手征微扰场论

王旭

2021 年 11 月 23 日

目录

1 介绍

该章主要参考 [1]

首先 QCD 的拉氏量具有如下形式 (仅考虑 u、d、s 夸克)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3} (\bar{q}_i \mathrm{i} \not{D} q_i - m_i \bar{q}_i q_i) - \frac{1}{4} \mathcal{G}^a_{\mu\nu} \mathcal{G}^{a\mu\nu} \tag{1.1}$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i} g T^a A^a_\mu$, $T^a = \lambda^a/2$。仅考虑动能项时，具有 $U(3)_L \times U(3)_R$ 的对称性。量子化之后 $U(1)_A$ 被破坏，系统的对称群为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$，其中 $U(1)_V$ 对应着重子数。由于质量项的存在，$SU(3)_L \times SU(3)_R$ 遭到了破坏，但当粒子质量相同时，依旧会保持 $SU(3)_V$ 的对称性。

考虑质量项，

$$\sum_i m_i \bar{q}_i q_i = \sum_{i,j} \bar{q}_{R,i} M_{ij} q_{L,j} \tag{1.2}$$

其中 $M = diag(m_u, m_d, m_s)$。如果我们将质量项升级为场，在最后结果的时候在取回常数，并假设其在手征变换下进行如下变换，

$$M \to RML^\dagger \tag{1.3}$$

则拉氏量依然在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 变换下不变。

除质量项的显式破缺外，当考虑夸克凝聚的时候，也会产生自发破缺，考虑 QCD 真空

$$\langle 0 | \bar{q}_{R,i} q_{L,j} | 0 \rangle = \Lambda^3 \delta_{ij} \tag{1.4}$$

其中 Λ 具有质量量纲。其在 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 下按照 $(3, \bar{3})$ 变换。在手征变换下，

$$L_{im} \langle 0 | \bar{q}_{R,n} q_{L,m} | 0 \rangle R^\dagger_{nj} = \Lambda^3 U_{ij} \tag{1.5}$$

其中 $U_{ij} = (LR^\dagger)_{ij}$。当 $L = R$ 时，真空没有变化，此时恰好对应 $SU(3)_V$。

我们可以采用和质量类似的方式，将 U 升格为场，并将其参数化为

$$U(x) = exp[\frac{i}{f}\phi(x)], \ \phi(x) = T^a \phi^a(x) \tag{1.6}$$

其中，$\phi^a(x)$ 为破缺生成的 8 个 Goldstone 玻色子。

当 N=2 时，

$$\phi \equiv \sum_{i=1}^{3} \phi_a \sigma^a = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - \mathrm{i}\phi_2 \\ \phi_1 + \mathrm{i}\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

当 N=3 时，

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

1 流代数

在正式考虑手征拉氏量的写法之前，我们首先讨论与手征相关的流代数。在手征极限下，拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{l=u,d,s} \left(\bar{q}_{R,l} \mathrm{i} \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} \mathrm{i} \not{D} q_{L,l} \right) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \tag{1.9}$$

在 $U(3)_L \times U(3)_R$ 群下，场的变化如下

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = exp\left(-\mathrm{i} \sum_{a=1}^{8} \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-\mathrm{i}\varepsilon_L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = exp\left(-\mathrm{i} \sum_{a=1}^{8} \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-\mathrm{i}\varepsilon_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

则拉氏量的变换为

$$\delta\mathcal{L}_0 = \bar{q}_R \left(\sum_{a=1}^{8} \partial_\mu \varepsilon_{Ra} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R \right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left(\sum_{a=1}^{8} \partial_\mu \varepsilon_{La} \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \varepsilon_R \right) \gamma^\mu q_L \tag{1.11}$$

因此产生的左手流和右手流分别为

$$\begin{aligned} L_a^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, R_a^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R \\ L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中带有下指标 a 的流称为八重态，不带有的称为单态。定义两个单态矢量流和轴矢流为

$$V^\mu = R^\mu + L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q, A^\mu = R^\mu - L^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q \tag{1.13}$$

定义两个八重态矢量流和轴矢流为

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \tag{1.14}$$

单态矢量流即使在量子化之后依旧守恒，对应重子数守恒，而单态轴矢流在量子化之后出现反常。

定义三个荷算符

$$\begin{aligned} Q_{La}(t) &= \int \mathrm{d}^3 x q_L^\dagger(t,\vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t,\vec{x}) \\ Q_{Ra}(t) &= \int \mathrm{d}^3 x q_R^\dagger(t,\vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_R(t,\vec{x}) \\ Q_V(t) &= \int \mathrm{d}^3 x q^\dagger(t,\vec{x}) q(t,\vec{x}) \end{aligned} \tag{1.15}$$

