

# axions

王旭

2022 年 6 月 5 日

## 目录

<b>1 简介</b>	<b>2</b>
1 EFT 以及 QCD 反常 . . . . .	2
2 强 CP 问题 . . . . .	7
2.1 $U(1)_A$ 介子丢失问题 . . . . .	9

# 1 简介

首先，什么是轴子？

1. 轴子场是周期性场，即  $a(x) = a(x) + 2\pi f_a$ ，其中  $f_a$  是轴子的衰变常数。
2. 轴子场和 pseudo shift-symmetry 相关联。
3. 轴子场是  $U(1)_{PQ}$  对称性自发破缺产生的 pseudo Goldstone Boson。
4. 轴子场是用来解决强 CP 问题 (强相互作用中 CP 不破坏) 而被提出。

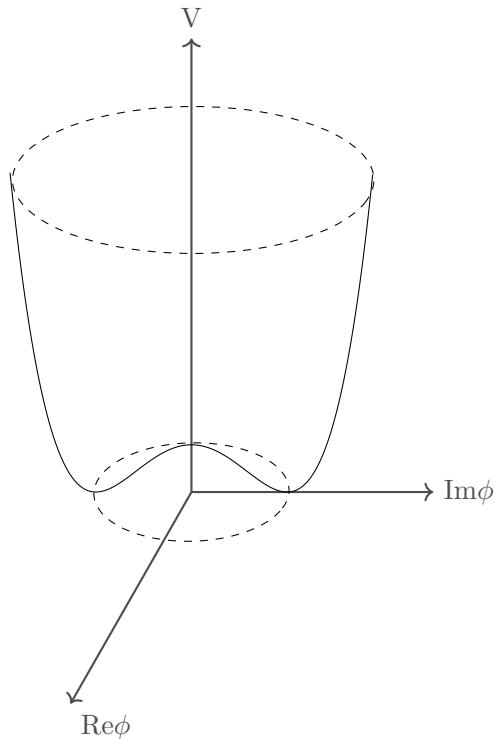
## 1 EFT 以及 QCD 反常

考虑一个复场  $\phi$ ，具有  $U(1)$  对称性  $\phi \xrightarrow{U(1)} e^{i\alpha} \phi$ ，假设  $Q = 1$ 。则拉氏量的写法为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi), \quad V = \lambda(\phi^* \phi - \frac{f^2}{2})^2. \quad (1.1)$$

令  $x = \phi^* \phi$ ，则

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} = 2\lambda(x - \frac{f^2}{2}) \Rightarrow \langle \phi^* \phi \rangle = \frac{f^2}{2}.$$



重新参数化  $\phi$  为  $\phi = \frac{f+\rho}{\sqrt{2}} e^{ia/f}$ 。此时  $U(1)$  变换为

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{f+\rho}{\sqrt{2}} e^{ia/f} \rightarrow e^{i\alpha} \phi \\ a &\rightarrow a + \alpha f. \end{aligned} \tag{1.2}$$

场  $a$  的对称性变为 shift-symmetry。

将拉氏量用新的参数描述

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2} (1 + \frac{\rho}{f})^2 \partial_\mu a \partial^\mu a - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho^2 - \frac{m_\rho^2}{2f} \rho^3 - \frac{m_\rho^2}{8f^2} \rho^4, \tag{1.3}$$

其中  $m_\rho^2 = 2\lambda f^2$ 。 $E \ll f, f \geq 10^3 \text{GeV}$ 。

### ChPT 简介

手征微扰场论是 QCD 的低能有效理论。考虑 QCD 的拉氏量

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{i=1}^3 (\bar{q}_L i \not{D} q_L + \bar{q}_R i \not{D} q_R) - (m_{ij} \bar{q}_{Ri} q_{Lj} + \text{h.c.}) - \frac{1}{4} G G + \theta \frac{g_s^2}{32\pi^2} G \tilde{G}, \tag{1.4}$$

其中  $G, \tilde{G}$  省略了指标。

在  $m_{q_i} \rightarrow 0$  的极限下, 系统具有  $U(3)_L \times U(3)_R$  的整体对称性, 向下分解为  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$ 。其中与  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  关联的诺特流为

$$j_{L,R}^{\mu,a} = \bar{q}_{L,R} \gamma^\mu T^a q_{L,R}, \quad T^a = \frac{\lambda_a}{2},$$

