

色散关系

王旭

2021 年 10 月 29 日

目录

1	S 矩阵及分波	2
1	S 矩阵	2
2	分波	3
2	Kallen-Lehmann 表示	4
3	交叉对称及同位旋结构	5

本笔记基本参考 [1]。

1 S 矩阵及分波

用 $|\mathbf{q}, \sigma, m, s, \lambda\rangle$ 表示一个粒子态，粒子态的归一化如下

$$\langle \mathbf{q}, \sigma, m, s, \lambda | \mathbf{q}', \sigma', m', s', \lambda' \rangle = (2\pi)^3 2q^0 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta^{\sigma\sigma'} \delta^{ss'} \delta^{\lambda\lambda'}, \quad (1.1)$$

1 S 矩阵

在 QFT 中，从初态 $|i\rangle$ 到末态的 $|f\rangle$ 的几率由幺正矩阵 S 描述，S 矩阵元定义为

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle. \quad (1.2)$$

在相互作用表象中，可表示为

$$S_{fi} = \frac{\langle f | e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} | i \rangle}{\langle 0 | e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} | 0 \rangle}. \quad (1.3)$$

利用 S 矩阵定义 T 矩阵为

$$S = 1 + iT, \quad (1.4)$$

则由 S 矩阵的幺正性可得

$$T - T^\dagger = iTT^\dagger, \quad (1.5)$$

两边夹上 $\langle f |$ 和 $|i\rangle$ ，以及在右手边插入单位矩阵，则可以得到

$$\begin{aligned} \langle f | T | i \rangle - \langle f | T^\dagger | i \rangle &= i \sum \int \left[(2\pi)^4 \delta(p_f - \sum_{i=1}^n q_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \right] \\ &\times \langle f | T | \mathbf{q}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \cdots; \mathbf{q}_n, \sigma_n, m_n, s_n, \lambda_n \rangle \\ &\times \langle \mathbf{q}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \cdots; \mathbf{q}_n, \sigma_n, m_n, s_n, \lambda_n | T^\dagger | i \rangle, \end{aligned} \quad (1.6)$$

用 $\int dQ$ 表示末态相空间积分

$$\int dQ = \int (2\pi)^4 \delta(p_f - \sum_{i=1}^n q_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0}, \quad (1.7)$$

两体末态相空间在质心系中，

$$dQ = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) = \frac{|\mathbf{p}_1| d\Omega}{16\pi^2 \sqrt{s}}, \quad (1.8)$$

在两体散射中, 选取质心参考系, 则散射截面为

$$\sigma_{fi} = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}} \int dQ_f |\langle f|T|\mathbf{p}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; |\mathbf{p}_2, \sigma_2, m_2, s_2, \lambda_2\rangle|^2, \quad (1.9)$$

对于给定初态 $|i\rangle$, 则所有可能末态的散射截面为

$$\sigma_i = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}} \sum_f \int dQ_f |\langle f|T|\mathbf{p}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; |\mathbf{p}_2, \sigma_2, m_2, s_2, \lambda_2\rangle|^2, \quad (1.10)$$

选取初态 $|i\rangle$ 等于末态 $|f\rangle$, 则可以得到光学定理

$$\Im T_{ii} = \frac{1}{2} \sum_f \int dQ_f |T_{fi}|^2 = 2|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}\sigma_i. \quad (1.11)$$

2 分波

用 $|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle$ 一个两粒子态, 其中 \mathbf{p} 表示质心系中三动量, 各自静止系中自旋第三分量表示为 σ_1, σ_2 的粒子, 定义一个两体态 $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$

$$|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\hat{\mathbf{p}} Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}) |\hat{\mathbf{p}}, \sigma_1\sigma_2\rangle, \quad (1.12)$$

其中 l 为轨道角动量, m 为其第三分量。

旋转算符 R 作用在态 $|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle$, 结果为

$$R|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle = \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2} D^{(s_1)}(R)_{\sigma'_1\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma'_2\sigma_2} |\mathbf{p}', \sigma'_1\sigma'_2\rangle, \quad (1.13)$$

