色散关系

王旭

2021 年 10 月 29 日

目录

本笔记基本参考 [1]。

1 S 矩阵及分波

用 $|\mathbf{q},\sigma,m,s,\lambda\rangle$ 表示一个粒子态，粒子态的归一化如下

$$\langle\mathbf{q},\sigma,m,s,\lambda||\mathbf{q}',\sigma',m',s',\lambda'\rangle=(2\pi)^3 2q^0\delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\delta^{\sigma\sigma'}\delta^{ss'}\delta^{\lambda\lambda'}, \tag{1.1}$$

1 S 矩阵

在 QFT 中，从初态 $|i\rangle$ 到末态的 $|f\rangle$ 的几率由幺正矩阵 S 描述，S 矩阵元定义为

$$S_{fi}=\langle f|S|i\rangle. \tag{1.2}$$

在相互作用表象中，可表示为

$$S_{fi}=\frac{\langle f|e^{\mathrm{i}\int d^4x\mathcal{L}_{int}}|i\rangle}{\langle 0|e^{\mathrm{i}\int d^4x\mathcal{L}_{int}}|0\rangle}. \tag{1.3}$$

利用 S 矩阵定义 T 矩阵为

$$S=1+\mathrm{i}T, \tag{1.4}$$

则由 S 矩阵的幺正性可得

$$T-T^\dagger=\mathrm{i}TT^\dagger, \tag{1.5}$$

两边夹上 $\langle f|$ 和 $|i\rangle$，以及在右手边插入单位矩阵，则可以得到

$$\begin{aligned}\langle f|T|i\rangle-\langle f|T^\dagger|i\rangle=&\mathrm{i}\sum\int\left[(2\pi)^4\delta(p_f-\sum_{i=1}^n q_i)\prod_{i=1}^n\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0}\right]\\&\times\langle f|T|\mathbf{q}_1,\sigma_1,m_1,s_1,\lambda_1;\cdots;\mathbf{q}_n,\sigma_n,m_n,s_n,\lambda_n\rangle\\&\times\langle\mathbf{q}_1,\sigma_1,m_1,s_1,\lambda_1;\cdots;\mathbf{q}_n,\sigma_n,m_n,s_n,\lambda_n|T^\dagger|i\rangle,\end{aligned} \tag{1.6}$$

用 $\int dQ$ 表示末态相空间积分

$$\int dQ=\int(2\pi)^4\delta(p_f-\sum_{i=1}^n q_i)\prod_{i=1}^n\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0}, \tag{1.7}$$

两体末态相空间在质心系中，

$$dQ=\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2)=\frac{|\mathbf{p}_1|d\Omega}{16\pi^2\sqrt{s}}, \tag{1.8}$$

在两体散射中，选取质心参考系，则散射截面为

$$\sigma_{fi} = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1\sqrt{s}} \int dQ_f |\langle f|T|\mathbf{p}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; |\mathbf{p}_2, \sigma_2, m_2, s_2, \lambda_2\rangle|^2, \tag{1.9}$$

对于给定初态 $|i\rangle$，则所有可能末态的散射截面为

$$\sigma_i = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}} \sum_f \int dQ_f |\langle f|T||\mathbf{p}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; |\mathbf{p}_2, \sigma_2, m_2, s_2, \lambda_2\rangle|^2, \tag{1.10}$$

选取初态 $|i\rangle$ 等于末态 $|f\rangle$，则可以得到光学定理，

$$\Im T_{ii} = \frac{1}{2} \sum_f \int dQ_f |T_{fi}|^2 = 2|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}\sigma_i. \tag{1.11}$$

其中 $\Im$ 表示取虚部。

2 分波

用 $|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle$ 一个两粒子态，其中 $\mathbf{p}$ 表示质心系中三动量，各自静止系中自旋第三分量表示为 σ_1, σ_2 的粒子，定义一个两体态 $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$

$$|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\hat{\mathbf{p}} Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}) |\hat{\mathbf{p}}, \sigma_1\sigma_2\rangle, \tag{1.12}$$

