

手征微扰场论

王旭

2021 年 12 月 12 日

目录

1	介绍	1
1	简介	1
2	流代数	2
2	介子的手征拉氏量	4
1	手征的 power-counting	4
2	外源	5
3	两个常数	6
4	最低阶手征拉氏量	8
5	$\pi - \pi$ 散射的例子	9
6	超出领头阶	12

1 介绍

该章主要参考 [1] [2]。

1 简介

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 (\bar{q}_i i \not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (1.1)$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$, $T^a = \lambda^a/2$ 。仅考虑动能项时, 具有 $U(3)_L \times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏, 系统的对称群为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$, 其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在, $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 遭到了破坏, 但当粒子质量相同时, 依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项,

$$\sum_i m_i \bar{q}_i q_i = \sum_{i,j} \bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} \quad (1.2)$$

其中 $M = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 。如果我们将质量项升级为场, 在最后结果的时候在取回常数, 并假设其在手征变换下进行如下变换,

$$M \rightarrow RML^\dagger \quad (1.3)$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 变换下不变, 由于质量项引起的系统对称性破缺是显式破缺。

但除质量项的显式破缺外, 当考虑夸克凝聚的时候, 系统也会自发破缺, 考虑 QCD 真空

$$\langle 0 | \bar{q}_{R,i} q_{L,j} | 0 \rangle = \Lambda^3 \delta_{ij} \quad (1.4)$$

其中 Λ 具有质量量纲 [3]。上式在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下按照 $(3, \bar{3})$ 变换如下,

$$L_{im} \langle 0 | \bar{q}_{R,n} q_{L,m} | 0 \rangle R_{nj}^\dagger = \Lambda^3 U_{ij} \quad (1.5)$$

其中 $U_{ij} = (LR^\dagger)_{ij}$ 为 $SU(3)$ 中的矩阵。当 $L = R$ 时, $\Sigma_{ij} = \delta_{ij}$, 对应真空没有变化, 说明 QCD 凝聚在 $SU(3)_V$ 下不变。当 $L \neq R$ 时, Σ_{ij} 代表此时系统已经变换到了一个和 (1.4) 不同的真空。如果此时没有质量项的显式破缺, 则两个真空简并。

我们可以采用和质量类似的方式, 将 U 升级为场, 并将其参数化为

$$U(x) = \exp\left[\frac{2i}{f} \phi(x)\right], \quad \phi(x) = T^a \phi^a(x) \quad (1.6)$$

其中, $\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子, T^a 是 $SU(3)$ 群的生成元。

当 $N=2$ 时,

$$\phi \equiv \sum_{a=1}^3 \phi_a \sigma^a = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

当 $N=3$ 时,

$$\phi \equiv \sum_{a=1}^8 \phi_a \lambda^a = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

2 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前, 我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下, 拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

由于上述协变导数是作用到色空间中, 因此在 $U(3)_L \times U(3)_R$ 味群作用下保持不变。

考虑整体的 $U(3)_L \times U(3)_R$ 群变换, 则场的变化如下

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\varepsilon_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\varepsilon_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

拉氏量的变换为

$$\delta \mathcal{L}_0 = \bar{q}_R \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R \right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_L \right) \gamma^\mu q_L \quad (1.11)$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$L_a^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R$$

$$L^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \quad (1.12)$$

其中带有下指标 a 的流称为八重态, 不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q \quad (1.13)$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \quad (1.14)$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒, 对应重子数守恒, 而单态轴矢流在考虑量子修正之后出现反常 $\partial_\mu A^\mu = \frac{3g_3^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\rho\sigma}$ 。

但是实际的 QCD 是具有质量项的, 因此手征对称性遭到破坏, 矢量流和轴矢流在经典情况下也不严格守恒, 有

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_a^\mu &= i\bar{q} \left[\mathcal{M}, \frac{\lambda_a}{2} \right] q, \\ \partial_\mu A_a^\mu &= i\bar{q} \gamma_5 \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M} \right\} q, \\ \partial_\mu V^\mu &= 0, \\ \partial_\mu A^\mu &= 2i\bar{q} \gamma_5 \mathcal{M} q, \end{aligned} \quad (1.15)$$

