

色散关系

王旭

2021 年 10 月 29 日

目录

1 S 矩阵及分波	2
1 S 矩阵	2
2 分波	3
2.1 分波振幅的幺正性	4
2 Kallen-Lehmann 表示	5
3 交叉对称及同位旋结构	7

本笔记基本参考 [1]。

1 S 矩阵及分波

用 $|\mathbf{q}, \sigma, m, s, \lambda\rangle$ 表示一个粒子态，粒子态的归一化如下

$$\langle \mathbf{q}, \sigma, m, s, \lambda | |\mathbf{q}', \sigma', m', s', \lambda' \rangle = (2\pi)^3 2q^0 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta^{\sigma\sigma'} \delta^{ss'} \delta^{\lambda\lambda'}, \quad (1.1)$$

1 S 矩阵

在 QFT 中，从初态 $|i\rangle$ 到末态的 $|f\rangle$ 的几率由幺正矩阵 S 描述，S 矩阵元定义为

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle. \quad (1.2)$$

在相互作用表象中，可表示为

$$S_{fi} = \frac{\langle f | e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} | i \rangle}{\langle 0 | e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} | 0 \rangle}. \quad (1.3)$$

利用 S 矩阵定义 T 矩阵为

$$S = 1 + iT, \quad (1.4)$$

则由 S 矩阵的幺正性可得

$$T - T^\dagger = iTT^\dagger, \quad (1.5)$$

两边夹上 $\langle f |$ 和 $|i\rangle$ ，以及在右手边插入单位矩阵，则可以得到

$$\begin{aligned} \langle f | T | i \rangle - \langle f | T^\dagger | i \rangle &= i \sum \int \left[(2\pi)^4 \delta(p_f - \sum_{i=1}^n q_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} \right] \\ &\quad \times \langle f | T | \mathbf{q}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \dots; \mathbf{q}_n, \sigma_n, m_n, s_n, \lambda_n \rangle \\ &\quad \times \langle \mathbf{q}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \dots; \mathbf{q}_n, \sigma_n, m_n, s_n, \lambda_n | T^\dagger | i \rangle, \end{aligned} \quad (1.6)$$

用 $\int dQ$ 表示末态相空间积分

$$\int dQ = \int (2\pi)^4 \delta(p_f - \sum_{i=1}^n q_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0}, \quad (1.7)$$

两体末态相空间在质心系中，

$$dQ = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) = \frac{|\mathbf{p}_1| d\Omega}{16\pi^2 \sqrt{s}}, \quad (1.8)$$

在两体散射中，选取质心参考系，则散射截面为

$$\sigma_{fi} = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}} \int dQ_f |\langle f|T|\mathbf{p}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2, m_2, s_2, \lambda_2 \rangle|^2, \quad (1.9)$$

对于给定初态 $|i\rangle$ ，则所有可能末态的散射截面为

$$\sigma_i = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}} \sum_f \int dQ_f |\langle f|T|\mathbf{p}_1, \sigma_1, m_1, s_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2, m_2, s_2, \lambda_2 \rangle|^2, \quad (1.10)$$

选取初态 $|i\rangle$ 等于末态 $|f\rangle$ ，则可以得到光学定理，

$$\Im T_{ii} = \frac{1}{2} \sum_f \int dQ_f |T_{fi}|^2 = 2|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}\sigma_i. \quad (1.11)$$

其中 \Im 表示取虚部。

2 分波

用 $|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle$ 一个两粒子态，其中 \mathbf{p} 表示质心系中三动量，各自静止系中自旋第三分量表示为 σ_1, σ_2 的粒子，定义一个两体态 $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$

$$|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\hat{\mathbf{p}} Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}) |\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle, \quad (1.12)$$

其中 l 为轨道角动量， m 为其第三分量。

旋转算符 R 作用在态 $|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle$ ，结果为

$$R|\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2\rangle = \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2} D^{(s_1)}(R)_{\sigma'_1\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma'_2\sigma_2} |\mathbf{p}', \sigma'_1\sigma'_2\rangle, \quad (1.13)$$