其中 l 为轨道角动量，m 为其第三分量。

旋转算符 R 作用在态 $|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle$，结果为

$$R|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle = \sum_{\sigma_1', \sigma_2'} D^{(s_1)}(R)_{\sigma_1'\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma_2'\sigma_2} |\mathbf{p}', \sigma_1'\sigma_2'\rangle, \tag{1.13}$$

则 R 作用在 $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$ 上，结果为

$$\begin{aligned} R|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle &= \sum_{\sigma_1', \sigma_2'} D^{(s_1)}(R)_{\sigma_1'\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma_2'\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\hat{\mathbf{p}'} Y_l^m(R^{-1}\hat{\mathbf{p}}') |\hat{\mathbf{p}}', \sigma_1'\sigma_2'\rangle \\ &= \sum_{\sigma_1', \sigma_2', m'} D^{(l)}(R)_{mm'} D^{(s_1)}(R)_{\sigma_1'\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma_2'\sigma_2} |lm', \sigma_1'\sigma_2'\rangle. \end{aligned} \tag{1.14}$$

首先考虑两粒子自旋耦合，再考虑总自旋和轨道角动量的耦合，利用 CG 系数将 $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$ 转换到 $|J\mu, lS\rangle$ 基底，有

$$|J\mu, lS\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, m, M} (\sigma_1\sigma_2 M|s_1 s_2 S)(mM\mu|lSJ)|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle, \tag{1.15}$$

其中 s_1, s_2 表示两粒子的自旋，σ_1, σ_2 分别表示自旋的第三分量，S 表示两粒子的总自旋，M 表示总自旋的第三分量，J 为总角动量，μ 为总角动量的第三分量。

当考虑同位旋结构时，转换关系为

$$|J\mu, lS, It_3\rangle = \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,m,\\ M,\alpha_1,\alpha_2}} (\sigma_1\sigma_2 M|s_1 s_2 S)(mM\mu|lSJ)(\alpha_1\alpha_2 t_3|\tau_1\tau_2 I)|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2, \alpha_1\alpha_2\rangle. \tag{1.16}$$

由于两体末态相空间积分的结果，因此我们将两体态归一化为

$$\langle \mathbf{p}', \sigma_1'\sigma_2', \alpha_1'\alpha_2'|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2, \alpha_1\alpha_2\rangle = \frac{16\pi^2\sqrt{s}}{|\mathbf{p}|}\delta(\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{p}}), \tag{1.17}$$

忽略了离散指标。因此，$|J\mu, lS, It_3\rangle$ 态的归一化为

$$\langle J'\mu', l'S', I't_3'|J\mu, lS, It_3\rangle = \frac{4\pi\sqrt{s}}{|\mathbf{p}|}\delta_{J'J}\delta_{\mu'\mu}\delta_{l'l}\delta_{S'S}\delta_{I'I}\delta_{t_3't_3}. \tag{1.18}$$

考虑分波振幅，从 $J\bar{l}\bar{S}I$ 跃迁到 $JlSI$ 的几率由矩阵元 $T^{(JI)}_{lS,\bar{l}\bar{S}}$ 给出

$$T^{(JI)}_{lS,\bar{l}\bar{S}} = \langle J\mu, lS, It_3|J\mu, \bar{l}\bar{S}, It_3\rangle, \tag{1.19}$$

代入 (1.16) 式，可得

$$\begin{aligned} T^{(JI)}_{lS,\bar{l}\bar{S}} =& \frac{1}{4\pi}\sum\int d\hat{\mathbf{p}}'\int d\hat{\mathbf{p}} Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}')^* Y_{\bar{l}}^{\bar{m}}(\hat{\mathbf{p}})(\sigma_1\sigma_2 M|s_1 s_2 S)(mM\mu|lSJ)(\alpha_1\alpha_2 t_3|\tau_1\tau_2 I) \\ &\times(\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{M}|\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{S})(\bar{m}\bar{M}\mu|\bar{l}\bar{S}J)(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 t_3|\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 I)\langle\hat{\mathbf{p}}', \sigma_1\sigma_2, \alpha_1\alpha_2|T|\mathbf{p}, \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2, \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\rangle, \end{aligned} \tag{1.20}$$