其中 $\mathcal{M} = \text{diag}\{m_u, m_d, m_s\}$ 为质量矩阵。可以看出, 如果三种夸克质量一样, 则质量矩阵为单位矩阵, 矢量流严格守恒。如果质量矩阵很小, 矢量流和轴矢流也近似守恒。由于 u、d 夸克质量相近, 且远小于 s 夸克质量, 因此 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 群对称性就比 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称性要好很多。

根据 (1.12) 定义三个荷算符:

$$\begin{aligned} Q_{La}(t) &= \int d^3x q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t, \vec{x}) \\ Q_{Ra}(t) &= \int d^3x q_R^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_R(t, \vec{x}) \\ Q_V(t) &= \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) q(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{aligned} [Q_{La}, Q_{Lb}] &= if_{abc} Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = if_{abc} Q_{Rc} \\ [Q_{La}, Q_{Rb}] &= [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

验证第一个对易关系:

$$\begin{aligned} [Q_{La}, Q_{Lb}] &= \int d^3x d^3y \left[q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t, \vec{x}), q_L^\dagger(t, \vec{y}) \frac{\lambda_b}{2} q_L(t, \vec{y}) \right] \\ &= \int d^3x d^3y \left[q^\dagger(t, \vec{x}) P_L \frac{\lambda_a}{2} q(t, \vec{x}), q^\dagger(t, \vec{y}) P_L \frac{\lambda_b}{2} q(t, \vec{y}) \right] \\ &= \int d^3x d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) q^\dagger(t, \vec{x}) P_L \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} q(t, \vec{y}) \\ &\quad - \int d^3x d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) q^\dagger(t, \vec{y}) P_L \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} q(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

$$=if_{abc} \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) P_L \frac{\lambda_c}{2} q(t, \vec{x}) = if_{abc} Q^{Lc}$$

除此之外，还可以得到流之间的对易关系如下：

$$\begin{aligned} [V_a^0(t, \vec{x}), V_b^\mu(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) if_{abc} V_c^\mu(t, \vec{X}), \\ [V_a^0(t, \vec{x}), V^\mu(t, \vec{y})] &= 0, \\ [V_a^0(t, \vec{x}), A_b^\mu(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) if_{abc} A_c^\mu(t, \vec{X}), \\ [A_a^0(t, \vec{x}), V_b^\mu(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) if_{abc} A_c^\mu(t, \vec{X}), \\ [A_a^0(t, \vec{x}), V^\mu(t, \vec{y})] &= 0, \\ [A_a^0(t, \vec{x}), A_b^\mu(t, \vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) if_{abc} V_c^\mu(t, \vec{X}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

2 介子的手征拉氏量

1 手征的 power-counting

手征拉氏量一般具有如下形式

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \cdots, \quad (2.1)$$

其中只包含偶数项。这主要是由于 Lorentz 不变性以及质量项是 $\sim \mathcal{O}(q^2)$ 的。

对于给定费曼图，在 $p_i \mapsto tp_i$ 以及 $m_q \mapsto t^2 m_q$ 变换下，若不变振幅变换如下

$$M(tp_i, t^2 m_q) = t^D M(p_i, m_q), \quad (2.2)$$

则称 D 是一个图的手征阶数。手征阶数的计算公式如下

$$D = nN_L - 2N_I + \sum_{k=1}^{\infty} 2kN_{2k}, \quad (2.3)$$

其来源简单阐述如下，在上述标度变化下，传播子的变换如下

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} &\mapsto \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{t^2(k^2/t^2 - M^2 + i\epsilon)} \\ &\stackrel{k=tk'}{=} t^{n-2} \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{i}{k'^2 - M^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

因此内线的变换为 t^{n-2} ，而顶点的变换为

$$\delta^n(q) q^{2k} \mapsto t^{2k-n} \delta^n(q) q^{2k}, \quad (2.5)$$

因此内线的变化为 t^{2k-n} ，此外由于散射矩阵的不变性，以及 $S \sim \delta^n(q) M$ ，因此需要加上一个 n 来补偿 δ 函数的影响，此时我们可以得到

$$D = n + (n-2)N_I + \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}(2k-n). \quad (2.6)$$