则 R 作用在 $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$ 上, 结果为

$$\begin{aligned} R|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle &= \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2} D^{(s_1)}(R)_{\sigma'_1\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma'_2\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\hat{\mathbf{p}} Y_l^m(R^{-1}\hat{\mathbf{p}}') |\hat{\mathbf{p}}', \sigma'_1\sigma'_2\rangle \\ &= \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2, m'} D^{(l)}(R)_{mm'} D^{(s_1)}(R)_{\sigma'_1\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma'_2\sigma_2} |lm', \sigma'_1\sigma'_2\rangle. \end{aligned} \quad (1.14)$$

首先考虑两粒子自旋耦合, 再考虑总自旋和轨道角动量的耦合, 利用 CG 系数将 $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$ 转换到 $|J\mu, lS\rangle$ 基底, 有

$$|J\mu, lS\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, m, M} (\sigma_1\sigma_2 M | s_1 s_2 S) (m M \mu | l S J) |lm, \sigma_1\sigma_2\rangle, \quad (1.15)$$

其中 s_1, s_2 表示两粒子的自旋, σ_1, σ_2 分别表示自旋的第三分量, S 表示两粒子的总自旋, M 表示总自旋的第三分量, J 为总角动量, μ 为总角动量的第三分量。

当考虑同位旋结构时, 转换关系为

$$|J\mu, lS, It_3\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, m, M, \alpha_1, \alpha_2} (\sigma_1\sigma_2 M | s_1 s_2 S) (m M \mu | l S J) (\alpha_1\alpha_2 t_3 | \tau_1 \tau_2 I) |\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2, \alpha_1\alpha_2\rangle, \quad (1.16)$$

2 Kallen-Lehmann 表示

该篇主要参考 [2] [3]。

考虑 $2 \rightarrow 2$ 标量粒子散射过程，散射矩阵写作

$$\text{out} \langle p_1, p_2 | q_1, q_2 \rangle_{\text{in}} = \text{out} \langle p_1, p_2 | S | q_1, q_2 \rangle_{\text{out}}, \quad (2.1)$$

其中， $p_1^2 = p_2^2 = q_1^2 = q_2^2 = m^2$ 满足质壳条件。利用 LSZ 约化，我们可以重新将 S 矩阵写作

$$\begin{aligned} \text{out} \langle p_1, p_2 | q_1, q_2 \rangle_{\text{in}} &= \left(\frac{-i}{\sqrt{Z}} \right)^4 \int_{x_1, x_2, y_1, y_2} e^{-i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot y_1 - p_2 \cdot y_2)} K_{x_1} K_{x_2} K_{y_1} K_{y_2} \\ &\times \langle T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $K_{x_1} = q_1^2 - m^2$ 。两点关联函数是外动量的函数，如 $p_{1,2}^2, p_1 \cdot p_2$ 等等。外动量实际上定义为 $p_1^2 = \text{Re}[p_1^2] + i\epsilon$ ，可以解析延拓到复平面上。

简单考虑两点关联函数，

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \langle T \phi(x) \phi(y) \rangle \\ &= \theta(t - t') W(x, y) + \theta(t' - t) W(y, x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $W(x, y) = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle$ 。往 $W(x, y)$ 中插入一组物理态（包含单粒子态以及多粒子态）完备基，可以得到

$$W(x, y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \rho(q) e^{-iq \cdot (x-y)}, \quad (2.4)$$

其中谱密度 $\rho(q)$ 定义为，

$$\rho(q^2) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(q - p_n) |\langle 0 | \phi(0) | n \rangle|^2, \quad (2.5)$$

将单粒子态分离出来考虑，则单粒子态的贡献

$$W^s(x, y) = \frac{Z}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (2.6)$$

同理可以得到 $W^s(y, x)$ 。因此单粒子态对格林函数的贡献为

$$G^s(x, y) = iZ \Delta_F(x - y), \quad (2.7)$$

进一步考虑多粒子态对格林函数的贡献，由于谱密度为 Lorentz 不变的，且具有如下性质，

$$\begin{aligned} \rho(q^2) &= Z \delta(q^2 - \mu^2) + \theta(q_0) \sigma(q^2) \\ \sigma(q^2) &= 0, \text{ 如果 } q^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