与  $U(1)_L \times U(1)_R$  关联的诺特流为

$$j_{L,R}^\mu = \bar{q}_{L,R} \gamma^\mu q_{L,R}.$$

采用另一组基  $V = L + R, A = R - L$ , 我们可以重新将对称性改写为  $SU(3)_V \times SU(3)_A \times U(1)_V \times U(1)_A$ , 诺特流改写为

$$\begin{aligned} j^{\mu,a} &= \bar{q} \gamma^\mu T^a q, \quad j_5^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 T^a q \\ j^\mu &= \bar{q} \gamma^\mu q, \quad j_5^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q. \end{aligned} \tag{1.5}$$

然而质量项在  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  下不是不变的。为此我们将质量项提升为场, 并令其在  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  下按照如下方式变换

$$M_q \rightarrow L M_q R^\dagger.$$

在最后的时候, 我们再令

$$M_q \rightarrow \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_d & \\ & & m_s \end{pmatrix}$$

除此显式破缺之外, QCD 的真空在  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  下也是自发破缺的。

$$\langle 0 | \bar{q}_{R,j} q_{L,i} | 0 \rangle = \hat{\Lambda}^3 \delta_{ij},$$

其中  $[\Lambda]$  带有质量量纲。上式在  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  变换下

$$\rightarrow \langle 0 | \bar{q}_{R,l} q_{L,k} | 0 \rangle R_{lj}^\dagger L_{ik} = \hat{\Lambda}^3 (LR^\dagger)_{ij} = \hat{\Lambda}^3 \Sigma_{ij}.$$

$\Sigma_{ij}$  代表了不同于  $\delta_{ij}$  的真空。如果  $L = R$ , 那么真空是不变的, 对应  $SU(3)_V$  对称性。因此我们有  $SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V$ , 破缺的部分生成了 8 个 Goldstone Bosons。

分析  $U(1)$  对称性的破缺, 我们可以发现, 参数化后的场  $a$  (即 Goldstone Boson) 连接了不同的真空。因此对于  $SU(3)$ , 我们同样可以将 8 个 Goldstone Bosons 参数化为连接不同真空的变换, 即将  $\Sigma_{ij}$  提升为 Goldstone Boson 场。

$$\begin{aligned} \Sigma &= e^{i \frac{2\pi^a T^a}{f_\pi}}, T^a = \frac{\lambda_a}{2} \\ \Sigma &\xrightarrow{SU(3)_L \times SU(3)_R} L\Sigma R^\dagger \\ \pi^a T^a &= \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{\eta}{3} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

忽略重的粒子态 (如  $\rho, \eta$ ), 我们可以将 EFT 按照  $\frac{m_q}{\Lambda}$  的幂级数进行展开, 其中  $\Lambda \sim 1 GeV$ 。

写下  $\mathcal{O}(p^2)$  阶的拉氏量

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma] + \frac{B_0 f_\pi^2}{2} \text{Tr}[\Sigma M_q^\dagger] + M_q \Sigma^\dagger. \quad (1.6)$$

通过将上式展开, 我们可以得到

$$\begin{aligned} m_{\pi^\pm}^2 &= B_0(m_u + m_d) \\ m_{K^\pm}^2 &= B_0(m_u + m_s) \\ m_{\bar{K}^0}^2 &= B_0(m_d + m_s) \end{aligned} \quad (1.7)$$

低能 QCD 中的反常

考虑无质量的 QED 项

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}(\not{\partial} - ie\not{A})\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

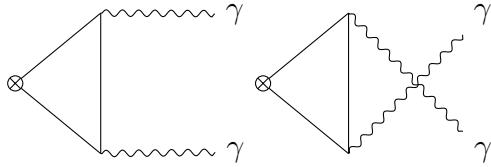
相应的整体对称性以及 Noether 流有

$$\begin{cases} \Psi \rightarrow e^{i\alpha}\Psi \\ \Psi \rightarrow e^{i\gamma_5\alpha}\Psi \end{cases}, \begin{cases} j_V^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \\ j_A^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi. \end{cases} \quad (1.9)$$

在经典情况下，两个流都是守恒的。然而在量子水平上，无法保证两个流同时守恒。如果我们选择  $\partial_\mu j_V^\mu = 0$ ，那么就有

$$\partial_\mu j_A^\mu = \frac{e^2}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \frac{e^2}{16\pi^2} F\tilde{F}. \quad (1.10)$$

