

读书笔记

曹雄辉

2021 年 8 月 6 日

目录

1	π 电生的研究历史和进展	4
2	π 电生的运动学和微分截面分解	5
1	电生过程的微分截面定义	7
2	光子极化密度矩阵和极化参数	8
3	质心系中的的矩阵元以及微分总截面	10
4	强子形状因子和低能定理	14
3	π 电生振幅的洛伦兹和同位旋结构以及分波展开	17
1	电生的洛伦兹结构	17
2	二分量旋量形式	20
3	多极展开	21
4	同位旋结构与物理道的对应	25
5	交叉对称性和电荷共轭不变性	27
6	螺旋度振幅和分波展开	28
4	手征微扰理论	31
5	树图振幅计算	34
1	$\mathcal{O}(p)$ 阶结果	34
2	$\mathcal{O}(p^2)$ 阶结果	39
6	PCAC 以及手征 Ward 恒等式的应用	46
1	流代数和 Adler-Gilman 关系	46
2	格林函数与 π 电生的联系	47
3	轴矢流矩阵元	48

4	π 电生的应用	51
7	$\gamma^* + N \rightarrow \pi + N$ 过程的分波奇异性	56
1	一般描述方法	56
2	t 道贡献的奇异性	57
3	u 道贡献的奇异性	60
8	分波中的运动学因子	65
9	分波计算以及归一化约定	70
10	实验上拟合用到的唯像学模型	72
1	么正 Isobar 模型	72
2	动力学模型	74
11	$\gamma^* N \rightarrow \pi N$ 过程的色散表示	78
12	振幅的解析延拓和 $N^*(890)$ 的耦合常数抽取	80
13	极点参数抽取以及电磁衰变振幅	81
1	Laurent+Pietarinen(L+P) 展开方法	81
2	电磁衰变振幅和衰变宽度	84
14	$N^*(890)$ 的抽取物理量	88
15	$\gamma^* N \rightarrow N^*$ 唯像拉式量与虚光子衰变振幅	89
16	缪子 $g - 2$ 简介以及 HVP 贡献计算方法	93
1	轻子磁矩的场论描述	93
2	重整化的光子自能函数与色散关系	94
3	强子真空极化贡献	96
17	一般的 Compton 散射	99
A	附录一：自然单位下实验数据单位换算	100
B	附录二：非线性实现	102
1	整体对称性陪集构造的一般形式	102
2	例子一： $SU(2) \rightarrow U(1)$	103

3	例子二：介子手征微扰论的简单构造	105
4	手征微扰理论中的基本自由度	105
C	分波多级振幅，分波螺旋度振幅， $\gamma^* N \rightarrow N^*$ 跃迁振幅与各类截面和观测量之间的转换关系（初步）	107
1	Walker 建立的振幅范式	107
D	Feshbach 共振理论简介	113
1	Lippmann-Schwinger 方程	113
2	散射矩阵	115
3	碱金属原子的磁 Feshbach 共振	118
E	规范不变性与强子结构	120
1	π 电磁顶角的一般形式	120
2	核子电磁形状因子	123
3	π 的实康普顿散射	124
F	离壳效应的不可观测性	129
1	$\pi\pi$ 切致辐射	129
2	费米子耦合的玩具模型	130
G	Coleman-Norton 定理	135
H	π 电生的 Mandelstam 图	138
I	光子自能函数与真空极化	141
J	QED 顶角关联与 $K_\mu(s)$ 函数	143
1	顶角关联	143
2	$K(s)$ 函数	144
K	投影算符方法	145
L	圈函数的色散表示（谱表示）	151
1	标量两点函数	151
M	勒让德函数的一个定理证明	153
N	交叉对称的色散关系	155

1 π 电生的研究历史和进展

π 介子从核子中低能碰撞产生的过程从上世纪五十年代开始被人们广泛研究，最为主要的是它能提供末态 πN 的一些重要信息，比如能够得到 πN 的一些低能耦合常数以及得到 πN 共振态的一些性质。理论上，Kroll 和 Ruderman [1] 最先提出 π 介子光生 ($\gamma N \rightarrow \pi N$) 的一个低能定理，用以描述带电 π 介子阈附近的产生行为。一个重要的结论是在 π 质量趋于 0 的手征极限下， π^0 产生的振幅会趋于零。由于介子核子的耦合常数非常大，一般的微扰论（按照耦合常数展开）完全失效了。因此，在当时人们主要利用色散关系写出的积分方程（组）和积分方程的一些数值方法来研究这些过程 [2]。

Nambu 和 Goldstone 在 60 年代初提出一种新的见解，这源自于对 π 介子的解释，即 π 介子是手征对称性自发破坏的（几乎）无质量的 Goldstone 玻色子。在 QCD 中，手征对称性源自两味夸克 u, d 的零质量极限，或者再加上 s 夸克。在 QCD 之前的年代，人们并不知道手征对称性的动力起源，但可以从电磁和弱强子流中推断出对称结构，并一般化成所谓的流代数，也就是矢量和轴矢量流之间的等时对易关系。特别的，Gell-Mann 提出这种等时对易关系在对称性明显破缺的情况下还有显著的用处。也就是部分轴矢量流守恒 (PCAC) 假设，它说的是轴矢量流的散度正比于重整化的介子场并且在零质量极限下会为 0。完整的流代数和 PCAC 应用在 π 介子光生和电生可以参考 [3]。

之前的方法对于软 π 的处理并不是很系统，Weinberg 提出可以利用构造有效拉氏量的方法来重复出流代数的结果。但是六七十年代人们主流观点是唯像的拉氏量只能用来计算树图，对于圈图的发散结果并不能很好地处理，最后结果的正确与否还需要流代数来验证。但是 Weinberg [4] 于 1978 年提出一个全新的论点，认为有效拉氏量能够完全重复之前流代数计算出的结果，并且给出了一个他还没有证明的“定理”：考虑到量子场论的基本原理，即解析性、幺正性、集团分解性（局域性）以及各类对称性，在微扰意义下，如果写出包括所有理论中具有的对称性所允许的项，用微扰论逐阶计算到无穷所得到的矩阵元，和满足最一般 S 矩阵基本原理的结果是一样的。在我们考虑的问题中，也就是说原则上手征极限下的量子修正（圈图）可以用有效场论 (EFT) 逐阶系统地计算。这个方法利用最一般的满足手征对称性的拉氏量，基于把轻介子外动量展开作为序列的微扰方式进行。其中，QCD 作为基本理论，其相应的低能有效理论用 (π) 介子和 (p, n) 核子作为有效自由度这套理论被称作手征微扰理论 (chiral perturbation theory, ChPT)，关于手征微扰论一般的文献可以参考 [5]。

直到上世纪八十年代，带电 π 介子产生在阈附近都能与流代数和 PCAC 的结果吻合，只有中性 π 光生的数据实验和传统理论有着巨大偏差，尤其 s 波电偶极振幅 E_{0+} 的数据难以解释。这个疑难在九十年代初被手征微扰论给基本解决。主要是在流代数框架之外，利用手征微扰中的 π 圈图提供的散射振幅的红外奇异结构，修正了之前对 E_{0+} 预言。这之后，很多更加精密实验开始检验手征微扰对于光生和电生的结果。

从理论的角度来看，光生和电生的各个主要道在阈附近在九十年代以来已经用重重子手征

微扰论 (heavy-baryon chiral perturbation theory , HBChPT) 给研究过了, 但是 HBChPT 的做法一开始就放弃了显示的协变性。为何要放弃协变性这么重要的基本性质呢? 一个重要原因是当圈图考虑核子内线时, 由于核子质量相对于 π 无法忽略, 会在圈函数中造成手征阶数破坏的现象 (Power-Counting Breaking, PCB), 这样的话一般的手征微扰的幂次展开就失效了。因此, HBChPT 成为了分析 π 光生和电生的标准工具 [6]。同时, 也发展出来一些进一步的方法来规避 PCB 现象。比如红外正规化方案, 以及拓展的在壳减除方案 (extended on-mass-shell scheme , EOMS), 尤其是 EOMS 提供了一个完全协变并且不破坏解析性的框架, 具体的介绍可参考 [5]。例如 [7] 利用 EOMS 计算光生和电生到了 $\mathcal{O}(p^4)$ 。

研究电生过程 ($eN \rightarrow eN\pi$), 尤其是低能阈附近到第一个 πN 共振态 $\Delta(1232)$ 之间, 都是非常重要的。从实验角度来说, 电生相对于实光子的光生过程的一个优势是光子极化能够通过轻子的实验测量参数比较精确地确认, 并且能量分辨率原则上能够更精细。在理论上, 一个目的是通过虚光子的纵向极化来研究强子的各类形状因子, 例如电子质子弹性碰撞中不容易测得的中子形状因子, π 形状因子, 核子和共振激发态之间的跃迁矩阵元等。

尤其从唯像上看, 电生过程可以广义上看作一类介于轻子核子的弹性碰撞和光生的过程, 从运动学区域上看 (具体符号约定可以参考下节), 对于给定的 πN 末态质心能量为 W , 虚光子实验室能量定义为 k_0 的情况, 则有 $-k^2 = m_N^2 - W^2 + 2m_N k_0$ (见 (2.6)), 在 $(-k^2, k_0)$ 平面上表示为一条直线。对于弹性碰撞, W 退化为核子质量 $W = m_N$, 那么上式退化成一条过原点的直线, 但是斜率还是 $2m_N$, 这样在运动学上电生确实可以看作更加广义的一类过程。

2 π 电生的运动学和微分截面分解

统一起见这里也顺带介绍一下 π 的光生过程的洛伦兹结构分析。这里简要介绍一下这里使用的约定, 对于电生这个 $2 \rightarrow 3$ 过程: $e(l_1) + N(p_1) \rightarrow e(l_2) + N(p_2) + \pi(q)$, 由于电子与核子的相互作用为纯 QED 作用, 每多交换一个虚光子就大致会多出一个精细结构常数 $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$ 的压低 (本文约定 $e > 0$)。因而在这个意义上, 我们几乎只用考虑领头阶也就是所谓单光子交换近似。中间的虚光子四动量可以写成 $k = l_1 - l_2$, 并且容易知道

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = (l_{10} - l_{20})^2 - (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2)^2 = 2\mu^2 - 2l_{10}l_{20}(1 - \beta_1\beta_2 \cos\theta_l) \stackrel{l_{10}, l_{20} \gg \mu}{\simeq} -4l_{10}l_{20} \sin^2(\theta_l/2) < 0 \quad (2.1)$$

这里电子的质量为 μ , $\beta_i = |\mathbf{l}_i|/l_{i0}$, 以下讨论中如无说明, 我们都将电子的质量取做 0。由 (2.1) 知道电生过程中光子的四动量是类空的 (质量的平方为负), 换一种说法, 也即我们在电生中遇到的形状因子都是类空依赖的 (对于转移的四动量)。有些文献通常也定义 $k^2 = -Q^2$, 这样 Q^2 就是一个恒正的量了。电子和光子的相互作用都是电磁作用, 因而可以将这个过程的纯电磁部分和“强子”部分分开, 强子部分也就是我们的所关心的部分相当于是一个 $\gamma^*(k) + N(p_1) \rightarrow N(p_2) + \pi(q)$

的过程，处理方式与光生过程类似，Mandelstam 变量 s, u, t 定义成

$$s = (p_1 + k)^2 = (p_2 + q)^2, u = (p_1 - q)^2 = (p_2 - k)^2, t = (p_1 - p_2)^2 = (q - k)^2, \quad (2.2)$$

满足

$$s + t + u = 2m_N^2 + M_\pi^2 + k^2 = 2m_N^2 + M_\pi^2 - Q^2 \quad (2.3)$$

多数文献中还会定义一些其他的运动学变量

$$P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad \Delta = p_2 - p_1, \quad P \cdot \Delta = 0 \quad (2.4)$$

$$\nu = q \cdot P = k \cdot P, \quad \nu_B = -\frac{1}{2}q \cdot k \quad (2.5)$$

运动学变量之间满足一些代数关系

$$s = m_N^2 + 2(\nu - \nu_B), \quad u = m_N^2 - 2(\nu + \nu_B) \quad (2.6)$$

下面介绍几种电生过程中比较重要的参考系以及各类物理量之间的关系。在末态 πN 系统（也就是“ $2 \rightarrow 2$ ”过程初态或末态）质心系中（这里用上标 * 来特指质心系中的物理量，特别是运动学量），质心系中我们有

$$\mathbf{p}_1^* = -\mathbf{k}^*, \quad \mathbf{p}_2^* = -\mathbf{q}^* \quad (2.7)$$

光子的能量， k_0^* 可以利用能量守恒和质壳关系通过质心能量 $W = \sqrt{s}$ 和光子四动量模方给出，其余的量如 q_0^* 等都可以类似给出

$$k_0^* = \frac{W^2 + k^2 - m_N^2}{2W}, \quad q_0^* = \frac{W^2 + m_\pi^2 - m_N^2}{2W}; \quad (2.8)$$

$$p_{10}^* = \frac{W^2 + m_N^2 - k^2}{2W}, \quad p_{20}^* = \frac{W^2 + m_N^2 - m_\pi^2}{2W} \quad (2.9)$$

在实验系中（一般是撞击固定 p 靶），有 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ ， $p_{10} = m_N$ ，所以可以得到一些有用的关系

$$s = W^2 = k^2 + m_N^2 + 2m_N k_0, \quad t = \Delta^2 = 2m_N^2 - 2m_N P_{20} = -2m_N T_2 \quad (2.10)$$

这里 T_2 相当于反冲核子的动能。文献中还可以定义另一个实光子等价能量 E_γ^{lab}

$$E_\gamma^{\text{lab}} = \frac{W^2 - m_N^2}{2m_N} = \frac{s - m_N^2}{2m_N} \quad (2.11)$$

E_γ^{lab} 的物理含义是一个实光子在实验系中要产生一个不变质量为 W 的 πN 末态的能量。

要完整描述这个过程的运动学，需要 $3 \times 5 = 15$ 个动量自由度，由于整个体系转动对称性和空间平移对称性的限制，还剩余 9 个自由度，由于 4- 动量守恒，最终只需要 5 个独立的运

动学变量就可以描述整个过程了。从物理考虑，最为常用的 5 个变量可以选取为：转移动量（虚光子 4-动量）的平方 k^2 ，不变质量平方 $s(W)$ ，极化参数 ϵ （后面会定义，这里可以理解成与 k 和实验系轻子散射角 θ_l 相关的一个函数）以及两个质心系中定义的角度 θ_π^*, ϕ_π^* （ π 介子的极角和方位角），有些时候也用 t 来代替 θ_π^* 。前 3 个参数可以完全描述虚光子的运动学，它们仅仅取决于轻子的动量 l_1, l_2 和轻子散射角 θ_l 。

虚光子的极化描述是一个比较微妙的东西，由于虚光子具有非零质量 ($k^2 \neq 0$)，其极化描述类似于有质量矢量粒子。一般在轻子反冲系 (Lepton Breit frame) 中考虑，末态轻子 4-动量与初态轻子大小相等符号相反。**在这个参考系中一束非极化电子入射会产生各 50% 的螺旋度为 ± 1 的虚光子，不会有螺旋度为 0 的态产生。**通过洛伦兹变换到质心系后，光子会获得横向极化

$$\epsilon = \frac{|A_x^*|^2 - |A_y^*|^2}{|A_x^*|^2 + |A_y^*|^2} = \frac{\rho_{xx} - \rho_{yy}}{\rho_{xx} + \rho_{yy}} \quad (2.12)$$

以及纵向极化

$$\epsilon_L = \frac{|A_z^*|^2}{|A_x^*|^2 + |A_y^*|^2} = \frac{\rho_{zz}}{\rho_{xx} + \rho_{yy}} = -\frac{k^2}{k_0^{*2}} \epsilon \quad (2.13)$$

A_i^* 是虚光子的矢势的笛卡尔分量 (质心系)， ρ_{ij} 是光子的极化密度矩阵，下面会详细解释它的物理意义。质心系如图所示，z 轴指向虚光子的 3-动量方向

$$\hat{z} = \hat{k}^*$$

y 方向垂直于散射平面

$$\hat{y} = \frac{\hat{l}_1^* \times \hat{l}_2^*}{\sin \theta_l^*}$$

极化参数 ϵ 能够在实验系中测量出来，明显的表达式可以计算出来

$$\epsilon = \left(1 + 2 \frac{\mathbf{k}^2}{-k^2} \tan^2 \left(\frac{\theta_l}{2} \right) \right)^{-1} = \left(1 + 2 \frac{\mathbf{k}^2}{Q^2} \tan^2 \left(\frac{\theta_l}{2} \right) \right)^{-1} \quad (2.14)$$

式 (2.14) 的详细计算见下文，这里可以清晰地看出，对于固定的 k^2 和 W （也就是 \mathbf{k}^2/Q^2 固定），参数 ϵ 就是一个对于散射角 θ_l 单调下降的函数，同理 ϵ_L 也单调下降。

一个值得注意的是参考系变换时 ϵ 会不会发生变化，原则上说这并不是一个洛伦兹不变量。一个简单的考虑是实验系到质心系中的洛伦兹变换是平行于 \mathbf{k}^* 的方向 (z 轴的方向)，因此极化参数在这个洛伦兹变换下是一个守恒量。这也可以从另一个地方看出，根据定义 (2.12)， ϵ 只包括矢势的横向分量，因而一个纵向的洛伦兹变换不会改变任何横向相关物理量的值。

1 电生过程的微分截面定义

电生过程的微分散射截面可以写成

$$d^9\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5 4 \sqrt{(p_1 \cdot l_1)^2 - \mu^2 m_N^2}} \sum' |M_{fi}|^2 \frac{d^3 l_2 d^3 p_2 d^3 q}{2l_{20} 2p_{20} 2q_0} \delta^4(p_1 + k - p_2 - q) \quad (2.15)$$

这里求和符号 \sum' 表示对所有末态自旋求和以及对初态自旋求平均。在单光子近似情况下振幅可以写成

$$M_{fi} = \frac{e^2}{k^2} \bar{u}(l_2) \gamma_\mu u(l_1) \langle p_2 q | J_\mu | p_1 \rangle \equiv \frac{e^2}{k^2} l_\mu M^\mu \quad (2.16)$$

J_μ 就是强子电磁流，微分截面中散射振幅模方可以写作

$$\sum' |M_{fi}|^2 = 2 \frac{e^4}{k^4} L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (2.17)$$

这里分别定义

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum l_\mu l_\nu^*, \quad M_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum M_\mu M_\nu^* \quad (2.18)$$

其中 $1/4$ 来源于对于初态自旋求平均。轻子部分可以直接计算出来（非极化情况）

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \sum_{1,2} \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 (\bar{u}_2 \gamma_\nu u_1)^* \\ &= \frac{1}{4} \sum_{1,2} (\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_1 \gamma_\nu u_2) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr} ((l'_2 + \mu) \gamma_\mu (l'_1 + \mu) \gamma_\nu) \\ &= \frac{1}{2} k^2 g_{\mu\nu} + l_{1\mu} l_{2\nu} + l_{1\nu} l_{2\mu} \end{aligned} \quad (2.19)$$

利用规范不变性可以得到对于振幅的更一般的限制。首先从 $k^\mu l_\mu = 0$, 可以得到 $l_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{l} / k_0$, 同理也有 $k^\mu M_\mu = 0$ 导出的 $M_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{M} / k_0$ 。这些关系可以让我们只用考虑 $L_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}$ 的空间部分。不妨这里将 z 轴的方向取为 \mathbf{k} 的方向, 这样会有

$$l^\mu M_\mu = l_0 M_0 - \mathbf{l} \cdot \mathbf{M} = -l_x M_x - l_y M_y - \left(1 - \frac{|\mathbf{k}|^2}{k_0^2}\right) l_z M_z = -\left(l_x M_x + l_y M_y + \frac{k^2}{k_0^2} l_z M_z\right) \quad (2.20)$$

不需要 M 的类时分量信息。

2 光子极化密度矩阵和极化参数

通过定义 (2.12) 我们能够用极化参数（横向）和纵向极化参数来描述虚光子的极化，这里 ρ_{ij} 是一个 3×3 的矩阵

$$\rho_{ij} = -\frac{1}{k^2} \left(\frac{-k^2}{k_0^2}\right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} L_{ij} \quad i, j = x, y, z \quad (2.21)$$

代表虚光子极化密度矩阵。为了计算矩阵元，我们考虑使得 z 轴就是 \hat{k} 方向，同时 y 轴垂直于反应平面（由 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ 以及 \mathbf{k} 构成的三角形决定）。从式 (2.19)，我们能得到

$$L_{xx} = -\frac{1}{2} k^2 + 2l_{1x}l_{2x}, \quad L_{yy} = -\frac{1}{2} k^2 + 2l_{1y}l_{2y} \quad (2.22)$$

同时容易知道

$$l_{1y} = l_{2y} = 0, \quad l_{1x} = l_{2x} = \frac{|\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2|}{|\mathbf{k}|} \sin \theta_l \quad (2.23)$$

后一个等式利用到了正弦定理。这样可以直接计算出极化密度矩阵的 ρ_{xx}, ρ_{yy} 分量

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= -\frac{1}{k^2} \left(-\frac{k^2}{k_0^2} \right)^0 L_{xx} = -\frac{1}{k^2} \left(-\frac{1}{2} k^2 + 2l_{1x}l_{2x} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{k^2} l_{1x}l_{2x} = \frac{1}{2} - \frac{2}{k^2} \frac{|\mathbf{l}_1|^2 |\mathbf{l}_2|^2 \sin^2 \theta_l}{|\mathbf{k}|^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{k^2} \frac{\sin^2 \theta_l (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2)^2}{|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \theta_l} = \frac{1}{2} - \frac{2}{k^2} \frac{\sin^2 \theta_l (l_1 \cdot l_2 - l_{01}l_{02})^2}{|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \theta_l} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{k^2} \frac{\sin^2 \theta_l (-\frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{4 \sin^2 \theta_l})^2}{|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \theta_l} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{k^2}{2|\mathbf{k}|^2} \cot^2 \left(\frac{\theta_l}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

完全类似地，给出 $\rho_{yy} = 1/2$ ，通过这两个矩阵元带入到极化参数的定义 (2.12) 中去，经过简单的代数以及三角函数运算可以得到 (2.14) 这一结果。极化参数完全取决于轻子的运动学，在这里 ϵ 可以在上述提到的任意参考系里计算。另外几个矩阵元可以类似计算，这里利用 (2.23) 直接计算 l_{1z}

$$\begin{aligned} l_{1z} &= \sqrt{|\mathbf{l}_1|^2 - l_x^2 - l_y^2} = \sqrt{|\mathbf{l}_1|^2 - \frac{|\mathbf{l}_1|^2 |\mathbf{l}_2|^2 \sin^2 \theta_l}{|\mathbf{k}|^2}} \\ &= \frac{|\mathbf{l}_1|}{|\mathbf{k}|} \sqrt{|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{l}_2|^2 \sin^2 \theta_l} \\ &= \frac{|\mathbf{l}_1|}{|\mathbf{k}|} (|\mathbf{l}_1| - |\mathbf{l}_2| \cos \theta_l) \end{aligned} \quad (2.25)$$

同时得到

$$l_{2z} = \frac{|\mathbf{l}_2|}{|\mathbf{k}|} (|\mathbf{l}_1| \cos \theta_l - |\mathbf{l}_2|) \quad (2.26)$$

可以直接验证 (2.25) 和 (2.26) 满足 $l_{1z} - l_{2z} = |\mathbf{k}|$ 这一关系，由此说明这个结果是合理的。其他几个非零矩阵元利用上述关系可以通过略有点冗长的计算得到

$$\begin{aligned} \rho_{zz} &= -\frac{1}{k^2} \left(-\frac{k^2}{k_0^2} \right)^2 L_{zz} = -\frac{k^2}{k_0^4} \left(-\frac{1}{2} k^2 + 2l_{1z}l_{2z} \right) \\ &= -\frac{k^2}{k_0^4} \left(-\frac{1}{2} k^2 + 2 \frac{|\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2|}{|\mathbf{k}|^2} (|\mathbf{l}_1|^2 \cos \theta_l - |\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2| - |\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2| \cos^2 \theta_l + |\mathbf{l}_2|^2 \cos \theta_l) \right) \\ &= -\frac{k^2}{k_0^4} \left(-\frac{1}{2} k^2 + 2 \frac{|\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2|}{|\mathbf{k}|^2} ((|\mathbf{k}|^2 + 2|\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2| \cos \theta_l) \cos \theta_l - |\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2|(1 + \cos^2 \theta_l)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{k^2}{k_0^4} \left(-\frac{1}{2} k^2 + 2 \frac{|\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2|}{|\mathbf{k}|^2} (|\mathbf{k}|^2 \cos \theta_l - |\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2| \sin^2 \theta_l) \right) \\
&= -\frac{k^2}{k_0^4} \left(-\frac{1}{2} k^2 + \frac{2}{|\mathbf{k}|^2} \left(-\frac{k^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_l}{2}} \right) \left(|\mathbf{k}|^2 \cos \theta_l + \frac{k^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_l}{2}} \sin^2 \theta_l \right) \right) \\
&= \left(\frac{k^2}{k_0^2} \right)^2 \frac{k_0^2}{2|\mathbf{k}|^2} \cot^2 \left(\frac{\theta_l}{2} \right) = -\frac{k^2}{k_0^2} \frac{\epsilon}{1-\epsilon} = \frac{Q^2}{k_0^2} \frac{\epsilon}{1-\epsilon}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

倒数第二个等号利用了 $|\mathbf{l}_1||\mathbf{l}_2| = -\frac{k^2}{4 \sin^2(\theta_l/2)}$, 最后一行利用了式 (2.14) 这一结果。其余几个结果这里直接给出

$$\epsilon_L = -\frac{k^2}{k_0^2} \epsilon = \frac{Q^2}{k_0^2} \epsilon \tag{2.28}$$

$$\rho_{xz} = -\frac{1}{1-\epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon_L(1+\epsilon)}{2}} \tag{2.29}$$

最后可以写出虚光子极化密度矩阵的完整形式

$$\rho = \frac{1}{1-\epsilon} \begin{pmatrix} \frac{1+\epsilon}{2} & 0 & -\sqrt{\frac{\epsilon_L(1+\epsilon)}{2}} \\ 0 & \frac{1-\epsilon}{2} & 0 \\ -\sqrt{\frac{\epsilon_L(1+\epsilon)}{2}} & 0 & \epsilon_L \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

这个结果用来描述虚光子的横向线性极化, 我们可以和实光子做一个有意义的对比。如果实光子沿着 z 轴传播, 那么极化矩阵 ρ_{ij} 应该只有 x, y 分量, 对于一个相对极化在 $1+\epsilon$ 和 $1-\epsilon$ 之间的部分线极化束, 可以得到

$$\rho = \frac{1}{1-\epsilon} \begin{pmatrix} \frac{1+\epsilon}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

