}P_i(x)$ 相关的形状因子。而 $\hat{m}P_i(x)/(M_\pi^2 F_\pi)$ 代表内插场，因此 $G_{\pi N}(t)$ 也表示 πN 的形状因子。而 πN 耦合常数 $g_{\pi N}$ 被定义为 $g_{\pi N} = G_{\pi N}(t = M_\pi^2)$。

在手征最低阶展开，我们可以得到赝标密度和 π 介子场的耦合，再结合（3.7）式，我们可以得到如下所示费曼图 其中赝标场与 π 的耦合由下面的拉式量给出



$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \mathrm{i}\frac{F^2 B}{2}\mathrm{Tr}(pU^\dagger - Up) = 2BFp_i\phi_i + \cdots, \tag{3.10}$$

而 πNN 三点相互作用顶点由（3.7）给出，展开后可以得到

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{g}_A}{F}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\phi_j\tau_j\Psi. \tag{3.11}$$

因此，对于进入的 $\pi_i(q)$ 场，费曼规则如下

$$\mathrm{i}\Big(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{g}_A}{F}\Big)\gamma^\mu\gamma_5\tau_j\delta_{ji}(-\mathrm{i}q_\mu) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{g}_A}{F}\not{q}\gamma_5\tau_i. \tag{3.12}$$

最后图的结果为

$$\hat{m}2BF\frac{\mathrm{i}}{t-M^2}\bar{u}(p')\Big(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{g}_A}{F}\not{q}\gamma_5\tau_i\Big)u(p) = M^2F\frac{m\mathrm{g}_A}{F}\frac{1}{M^2-t}\bar{u}(p')\gamma_5\mathrm{i}\tau_i u(p). \tag{3.13}$$

通过与（3.9）比较可得

$$G_{\pi N}(t) = \frac{m}{F}\mathrm{g}_A. \tag{3.14}$$

一般情况下我们定义 $\pi - N$ 的耦合常数为

$$g_{\pi N} = G_{\pi N}(M_\pi^2) = \frac{m}{F}\mathrm{g}_A, \tag{3.15}$$

上式即著名的 Goldberger-Treiman 关系。

3 πN 散射

考虑最低阶的 πN 耦合，并且假设没有外场 $l_\mu = r_\mu = v_\mu^{(s)} = 0$，因此有

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}(u^{\dagger\partial_\mu u + u\partial_\mu} u^\dagger),\ u_\mu = \mathrm{i}(u^\dagger \partial_\mu u - u\partial_\mu u^\dagger). \tag{3.16}$$

接着同样对 u 进行展开，我们可以得到

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{(1)} = -\frac{\mathrm{g_A}}{2F}\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\phi_a\tau_a\Psi, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_{\pi\pi NN}^{(1)} = -\frac{1}{4F^2}\epsilon_{abc}\bar{\Psi}\gamma^\mu\phi_a\partial_\mu\phi_b\tau_c\Psi. \tag{3.18}$$

其中第一项表示赝矢型相互作用，而第二项表示接触相互作用。

从上面的拉氏量中，我们可以得到如下的费曼规则：

1. 在三点相互作用中，对于入射的 $\pi_a(q)$，则写下 $-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{g_A}}{F}\not{q}\gamma_5\tau_a$
2. 在接触相互作用中，入射 $\pi_a(q)$，出射 $\pi_b(q')$，则可以写下

$$\mathrm{i}\Big(-\frac{1}{4F^2}\Big)\gamma^\mu\epsilon_{cde}[\delta_{da}\delta_{eb}\mathrm{i}q'_\mu + \delta_{db}\delta_{ea}(-\mathrm{i}q_\mu)]\tau_c = \frac{\not{q}+\not{q}'}{4F^2}\epsilon_{abc}\tau_c. \tag{3.19}$$

