手征微扰场论

王旭

2021 年 10 月 10 日

目录

1 有效量子力学

该章主要参考 [1]。当我们在描述低能理论时，我们不需要知道其在高能区的表现。代价就是需要引入大量参数，而这些参数只能由实验给出。在考察有效量子场论前，我们先看看有效量子力学。

由于在相对论量子力学中，粒子与粒子的相互作用是点点相互作用，因此我们希望通过 δ 函数来模拟散射势。

1 1D 散射

考虑量子力学中的一维散射问题，假设有一方势阱，其函数为

$$V(x)=\begin{cases}-\frac{\alpha^2}{2m\Delta}, & 0\le x\le\Delta\\ 0, & \text{其余情况}\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 m 为粒子质量，Δ 为势阱宽度，$\frac{\alpha^2}{2m\Delta^2}$ 为势阱深度。可以通过计算薛定谔方程得到反射系数 R 为

$$R=\left[\frac{4\kappa^2k^2\mathrm{csc}^2(\kappa\Delta)}{(k^2-\kappa^2)}+1\right]^{-1} \tag{1.2}$$

其中

$$k=\sqrt{2mE},\ \kappa=\sqrt{k^2+\frac{\alpha^2}{\Delta^2}} \tag{1.3}$$

在低能时，我们可以按照 k 展开反射系数，

$$R=-\frac{4}{\alpha^2\mathrm{sin}^2\alpha}\Delta^2k^2+\mathcal{O}(\Delta^4k^4) \tag{1.4}$$

可以看到当 $k\to 0$ 时，$R\to 1$，称这种相互作用为相关相互作用。

1.1 利用 δ 函数来模仿方势阱

考虑此时有一 δ 势阱，

$$V(x)=-\frac{g}{2m\Delta}\delta(x) \tag{1.5}$$

此处引入 Δ 来保证 g 是无量纲的。依旧通过薛定谔方程可以计算得出反射系数为，

$$R=\left[1+\frac{4k^2\Delta^2}{g^2}\right]^{-1}=1-\frac{4k^2\Delta^2}{g^2}+\mathcal{O}(k^4) \tag{1.6}$$

在低能情况下，与 (1.4) 比较可得，

$$g=\alpha\mathrm{sin}\alpha \tag{1.7}$$

称为“匹配条件”。

2 3D 散射

首先，可以普遍证明，对于任意势场，$k\cot\delta$ 可以展开为

$$k\cot\delta = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2}r_0k^2 + \mathcal{O}(k^4) \tag{1.8}$$

考虑一 s 波的散射，势函数如下，

$$V = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{m\Delta^2}, & r < \Delta \\ 0, & r > \Delta \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 a 是散射长度，r 是有效力程。同样可以通过求解薛定谔方程得到 $k\cot\delta$ 的关系式，为

$$k\cot\delta = \frac{k(k\sin\kappa\Delta + \kappa\cot k\Delta\cos\kappa\Delta}{k\cot k\Delta\sin\kappa\Delta - \kappa\cos\kappa\Delta} \tag{1.10}$$

