手征微扰场论

王旭

2021 年 9 月 12 日

目录

1 有效量子力学

该章主要参考 [1]。当我们在描述低能理论时，我们不需要知道其在高能区的表现。代价就是需要引入大量参数，而这些参数只能由实验给出。在考察有效量子场论前，我们先看看有效量子力学。

由于在相对论量子力学中，粒子与粒子的相互作用是点点相互作用，因此我们希望通过 δ 函数来模拟散射势。

1 1D 散射

考虑量子力学中的一维散射问题，假设有一方势阱，其函数为

$$V(x)=\begin{cases}-\frac{\alpha^2}{2m\Delta}, & 0\le x\le\Delta\\ 0, & \text{其余情况}\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 m 为粒子质量，Δ 为势阱宽度，$\frac{\alpha^2}{2m\Delta^2}$ 为势阱深度。可以通过计算薛定谔方程得到反射系数 R 为

$$R=\left[\frac{4\kappa^2k^2\mathrm{csc}^2(\kappa\Delta)}{(k^2-\kappa^2)}+1\right]^{-1} \tag{1.2}$$

其中

$$k=\sqrt{2mE},\ \kappa=\sqrt{k^2+\frac{\alpha^2}{\Delta^2}} \tag{1.3}$$

在低能时，我们可以按照 k 展开反射系数，

$$R=-\frac{4}{\alpha^2\mathrm{sin}^2\alpha}\Delta^2k^2+\mathcal{O}(\Delta^4k^4) \tag{1.4}$$

可以看到当 $k\to0$ 时，$R\to1$，称这种相互作用为相关相互作用。

1.1 利用 δ 函数来模仿方势阱

考虑此时有一 δ 势阱，

$$V(x)=-\frac{g}{2m\Delta}\delta(x) \tag{1.5}$$

此处引入 Δ 来保证 g 是无量纲的。依旧通过薛定谔方程可以计算得出反射系数为，

$$R=\left[1+\frac{4k^2\Delta^2}{g^2}\right]^{-1}=1-\frac{4k^2\Delta^2}{g^2}+\mathcal{O}(k^4) \tag{1.6}$$

在低能情况下，与 (1.4) 比较可得，

$$g=\alpha\mathrm{sin}\alpha \tag{1.7}$$

称为“匹配条件”。

2 3D 散射

首先，可以普遍证明，对于任意势场，$k\cot\delta$ 可以展开为

$$k\cot\delta = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2}r_0k^2 + \mathcal{O}(k^4) \tag{1.8}$$

考虑一 s 波的散射，势函数如下，

$$V = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{m\Delta^2}, & r < \Delta \\ 0, & r > \Delta \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 a 是散射长度，r 是有效力程。同样可以通过求解薛定谔方程得到 $k\cot\delta$ 的关系式，为

$$k\cot\delta = \frac{k(k\sin\kappa\Delta + \kappa\cot k\Delta\cos\kappa\Delta}{k\cot k\Delta\sin\kappa\Delta - \kappa\cos\kappa\Delta} \tag{1.10}$$

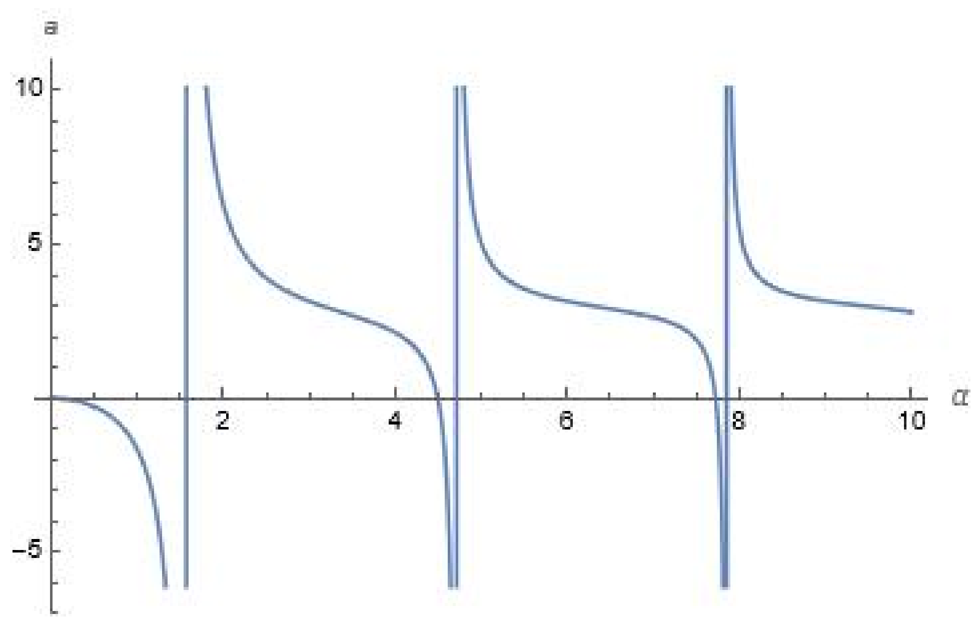
将其按照 k^2 展开可得，

$$k\cot\delta = \frac{1}{\Delta}\Big(\frac{\tan\alpha}{\alpha} - 1\Big)^{-1} + \mathcal{O}(k^2) \tag{1.11}$$

与 (1.8) 比较可得，

$$a = -\Delta\Big(\frac{\tan\alpha}{\alpha} - 1\Big) \tag{1.12}$$

其关系如图所示，



可以看到，势 α 随散射长度 a 的变化，当 $\alpha_c = (2n+1)\pi/2$ 时，a 出现奇异性，对应着束缚态的出现。

3 3D 散射中的 δ 函数

我们首先给出 3D 散射下散射振幅

$$f = \frac{1}{k\cot\delta - \mathrm{i}k} \tag{1.13}$$

观察 (1.12)，由于 α 是 $\mathcal{O}(1)$，因此 $a \sim \mathcal{O}(\Delta)$，因此当势阱宽度趋于 0 时，散射振幅也趋于 0，这种相互作用称为无关相互作用。因此无法用 δ 函数来模拟球势阱。

如果我们用场 ψ 表示散射粒子，拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger\Big(\mathrm{i}\partial_t + \frac{\nabla^2}{2M}\Big)\psi - fracC_0 4\Big(\psi^\dagger\psi\Big)^2 \tag{1.14}$$

2 手征拉氏量

该章主要参考 [2]

参考文献

[1] David B Kaplan. lectures on effective field theory”. *arXiv preprint nuclth/0510023*, 5, 5.

[2] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.