则 R 作用在 $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$ 上，结果为

$$\begin{aligned} R|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle &= \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2} D^{(s_1)}(R)_{\sigma'_1\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma'_2\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\hat{\mathbf{p}}' Y_l^m(R^{-1}\hat{\mathbf{p}}') |\hat{\mathbf{p}}', \sigma'_1\sigma'_2\rangle \\ &= \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2, m'} D^{(l)}(R)_{mm'} D^{(s_1)}(R)_{\sigma'_1\sigma_1} D^{(s_2)}(R)_{\sigma'_2\sigma_2} |lm', \sigma'_1\sigma'_2\rangle. \end{aligned} \quad (1.14)$$

首先考虑两粒子自旋耦合，再考虑总自旋和轨道角动量的耦合，利用 CG 系数将 $|lm, \sigma_1\sigma_2\rangle$ 转换到 $|J\mu, lS\rangle$ 基底，有

$$|J\mu, lS\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, m, M} (\sigma_1\sigma_2 M |s_1 s_2 S)(m M \mu |l S J) |lm, \sigma_1\sigma_2\rangle, \quad (1.15)$$

其中 s_1, s_2 表示两粒子的自旋， σ_1, σ_2 分别表示自旋的第三分量， S 表示两粒子的总自旋， M 表示总自旋的第三分量， J 为总角动量， μ 为总角动量的第三分量。

当考虑同位旋结构时，转换关系为

$$|J\mu, lS, It_3\rangle = \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, m, \\ M, \alpha_1, \alpha_2}} (\sigma_1 \sigma_2 M |s_1 s_2 S)(m M \mu |lS J)(\alpha_1 \alpha_2 t_3 |\tau_1 \tau_2 I) |\mathbf{p}, \sigma_1 \sigma_2, \alpha_1 \alpha_2\rangle. \quad (1.16)$$

由于两体末态相空间积分的结果，因此我们将两体态归一化为

$$\langle \mathbf{p}', \sigma'_1 \sigma'_2, \alpha'_1 \alpha'_2 | \mathbf{p}, \sigma_1 \sigma_2, \alpha_1 \alpha_2 \rangle = \frac{16\pi^2 \sqrt{s}}{|\mathbf{p}|} \delta(\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{p}}), \quad (1.17)$$

忽略了离散指标。因此， $|J\mu, lS, It_3\rangle$ 态的归一化为

$$\langle J'\mu', l'S', I't'_3 | J\mu, lS, It_3 \rangle = \frac{4\pi\sqrt{s}}{|\mathbf{p}|} \delta_{J'J} \delta_{\mu'\mu} \delta_{l'l} \delta_{S'S} \delta_{I'I} \delta_{t'_3 t_3}. \quad (1.18)$$

考虑分波振幅，从 $J\bar{S}I$ 跃迁到 $JlSI$ 的几率由矩阵元 $T_{lS, \bar{l}S}^{(JI)}$ 给出

$$T_{lS, \bar{l}S}^{(JI)} = \langle J\mu, lS, It_3 | T | J\mu, \bar{l}\bar{S}, It_3 \rangle, \quad (1.19)$$

代入 (1.16) 式，可得

$$\begin{aligned} T_{lS, \bar{l}S}^{(JI)} &= \frac{1}{4\pi} \sum \int d\hat{\mathbf{p}}' \int d\hat{\mathbf{p}} Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}')^* Y_{\bar{l}}^{\bar{m}}(\hat{\mathbf{p}}) (\sigma_1 \sigma_2 M |s_1 s_2 S)(m M \mu |lS J)(\alpha_1 \alpha_2 t_3 |\tau_1 \tau_2 I) \\ &\quad \times (\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{M} | \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{S})(\bar{m} \bar{M} \mu | \bar{l}\bar{S} J)(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 t_3 |\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 I) \langle \hat{\mathbf{p}}', \sigma_1 \sigma_2, \alpha_1 \alpha_2 | T | \mathbf{p}, \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.20)$$

利用 T 矩阵的旋转不变性，以及 $D_{m'm}^{(l)}$ 的组合公式

$$\sum_{m_1, m_2} (m_1 m_2 M |l_1 l_2 L) D_{m'_1 m_1}^{(l_1)}(R) D_{m'_2 m_2}^{(l_2)}(R) = \sum_{M'} (m'_1 m'_2 M' |l_1 l_2 L) D_{M'M}^{(L)}(R), \quad (1.21)$$

