

# 色散关系

王旭

2021 年 11 月 8 日

## 目录

|                                  |          |
|----------------------------------|----------|
| <b>1 S 矩阵及分波</b>                 | <b>2</b> |
| 1 S 矩阵 . . . . .                 | 2        |
| 2 分波 . . . . .                   | 3        |
| 2.1 分波振幅的幺正性 . . . . .           | 4        |
| 2.2 LS 方程 . . . . .              | 5        |
| <b>2 交叉对称及同位旋结构</b>              | <b>6</b> |
| <b>A 复数知识</b>                    | <b>7</b> |
| 1 Schwarz 反射定理 . . . . .         | 7        |
| 2 Sugawara-Kanazawa 定理 . . . . . | 7        |

本笔记基本参考 [1]。

## 1 S 矩阵及分波

用  $|\mathbf{q}, \sigma, m, s, \lambda\rangle$  表示一个粒子态，粒子态的归一化如下

$$\langle \mathbf{q}, \sigma, m, s, \lambda | |\mathbf{q}', \sigma', m', s', \lambda' \rangle = (2\pi)^3 2q^0 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta^{\sigma\sigma'} \delta^{ss'} \delta^{\lambda\lambda'}, \quad (1.1)$$

### 1 S 矩阵

在 QFT 中，从初态  $|i\rangle$  到末态的  $|f\rangle$  的几率由幺正矩阵 S 描述，S 矩阵元定义为

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle. \quad (1.2)$$

在相互作用表象中，可表示为

$$S_{fi} = \frac{\langle f | e^{\int d^4x \mathcal{L}_{int}} | i \rangle}{\langle 0 | e^{\int d^4x \mathcal{L}_{int}} | 0 \rangle}. \quad (1.3)$$

利用 S 矩阵定义 T 矩阵为

$$S = 1 + iT, \quad (1.4)$$

则由 S 矩阵的幺正性可得

$$T - T^\dagger = iTT^\dagger, \quad (1.5)$$

两边夹上  $\langle f |$  和  $| i \rangle$ ，以及在右手边插入单位矩阵，则可以得到

$$\begin{aligned} \langle f | T | i \rangle - \langle f | T^\dagger | i \rangle &= i \sum \int \left[ (2\pi)^4 \delta(p_f - \sum_{i=1}^n q_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \right] \\ &\quad \times \langle f | T | \mathbf{q}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \dots; \mathbf{q}_n, \sigma_n, m_n, s_n, \lambda_n \rangle \\ &\quad \times \langle \mathbf{q}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \dots; \mathbf{q}_n, \sigma_n, m_n, s_n, \lambda_n | T^\dagger | i \rangle, \end{aligned} \quad (1.6)$$

用  $\int dQ$  表示末态相空间积分

$$\int dQ = \int (2\pi)^4 \delta(p_f - \sum_{i=1}^n q_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0}, \quad (1.7)$$

两体末态相空间在质心系中，

$$dQ = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) = \frac{|\mathbf{p}_1| d\Omega}{16\pi^2 \sqrt{s}}, \quad (1.8)$$

在两体散射中，选取质心参考系，则散射截面为

$$\sigma_{fi} = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}} \int dQ_f |\langle f|T|\mathbf{p}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2, m_2, s_2, \lambda_2 \rangle|^2, \quad (1.9)$$

对于给定初态  $|i\rangle$ ，则所有可能末态的散射截面为

$$\sigma_i = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}} \sum_f \int dQ_f |\langle f|T|\mathbf{p}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2, m_2, s_2, \lambda_2 \rangle|^2, \quad (1.10)$$

选取初态  $|i\rangle$  等于末态  $|f\rangle$ ，则可以得到光学定理，

$$\Im T_{ii} = \frac{1}{2} \sum_f \int dQ_f |T_{fi}|^2 = 2|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}\sigma_i. \quad (1.11)$$

其中  $\Im$  表示取虚部。

## 2 分波

用  $|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle$  一个两粒子态，其中  $\mathbf{p}$  表示质心系中三动量，各自静止系中自旋第三分量表示为  $\sigma_1, \sigma_2$  的粒子，定义一个两体态  $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$

$$|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\hat{\mathbf{p}} Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}) |\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle, \quad (1.12)$$