再考虑到一张图中独立圈数、内线数、顶点数之间的关系 $N_L = N_I - (N_V - 1)$, 其中 $N_V = \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}$, 即可得到上式。

2 外源

该章主要参考 [1]。

通常在量子场论中, 紫外的微观理论与红外的理论可以截然不同, 如 QCD。低能有效作用量是通过积掉一些高能自由度来得到的。但是在实际操作中很难实行, 我们往往首先猜测红外的场以及可能的对称性, 然后写下与对称性自洽的有效有效作用, 最后再在实验中进行检验。

首先考虑 QCD 的拉氏量如下,

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{i=1}^3 \bar{q}_i i \not{D} q_i - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu}, \quad (2.7)$$

上述拉氏量具有 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的味道对称性, 如果想要引入局域的味道空间的变换, 我们需要引入以下外源 (类似于规范理论中的规范场) [4] [5],

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \mathcal{L}_{ext}, \quad (2.8)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ext} = & \sum_{a=1}^8 v_a^\mu \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda_a}{2} q + v_{(s)}^\mu \frac{1}{3} \bar{q} \gamma_\mu q + \sum_{a=1}^8 a_a^\mu \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \\ & - \sum_{a=0}^8 s_a \bar{q} \lambda_a q + \sum_{a=0}^8 p_a i \bar{q} \gamma_5 \lambda_a q \\ = & \bar{q} \gamma_\mu \left(v^\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu + \gamma_5 a^\mu \right) q - \bar{q} (s - i \gamma_5 p) q, \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中

$$v_\mu = v_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, a_\mu = a_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, s_\mu = s_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, p_\mu = p_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, \quad (2.10)$$

分别是引入的矢量、轴矢量、标量和赝标量外场。当我们取外源 $v^\mu = v_{(s)}^\mu = a^\mu = p = 0$ 以及 $s = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 是, 上述拉氏量回到原始 QCD 拉氏量。

我们可以将上述拉氏量通过手征投影算符改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{QCD}^0 + \bar{q}_L \gamma^\mu \left(l_\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu \right) q_L + \bar{q}_R \gamma_\mu \left(r_\mu + \frac{1}{3} v_{(s)}^\mu \right) \\ & - \bar{q}_R (s + i p) q_L - \bar{q}_L (s - i p) q_R, \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 $r_\mu = v_\mu + a_\mu, l_\mu = v_\mu - a_\mu$ 。如果想要上述拉氏量在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下保持不变, 即

$$\begin{aligned} q_R & \mapsto V_R(x) q_R \\ q_L & \mapsto V_L(x) q_L, \end{aligned} \quad (2.12)$$

则需要外场作如下变换

$$\begin{aligned}
r_\mu &\mapsto V_R r_\mu V_R^\dagger + i V_R \partial_\mu V_R^\dagger, \\
l_\mu &\mapsto V_L l_\mu V_L^\dagger + i V_L \partial_\mu V_L^\dagger, \\
v_\mu^{(s)} &\mapsto v_\mu - \partial_\mu \Theta, \\
s + ip &\mapsto V_R (s + ip) V_L^\dagger, \\
s - ip &\mapsto V_L (s - ip) V_R^\dagger.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

除了要求拉氏量在上述局域 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下保持不变之外，我们还要求拉氏量能够满足 C、P、T 对称。由于 CPT 定理的存在，因此我们可以只考虑 C、P 变换下上述外场的变换情况。

在 P 变换下，夸克场和拉氏量的变换为

$$q_f(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \gamma_0 q_f(t, -\vec{x}), \mathcal{L}(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \mathcal{L}(t, -\vec{x}), \tag{2.14}$$