这与式 (2.30) 吻合 (当 $k^2 = 0$ 的时候)。

对于 $\epsilon = 0$ 的 (光子) 非极化情况, 考虑 (2.14) 知道这个时候对应散射角 $\theta_l = \pi$, 物理上就是朝后散射 (backward scattering), 这种情况就定义了一个“轻子反冲系”。在朝后散射前提下, 只有自旋翻转的情况才能给出自旋为 1 的光子, 因而产生的虚光子带有 ± 1 的螺旋度从而是圆极化的。当入射轻子束是非极化的, 物理上看不会有净的光子极化。那么虚光子纵向极化的来源只能是“轻子反冲系”中做洛伦兹变换到实验系或者质心系这一操作, 也就是这里的虚光子极化可以认为是一个纯粹的相对论参考系变换效应 [3]。

3 质心系中的的矩阵元以及微分总截面

为了计算微分截面或者说将微分截面和描述极化的各种参数 (可观测量) 联系起来, 一个方便的办法是先在强子反冲系 (Hadron Breit frame) 中计算 $L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$ 然后洛伦兹变换到质心系

中。一般来说电生过程可以看作（轻子部分在运动学上看成贡献一个虚光子） $\gamma^*(k) + N(p_1) \rightarrow X(p_X) \rightarrow \pi(q) + N(p_2)$, X 看作一个中间态衰变到 πN 末态（运动学上），强子反冲系（运动学量带一个 h 上标标识）定义为满足如下条件的参考系

$$p_{X0}^h = p_{10}^h, \quad \mathbf{p}_X^h \parallel -\mathbf{p}_1^h$$

由这些关系可以得到一些推论

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_X^h| &= \sqrt{p_{X0}^h - s} = \sqrt{|\mathbf{p}_1^h|^2 + m_N^2 - s} < |\mathbf{p}_1^h| \\ k_0^h &= p_{X0}^h - p_{10}^h = 0, \quad \mathbf{k}^h \parallel \mathbf{p}_1^h, \quad k^2 = -|\mathbf{k}^h|^2 \end{aligned}$$

在这个参考系中，轻子的行为就类似于弹性碰撞到了一堵砖墙，碰撞角可以直接给出 θ_l^h

$$\sin \frac{\theta_l^h}{2} = \frac{\sqrt{-k^2}}{2|\mathbf{l}_1^h|} = \frac{\sqrt{Q^2}}{2|\mathbf{l}_1^h|} \quad (2.32)$$

首先在强子反冲系中考虑轻子部分 $L_{\mu\nu}$ 的计算。 $l_{1,2}$ 的分量可以在球坐标下明显写出来

$$(l_{1,2}^h)_\mu \equiv \left(l^h, l^h \cos\left(\frac{\theta_l^h}{2}\right) \cos\phi, l^h \cos\left(\frac{\theta_l^h}{2}\right) \sin\phi, \pm l^h \sin\left(\frac{\theta_l^h}{2}\right) \right) \quad (2.33)$$

其中

$$l^h = \frac{1}{2} \sqrt{-k^2} \csc\left(\frac{\theta_l^h}{2}\right) \quad (2.34)$$

ϕ 是轻子散射平面 $(\hat{l}_1^h, \hat{l}_2^h)$ 和末态强子平面的夹角。利用 (2.19)，直接可以得到

$$L_{00} = -\frac{1}{2} k^2 \cot^2\left(\frac{\theta_l^h}{2}\right) \quad (2.35)$$

$$L_{xx} = -\frac{1}{2} \left[1 + \cot^2\left(\frac{\theta_l^h}{2}\right) \cos^2\phi \right] \quad (2.36)$$

$$L_{yy} = -\frac{1}{2} \left[1 + \cot^2\left(\frac{\theta_l^h}{2}\right) \sin^2\phi \right] \quad (2.37)$$

$$L_{0x} = L_{x0} = -\frac{1}{2} k^2 \csc\left(\frac{\theta_l^h}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta_l^h}{2}\right) \cos\phi \quad (2.38)$$

$$L_{iz} = L_{zi} = 0, \quad i = 0, x, z \quad (2.39)$$

其他 $L_{\mu\nu}$ 的分量是不需要的，因为只有 $M_{\mu\nu}$ 的对称部分才会有贡献，对称的洛伦兹结构可以由 $g_{\mu\nu}$ 以及动量 p_1, k, q 的组合决定，从图中可以看出这些动量都没有 y 方向分量，因而有

$$M_{0y} + M_{y0} = M_{xy} + M_{yx} = 0$$

因此, $L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ 分解成

$$L_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = L_{xx}M_{xx}^h + L_{yy}M_{yy}^h + L_{00}M_{yy}^h + L_{0x}(M_{0x}^h + M_{x0}^h) \quad (2.40)$$

矩阵元需要从强子反冲系通过洛伦兹变换转到质心系, 也就是从 $k_\mu^h = (0, 0, 0, k^h)$ 到 $k_\mu^* = (k_0^*, 0, 0, k^*)$, 一个 z 轴的方向上的变换并不会改变横向极化。对于电磁流来说, 有类似的变换

$$J_0^h = \gamma(J_0^* - \beta J_3^*) = \left(\frac{|\mathbf{k}^*|^2}{k_0^* \sqrt{-k^2}} - \frac{k_0^*}{\sqrt{-k^2}} \right) J_3^* = -\frac{\sqrt{-k^2}}{k_0^*} J_3^* \quad (2.41)$$

第二个等号用到了流守恒的条件 $k_0^* J_0^* - |\mathbf{k}^*| J_3^* = 0$ 。这样我们可以得到

$$M_{0x}^h = \frac{\sqrt{-k^2}}{k_0^*} M_{zx}^*, \quad M_{00}^h = -\frac{k^2}{k_0^{*2}} M_{zz}^* \quad (2.42)$$

从而在质心系中, (2.40) 可以重新整理成

$$\begin{aligned} \frac{2}{-k^2} L_{\mu\nu}M^{\mu\nu} &= \frac{M_{xx}^* + M_{yy}^*}{2} \left[2 + \cot^2 \left(\frac{\theta_l^h}{2} \right) \right] + \frac{-k^2}{k_0^{*2}} M_{zz}^* \cot^2 \left(\frac{\theta_l^h}{2} \right) \\ &+ \frac{M_{xx}^* - M_{yy}^*}{2} \cot^2 \left(\frac{\theta_l^h}{2} \right) \cos(2\phi) + (M_{zx}^* + M_{xz}^*) \frac{\sqrt{-k^2}}{k_0^*} \csc \left(\frac{\theta_l^h}{2} \right) \cot \left(\frac{\theta_l^h}{2} \right) \cos \phi \end{aligned} \quad (2.43)$$

另一方面, 在强子反冲系中 ($k_0^h = 0, k^2 = -\mathbf{k}^2$), 极化参数表达式 (2.14) 可以写成

$$\epsilon = \left[1 + 2 \tan^2 \left(\frac{\theta_l^h}{2} \right) \right]^{-1} \quad (2.44)$$

由于 ϵ 在沿 z 方向的洛伦兹变换下是不变的, 因而可以从这几个参考系中任意一个选取物理量将 θ_l^h 表示出来。从 (2.44) 中可以得到关于极化的几个三角函数关系

$$\cot^2 \left(\frac{\theta_l^h}{2} \right) = \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}, \quad \csc^2 \left(\frac{\theta_l^h}{2} \right) = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \quad (2.45)$$

利用式 (2.44) 和 (2.45) 带入 (2.43) 中, 可以给出 $L_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ 的最终形式

$$L_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = -\frac{k^2}{1-\epsilon} \left[\frac{M_{xx}^* + M_{yy}^*}{2} + \epsilon_L M_{zz}^* + \frac{M_{xx}^* - M_{yy}^*}{2} \epsilon \cos(2\phi) + \frac{M_{zx}^* + M_{xz}^*}{2} \sqrt{2\epsilon_L(1+\epsilon)} \cos \phi \right] \quad (2.46)$$

值得注意的是这里的 * 特指质心系中的矩阵元, 不是常用的复共轭! 它们只依赖于 W, k^2, t , 这种形式恰好就能对应上文献中讨论虚光子光生的微分截面 (具体分析见下文) 的标准分解形式, 我们这里从振幅出发推导了这一结果并给出了各项的来源

$$\frac{d\sigma_V}{d\Omega_\pi^*}(W, k^2, \epsilon, \theta_\pi^*, \phi_\pi^*) = A + \epsilon B + \epsilon C \sin^2 \theta_\pi^* \cos(2\phi_\pi^*) + \sqrt{\epsilon(1+\epsilon)} D \sin \theta_\pi^* \cos \phi_\pi^* \quad (2.47)$$

这种分解形式的选取中的一些因子 $\sin^2 \theta^*, \sin \theta^*$ 选择是通常的约定, 来源于振幅的多极展开 (multipole expansion)。 A, B, C, D 是四个结构函数, 它们只依赖于变量 W, k^2 以及 t 而不依赖于 ϵ 和 ϕ_π^* 。这四个结构函数有一个简单的物理解释, A 对应着实光子的非极化截面, 当 $k^2 \rightarrow 0$ 时回到光生的截面。 ϵB 是由于纵向极化所导致的微分截面; $\epsilon C \sin^2 \theta_\pi^* \cos(2\phi_\pi^*)$ 是因为横向线性极化对于总截面的修正; 最后包括 D 的一项来源于纵向和横向极化之间的“干涉”效应 [3]。

A 和 C 也可以写成另一种形式

$$A \equiv \sigma_u = \frac{1}{2}(\sigma_{\parallel} + \sigma_{\perp}), \quad C \sin^2 \theta^* \equiv \sigma_p = \frac{1}{2}(\sigma_{\parallel} + \sigma_{\perp})$$

$\sigma_{\parallel}, \sigma_{\perp}$ 分别代表横向光子极化平行和垂直于产生平面的微分截面。

电生过程 “ $2 \rightarrow 3$ ” 的微分截面可以因子化成一些系数乘以一个虚光子的光生过程截面。这里我们从原始的微分截面定义 (2.15) 出发, 推导出一般文献中常用的电生截面的标准形式

$$\frac{d^5\sigma}{dl_{20}d\Omega_l d\Omega_\pi^*} = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{l_{20}}{l_{10}} \left(-\frac{1}{k^2} \right) \frac{E_\gamma^{lab}}{1 - \epsilon} \frac{d\sigma_V}{d\Omega_\pi^*} \equiv \Gamma_t \frac{d\sigma_V}{d\Omega_\pi^*} \quad (2.48)$$

这里虚光子的光生截面定义成

$$\frac{d\sigma_V}{d\Omega_\pi^*} = \frac{\alpha}{16\pi} \frac{|\mathbf{q}^*|}{E_\gamma^{lab}} \frac{1}{m_N W} \left(-\frac{1-\epsilon}{k^2} L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right) \quad (2.49)$$

当 $k^2 = 0$ 也就是 $\epsilon_L = 0$ 时, (2.49) 退回到部分线偏振光的光生微分截面

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\Omega_\pi^*} = \frac{\alpha}{16\pi} \frac{|\mathbf{q}^*|}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{m_N W} \left(\frac{M_{xx}^* + M_{yy}^*}{2} + \epsilon \frac{M_{xx}^* - M_{yy}^*}{2} \right) \quad (2.50)$$

上式中 $|\mathbf{k}|$ 是实光子在实验系中测得的动量, 这里 $|\mathbf{k}| = E_\gamma^{lab}$ 。

为了不混淆起见, 这里重申一下各个标记的方式。(2.48) 中, 下表 l 表示末态轻子, 带 * 的表示末态 “ πN ” 系统的物理量, 下标 0 是洛伦兹指标, $\alpha = e^2/4\pi$ 是精细结构常数, 而下标 1, 2 是为了区分初, 末态。(2.49) 中 W 是末态 “ πN ” 系统的总能量。利用 (2.15) 和 (2.17), 我们能够知道微分截面可以写作

$$d^9\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5 4\sqrt{(p_1 \cdot l_1)^2 - \mu^2 m_N^2}} 2 \frac{e^4}{k^4} L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \frac{d^3 l_2 d^3 p_2 d^3 q}{2l_{20} 2p_{20} 2q_0} \delta^4(p_1 + k - p_2 - q) \quad (2.51)$$

初态 $e^- N$ 系统中 (实验系中), $\sqrt{(p_1 \cdot l_1)^2 - \mu^2 m_N^2} = m_N |\mathbf{l}_1| = m_N l_{10}$ 。对于末态动量积分的处理可以分参考系来做, 值得注意的是 $d^3 l / 2l_0$ (l 是任意动量) 是洛伦兹不变量, 因而整体可以在任意参考系中计算。在末态 “ πN ” 质心系中

$$\frac{d^3 p_2 d^3 q}{p_{20} q_0} = \frac{1}{q_{20}^* p_{20}^*} \frac{|\mathbf{q}_2^*|}{W} q_{20}^* p_{20}^* d^4 P d\Omega_\pi^* = \frac{|\mathbf{q}_2^*|}{W} d^4 P d\Omega_\pi^*$$

这里 P 代表 $q + p_2$, 这个质心系中的变量替换的细节可以参考 [8]。对末态轻子的动量积分在实验系中进行

$$\frac{d^3 l_2}{l_2} = \frac{|\mathbf{l}_2|^2 d|\mathbf{l}_2| d\Omega_l}{l_{20}} = l_{20} dl_{20} d\Omega_l$$

综上, (2.51) 可以约化成

$$\begin{aligned} d^9\sigma &= \frac{1}{(2\pi)^5 4m_N l_{10}} \frac{2e^4}{k^4} L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \frac{1}{8} l_{20} dl_{20} d\Omega_l \frac{|\mathbf{q}^*|}{W} d^4 P d\Omega_\pi^* \delta^4(p_1 + l_1 \rightarrow P + l_2) \\ &= \frac{\alpha^2}{32\pi^3} \frac{l_{20}}{l_{10}} \frac{|\mathbf{q}^*|}{k^4} \frac{1}{m_N W} L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} dl_{20} d\Omega_l d\Omega_\pi^* \end{aligned}$$

对于 (2.48), 我们可以积掉 π 介子的角度依赖

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dl_{20} d\Omega_l} &= \Gamma_t [\sigma_T(W, k^2) + \epsilon \sigma_L(W, k^2)] \quad (2.52) \\ \sigma_T &= \int A(W, k^2, \theta_\pi^*) d\Omega_\pi^*, \quad \sigma_L = \int B(W, k^2, \theta_\pi^*) d\Omega_\pi^* \end{aligned}$$

分别叫做虚光子的横向和纵向微分截面。对于一个单组实验, 利用测量不同值的 ϵ 并且保持 W, k^2 不变, 就能够直接在实验上区分出 σ_T, σ_L 。

4 强子形状因子和低能定理

这里简要介绍一下唯像学和实验上比较重要的几个强子形状因子的定义。光生以及电生过程中可能会涉及到 π 的电磁形状因子, 核子的电磁形状因子以及轴矢流形状因子。

强子的形状因子是强子的电荷, 磁矩以及其他内部物理量的分布函数在合适的参考系的傅里叶变换的直接反映。例如非相对论情况下偶极结构的电荷形状因子 $F(-\mathbf{k}^2) = (1 + \mathbf{k}^2/\alpha)^{-2}$ 对应于一个指数式的电荷分布 $\rho(r) = (8\pi/\alpha^3)e^{-\alpha r}$ (这里 α 只是一个带量纲的常数)。

π 的电磁类空形状因子定义为 ($k^2 = (p_1 - p_2)^2$)

$$\langle \pi(p_2) | V_\mu^{em} | \pi(p_1) \rangle = (p_1 + p_2)_\mu F_\pi^{(sl)}(k^2) \quad (2.53)$$

$e^+ e^- \rightarrow \pi\pi$ 散射等过程还可以定义另一种类时的形状因子

$$\langle \pi(p_1) \pi(p_2) | V_\mu^{em} | 0 \rangle = (p_1 - p_2)_\mu F_\pi^{(tl)}(k^2) \quad (2.54)$$

这二者主要的区别仅是运动学区域完全不一样, 对于类空情况 $-Q^2 = k^2 = (p_1 - p_2)^2$, 而类时情况下 $Q^2 = k^2 = (p_1 + p_2)^2$ 。因为 π 自旋为 0, 只有这一种结构函数存在, 这一个洛伦兹结构是来自于流守恒 $\partial^\mu V_\mu = 0$ 的约束。

$F_\pi(k^2)$ 是一个依赖于单一变量的洛伦兹不变函数, 因而与振幅相比没有交叉对称性, 同时也没有分波振幅的左手割线 [9], 利用电荷的归一化可以得到一个约束 $F_\pi(0) = 1$ 。利用幺正性和 Cutkosky 规则, 可以知道在类空区域 $k^2 < 0$ 以及类时区域的弹性阈下 $k^2 < 4m_\pi^2$ 形状因子是一个实函数, 阈上 $k^2 > 4m_\pi^2$ 会出现虚部且相位等于 $\pi\pi$ 散射的末态相移 (P 波相移, 来源于电磁耦合, 光子自旋为 1), 这个结果在非弹性阈下都成立, 也就是所谓的 Feimi-Watson 末态定理 [10]。

这里利用 S 矩阵的幺正性来说明一下末态定理的导出。分波 S 矩阵与分波 T 矩阵（这里省略内部量子数标记）满足

$$S = 1 + 2i\rho^{\frac{1}{2}}T\rho^{\frac{1}{2}} \quad (2.55)$$

即

$$S_{mn} = \delta_{mn} + 2i\sqrt{\rho_m\rho_n}T_{mn} \quad (2.56)$$

由 S 矩阵的幺正性 $S^\dagger S = 1$ 得到

$$-\frac{i}{2}(T_{mn}^* - T_{nm}) = \rho_l T_{ln}^* T_{lm} \quad (2.57)$$

这里要求时间反演不变性，那么 $T_{mn} = T_{nm}$ ，得到

$$\text{Im}T_{nm} = \rho_l T_{ln}^* T_{lm} \quad (2.58)$$

下面考虑一个简化的例子，能够直接看清末态定理的意义。考虑 $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ 和 $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ 的两个过程，可以统一用一个双道 2×2 的 S 矩阵来描述¹

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

这里 $\rho_\pi = \sqrt{(s - 4m_\pi^2)/s}$ ，且有

$$S = \begin{pmatrix} 1 + 2i\rho_\pi T_{11} & 2i\sqrt{\rho_\pi}T_{12} \\ 2i\sqrt{\rho_\pi}T_{21} & 1 + 2iT_{22} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

因此利用 (2.58) 可以得到

$$\text{Im}T_{12} = \rho_\pi T_{11}^* T_{12} + T_{21}^* T_{22} \simeq \rho_\pi T_{11}^* T_{12} \quad (2.63)$$

第二个约等于是考虑到 T_{22} 是一个双光子振幅，相对于我们一般考虑的强作用会有显著的耦合系数压低，因而略去。上式就是 $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ 的末态定理。简单起见，对于 $\pi\pi$ 散射弹性道可以参数化²

$$S_{11} = \exp(2i\delta), \quad T_{11} = \frac{1}{\rho} \exp(i\delta) \sin \delta \quad (2.64)$$

¹ 这里注意，例如 S_{11} 表示 $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ 过程， S_{12} 表示 $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$ 过程

² δ 代表 $\pi\pi$ 散射的末态相移

带入 (2.63) 中得到

$$\text{Im}T_{12} = T_{12} \exp(-i\delta) \sin \delta \quad (2.65)$$

$\text{Im}T_{12}$ 是实数，那么等号右边应该也是一个实数，唯一的可能就是 T_{12} 的相位等于相移 δ 。

核子的电磁形状因子要复杂许多，一个习惯的定义叫做 Dirac 形状因子

$$\begin{aligned} \langle N(p_2) | V_\mu^{em} | N(p_1) \rangle &= \bar{u}(p_2) \left[\gamma_\mu F_1(k^2) + i \frac{\sigma_{\mu\nu} k^\nu}{2m_N} F_2(k^2) \right] u(p_1) \\ \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \end{aligned} \quad (2.66)$$

与 π 介子形状因子类似，在类空区域， $F_1(k^2), F_2(k^2)$ 都是实的并且只有在连续谱上 $k^2 > m_\pi^2$ 才会有虚部。一个更加物理的分解方式是将形状因子分解成“电”的部分和“磁”的部分，这样可以重写矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle N(p_2) | V_\mu^{em} | N(p_1) \rangle &= \frac{m_N}{P^2} \bar{u}(p_2) \left[P_\mu G_E(k^2) + N_\mu \frac{G_M(k^2)}{2m_N} \right] u(p_1) \\ P_\mu &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2)_\mu, \quad N_\mu = i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} P^\mu k^\lambda \gamma^\sigma \gamma_5 \end{aligned} \quad (2.67)$$

以及

$$G_E(k^2) = F_1(k^2) + \frac{k^2}{4m_N^2} F_2(k^2), \quad G_M(k^2) = F_1(k^2) + F_2(k^2) \quad (2.68)$$

这就是所谓的 Sach 形状因子。事实上，在核子反冲系（Nucleon Breit frame）中 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ($k_0 = p_{20} - p_{10} = 0$)

$$\langle \mathbf{p} | V_0 | -\mathbf{p} \rangle = 2m_N G_E(k^2) \quad (2.69)$$

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{V} | -\mathbf{p} \rangle = i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{k}) G_M(k^2) \quad (2.70)$$

分别代表电和磁的部分 [11]。 G_E 和 G_M 也对应着不同螺旋度态之间的跃迁振幅， $1/2 \rightarrow -1/2 \iff G_E$, $1/2 \rightarrow 1/2 \iff G_M$ 。电磁流的同位旋结构如果写成 $V^{em} = V^s + V^v$ ，那么对于质子和中子的结构函数 F 有

$$F^{(p,n)} = \frac{1}{2}(F^s \pm F^v) \quad (2.71)$$

以及以下关系

$$F_1^s(0) = F_1^v(0) = 1 \quad (2.72)$$

$$F_2^s(0) = \kappa_p + \kappa_n = -0.12 \quad (2.73)$$

$$F_2^v(0) = \kappa_p - \kappa_n = 3.71 \quad (2.74)$$

这里 $\kappa_p = 1.7928, \kappa_n = -1.931$ 是质子和中子的反常磁矩³, 上标 s, v 分别代表同位旋标量和矢量部分。

最后考虑一下 QCD 中的轴矢量流所对应的形状因子。出发点是轻夸克场构成的轴矢量流 $A_\mu^a = \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 T^a q$ 构成的矩阵元。对于简单的 $SU(2)$ 情况, 核子的同位旋轴矢量流形状因子可以写成

$$\langle N(p_2) | A_\mu^a | N(p_1) \rangle = \bar{u}(p_2) \left[\gamma_\mu G_A(k^2) + \frac{k_\mu}{2m_N} G_P(k^2) \right] \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} u(p_1) \quad (2.75)$$

$G_A(k^2)$ 叫做核子轴矢流形状因子, $G_P(k^2)$ 称为诱导赝标量形状因子。轴矢流形状因子可以描述核子的自旋-同位旋分布, 因为从非相对论语言来说, 轴形状因子就是 Gamov-Teller 算符 $\sigma\tau$ 的矩阵元。轴矢流形状因子在小动量转移情况下可以展开成 [12]

$$G_A(k^2) = g_A \left(1 + \frac{1}{6} \langle r_A^2 \rangle k^2 + \mathcal{O}(k^4) \right) \quad (2.76)$$

g_A 是轴矢流耦合常数, $g_A = 1.2673 \pm 0.0035$, $\langle r_A^2 \rangle$ 是核子轴矢流对应的半径。 G_A, G_P 低能时满足一些低能定理 [5]

$$G_A(k^2) = g_A \quad (2.77)$$

$$G_P(k^2) = -\frac{4m_N^2 g_A}{k^2 - m_\pi^2} \quad (2.78)$$

耦合常数之间 (最低阶意义上) 满足 Goldberger-Treiman 关系⁴

$$g_{\pi N} = \frac{m_N}{F_\pi} g_A \quad (2.79)$$

3 π 电生振幅的洛伦兹和同位旋结构以及分波展开

1 电生的洛伦兹结构

对于 $\gamma^*(k) + N(p_1) \rightarrow N(p_2) + \pi(q)$ 过程, 这个反应可以被一个洛伦兹不变的振幅 \mathcal{M}^μ 完全描述, 定义成

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu \mathcal{M}^\mu, \quad (3.1)$$

$$\epsilon_\mu = e^2 \frac{\bar{u}(l_1)\gamma_\mu u(l_2)}{k^2} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{M}^\mu = \langle N' \pi | J^\mu(0) | N \rangle = \bar{u}(p_2) \left(\sum_{i=1}^8 B_i V_i^\mu \right) u(p_1) \quad (3.3)$$

³这里单位是 $e/2m_N$

⁴ $g_{\pi N}$ 是 π, N 的低能耦合常数

这里 ϵ_μ 在光生和电生里面都满足 $k^\mu \epsilon_\mu = 0$, 光生是由于一般选取洛伦兹规范, 电生是由于电子满足狄拉克方程 $\bar{u}(l_2)\gamma_\mu(l_1 - l_2)^\mu u(l_1) = 0$, 下面也将 ϵ 叫做“极化矢量”。独立的洛伦兹结构可以通过独立的螺旋度振幅看出来, 这里我们处理完整电生过程, 只考虑单光子交换情况⁵, 由于涉及 2 个费米子 (核子), 一共有 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 个螺旋度振幅⁶, 由于 P 宇称守恒, 总共会有 8 个独立的螺旋度振幅, 原则上会有 8 个, 但是规范不变性会给出 2 个限制, 最后独立的只有 6 个。因此最后能得到 6 个独立的洛伦兹结构 (考虑了规范对称性后)。这里 $B_i V_i^\mu$ 有 8 个结构最早是由 Ball 在 1961 年 [13] 提出的。我们这里记号与 [6, 14, 15] 保持一致, 与 [7, 16] 略有区别

$$\begin{aligned} V_1^\mu &= \gamma_5 \gamma^\mu \not{k}, & V_2^\mu &= 2\gamma_5 P^\mu \\ V_3^\mu &= 2\gamma_5 q^\mu, & V_4^\mu &= 2\gamma_5 k^\mu \\ V_5^\mu &= \gamma_5 \gamma^\mu, & V_6^\mu &= \gamma_5 P^\mu \not{k} \\ V_7^\mu &= \gamma_5 k^\mu \not{k}, & V_8^\mu &= \gamma_5 q^\mu \not{k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

由于上面的讨论, 并非所有的 B_i 都是独立的, 我们可以利用规范不变性 $k_\mu J^\mu = 0$ 来消掉其中两个不独立的标量函数⁷

$$\begin{aligned} k^2 B_1 + 2(k \cdot P) B_2 + 2(k \cdot q) B_3 + 2k^2 B_4 &= 0 \\ B_5 + (k \cdot P) B_6 + k^2 B_7 + (k \cdot q) B_8 &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