其中  $l$  为轨道角动量， $m$  为其第三分量。

旋转算符  $R$  作用在态  $|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle$ ，结果为

$$R|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle = \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2} D^{(s_1)}(R)_{\sigma'_1\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma'_2\sigma_2} |\mathbf{p}', \sigma'_1\sigma'_2\rangle, \quad (1.13)$$

则  $R$  作用在  $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$  上，结果为

$$\begin{aligned} R|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle &= \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2} D^{(s_1)}(R)_{\sigma'_1\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma'_2\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\hat{\mathbf{p}}' Y_l^m(R^{-1}\hat{\mathbf{p}}') |\hat{\mathbf{p}}', \sigma'_1\sigma'_2\rangle \\ &= \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2, m'} D^{(l)}(R)_{mm'} D^{(s_1)}(R)_{\sigma'_1\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma'_2\sigma_2} |lm', \sigma'_1\sigma'_2\rangle. \end{aligned} \quad (1.14)$$

首先考虑两粒子自旋耦合，再考虑总自旋和轨道角动量的耦合，利用 CG 系数将  $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$  转换到  $|J\mu, lS\rangle$  基底，有

$$|J\mu, lS\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, m, M} (\sigma_1\sigma_2 M |s_1 s_2 S)(m M \mu |l S J) |lm, \sigma_1\sigma_2\rangle, \quad (1.15)$$

其中  $s_1, s_2$  表示两粒子的自旋， $\sigma_1, \sigma_2$  分别表示自旋的第三分量， $S$  表示两粒子的总自旋， $M$  表示总自旋的第三分量， $J$  为总角动量， $\mu$  为总角动量的第三分量。

当考虑同位旋结构时，转换关系为

$$\begin{aligned} |J\mu, lS, It_3\rangle = & \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, m, \\ M, \alpha_1, \alpha_2}} \int d\hat{\mathbf{p}} Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}) (\sigma_1 \sigma_2 M | s_1 s_2 S) (m M \mu | l S J) \\ & \times (\alpha_1 \alpha_2 t_3 | \tau_1 \tau_2 I) |\mathbf{p}, \sigma_1 \sigma_2, \alpha_1 \alpha_2\rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

由于两体末态相空间积分的结果，因此我们将两体态归一化为（忽略离散指标）

$$\langle \mathbf{p}', \sigma'_1 \sigma'_2, \alpha'_1 \alpha'_2 | \mathbf{p}, \sigma_1 \sigma_2, \alpha_1 \alpha_2 \rangle = \frac{16\pi^2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}|} \delta(\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{p}}), \quad (1.17)$$

因此， $|J\mu, lS, It_3\rangle$  态的归一化为

$$\langle J'\mu', l'S', I't'_3 | J\mu, lS, It_3 \rangle = \frac{4\pi \sqrt{s}}{|\mathbf{p}|} \delta_{J'J} \delta_{\mu'\mu} \delta_{l'l} \delta_{S'S} \delta_{I'I} \delta_{t'_3 t_3}. \quad (1.18)$$

考虑分波振幅，从  $J\bar{S}I$  跃迁到  $JlSI$  的几率由矩阵元  $T_{lS,\bar{l}\bar{S}}^{(JI)}$  给出

$$T_{lS,\bar{l}\bar{S}}^{(JI)} = \langle J\mu, lS, It_3 | T | J\mu, \bar{l}\bar{S}, It_3 \rangle, \quad (1.19)$$

代入 (1.16) 式，可得

$$\begin{aligned} T_{lS,\bar{l}\bar{S}}^{(JI)} = & \frac{1}{4\pi} \sum \int d\hat{\mathbf{p}}' \int d\hat{\mathbf{p}} Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}')^* Y_{\bar{l}}^{\bar{m}}(\hat{\mathbf{p}}) (\sigma_1 \sigma_2 M | s_1 s_2 S) (m M \mu | l S J) (\alpha_1 \alpha_2 t_3 | \tau_1 \tau_2 I) \\ & \times (\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{M} | \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{S}) (\bar{m} \bar{M} \mu | \bar{l} \bar{S} J) (\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 t_3 | \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 I) \langle \hat{\mathbf{p}}', \sigma_1 \sigma_2, \alpha_1 \alpha_2 | T | \mathbf{p}, \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.20)$$