在考虑 πN 散射的时候，我们有如下图 因此我们的不变振幅 $\mathcal{M}$ 有

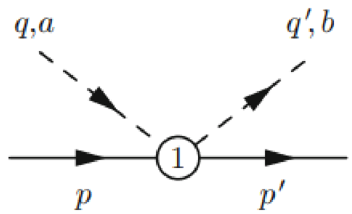


Figure 3: πN 接触项

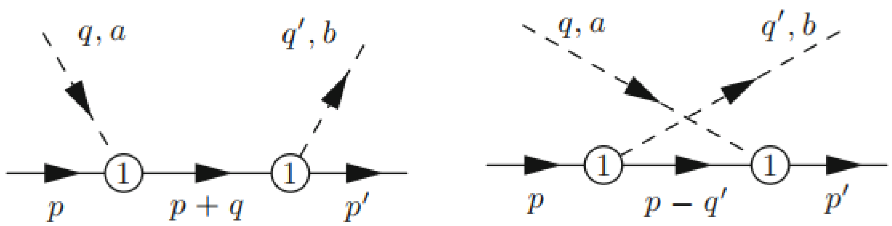


Figure 4: πN 的 s 道和 u 道

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{cont}} =&\bar{u}(p')\frac{\not{q}+\not{q}'}{4F^2}\epsilon_{abc}\tau_c u(p) = \mathrm{i}\frac{1}{2F^2}\bar{u}(p')\frac{1}{2}(\not{q}+\not{q}')\frac{1}{2}[\tau_b,\tau_a]u(p),\\ \mathcal{M}_{s+u} =&\mathrm{i}\frac{\mathrm{g_A}^2}{4F^2}\bar{u}(p')(-\not{q}')\gamma_5\frac{1}{\not{p}+\not{q}'-m}\not{q}\gamma_5\tau_b\tau_a u(p)\\ &+\mathrm{i}\frac{\mathrm{g_A}^2}{4F^2}\bar{u}(p')\not{q}\gamma_5\frac{1}{\not{p}'-\not{q}-m}(-\not{q}')\gamma_5\tau_a\tau_b u(p).\end{aligned} \tag{3.20}$$

其中 s 和 u 道可以通过交换 $a \leftrightarrow b$ 和 $q \leftrightarrow -q'$ 得到，因此我们可以只计算 s 道。使用狄拉克方程，我们可以将 $\mathcal{M}_s$ 化简到

$$\mathcal{M}_s = \mathrm{i}\frac{\mathrm{g_A}^2}{4F^2}\bar{u}(p')[(-\not{q}')+4m^2\gamma_5\frac{1}{\not{p}'+\not{q}'-m}\gamma_5+2m]\tau_b\tau_a u(p) \tag{3.21}$$

在最低阶的树图水平上，我们可以做 $m \to m_N, \mathrm{g}_A \to g_A$ 替换，利用

$$s - m_N^2 = 2m_N(v - v_B), \tag{3.22}$$

可以得到

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')\gamma_5\frac{1}{\not{p}'+\not{q}'-m_N}\gamma_5 u(p) =&\bar{u}(p')\gamma_5\frac{\not{p}'+\not{q}'+m_N}{(p'+q')^2-m_N^2}\gamma_5 u(p)\\ =&\frac{1}{2m_N(v-v_B)}\Big[-\frac{1}{2}\bar{u}(p'(\not{q}+\not{q}')u(p))\Big],\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中

$$\begin{aligned}v =&\frac{s-u}{4m_N} = \frac{(p+p'\cdot q')}{2m_N},\\ v_B =&-\frac{q\cdot q'}{2m_N} = \frac{t-2M_\pi^2}{4m_N}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

最后我们得到 s 道极点的贡献

$$\mathcal{M}_s = \mathrm{i}\frac{g_A^2}{4F_\pi^2}\bar{u}(p')\Big[2m_N+\frac{1}{2}(\not{q}+\not{q}')\Big(-1-\frac{2m_N}{v-v_B}\Big)\Big]\tau_b\tau_a u(p). \tag{3.25}$$

做 $a \leftrightarrow b, q \leftrightarrow -q'$ 替换后，我们可以直接得到 u 道的结果

$$\mathcal{M}_u = \mathrm{i}\frac{g_A^2}{4F_\pi^2}\bar{u}(p')\Big[2m_N+\frac{1}{2}(\not{q}+\not{q}')\Big(1-\frac{2m_N}{v+v_B}\Big)\Big]\tau_a\tau_b u(p). \tag{3.26}$$

除了手征之外，我们简单介绍一下过程 $\pi_a(q)+N(p) \to \pi_b(q')+N(p')$ 的 T 振幅 ($\mathcal{M} = \mathrm{i}T$):

$$\begin{aligned}T_{ab}(p,q;p',q') =&\frac{1}{2}\{\tau_b,\tau_a\}T^+(p,q;p',q')+\frac{1}{2}[\tau_b,\tau_a]T^-(p,q;p',q')\\ =&\delta_{ab}T^+(p,q;p',q')-\mathrm{i}\epsilon_{abc}\tau_c T^-(p,q;p',q'),\end{aligned} \tag{3.27}$$

其中

$$T^{\pm}(p,q;p',q') = \bar{u}(p')\Big[A^{\pm}(v,v_B)+\frac{1}{2}(\not{q}+\not{q}')B^{\pm}(v,v_B)\Big]u(p). \tag{3.28}$$

由于 $\pi\pi$ 具有交叉对称性

$$T_{ab}(p,q;p',q') = T_{ba}(p,-q';p',-q), \tag{3.29}$$

可以得到

$$\begin{aligned} A^+(-v,v_B) =& A^+(v,v_B),\ A^-(-v,v_B) = -A^-(v,v_B), \\ B^+(-v,v_B) =& -B^+(v,v_B),\ B^-(-v,v_B) = B^-(-v,v_B). \end{aligned} \tag{3.30}$$

类似于 $\pi\pi$ 散射的同位旋分解，对于 πN 散射，我们有

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{2}} =& T^+ + 2T^-, \\ T^{\frac{3}{2}} =& T^+ - T^-. \end{aligned} \tag{3.31}$$