规范不变性可以利用电磁作用 $U(1)$ 不变性导致的电荷守恒来证明, 守恒流满足 $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$, 假设体系平移不变性成立 $J^\mu(x) = e^{iP \cdot x} J^\mu(0) e^{-iP \cdot x}$, 所以有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N(p_2), \pi(q) | \partial_\mu J^\mu(x) | N(p_1) \rangle \\ &= \partial_\mu \langle N(p_2), \pi(q) | J^\mu(x) | N(p_1) \rangle \\ &= \partial_\mu \langle N(p_2), \pi(q) | e^{iP \cdot x} J^\mu(0) e^{-iP \cdot x} | N(p_1) \rangle \\ &= \partial_\mu \langle N(p_2), \pi(q) | e^{i(p_2+q) \cdot x} J^\mu(0) e^{-ip_1 \cdot x} | N(p_1) \rangle \\ &= \partial_\mu e^{i(p_2+q-p_1) \cdot x} \langle N(p_2), \pi(q) | J^\mu(0) | N(p_1) \rangle \\ &= ik_\mu e^{ik \cdot x} \langle N(p_2), \pi(q) | J^\mu(0) | N(p_1) \rangle \end{aligned}$$

由于运动学关系

$$\begin{aligned} s - u &= (p_2 + q)^2 - (p_1 - q)^2 = (p_1 + k)^2 - (p_2 - k)^2 = 4q \cdot P = 4k \cdot P, \\ s + u - 2m_N^2 &= m_\pi^2 + k^2 - t = q^2 + k^2 - (k - q)^2 = 2k \cdot q \end{aligned}$$

规范约束可以改写成以 s, t, u 为变量的方程

$$2k^2 (B_1 + 2B_4) + (s - u) B_2 + 2(s + u - 2m_N^2) B_3 = 0,$$

⁵这样会有规范对称性的约束

⁶虚光子给出 4 个独立的螺旋度

⁷由规范对称性得到一个矩阵方程, 其中正比于单位矩阵 $\mathbf{1}$ 和正比于 \not{k} 的项分别为零, 这里用到了 γ 矩阵的完备性条件

$$4B_5 + (s - u)B_6 + 4k^2 B_7 + 2(s + u - 2m_N^2) B_8 = 0 \quad (3.6)$$

所以我们可以利用规范约束来消去两个标量函数 B_i , 这里最为“经济”的方式是消去 B_3, B_5 , 这样就只会引入最少的运动学奇异性。这里方便起见引入一个张量 $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \epsilon_\mu k_\nu - k_\mu \epsilon_\nu$, 简单代数计算可以将振幅洛伦兹分解写成

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu \sum_{i=1}^8 B_i V_i^\mu &= \gamma_5 \left[\left(\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{2k^\mu q^\nu}{s+u-2m_N^2} \right) B_1 + 4 \frac{P^\mu q^\nu}{s+u-2m_N^2} B_2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{k^\mu q^\nu}{s+u-2m_N^2} B_4 - \gamma^\mu P^\nu B_6 + k^\mu \gamma^\nu B_7 - \gamma^\mu q^\nu B_8 \right] \mathcal{F}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

因而能够直接定义规范不变的洛伦兹结构 M_i (规范不变意味着已经考虑了规范约束) $\epsilon_\mu \sum_{i=1}^8 B_i V_i^\mu = \sum_{i=1}^6 A_i M_i$ ⁸

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \\ M_2 &= 2\gamma_5 P^\mu \left(q - \frac{1}{2} k \right)^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \\ M_3 &= \gamma_5 \gamma^\mu q^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \\ M_4 &= 2\gamma_5 \gamma^\mu P^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} - 2m_N M_1 \\ M_5 &= \gamma_5 k^\mu q^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \\ M_6 &= \gamma_5 k^\mu \gamma^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

展开 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 表达式, 上式也可以写作

$$\begin{aligned} M_1^\mu &= \frac{1}{2} \gamma_5 (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) \\ M_2^\mu &= 2\gamma_5 \left(P^\mu k \cdot \left(q - \frac{1}{2} k \right) - \left(q - \frac{1}{2} k \right)^\mu k \cdot P \right) \\ M_3^\mu &= \gamma_5 (\gamma^\mu k \cdot q - \not{k} q^\mu) \\ M_4^\mu &= 2\gamma_5 (\gamma^\mu k \cdot P - \not{k} P^\mu) - 2m_N M_1^\mu \\ M_5^\mu &= \gamma_5 (k^\mu k \cdot q - k^2 q^\mu) \\ M_6^\mu &= \gamma_5 (k^\mu \not{k} - k^2 \gamma^\mu) \end{aligned}$$

其中每一项都单独满足“规范不变性” $k_\mu M_i^\mu = 0$ 。标量函数 A_i, B_i 可以通过代数运算联系起来 [6, 15, 17]

$$A_1 = B_1 - m_N B_6, \quad A_2 = \frac{2}{m_\pi^2 - t} B_2 \quad (3.7)$$

⁸这里定义 $M_i = \epsilon_\mu M^\mu$

$$A_3 = -B_8, \quad A_4 = -\frac{1}{2}B_6, \quad A_6 = B_7 \quad (3.8)$$

$$A_5 = \frac{2}{s+u-2m_N^2} \left(B_1 - \frac{s-u}{2(m_\pi^2-t)} B_2 + 2B_4 \right) = \frac{1}{k^2} \left(\frac{s-u}{t-m_\pi^2} B_2 - 2B_3 \right) \quad (3.9)$$

(3.10)

最后一个等号来自于规范不变性的要求。这里注意到 A_5 有两个等价的形式，这意味着 $s+u-2m_N^2$ 可能的零点并不会产生物理区域上的矩阵元的运动学奇异性。

2 二分量旋量形式

将振幅写成两分量旋量形式以及泡利矩阵的乘积是有益的。首先这样可以明显地写出多级展开形式，第二这种形式可以直接计算一些固定角动量和宇称的振幅水平的可观测量，在核物理学上有着重要的意义。

基本的想法是在质心系⁹中选取 z 方向为入射（虚）光子的三动量方向，定义

$$\frac{1}{8\pi\sqrt{s}} \bar{u}_2 \sum_{i=1}^6 \bar{u}_2 M_i u_1 = \chi_2^\dagger \mathbf{F} \chi_1 \quad (3.11)$$

这里 χ 代表两分量旋量，矩阵 \mathbf{F} 可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} F_1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}) F_2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} F_3 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} F_4 \\ & + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} F_5 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} F_6 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \epsilon_0 F_7 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \epsilon_0 F_8 \end{aligned} \quad (3.12)$$

上标 \hat{p} 代表一个单位矢量。这 8 个矩阵表示可以利用狄拉克旋量的形式和 γ 矩阵的具体表示（用 $\boldsymbol{\sigma}$ 矩阵写出）直接给出，例如在狄拉克表象下

$$\bar{u}_2 = \sqrt{\frac{E_2 + m_N}{2m_N}} \chi_2^\dagger \left(1, \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}}{E_2 + m_N} \right)$$

这节为了符号方便起见，用 $E_{1,2}$ 来代指初末态核子的质心系的能量。同样的利用规范不变性即把 ϵ_μ 换成 k_μ 后 $F \rightarrow 0$ ，可以得到两个关于 F 约束方程

$$i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} [|\mathbf{k}| F_1 + |\mathbf{k}| \cos \theta F_3 + |\mathbf{k}| F_5 - k_0 F_8] = 0,$$

$$i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} [|\mathbf{k}| \cos \theta F_4 + |\mathbf{k}| F_6 - k_0 F_7] = 0,$$

上式中 $\cos \theta = \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ 。对于这两个独立的约束，我们一般可以消除 F_5, F_6 或者 F_7, F_8 ，这两种方式相当于是选择不同的固定规范方式¹⁰。如果消除 F_7, F_8 ，那么相当于将其他项中的 ϵ 替换成 [7, 16]

$$a_\mu = \epsilon_\mu - \frac{\epsilon_0}{k_0} k_\mu \quad (3.13)$$

⁹简洁起见我们这节忽略质心系运动学量的上标 *

¹⁰这两种消除方式不破坏前 4 项结构主要是为了和光生对比

这种“极化矢量”相当于是消除了 ϵ_μ 的时间分量，只留下了光子的横向和纵向模式，但是这样的选取方式会对于数值计算造成一些虚假的奇异性 [15]。我们这里按照 [6, 17, 18] 的方式消去 F_5, F_6 ，最后的结果可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} F_1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{b}) F_2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{b} F_3 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{b} F_4 \\ & - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} b_0 F_7 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} b_0 F_8 \end{aligned} \quad (3.14)$$

这里

$$b_\mu = \epsilon_\mu - \frac{\epsilon \cdot \hat{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} k_\mu \quad (3.15)$$

这种选取下，“极化矢量”的时间分量 $b_0 \neq 0$ ，但是满足 $\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ ，因而没有纵向分量，虚光子只会有横向和标量分量 (scalar components)¹¹。利用标准的狄拉克旋量以及 γ 矩阵的表示，经过繁琐但是直接的代数运算，我们能够把 A_i 和 F_i 联系起来 [17, 19]

$$\begin{aligned} F_1 &= (\sqrt{s} - m_N) \frac{N_1 N_2}{8\pi\sqrt{s}} \left[A_1 + \frac{k \cdot q}{\sqrt{s} - m_N} A_3 + \left(\sqrt{s} - m_N - \frac{k \cdot q}{\sqrt{s} - m_N} \right) A_4 - \frac{k^2}{\sqrt{s} - m_N} A_6 \right] \\ F_2 &= (\sqrt{s} + m_N) \frac{N_1 N_2}{8\pi\sqrt{s}} \frac{|\mathbf{q}| |\mathbf{k}|}{(E_1 + m_N)(E_2 + m_N)} \left[-A_1 + \frac{k \cdot q}{\sqrt{s} + m_N} A_3 + \left(\sqrt{s} + m_N - \frac{k \cdot q}{\sqrt{s} + m_N} \right) A_4 - \frac{k^2}{\sqrt{s} + m_N} A_6 \right] \\ F_3 &= (\sqrt{s} + m_N) \frac{N_1 N_2}{8\pi\sqrt{s}} \frac{|\mathbf{q}| |\mathbf{k}|}{E_1 + m_N} \left[\frac{m_N^2 - s + \frac{1}{2}k^2}{\sqrt{s} + m_N} A_2 + A_3 - A_4 - \frac{k^2}{\sqrt{s} + m_N} A_5 \right] \\ F_4 &= (\sqrt{s} - m_N) \frac{N_1 N_2}{8\pi\sqrt{s}} \frac{|\mathbf{q}|^2}{E_2 + m_N} \left[\frac{s - m_N^2 - \frac{1}{2}k^2}{\sqrt{s} - m_N} A_2 + A_3 - A_4 + \frac{k^2}{\sqrt{s} - m_N} A_5 \right] \\ F_7 &= \frac{N_1 N_2}{8\pi\sqrt{s}} \frac{|\mathbf{q}|}{E_2 + m_N} \left[(m_N - E_1) A_1 - \left(\frac{|\mathbf{k}|^2}{2k_0} (2k_0\sqrt{s} - 3k \cdot q) - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{2k_0} (2s - 2m_N^2 - k^2) \right) A_2 + (q_0(\sqrt{s} - m_N) \right. \\ &\quad \left. + (k \cdot q - q_0(\sqrt{s} - m_N) + (E_1 - m_N)(\sqrt{s} + m_N)) A_4 + (q_0 k^2 - k_0 k \cdot q) A_5 - (E_1 - m_N)(\sqrt{s} + m_N) \right. \\ F_8 &= \frac{N_1 N_2}{8\pi\sqrt{s}} \frac{|\mathbf{k}|}{E_2 + m_N} \left[(m_N + E_1) A_1 + \left(\frac{|\mathbf{k}|^2}{2k_0} (2k_0\sqrt{s} - 3k \cdot q) - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{2k_0} (2s - 2m_N^2 - k^2) \right) A_2 + (q_0(\sqrt{s} + m_N) \right. \\ &\quad \left. + (k \cdot q - q_0(\sqrt{s} + m_N) + (E_1 + m_N)(\sqrt{s} - m_N)) A_4 + (q_0 k^2 - k_0 k \cdot q) A_5 - (E_1 + m_N)(\sqrt{s} - m_N) \right. \end{aligned} \quad (3.16)$$

这里

$$N_i = \sqrt{E_i + m_N}, \quad E_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_N^2}, \quad i = 1, 2$$

3 多极展开

实验上所有的道都是有着确定的角动量，自旋以及宇称的。因而将振幅投影到确定的态上就至关重要，尤其是理论要匹配实验的时候，这种技术这就是所谓的分波，电生和光生中由于考虑光子比较特殊，常常称为多极展开。电生过程允许的多极振幅如下表所示

¹¹文献上也叫库伦分量

J	j	宇称 $P = (-1)^{l+1}$	多极振幅	标记	l 的最小允许值
$l + 1/2$	$l + 1$	$(-1)^j$	Electric 2^{l+1}	E_{l+}	0
$l - 1/2$	$l - 1$	$(-1)^j$	Electric 2^{l-1}	E_{l-}	2
$l + 1/2$	l	$-(-1)^j$	Magnetic 2^l	M_{l+}	1
$l - 1/2$	l	$-(-1)^j$	Magnetic 2^l	M_{l-}	1
$l + 1/2$	$l + 1$	$(-1)^j$	Scalar 2^{l+1}	S_{l+}	0
$l - 1/2$	$l - 1$	$(-1)^j$	Scalar 2^{l-1}	S_{l-}	1

表 1: 电生的多极振幅标记

可以预见，总共有两种横向的振幅，电 (electric) 和磁 (magnetic) 的，这两种都会出现在光生和电生的振幅中。电生由于虚光子的原因还会多出一种纵向或者叫做标量的多级振幅。下标 l 标记末态 πN 的轨道角动量， \pm 标记总角动量 $J = l \pm 1/2$ ， j 一般记作光子的角动量。表中的宇称 $P = (-1)^{l+1}$ 中 $(-1)^l$ 来自于 πN 系统轨道角动量的影响（球谐函数宇称变换下的性质），多出的 -1 来源于 π 介子是赝标粒子。 2^j 是电动力学中习惯的标记。经过冗长而又技术性的计算可以将 F_i 展开成 [14]

$$F_1 = \sum_{l=0}^{\infty} [(lM_{l+} + E_{l+}) P'_{l+1}(x) + ((l+1)M_{l-} + E_{l-}) P'_{l-1}(x)] \quad (3.17)$$

$$F_2 = \sum_{l=1}^{\infty} [(l+1)M_{l+} + lM_{l-}] P'_l(x) \quad (3.18)$$

$$F_3 = \sum_{l=1}^{\infty} [(E_{l+} - M_{l+}) P''_{l+1}(x) + (E_{l-} + M_{l-}) P''_{l-1}(x)] \quad (3.19)$$

$$F_4 = \sum_{l=2}^{\infty} [M_{l+} - E_{l+} - M_{l-} - E_{l-}] P''_l(x) \quad (3.20)$$

$$F_5 = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)L_{l+}P'_{l+1}(x) - lL_{l-}P'_{l-1}(x)] \quad (3.21)$$

$$F_6 = \sum_{l=1}^{\infty} [lL_{l-} - (l+1)L_{l+}] P'_l(x) \quad (3.22)$$

$$F_7 = \sum_{l=1}^{\infty} [lS_{l-} - (l+1)S_{l+}] P'_l(x) \quad (3.23)$$

$$F_8 = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)S_{l+}P'_{l+1}(x) - lS_{l-}P'_{l-1}(x)] \quad (3.24)$$

$x = \cos \theta = \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = (t - \mu^2 - k^2 + 2q_0k_0)/(2|\mathbf{q}||\mathbf{k}|)$ 是物理区域的散射角， P_l 是勒让德多项式，上标 $'$ 代表对 x 的微分。可以清楚地看出，纵向 (L_l) 和标量 (S_l) 多极振幅通过规范不变性相互联系，由 $k_0 F_7 = |\mathbf{k}| F_6$ 以及 $k_0 F_8 = |\mathbf{k}| F_5$ 可以得到 $L_{l\pm} = (k_0/|\mathbf{k}|) S_{l\pm}$ 。这个结果与我们之前的

讨论一致，也就是说消去 F_5, F_6 与消去 F_7, F_8 在物理上都是等价的，差别只是一个规范选取罢了，实验上习惯用 $L_{l\pm}$ ，下面我们也用这个来讨论，实际上 $L_{l\pm}$ 和 $S_{l\pm}$ 只是差了一个因子。在物理阙 ($q \rightarrow 0$) 以及“赝阙” ($k \rightarrow 0$) 附近由于基本的解析性要求 [3]，多极振幅有如下行为

$$\begin{aligned} E_{l+}, M_{l+}, L_{l+}, M_{l-} &\rightarrow k^l q^l, \\ E_{l-}, L_{l-} &\rightarrow k^{l-2} q^l, \quad L_{1-} \rightarrow kq \end{aligned}$$

在 $k = 0$ 的非物理点上，一个关于纵向模 $L_{l\pm}$ 有意思的比例关系可以通过流守恒的要求得到，这个在最终计算检验中有重要的意义

$$E_{l+}/L_{l+} = 1, \quad E_{l-}/L_{l-} = -l/(l-1)$$

后者要求 $l \geq 2$ 。为了从 F_i 得到多级振幅，我们需要多极展开的逆变换，利用勒让德多项式的递推关系和正交关系

$$\begin{aligned} P'_{2n}(x) &= \sum_{k=1,3,\dots}^{2n+1} (2k+1)P_k(x), \quad P'_{2n+1} = \sum_{k=0,2,\dots}^{2n} (2k+1)P_k(x) \\ \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_m(x) &= \frac{2}{2l+1} \delta_{lm} \end{aligned}$$

可以直接得到

$$E_{l+} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2(l+1)} \left[P_l F_1 - P_{l+1} F_2 + \frac{l}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) F_3 + \frac{l+1}{2l+3} (P_l - P_{l+2}) F_4 \right] \quad (3.25)$$

$$E_{l-} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2l} \left[P_l F_1 - P_{l-1} F_2 - \frac{l+1}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) F_3 + \frac{l}{2l-1} (P_l - P_{l-2}) F_4 \right] \quad (3.26)$$

$$M_{l+} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2(l+1)} \left[P_l F_1 - P_{l+1} F_2 - \frac{1}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) F_3 \right] \quad (3.27)$$

$$M_{l-} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2l} \left[-P_l F_1 + P_{l-1} F_2 + \frac{1}{2l+1} (P_{l-1} - P_{l+1}) F_3 \right] \quad (3.28)$$

$$L_{l+} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2(l+1)} [P_{l+1} F_6 + P_l F_5] \quad (3.29)$$

$$L_{l-} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2l} [P_{l-1} F_6 + P_l F_5] \quad (3.30)$$

下面简要介绍一下多极展开的推导思路以及物理意义，这部分内容比较经典但是现代文献中很难找到比较完整的推导，我们这里给出一些对于多极展开的理解。这里主要参考 [14, 20]。

首先先介绍一下角动量投影算符的一些性质，投影算符可以写做

$$\Lambda_{l+} = \frac{l+1+\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}}{2l+1}, \quad \Lambda_{l-} = \frac{l-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}}{2l+1} \quad (3.31)$$

这里 l 是轨道角动量, σ 是自旋算符, 总角动量算符为 $\mathbf{J} = \frac{1}{2}\sigma + \mathbf{l}$, 容易得到 $\sigma \cdot l = \mathbf{J}^2 - \frac{1}{4}\sigma^2 - \mathbf{L}^2$ 。它们满足如下关系

$$\begin{aligned}\Lambda_{l+} + \Lambda_{l-} &= 1 \\ \Lambda_{l+} \left| l, j = l + \frac{1}{2} \right\rangle &= \left| l, j = l + \frac{1}{2} \right\rangle \\ \Lambda_{l+} \left| l, j = l - \frac{1}{2} \right\rangle &= 0 \\ \Lambda_{l-} \left| l, j = l - \frac{1}{2} \right\rangle &= \left| l, j = l - \frac{1}{2} \right\rangle \\ \Lambda_{l-} \left| l, j = l + \frac{1}{2} \right\rangle &= 0\end{aligned}$$

所以 $\Lambda_{l\pm}$ 相当于是把具有轨道角动量 l 的态中的 $j = l \pm \frac{1}{2}$ 的态分别挑选出来的投影算符。^[21] 中利用角动量表象变换以及繁琐的 $C - G$ 系数关系给出了光生的多极展开一个推导, 但是物理意义并不容易看出。这里我们利用上面介绍的投影算符技术给出一个物理意义比较清晰的导出。简单起见, 这里只考虑光生的情况¹², 电生的思路和光生完全一样但是计算会复杂很多。在光生中允许的多极振幅如下

光子角动量 j	总角动量 J	宇称 $P = -(-1)^L$	π 介子的角动量 L	多极振幅
j	$j + \frac{1}{2}$ ($L - \frac{1}{2}$)	$(-1)^j$	$j + 1$	E_{j+1-}
j	$j - \frac{1}{2}$ ($L + \frac{1}{2}$)	$(-1)^j$	$j - 1$	E_{j-1+}
j	$j + \frac{1}{2}$	$-(-1)^j$	j	M_{j+}
j	$j - \frac{1}{2}$	$-(-1)^j$	j	M_{j-}

表 2: 允许的光生多极振幅

由上可以看出对于磁多极模式 $j = L$, 投影算符可以写作

$$\sum_M \left| j, \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, M \right\rangle \left\langle j, \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, M \right| = \Lambda_{j\pm} \quad (3.32)$$

对于电多极, 我们要求

$$\sum_M \left| j \pm 1, \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, M \right\rangle \left\langle j, \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, M \right| = \sum_M \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \left| j, \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, M \right\rangle \left\langle j, \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, M \right| = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \Lambda_{j\pm} \quad (3.33)$$

上式第二个等号来源于算符 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}}$ 并不会改变总角动量 (与总角动量对易), 但是会将自旋翻转, 因而一定会导致轨道角动量改变 1。根据经典电动力学的理论, 物理的光子场可以被球谐函数展

¹²也就是前四个 F_i

开，线性组合后只有磁和电多极的模式¹³，光子的状态可以分别写作

$$\begin{aligned}\langle j, m | \hat{\mathbf{k}}, \boldsymbol{\epsilon} \rangle_M &\propto -i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{L}_k Y_j^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \\ \langle j, m | \hat{\mathbf{k}}, \boldsymbol{\epsilon} \rangle_E &\propto -\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{L}_k Y_j^{m*}(\hat{\mathbf{k}})\end{aligned}$$

这里 $\mathbf{L}_k = -i\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_k$ ，代表动量空间中的角动量算符¹⁴。下面的逻辑是将振幅先用 $\Lambda_{l\pm}$ 做投影，也就是将一个确定 π 介子轨道角动量的体系分成 $L \pm \frac{1}{2}$ 不同状态。但是这样还不能确定光子的状态，对于光子，我们利用光子对应的不同状态（电和磁）再做一次“投影”，这样就可以完全确定下来体系的完备状态了（可能会差一个整体的归一化因子以及相因子，或许可以通过选取一套统一的标准和 $C-G$ 系数消除？）。将上述表达数学化，就是所谓多极展开¹⁵

$$\mathbf{F} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[[-iM_{l+} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{L}_k - E_{l+1-} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{L}}_k)] \Lambda_{l+} + [-iM_{l-} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{L}_k - E_{l-1+} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{L}}_k)] \Lambda_{l-} \right] P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \quad (3.34)$$

这里 Λ_{\pm} 是针对 π 介子的投影算符。选取一个方便的规范 $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ ，再利用勒让德函数的递推关系和下面的代数关系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{q}} &= -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{q}}) - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{q}}) - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{q}}\end{aligned} \quad (3.35)$$

$$i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{L}_k P_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{q}} P'_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (3.36)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}_q i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{L}_k(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \times (\boldsymbol{\epsilon} \times \hat{\mathbf{k}}) P'_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) + i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{q}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{q}} P''_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (3.37)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{L}_k P_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{q}} P'_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}_q \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{L}_k P_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\epsilon} P'_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{q}} P''_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (3.39)$$

第一个等式直接利用的是 $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$ ，后几个计算比如（其余类似）

$$\begin{aligned}i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{L}_k P_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) &= -i\boldsymbol{\epsilon} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_{\hat{\mathbf{k}}}) P_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = i(-i)(\boldsymbol{\epsilon} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{k}}} P_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \\ &= (\boldsymbol{\epsilon} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{q}} P'_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{q}} P'_l(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}})\end{aligned}$$

这样就能直接导出 (3.18) ~ (3.21)。电生的结果无非多出来两项，计算也是类似的。

4 同位旋结构与物理道的对应

同位旋在低能强作用中是一个非常好的对称性，在光生过程中光子（电磁流）的变换就类似一个同位旋标量加上同位旋矢量的第三分量 [18]

$$J_\mu = J_\mu^S + J_\mu^{V_3} \quad (3.40)$$

¹³一般矢量场还会有纵向多极分量

¹⁴ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{k}$ 同时 $\mathbf{r} = i\nabla_k$

¹⁵下面的推导为了和上面多极展开结果对应将 j 全换成了 l

下面的讨论省略掉洛伦兹指标。我们可以将 $\gamma^* N \rightarrow \pi N$ 过程的振幅 \mathcal{M} 可以按照同位旋结构分解，矢量和标量部分可以分解为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\pi^a) &= \chi_2^\dagger \left(\frac{1}{2} [\tau^a, \tau^3] A^{(-)} + \frac{1}{2} \{\tau^a, \tau^3\} A^{(+)} + \tau^a A^{(0)} \right) \chi_1 \\ &= \chi_2^\dagger (i\epsilon^{ab3} \tau^b A^{(-)} + \delta^{a3} A^{(+)} + \tau^a A^{(0)}) \chi_1, \quad a = 1, 2, 3\end{aligned}\quad (3.41)$$

(±) 代表矢量部分，(0) 代表标量部分。

现在考虑电生过程的同位旋分析，初始强子态同位旋 $I = 1/2$ ，由于末态 π 介子同位旋为 1，末态 πN 系统同位旋可能为 $1/2$ 或者 $3/2$ 。（同位旋）标量光子一定会导致末态同位旋 $I = 1/2$ 的末态，定义为

$$\langle 1/2 | J^S | 1/2 \rangle \equiv A^0 \quad (3.42)$$

A 可以理解成广义的记号，代表 A_i , F_i 或者任何一个极振幅等。对于（同位旋）矢量光子，末态同位旋可以为 $1/2$ 或 $3/2$

$$\begin{aligned}\langle 1/2 | J^{V_3} | 1/2 \rangle &\equiv A^{\frac{1}{2}} \\ \langle 3/2 | J^{V_3} | 1/2 \rangle &\equiv A^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad (3.43)$$