利用  $T$  矩阵的旋转不变性，以及  $D_{m'm}^{(l)}$  的组合公式

$$\sum_{m_1, m_2} (m_1 m_2 M | l_1 l_2 L) D_{m'_1 m_1}^{(l_1)}(R) D_{m'_2 m_2}^{(l_2)}(R) = \sum_{M'} (m'_1 m'_2 M' | l_1 l_2 L) D_{M'M}^{(L)}(R), \quad (1.21)$$

可以将上式化为

$$\begin{aligned} T_{lS,\bar{l}\bar{S}}^{(JI)} = & \frac{Y_{\bar{l}}^0(\hat{\mathbf{z}})}{2J+1} \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \bar{\sigma}_1, \\ \bar{\sigma}_2, \alpha_1, \alpha_2, \\ \alpha_1, \alpha_2, m}} \int d\hat{\mathbf{p}}'' \langle \hat{\mathbf{p}}'', \sigma_1 \sigma_2, \alpha_1 \alpha_2 | T | \hat{\mathbf{p}} | \hat{\mathbf{z}}, \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \rangle \\ & \times Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}'')^* (\sigma_1 \sigma_2 M | s_1 s_2 S) (m M \bar{M} | l S J) (\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{M} | \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{S}) \\ & \times (0 \bar{M} \bar{M} | \bar{l} \bar{S} J) (\alpha_1 \alpha_2 t_3 | \tau_1 \tau_2 I) (\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 t_3 | \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 I). \end{aligned} \quad (1.22)$$

## 2.1 分波振幅的幺正性

由 (1.5) 式可得，

$$2\Im T_{lS,\bar{l}\bar{S}}^{(JI)} = \langle J\mu, lS, It_3 | TT^\dagger | J\mu, \bar{l}\bar{S}, It_3 \rangle, \quad (1.23)$$

在右边插入两体态的单位元，可得

$$\Im T_{lS, \bar{l}\bar{S}}^{(JI)} = \sum_{l', S'} \frac{|\mathbf{p}''|}{8\pi\sqrt{s}} T_{lS, l'S'}^{(JI)} T_{l'S', \bar{l}\bar{S}}^{\dagger(JI)}, \quad (1.24)$$

引入相空间因子算符

$$\rho_{ij} = \frac{|\mathbf{p}'|}{8\pi\sqrt{s}} \delta_{ij}, \quad (1.25)$$

则有

$$T^{(JI)} - T^{\dagger(JI)} = 2i T^{(JI)} \rho T^{\dagger(JI)}. \quad (1.26)$$

利用  $T$  矩阵的分波振幅，可以重新定义  $S$  矩阵的分波振幅如下

$$S^{(JI)} = I + 2i\rho^{\frac{1}{2}} T^{(JI)} \rho^{\frac{1}{2}}, \quad (1.27)$$

现在  $S$  矩阵的对角元为  $\eta_i e^{2i\delta_i}$ ，其中  $\eta_i$  描述非弹性度， $\delta_i$  表示相移。

当考虑全同粒子散射时，需要在 (1.16) 前乘上一个  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  因子。

## 2.2 LS 方程

假设系统哈密顿量为  $H = H_0 - v$ ，以及  $r_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ ,  $r(z) = (H - z)^{-1}$ ，则 LS 方程可以写为

$$T(z) = v + vr_0(z)T(z), \quad (1.28)$$

$$T(z) = v + T(z)r_0(z)v. \quad (1.29)$$

简写分波振幅为

$$T_{ij}(k, k'; z) = \langle k, \lambda_i | t(z) | k', \lambda_j \rangle, \quad (1.30)$$