可以将上式化为

$$\begin{aligned} T_{lS, \bar{l}S}^{(JI)} &= \frac{Y_{\bar{l}}^0(\hat{\mathbf{z}})}{2J+1} \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \bar{\sigma}_1, \\ \bar{\sigma}_2, \alpha_1, \alpha_2, \\ \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, m}} \int d\hat{\mathbf{p}}'' \langle \hat{\mathbf{p}}'', \sigma_1 \sigma_2, \alpha_1 \alpha_2 | T | \hat{\mathbf{p}} | \hat{\mathbf{z}}, \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \rangle \\ &\quad \times Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}'')^* (\sigma_1 \sigma_2 M |s_1 s_2 S)(m M \bar{M} |lS J)(\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{M} | \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{S}) \\ &\quad \times (\bar{M} \bar{M} | \bar{l}\bar{S} J)(\alpha_1 \alpha_2 t_3 |\tau_1 \tau_2 I)(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 t_3 |\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 I). \end{aligned} \quad (1.22)$$

2.1 分波振幅的幺正性

由 (1.5) 式可得，

$$2\Im T_{lS, \bar{l}S}^{(JI)} = \langle J\mu, lS, It_3 | TT^\dagger | J\mu, \bar{l}\bar{S}, It_3 \rangle, \quad (1.23)$$

在右边插入两体态的单位元，可得

$$\Im T_{lS, \bar{l}S}^{(JI)} = \sum_{l'', s''} \frac{|\mathbf{p}''|}{8\pi\sqrt{s}} T_{lS, l''S'}^{(JI)} T_{l''S', \bar{l}S}^{(JI)*}, \quad (1.24)$$

引入相空间因子算符

$$\rho_{ij} = \frac{|\mathbf{p}'|}{8\pi\sqrt{s}} \delta_{ij} \quad (1.25)$$

则有

$$T^{(JI)} - T^{\dagger(JI)} \quad (1.26)$$

2 Kallen-Lehmann 表示

该篇主要参考 [2] [3]。

考虑 2→2 标量粒子散射过程，散射矩阵写作

$$\text{out} \langle p_1, p_2 | q_1, q_2 \rangle_{\text{in}} = \text{out} \langle p_1, p_2 | S | q_1, q_2 \rangle_{\text{out}}, \quad (2.1)$$

其中， $p_1^2 = p_2^2 = q_1^2 = q_2^2 = m^2$ 满足质壳条件。利用 LSZ 约化，我们可以重新将 S 矩阵写作

$$\begin{aligned} \text{out} \langle p_1, p_2 | q_1, q_2 \rangle_{\text{in}} &= \left(\frac{-i}{\sqrt{Z}} \right)^4 \int_{x_1, x_2, y_1, y_2} e^{-i(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot y_1 - p_2 \cdot y_2)} K_{x_1} K_{x_2} K_{y_1} K_{y_2} \\ &\times \langle T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2) \rangle, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $K_{x_1} = q_1^2 - m^2$ 。两点关联函数是外动量的函数，如 $p_{1,2}^2, p_1 \cdot p_2$ 等等。外动量实际上定义为 $p_1^2 = \text{Re}[p_1^2] + i\epsilon$ ，可以解析延拓到复平面上。

简单考虑两点关联函数，

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle \\ &= \theta(t - t')W(x, y) + \theta(t' - t)W(y, x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $W(x, y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle$ 。往 $W(x, y)$ 中插入一组物理态（包含单粒子态以及多粒子态）完备基，可以得到

$$W(x, y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \rho(q) e^{-iq \cdot (x-y)}, \quad (2.4)$$

其中谱密度 $\rho(q)$ 定义为，

$$\rho(q^2) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(q - p_n) |\langle 0 | \phi(0) | n \rangle|^2, \quad (2.5)$$

将单粒子态分离出来考虑，则单粒子态的贡献

$$W^s(x, y) = \frac{Z}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (2.6)$$