可以定义 $A^{(+)} = (A^{\frac{1}{2}} + 2A^{\frac{3}{2}})/3$ 和 $A^{(-)} = (A^{\frac{1}{2}} - A^{\frac{3}{2}})$ ¹⁶，这就等价于 (3.41) 中同位旋分解中的三个标量函数。定义场 $\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp \pi_2)$ ， $\pi_0 = \pi_3$ ，那么值得注意的是态矢量的定义与场会有一些区别， $|\pi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi_1\rangle \pm |\pi_2\rangle)$ ，中间那个符号的来源是将场写成产生湮灭算符后作用到真空中得出的，非常值得注意的一点是一般的球张量约定会在定义前加一个 \mp 的因子，这个会导致在做 $C - G$ 分解的时候要格外小心并且将这个符号补上去（这相当于 $|\pi^+\rangle = -|1, +1\rangle$ ）。我们看一下如何利用这些函数将物理道的振幅写出来。用 $A(\gamma^* p \rightarrow p\pi^0)$ 作为例子

$$A(\gamma^* p \rightarrow p\pi^0) = \langle p | (A^{(+)} + A^{(0)}\tau_3) | p \rangle = A^{(+)} + A^{(0)}$$

因此四个物理道与三个同位旋振幅的关系可以写成

$$A(\gamma^* p \rightarrow n\pi^+) = \sqrt{2} (A^{(-)} + A^{(0)}) \quad (3.44)$$

$$A(\gamma^* p \rightarrow p\pi^0) = A^{(+)} + A^{(0)} \quad (3.45)$$

$$A(\gamma^* n \rightarrow p\pi^-) = -\sqrt{2} (A^{(-)} - A^{(0)}) \quad (3.46)$$

$$A(\gamma^* n \rightarrow n\pi^0) = A^{(+)} - A^{(0)} \quad (3.47)$$

可以看出只有三个道是独立的。注意到存在电磁相互作用情况下，同位旋可以不守恒，但是改变量最多只能为 1，并且重要的是同位旋第三分量守恒。这样可以将同位旋跃迁振幅用 $A^{(\pm,0)}$ 写出来，先根据 PDG 上的数据表将 πN 各个同位旋态写出来

$$|p\pi^+\rangle = -\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$$

¹⁶ $A^{\frac{1}{2}} = A^{(+)} + 2A^{(-)}$, $A^{\frac{3}{2}} = A^{(+)} - A^{(-)}$

$$\begin{aligned}
|p\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
|n\pi^+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
|p\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
|n\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
|n\pi^-\rangle &= \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle
\end{aligned}$$

各个道的振幅可以写成

$$A(\gamma^* p \rightarrow n\pi^+) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} A_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \right) \quad (3.48)$$

$$A(\gamma^* p \rightarrow p\pi^0) = \sqrt{\frac{2}{3}} A_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

$$A(\gamma^* n \rightarrow p\pi^-) = \frac{1}{\sqrt{3}} A_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} A_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

$$A(\gamma^* n \rightarrow n\pi^0) = \sqrt{\frac{2}{3}} A_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} A_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad (3.51)$$

A^{I, I_3} 表示末态 πN 系统的同位旋状态，初态根据 I_3 可以唯一确定，凡是跟 π^+ 有关的矩阵元都可能会有个负号，来源于物理场和球张量约定差一个 \mp 的因子。这样综合上面的关系，简单的代数运算可以得到

$$A_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = A_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (A^{(+)} - A^{(-)}) \quad (3.52)$$

$$A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} (A^{(+)} + 2A^{(-)} + 3A^{(0)}) \quad (3.53)$$

$$A_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} (A^{(+)} + 2A^{(-)} - 3A^{(0)}) \quad (3.54)$$

5 交叉对称性和电荷共轭不变性

交叉对称性是场论振幅里面最为重要的基本原理之一（其他两个是解析性和幺正性）。利用交叉对称性可以给出过程 $\gamma^* N(p_1) \rightarrow N'(p_2)\pi(q)$ 和过程 $\gamma^* \bar{N}'(-p_2) \rightarrow \bar{N}(-p_1)\pi(q)$ 的振幅之间的关系。由于电生过程在电荷共轭变换下不变，我们可以将后一个过程与 $\gamma^* N'(-p_2) \rightarrow N(-p_1)\bar{\pi}(q)$ 关联起来，上标 \bar{N} 代表反粒子，对于电生过程，这就能得到原始的振幅，只是 s 和 u 交换了一下。利用到电荷共轭操作的性质和 6 个狄拉克结构的变换性质，并且注意到交换两个核子时会

多出一个负号，完整的计算较为繁琐但是思路很清晰，可以参考 [15]，这里直接给出结论

$$\begin{aligned} A_i^{(+,0)}(s, t, u) &= A_i^{(+,0)}(u, t, s), \quad i = 1, 2, 4 \\ A_i^{(+,0)}(s, t, u) &= -A_i^{(+,0)}(u, t, s), \quad i = 3, 5, 6 \\ A_i^{(-)}(s, t, u) &= A_i^{(-)}(u, t, s), \quad i = 3, 5, 6 \\ A_i^{(-)}(s, t, u) &= -A_i^{(-)}(u, t, s), \quad i = 1, 2, 4 \end{aligned} \quad (3.55)$$

6 螺旋度振幅和分波展开

我们这里考虑的过程是 $\gamma^* N \rightarrow \pi N$ ，考虑到虚光子的规范不变性，有 3 个物理极化（没有类时分量），分别对应螺旋度 $\pm 1, 0$ ，需要 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 个螺旋度振幅。再考虑到过程满足宇称 P 不变后，独立的振幅只有 $\mathcal{M}_{+,++}, \mathcal{M}_{+,-+}, \mathcal{M}_{+,0+}, \mathcal{M}_{-,++}, \mathcal{M}_{-,-+}, \mathcal{M}_{-,0+}$ 共 6 个螺旋度振幅。第一个加减号表示出射核子的螺旋度，第二个代表入射光子的螺旋度，第三个表示入射核子。时间反演不会造成更多的限制，这是由于电生不是弹性过程。

计算螺旋度振幅需要一些约定，但不是唯一的，只需要自洽即可。这里我们使用手征表示下的狄拉克旋量和狄拉克矩阵的形式，下面列举一些用到的关系。螺旋度本征矢量定义如下

$$\Sigma \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u_{\pm}(p) = \pm u_{\pm}(p), \quad \Sigma = \gamma_5 \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

手征表示下有

$$u_s(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \bar{\xi}_s \end{bmatrix}, \quad \bar{\sigma} = (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.57)$$

沿着动量 \mathbf{p} 方向运动的螺旋度本征态 $\xi_{\pm}(p)$ 容易得到

$$\xi_+(p) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\phi_p}{2}} \cos \frac{\theta_p}{2} \\ e^{+i\frac{\phi_p}{2}} \sin \frac{\theta_p}{2} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\xi_-(p) = \begin{bmatrix} -e^{-i\frac{\phi_p}{2}} \sin \frac{\theta_p}{2} \\ e^{i\frac{\phi_p}{2}} \cos \frac{\theta_p}{2} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

还需要考虑沿 \mathbf{k} 运动的光子的两个横向极化矢量和一个纵向极化矢量，横向极化定义容易得到

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 0, \cos \theta_k \cos \phi_k, \cos \theta_k \sin \phi_k, -\sin \theta_k \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0, -\sin \phi_k, \cos \phi_k, 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

纵向极化值得注意，我们这里将虚光子当作“有质量的”规范玻色子考虑，但是其四动量平方，也就是质量平方是个负数，但我们仍然可以定义（类空 $k^2 = -Q^2 < 0$ ）**虚光子的纵向极化矢量**

$$\epsilon_3 = \frac{1}{Q} \left[k_z, \sqrt{k_z^2 - Q^2} \sin \theta_k \cos \phi_k, \sqrt{k_z^2 - Q^2} \sin \theta_k \sin \phi_k, \sqrt{k_z^2 - Q^2} \cos \theta_k \right] \quad (3.62)$$

有质量规范粒子的螺旋度极化矢量为

$$\epsilon_{\pm}(k) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1(k) \pm i\epsilon_2(k)), \quad \epsilon_0(k) = \epsilon_3(k) \quad (3.63)$$

将上面的极化态带入 \mathcal{M}_{μ} (也就是 6 个洛伦兹结构中) 就能得到动量表象下的螺旋度振幅。

实验中常用同位旋和角动量来标记不同的道, 这个时候需要我们将动量表象变换到角动量表象, 也就是按照角动量量子数来将振幅展开成分波级数。对于带有自旋的过程的振幅, 还需要考虑自旋指标的影响。

以往的理论做法一般是采用固定一个轴 (一般都是 z 轴), 将自旋投影到这个轴上讨论, 这样的优点是初态可以非常容易描述, 但是缺点也很明显, 那就是描述末态会变得很繁琐, 需要很多转动矩阵来联系各个物理量。

Jacob 和 Wick [22] 最早提出螺旋度振幅的概念, 较为系统的推导细节, 可以参考 [8, 23]。

我们考虑一个一般的 $2 \rightarrow 2$ 过程, 螺旋度振幅的分波展开这里需要采用两粒子的螺旋度本征态, 其定义就是在质心系中直接将两个单粒子的螺旋度本征态做直积。我们推导中采用相对论协变的态矢归一化 (与一般文献中的分波约定不太一样)

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{q}', \lambda'_1, \lambda'_2 | \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = (2\pi)^6 2E_p 2E_q \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} \quad (3.64)$$

$$\langle E_f, J', M', \lambda'_1, \lambda'_2, \mathbf{p}'_c | E_i, J, M, \lambda_1, \lambda_2, \mathbf{p}_c \rangle = \delta(E_f - E_i) \delta^3(\mathbf{p}'_c - \mathbf{p}_c) \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} \quad (3.65)$$

λ 代表螺旋度 (J, M 表象里代表自旋), 上标 $'$ 表示末态, $E_{i,f}$ 是初末态总能量, \mathbf{p}_c 是初末态的质心动量。这里很多量是冗余的 (尤其是在质心系中), 但是这里写出来只是为了计算方便。两个表象之间的转换关系需要用到两个态之间的内积

$$\langle E, J, M, \sigma_1, \sigma_2, \mathbf{p}_c | \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \quad (3.66)$$

$$= N_J(E) R_J \delta(E - P^0) \delta^3(\mathbf{p}_c - \mathbf{P}) \delta_{\lambda_1 \sigma_1} \delta_{\lambda_2 \sigma_2} D_{M\lambda}^J(\phi, \theta, -\phi) \quad (3.67)$$

这里 $R_J = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}$, P_0, \mathbf{P} 都是初态的能量和质心动量, $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, D 是三维转动函数。 $N_J(E)$ 是关于能量和角动量的函数, 依赖于之前的归一化。

利用归一化关系可以推出 $N_J(E)$ 的表达式

$$\begin{aligned} & \langle E_f, J', M', \sigma'_1, \sigma'_2, \mathbf{p}'_c | E_i, J, M, \sigma_1, \sigma_2, \mathbf{p}_c \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 2E_p 2E_q} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \langle E_f, J', M', \sigma'_1, \sigma'_2, \mathbf{p}'_c | \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda_1, \lambda_2 | E_i, J, M, \sigma_1, \sigma_2, \mathbf{p}_c \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 2E_p 2E_q} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} N_{J'}(E_f) R_{J'} \delta(E_f - P_0) \delta^3(\mathbf{p}'_c - \mathbf{P}) \delta_{\lambda_1 \sigma'_1} \delta_{\lambda_2 \sigma'_2} D_{M'\lambda}^{J'}(\phi, \theta, -\phi) \\ & \quad \times N_J^*(E_i) R_J \delta(E_i - P_0) \delta^3(\mathbf{p}_c - \mathbf{P}) \delta_{\lambda_1 \sigma_1} \delta_{\lambda_2 \sigma_2} D_{M\lambda}^{J*}(\phi, \theta, -\phi) \end{aligned}$$

在质心系下 ($\mathbf{p}_c = 0$), 以上积分可以去掉很多冗余项 (原则上只需要少数参数就可以完备地描述), 再利用几个积分变换的关系: $d^3 p d^3 q \rightarrow d^3 p d^3 P; d(\sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}^2}) = dP_0 =$

$\frac{P_0|\mathbf{p}|d|\mathbf{p}|}{\sqrt{m_1^2+\mathbf{p}^2}\sqrt{m_2^2+\mathbf{p}^2}}$, 以及转动函数的正交归一关系 $\int d\Omega(\theta, \phi) D_{M\sigma}^J D_{M'\sigma}^{J'*} = \frac{4\pi}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$ 。简单计算可以得到

$$N_J(E) = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{4E}{|\mathbf{k}|}} \quad (3.68)$$

这里 $|\mathbf{k}|$ 是 E 对应的质心系动量。利用这几个关系, 可以直接得到两个表象下矩阵元之间的关系

$$\begin{aligned} & \overbrace{\langle \mathbf{p}', \mathbf{q}', \lambda'_1, \lambda'_2 | \mathcal{M} | \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle}^{(2\pi)^4 \delta^4(P' - P) \mathcal{M}_{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_1, \lambda_2}^p} \\ &= \int dE_f dE_i d^3 p'_c d^3 p_c \sum_{J, M, \sigma_1, \sigma_2; J', M', \sigma'_1, \sigma'_2} \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}', \lambda'_1, \lambda'_2 | E_f, J', M', \sigma'_1, \sigma'_2, \mathbf{p}'_c \rangle \\ & \times \underbrace{\langle E_f, J', M', \sigma'_1, \sigma'_2, \mathbf{p}'_c | \mathcal{M} | E_i, J, M, \sigma_1, \sigma_2, \mathbf{p}_c \rangle}_{(2\pi)^4 \delta(E_f - E_i) \delta^3(\mathbf{p}_c - \mathbf{p}'_c) \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \mathcal{M}_{M; \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma_1, \sigma_2}^J} \langle E_i, J, M, \sigma_1, \sigma_2, \mathbf{p}_c | \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \end{aligned}$$

最后得到

$$\mathcal{M}_{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_1, \lambda_2}^p = \sum_{J, M} R_J^2 N_J(E_f) N_J(E_i) D_{M\lambda'}^{J*}(\phi', \theta', -\phi') D_{M,\lambda}^J(\phi, \theta, -\phi) \mathcal{M}_{M_i, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_1, \lambda_2}^J \quad (3.69)$$

入射时我们选取沿着 z 轴的对撞 ($\theta = \phi = 0$), 为了简洁起见, 下面我们把出射时的角度上标 $'$ 拿掉, 希望不会产生混淆。利用转动函数的正交关系, 可以写出分波展开

$$\mathcal{M}_{\lambda; \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_1, \lambda_2}^J = \frac{1}{4(2\pi)^6} \sqrt{\frac{k_i k_f}{E_i E_f}} \int d\Omega \mathcal{M}_{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_1, \lambda_2}^p D_{\lambda\lambda'}^J(\phi, \theta, -\phi) \quad (3.70)$$

无论是分波还是讨论之后的宇称变换, 由于我们关心的是散射振幅, 这在场论中并不是一个可观测量 (微分截面才是可观测量)。因而关于态的相位选取就尤为重要, 自洽的选取是问题的关键。这里我们关心的大都是有质量的粒子构成的两粒子螺旋度态, 因而自然的方式就是先考虑只沿着 z 轴正反方向运动的情况, 再做一个整体的转动到任意方向, 这个转动的相位约定与 [22] 一致

$$|p, \theta, \phi, \lambda_1, \lambda_2\rangle = R_{\phi, \theta, -\phi} |p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2\rangle \quad (3.71)$$

初态固定在 z 轴, 末态任意的情况下, 螺旋度振幅可以将关于 ϕ 方位角的信息提取出来, 这里只用到 S 矩阵的空间转动不变性 (转动算符和 S 矩阵相互对易)

$$\begin{aligned} & \langle p', \theta, \phi, \lambda'_1, \lambda'_2 | i\mathcal{M} | p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \\ &= \langle p', 0, 0, \lambda'_1, \lambda'_2 | e^{-iJ_z\phi} e^{iJ_y\theta} e^{iJ_z\phi} i\mathcal{M} | p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \\ &= e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)\phi} \langle p', 0, 0, \lambda'_1, \lambda'_2 | e^{-iJ_z\phi} e^{iJ_y\theta} i\mathcal{M}_I | p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$= e^{i(\lambda-\lambda')\phi} \langle p', \theta, 0, \lambda_1, \lambda_2 | i\mathcal{M} | p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2 \rangle, \quad \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$$

利用这个关系，可以简化分波展开

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda; \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_1, \lambda_2}^J &= \frac{1}{4(2\pi)^6} \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_f|}{E_i E_f}} \int d\Omega \mathcal{M}_{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_1, \lambda_2}^p(\theta, \phi) D_{\lambda, \lambda'}^J(\phi, \theta, -\phi) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^6} \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_f|}{E_i E_f}} \int d\Omega e^{i(\lambda-\lambda')\phi} \mathcal{M}_{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_1, \lambda_2}^p(\theta, 0) e^{i(\lambda'-\lambda)\phi} d_{\lambda, \lambda'}^J(\theta) \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^5} \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_f|}{E_i E_f}} \int d\cos\theta \mathcal{M}_{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_1, \lambda_2}^p(\theta, 0) d_{\lambda, \lambda'}^J(\theta) \end{aligned} \quad (3.73)$$

这个形式与一般文献里的有自旋情况下的分波展开是等价的。我们这里用到的定义大概是 $S = 1 + i(2\pi)^4 \mathcal{M}$ ，而一般讨论实解析性比较方便的形式是 $S = 1 + 2i\rho T$ ， $\rho = 2|\mathbf{k}|/\sqrt{s}$ 叫做运动学因子或者相空间因子¹⁷。这样我们也可以直接写出关于 T 的分波公式

$$T_H^J(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 T_H(s, t(s, z_s)) d_{J_z, J'_z}^J(z_s) dz_s \quad (3.74)$$

下标 H 代表螺旋度状态。这就是标准的分波分析的公式。

4 手征微扰理论

这里只做最简要的介绍，并且主要关注在电生上的应用，本节主要参考 [5]。

一个重要的事实是到目前为止，一个完全基于微扰 QCD 的对于 π 的电磁产生的理论计算还没有被提出。然而，由于手征对称性自发破缺和夸克质量的显式破缺等因素，我们可以用有效场论来分析，这就是所谓的 ChPT。出发点是考虑一个 QCD 的整体对称性 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ ¹⁸（也就是两味 u , d 的手征对称性），在 QCD 基态自发破缺到了 $SU(2)_V \times U(1)_V$ 。ChPT 的目的是构建描述包括 Goldstone 玻色子的动力学的最一般理论。它首先被发展用来描述最轻的赝标量 π 介子的散射理论。 π 在 ChPT 中一般是通过以下么模么正 (2×2) 矩阵来描述

$$U(x) = \exp \left(i \frac{\Phi(x)}{F} \right), \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^3 \tau_i \phi_i(x) = \begin{pmatrix} \pi^0(x) & \sqrt{2}\pi^+(x) \\ \sqrt{2}\pi^-(x) & -\pi^0(x) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

这里 F 代表 π 在手征极限下的衰变常数： $F_\pi = F[1 + \mathcal{O}(\hat{m})] = 92.2 \text{ MeV}$, $\hat{m} = m_u = m_d$ 后一个定义称作轻夸克的同位旋极限。最一般的有效拉氏量可以利用 U 、协变导数以及外源场构造，只要所有的对称性能够得到满足。引入外源场可以允许我们系统地将夸克质量产生的显式破缺考虑进来，这样的一个后果是导致拉氏量会有无穷多项，以及无穷多低能耦合常数 (low-energy constant, LEC)。

¹⁷值得注意的是这是弹性道的定义，非弹性道需要多道 S 矩阵的形式 $S = 1 + 2i\rho^{\frac{1}{2}} T \rho^{\frac{1}{2}}$ ，这里的量都是矩阵

¹⁸ $U(1)_A$ 由于存在反常这里不考虑

完整的介子拉氏量可以形式上写作

$$\mathcal{L}_\pi = \mathcal{L}_\pi^{(2)} + \mathcal{L}_\pi^{(4)} + \dots, \quad (4.2)$$

其中上标表示拉氏量的手性阶数 (导数数目)。物理观测量是用介子质量和外动量的阶数微扰地来计算的。人工方式暂时不可能算到无穷阶, 所以 Weinberg 最早提出上述幂次计数规则 (power counting scheme)。考虑利用 (4.2) 生成出的任意费曼图, 然后重标度一下外动量, $p_i \mapsto tp_i$, 夸克质量同样地变换 $m_q \mapsto t^2 m_q$ ¹⁹, 振幅会变成:

$$\mathcal{M}(tp_i, t^2 m_q) = t^D \mathcal{M}(p_i, m_q) \quad (4.3)$$

费曼图 (振幅) 的手征阶数 D 描述了图的重要性, 低能下可以忽略高阶贡献。一般地, 一个图叫做 $\mathcal{O}(p^D)$, p 是指外 (小) 动量或者 π 的质量, 小是指对于手征标度大概 1GeV 。在 n 维

$$D = 2 + (n - 2)N_L + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k - 1)N_{2k}^\pi \geq 2, \quad (4.4)$$

后一个大于等于号在 4 维成立。 N_L 是独立的圈数, N_{2k}^π 是来自 $\mathcal{L}_\pi^{(2k)}$ 的顶点数。

最低阶的拉氏量可以写作

$$\mathcal{L}_\pi^{(2)} = \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \right] + \frac{F^2}{4} \text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \quad (4.5)$$

协变导数 $D_\mu U = \partial_\mu U - ir_\mu U + iUl_\mu$ 包括了与外源场 r_μ, l_μ 的耦合。和电磁场的耦合可以利用 $r_\mu = l_\mu = -e\tau_3 A_\mu/2$ 放进来。 $\chi = 2B(s + ip)$ 包括了夸克质量 $\chi = 2B\hat{m} = M^2$, M 是 π 介子领头阶质量, 在手征极限中, B 与夸克凝聚 $\langle\bar{q}q\rangle$ 有关。

$\mathcal{O}(p^4)$ 的拉氏量文献中早已给出, 光生中用到的是

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\pi^{(4)} = & \frac{l_3 + l_4}{16} [\text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)]^2 + \frac{l_4}{8} \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \right] \text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \\ & + i \frac{l_6}{2} \text{Tr} \left[f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger D^\nu U \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$f_{\mu\nu}^R = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \quad f_{\mu\nu}^L = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu] \quad (4.7)$$

l_i 用到的是 LEC。在手征中, 一个系统的重整化的思路是将低阶拉氏量生成的费曼图产生的发散吸收到高阶拉氏量中的 LEC 中去, 简而言之就是圈图 (由低阶拉氏量生成) 发散吸收到同阶的树图 (由高阶拉氏量生成) 中去, 重新定义高阶 LEC 的过程就是手征中的重整化。

除了介子的拉氏量, 还需要考虑 πN 的相互作用拉氏量, 在电生中只考虑同位旋 $SU(2)$ 对称性, 令

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

¹⁹源于 $m_\pi^2 \mapsto t^2 m_\pi^2$ 和 Gell-mann-Okubo 关系 $m_\pi^2 \propto \hat{m}$

代表两个四分量狄拉克场的核子场 (p 和 n)。最低阶的拉氏量

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = \bar{\Psi} \left(i \not{D} - m_N + \frac{g_A}{2} \gamma^\mu \gamma_5 u_\mu \right) \Psi \quad (4.8)$$

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + \Gamma_\mu - i v_\mu^{(s)}) \Psi \quad (4.9)$$

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} [u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u + u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger] \quad (4.10)$$

$$u_\mu = i [u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u - u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger] \quad (4.11)$$

$$u = \sqrt{U}, \quad v_\mu^{(s)} = -e A_\mu / 2 \quad (4.12)$$

低能常数 g_A 代表手征极限下的轴矢量耦合常数。高阶的拉氏量过于复杂，这里暂时不提。

5 树图振幅计算

电生过程的树图与光生类似，具体的阶数分析与构造可以参考马垚师兄的笔记，这里不仅给出最后的结果，具体计算过程也详细写出。

1 $\mathcal{O}(p)$ 阶结果

这里需要考虑 $\mathcal{O}(p)$ 阶 πN 的拉氏量 (4.8)，电磁相互作用里，有 $r_\mu = l_\mu = -eA_\mu \frac{\tau_3}{2}$, $v_\mu^{(s)} = -\frac{e}{2}a_\mu$ ，那么得到

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} = i\bar{\Psi} \left\{ \frac{\gamma_\mu}{2} \left[u^\dagger \left(\partial_\mu + ieA_\mu \frac{\tau_3}{2} \right) u + u \left(\partial_\mu + ieA_\mu \frac{\tau_3}{2} \right) u^\dagger \right] + i\frac{e}{2}A_\mu \gamma^\mu \right\} \quad (5.1)$$

这里需要 πNN , γNN , $\pi\gamma NN$ 以及 $\mathcal{L}_\pi^{(2)}$ 中的 $\gamma\pi\pi$ 这四种顶角，由于是树图，只需要最低阶也就是单 π 相互作用，这样可以把联络等展开到最低阶

$$u_\mu \simeq i \left(\frac{i\partial_\mu \Phi}{F} + ieA_\mu \left[\frac{\tau_3}{2}, \frac{i\Phi}{F} \right] \right) \quad (5.2)$$

$$D_\mu \simeq \partial_\mu + ieA_\mu \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_3}{2} \right) \quad (5.3)$$

最后得到相互作用拉氏量

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{(1)} = \frac{g_A}{2F} \partial_\mu \phi \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma^\mu \Psi \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L}_{\gamma NN}^{(1)} = -\frac{e}{2} A_\mu \bar{\Psi} (\gamma^\mu (\tau_3 + 1)) \Psi \quad (5.5)$$

$$\mathcal{L}_{\gamma\pi NN}^{(1)} = -i \frac{eg_A}{4F} A_\mu \bar{\Psi} (\gamma_5 \gamma^\mu [\phi, \tau_3]) \Psi \quad (5.6)$$

$$\mathcal{L}_{\gamma\pi\pi}^{(2)} = -\frac{ie}{8} A^\mu \text{Tr} (\{\partial_\mu \phi, [\phi, \tau_3]\}) \quad (5.7)$$

相应的费曼规则可以导出

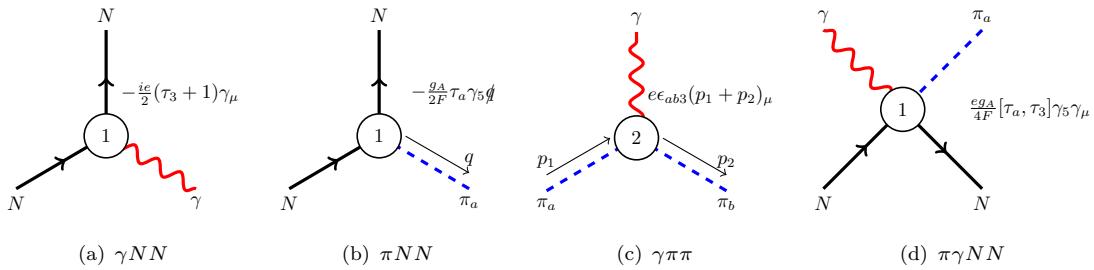
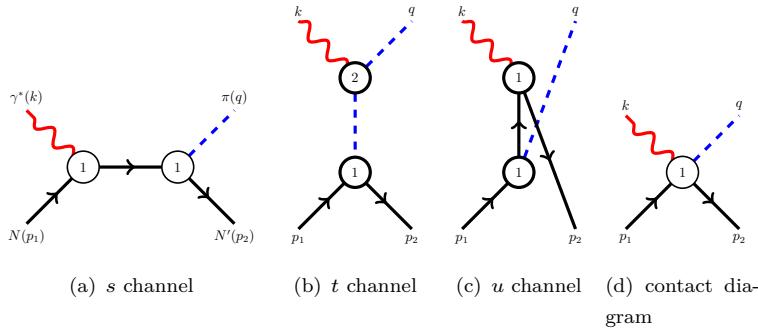