因此外场的变换为

$$v^\mu \xrightarrow{P} v_\mu, v_\mu^{(s)} \xrightarrow{P} v_\mu^{(s)}, a^\mu \xrightarrow{P} -a_\mu, s \xrightarrow{P} s, p \xrightarrow{P} -p. \tag{2.15}$$

同理可得 C 变换下外场的变换为

$$v_\mu \xrightarrow{C} -v_\mu^T, v_\mu^{(s)} \xrightarrow{C} -v_\mu^{(s)T}, a_\mu \xrightarrow{C} a_\mu^T, s \xrightarrow{C} s^T, p \xrightarrow{C} p^T. \tag{2.16}$$

考虑一个简单的例子，QED 是 U(1) 规范理论，而 U(1) 群是 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的子群。我们可以令

$$r_\mu = l_\mu = -e \mathcal{A}_\mu Q, \tag{2.17}$$

其中 $Q = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$ ，此时可以得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{ext}} &= -e \mathcal{A}_\mu (\bar{q}_L Q \gamma_\mu q_L + \bar{q}_R Q \gamma_\mu q_R) = -e \mathcal{A}_\mu \bar{q} Q \gamma_\mu q \\
&= -e \mathcal{A}_\mu \left(\frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma_\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma_\mu s \right) = -e \mathcal{A}_\mu J^\mu,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

即光子场和夸克场的耦合。

3 两个常数

首先我们已经将破缺的 8 个 Goldstone 玻色子参数化为

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\phi(x)}{F_0}\right), \tag{2.19}$$

其中 ϕ 取自 (1.8) 式， F_0 为手征极限下 π 介子的真空衰变常数，带有质量量纲。U 在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 群下的变换方式为

$$U(x) \mapsto R U(x) L^\dagger. \tag{2.20}$$

此时，我们能写下的包含最少导数且保证手征不变的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger). \quad (2.21)$$

考虑无穷小的 $SU(3)_L$ 变换，可以得到左手流为

$$J_{La}^\mu = i \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a \partial^\mu U^\dagger U), \quad (2.22)$$

同理可得右手流为

$$J_{Ra}^\mu = -i \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a U \partial^\mu U^\dagger). \quad (2.23)$$

定义矢量流和轴矢流分别为

$$J_{Va}^\mu = J_{Ra}^\mu + J_{La}^\mu = -i \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a [U, \partial^\mu U^\dagger]), \quad (2.24)$$

$$J_{Aa}^\mu = J_{Ra}^\mu - J_{La}^\mu = -i \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\lambda_a \{U, \partial^\mu U^\dagger\}). \quad (2.25)$$

将 U 做泰勒展开，我们可以得到轴矢流最低阶为

$$J_{Aa}^\mu = -F_0 \partial^\mu \phi_a + \dots, \quad (2.26)$$

此时我们可以计算轴矢流在 Goldstone 玻色子和真空态之间的矩阵元为

$$\langle 0 | J_{Aa}^\mu(x) | \phi_b(p) \rangle = \langle 0 | -F_0 \partial^\mu \phi_a(x) | \phi_b(x) \rangle = i p^\mu F_0 \exp(-i p \cdot x) \delta_{ab}, \quad (2.27)$$

从中我们可以看到 F_0 的物理意义。

严格的对称性破缺我们可以得到严格的零质量 Goldstone 玻色子，但是通过实验我们知道 π, K 等介子是有质量的，因此我们必须引入 QCD 中显式的质量破缺项，且假设质量矩阵按照 (1.3) 进行变换。则此时我们能写下的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}(\mathcal{M} U^\dagger + U \mathcal{M}^\dagger), \quad (2.28)$$

其中下标 s.b. 代表对称性破缺。通过比较其基态能量密度关于夸克质量的导数和 QCD 中相应量

$$\langle \mathcal{H}_{\text{eff}} \rangle_{\min} = -F_0^2 B_0 (m_u + m_d + m_s), \quad (2.29)$$

$$\left. \frac{\partial \langle 0 | \mathcal{H}_{\text{QCD}} | 0 \rangle}{\partial m_q} \right|_{m_u=m_d=m_s=0} = \frac{1}{3} \langle \bar{q} q \rangle_0 \quad (2.30)$$