可以通过下面的费曼图计算得到



整体流和局部流的反常：

整体：会导致重要的物理后果，如，QCD 中的  $U(1)_A$  反常能够推出  $m_q \sim 1\text{GeV}$ ； $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  现象，QCD 中的  $U(1)_{PQ}$  反常能够推出轴子的质量。

局部：会破坏理论的可重整性。

反常来自于路径积分中测度的变换：

$$\mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \xrightarrow{q \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5 q}} \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-i \int d^4x [\frac{e^2}{16\pi^2 F\tilde{F}}]}. \quad (1.11)$$

一个整体流反常有如下公式：

$$\partial_\mu j^{\mu,a} = \frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr}[T^a \{t^b, t^c\}] \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c. \quad (1.12)$$

考虑  $SU(3)$  群，我们有轴矢流  $j_5^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q$ ，其中  $q^T = (u, d, s)$ ，因此

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_5^\mu &= \frac{g_s^2}{32\pi^2} \text{Tr}[\mathbb{I} \{t^b, t^c\}] \varepsilon G^b G^c \\ &= \frac{g_s^2}{32\pi^2} \text{Tr}[\mathbb{I}] \cdot 2 \text{Tr}[t^b t^c] \varepsilon G^b G^c \\ &= \frac{g_s^2 N_f}{32\pi^2} \varepsilon G^b G^b \rightarrow m_q \sim 1\text{GeV}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

其中的  $\mathbb{I}$  是因为该诺特流与味空间无关。在最后一步，我们用了  $\text{Tr}\mathbb{I} = N_f$ ，以及  $\text{Tr}[t^b t^c] = \frac{1}{2}\delta^{bc}$ 。

考虑  $U(1)_{EM}$  群，我们有轴矢流  $j_5^{\gamma,a} = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 T^a q$ ，以  $a = 3$  为例，其中  $Q = \text{diag}\{2/3, -1/3, -1/3\}$ ，

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_5^{\mu,3} &= \frac{e^2}{32\pi^2} \text{Tr}[T^3 \{Q, Q\}] \varepsilon F F \\ &= \frac{e^2}{32\pi^2} \left(\frac{N_C}{3}\right) \varepsilon F F. \end{aligned} \quad (1.14)$$

在最后一步，我们用了  $2\text{Tr}[T^3 Q^2] = (\frac{N_C}{3})$ 。因此，积分测度变为

$$\mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \xrightarrow{q \rightarrow e^{i\alpha T^3 \gamma_5 q}} \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{-i \int d^4x \alpha \frac{e^2}{32\pi^2} (\frac{N_C}{3}) \varepsilon F F}, \quad (1.15)$$

拉氏量变为

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \alpha \frac{e^2}{32\pi^2} \left( \frac{N_C}{3} \right) \varepsilon F F. \quad (1.16)$$

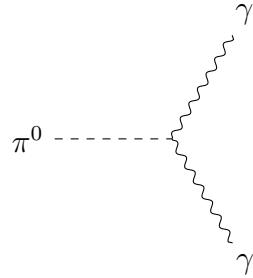
考虑带有  $\pi$  介子的理论，假设系统沿着  $T^3$  方向进行  $SU(3)_A$  变换，可以证明  $\pi^0 \rightarrow \pi^0 - \alpha f_\pi$ 。因此，为了保证  $\mathcal{L}_\pi$  和  $\mathcal{L}_{QCD}$  的变换方式一样，我们需要添加一项

$$\delta \mathcal{L}_{\pi^0} = \frac{\pi^0}{f_\pi} \frac{e^2}{32\pi^2} \frac{N_C}{3} \varepsilon F F, \quad (1.17)$$

该项通常称为反常匹配，该项在  $SU(3)_A$  变化下为

$$\delta m L_{\pi^0} \rightarrow \delta m L_{\pi^0} \frac{\alpha f_\pi}{f_\pi} \frac{e^2}{32\pi^2} \frac{N_C}{3} \varepsilon F F, \quad (1.18)$$