因此对于两点关联函数则有,

$$\begin{aligned} G(x, y) &= i\Delta'_F(x - y) \\ &= iZ\Delta_F(x - y; \mu) + i \int_{\mu_{th}^2}^{\infty} d\mu_n^2 \sigma(\mu_n^2) \Delta_F(x - y; \mu_n^2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中第一项是质量为 μ 的单粒子态的贡献, 而第二项积分则是多粒子态的贡献, 积分下限 μ_{th} 是产生多粒子的阈值。再利用 Fourier 变换, 可以得到

$$\Delta'_F(k^2) = -\frac{Z}{\mu^2 - k^2} - \int_{\mu_{th}^2}^{\infty} d\mu_n^2 \frac{\sigma(\mu_n^2)}{\mu_n^2 - k^2}, \quad (2.10)$$

再令 $k^2 \rightarrow k^2 \pm i\epsilon$, 得到

$$\Delta'_F(k^2 + i\epsilon) = -\frac{Z}{\mu^2 - k^2 - i\epsilon} - \int_{\mu_{th}^2}^{\infty} d\mu_n^2 \frac{\sigma(\mu_n^2)}{\mu_n^2 - k^2 - i\epsilon} \quad (2.11)$$

$$\Delta'_F(k^2 - i\epsilon) = -\frac{Z}{\mu^2 - k^2 + i\epsilon} - \int_{\mu_{th}^2}^{\infty} d\mu_n^2 \frac{\sigma(\mu_n^2)}{\mu_n^2 - k^2 + i\epsilon}, \quad (2.12)$$

由于 Z 和 $\sigma(s)$ (将 k^2 向复平面 s 延拓) 都是实的, 因此

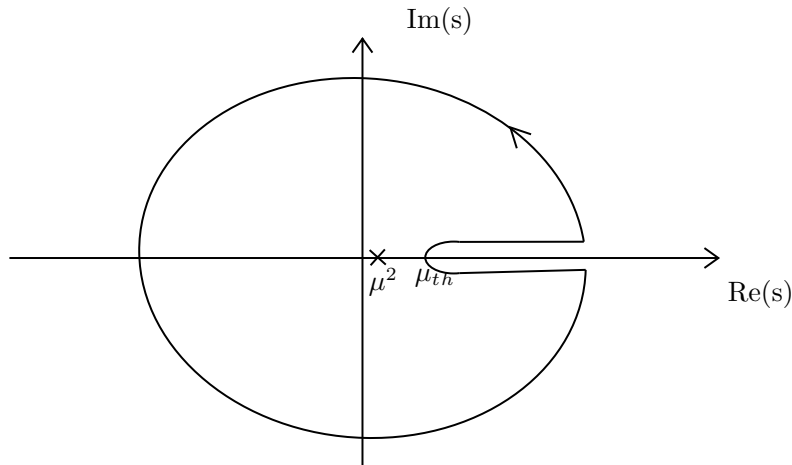
$$(\Delta'_F(s))^* = \Delta'_F(s^*), \quad (2.13)$$

从而有

$$\Delta'_F(k^2 + i\epsilon) - \Delta'_F(k^2 - i\epsilon) = 2i\text{Im}\Delta'_F(k^2 + i\epsilon), \quad (2.14)$$

从而可以将格林函数积分利用其虚部表达, 即色散关系形式

$$\Delta'_F(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds' \frac{\text{Im}\Delta'_F(s')}{s - s'}, \quad (2.15)$$



3 交叉对称及同位旋结构

考虑 $\pi\pi$

参考文献

- [1] José Antonio Oller. *A Brief Introduction to Dispersion Relations: With Modern Applications*. Springer, 2019.
- [2] Roman Zwicky. A brief Introduction to Dispersion Relations and Analyticity. In *Quantum Field Theory at the Limits: from Strong Fields to Heavy Quarks*, 10 2016.
- [3] 黄涛. 量子场论导论. 中外物理学精品书系. 北京大学出版社, 2015.