可得，

$$3F_0^2 B_0 = -\langle \bar{q} q \rangle_0, \quad (2.31)$$

即 B_0 与标量单态夸克凝聚有关。

接着将 U 进行泰勒展开，我们可以得到

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = -\frac{B_0}{2} \text{Tr}(\phi^2 \mathcal{M}) + \dots \quad (2.32)$$

代入 (1.8) 式，我们可以得到

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\phi^2 \mathcal{M}) = & 2(m_u + m_d)\pi^+\pi^- + 2(m_u + m_s)K^+K^- + 2(m_d + m_s)K^0\bar{K}^0 \\ & + (m_u + m_d)\pi^0\pi^0 + \frac{2}{\sqrt{3}}(m_u - m_d)\pi^0\eta + \frac{m_u + m_d + 4m_s}{3}\eta^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

为简单起见，令 $m_u = m_d = \hat{m}$ ，因此我们可以得到在最低阶 Goldstone 玻色子质量和夸克质量的关系

$$M_\pi^2 = 2B_0\hat{m}, \quad (2.34)$$

$$M_k^2 = B_0(\hat{m} + m_s), \quad (2.35)$$

$$M_\eta^2 = \frac{2}{3}B_0(\hat{m} + 2m_s). \quad (2.36)$$

此时我们可以得到著名的 Gell-Mann-Okubo 关系：

$$4M_K^2 = 3M_\eta^2 + M_\pi^2. \quad (2.37)$$

4 最低阶手征拉氏量

有了上面的准备之后，我们就可以开始构造手征拉氏量了。

首先，我们需要定义场算符的协变导数，以场算符 A 为例，协变导数为

$$D_\mu A = \partial_\mu A - i r_\mu A + i A l_\mu. \quad (2.38)$$

可以验证，协变导数在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 群下的变换方式为

$$D_\mu A \mapsto R(D_\mu A)L^\dagger. \quad (2.39)$$

由于有效拉氏量中会包含任意高阶的导数项，因此我们还需要引入外场的场强张量

$$f_{R\mu\nu} = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \quad (2.40)$$

$$f_{L\mu\nu} = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu]. \quad (2.41)$$

接着我们定义一个标量和赝标量外场的线性组合项 $\chi = 2B_0(s + i p)$ 。

由于手征拉氏量是按照外动量阶数展开的，因此我们需要知道它们关于外动量的阶数，如下所示，

$$U = \mathcal{O}(q^0), D_\mu U = \mathcal{O}(q), r_\mu, l_\mu = \mathcal{O}(q), f_{L,R\mu\nu} = \mathcal{O}(q^2), \chi = \mathcal{O}(q^2), \quad (2.42)$$

因此可以写出满足对称性要求的二阶的手征拉氏量如下 [5],

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger], \quad (2.43)$$

在这里我们舍弃了不满足 P 宇称的 $\text{Tr}[\chi U^\dagger - U \chi^\dagger]$ 项, 其中包含两个低能常数 F_0 和 B_0 。

5 $\pi - \pi$ 散射的例子

考虑一个 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 的二阶拉氏量, 即 $m_u = m_d = 0$, 而 m_s 依旧取其物理值, 且令 $r_\mu = l_\mu = 0$,

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger), \quad (2.44)$$

其中

$$\chi = 2B\mathcal{M} = 2B \begin{pmatrix} \hat{m} & 0 \\ 0 & \hat{m} \end{pmatrix},$$

$$U = \exp\left(i\frac{\phi}{F}\right), \phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i \tau_i = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix},$$

不带有下标 0 的 F 和 B 表示我们此时考虑的对称性是 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 。我们将

$$U = 1 + i\frac{\phi}{F} - \frac{1}{2}\frac{\phi^2}{F^2} - \frac{i}{6}\frac{\phi^3}{F^3} + \frac{1}{24}\frac{\phi^4}{F^4} + \dots \quad (2.45)$$

代入, 可得

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2^{2\phi} + \mathcal{L}_2^{4\phi} + \dots, \quad (2.46)$$