图 1: $\mathcal{O}(p)$ 阶结果用到的费曼规则

下面讨论的都是 $\mathcal{O}(p)$ 阶的结果，不引起误会的情况下忽略上标 (1)。根据费曼图，振幅可以分别写成 s, t, u 道以及接触项的贡献之和

图 2: $\mathcal{O}(p)$ 阶费曼图

下面先计算 s 道的

$$i\mathcal{M}_s = \frac{ieg_A}{4F} \chi_2^\dagger \tau_a (\tau_3 + 1) \chi_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m_N} \gamma^\mu u(p_1) q_\nu \epsilon_\mu(k) \quad (5.8)$$

同位旋结构可以做如下分解得到

$$\chi_2^\dagger \tau_a (\tau_3 + 1) \chi_1 = \chi_2^\dagger \left(\frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] + \frac{1}{2} \{\tau_a, \tau_3\} + \tau_a \right) \chi_1 \quad (5.9)$$

狄拉克结构可以通过简单的计算分离出来

$$\bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{q} \frac{\not{p}_1 + \not{k} + m_N}{(p_1 + k)^2 - m_N^2} \gamma^\mu u(p_1) = \frac{1}{s - m_N^2} \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{q} (\not{p}_1 + \not{k} + m_N) \gamma^\mu u(p_1) \quad (5.10)$$

在化简狄拉克结构之前先介绍一下化简的思路。根据第三节对于洛伦兹结构的分析，振幅 \mathcal{M}^μ 有八个基本结构 (3.4)，但是由于规范对称性最后只有六个独立，他们之间可以通过代数关系联系起来。化简的思路是用八个基本的基底展开狄拉克结构，得到 B_i 函数，再通过代数关系得到 A_i ，另外还可以通过投影算符的方式来达到相同效果 [24, 25]。下面化简主要利用到了各个动量之间的关系，狄拉克方程以及 γ 矩阵的基本反对易关系，所有的关系之前均有提及，这里方便起见列举如下

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad p_1 + k = p_2 + q, \quad q = k - 2P + 2p_1 = k + 2P - 2p_2 \\ s &= (p_1 + k)^2 = (p_2 + q)^2, \quad t = (k - q)^2 = (p_1 - p_2)^2, \quad u = (k - p_2)^2 = (p_1 - q)^2 \\ s + t + u &= 2m_N^2 + m_\pi^2 + k^2, \quad (\not{p} - m_N)u(p) = \bar{u}(p)(\not{p} - m_N) = 0 \end{aligned}$$

化简过程中始终遵循两个基本的方式，其一是对于直接出现的各类“裸”动量（不与 γ 矩阵缩并的）都用独立的 P, k, q 三者来表示，其二是与 γ 矩阵缩并的动量，可以用独立的 $\not{p}_{1,2}, \not{k}$ 来表示，其中 $\not{p}_{1,2}$ 可以利用狄拉克矩阵的反对易关系以及狄拉克方程约化掉，最后只出现 \not{k} 这一个基本结构。按照这种思路，任何复杂的结构都可以化简成八个基本结构 (3.4)。

狄拉克结构为 $\bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{q} (\not{p}_1 + \not{k} + m_N) \gamma^\mu u(p_1)$ ，下面按照上面的方针化简

$$\bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{q} (\not{p}_1 + \not{k} + m_N) \gamma^\mu u(p_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(p_2) \gamma_5 (2\cancel{P} + \cancel{k} - 2\cancel{p}_2) (\cancel{p}_1 + \cancel{k} + m_N) \gamma^\mu u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2) \gamma_5 (2\cancel{P} + \cancel{k} + 2m_N) (2p_1^\mu - \gamma^\mu \cancel{p}_1 + \cancel{k}\gamma^\mu + m_N \gamma^\mu) u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2) \gamma_5 (2\cancel{P} + \cancel{k} + 2m_N) (2P^\mu + q^\mu - k^\mu + \cancel{k}\gamma^\mu) u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2) \gamma_5 (4P^\mu \cancel{P} + 2q^\mu \cancel{P} - 2k^\mu \cancel{P} + 2\cancel{P}\cancel{k}\gamma^\mu + 2P^\mu \cancel{k} + q^\mu \cancel{k} \\
&\quad - k^\mu \cancel{k} + k^2 \gamma^\mu + 4m_N P^\mu + 2m_N q^\mu - 2m_N k^\mu + 2m_N \cancel{k}\gamma^\mu) u(p_1)
\end{aligned}$$

其中出现的一个略微复杂的结构是 $\bar{u}\gamma_5(p_2)2\cancel{P}\cancel{k}\gamma^\mu u(p_1)$, 需要进一步化简, 下面利用一个重要的简化结果来得到它

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(p_2)\gamma_5 p_1 \cancel{k}\gamma^\mu u(p_1) = \bar{u}(p_2)\gamma_5 (2k \cdot p_1 - \cancel{k}\cancel{p}_1) \gamma^\mu u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5 (s - k^2 - m_N^2) \gamma^\mu u(p_1) - \bar{u}(p_2)\gamma_5 \cancel{k}\cancel{p}_1 \gamma^\mu u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5 (s - k^2 - m_N^2) \gamma^\mu u(p_1) - \bar{u}(p_2)\gamma_5 \cancel{k} (2p_1^\mu - \gamma^\mu \cancel{p}_1) u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5 (s - k^2 - m_N^2) \gamma^\mu u(p_1) + \bar{u}(p_2)\gamma_5 \cancel{k} (m_N \gamma^\mu + k^\mu - q^\mu - 2P^\mu) u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5 (s - k^2 - m_N^2) \gamma^\mu u(p_1) + \bar{u}(p_2)\gamma_5 (m_N (2k^\mu - \gamma^\mu \cancel{k}) + k^\mu \cancel{k} - q^\mu \cancel{k} - 2P^\mu \cancel{k}) u(p_1) \quad (5.11)
\end{aligned}$$

利用 (5.11) 可以得到

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(p_2)\gamma_5 2\cancel{P}\cancel{k}\gamma^\mu u(p_1) = \bar{u}(p_2)\gamma_5 (\cancel{p}_1 + \cancel{p}_2) \cancel{k}\gamma^\mu u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5 (-m_N) (2k^\mu - \gamma^\mu \cancel{k}) u(p_1) + \bar{u}(p_2)\gamma_5 \cancel{p}_1 \cancel{k}\gamma^\mu u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5 ((s - k^2 - m_N^2) \gamma^\mu + k^\mu \cancel{k} - q^\mu \cancel{k} - 2P^\mu \cancel{k}) u(p_1) \quad (5.12)
\end{aligned}$$

经过整理可以得到 s 道狄拉克结构

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(p_2)\gamma_5 \cancel{q}(\cancel{p}_1 + \cancel{k} + m_N) \gamma^\mu u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5 ((s - m_N^2) \gamma^\mu + 4m_N P^\mu + 2m_N q^\mu + 2m_N k^\mu - 2m_N \gamma^\mu \cancel{k}) u(p_1) \quad (5.13)
\end{aligned}$$

u 道

$$i\mathcal{M}_u = \frac{ieg_A}{4F} \chi_2^\dagger (\tau_3 + 1) \tau_a \chi_1 \bar{u}(p_2) \gamma^\mu \frac{i}{\cancel{p}_2 - \cancel{k} - m_N} \gamma_5 \gamma^\nu u(p_1) q_\nu \epsilon_\mu(k) \quad (5.14)$$

同位旋结构

$$\chi_2^\dagger (\tau_3 + 1) \tau_a \chi_1 = \chi_2^\dagger \left(-\frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] + \frac{1}{2} \{\tau_a, \tau_3\} + \tau_a \right) \chi_1 \quad (5.15)$$

狄拉克结构分离如下

$$\bar{u}(p_2) \gamma^\mu \frac{\cancel{p}_2 - \cancel{k} + m_N}{(p_2 - k)^2 - m_N^2} \gamma_5 \cancel{q} u(p_1) = \frac{1}{u - m_N^2} \bar{u}(p_2) \gamma_5 \gamma^\mu (\cancel{p}_2 - \cancel{k} - m_N) \cancel{q} u(p_1) \quad (5.16)$$

计算类似

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu(\not{p}_2 - \not{k} - m_N)qu(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5(2p_2^\mu - \not{p}_2\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{k} - m_N\gamma^\mu)(2\not{p}_1 + \not{k} - 2\not{P})u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5(k^\mu + 2P^\mu - q^\mu - \gamma^\mu\not{k})(2m_N + \not{k} - 2\not{P})u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5(2m_Nk^\mu + 4m_NP^\mu - 2m_Nq^\mu - 2m_N\gamma^\mu\not{k} + k^\mu\not{k} + 2P^\mu\not{k} \\
&\quad - q^\mu\not{k} - \gamma^\mu k^2 - 2k^\mu\not{P} - 4P^\mu\not{P} + 2q^\mu\not{P} + 2\gamma^\mu\not{k}\not{P})u(p_1)
\end{aligned}$$

利用一个关系

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu\not{k}\not{p}_2u(p_1) = \bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu(2k \cdot p_2 - \not{p}_2\not{k})u(p_1) \\
&= (k^2 + m_N^2 - u)\bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu u(p_1) - \bar{u}(p_2)\gamma_5(2p_2^\mu - \not{p}_2\gamma^\mu)\not{k}u(p_1) \\
&= (k^2 + m_N^2 - u)\bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu u(p_1) + \bar{u}(p_2)\gamma_5(-k^\mu - 2P^\mu + q^\mu - m_N\gamma^\mu)\not{k}u(p_1) \tag{5.17}
\end{aligned}$$

可以计算

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p_2)\gamma_52\gamma^\mu\not{k}\not{P}u(p_1) = \bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu\not{k}\not{p}_2u(p_1) + m_N\bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu\not{k}u(p_1) \\
&= (k^2 + m_N^2 - u)\bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu u(p_1) + \bar{u}(p_2)\gamma_5(-k^\mu - 2P^\mu + q^\mu)\not{k}u(p_1) \tag{5.18}
\end{aligned}$$

利用上面的结果得到 u 道的狄拉克结构

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma^\mu(\not{p}_2 - \not{k} - m_N)qu(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)\gamma_5(-2m_N\gamma^\mu\not{k} + 4m_NP^\mu - 2m_Nq^\mu + 2m_Nk^\mu - (u - m_N^2)\gamma^\mu)u(p_1) \tag{5.19}
\end{aligned}$$

t 道的结果更加简单，振幅

$$i\mathcal{M}_t = i\frac{eg_A}{4F}\chi_2^\dagger[\tau_a, \tau_3]\chi_1\bar{u}(p_2)\gamma_5\gamma_5\left(-q^\mu\frac{i(p_2 - p_1)_\nu}{(p_2 - p_1)^2 - m_\pi^2} + (p_2 - p_1)_\mu\frac{i(p_2 - p_1)_\nu}{(p_2 - p_1)^2 - m_\pi^2}\right)u(p_1) \tag{5.20}$$

同位旋结构是明确的，狄拉克结构可以分成两块

$$\begin{aligned}
& -q^\mu\bar{u}(p_2)\gamma_5(\not{p}_2 - \not{p}_1)u(p_1)\frac{1}{t - m_\pi^2} \\
&= \frac{m_N}{t - m_\pi^2}\bar{u}(p_2)\gamma_52q^\mu u(p_1)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
& (p_2 - p_1)^\mu\bar{u}(p_2)\gamma_5(\not{p}_2 - \not{p}_1)u(p_1)\frac{1}{t - m_\pi^2} \\
&= \frac{m_N}{t - m_\pi^2}\bar{u}(p_2)\gamma_52(q^\mu - k^\mu)u(p_1)
\end{aligned}$$

最后还有一项接触项

$$i\mathcal{M}_c = \frac{eg_A}{4F} \chi_2^\dagger [\tau_a, \tau_3] \chi_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 \gamma^\mu u(p_1) \epsilon_\mu(k) \quad (5.21)$$

综合上述可以得到 $\mathcal{O}(p)$ 阶的总结果

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s &= i \frac{eg_A}{4F} \chi_2^\dagger \left(\frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] + \frac{1}{2} \{\tau_a, \tau_3\} + \tau_a \right) \chi_1 \\ &\times \frac{1}{s - m_N^2} \bar{u}(p_2) \gamma_5 (-2m_N \gamma^\mu \not{k} + 2m_N 2P^\mu + m_N 2q^\mu + m_N 2k^\mu + (s - m_N^2) \gamma^\mu) u(p_1) \epsilon_\mu(k) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_u &= i \frac{eg_A}{4F} \chi_2^\dagger \left(-\frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] + \frac{1}{2} \{\tau_a, \tau_3\} + \tau_a \right) \chi_1 \\ &\times \frac{1}{u - m_N^2} \bar{u}(p_2) (-2m_N \gamma^\mu \not{k} + 2m_N 2P^\mu - m_N 2q^\mu + m_N 2k^\mu - (u - m_N^2) \gamma^\mu) u(p_1) \epsilon_\mu(k) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\mathcal{M}_c = -i \frac{eg_A}{4F} \chi_2^\dagger \frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] \chi_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 2\gamma^\mu u(p_1) \epsilon_\mu(k) \quad (5.24)$$

$$\mathcal{M}_t = i \frac{eg_A}{4F} \chi_2^\dagger \frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] \chi_1 \frac{2m_N}{t - m_\pi^2} \bar{u}(p_2) \gamma_5 (4q^\mu - 2k^\mu) u(p_1) \epsilon_\mu(k) \quad (5.25)$$

比较系数可以直接读出 $B_i (i = 1 \cdots 8)$, 这里首先看 $B^{(-)}, A^{(-)}$

$$B_1^{(-)} = i \frac{eg_A m_N}{4F} \left(-\frac{2}{s - m_N^2} + \frac{2}{u - m_N^2} \right) \quad (5.26)$$

$$B_2^{(-)} = i \frac{eg_A m_N}{4F} \left(\frac{2}{s - m_N^2} - \frac{2}{u - m_N^2} \right) \quad (5.27)$$

$$B_3^{(-)} = i \frac{eg_A m_N}{4F} \left(\frac{1}{s - m_N^2} + \frac{1}{u - m_N^2} + \frac{4}{t - m_\pi^2} \right) \quad (5.28)$$

$$B_4^{(-)} = i \frac{eg_A m_N}{4F} \left(\frac{1}{s - m_N^2} - \frac{1}{u - m_N^2} - \frac{2}{t - m_\pi^2} \right) \quad (5.29)$$

$$B_5^{(-)} = B_6^{(-)} = B_7^{(-)} = B_8^{(-)} = 0 \quad (5.30)$$

利用 (3.7), $A_i (i = 1 \cdots 6)$ 也能得到

$$A_1^{(-)} = B_1^{(-)} - m_N B_6^{(-)} = \frac{-ieg_A m_N}{2F} \left(\frac{1}{s - m_N^2} - \frac{1}{u - m_N^2} \right) \quad (5.31)$$

$$A_2^{(-)} = \frac{2}{m_\pi^2 - t} B_2^{(-)} = \frac{-ieg_A m_N}{F(t - m_\pi^2)} \left(\frac{1}{s - m_N^2} - \frac{1}{u - m_N^2} \right) \quad (5.32)$$

$$A_3^{(-)} = -B_8^{(-)} = 0, \quad A_4^{(-)} = -\frac{1}{2} B_6^{(-)} = 0 \quad (5.33)$$

$$A_5^{(-)} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{s - u}{t - m_\pi^2} B_2^{(-)} - 2B_3^{(-)} \right)$$

$$= \frac{ieg_A m_N}{2F} \frac{1}{k^2} \left(\frac{s-u}{t-m_\pi^2} \left(\frac{1}{s-m_N^2} - \frac{1}{u-m_N^2} \right) - \left(\frac{1}{s-m_N^2} + \frac{1}{u-m_N^2} \right) - \frac{4}{t-m_\pi^2} \right) \quad (5.34)$$

$$A_6^{(-)} = B_7^{(-)} = 0 \quad (5.35)$$

这些结果的自洽性都可以用规范不变性 (3.6) 以及交叉不变性 (3.55) 来检验。可以验证都是满足的。容易看出 $A^{(0,+)}$ 都是一样的，下面只给出 $B^{(0)}, A^{(0)}$ 的形式。

$$B_1^{(0)} = i \frac{eg_A m_N}{4F} \left(-\frac{2}{s-m_N^2} - \frac{2}{u-m_N^2} \right) \quad (5.36)$$

$$B_2^{(0)} = i \frac{eg_A m_N}{4F} \left(\frac{2}{s-m_N^2} + \frac{2}{u-m_N^2} \right) \quad (5.37)$$

$$B_3^{(0)} = i \frac{eg_A m_N}{4F} \left(\frac{1}{s-m_N^2} - \frac{1}{u-m_N^2} \right) \quad (5.38)$$

$$B_4^{(0)} = i \frac{eg_A m_N}{4F} \left(\frac{1}{s-m_N^2} + \frac{1}{u-m_N^2} \right) \quad (5.39)$$

$$B_5^{(0)} = B_6^{(0)} = B_7^{(0)} = B_8^{(0)} = 0 \quad (5.40)$$

同时得到

$$A_1^{(0)} = \frac{-ieg_A m_N}{2F} \left(\frac{1}{s-m_N^2} + \frac{1}{u-m_N^2} \right) \quad (5.41)$$

$$A_2^{(0)} = \frac{-ieg_A m_N}{F(t-m_\pi^2)} \left(\frac{1}{s-m_N^2} + \frac{1}{u-m_N^2} \right) \quad (5.42)$$

$$A_3^{(0)} = 0, \quad A_4^{(0)} = 0 \quad (5.43)$$

$$A_5^{(0)} = -\frac{ieg_A m_N}{2F} \frac{1}{t-m_\pi^2} \left(\frac{1}{s-m_N^2} - \frac{1}{u-m_N^2} \right) \quad (5.44)$$

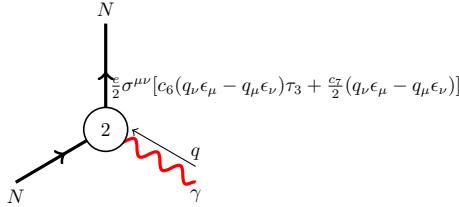
$$A_6^{(0)} = 0 \quad (5.45)$$

2 $\mathcal{O}(p^2)$ 阶结果

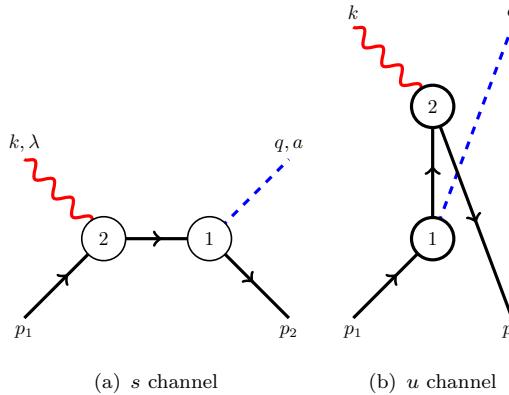
这里采用的拉氏量形式与 Scherer [5] 一致。这里电生中用到的只有正比于 c_6, c_7 的两项，唯像上就是所谓的磁矩项。

$$\mathcal{L}_{\gamma NN}^{(2)} = -\frac{e}{2} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \left[c_6 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tau_3 + \frac{c_7}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right] \Psi \quad (5.46)$$

需要用到的二阶顶角为

图 3: $\mathcal{O}(p^2)$ 阶 γNN 顶角

费曼图只有 s 道和 u 道的，下面方便起见略去上标 (2)

图 4: $\mathcal{O}(p^2)$ 费曼图

s 道振幅可以写出

$$i\mathcal{M}_s^{(2)} = \frac{-eg_A}{4F} \chi_2^\dagger \tau_a \left[c_6 (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \tau_3 + \frac{c_7}{2} (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \right] \chi_1 \quad (5.47)$$

$$\times \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{q} \frac{i}{(\not{k} + \not{p}_1) - m_N} \sigma^{\mu\nu} u(p_1) \quad (5.48)$$

这里先考虑同位旋结构

$$\begin{aligned} & \chi_2^\dagger \tau_a \left[c_6 (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \tau_3 + \frac{c_7}{2} (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \right] \chi_1 \\ &= \chi_2^\dagger c_6 (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \left(\frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] + \frac{1}{2} \{ \tau_a, \tau_3 \} \right) \chi_1 + \chi_2^\dagger \frac{c_7}{2} (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \tau_a \chi_1 \end{aligned} \quad (5.49)$$

一个重要的观察是无论哪一种同位旋结构都带有 $(k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k))$ 这个因子。这可以简化狄拉克结构的计算。

三种同位旋振幅的狄拉克结构可以抽取出来

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{q} \frac{i}{(\not{k} + \not{p}_1) - m_N} \sigma^{\mu\nu} u(p_1) (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \\ &= \epsilon_\mu(k) \frac{i}{s - m_N^2} \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{q} (\not{k} + \not{p}_1 + m_N) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\nu u(p_1) \end{aligned}$$

利用上文提到的类似方法可以计算出

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{q} (\not{k} + \not{p}_1 + m_N) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\nu u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \gamma_5 (2(s + 3m_N^2) \gamma^\mu \not{k} - 2(s + 3m_N^2) k^\mu + 4m_N q^\mu \not{k} + 8m_N P^\mu \not{k} - 4m_N(s - m_N^2) \gamma^\mu) u(p_1) \end{aligned} \quad (5.50)$$

下面列举两种计算方式确信这个结果是无误的。

- 方式一

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{q} (\not{k} + \not{p}_1 + m_N) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\nu u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \gamma_5 (2\not{P} + \not{k} - 2\not{p}_2) (\not{k} + \not{p}_1 + m_N) (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \gamma_5 (2\not{P} + \not{k} + 2m_N) (\not{k} + \not{p}_1 + m_N) (2k^\mu - 2\not{k} \gamma^\mu) u(p_1) \\ &= 2\bar{u}(p_2) \gamma_5 (2k^\mu \not{P} \not{k} + 2k^\mu \not{P} \not{p}_1 + 2m_N k^\mu \not{P} + k^\mu k^2 + 2k^\mu \not{k} \not{p}_1 + m_N k^\mu \not{k} + 2m_N k^\mu \not{k} + 2m_N k^\mu \not{p}_1 + 2m_N^2 k^\mu \\ &\quad - 2k^2 \not{P} \gamma^\mu - 2\not{P} \not{p}_1 \not{k} \gamma^\mu - 2m_N \not{P} \not{k} \gamma^\mu - k^2 \not{k} \gamma^\mu - \not{k} \not{p}_1 \not{k} \gamma^\mu - m_N k^2 \gamma^\mu - 2m_N k^2 \gamma^\mu - 2m_N \not{p}_1 \not{k} \gamma^\mu - 2m_N^2 \not{k} \gamma^\mu) \\ &= 2\bar{u}(p_2) \gamma_5 (2k^\mu \not{P} \not{k} + (k^2 + 4m_N^2) k^\mu + 4m_N k^\mu \not{k} - 2k^2 \not{P} \gamma^\mu - 2\not{P} \not{p}_1 \not{k} \gamma^\mu \\ &\quad - 2m_N \not{P} \not{k} \gamma^\mu - \not{k} \not{p}_1 \not{k} \gamma^\mu - 3m_N k^2 \gamma^\mu - 2m_N \not{p}_1 \not{k} \gamma^\mu - (2m_N^2 + k^2) \not{k} \gamma^\mu) u(p_1) \end{aligned}$$

有几项需要进一步化简

$$\begin{aligned} 2k^\mu \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{P} \not{k} u(p_1) &= k^\mu \left(\bar{u} \gamma_5 \not{p}_1 \not{k} u - m_N \bar{u} \gamma_5 \not{k} u \right) \\ &= k^\mu \left[\bar{u} \gamma_5 (s - m_N^2 - k^2) u - 2m_N \bar{u} \gamma_5 \not{k} u \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} -2k^2 \bar{u}(p_2) \not{P} \gamma^\mu u(p_1) &= -k^2 \left(\bar{u} \gamma_5 \not{p}_1 \gamma^\mu u - m_N \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu u \right) \\ &= 2m_N k^2 \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu u + k^2 \bar{u} \gamma_5 (k^\mu - q^\mu - 2P^\mu) u \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} -2\bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{P} \not{p}_1 \not{k} \gamma^\mu u(p_1) &= m_N \bar{u} \gamma_5 \not{p}_1 \not{k} \gamma^\mu u - m_N^2 \bar{u} \gamma_5 \not{k} \gamma^\mu u \\ &\stackrel{(5.11)}{=} m_N \bar{u} \gamma_5 \left[(s - m_N^2 - k^2) \gamma^\mu + k^\mu \not{k} - q^\mu \not{k} - 2P^\mu \not{k} \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$-2m_N \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{P} \not{k} \gamma^\mu u(p_1) \stackrel{(5.12)}{=} m_N \bar{u} \gamma_5 \left[-(s - m_N^2 - k^2) \gamma^\mu - k^\mu \not{k} + q^\mu \not{k} + 2P^\mu \not{k} \right] \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} -\bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{k} \not{p}_1 \not{k} \gamma^\mu u(p_1) &= \bar{u} \gamma_5 \left(k^2 \not{p}_1 \gamma^\mu - (s - m_N^2 - k^2) \not{k} \gamma^\mu \right) u \\ &= \bar{u} \gamma_5 \left[k^2 (q^\mu + 2P^\mu - k^\mu - m_N \gamma^\mu) + (s - m_N^2 - k^2) (\gamma^\mu \not{k} - 2k^\mu) \right] u \end{aligned} \quad (5.55)$$

最后代入上述式子，得到

$$\begin{aligned} & 2\bar{u}\gamma_5(\cdots)u \\ &= \bar{u}\gamma_5 [2(s+3m_N^2)\gamma^\mu k - (s+3m_N^2)2k^\mu - 4(s-m_N^2)\gamma^\mu + 8m_N P^\mu k + 4m_N q^\mu k] u \quad (5.56) \end{aligned}$$