三个荷算符之间的对易关系恰好对应着 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的李代数

$$\begin{gathered}[Q_{La}, Q_{Lb}] = \mathrm{i} f_{abc} Q_{Lc}, [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = \mathrm{i} f_{abc} Q_{Rc} \\ [Q_{La}, Q_{Rb}] = [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0\end{gathered} \tag{1.16}$$

2 Goldstone 玻色子的实现

在手征极限下，系统拉氏量 (1.9) 具有 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，但当考虑夸克凝聚的时候，基态只有 $SU(3)_V \times U(1)_V$ 的对称性，系统的对称性发生了自发破缺，生成了 8 个无质量的 Goldstone 玻色子。由于真实的夸克带有微小质量，因此拉氏量不具备严格的 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 的对称性，破缺得到的 Goldstone 玻色子带有质量。

一般考虑，假设有大群 G，以及它的子群 H，拉氏量具有群 G 对称性，基态具有群 H 对称性，则会生成 $n = n_G - n_H$ 个 Goldstone 玻色子，每个 Goldstone 玻色子用 ϕ_i 标记，为光滑实函数，$i = 1, ..., n$，定义一个 n 分量的矢量 $\mathbf{\Phi} = (\phi_1, ..., \phi_n)$，接着定义一个实向量空间

$$M_1 = \{\mathbf{\Phi} : M^4 \to \mathbb{R}^{\ltimes} | \phi_i : M^4 \to R\} \tag{1.17}$$

定义一个映射 $\varphi : G \times M_1 \to M_1$，满足

- $\varphi(e, \mathbf{\Phi}) = \mathbf{\Phi}$
- $\varphi(g_1, \varphi(g_2, \mathbf{\Phi})) = \varphi(g_1 g_2, \mathbf{\Phi})$

用$\mathbf{\Phi}$表示 M_1 中的原点，对应系统的基态构型，则对于 $\forall h \in H$，存在 $\varphi(h, 0) = 0$，从而可以建立起 G/H 陪集与 Goldstone 玻色子之间的同构关系。可以验证，对于同一陪集中的元素，原点被映射到同一矢量，而不同陪集中的元素将原点映射到不同矢量。

考查 Goldstone 玻色子在群 G 下的变换行为，对于每一个 $\mathbf{\Phi}$ 有一个陪集 $\tilde{g}H$ 与之对应，表示为

$$\varphi(g, \mathbf{\Phi}) = \varphi(\tilde{g}h, 0)$$

接着用 $\varphi(g)$ 作用到 $\mathbf{\Phi}$ 上

$$\varphi(g, \mathbf{\Phi}) = \varphi(g, \varphi(\tilde{g}h, 0)) = \mathbf{\Phi}'$$

即存在关系

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Phi} & \xrightarrow{g} & \mathbf{\Phi}' \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tilde{g}H & \xrightarrow{g} & g\tilde{g}H \end{array}$$

2 介子的手征拉氏量

1 手征的 power-counting

手征拉氏量一般具有如下形式

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_4, \tag{2.1}$$

其中只包含偶数项。这主要是由于 Lorentz 不变性以及质量项 $\sim \mathcal{O}(q^2)$。

对于给定费曼图，在 $p_i \mapsto tp_i$ 以及 $m_q \mapsto t^2 m_q$ 变换下，若散射振幅变换如下

$$M(tp_i, t^2 m_q) = t^D M(p_i, m_q), \tag{2.2}$$

则称 D 是一个图的手征阶数。手征阶数的计算公式如下

$$D = nN_L - 2N_I + \sum_{k=1}^{\infty} 2kN_{2k}, \tag{2.3}$$

其来源简单阐述如下，在上述标度变化下，内线的变换为 t^{n-2}，顶点的变换为 t^{2k-n}，由于散射矩阵的不变性，以及 $S \sim \delta^n(q)M$，因此需要添加一个 n 来补偿 δ 函数的影响，再考虑到一张图中独立圈数、内线数、顶点数之间的关系 $N_L = N_I - (N_V - 1)$，即可得到上式。

2 手征拉氏量

首先每一项的阶数如下，

$$U = \mathcal{O}(q^0), D_\mu U, r_\mu, l_\mu = \mathcal{O}(q), f_{L,R\mu\nu} = \mathcal{O}(q^2), \chi = \mathcal{O}(q^2), \tag{2.4}$$

其中 U 是 Goldstone 玻色子的实现，$U = exp(\mathrm{i}\phi_a\lambda_a/F_0)$，而 r_μ, l_μ 是协变导数中的规范场，$f_{L,R\mu\nu}$ 是相应的场强张量，$\chi = 2B_0(s + \mathrm{i}p)$。因此可以写出二阶的手征拉式量如下，

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} Tr[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} Tr[\chi U^\dagger + U\chi^\dagger], \tag{2.5}$$

参考文献

[1] Stefan Scherer and Matthias R Schindler. *A primer for chiral perturbation theory*, volume 830. Springer Science & Business Media, 2011.