利用 T 矩阵的旋转不变性，以及 $D^{(l)}_{m'm}$ 的组合公式

$$\sum_{m_1,m_2}(m_1 m_2 M|l_1 l_2 L)D^{(l_1)}_{m_1'm_1}(R)D^{(l_2)}_{m_2'm_2}(R) = \sum_{M'}(m_1'm_2'M'|l_1 l_2 L)D^{(L)}_{M'M}(R), \tag{1.21}$$

可以将上式化为

$$jjj \tag{1.22}$$

2 Kallen-Lehmann 表示

该篇主要参考 [2] [3]。

考虑 2→2 标量粒子散射过程，散射矩阵写作

$${}_{\text{out}}\langle p_1, p_2|q_1, q_2\rangle_{\text{in}} = {}_{\text{out}}\langle p_1, p_2|S|q_1, q_2\rangle_{\text{out}}, \tag{2.1}$$

其中，$p_1^2 = p_2^2 = q_1^2 = q_2^2 = m^2$ 满足质壳条件。利用 LSZ 约化，我们可以重新将 S 矩阵写作

$$\begin{aligned} {}_{\text{out}}\langle p_1, p_2|q_1, q_2\rangle_{\text{in}} =& \left(\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{Z}}\right)^4\int_{x_1,x_2,y_1,y_2} e^{-\mathrm{i}(q_1\cdot x_1 + q_2\cdot x_2 - p_1\cdot y_1 - p_2\cdot y_2)}K_{x_1}K_{x_2}K_{y_1}K_{y_2} \\ &\times\langle T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\rangle, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $K_{x_1}=q_1^2-m^2$。两点关联函数是外动量的函数，如 $p_{1,2}^2, p_1\cdot p_2$ 等等。外动量实际上定义为 $p_1^2=\mathrm{Re}[p_1^2]+i\epsilon$，可以解析延拓到复平面上。

简单考虑两点关联函数，

$$\begin{aligned} G(x,y)=&\langle T\phi(x)\phi(y)\rangle \\ =&\theta(t-t')W(x,y)+\theta(t'-t)W(y,x), \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $W(x,y)=\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$。往 $W(x,y)$ 中插入一组物理态（包含单粒子态以及多粒子态）完备基，可以得到

$$W(x,y)=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^3}\rho(q)e^{-\mathrm{i}q\cdot(x-y)}, \tag{2.4}$$

其中谱密度 $\rho(q)$ 定义为，

$$\rho(q^2)=(2\pi)^3\sum_n\delta^4(q-p_n)|\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2, \tag{2.5}$$

将单粒子态分离出来考虑，则单粒子态的贡献

$$W^s(x,y)=\frac{Z}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega}e^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}, \tag{2.6}$$

同理可以得到 $W^s(y,x)$。因此单粒子态对格林函数的贡献为

$$G^s(x,y)=iZ\Delta_F(x-y), \tag{2.7}$$

进一步考虑多粒子态对格林函数的贡献，由于谱密度为 Lorentz 不变的，且具有如下性质，

$$\begin{aligned} \rho(q^2)=Z\delta(q^2-\mu^2)+\theta(q_0)\sigma(q^2) \\ \sigma(q^2)=0,\ \text{如果}q^2\leq 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