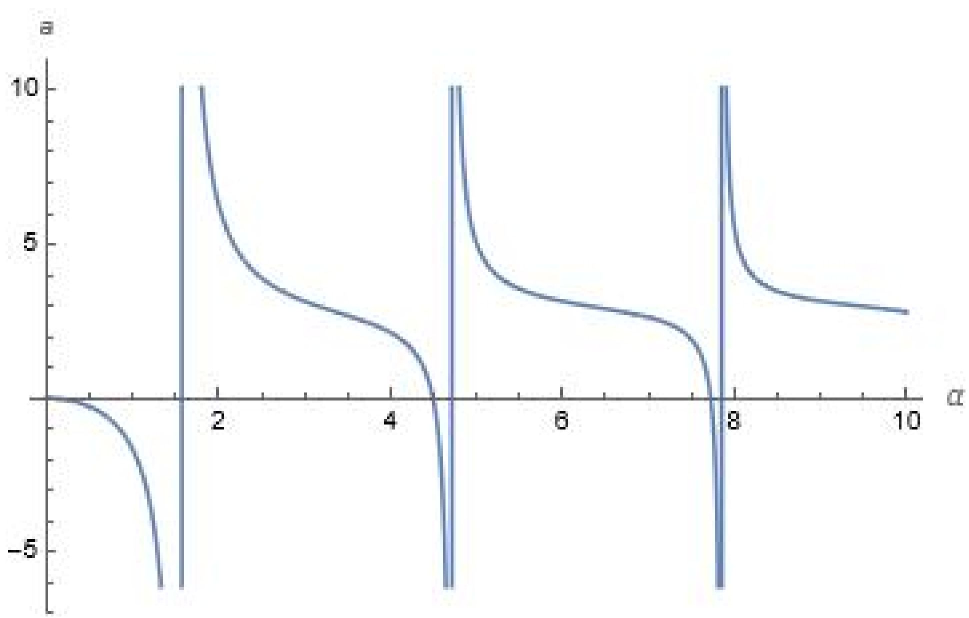
将其按照 k^2 展开可得，

$$k\cot\delta = \frac{1}{\Delta}\Big(\frac{\tan\alpha}{\alpha} - 1\Big)^{-1} + \mathcal{O}(k^2) \tag{1.11}$$

与 (1.8) 比较可得，

$$a = -\Delta\Big(\frac{\tan\alpha}{\alpha} - 1\Big) \tag{1.12}$$

其关系如图所示，



可以看到，势 α 随散射长度 a 的变化，当 $\alpha_c = (2n+1)\pi/2$ 时，a 出现奇异性，对应着束缚态的出现。

2.1 3D 散射中的 δ 函数

我们首先给出 3D 散射下散射振幅

$$f = \frac{1}{k\cot\delta - \mathrm{i}k} \tag{1.13}$$

观察 (1.12)，由于 α 是 $\mathcal{O}(1)$，因此 $a \sim \mathcal{O}(\Delta)$，因此当势阱宽度趋于 0 时，散射振幅也趋于 0，这种相互作用称为无关相互作用。因此无法用 δ 函数来模拟球势阱。

如果我们用场 ψ 表示散射粒子，拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger\Big(\mathrm{i}\partial_t + \frac{\nabla^2}{2M}\Big)\psi - \frac{C_0}{4}\Big(\psi^\dagger\psi\Big)^2 \tag{1.14}$$

2 手征拉氏量

该章主要参考 [2]

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3}(\bar{q}_i\mathrm{i}\not{D}q_i - m_i\bar{q}_iq_i) - \frac{1}{4}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}^{a\mu\nu} \tag{2.1}$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}gT^aA^a_\mu$, $T^a = \lambda^a/2$。仅考虑动能项时，具有 $U(3)_L \times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏，系统的对称群为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$，其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在，$SU(3)_L \times SU(3)_R$ 遭到了破坏，但当粒子质量相同时，依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项，

$$\sum_i m_i\bar{q}_iq_i = \sum_{i,j}\bar{q}_{R,i}M_{ij}q_{L,j} \tag{2.2}$$

其中 $M = diag(m_u, m_d, m_s)$。如果我们将质量项升级为场，在最后结果的时候在取回常数，并假设其在手征变换下进行如下变换，

$$M \to RML^\dagger \tag{2.3}$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 变换下不变。

除质量项的显式破缺外，当考虑夸克凝聚的时候，也会产生自发破缺，考虑 QCD 真空

$$\langle 0|\bar{q}_{R,i}q_{L,j}|0\rangle = \Lambda^3\delta_{ij} \tag{2.4}$$

其中 Λ 具有质量量纲。其在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下按照 $(3,\bar{3})$ 变换。在手征变换下，

$$L_{im}\langle 0|\bar{q}_{R,n}q_{L,m}|0\rangle R^\dagger_{nj} = \Lambda^3U_{ij} \tag{2.5}$$

