手征微扰场论

王旭

2021 年 12 月 8 日

目录

1 介绍 **2**

1 简介 2

2 流代数 3

2 介子的手征拉氏量 **5**

1 手征的 power-counting 5

2 手征拉氏量 6

1 介绍

该章主要参考 [?] [?]。

1 简介

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3} (\bar{q}_i \mathrm{i} \not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4} \mathcal{G}^a_{\mu\nu} \mathcal{G}^{a\mu\nu} \tag{1.1}$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}gT^a A^a_\mu$, $T^a = \lambda^a/2$。仅考虑动能项时，具有 $U(3)_L \times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏，系统的对称群为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$，其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在，$SU(3)_L \times SU(3)_R$ 遭到了破坏，但当粒子质量相同时，依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项，

$$\sum_i m_i \bar{q}_i q_i = \sum_{i,j} \bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} \tag{1.2}$$

其中 $M = diag(m_u, m_d, m_s)$。如果我们将质量项升级为场，在最后结果的时候在取回常数，并假设其在手征变换下进行如下变换，

$$M \to RML^\dagger \tag{1.3}$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 变换下不变。

除质量项的显式破缺外，当考虑夸克凝聚的时候，系统也会自发破缺，考虑 QCD 真空

$$\langle 0 | \bar{q}_{R,i} q_{L,j} | 0 \rangle = \Lambda^3 \delta_{ij} \tag{1.4}$$

其中 Λ 具有质量量纲。其在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下按照 $(3, \bar{3})$ 变换。在手征变换下，

$$L_{im} \langle 0 | \bar{q}_{R,n} q_{L,m} | 0 \rangle R^\dagger_{nj} = \Lambda^3 U_{ij} \tag{1.5}$$

其中 $U_{ij} = (LR^\dagger)_{ij}$。当 $L = R$ 时，真空没有变化，此时恰好对应 $SU(3)_V$。

我们可以采用和质量类似的方式，将 U 升级为场，并将其参数化为

$$U(x) = exp[\frac{i}{f}\phi(x)],\ \phi(x) = T^a \phi^a(x) \tag{1.6}$$

其中，$\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子。

当 N=2 时，

$$\phi \equiv \sum_{i=1}^{3} \phi_a \sigma^a = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - \mathrm{i}\phi_2 \\ (\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

当 N=3 时，

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \pi^0+\frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0+\frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

2 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前，我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下，拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} \mathrm{i}\not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} \mathrm{i}\not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{a\mu\nu}\mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \tag{1.9}$$

由于上述协变导数是作用到色空间中，因此在 $U(3)_L \times U(3)_R$ 味群作用下保持不变。

考虑局域的 $U(3)_L \times U(3)_R$ 群变换，则场的变化如下

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = exp\left(-\mathrm{i}\sum_{a=1}^{8} \varepsilon_{La}\frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-\mathrm{i}\varepsilon_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = exp\left(-\mathrm{i}\sum_{a=1}^{8} \varepsilon_{Ra}\frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-\mathrm{i}\varepsilon_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

拉氏量的变换为

$$\delta\mathcal{L}_0 = \bar{q}_R \left(\sum_{a=1}^{8} \partial_\mu \varepsilon_{Ra}\frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R\right)\gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left(\sum_{a=1}^{8} \partial_\mu \varepsilon_{La}\frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R\right)\gamma^\mu q_L \tag{1.11}$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$\begin{aligned} L_a^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R \\ L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中带有下指标 a 的流称为八重态，不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q \tag{1.13}$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \tag{1.14}$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒，对应重子数守恒，而单态轴矢流在考虑量子修正之后出现反常 $\partial_\mu A^\mu = \frac{3g_3^2}{32\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{G}_a^{\mu\nu}\mathcal{G}_a^{\rho\sigma}$。

但是实际的 QCD 是具有质量项的，因此手征对称性遭到破坏，矢量流和轴矢流在经典情况下也不严格守恒，有

$$\begin{aligned}\partial_\mu V_a^\mu =& \mathrm{i}\bar{q}\Big[\mathcal{M},\frac{\lambda_a}{2}\Big]q,\\ \partial_\mu A_a^\mu =& \mathrm{i}\bar{q}\gamma_5\Big\{\frac{\lambda_a}{2},\mathcal{M}\Big\}q,\\ \partial_\mu V^\mu =& 0,\\ \partial_\mu A^\mu =& 2\mathrm{i}\bar{q}\gamma_5\mathcal{M}q,\end{aligned} \tag{1.15}$$

其中 $\mathcal{M} = diag\{m_u, m_d, m_s\}$ 为质量矩阵。可以看出，如果三种夸克质量一样，则质量矩阵为单位矩阵，矢量流严格守恒。如果质量矩阵很小，矢量流和轴矢流也近似守恒。由于 u、d 夸克质量相近，且远小于 s 夸克质量，因此 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 群对称性就比 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称性要好很多。

根据（1.12）定义三个荷算符：

$$\begin{aligned}Q_{La}(t) =& \int \mathrm{d}^3x q_L^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2}q_L(t,\vec{x})\\ Q_{Ra}(t) =& \int \mathrm{d}^3x q_R^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2}q_R(t,\vec{x})\\ Q_V(t) =& \int \mathrm{d}^3x q^\dagger(t,\vec{x})q(t,\vec{x})\end{aligned} \tag{1.16}$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{gathered}[Q_{La}, Q_{Lb}] = \mathrm{i}f_{abc}Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = \mathrm{i}f_{abc}Q_{Rc}\\ [Q_{La}, Q_{Rb}] = [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0\end{gathered} \tag{1.17}$$