刚好抵消了拉氏量的变化。而额外引入的  $\delta \mathcal{L}_{\pi^0}$  项则会产生如下顶点：



由此，我们可以给出

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{m_\pi^3 \alpha^3}{64\pi^3 f_\pi^2} \left( \frac{N_C}{3} \right) \simeq 7.6 eV \left( \frac{N_C}{3} \right), \quad (1.19)$$

而  $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)_{\text{exp}} \simeq 7.7 eV$ 。

## 2 强 CP 问题

首先考虑  $U(1)$  电磁规范理论，在不违反对称性的前提下，拉氏量可以写成

$$\mathcal{L} \supset -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + eA_\mu J^\mu + \theta F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$$

而事实上，只有前两项出现在 SM 中，如果我们把  $\theta$  项展开可以得到  $\vec{E} \cdot \vec{B}$ ，代入作用量中可以得到

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \supset \int d^4x \theta \vec{E} \cdot \vec{B}$$

将电场写作  $\vec{E} = \nabla\Phi$ ，利用分部积分可以得到

$$\int d^4x \vec{E} \cdot \vec{B} = \int d^4x \nabla \cdot (\Phi \vec{B}) - \int d^4x \Phi \nabla \cdot \vec{B}$$

其中第一项是表面项，如果没有磁单极子的存在，第二项等于 0。表面项在经典物理中可以忽略。

先考虑表面项在量子力学中的作用，势能为谐振子势

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x)$$

引入表面项后

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x) + \theta \dot{x}$$

显然表面项不改变经典物理。如果我们计算考虑表面项后的哈密顿量，可以得到

$$H = p\dot{x} - L = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)$$

哈密顿量不依赖于  $\theta$ ，因此求解得到的波函数是一样的。

如果将势函数修改为周期谐振子势，即在  $[-a, a]$  是谐振子，然后不断平移，得到整体势函数。周期谐振子势的求解要复杂得多，为此我们可以先计算  $\langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle$  在大  $T$  极限下， $|x\rangle$  为位置本征态，

$$\langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle = \sum_{n,m} \langle x_f | n \rangle \langle n | e^{-HT} | m \rangle \langle m | x_i \rangle = \sum_n \langle x_f | n \rangle \langle n | e^{-E_n T} | n \rangle \langle n | x_i \rangle$$

在大  $T$  极限下，仅有基态占主导地位，因此  $\langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle \simeq \langle x_f | 0 \rangle e^{-E_0 T} \langle 0 | x_i \rangle$ 。

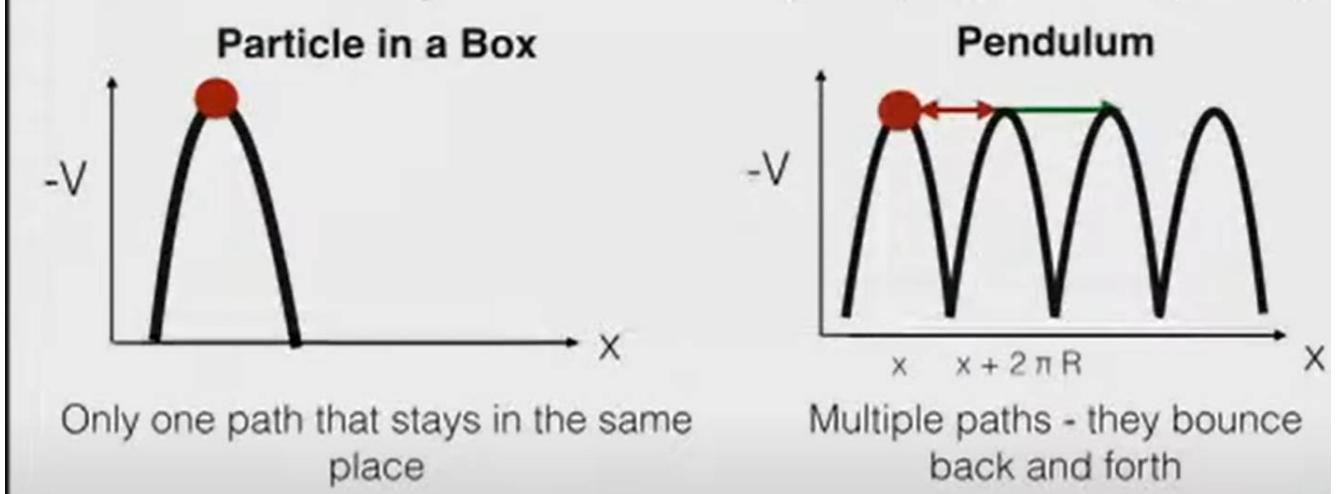
利用费曼路径积分的技巧，我们可以得到

$$\langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle = N \int d\gamma e^{-S_E[\gamma]}$$