其中  $k$  为三动量的模， $\lambda$  为所有的离散指标。代入 (1.28) 和 (1.29) 公式，则可以得到

$$T_{ij}(k, k'; z) = v_{ij}(k, k') + \frac{\mu}{\pi^2} \sum_n \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{q^2 - 2\mu z} v_{in}(k, q) T_{nj}(q, k'; z) \quad (1.31)$$

$$= v_{ij}(k, k') + \frac{\mu}{\pi^2} \sum_n \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{q^2 - 2\mu z} T_{in}(k, q; z) v_{nj}(q, k'). \quad (1.32)$$

结合 Hilbert 恒等式

$$T(z_1) - T(z_2) = (z_1 - z_2) T(z_1) r_0(z_1) r_0(z_2) T(z_2), \quad (1.33)$$

以及  $T$  矩阵的性质

$$T_{ij}(k, k'; z^*) = T_{ji}(k, k'; z)^* \quad (1.34)$$

可得

$$\begin{aligned} T_{ij}(k, k'; z) - T_{ij}(k, k'; z)^* &= 2i\Im z \frac{2\mu^2}{\pi^2} \sum_n \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(q^2 - 2\mu z)(q^2 - 2\mu z^*)} \\ &\quad \times T_{in}(k, q; z) T_{jn}(q, k'; z)^*. \end{aligned} \quad (1.35)$$

假设  $T$  矩阵分波振幅是时间反演不变的，即  $T_{ij}(k, k'; z) = T_{ji}(k', k; z)$ ，则可以得到

$$\Im T_{ij}(k, k'; z) = \Im z \frac{2\mu^2}{\pi^2} \sum_n \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(q^2 - 2\mu \Re z)^2 + (2\mu \Im z)^2} T_{in}(k, q; z) T_{jn}(k', q; z)^*. \quad (1.36)$$

利用公式

$$\lim_{\Im z \rightarrow 0^+} \frac{2\mu \Im z}{(q^2 - 2\mu \Re z)^2 + (2\mu \Im z)^2} = \pi \delta(q^2 - 2\mu \Re z), \quad (1.37)$$

可以得到

$$\Im T_{ij}(k, k'; z) = \theta(E) \frac{\mu \kappa}{2\pi} \sum_n T_{in}(k, \kappa; z) T_{jn}(k', \kappa; z)^*, \quad (1.38)$$

其中  $\kappa = \sqrt{2\mu \Re z}$ ,  $z = E + i\epsilon$ , 上式即为离壳么正化关系。式 (1.38) 的两个特例是半离壳么正化和在壳么正化关系。对于半离壳么正化，我们取  $E = k'^2/2\mu$ ，因此  $\kappa = k'$ ，此时我们有

$$\Im T_{ij}(k, \kappa; E + i\epsilon) = \theta(E) \frac{\mu \kappa}{2\pi} \sum_n T_{in}(k, \kappa; E + i\epsilon) T_{jn}(\kappa, \kappa; E + i\epsilon)^*. \quad (1.39)$$

再在半离壳么正化中，取  $k' = k$ ，即可得到在壳么正化关系，

$$\Im T_{ij}(\kappa, \kappa; E + i\epsilon) = \theta(E) \frac{\mu \kappa}{2\pi} \sum_n T_{in}(\kappa, \kappa; E + i\epsilon) T_{jn}(\kappa, \kappa; E + i\epsilon)^*. \quad (1.40)$$

## 2 交叉对称及同位旋结构

考虑  $\pi\pi$

## A 复数知识

### 1 Schwarz 反射定理

假设有一个定义在上半复平面  $D$  上的解析函数  $f(z)$ , 若定义域  $D$  能够连续过渡到实轴且在实轴上有着良定义的实函数值, 则可以将定义域  $D$  关于实轴对称的另外半平面  $D^*$  也纳入定义域, 且解析函数  $f(z)$  延拓后的定义域  $D \cup D^*$  关于实轴对称, 且总满足  $f(z^*) = f^*(z)$ , 因此就会有

$$f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon) = 2i\Im f(x + i\varepsilon), \quad (\text{A.1})$$

这就是 Schwarz 反射。

Schwarz 反射定理在关联函数中的具体应用, 待完成.....

### 2 Sugawara-Kanazawa 定理

## 参考文献

- [1] José Antonio Oller. *A Brief Introduction to Dispersion Relations: With Modern Applications.* Springer, 2019.