值得注意的是我们采用的 π^+ 场和通常采用的 π^+ 相差一个负号。

结合手征场论给出的结果，我们可以得到 $A^\pm, B^\pm$，绘制如表

振幅	PV	接触项	Sum
A^+	$\frac{g_A^2 m_N}{F_\pi^2}$	0	$\frac{g_A^2 m_N}{F_\pi^2}$
A^-	0	0	0
B^+	$-\frac{g_A^2}{F_\pi^2}\frac{m_N v}{v^2-v_B^2}$	0	$-\frac{g_A^2}{F_\pi^2}\frac{m_N v}{v^2-v_B^2}$
B^-	$-\frac{g_A^2}{F_\pi^2}\frac{m_N v_B}{v^2-v_B^2} - \frac{g_A^2}{2F_\pi^2}$	$\frac{1}{2F_\pi^2}$	$\frac{1-g_A^2}{2F_\pi^2} - \frac{g_A^2}{F_\pi^2}\frac{m_N v}{v^2-v_B^2}$

为了提取出散射长度，我们讨论阈值附近的动力学

$$v|_{\text{thr}} = M_\pi \tag{3.32}$$

采用归一化方式

$$u(p) \to \sqrt{2m_N}\begin{pmatrix}\chi \\ 0\end{pmatrix},\ \bar{u}' \to \sqrt{2m_N}\begin{pmatrix}\chi'^\dagger & 0\end{pmatrix} \tag{3.33}$$

可以得到

$$T|_{\text{thr}} = 2m_N\chi'^\dagger[\delta_{ab}(A^+ + M_\pi B^+) - \mathrm{i}\epsilon_{abc}\tau_c(A^- + M_\pi B^-)]_{\text{thr}}\chi \tag{3.34}$$

代入

$$[v^2 - v_B^2]|_{\text{thr}} = M_\pi^2\Big(1 - \frac{\mu^2}{4}\Big),\ \mu = \frac{M_\pi}{m_N} = \frac{1}{7}, \tag{3.35}$$

可以得到

$$\begin{aligned} T|_{\text{thr}} =& 2m_N\chi'^\dagger\Big[\delta_{ab}\Big(\frac{g_A^2 m_/4N}{F_\pi^2} + M_\pi\Big(-\frac{g_A^2}{F_\pi^2}\Big)\frac{m_N}{M_\pi}\frac{1}{1-\mu^2}\Big) \\ & - \mathrm{i}\epsilon_{abc}\tau_c M_\pi\Big[\frac{1}{2F_\pi^2} - \frac{g_A^2}{2F_\pi^2} - \frac{g_A^2}{F_\pi^2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{1-\mu^2/4}\Big]\chi.\Big] \end{aligned} \tag{3.36}$$

质心系中微分散射截面有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{|\vec{q}'|}{|\vec{q}|}\Big(\frac{1}{8\pi\sqrt{s}}\Big)^2|T|^2, \tag{3.37}$$

在开启阈处

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\ |_{\mathrm{thr}} = \Big(\frac{1}{8\pi(m_N+M_\pi)}\Big)^2|T|^2_{\mathrm{thr}} = |a|^2. \tag{3.38}$$

s 波散射长度被定义为

$$a^{\pm}_{0+} = \frac{1}{8\pi(m_N+M_\pi)}T^{\pm}|_{\mathrm{thr}} = \frac{1}{4\pi(1+\mu)}[A^{\pm}+M_\pi B^{\pm}]|_{\mathrm{thr}}, \tag{3.39}$$

下标 0+ 分别表示 s 波和总轨道角动量。代入 A, B 的值，我们有

$$a^{-}_{0+} = \frac{M_\pi}{8\pi(1+\mu)F_\pi^2}[1+\mathcal{O}(q^2)], \tag{3.40}$$

$$a^{+}_{0+} = -\frac{g_A^2 M_\pi}{16\pi(1+\mu)F_\pi^2}\frac{\mu}{1-\mu^2/4} \sim \mathcal{O}(q^2). \tag{3.41}$$

如果代入 $a^{\frac{1}{2}} = a^{+}_{0+} + 2a^{-}_{0+}, a^{\frac{3}{2}} = a^{+}_{0+} - a^{-}_{0+}$，则可以验证 Weiberg-Tomozawa 关系。

$$a^I = -\frac{M_\pi}{8\pi(1+\mu)F_\pi^2}\Big[I(I+1)-\frac{3}{4}-2\Big], \tag{3.42}$$

其中 I 是总同位旋。

参考文献

[1] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.

[2] 郑汉青. 量子场论: 上. 北京大学出版社, 2018.

[3] David B Kaplan. lectures on effective field theory” . *arXiv preprint nuclth/0510023*, 5, 5.

[4] J Gasser and H Leutwyler. Chiral perturbation theory to one loop. *Annals of Physics*, 158(1):142–210, 1984.

[5] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark. *Nuclear Physics B*, 250(1):465–516, 1985.