其中  $S_E$  是欧式作用量 ( $t \rightarrow i\tau$ )

$$S_E = \int d\tau \left( -\left( \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) \right) + i\theta \dot{x} \right)$$

其中  $\theta$  项作为相位出现。我们知道在跃迁中起最大贡献的路径是使作用量取极小值的路径，而这正是经典路径。但在欧式作用量中，势变成了  $-V$ 。因此问题变成了在  $-V$  中从  $x_i$  到  $x_f$  的跃迁。如果取  $x_f = x_i$ ，则显然在一维谐振子中只有一条路径，即待着不动；而在周期谐振子势中，则可以有无穷多条路径，可以任意跨选择过峰，对于这些额外的路径我们称为瞬子。



这些不同的瞬子显然是不同的，有些可以是一个周期，有些可以是两个周期，我们称之为瞬子解的缠绕数。现在我们可以看出  $\theta$  项的意义了

$$\int d\tau (i\theta x) \approx i\theta n$$

其中  $n$  是缠绕数。因此  $\theta$  项是物理的，它告诉我们如何把这些瞬子加在一起。至于最终的答案以及细节计算可以参考 Coleman 的书，关键点在于  $\theta$  确实可以改变谱的结构。

$$E = \frac{1}{2}\omega + 2K \cos\theta e^{-S}$$

考虑一个简单的无费米子的理论

$$\mathcal{L} \supset -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \theta F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

它的欧式路径积分为

$$\int [dA] e^{-S_E[A]}$$

同理，该积分主要由欧式空间运动方程的解给出。欧式运动方程由下面微分方程给出

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

为了求解方程，必须给定边界条件。如果有些解的能量是发散的，那么这些解对路径积分没有贡献。因此我们只需要找到那些有限能量的解，从而  $F_{\mu\nu}$  在无穷远处必须为 0。但是  $F_{\mu\nu}$  为 0，并

不意味着  $A$  也为 0。This means, we seek boundary conditions where the potential is pure gauge out at infinity. 它在有限区域内具有非零场强，因此对欧式路径积分有贡献。如果时空是  $R^4$  的，那么它的边界就是  $S^3$ ，那么我们其实就是在找一个从  $S^3$  到规范群  $G$  的映射。给定这样一个映射，如果可以连续变形到另外一个映射，那么就不用再单独计数，因为它也是路径积分的一部分。如果规范群是  $U(1)$ ，那么所有从  $S^3$  映射到  $U(1)$  的群都可以连续变换到单位映射。因此仅有一个有限能量解，此时  $\theta$  项不重要。

可以发现，我们的映射是依赖时空维数的，如果是 1+1 维时空，那么边界就是  $S^1$ ，从  $S^1$  到  $U(1)$  存在不平凡的映射。

同样，如果我们的规范群是  $SU(N)$ ，也存在不平凡的映射。在  $S^1$  上，我们用缠绕数标记不同的映射。对于这些高维映射，我们用 Pontryagin 指标来标记。而对于这些解，我们都称之为瞬子。和缠绕数类似，这些指标告诉我们如何把不同的瞬子解加到一起。参考 Coleman 的书，可以给出  $\theta$  项的能量修正。因此  $\theta$  是有物理意义的。

$$E(\theta) \sim K \cos \theta e^{-S_0}$$

对于规范理论，可以证明瞬子的指数压低为  $e^{-8\pi^2/g^2}$ ，其中  $g$  是规范耦合常数，对于  $SU(2)$ ，耦合常数很小，因此几乎不讨论电弱的  $\theta$  项，但对于  $SU(3)$ ， $\theta$  项就不可以忽略了。

强相互作用的  $SU(3)_C$  是 CP 守恒的，但是低能情况下，一直存在一个问题：Weinberg 的  $U(1)_A$  介子丢失问题。 $'t$  Hooft 的解决方案引发了人们对强 CP 问题的重新认识。

## 2.1 $U(1)_A$ 介子丢失问题