• 方式二

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2)\gamma_5(q+k+p_1+m_N)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]k_\nu u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2)\gamma_5(q+p_2+m_N)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]k_\nu u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2)\gamma_5(m_\pi^2 + q p_2 + m_N q)(2\gamma^\mu k - 2k^\mu)u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2)(m_\pi^2\gamma^\mu k - m_\pi^2 k^\mu + q p_2 \gamma^\mu k - q p_2 k^\mu + m_N q \gamma^\mu k - m_N k^\mu q)u(p_1) \end{aligned}$$

相当于先不将 q 展开，这样在复杂的运算中可以减少一些项（对于手算会方便很多）。下面给出一些化简的关系

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2)\gamma_5 q \gamma^\mu k u(p_1) = \bar{u}\gamma_5(p_1 + k - p_2)\gamma^\mu k u \\ &= \bar{u}\gamma_5 p_1 \gamma^\mu k u + \bar{u}\gamma_5 k \gamma^\mu k u + m_N \bar{u}\gamma_5 \gamma^\mu k u \\ &= \bar{u}\gamma_5(2p_1^\mu - \gamma^\mu p_1)k u + \bar{u}\gamma_5(2k^\mu - \gamma^\mu k)u + m_N \bar{u}\gamma_5 \gamma^\mu k u \\ &= \bar{u}\gamma_5(q^\mu + 2P^\mu - k^\mu)k u - \bar{u}\gamma_5 \gamma^\mu(s - m_N^2 - k^2 - m_N k)u + \bar{u}\gamma_5(2k^\mu k - k^2 \gamma^\mu)u + m_N \bar{u}\gamma_5 \gamma^\mu k u \\ &= \bar{u}\gamma_5 [q^\mu k + 2P^\mu k + k^\mu k - (s - m_N^2)\gamma^\mu + 2m_N \gamma^\mu k] u \quad (5.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2)\gamma_5 q p_2 \gamma^\mu k u(p_1) = \bar{u}\gamma_5(2q \cdot p_2 + m_N q) \gamma^\mu k u \\ &= \bar{u}\gamma_5(s - m_\pi^2 - m_N^2) \gamma^\mu k u + m_N \bar{u}\gamma_5 q \gamma^\mu k u \\ &\stackrel{(5.57)}{=} \bar{u}\gamma_5 [(s + m_N^2 - m_\pi^2)\gamma^\mu k + m_N q \gamma^\mu k + 2m_N P^\mu k + m_N k^\mu k - m_N(s - m_N^2)\gamma^\mu] u \quad (5.58) \end{aligned}$$

$$-k^\mu \bar{u}(p_2)\gamma_5 q p_2 u(p_1) = -\bar{u}(m_N q + (s - m_N^2 - m_\pi^2)k^\mu) = \bar{u}\gamma_5 [-m_N k^\mu k - (s + m_N^2 - m_\pi^2)k^\mu] u \quad (5.59)$$

最终可以得到

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2)\gamma_5 q (q + p_2 + m_N)(\gamma^\mu k - k \gamma^\mu) u(p_1) \\ &= \bar{u}\gamma_5 [k^2(q^\mu + 2P^\mu - k^\mu - m_N \gamma^\mu) + (s - m_N^2 - k^2)(\gamma^\mu k - 2k^\mu)] u \end{aligned}$$

两种方式化简完全一致。

u 道振幅

$$i\mathcal{M}_u^{(2)} = \frac{-e g_A}{4F} \chi_2^\dagger \left[c_6 (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \tau_3 + \frac{c_7}{2} (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \right] \tau_a \chi_1$$

$$\times \bar{u}(p_2) \sigma^{\mu\nu} \frac{i}{(\not{p}_2 - \not{k}) - m_N} \gamma_5 \not{q} u(p_1) \quad (5.60)$$

同位旋结构

$$\begin{aligned} & \chi_2^\dagger \left[c_6 (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \tau_3 + \frac{c_7}{2} (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \right] \tau_a \chi_1 \\ &= \chi_2^\dagger c_6 (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \left(-\frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] + \frac{1}{2} \{ \tau_a, \tau_3 \} \right) \chi_1 + \chi_2^\dagger \frac{c_7}{2} (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \tau_a \chi_1 \end{aligned} \quad (5.61)$$

狄拉克结构分解

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) \sigma^{\mu\nu} \frac{i}{(\not{p}_2 - \not{k}) - m_N} \gamma_5 \not{q} u(p_1) (k_\nu \epsilon_\mu(k) - k_\mu \epsilon_\nu(k)) \\ &= \epsilon_\mu(k) \frac{i}{u - m_N^2} \bar{u}(p_2) \gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\nu (\not{k} - \not{p}_2 + m_N) \not{q} u(p_1) \end{aligned}$$

结果可以写成

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) \gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\nu (\not{k} - \not{p}_2 + m_N) \not{q} u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \gamma_5 (-2(u - m_N^2) \gamma^\mu \not{k} + (u - m_N^2) 2k^\mu) u(p_1) \end{aligned} \quad (5.62)$$

这里我们给出第二种方式得到上述结果的计算过程。

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) \gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\nu (\not{k} - \not{p}_2 + m_N) \not{q} u(p_1) \\ &= \bar{u} \gamma_5 (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) (\not{q} - \not{p}_1 + m_N) \not{q} u \\ &= \bar{u} \gamma_5 (2\gamma^\mu \not{k} - 2k^\mu) (-\not{p}_1 \not{q} + m_\pi^2 \not{q} + m_N \not{q}) u \\ &= 2\bar{u} \gamma_5 (-\gamma^\mu \not{k} \not{p}_1 \not{q} + m_\pi^2 \gamma^\mu \not{k} + m_N \gamma^\mu \not{k} \not{q} + k^\mu \not{p}_1 \not{q} - m_\pi^2 k^\mu - m_N k^\mu \not{q}) u \end{aligned}$$

复杂的几项计算列举如下

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) \gamma_5 \gamma^\mu \not{k} \not{p}_1 \not{q} u(p_1) = \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu \not{k} (2p_1 \cdot q - m_N \not{q}) u \\ &= -(u - m_N^2 - m_\pi^2) \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu \not{k} u - m_N \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu \not{k} \not{q} u \\ &= -(u - m_N^2 - m_\pi^2) \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu \not{k} u + m_N \bar{u} \gamma_5 (-k^2 \gamma^\mu - m_N \gamma^\mu \not{k}) u + m_N \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu \not{k} \not{p}_2 u \\ &\stackrel{(5.17)}{=} \bar{u} \gamma_5 [(-u - m_N^2 + m_\pi^2) \gamma^\mu \not{k} + m_N (m_N^2 - u) \gamma^\mu - m_N k^\mu \not{k} - 2m_N P^\mu \not{k} + m_N q^\mu \not{k}] u \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} & m_N \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{k} \not{q} u(p_1) = m_N \bar{u} \gamma_5 \gamma^\mu (k^2 + m_N \not{k} - \not{k} \not{p}_2) u \\ &\stackrel{(5.17)}{=} m_N \bar{u} \gamma_5 [(u - m_N^2) \gamma^\mu + k^\mu \not{k} + 2P^\mu \not{k} - q^\mu \not{k} + 2m_N \gamma^\mu \not{k}] u \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} & -\bar{u}(p_2) \gamma_5 k^\mu \not{p}_1 \not{q} u(p_1) = -\bar{u} \gamma_5 k^\mu (\not{p}_1 \not{k} + m_N^2 - \not{p}_1 \not{p}_2) \\ &= \bar{u} \gamma_5 [-(s + t - 3m_N^2 - k^2) k^\mu + m_N k^\mu \not{k}] u \end{aligned} \quad (5.65)$$

最后可以得到

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) \gamma_5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] k_\nu (\not{k} - \not{p}_2 + m_N) q u(p_1) \\ &= \bar{u} \gamma_5 [2(u + 3m_N^2) \gamma^\mu \not{k} - (u + 3m_N^2) 2k^\mu + 4m_N(u - m_N^2) \gamma^\mu + 8m_N P^\mu \not{k} - 4m_N q^\mu \not{k}] u \end{aligned}$$

下面列举简化后的 s 道和 u 道的振幅

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s &= \frac{-eg_A}{4F} \left[\chi_2^\dagger c_6 \left(\frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] + \frac{1}{2} \{\tau_a, \tau_3\} \right) \chi_1 + \chi_2^\dagger \frac{c_7}{2} \tau_a \chi_1 \right] \epsilon_\mu(k) \frac{i}{s - m_N^2} \\ &\quad \times \bar{u}(p_2) \gamma_5 [2(s + 3m_N^2) \gamma^\mu \not{k} - (s + 3m_N^2) 2k^\mu + 4m_N q^\mu \not{k} + 8m_N P^\mu \not{k} - 4m_N(s - m_N^2) \gamma^\mu] u(p_1) \\ \mathcal{M}_u &= \frac{-eg_A}{4F} \left[\chi_2^\dagger c_6 \left(-\frac{1}{2} [\tau_a, \tau_3] + \frac{1}{2} \{\tau_a, \tau_3\} \right) \chi_1 + \chi_2^\dagger \frac{c_7}{2} \tau_a \chi_1 \right] \epsilon_\mu(k) \frac{i}{u - m_N^2} \\ &\quad \times \bar{u}(p_2) \gamma_5 [2(u + 3m_N^2) \gamma^\mu \not{k} - (u + 3m_N^2) 2k^\mu + 4m_N(u - m_N^2) \gamma^\mu + 8m_N P^\mu \not{k} - 4m_N q^\mu \not{k}] u(p_1) \end{aligned}$$

B_i 和 A_i 函数都可以直接读出。首先对于 $B^{(-)}, A^{(-)}$

$$B_1^{(-)} = \frac{-ieg_A c_6}{4F} \left(\frac{8m_N^2}{s - m_N^2} - \frac{8m_N^2}{u - m_N^2} \right) \quad (5.66)$$

$$B_2^{(-)} = B_3^{(-)} = 0 \quad (5.67)$$

$$B_4^{(-)} = \frac{-ieg_A c_6}{4F} \left(-\frac{4m_N^2}{s - m_N^2} + \frac{4m_N^2}{u - m_N^2} \right) \quad (5.68)$$

$$B_5^{(-)} = \frac{-ieg_A c_6}{4F} (-8m_N) \quad (5.69)$$

$$B_6^{(-)} = \frac{-ieg_A c_6}{4F} \left(\frac{8m_N}{s - m_N^2} - \frac{8m_N}{u - m_N^2} \right) \quad (5.70)$$

$$B_7^{(-)} = 0 \quad (5.71)$$

$$B_8^{(-)} = \frac{-ieg_A c_6}{4F} \left(\frac{4m_N}{s - m_N^2} + \frac{4m_N}{u - m_N^2} \right) \quad (5.72)$$

直接验证 (3.6) 都是满足的。进而得到 A_i

$$A_1^{(-)} = 0 \quad (5.73)$$

$$A_2^{(-)} = 0 \quad (5.74)$$

$$A_3^{(-)} = \frac{ieg_A c_6}{F} \left(\frac{m_N}{s - m_N^2} + \frac{m_N}{u - m_N^2} \right) \quad (5.75)$$

$$A_4^{(-)} = \frac{ieg_A c_6}{F} \left(\frac{m_N}{s - m_N^2} - \frac{m_N}{u - m_N^2} \right) \quad (5.76)$$

$$A_5^{(-)} = 0 \quad (5.77)$$

$$A_6^{(-)} = 0 \quad (5.78)$$

$$(5.79)$$

对于 $B^{(+)}, A^{(+)}$

$$B_1^{(+)} = \frac{-ieg_A c_6}{4F} \left(4 + \frac{8m_N^2}{s - m_N^2} + \frac{8m_N^2}{u - m_N^2} \right) \quad (5.80)$$

$$B_2^{(+)} = B_3^{(-)} = 0 \quad (5.81)$$

$$B_4^{(+)} = \frac{-ieg_A c_6}{4F} \left(-2 - \frac{4m_N^2}{s - m_N^2} - \frac{4m_N^2}{u - m_N^2} \right) \quad (5.82)$$

$$B_5^{(+)} = 0 \quad (5.83)$$

$$B_6^{(+)} = \frac{-ieg_A c_6}{4F} \left(\frac{8m_N}{s - m_N^2} + \frac{8m_N}{u - m_N^2} \right) \quad (5.84)$$

$$B_7^{(+)} = 0 \quad (5.85)$$

$$B_8^{(+)} = \frac{-ieg_A c_6}{4F} \left(\frac{4m_N}{s - m_N^2} - \frac{4m_N}{u - m_N^2} \right) \quad (5.86)$$

规范不变性也是满足的。

$$A_1^{(+)} = \frac{-ieg_A c_6}{F} \quad (5.87)$$

$$A_2^{(+)} = 0 \quad (5.88)$$

$$A_3^{(+)} = \frac{ieg_A c_6}{F} \left(\frac{m_N}{s - m_N^2} - \frac{m_N}{u - m_N^2} \right) \quad (5.89)$$

$$A_4^{(+)} = \frac{ieg_A c_6}{F} \left(\frac{m_N}{s - m_N^2} + \frac{m_N}{u - m_N^2} \right) \quad (5.90)$$

$$A_5^{(+)} = 0 \quad (5.91)$$

$$A_6^{(+)} = 0 \quad (5.92)$$

$$(5.93)$$

$A^{(0)}$ 的结果与 $A^{(+)}$ 类似，二者由

$$A^{(0)} = \frac{c_7}{2c_6} A^{(+)} \quad (5.94)$$

关联起来。

6 PCAC 以及手征 Ward 恒等式的应用

本节主要参考 [12, 26, 27]。

我们的目标旨在阐明手征 Ward 恒等式在 π 电生实验中提取核子轴矢流形状因子的重要性。首先回顾一下基本的知识，这里符号约定和 [7] 一致。简单起见，我们只考虑两味 SU(2) 并且同位旋对称的情况， $m_u = m_d = \hat{m}$ 。

考虑有限轻质量夸克耦合到一个外源电磁场 A_μ （考虑最小电磁耦合）

$$-eA_\mu J^\mu = -eA_\mu \left(\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d \right) = \frac{1}{3}\bar{q}\gamma^\mu v_\mu^{(s)} q + \bar{q}\gamma^\mu v_\mu q , \quad (6.1)$$

其中

$$v_\mu^{(s)} = -\frac{e}{2}A_\mu, \quad v_\mu = -\frac{e}{2}\tau_3 A_\mu , \quad (6.2)$$

在这种情况下，矢量流 $V_i^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} q$ 和轴矢量流 $A_i^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} q$ 的散度表达式分别为 [7]

$$\partial_\mu V_i^\mu = -\epsilon_{3ij} e A_\mu \bar{q} \gamma^\mu \frac{\tau_j}{2} q = -\epsilon_{3ij} e A_\mu V_j^\mu \quad (6.3)$$

$$\partial_\mu A_i^\mu = -e A_\mu \epsilon_{3ij} \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_j}{2} q + \hat{m} i \bar{q} \gamma_5 \tau_i q = -e A_\mu \epsilon_{3ij} A_j^\mu + \hat{m} P_i \quad (6.4)$$

这里引入同位旋矢量赝标量密度 $P_i = i \bar{q} \gamma_5 \tau_i q$ ，(6.4) 右边第一项只在电磁场背景下才有。另外，我们这里不考虑所谓的反常项对于 $\partial_\mu A_i^\mu$ 的贡献²⁰。

1 流代数和 Adler-Gilman 关系

首先定义轴矢流的核子矩阵元，

$$\mathcal{M}_{A,i}^\mu = \langle N(p_f) | A_i^\mu(0) | N(p_i) \rangle \quad (6.5)$$

其次是电磁流和同位旋矢量轴矢流的时序积的核子矩阵元，

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{JA,i}^{\mu\nu} &= \int d^4x e^{-ik\cdot x} \langle N(p_f) | T \{ J^\mu(x) A_i^\nu(0) \} | N(p_i) \rangle \\ &= \int d^4x e^{iq\cdot x} \langle N(p_f) | T \{ J^\mu(0) A_i^\nu(x) \} | N(p_i) \rangle \end{aligned} \quad (6.6)$$

严格说来，这里定义的 T 并不协变，因为 $\theta(x^0 - y^0)$ 函数当 $x^0 = y^0$ 时不是良定义的，正确的协变写法应该考虑同时多出的一项，这时 T 应该用 T^* 替代，但是利用正则对易子又会得到一个所谓 Schwinger 项，按照费曼的假设，非协变的贡献和 Schwinger 项相互消去，因此一般来说同时不考虑二者也能得到正确的答案，具体细节可以参考 [28]。最后，电磁流和同位旋矢量赝标

²⁰可以这样考虑，反常项正比于 e^2 ，我们只考虑 e 这一阶贡献的话，可以忽略反常项

量密度的格林函数,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{JP,i}^{\mu} &= \int d^4x e^{-ik\cdot x} \langle N(p_f) | T [J^{\mu}(x) P_i(0)] | N(p_i) \rangle \\ &= \int d^4x e^{iq\cdot x} \langle N(p_f) | T [J^{\mu}(0) P_i(x)] | N(p_i) \rangle\end{aligned}\quad (6.7)$$

利用流代数, 考虑 (手征 Ward 恒等式)

$$\begin{aligned}0 &\stackrel{\text{gauge}}{=} \partial_{\nu} \left[\int d^4x e^{-ik\cdot x} \langle N(p_f) | T \{ J^{\mu}(x) A_i^{\nu}(0) \} | N(p_i) \rangle \right] \\ &= \partial_{\nu} \left[\int d^4x e^{iq\cdot x} \langle N(p_f) | T \{ J^{\mu}(0) A_i^{\nu}(x) \} | N(p_i) \rangle \right] \\ &= \int d^4x i q_{\nu} e^{iq\cdot x} \langle N(p_f) | T \{ J^{\mu}(0) A_i^{\nu}(x) \} | N(p_i) \rangle + \int d^4x e^{iq\cdot x} \langle N(p_f) | T \{ J^{\mu}(0) \partial_{\nu} A_i^{\nu}(x) \} | N(p_i) \rangle \\ &\quad + \int d^4x e^{iq\cdot x} \langle N(p_f) | [A_i^{\nu}(x), J^{\mu}(0)] | N(p_i) \rangle\end{aligned}\quad (6.8)$$

利用定义 (6.5)、(6.6)、(6.7) 以及 $[A_0^a(x), J_{\nu}(0)] = i\epsilon^{a3b}\delta^3(\mathbf{x})A_{\nu}^b(0)$, 这三个格林函数满足 Adler-Gilman 关系:

$$q_{\nu} \mathcal{M}_{JA,i}^{\mu\nu} = i\hat{m} \mathcal{M}_{JP,i}^{\mu} + \epsilon_{3ij} \mathcal{M}_{A,j}^{\mu} \quad (6.9)$$

另一种得到 (6.9) 的方法是利用 PCAC: $\partial_{\mu} A^{\mu a}(x) = m_{\pi}^2 F_{\pi} \pi^a(x)$, 从而导出

$$(\partial_{\mu} \delta_{ij} + e A_{\mu} \epsilon_{3ij}) A_j^{\mu} = m_{\pi}^2 F_{\pi} \Phi_i \quad (6.10)$$

将上式夹在核子末态和核子加光子初态之间, 就能得到 (6.9)。

2 格林函数与 π 电生的联系

赝标密度场在真空和单 π 场态之间的矩阵元利用耦合常数 G_{π} 可以定义为 [29],

$$\langle 0 | P_i(0) | \pi_j(q) \rangle = \delta_{ij} G_{\pi} \quad (6.11)$$

同时, 对于每一个内插场 $\Phi_i(x)$, 都满足关系 $\langle 0 | \Phi_i(x) | \pi_j(q) \rangle = \delta_{ij} e^{-iq\cdot x}$ 。因此, 我们可以得到一个内插 π 场

$$\Phi_i(x) = \frac{P_i(x)}{G_{\pi}} = \frac{P_i(x)}{2BF} = \frac{\hat{m} P_i(x)}{m_{\pi}^2 F_{\pi}} \quad (6.12)$$

后两个式子来自于最低阶 χ PT 的计算结果 [7], 并且 $m_{\pi}^2 = 2B\hat{m}$ 。

利用 OPE 近似, 电生 $\gamma^*(k) + N(p_i) \rightarrow \pi^i(q) + N(p_2)$ 不变振幅可以写成 $\mathcal{M}_i = -ie\epsilon_{\mu} \mathcal{M}_i^{\mu}$, $\epsilon_{\mu} = e\bar{u}\gamma_{\mu}u/k^2$, 电磁跃迁矩阵元定义成 $\mathcal{M}_i^{\mu} = \langle N(p_2), \pi^i(q) | J^{\mu}(0) | N(p_1) \rangle$ 。利用 Lehmann、Symanzik

和 Zimmermann 的 LSZ 约化公式以及 PCAC，可以得到矩阵元和 QCD 格林函数之间的一个关系 [12]，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_i^\mu &= -i \frac{\hat{m}}{m_\pi^2 F_\pi} \lim_{q^2 \rightarrow m_\pi^2} (q^2 - m_\pi^2) \mathcal{M}_{JP,i}^\mu \\ &= \frac{1}{m_\pi^2 F_\pi} \lim_{q^2 \rightarrow m_\pi^2} (q^2 - m_\pi^2) (\epsilon_{3ij} \mathcal{M}_{A,j}^\mu - q_\nu \mathcal{M}_{JA,i}^{\mu\nu}) .\end{aligned}\quad (6.13)$$

为了验证这些关系以及澄清 π 电生和轴矢流电荷半径 $\langle r^2 \rangle_A$ 之间的联系，我们需要利用 χ PT 来微扰计算每一个格林函数的贡献，这里只考虑树图就可以说明问题了，对于通常用到的拉氏量 $\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)} + \mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} + \mathcal{L}_{\pi N}^{(2)}$ 还需要 [30]，

$$\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} = \frac{1}{2(4\pi F)^2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \{ b_{17} u_\mu \text{Tr}(\chi_+) + i b_{19} [D_\mu, \chi_-] + b_{23} [D^\nu, f_{-\mu\nu}] \} \Psi \quad (6.14)$$

这里归一化约定与文献中稍微有些区别，

$$d_{16} = \frac{b_{17}}{(4\pi F)^2}, \quad d_{18} = \frac{b_{19}}{(4\pi F)^2}, \quad d_{22} = \frac{b_{23}}{(4\pi F)^2} \quad (6.15)$$

并且我们忽略了一些项，这些项贡献动量依赖的形状因子，但是在这讨论 A-G 关系的时候，都是可以忽略的。

3 轴矢流矩阵元

② 第一个例子，利用洛伦兹协变性和同位旋对称性，轴矢量流矩阵元可以参数化成（见图5）

$$\langle 0 | A_i^\mu(x) | \pi_j(q) \rangle = i q^\mu F_\pi e^{-iq \cdot x} \delta_{ij} \quad (6.16)$$

图 5: 轴矢流在真空态和单 π 场之间的矩阵元

加入外源场，利用 $\mathcal{O}(p^2)$ 的拉氏量，

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = i \frac{F^2}{2} \text{Tr} [(\partial^\mu U U^\dagger - \partial^\mu U^\dagger U) a_\mu] = -F a_{\mu,i} \partial^\mu \pi_i + \dots \quad (6.17)$$

这一阶， $F_\pi = F$ ，对于轴矢流散度的矩阵元，

$$\begin{aligned}\langle 0 | \partial_\mu A_i^\mu(x) | \pi_j(q) \rangle &= i q^\mu F_\pi \partial_\mu e^{-iq \cdot x} \delta_{ij} \\ &= m_\pi^2 F_\pi e^{-iq \cdot x} \delta_{ij} \\ &= 2 \hat{m} B F e^{-iq \cdot x} \delta_{ij}\end{aligned}\quad (6.18)$$

这里用到了 $m_\pi^2 = 2\hat{m}B$ (到 $\mathcal{O}(p^3)$ 成立)。另外赝标密度的矩阵元 (6.11), (图6) 可以类似得到

$$\text{---} \cdot \pi_j(q) \cdot \text{---} \bullet P_i$$

图 6: 蕴标密度在真空态和单 π 场之间的矩阵元

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = i \frac{F^2 B}{2} \text{Tr} (p U^\dagger - U p) = 2BF p_i \pi_i + \dots \quad (6.19)$$

有 $G_\pi = 2BF$, 因此在 $\mathcal{O}(p^2)$ 阶, 有关系 $F_\pi m_\pi^2 = \hat{m}G_\pi$ 。

㊂ 第二个例子考虑核子矩阵元, 首先, 蕴标密度核子矩阵元 (图7) 可以参数化成

$$\xrightarrow[p_i]{\hat{m}P_i} \bullet \xrightarrow[p_f]{}$$

图 7: 蕴标密度在单核子态之间的矩阵元

$$\hat{m} \langle N(p_f) | P_i(0) | N(p_i) \rangle = \frac{m_\pi^2 F_\pi}{m_\pi^2 - t} G_{\pi N}(t) i \bar{u}(p_f) \gamma_5 \tau_i u(p_i), \quad t = (p_f - p_i)^2 \quad (6.20)$$

由于 $\hat{m}P_i(x)/(m_\pi^2 F_\pi)$ 作为一个内插场, 因此 $G_{\pi N}(t)$ 可以看作形状因子。利用有效拉氏量到 $\mathcal{O}(p^3)$ 阶,

$$G_{\pi N}(t) = \frac{m_N}{F_\pi} \left(g_A + \frac{b_{17} m_\pi^2}{4\pi^2 F_\pi^2} - \frac{b_{19}}{8\pi^2 F_\pi^2} t \right) \quad (6.21)$$

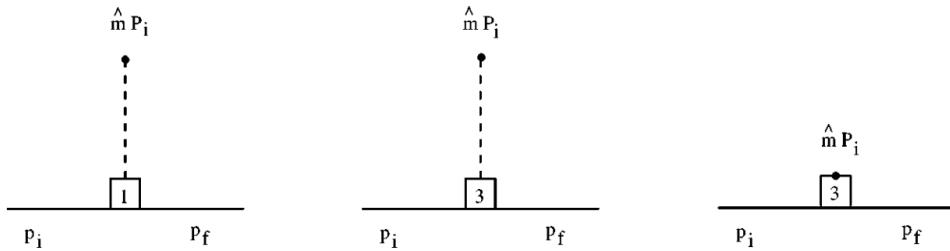


图 8: 到 $\mathcal{O}(p^3)$ 的费曼图

πN 耦合常数定义成,

$$g_{\pi N} = G_{\pi N}(m_\pi^2) = \frac{m_N}{F_\pi} \left(g_A + \frac{(2b_{17} - b_{19}) m_\pi^2}{8\pi^2 F_\pi^2} \right) \quad (6.22)$$

正如我们下面将要看到的 (6.26), $g_A = \dot{g}_A + b_{17}m_\pi^2/(4\pi^2 F_\pi^2)$, b_{19} 反映了所谓的 Goldberger-Treiman 关系的破缺,

$$\Delta_{\pi N} \equiv 1 - \frac{g_A m_N}{g_{\pi N} F_\pi} = -b_{19} \frac{m_N m_\pi^2}{8\pi^2 g_{\pi N} F_\pi^3} \quad (6.23)$$