验证第一个对易关系：

$$\begin{aligned}[Q_{La}, Q_{Lb}] =& \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\Big[q_L^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda^a}{2}q_L(t,\vec{x}), q_L^\dagger(t,\vec{y})\frac{\lambda^a}{2}q_L(t,\vec{y})\Big]\\ =& \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\Big[q^\dagger(t,\vec{x})P_L\frac{\lambda^a}{2}q(t,\vec{x}), q^\dagger(t,\vec{y})P_L\frac{\lambda^a}{2}q(t,\vec{y})\Big])\\ =& \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\delta^3(\vec{x}-\vec{y})q^\dagger(t,\vec{x})P_L\frac{\lambda_a}{2}\frac{\lambda_b}{2}q(t,\vec{y})\\ &- \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y\delta^3(\vec{x}-\vec{y})q^\dagger(t,\vec{y})P_L\frac{\lambda_a}{2}\frac{\lambda_b}{2}q(t,\vec{x})\\ =& \mathrm{i}f_{abc}\int \mathrm{d}^3x q^\dagger(t,\vec{x})P_L\frac{\lambda_c}{2}q(t,\vec{x}) = \mathrm{i}f_{abc}Q^{Lc}\end{aligned}$$

除此之外，还可以得到流之间的对易关系如下:

$$
\begin{aligned}
[V_a^0(t,\vec{x}),V_b^\mu(t,\vec{y})]=&\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\mathrm{i}f_{abc}V_c^\mu(t,\vec{X}),\\
[V_a^0(t,\vec{x}),V^\mu(t,\vec{y})]=&0,\\
[V_a^0(t,\vec{x}),A_b^\mu(t,\vec{y})]=&\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\mathrm{i}f_{abc}A_c^\mu(t,\vec{X}),\\
[A_a^0(t,\vec{x}),V_b^\mu(t,\vec{y})]=&\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\mathrm{i}f_{abc}A_c^\mu(t,\vec{X}),\\
[A_a^0(t,\vec{x}),V^\mu(t,\vec{y})]=&0,\\
[A_a^0(t,\vec{x}),A_b^\mu(t,\vec{y})]=&\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\mathrm{i}f_{abc}V_c^\mu(t,\vec{X}).
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

2 介子的手征拉氏量

1 手征的 power-counting

手征拉氏量一般具有如下形式

$$
\mathcal{L}_{\text{eff}}=\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_4+\mathcal{L}_6+\cdots,
\tag{2.1}
$$

其中只包含偶数项。这主要是由于 Lorentz 不变性以及质量项是 $\sim\mathcal{O}(q^2)$ 的。

对于给定费曼图，在 $p_i\mapsto tp_i$ 以及 $m_q\mapsto t^2m_q$ 变换下，若不变振幅变换如下

$$
M(tp_i,t^2m_q)=t^DM(p_i,m_q),
\tag{2.2}
$$

则称 D 是一个图的手征阶数。手征阶数的计算公式如下

$$
D=nN_L-2N_I+\sum_{k=1}^{\infty}2kN_{2k},
\tag{2.3}
$$

其来源简单阐述如下，在上述标度变化下，传播子的变换如下

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\frac{\mathrm{i}}{k^2-M^2+\mathrm{i}\epsilon}\mapsto&\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\frac{\mathrm{i}}{t^2(k^2/t^2-M^2+\mathrm{i}\epsilon)}\\
&\overset{k=tk'}{=}t^{n-2}\int\frac{\mathrm{d}^nk'}{(2\pi)^n}\frac{\mathrm{i}}{k'^2-M^2+\mathrm{i}\epsilon},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

因此内线的变换为 t^{n-2}，而顶点的变换为

$$
\delta^n(q)q^{2k}\mapsto t^{2k-n}\delta^nqq^{2k},
\tag{2.5}
$$

因此内线的变化为 t^{2k-n}，此外由于散射矩阵的不变性，以及 $S\sim\delta^n(q)M$，因此需要加上一个 n 来补偿 δ 函数的影响，此时我们可以得到

$$
D=n+(n-2)N_I+\sum_{k=1}^{\infty}N_{2k}(2k-n).
\tag{2.6}
$$

再考虑到一张图中独立圈数、内线数、顶点数之间的关系 $N_L=N_I-(N_V-1)$，其中 $N_V=\sum_{k=1}^{\infty}N_{2k}$，即可得到上式。

2 手征拉氏量

首先考虑 QCD 的拉氏量如下，

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3} (\bar{q}_i \mathrm{i} \not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4} \mathcal{G}^a_{\mu\nu} \mathcal{G}^{a\mu\nu}, \tag{2.7}$$

首先每一项的阶数如下，

$$U = \mathcal{O}(q^0), D_\mu U, r_\mu, l_\mu = \mathcal{O}(q), f_{L,R\mu\nu} = \mathcal{O}(q^2), \chi = \mathcal{O}(q^2), \tag{2.8}$$

其中 U 是 Goldstone 玻色子的实现，$U = exp(\mathrm{i}\phi_a \lambda_a / F_0)$，而 r_μ, l_μ 是协变导数中的规范场，$f_{L,R\mu\nu}$ 是相应的场强张量，$\chi = 2B_0(s + \mathrm{i}p)$。因此可以写出二阶的手征拉式量如下，

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} Tr[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} Tr[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger], \tag{2.9}$$