因为 \mathcal{L} 不包含三点相互作用, 因此最低阶相互作用项为

$$\mathcal{L}_2^{4\phi} = \frac{1}{6F^2} (\phi_i \partial^\mu \phi_i \partial_\mu \phi_j \phi_j - \phi_i \phi_i \partial_\mu \phi_j \partial^\mu \phi_j) + \frac{M^2}{24F^2} \phi_i \phi_i \phi_j \phi_j, \quad (2.47)$$

其中 $M^2 = 2B\hat{m}$ 。

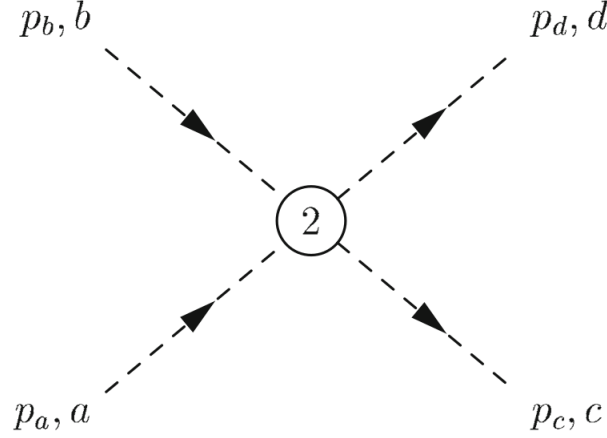
我们可以计算上述相互作用项的矩阵元, 例如

$$\langle p_c, c; p_d, d | \phi_i \partial^\mu \phi_i \partial_\mu \phi_j \phi_j | p_a, a; p_b, b \rangle \quad (2.48)$$

的收缩方式共 24 种, 以其中一种为例

$$\begin{aligned} & \langle p_c, c; p_d, d | \underbrace{\phi_i \partial^\mu \phi_i}_{\text{contract}} \underbrace{\partial_\mu \phi_j \phi_j}_{\text{contract}} | p_a, a; p_b, b \rangle \\ & \Rightarrow \delta_{ic} i p_d^\mu \delta_{id} (-i p_{a\mu} \delta_{ja} \delta_{jb}) = p_a \cdot p_d \delta_{ab} \delta_{cd} \end{aligned}$$

因此对应如图1所示的费曼图, 可以得到其散射振幅为

Figure 1: 最低阶 $\pi\pi$ 散射

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & i \left[\delta_{ab}\delta_{cd} \frac{s - M^2}{F^2} + \delta_{ac}\delta_{bd} \frac{t - M^2}{F^2} + \delta_{ad}\delta_{bc} \frac{u - M^2}{F^2} \right] \\ & - \frac{i}{3F^2} (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) (\Lambda_a + \Lambda_b + \Lambda_c + \Lambda_d), \end{aligned} \quad (2.49)$$

其中 $\Lambda_k = p_k^2 - M^2$ 。通常对于 $\pi_a(p_a) + \pi_b(p_b) \rightarrow \pi_c(p_c) + \pi_d(p_d)$ 过程的 T 矩阵 ($\mathcal{M} = iT$) 可以参数化为

$$T_{ab;cd}(p_a, p_b; p_c, p_d) = \delta_{ab}\delta_{cd}A(s, t, u) + \delta_{ac}\delta_{bd}A(t, s, u) + \delta_{ad}\delta_{bc}A(u, s, t) \quad (2.50)$$

其中 $A(s, t, u) = A(s, u, t)$ 。可以看出在 $\mathcal{O}(q^2)$ 阶,

$$A(s, t, u) = \frac{s - M^2}{F^2}. \quad (2.51)$$

除了手征之外,我们还通常利用同位旋对称性来研究 $\pi\pi$ 散射,在 $SU(2)$ 极限下, π 介子组成同位旋三重态,因此强相互作用是同位旋不变的。对于 T 矩阵,我们可以写出

$$\langle I', I'_3 | T | I, I_3 \rangle = T^I \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3} \quad (2.52)$$