数值上大概是 3% 的差异。依据 $\Delta_{\pi N}, g_{\pi N}$, 形状因子 $G_{\pi N}$ 可以写成

$$G_{\pi N}(t) = g_{\pi N} \left(1 + \Delta_{\pi N} \frac{t - m_\pi^2}{m_\pi^2} \right) \quad (6.24)$$

下面考虑轴矢流形状因子 (不考虑第二类违反 G 宇称的形状因子),

$$\langle N(p_f) | A_i^\mu(0) | N(p_i) \rangle = \bar{u}(p_f) \left[\gamma^\mu G_A(t) + \frac{(p_f - p_i)^\mu}{2m_N} G_P(t) \right] \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} u(p_i) , \quad t = (p_f - p_i)^2 \quad (6.25)$$

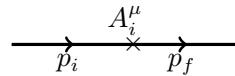


图 9: 轴矢流在单核子态之间的矩阵元

形状因子可以从费曼图得到,

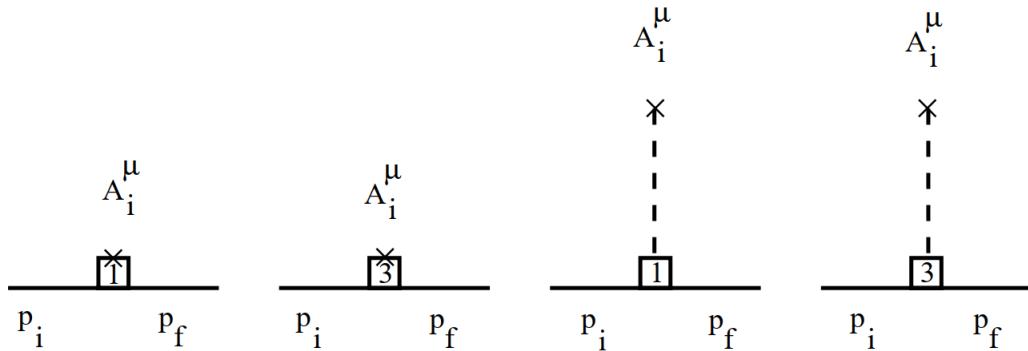


图 10: 到 $\mathcal{O}(p^3)$ 的费曼图

$$G_A(t) = g_A \left(1 + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A t \right) \quad (6.26)$$

$$G_P(t) = 4m_N^2 \left(\frac{F_\pi g_{\pi N}}{m_N} \frac{1}{m_\pi^2 - t} - \frac{1}{6} g_A \langle r^2 \rangle_A \right) \quad (6.27)$$

其中

$$g_A = G_A(0) = g_A + \frac{b_{17}m_\pi^2}{4\pi^2 F_\pi^2}, \quad -\frac{1}{6}g_A \langle r^2 \rangle_A = \frac{b_{23}}{(4\pi F_\pi)^2} \quad (6.28)$$

可以直接验证 (6.21)、(6.26) 和 (6.27) 满足,

$$2m_N G_A(t) + \frac{t}{2m_N} G_P(t) = 2 \frac{m_\pi^2 F_\pi}{m_\pi^2 - t} G_{\pi N}(t) \quad (6.29)$$

4 π 电生的应用

下面考虑 PCAC 关系如何进入电生过程中。直接的费曼图计算（只考虑 πN 的 $\mathcal{O}(p^3)$ 树图，也就是不考虑所谓的介子圈图）可以给出，

$$\mathcal{M}_s = -e \frac{g_{\pi N}}{m_N} \bar{u}(p_f) \left(1 - \frac{2m_N \not{q}}{s - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} \epsilon \cdot \Gamma(k) u(p_i) \quad (6.30)$$

$$\mathcal{M}_u = -e \frac{g_{\pi N}}{m_N} \bar{u}(p_f) \epsilon \cdot \Gamma(k) \left(1 - \frac{2m_N \not{q}}{u - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} u(p_i) \quad (6.31)$$

$$\mathcal{M}_t = ie g_{\pi N} \epsilon_{3ij} \tau_j \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \frac{1}{t - m_\pi^2} \epsilon \cdot (2q - k) \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ct.} &= ie \epsilon_{3ij} \tau_j \frac{g_{\pi N}}{2m_N} \bar{u}(p_f) \not{\epsilon} \gamma_5 u(p_i) \\ &\quad + ie \epsilon_{3ij} \tau_j \frac{g_A}{2F_\pi} \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A \bar{u}(p_f) [(k - q) \cdot k \not{\epsilon} - (k - q) \cdot \epsilon \not{k}] \gamma_5 u(p_i) \end{aligned} \quad (6.33)$$

顶点 $\Gamma^\mu(k)$ 简写为

$$\Gamma^\mu(k) = \gamma^\mu \frac{1 + \tau_3}{2} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{2m_N} \left(\frac{\kappa_s}{2} + \frac{\kappa_v}{2} \tau_3 \right), \quad k = p_f - p_i \quad (6.34)$$

可以检查规范不变性对于振幅的限制 [30–38]，

$$k_\mu \mathcal{M}_i^\mu = -g_{\pi N} \epsilon_{3ij} \tau_j \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \Delta^{-1}(q) \Delta(q - k) \quad (6.35)$$

如果 π 在壳， $q^2 = m_\pi^2$ ，那么就有 $\Delta^{-1}(q) = 0 \Rightarrow k_\mu \mathcal{M}_i^\mu = 0$ 。

电磁流赝标密度格林函数 $\mathcal{M}_{JP,i}^\mu$ 可以利用有效拉氏量直接计算，共有 7 个图，见图11，

$$\mathcal{M}_{JP,i,1}^\mu = \frac{2BF_\pi}{q^2 - m_\pi^2} \frac{g_{\pi N}}{m_N} \bar{u}(p_f) \left(1 - \frac{2m_N \not{q}}{s - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} \Gamma^\mu(k) u(p_i) \quad (6.36)$$

$$\mathcal{M}_{JP,i,2}^\mu = \frac{2BF_\pi}{q^2 - m_\pi^2} \frac{g_{\pi N}}{m_N} \bar{u}(p_f) \Gamma^\mu(k) \left(1 - \frac{2m_N \not{q}}{u - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} u(p_i) \quad (6.37)$$

$$\mathcal{M}_{JP,i,3}^\mu = -i \epsilon_{3ij} \tau_j \frac{2BF_\pi}{q^2 - m_\pi^2} \frac{1}{t - m_\pi^2} (2q - k)^\mu g_{\pi N} \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \quad (6.38)$$

$$\mathcal{M}_{JP,i,4}^\mu = -i \epsilon_{3ij} \tau_j \frac{2BF_\pi}{q^2 - m_\pi^2}$$

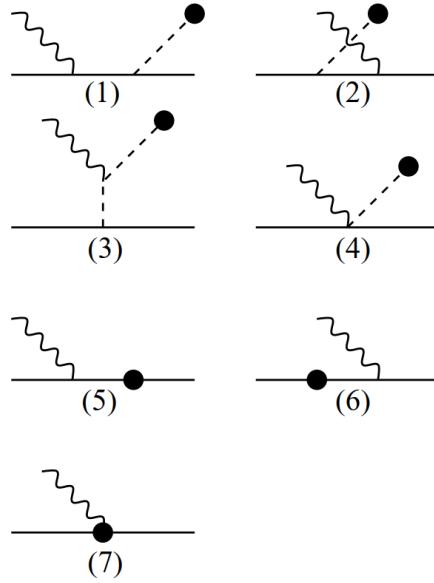


图 11: 涉及电磁流赝标密度格林函数的费曼图, 实心圆对应于赝标量密度。

$$\times \bar{u}(p_f) \left\{ \frac{g_{\pi N}}{2m_N} \gamma^\mu + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A \frac{g_A}{2F_\pi} [(k-q)k\gamma^\mu - (k-q)^\mu k] \right\} \gamma_5 u(p_i) \quad (6.39)$$

$$\mathcal{M}_{JP,i,5}^\mu = \frac{2BF_\pi}{m_\pi^2} \Delta_{\pi N} \frac{g_{\pi N}}{m_N} \bar{u}(p_f) \left(1 - \frac{2m_N q}{s - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} \Gamma^\mu(k) u(p_i) \quad (6.40)$$

$$\mathcal{M}_{JP,i,6}^\mu = \frac{2BF_\pi}{m_\pi^2} \Delta_{\pi N} \frac{g_{\pi N}}{m_N} \bar{u}(p_f) \Gamma^\mu(k) \left(1 - \frac{2m_N q}{u - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} u(p_i) \quad (6.41)$$

$$\mathcal{M}_{JP,i,7}^\mu = -i\epsilon_{3ij}\tau_j \frac{2BF_\pi}{m_\pi^2} \Delta_{\pi N} \frac{g_{\pi N}}{2m_N} \bar{u}(p_f) \gamma^\mu \gamma_5 u(p_i) \quad (6.42)$$

根据 (6.13), 上式只有前 4 项有 $1/(q^2 - m_\pi^2)$ 的奇异性, 因此乘上 $-i\hat{m}/(m_\pi^2 F_\pi)$ 以及和 $-ie\epsilon_\mu$ 收缩再取 π 的质壳条件, 电生振幅和电磁流赝标密度格林函数的结果 (前 4 项) 一一对应。这也首先验证了 (6.13) 的自洽性。

作为另一个独立的检验, 考虑一个手征 Ward 等式

$$k_\mu \mathcal{M}_{JP,i}^\mu = \epsilon_{3ij} \langle N(p_f) | P_j(0) | N(p_i) \rangle \quad (6.43)$$

左边可以分别求和成

$$\begin{aligned} k_\mu \sum_{k=1}^4 \mathcal{M}_{JP,i,k}^\mu &= -i\epsilon_{3ij}\tau_j \frac{2BF_\pi}{t - m_\pi^2} g_{\pi N} \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) , \\ k_\mu \sum_{k=5}^7 \mathcal{M}_{JP,i,k}^\mu &= -i\epsilon_{3ij}\tau_j \frac{2BF_\pi}{m_\pi^2} \Delta_{\pi N} g_{\pi N} \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) . \end{aligned}$$

将两个结果合并, 得到

$$k_\mu \mathcal{M}_{JP,i}^\mu = -i\epsilon_{3ij}\tau_j \frac{2BF_\pi}{t - m_\pi^2} G_{\pi N}(t) \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \quad (6.44)$$

这个结果的确满足 Ward 恒等式。

下面全面考虑 A-G 关系 (6.9), 需要计算电磁流轴矢流格林函数, 见图12

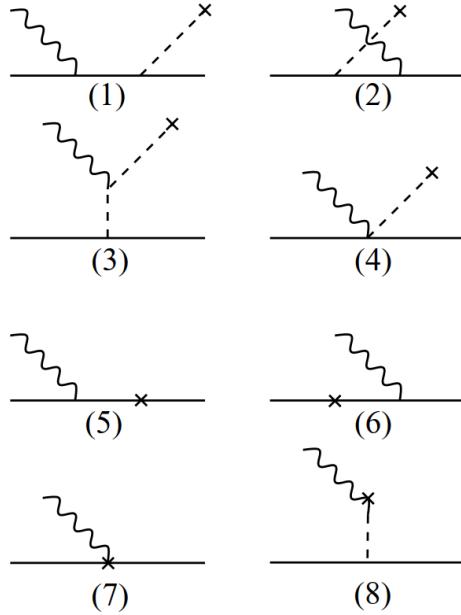


图 12: 涉及电磁流轴矢密度格林函数的费曼图, 注意 (8) 不能从电磁流赝标密度格林函数中生成。

$$\mathcal{M}_{JA,i,1}^{\mu\nu} = i \frac{F_\pi q^\nu}{q^2 - m_\pi^2} \frac{g_{\pi N}}{m_N} \bar{u}(p_f) \left(1 - \frac{2m_N \not{q}}{s - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} \Gamma^\mu(k) u(p_i) \quad (6.45)$$

$$\mathcal{M}_{JA,i,2}^{\mu\nu} = i \frac{F_\pi q^\nu}{q^2 - m_\pi^2} \frac{g_{\pi N}}{m_N} \bar{u}(p_f) \Gamma^\mu(k) \left(1 - \frac{2m_N \not{q}}{u - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} u(p_i) \quad (6.46)$$

$$\mathcal{M}_{JA,i,3}^{\mu\nu} = \epsilon_{3ij} \tau_j \frac{F_\pi q^\nu}{q^2 - m_\pi^2} \frac{(2q - k)^\mu}{t - m_\pi^2} g_{\pi N} \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \quad (6.47)$$

$$\mathcal{M}_{JA,i,4}^{\mu\nu} = \epsilon_{3ij} \tau_j \frac{F_\pi q^\nu}{q^2 - m_\pi^2} \bar{u}(p_f) \left\{ \frac{g_{\pi N}}{2m_N} \gamma^\mu + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A \frac{g_A}{2F_\pi} [(k - q)k\gamma^\mu - (k - q)^\mu \not{k}] \right\} \gamma_5 u(p_i) \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{JA,i,5}^{\mu\nu} &= ig_A \frac{1}{s - m_N^2} \\ &\times \bar{u}(p_f) \left[\gamma^\nu \left(1 + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A q^2 \right) - q^\nu \not{q} \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A \right] \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} \times (\not{p}_i + \not{k} + m_N) \Gamma^\mu(k) u(p_i) \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{JA,i,6}^{\mu\nu} &= ig_A \frac{1}{u - m_N^2} \\ &\times \bar{u}(p_f) \Gamma^\mu(k) (\not{p}_i - \not{q} + m_N) \left[\gamma^\nu \left(1 + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A q^2 \right) - q^\nu \not{q} \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A \right] \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} u(p_i) \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\mathcal{M}_{JA,i,7}^{\mu\nu} = -\epsilon_{3ij} \tau_j g_A \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A \frac{1}{2} \bar{u}(p_f) [\gamma^\nu (2q - k)^\mu - \gamma^\mu (q - k)^\nu - \not{q} g^{\mu\nu}] \gamma_5 u(p_i) \quad (6.51)$$

$$\mathcal{M}_{JA,i,8}^{\mu\nu} = -\epsilon_{3ij} \tau_j g_{\pi N} F_\pi \frac{g^{\mu\nu}}{t - m_\pi^2} \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \quad (6.52)$$

对于这个结果我们首先利用一个手征 Ward 恒等式来检验规范不变性,

$$k_\mu \mathcal{M}_{J,A,i}^{\mu\nu} = \epsilon_{3ij} \langle N(p_f) | A_j^v(0) | N(p_i) \rangle \quad (6.53)$$

将 $\mathcal{M}_{JA,i}$ 前 4 项和第 8 项以及第 5 到第 7 项分别加起来,

$$\begin{aligned} k_\mu \sum_{k=1}^4 \mathcal{M}_{JA,i,k}^{\mu\nu} + k_\mu \mathcal{M}_{JA,i,8}^{\mu\nu} &= -\epsilon_{3ij} \tau_j \frac{p_f^\nu - p_i^\nu}{t - m_\pi^2} g_{\pi N} F_\pi \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \\ k_\mu \sum_{k=5}^7 \mathcal{M}_{JA,i,k}^{\mu\nu} &= \epsilon_{3ij} g_A \bar{u}(p_f) \left[\gamma^\nu \left(1 + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A t \right) - 2m_N (p_f - p_i)^\nu \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A \right] \gamma_5 \frac{\tau_j}{2} u(p_i) \end{aligned}$$

对比 $\langle N(p_f) | A_j^v(0) | N(p_i) \rangle$ 的定义 (6.25), 确实满足 Ward 恒等式。

利用这些结果, 可以直接检验 A-G 关系。为了简单起见, 首先考虑 $q_\nu \mathcal{M}_{JA,i}^{\mu\nu}$ 两个 s 道的图,

$$\begin{aligned} q_\nu (\mathcal{M}_{JA,i,1}^{\mu\nu} + \mathcal{M}_{JA,i,5}^{\mu\nu}) &= i \left(\frac{F_\pi g_{\pi N}}{m_N} \frac{q^2}{q^2 - m_\pi^2} - g_A \right) \bar{u}(p_f) \left(1 - \not{q} \frac{2m_N}{s - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} \Gamma^\mu(k) u(p_i) \\ &= i \hat{m} (\mathcal{M}_{JP,i,1}^\mu + \mathcal{M}_{JP,i,5}^\mu) \end{aligned} \quad (6.54)$$

类似地, u 道

$$\begin{aligned} q_\nu (\mathcal{M}_{JA,i,2}^{\mu\nu} + \mathcal{M}_{JA,i,6}^{\mu\nu}) &= i \left(\frac{F_\pi g_{\pi N}}{m_N} \frac{q^2}{q^2 - m_\pi^2} - g_A \right) \bar{u}(p_f) \Gamma^\mu(k) \left(1 - \not{q} \frac{2m_N}{u - m_N^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} u(p_i) \\ &= \hat{m} i (\mathcal{M}_{JP,i,2}^\mu + \mathcal{M}_{JP,i,6}^\mu) \end{aligned} \quad (6.55)$$

对于 t 道, 情况会复杂一些,

$$\begin{aligned} q_\nu \mathcal{M}_{J,i,3}^{\mu\nu} &= \epsilon_{3ij} \tau_j \frac{F_\pi q^2}{q^2 - m_\pi^2} \frac{(2q - k)^\mu}{t - m_\pi^2} g_{\pi N} \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \\ &= i \hat{m} \mathcal{M}_{JP,i,3}^\mu + \epsilon_{3ij} \tau_j \frac{(2q - k)^\mu}{t - m_\pi^2} F_\pi g_{\pi N} \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \\ &\equiv i \hat{m} \mathcal{M}_{JP,i,3}^\mu + \Delta \mathcal{M}_{i,3}^\mu \end{aligned} \quad (6.56)$$

这里我们定义 $\Delta \mathcal{M}_{i,3}^\mu$ 为了之后的讨论。类似 t 道的讨论,

$$q_\nu \mathcal{M}_{JA,i,4}^{\mu\nu} = i \hat{m} \mathcal{M}_{JP,i,4}^\mu + \Delta \mathcal{M}_{i,4}^\mu \quad (6.57)$$

$$\Delta \mathcal{M}_{i,4}^\mu = \epsilon_{3ij} \frac{\tau_j}{2} F_\pi \bar{u}(p_f) \left\{ \frac{g_{\pi N}}{m_N} \gamma^\mu + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A \frac{g_A}{F_\pi} [(k - q) \cdot k \gamma^\mu - (k - q)^\mu k] \right\} \gamma_5 u(p_i) \quad (6.58)$$

$$q_\nu \mathcal{M}_{JA,i,7}^{\mu\nu} = i \hat{m} \mathcal{M}_{JP,i,7}^\mu + \Delta \mathcal{M}_{i,7}^\mu \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{M}_{i,7}^\mu &= -\epsilon_{3ij} \frac{\tau_j}{2} g_A \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A \\ &\times \bar{u}(p_f) [\not{q}(q - k)^\mu - \gamma^\mu (q - k) \cdot q] \gamma_5 u(p_i) - \epsilon_{3ij} \frac{\tau_j}{2} F_\pi \Delta_{\pi N} \frac{g_{\pi N}}{m_N} \bar{u}(p_f) \gamma^\mu \gamma_5 u(p_i) \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$q_\nu \mathcal{M}_{JA,i,8}^{\mu\nu} = \Delta \mathcal{M}_{i,8}^\mu = -\epsilon_{3ij} \tau_j g_{\pi N} F_\pi \frac{q^\mu}{t - m_\pi^2} \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \quad (6.61)$$

将上式都加起来，首先能够得到 $i\hat{m}\mathcal{M}_{JP,i}^\mu$ ，另外会剩余几项，将这些剩余的项加起来，

$$\begin{aligned}
 \Delta\mathcal{M}_i^\mu &= \Delta\mathcal{M}_{i,3}^\mu + \Delta\mathcal{M}_{i,4}^\mu + \Delta\mathcal{M}_{i,7}^\mu + \Delta\mathcal{M}_{i,8}^\mu \\
 &= \epsilon_{3ij}\tau_j \frac{(q-k)^\mu}{t-m_\pi^2} F_\pi g_{\pi N} \bar{u}(p_f) \gamma_5 u(p_i) \\
 &\quad + \epsilon_{3ij} \frac{\tau_j}{2} \frac{F_\pi g_{\pi N}}{m_N} (1 - \Delta_{\pi N}) \bar{u}(p_f) \gamma^\mu \gamma_5 u(p_i) \\
 &\quad + \epsilon_{3ij} \frac{\tau_j}{2} \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_A g_A \bar{u}(p_f) [\gamma^\mu t - (k-q)^\mu (\not{k} - \not{q})] \gamma_5 u(p_i) \\
 &= \epsilon_{3ij} \langle N(p_f) | A_j^\mu(0) | N(p_i) \rangle
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

这样，就在手征拉氏量的角度上验证了 A-G 关系（到 $\mathcal{O}(p^3)$ 阶，也就是树图阶，不包括 π 圈图也不包括对电生有贡献但是对 A-G 关系无贡献的几项）。

7 $\gamma^* + N \rightarrow \pi + N$ 过程的分波奇异性

1 一般描述方法

这里主要基于 Kennedy 和 Spearman 提出的方法 [39], 详细的推导过程也可以参考 [40] 中分波奇异性那一章或者王宇飞师兄的笔记, 我们的记号和后文一致。这里方便起见令 $m_\pi = m, m_N = M$ 以示区分。

这里研究的是 $\gamma^* + N \rightarrow \pi + N'$ 的过程, 根据交叉对称性, 一个振幅可以同时描述 s, t, u 三个过程, 各个“道”束缚态极点位置和连续谱起点和光生一样

$$\begin{aligned} s : \quad & \gamma^* + N \rightarrow \pi + N' \quad \sigma_1 = M^2, \quad \rho_1 = (m + M)^2 \\ t : \quad & \gamma^* + \pi \rightarrow \bar{N} + N' \quad \sigma_2 = m^2, \quad \rho_2 = 4m^2 \\ u : \quad & \gamma^* + \bar{N}' \rightarrow \pi + \bar{N} \quad \sigma_3 = M^2, \quad \rho_3 = (m + M)^2 \end{aligned}$$

首先是 s 道的核子极点 $\sigma_1 = M^2$, 以及最重要的幺正割线 $[\rho_1 = (m + M)^2, +\infty)$ 。然后考虑在 s 平面定义 t, u 变量, 例如 t

$$\begin{aligned} t = & k^2 + m^2 - \frac{(s + k^2 - M^2)(s + m^2 - M^2)}{2s} \\ & + \left\{ [s^2 - 2(k^2 + M^2)s + (k^2 - M^2)^2] [s - (m - M)^2] [s - (m + M)^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{z_s}{2s} \end{aligned} \quad (7.1)$$

这里 z_s 是散射角, $Q^2 = -k^2 > 0$ 。从奇异性考虑, 根号下面式子的零点就是为了定义 t (以及 u) 而必须引入的枝点, 与普通 $2 \rightarrow 2$ 散射有区别的是根号式子里面与 k^2 有关的二次式判别式恒小于 0

$$\Delta_1 = 4(k^2 + M^2)^2 - 4(k^2 - M^2)^2 = 16k^2M^2 < 0$$

因而会引入两个复平面上共轭的两个奇点。所以这里需要引入从 $-\infty \rightarrow (m - M)^2$ 和 $(m + M)^2 \rightarrow +\infty$ 的割线以及从 $M^2 - Q^2 \pm 2iMQ$ 到 $M^2 - Q^2 \pm i\infty$ 的割线 (或者从 $M^2 - Q^2 - 2iMQ$ 到 $M^2 - Q^2 + 2iMQ$ 的割线)。

关于分波 T 矩阵元其他割线位置, 主要参考 [40], 这里只给出一些关键步骤。以 t 道为例子, 完整振幅可以写成一个色散积分

$$T(s, t) = C \int_{\sigma_2}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(s, t')}{t' - t} dt' \quad (7.2)$$

C 是相关常数, \mathcal{F} 是没有奇异性的谱函数, 分波振幅是完整振幅在转动函数 R^J 上的投影

$$T^J(s) = C \int_{-1}^1 dz_s R^J(z_s) \int_{\sigma_2}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(s, t')}{t' - t(s, z_s)} dt'$$

$$= C \int_{\sigma_2}^{\infty} \mathcal{F}(s, t') dt' \int_{-1}^1 dz_s \frac{R^J(z_s)}{\alpha(t', s) - \beta(s) z_s} \quad (7.3)$$

积分 $\int_{\sigma_2}^{\infty}$ 理解成 $t' = \sigma_2$ 时的值加上 $\int_{\rho_2}^{\infty}$ 的积分。奇异性来源于 α, β 的各类取值。可以证明，最终的奇异性主要来源于对数函数的奇异性

$$\ln(\alpha + \beta) - \ln(\alpha - \beta) \quad (7.4)$$

一般情况下，枝点所满足的方程就是对数函数宗量取值为 0 的解

$$\alpha(t', s) = \pm \beta(s) \quad (7.5)$$

其中

$$\alpha(t', s) = t' - \left[m_1^2 + m_3^2 - \frac{(s + m_1^2 - m_2^2)(s + m_3^2 - m_4^2)}{2s} \right] \quad (7.6)$$

$$\beta(s) = \left\{ [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2] [s - (m_3 + m_4)^2] [s - (m_3 - m_4)^2] \right\}^{1/2} / (2s) \quad (7.7)$$

注意到平庸解就是 $s = 0, \infty$ ，因而可以引入一条 $-\infty$ 到 0 的割线。非平庸解也即 $\alpha^2 = \beta^2$ 方程的其他解，可以得到

$$as^2 + 2bs + c = 0 \quad (7.8)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= t' \\ 2b &= t'^2 - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) t' + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2) \\ c &= (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) t' + (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_4^2) \end{aligned} \quad (7.9)$$

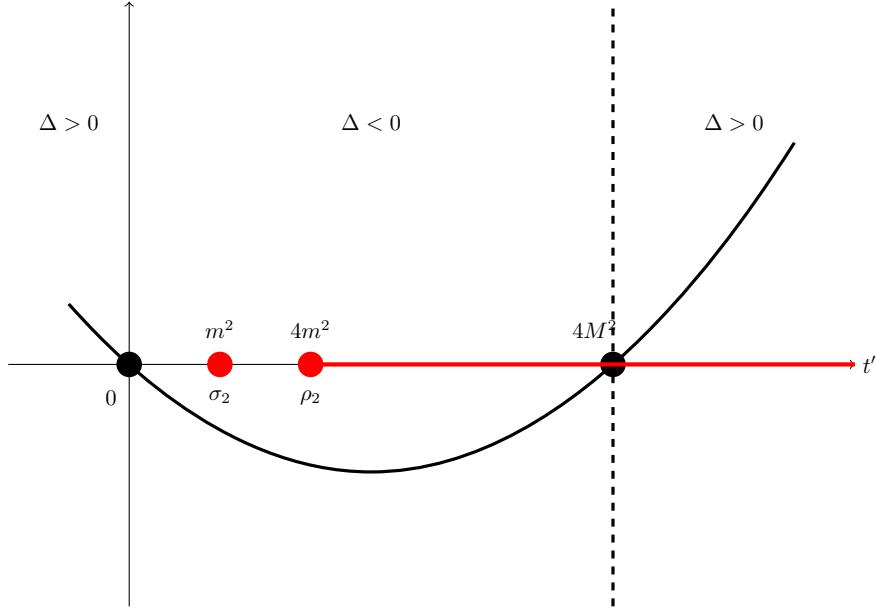
下面考虑 u 道的时候只需要将 m_3 和 m_4 互换即可。

2 t 道贡献的奇异性

t 道 $as^2 + 2bs + c = 0$ 判别式（不要与上面的判别式混淆）为

$$\Delta = 4(b^2 - ac) = [t'^2 - 2(k^2 + m^2)t' + (k^2 - m^2)^2](t' - 4M^2)t' \quad (7.10)$$

