色散关系

王旭

2021 年 10 月 28 日

目录

本笔记基本参考 [1]。

1 S 矩阵及分波

用 $|\mathbf{q},\sigma,m,s,\lambda\rangle$ 表示一个粒子态，粒子态的归一化如下

$$\langle\mathbf{q},\sigma,m,s,\lambda||\mathbf{q}',\sigma',m',s',\lambda'\rangle=(2\pi)^3 2q^0\delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\delta^{\sigma\sigma'}\delta^{ss'}\delta^{\lambda\lambda'}, \tag{1.1}$$

1 S 矩阵

在 QFT 中，从初态 $|i\rangle$ 到末态的 $|f\rangle$ 的几率由幺正矩阵 S 描述，S 矩阵元定义为

$$S_{fi}=\langle f|S|i\rangle. \tag{1.2}$$

在相互作用表象中，可表示为

$$S_{fi}=\frac{\langle f|e^{\mathrm{i}\int d^4x\mathcal{L}_{int}}|i\rangle}{\langle 0|e^{\mathrm{i}\int d^4x\mathcal{L}_{int}}|0\rangle}. \tag{1.3}$$

利用 S 矩阵定义 T 矩阵为

$$S=1+\mathrm{i}T, \tag{1.4}$$

则由 S 矩阵的幺正性可得

$$T-T^\dagger=\mathrm{i}TT^\dagger, \tag{1.5}$$

两边夹上 $\langle f|$ 和 $|i\rangle$，以及在右手边插入单位矩阵，则可以得到

$$\begin{aligned}\langle f|T|i\rangle-\langle f|T^\dagger|i\rangle=&\mathrm{i}\sum\int\Big[(2\pi)^4\delta(p_f-\sum_{i=1}^n q_i)\prod_{i=1}^n\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0}\Big]\\&\times\langle f|T|\mathbf{q}_1,\sigma_1,m_1,s_1,\lambda_1;\cdots;\mathbf{q}_n,\sigma_n,m_n,s_n,\lambda_n\rangle\\&\times\langle\mathbf{q}_1,\sigma_1,m_1,s_1,\lambda_1;\cdots;\mathbf{q}_n,\sigma_n,m_n,s_n,\lambda_n|T|i\rangle,\end{aligned} \tag{1.6}$$

用 $\int dQ$ 表示末态相空间积分

$$\int dQ=\int(2\pi)^4\delta(p_f-\sum_{i=1}^n q_i)\prod_{i=1}^n\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0}, \tag{1.7}$$

两体末态相空间在质心系中，

$$dQ=\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2)=\frac{|\mathbf{p}_1|d\Omega}{16\pi^2\sqrt{s}}, \tag{1.8}$$

在两体散射中，选取质心参考系，则散射截面为

$$\sigma_{fi}=\frac{1}{4|\mathbf{p}_1\sqrt{s}}\int dQ_f|\langle f|T|\mathbf{p}_1,\sigma_1,m_1,s_1,\lambda_1;|\mathbf{p}_2,\sigma_2,m_2,s_2,\lambda_2\rangle|^2, \tag{1.9}$$

对于给定初态 $|i\rangle$，则所有可能末态的散射截面为

$$\sigma_i=\frac{1}{4|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}}\sum_f\int dQ_f|\langle f|T||\mathbf{p}_1,\sigma_1,m_1,s_1,\lambda_1;|\mathbf{p}_2,\sigma_2,m_2,s_2,\lambda_2\rangle|^2, \tag{1.10}$$

选取初态 $|i\rangle$ 等于末态 $|f\rangle$，则可以得到光学定理

$$\Im T_{ii}=\frac{1}{2}\sum_f\int dQ_f|T_{fi}|^2=2|\mathbf{p}_1|\sqrt{s}\sigma_i. \tag{1.11}$$

2 分波

用 $|\mathbf{p},\sigma_1\sigma_2\rangle$ 一个两粒子态，其中 $\mathbf{p}$ 表示质心系中三动量，各自静止系中自旋第三分量表示为 σ_1,σ_2 的粒子，定义一个两体态 $|lm,\sigma_1\sigma_2\rangle$

$$|lm,\sigma_1\sigma_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int d\hat{\mathbf{p}}Y_l^m(\hat{\mathbf{p}})|\hat{\mathbf{p}},\sigma_1\sigma_2\rangle, \tag{1.12}$$

其中 l 为轨道角动量，m 为其第三分量。

旋转算符 R 作用在态 $|\mathbf{p},\sigma_1\sigma_2\rangle$，结果为

$$R|\mathbf{p},\sigma_1\sigma_2\rangle=\sum_{\sigma_1',\sigma_2'}D^{(s_1)}(R)_{\sigma_1'\sigma_1}D^{(s_2)}(R)_{\sigma_2'\sigma_2}|\mathbf{p}',\sigma_1'\sigma_2'\rangle, \tag{1.13}$$

则 R 作用在 $|lm,\sigma_1\sigma_2\rangle$ 上，结果为

$$\begin{aligned}R|lm,\sigma_1\sigma_2\rangle&=\sum_{\sigma_1',\sigma_2'}D^{(s_1)}(R)_{\sigma_1'\sigma_1}D^{(s_2)}(R)_{\sigma_2'\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int d\hat{\mathbf{p}}'Y_l^m(R^{-1}\hat{\mathbf{p}}')|\hat{\mathbf{p}}',\sigma_1'\sigma_2'\rangle\\&=\sum_{\sigma_1',\sigma_2',m'}D^{(l)}(R)_{mm'}D^{(s_1)}(R)_{\sigma_1'\sigma_1}D^{(s_2)}(R)_{\sigma_2'\sigma_2}|lm',\sigma_1'\sigma_2'\rangle.\end{aligned} \tag{1.14}$$

首先考虑两粒子自旋耦合，再考虑总自旋和轨道角动量的耦合，利用 CG 系数将 $|lm,\sigma_1\sigma_2\rangle$ 转换到 $|J\mu,lS\rangle$ 基底，有

$$|J\mu,lS\rangle=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,m,M}(\sigma_1\sigma_2M|s_1s_2S)(mM\mu|lSJ)|lm,\sigma_1\sigma_2\rangle, \tag{1.15}$$

其中 s_1,s_2 表示两粒子的自旋，σ_1,σ_2 分别表示自旋的第三分量，S 表示两粒子的总自旋，M 表示总自旋的第三分量，J 为总角动量，μ 为总角动量的第三分量。

当考虑同位旋结构时，转换关系为

$$|J\mu,lS,It_3\rangle=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,m,M,\alpha_1,\alpha_2}(\sigma_1\sigma_2M|s_1s_2S)(mM\mu|lSJ)(\alpha_1\alpha_2t_3|\tau_1\tau_2I)|\mathbf{p},\sigma_1\sigma_2,\alpha_1\alpha_2\rangle, \tag{1.16}$$

2 Kallen-Lehmann 表示

3 交叉对称及同位旋结构

考虑 $\pi\pi$

参考文献

[1] José Antonio Oller. *A Brief Introduction to Dispersion Relations: With Modern Applications*. Springer, 2019.