因此 $\pi\pi$ 散射的同位旋振幅可以根据 (2.50) 式拆解为 [4]

$$\begin{aligned} T^{I=0} &= 3A(s, t, u) + A(t, u, s) + A(u, s, t), \\ T^{I=1} &= A(s, t, u) - A(u, s, t), \\ T^{I=2} &= A(t, u, s) + A(u, s, t). \end{aligned} \quad (2.53)$$

计算开启域附近的 T 矩阵，我们可以得到 s 波的散射长度

$$T^{I=0}|_{\text{thr}} = 32\pi a_0^0, \quad T^{I=2}|_{\text{thr}} = 32\pi a_0^2, \quad (2.54)$$

其中 a 的上标代表同位旋，下标代表 s 波散射。由于玻色对称性， $T^{I=1} = 0$ 。结合手征理论，我们可以得到两个散射长度的值。

首先，我们有

$$A(s_{\text{thr}}, t_{\text{thr}}, u_{\text{thr}}) = \frac{3M_\pi^2}{F_\pi^2}, \quad (2.55)$$

其中 F_π 、 M_π 和 F 、 M 的区别仅在 $\mathcal{O}(p^4)$ 开始显现。在这里，我们先用带有下标的表示。因此，对于不同的同位旋振幅我们有

- I=0:

$$\begin{aligned} T^{I=0}|_{\text{thr}} &= [3A(s, t, u) + A(t, u, s) + A(u, s, t)]|_{\text{thr}} \\ &= [2A(s, t, u) + A(s, t, u) + A(t, u, s) + A(u, s, t)]|_{\text{thr}} \\ &= \frac{6M_\pi^2}{F_\pi^2} + \frac{[s + t + u - 3M_\pi^2]|_{\text{thr}}}{F_\pi^2} \\ &= \frac{7M_\pi^2}{F_\pi^2}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

- I=2:

$$\begin{aligned} T^{I=2}|_{\text{thr}} &= [A(t, u, s) + A(u, s, t)]|_{\text{thr}} \\ &= [A(t, u, s) + A(u, s, t) + A(s, t, u) - A(s, t, u)]|_{\text{thr}} \\ &= \frac{M_\pi^2}{F_\pi^2} - \frac{3M_\pi^2}{F_\pi^2} \\ &= -\frac{2M_\pi^2}{F_\pi^2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

代回 (2.54) 式，我们可以得到

$$a_0^0 = \frac{7M_\pi^2}{32F_\pi^2} = 0.159, \quad a_0^2 = -\frac{M_\pi^2}{16\pi F_\pi^2} = -0.0454, \quad (2.58)$$

在这里我们代入了 $F_\pi = 92.4\text{MeV}$ 和 $M_\pi = M_{\pi^+} = 139.57\text{MeV}$ 。

6 超出领头阶

我们在这里直接给出 $\mathcal{O}(q^6)$ 的拉氏量 [5]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 = & L_1 \left\{ \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \right\}^2 + L_2 \text{Tr}[D_\mu (D_\nu U)^\dagger] \text{Tr}[D^\mu U (\bar{D}^\nu)^\dagger] \\
& + L_3 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger] + L_4 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \\
& + L_5 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)] + L_6 [\text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)]^2 \\
& + L_7 [\text{Tr}(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger)]^2 + L_8 \text{Tr}(U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) \\
& - i L_9 \text{Tr}[f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger D^\nu U] + L_{10} \text{Tr}(U f_{\mu\nu}^L U^\dagger f_R^{\mu\nu}) \\
& + H_1 \text{Tr}(f_{\mu\nu}^R f_R^{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^L f_L^{\mu\nu}) + H_2 \text{Tr}(\chi \chi^\dagger).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

这里每项前面的系数同 F_0 和 B_0 一样，目前没法通过理论决定，只能由实验给出。

$\mathcal{O}(q^4)$ 阶的 Goldstone 玻色子的质量

为了计算 Goldstone 玻色子的自能，在这里我们忽略外场，且假设 $m_u = m_d = \hat{m}$ ， m_s 取其物理质量。首先，最低阶拉氏量给出的费曼传播子为

$$\Delta_{F\phi}(p) = \frac{1}{p^2 - M_{\phi,2}^2} + i\epsilon, \quad \phi = \pi, K, \eta, \tag{2.60}$$