其中 $U_{ij}=(LR^{\dagger})_{ij}$。当 $L=R$ 时，真空没有变化，此时恰好对应 $SU(3)_V$。

我们可以采用和质量类似的方式，将 U 升格为场，并将其参数化为

$$U(x)=exp[\frac{i}{f}\phi(x)],\ \phi(x)=T^a\phi^a(x) \tag{2.6}$$

其中，$\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子。

当 N=2 时，

$$\phi\equiv\sum_{i=1}^{3}\phi_a\sigma^a=\begin{pmatrix}\phi_3 & \phi_1-\mathrm{i}\phi_2\\ \phi_1+\mathrm{i}\phi_2) & -\phi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi^0 & \sqrt{2}\pi^+\\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

当 N=3 时，

$$\phi\equiv\begin{pmatrix}\pi^0+\frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+\\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0+\frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0\\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3}\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

1 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前，我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下，拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0=\sum_{l=u,d,s}(\bar{q}_{R,l}\mathrm{i}\not{D}q_{R,l}+\bar{q}_{L,l}\mathrm{i}\not{D}q_{L,l})-\frac{1}{4}\mathcal{G}_{a\mu\nu}\mathcal{G}_a^{\mu\nu} \tag{2.9}$$

在 $U(3)_L\times U(3)_R$ 群下，场的变化如下

$$\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\\ s_L\end{pmatrix}\mapsto U_L\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\\ s_L\end{pmatrix}=exp\left(-\mathrm{i}\sum_{a=1}^{8}\Theta_{La}\frac{\lambda_a}{2}\right)e^{-\mathrm{i}\Theta_L}\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\\ s_L\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u_R\\ d_R\\ s_R\end{pmatrix}\mapsto U_R\begin{pmatrix}u_R\\ d_R\\ s_R\end{pmatrix}=exp\left(-\mathrm{i}\sum_{a=1}^{8}\Theta_{Ra}\frac{\lambda_a}{2}\right)e^{-\mathrm{i}\Theta_R}\begin{pmatrix}u_R\\ d_R\\ s_R\end{pmatrix} \tag{2.10}$$

则拉氏量的变换为

$$\delta\mathcal{L}_0=\bar{q}_R\left(\sum_{a=1}^{8}\partial_\mu\varepsilon_{Ra}\frac{\lambda_a}{2}+\partial_\mu\varepsilon_R\right)\gamma^\mu q_R+\bar{q}_L\left(\sum_{a=1}^{8}\partial_\mu\varepsilon_{La}\frac{\lambda_a}{2}+\partial_\mu\varepsilon_R\right)\gamma^\mu q_L \tag{2.11}$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$\begin{aligned}L_a^\mu=\bar{q}_L\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}q_L,R_a^\mu=\bar{q}_R\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}q_R\\ L^\mu=\bar{q}_L\gamma^\mu q_L,R^\mu=\bar{q}_R\gamma^\mu q_R\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中带有下指标 a 的流称为八重态，不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q \tag{2.13}$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\frac{\lambda_a}{2}q \tag{2.14}$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒，对应重子数守恒，而单态轴矢流在量子化之后出现反常。

定义三个荷算符

$$\begin{aligned}
Q_{La}(t) &= \int \mathrm{d}^3x q_L^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2}q_L(t,\vec{x}) \\
Q_{Ra}(t) &= \int \mathrm{d}^3x q_R^\dagger(t,\vec{x})\frac{\lambda_a}{2}q_R(t,\vec{x}) \\
Q_V(t) &= \int \mathrm{d}^3x q^\dagger(t,\vec{x})q(t,\vec{x})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{gathered}
[Q_{La}, Q_{Lb}] = \mathrm{i}f_{abc}Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = \mathrm{i}f_{abc}Q_{Rc} \\
[Q_{La}, Q_{Rb}] = [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0
\end{gathered} \tag{2.16}$$

2 Goldstone 玻色子的非线性实现

参考文献

[1] David B Kaplan. lectures on effective field theory”. *arXiv preprint nuclth/0510023*, 5, 5.

[2] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.