同理可以得到 $W^s(y, x)$ 。因此单粒子态对格林函数的贡献为

$$G^s(x, y) = iZ\Delta_F(x - y), \quad (2.7)$$

进一步考虑多粒子态对格林函数的贡献，由于谱密度为 Lorentz 不变的，且具有如下性质，

$$\begin{aligned} \rho(q^2) &= Z\delta(q^2 - \mu^2) + \theta(q_0)\sigma(q^2) \\ \sigma(q^2) &= 0, \text{ 如果 } q^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

因此对于两点关联函数则有，

$$\begin{aligned} G(x, y) &= i\Delta'_F(x - y) \\ &= iZ\Delta_F(x - y; \mu) + i \int_{\mu_{th}^2}^{\infty} d\mu_n^2 \sigma(\mu_n^2) \Delta_F(x - y; \mu_n^2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中第一项是质量为 μ 的单粒子态的贡献，而第二项积分则是多粒子态的贡献，积分下限 μ_{th} 是产生多粒子的阈值。再利用 Fourier 变换，可以得到

$$\Delta'_F(k^2) = -\frac{Z}{\mu^2 - k^2} - \int_{\mu_{th}^2}^{\infty} d\mu_n^2 \frac{\sigma(\mu_n^2)}{\mu_n^2 - k^2}, \quad (2.10)$$

再令 $k^2 \rightarrow k^2 \pm i\epsilon$ ，得到

$$\Delta'_F(k^2 + i\epsilon) = -\frac{Z}{\mu^2 - k^2 - i\epsilon} - \int_{\mu_{th}^2}^{\infty} d\mu_n^2 \frac{\sigma(\mu_n^2)}{\mu_n^2 - k^2 - i\epsilon} \quad (2.11)$$

$$\Delta'_F(k^2 - i\epsilon) = -\frac{Z}{\mu^2 - k^2 + i\epsilon} - \int_{\mu_{th}^2}^{\infty} d\mu_n^2 \frac{\sigma(\mu_n^2)}{\mu_n^2 - k^2 + i\epsilon}, \quad (2.12)$$

由于 Z 和 $\sigma(s)$ (将 k^2 向复平面 s 延拓) 都是实的，因此

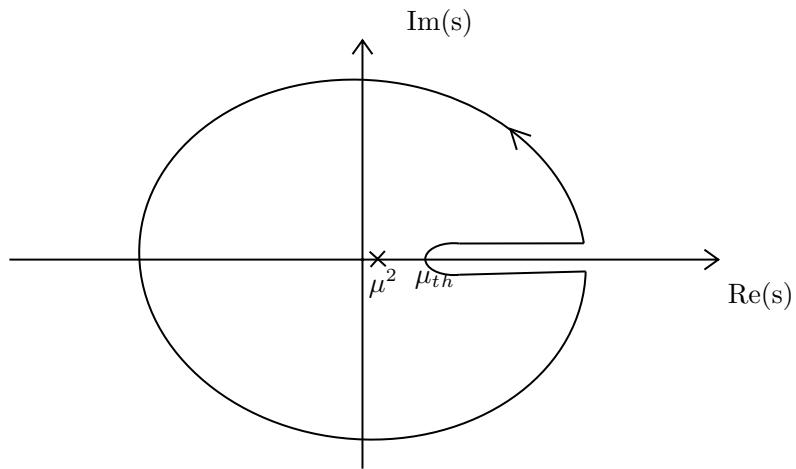
$$(\Delta'_F(s))^* = \Delta'_F(s^*), \quad (2.13)$$

从而有

$$\Delta'_F(k^2 + i\epsilon) - \Delta'_F(k^2 - i\epsilon) = 2i\text{Im}\Delta'_F(k^2 + i\epsilon), \quad (2.14)$$

从而可以将格林函数积分利用其虚部表达，即色散关系形式

$$\Delta'_F(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds' \frac{\text{Im}\Delta'_F(s')}{s - s'}, \quad (2.15)$$



3 交叉对称及同位旋结构

考慮 $\pi\pi$

参考文献

- [1] José Antonio Oller. *A Brief Introduction to Dispersion Relations: With Modern Applications.* Springer, 2019.
- [2] Roman Zwicky. A brief Introduction to Dispersion Relations and Analyticity. In *Quantum Field Theory at the Limits: from Strong Fields to Heavy Quarks*, 10 2016.
- [3] 黄涛. 量子场论导论. 中外物理学精品书系. 北京大学出版社, 2015.