因此对于两点关联函数则有，

$$\begin{aligned} G(x,y)=&\mathrm{i}\Delta'_F(x-y) \\ =&\mathrm{i}Z\Delta_F(x-y;\mu)+\mathrm{i}\int_{\mu_{th}^2}^{\infty}\mathrm{d}\mu_n^2\sigma(\mu_n^2)\Delta_F(x-y;\mu_n^2), \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中第一项是质量为 μ 的单粒子态的贡献，而第二项积分则是多粒子态的贡献，积分下限 μ_{th} 是产生多粒子的阈值。再利用 Fourier 变换，可以得到

$$\Delta'_F(k^2)=-\frac{Z}{\mu^2-k^2}-\int_{\mu_{th}^2}^{\infty}\mathrm{d}\mu_n^2\frac{\sigma(\mu_n^2)}{\mu_n^2-k^2}, \tag{2.10}$$

再令 $k^2\to k^2\pm\mathrm{i}\epsilon$，得到

$$\Delta'_F(k^2+\mathrm{i}\epsilon)=-\frac{Z}{\mu^2-k^2-\mathrm{i}\epsilon}-\int_{\mu_{th}^2}^{\infty}\mathrm{d}\mu_n^2\frac{\sigma(\mu_n^2)}{\mu_n^2-k^2-\mathrm{i}\epsilon} \tag{2.11}$$

$$\Delta'_F(k^2-\mathrm{i}\epsilon)=-\frac{Z}{\mu^2-k^2+\mathrm{i}\epsilon}-\int_{\mu_{th}^2}^{\infty}\mathrm{d}\mu_n^2\frac{\sigma(\mu_n^2)}{\mu_n^2-k^2+\mathrm{i}\epsilon}, \tag{2.12}$$

由于 Z 和 $\sigma(s)$(将 k^2 向复平面 s 延拓) 都是实的，因此

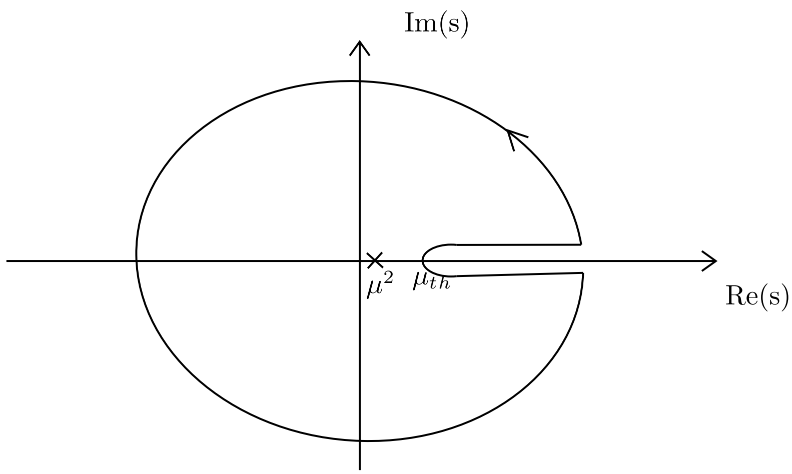
$$(\Delta'_F(s))^*=\Delta'_F(s^*), \tag{2.13}$$

从而有

$$\Delta'_F(k^2+\mathrm{i}\epsilon)-\Delta'_F(k^2-\mathrm{i}\epsilon)=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\Delta'_F(k^2+\mathrm{i}\epsilon), \tag{2.14}$$

从而可以将格林函数积分利用其虚部表达，即色散关系形式

$$\Delta'_F(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}s'\frac{\mathrm{Im}\Delta'_F(s')}{s-s'}, \tag{2.15}$$



3 交叉对称及同位旋结构

考虑 $\pi\pi$

参考文献

[1] José Antonio Oller. *A Brief Introduction to Dispersion Relations: With Modern Applications*. Springer, 2019.

[2] Roman Zwicky. A brief Introduction to Dispersion Relations and Analyticity. In *Quantum Field Theory at the Limits: from Strong Fields to Heavy Quarks*, 10 2016.

[3] 黄涛. 量子场论导论. 中外物理学精品书系. 北京大学出版社, 2015.