其中 $M_{\pi,2}^2 = 2B_0\hat{m}$, $M_{K,2}^2 = B_0(\hat{m} + m_s)$, $M_{\eta,2}^2 = \frac{2}{3}B_0(\hat{m} + 2m_s)$ ，下标 2 表示手征二阶给出的结果。用 $-i\Sigma_\phi(p^2)$ 代表单粒子不可约图，则完整的传播子为

$$\begin{aligned}
i\Delta_\phi(p) &= \frac{i}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + i\epsilon} [-i\Sigma_\phi(p^2)] \frac{i}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + i\epsilon} + \cdots \\
&= \frac{i}{p^2 - M_{\phi,2}^2 - \Sigma_\phi(p^2) + i\epsilon}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

物理质量定义在传播子的极点处

$$M_\phi^2 - M_{\phi,2}^2 - \Sigma_\phi(M_\phi^2) = 0 \tag{2.62}$$

$\mathcal{O}(q^4)$ 阶的自能图如图2所示，由图可以看出，我们需要的相互作用拉氏量应具有如下形式

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_2^{4\phi} + \mathcal{L}_4^{2\phi}, \tag{2.63}$$

其中的 $\mathcal{L}_2^{4\phi}$ 仿照 $\pi\pi$ 散射的例子可以给出如下

$$\mathcal{L}_2^{4\phi} = \frac{1}{48F_0^2} \left\{ \text{Tr}([\phi, \partial_\mu \phi][\phi, \partial^\mu \phi]) + 2B_0 \text{Tr}(\mathcal{M}\phi^4) \right\} \tag{2.64}$$

观察 $\mathcal{L}_4^{2\phi}$ 可以发现，由于外场等于 0，因此其中正比于 L_9, L_{10}, H_1, H_2 的项没有贡献。此外， L_1, L_2, L_3 的项都是 $\mathcal{O}(\phi^4)$ 的，不需要考虑。因此对于 $\mathcal{L}_4^{2\phi}$ 有贡献的只能 $L_4 - L_8$ 项。以 L_4 为

Figure 2: $\mathcal{O}(q^4)$ 阶的自能图

例,

$$\begin{aligned}
 L_4 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) = & L_4 \frac{2}{F_0^2} [\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 + 2\partial_\mu \pi^+ \partial_\mu \pi^- \\
 & + 2\partial_\mu K^+ \partial^\mu K^- + 2\partial_\mu K^0 \partial^\mu \bar{K}^0 + \mathcal{O}(\phi^4)] \\
 & \times [4B_0(2\hat{m} + m_s) + \mathcal{O}(\phi^2)].
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

对其余项同样分析，则可以得到

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_4^{2\phi} = & -\frac{1}{2}(a_\pi \pi^0 \pi^0 + b_\pi \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0) \pi^0 - a_\pi \pi^+ \pi^- - b_\pi \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- \\
 & - a_K K^+ K^- - b_K \partial_\mu K^+ \partial^\mu K^- - a_K K^0 \bar{K}^0 - b_K \partial_\mu K^0 \partial^\mu \bar{K}^0 \\
 & - \frac{1}{2}(a_\eta \eta^2 + b_\eta \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta),
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

其中

$$a_\pi = \frac{64B_0^2}{F_0^2} [2\hat{m} + m_s] \tag{2.67}$$

参考文献

- [1] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] 郑汉青. 量子场论: 上. 北京大学出版社, 2018.
- [3] David B Kaplan. lectures on effective field theory” . *arXiv preprint nuclth/0510023*, 5, 5.
- [4] J Gasser and H Leutwyler. Chiral perturbation theory to one loop. *Annals of Physics*, 158(1):142–210, 1984.
- [5] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark. *Nuclear Physics B*, 250(1):465–516, 1985.