与一般两两散射不同， Δ 符号只在 $0, 4M^2$ 两处改变

图 13: 判别式 Δ 的符号以及 t 道能谱 σ_2 和 $t \geq \rho_2$ 的位置 (红线)

当 $t' < 4M^2$ (也就是 $t' = \sigma_2 = m^2, t' \geq \rho_2 = 4m^2$) 时, $\Delta < 0$, 此时会有复平面上的枝点。下面主要讨论复平面上的枝点轨迹。

令 (7.8) 中 $s = x + iy$, 则有

$$a(x^2 - y^2) + 2bx + c = 0 \quad (7.11)$$

$$y(ax + b) = 0 \quad (7.12)$$

消去参数 t' 可以得到 x, y 满足的方程

$$\left[-\left(x - \frac{1}{2}\Sigma \right) \pm \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\Sigma \right)^2 - \lambda} \right] (x^2 + y^2 - \kappa) = \nu \quad (7.13)$$

并且

$$\Sigma = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = k^2 + 2M^2 + m^2 \quad (7.14)$$

$$\lambda = (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2) = 0 \quad (7.15)$$

$$\kappa = (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) = (M^2 - k^2)(M^2 - m^2) \quad (7.16)$$

$$\nu = (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_4^2) = M^2(m^2 - k^2)^2 \quad (7.17)$$

可以得到一个复杂的方程

$$x^2 + y^2 = (M^2 - k^2)(M^2 - m^2) + \frac{M^2(m^2 - k^2)^2}{k^2 + 2M^2 + m^2 - 2x} \quad (7.18)$$

如果我们只考虑 $Q^2 \sim 0.1\text{GeV}^2$ 这个能标, 上述方程最后一项数值上完全可以忽略 [39], 这个近似下会有一条圈割线 $x^2 + y^2 = (M^2 + Q^2)(M^2 - m^2)$, 当然和光生类似, 圈割线不会是完整的圆。对于连续谱, 当 t' 从 ρ_2 到 $+\infty$, 直线方程 $x = -b/a$ 取值为 $(-\infty, L]$, 其中

$$L = \begin{cases} \frac{1}{2}\Sigma - \sqrt{\lambda} & (\lambda \geq \rho_2^2) \\ \frac{1}{2}\Sigma - \frac{1}{2}\left(\rho_2 + \frac{\lambda}{\rho_2}\right) & (\lambda < \rho_2^2) \end{cases} \quad (7.19)$$

电生中 $\rho_2^2 = 16m^4 > \lambda = 0$, 因而有

$$L = \frac{1}{2}\Sigma - \frac{1}{2}\left(\rho_2 + \frac{\lambda}{\rho_2}\right) = \frac{-Q^2 + 2M^2 - 3m^2}{2} \quad (7.20)$$

只有 $x < L$ 的圈割线部分才会出现。

另一个 s 平面上的奇异性来源于 $\sigma_2 = m^2$, 此时有 $\Delta < 0$, 枝点落在线 $x = -\frac{1}{2\sigma_2}(\sigma_2^2 - \sigma_2\Sigma + \lambda) = (-Q^2 + 2M^2)/2$ 上, 将 x 带入 $a(x^2 - y^2) + 2bx + c = 0$, 这里

$$a = m^2, \quad b = \frac{1}{2}m^2(Q^2 - 2M^2), \quad c = m^2(M^2 - m^2)(M^2 + Q^2) + M^2(m^2 + Q^2)^2 \quad (7.21)$$

得到

$$y^2 = 4M^2Q^2 - m^2Q^2 - \frac{Q^4}{4} + \frac{M^2}{m^2}Q^4 \quad (7.22)$$

一般文献中 [39, 40] 都认为这对共轭的枝点仅仅需要引入一条垂直于 x 轴的短割线也就是垂线与二次曲线 (7.11) 所截的一段。但是原则上来说, 在微扰论中这类割线来源于对数的奇异性, 而对数 $\ln(f)$ 割线数学上定义成 $\text{Arg}(f) = -\pi$ 的曲线, 这一般不能直接将枝点简单用直线连接。

这里的一个启发是可以对比下光生中的 t 道极点贡献, 我们来看一下极点贡献是否总是能够像 [39] 中那样产生对应的奇异性。由上知道

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(s - Q^2 - M^2)(s + m^2 - M^2)}{2s} + Q^2, \\ \beta &= \frac{\sqrt{s - (m + M)^2}\sqrt{s - (m - M)^2}\sqrt{s^2 - 2(M^2 - Q^2)s + (Q^2 + M^2)^2}}{2s} \end{aligned} \quad (7.23)$$

光生的 α, β 可以简单地把 Q^2 取成 0, 得到

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(s - M^2)(s + m^2 - M^2)}{2s}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{s - (m + M)^2}\sqrt{s - (m - M)^2}(s - M^2)}{2s} \end{aligned} \quad (7.24)$$

也就是说根据 (7.4), 我们有

$$\ln(\alpha + \beta) - \ln(\alpha - \beta)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left(\frac{(s - M^2)(s + m^2 - M^2)}{2s} + \frac{(s - M^2)\sqrt{s - (m + M)^2}\sqrt{s - (m - M)^2}}{2s} \right) \\
&\quad - \ln \left(\frac{(s - M^2)(s + m^2 - M^2)}{2s} - \frac{(s - M^2)\sqrt{s - (m + M)^2}\sqrt{s - (m - M)^2}}{2s} \right) \\
&= \ln \left((s + m^2 - M^2) + \sqrt{s - (m + M)^2}\sqrt{s - (m - M)^2} \right) \\
&\quad - \ln \left((s + m^2 - M^2) - \sqrt{s - (m + M)^2}\sqrt{s - (m - M)^2} \right)
\end{aligned} \tag{7.25}$$

可以看到如果不那么小心的话会得出一个（光生中） t 道 π 极点给出 s 平面上核子极点奇异性的一个结果，但我们知道这是错误的。核子极点 $s - M^2$ 项作为公因式同时出现在 $\ln(\alpha + \beta)$ 和 $\ln(\alpha - \beta)$ 中，会直接被消去，单独看一部分确实会产生奇异性，但是整体上这个奇异性并不是由 t 道束缚态得到的，这是值得仔细注意的。

光子如果是虚的那么结果会不太一样，可以看到虚光子情况下

$$\begin{aligned}
&\ln(\alpha + \beta) - \ln(\alpha - \beta) \\
&= \ln \left(\frac{(s - Q^2 - M^2)(s + m^2 - M^2)}{2s} + Q^2 + \frac{\sqrt{s^2 - 2(M^2 - Q^2)s + (Q^2 + M^2)^2}\sqrt{s - (m + M)^2}\sqrt{s - (m - M)^2}}{2s} \right) \\
&\quad - \ln \left(\frac{(s - Q^2 - M^2)(s + m^2 - M^2)}{2s} + Q^2 - \frac{\sqrt{s^2 - 2(M^2 - Q^2)s + (Q^2 + M^2)^2}\sqrt{s - (m + M)^2}\sqrt{s - (m - M)^2}}{2s} \right)
\end{aligned} \tag{7.26}$$

由于运动学上的区别，并没有方式能够消除这个“极点贡献”。因而可以总结，电生也即考虑到虚光子情况， t 道 π 极点会给出新的奇异性。

最后是实轴上的奇异性，简单来说 $t' \geq 4M^2$ 会给出实轴上一条无穷长的割线。枝点位置由二次曲线 $a(x^2 - y^2) + 2bx + c = 0$ 和 $y = 0$ 的交点确定。消去参数 t' 得到

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm (b^2 - ac)^{\frac{1}{2}}}{a} \\
&= \frac{1}{2t'} \left\{ -t'^2 + t'(k^2 + 2M^2 + m^2) \pm [t'^2 - 2(k^2 + m^2)t' + (k^2 - m^2)^2]^{\frac{1}{2}}(t - 4M^2)^{\frac{1}{2}}t'^{\frac{1}{2}} \right\}
\end{aligned} \tag{7.27}$$

当 t' 扫过 $4M^2$ 一直到 $+\infty$ 时，正解枝点位置扫过 $-\infty \rightarrow \frac{1}{2}(m^2 - 2M^2 - Q^2)$ 的范围，负解枝点位置扫过 $\frac{1}{2}(m^2 - 2M^2 - Q^2) \rightarrow 0$ ，所以总的来说贡献一条 $-\infty$ 到 0 的割线。

3 u 道贡献的奇异性

下面讨论 u 道的情况，分析方式完全类似，与 t 道的一个区别是末态两粒子质量互换 $m_3 \leftrightarrow m_4$ ，另一个是散射角 $z_s \rightarrow -z_s$ ，这样就能对应上之前的分析了。

同样解 u 道的 (7.8)，判别式

$$\Delta = 4(b^2 - ac) = [u'^2 - 2u'(k^2 + M^2) + (k^2 - M^2)^2] [u' - (m + M)^2] [u' - (m - M)^2] \tag{7.28}$$

类似的，判别式改变符号只出现在 $u' = (M \pm m)^2$ 两处

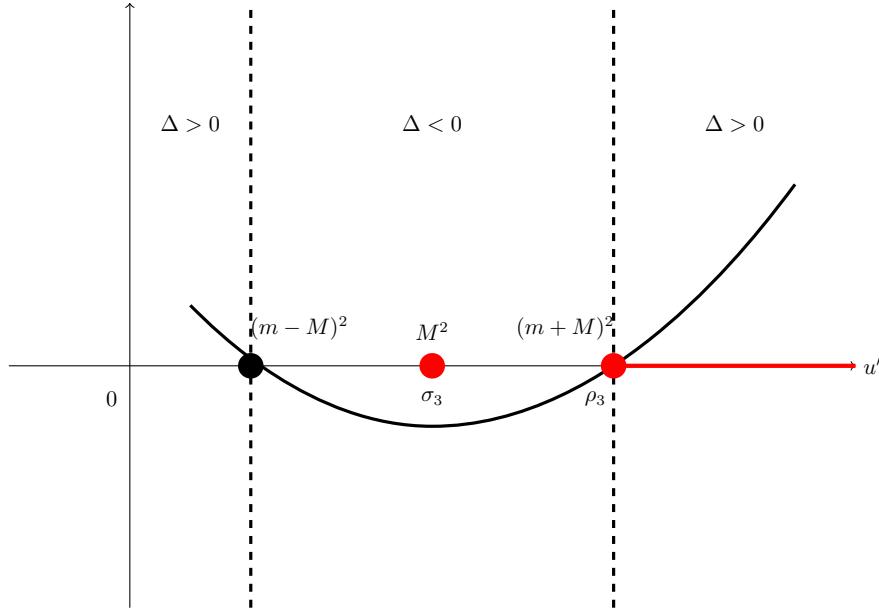


图 14: 判别式 Δ 的符号以及 u 道能谱 σ_3 和 $t \geq \rho_3$ 的位置 (红线)

又知道 u 道 $\sigma_3 = M^2, \rho_3 = (m + M)^2$, 因而奇异性只有一个核子极点贡献复平面上的割线段以及连续谱贡献的实轴上的奇异性。

复平面上割线唯一可能贡献是 $\sigma_3 = M^2$, 此时 $\Delta < 0$, 根据上述分析, 枝点落在直线

$$x = -\frac{1}{2M^2} (M^4 - M^2(k^2 + 2M^2 + m^2) + (M^2 - m^2)(k^2 - M^2)) = M^2 - \frac{m^2 Q^2}{2M^2} \quad (7.29)$$

要得到具体位置, 还需要解出二次曲线 $a(x^2 - y^2) + 2bx + c = 0$ 与直线的交点, 这里注意 a, b, c 参数与 t 道不同, 要将 $m_3 \leftrightarrow m_4$ 。经过计算可以知道

$$a = M^2, \quad b = -M^4 - \frac{1}{2}m^2 k^2, \quad c = -3k^2 m^2 M^2 + M^6 + k^4 m^2 + k^2 m^4$$

得到纵坐标满足

$$y^2 = 4m^2 Q^2 + \frac{5}{4} \frac{m^2}{M^2} Q^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{M^2} \right)^2 Q^4 \frac{m^2}{M^2} m^2 Q^2 \quad (7.30)$$

与 t 道类似, 我们也考虑一下光生和电生中 $\sigma_3 = M^2$ 导致的奇异性异同, α, β 可以得到

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(s - Q^2 - M^2)(s + M^2 - m^2)}{2s} + Q^2, \\ \beta &= \frac{\sqrt{s - (m + M)^2} \sqrt{s - (m - M)^2} \sqrt{s^2 - 2(M^2 - Q^2)s + (Q^2 + M^2)^2}}{2s} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Q^2 取为 0 就得到了光生的情况

$$\alpha = \frac{(s - M^2)(s + M^2 - m^2)}{2s},$$

$$\beta = \frac{\sqrt{s - (m + M)^2} \sqrt{s - (m - M)^2} (s - M^2)}{2s} \quad (7.32)$$

有了 t 道的经验，这里可以直接看出来奇异性 $(s - M^2)$ 同样地被消去了。但是在虚光子情况下类似于 t 道（奇异性会保留）。

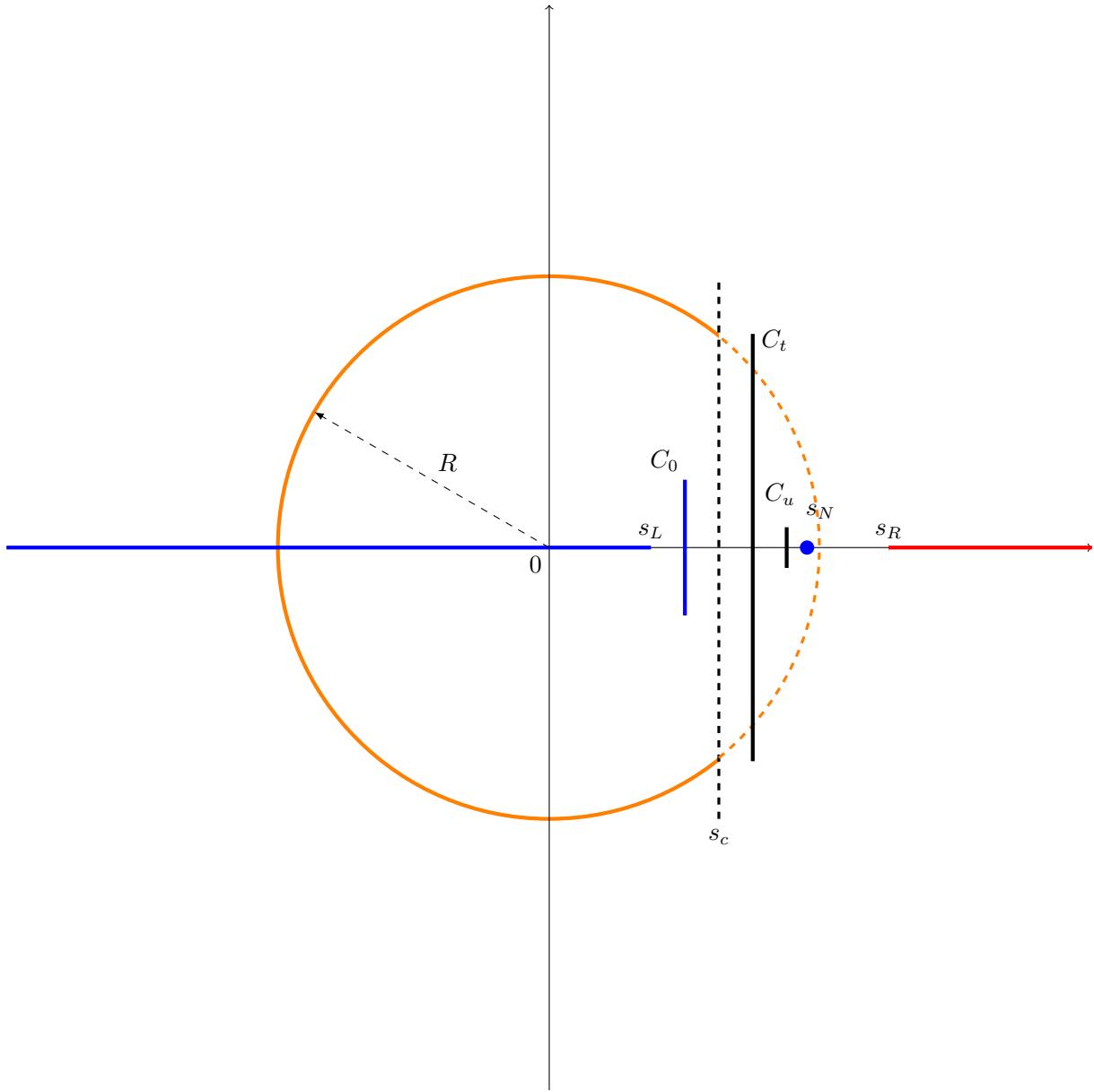
最后是 u 道的实轴上的奇异性，当 $u' \geq (m + M)^2$ 时会给出实轴上一条无穷长的割线。枝点的位置

$$x = \frac{-u'^2 + (k^2 + 2M^2 + m^2)u' + (M^2 - m^2)(M^2 - k^2)}{2u'} \\ \pm \frac{\left\{ [u'^2 - 2u'(k^2 + M^2) + (k^2 - M^2)^2]^{\frac{1}{2}} [u' - (m + M)^2]^{\frac{1}{2}} [u' - (m - M)^2]^{\frac{1}{2}} \right\}}{2u'} \quad (7.33)$$

无论正解负解，当 u' 从 $(m+M)^2$ 扫描到正无穷时，都会产生 $-\infty \rightarrow [M^3 - m^2M - m(M^2 + Q^2)] / (m + M)$ 的枝点，最后可以定义一条 $-\infty$ 到 $[M^3 - m^2M - m(M^2 + Q^2)] / (m + M)$ 的割线²¹。

综上所有情况，最后理论上的奇异性（这里只考虑 $Q^2 \sim m^2$ ）的大概图示如下：

²¹ 数值上 $(m - M)^2 > M(M^2 - m^2 - mM) / (m + M) > [M^3 - m^2M - m(M^2 + Q^2)] / (m + M)$

图 15: s 平面 (虚光子) 光生的分波奇异性。

$$s_N = M^2, s_L = (m - M)^2, s_R = (m + M)^2, s_c = M^2 - \frac{Q^2}{2} - \frac{3m^2}{2}, R^2 = (M^2 + Q^2)(M^2 - m^2)$$

三个复平面的枝点位置（另外三个都是关于实轴对称的）

$$C_0 = M^2 - Q^2 + i2MQ,$$

$$C_t = M^2 - \frac{Q^2}{2} + i\sqrt{4M^2Q^2 - m^2Q^2 - \frac{Q^4}{4} + \frac{M^2}{m^2}Q^4},$$

$$C_u = M^2 - \frac{m^2}{2M^2}Q^2 + i\sqrt{4m^2Q^2 - \frac{m^2}{M^2}m^2Q^2 + \frac{5m^2}{4M^2}Q^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{M^2}\right)^2Q^4}$$

上图所有奇异性大致不严格地可以分为两块，动力学奇异性和运动学奇异性。下面简要说

明一下

- 弧正割线（红色）： $s \in [s_R, \infty)$, 来自 s 道连续谱的贡献
- 运动学割线（蓝色）： $s \in (-\infty, s_L]$ 以及 C_0^\dagger 到 C_0 的割线（或者 C_0, C_0^\dagger 到无穷远点的割线）
- 动力学圈割线（橙色）： t 道连续谱的贡献 $4m_\pi^2 \leq t' \leq 4m_N^2$, 由于我们考虑的过程初末态粒子并非都是强作用粒子, 导致圈不会闭合, 只有虚线 $\text{Re}(s) = s_c$ 左边的才能存在
- t 道动力学割线：来源于 t 道交换 π 产生的束缚态极点会导致两个枝点 C_t, C_t^\dagger
- u 道动力学割线：来源于 u 道交换 N 产生的束缚态极点会导致两个枝点 C_u, C_u^\dagger
- 运动学极点（蓝色）：来自 CGLN 振幅分解 (3.16) 中引入的 $s = M^2$ 的核子极点

另外可以看到, 如果考虑光子点 $Q^2 = 0$, 那么 $C_0 = C_t = C_u = 0$, 完全退化为光生的结果, 这说明我们的推导都是自洽的。

8 分波中的运动学因子

对于 $\gamma^*(k) + N(p_1) \rightarrow \pi(q) + N'(p_2)$, 不妨设散射发生在 $x - z$ 平面, 散射角定义为光子和出射 π 的夹角, 动量定义成

$$\begin{aligned} k &= (\sqrt{k_1^2 - Q^2}, 0, 0, k_1) \\ p_1 &= (\sqrt{k_1^2 + m_N^2}, 0, 0, -k_1) \\ q &= (\sqrt{k_2^2 + m_\pi^2}, k_2 \sin \theta, 0, k_2 \cos \theta) \\ p_2 &= (\sqrt{k_2^2 + m_N^2}, -k_2 \sin \theta, 0, -k_2 \cos \theta) \end{aligned}$$

其中

$$k_1 = \frac{\lambda(-Q^2, m_N^2, s)^{1/2}}{2\sqrt{s}}, \quad k_2 = \frac{\lambda(m_\pi^2, m_N^2, s)^{1/2}}{2\sqrt{s}}$$

λ 是所谓的 Källén 函数 $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$ 。虚光子的极化矢量 (沿 z 轴)

$$\epsilon(\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mp 1, -i, 0), \quad \epsilon(0) = \frac{1}{Q}(k_1, 0, 0, \sqrt{k_1^2 - Q^2}) \quad (8.1)$$

对于类空虚光子, 极化矢量满足完备性关系 [41]

$$\sum_{\lambda_\gamma=0,\pm 1} (-1)^{\lambda_\gamma} \epsilon_\mu(\lambda_\gamma) \epsilon_\nu^*(\lambda_\gamma) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

对于核子的旋量, 我们这里采用手征表示, 旋量表达式为

$$\bar{u}(p_2, s) = (\chi^{(s)\dagger} \sqrt{p_2 \cdot \bar{\sigma}} \quad \chi^{(s)\dagger} \sqrt{p_2 \cdot \sigma})$$

以及

$$u(p_1, r) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1 \cdot \bar{\sigma}} \eta^{(r)} \\ \sqrt{p_1 \cdot \bar{\sigma}} \eta^{(r)} \end{pmatrix}$$

泡利矩阵这里约定四矢量形式为: $\sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma})$, γ 矩阵以及 γ_5 的定义

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

核子螺旋度为 + 的态, 对应二分量旋量 χ, η 取相应 $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 本征值为 +1 的本征态; 螺旋度为 - 的则对应本征值为 -1。利用 $k \cdot \sigma = E_k - 2|\mathbf{k}| \hat{h}$, $k \cdot \bar{\sigma} = E_k + 2|\mathbf{k}| \hat{h}$, 可以简化结果。相应的本征态²²

$$\eta^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{(-)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

²²这里由于核子动量都取成了反向的, 因而本征态与一般的本征态刚好反过来

$$\chi^{(+)} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi^{(-)} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

下面直接计算 6 个洛伦兹结构与旋量和极化矢量的缩并，这里考虑的是螺旋度情况，根据之前的分析一共有 6 个独立的螺旋度振幅，因而每个洛伦兹结构都要计算 6 个情况，一共有 $6 \times 6 = 36$ 个独立的结果，这些结果也会贡献奇异性，这里我们统一称作运动学因子。作为例子，我们详细写出 $M_{1(+,++)}^\mu$ 的计算过程

$$\begin{aligned} & \epsilon_\mu(+) \bar{u}(p_2, +) M_1^\mu(p_1, +) u(p_1, +) \\ &= \epsilon_\mu(+) \left(\chi^{(+)\dagger} \sqrt{2+} \quad \chi^{(+)\dagger} \sqrt{2-} \right) \frac{1}{2} \gamma_5 (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) \begin{pmatrix} \eta^{(+)} \sqrt{1-} \\ \eta^{(+)} \sqrt{1+} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.4)$$

其中

$$\sqrt{\sqrt{k_2^2 + m_N^2} \pm k_2} \equiv \sqrt{2\pm}, \quad \sqrt{\sqrt{k_1^2 + m_N^2} \pm k_1} \equiv \sqrt{1\pm}$$

之后将 γ 矩阵用泡利矩阵表示²³（这里 $\mu, \nu \neq 0$ ）

$$\begin{aligned} & \gamma_5 (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) \\ &= k_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} [\sigma^\mu, \sigma^\nu] \end{aligned} \quad (8.5)$$

进一步得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \epsilon_\mu(+) \left(\chi^{(+)\dagger} \sqrt{2+} \quad \chi^{(+)\dagger} \sqrt{2-} \right) k_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} [\sigma^\mu, \sigma^\nu] \begin{pmatrix} \eta^{(+)} \sqrt{1-} \\ \eta^{(+)} \sqrt{1+} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2+} \sqrt{1-} - \sqrt{2-} \sqrt{1+}) \epsilon_\mu(+) k_\nu \chi^{(+)\dagger} [\sigma^\mu, \sigma^\nu] \eta^{(+)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} (2ik_1 \sigma^2 + 2k_1 \sigma^1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\sqrt{2+} \sqrt{1-} - \sqrt{2-} \sqrt{1+}) \\ &= \sqrt{2} k_1 \sin \frac{\theta}{2} \left(\sqrt{2-} \sqrt{1+} - \sqrt{2+} \sqrt{1-} \right) \end{aligned} \quad (8.6)$$

如果考虑到 $\mu, \nu = 0$ ，那么还会有两项非零贡献 $\gamma_5 (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) = 2k_\nu \sigma^\nu$ ($\mu = 0, \nu = i$) 以及 $\gamma_5 (\gamma^\mu \not{k} - \not{k} \gamma^\mu) = -2\sqrt{k_1^2 - Q^2} \sigma^\mu$ ($\mu = i, \nu = 0$)。

对于 M_1 ，非零情况下只有 $\mu = i, \nu = 0$ 会多处一项

$$-\sqrt{k_1^2 - Q^2} \epsilon_\mu(+) \left(\chi^{(+)\dagger} \sqrt{2+} \quad \chi^{(+)\dagger} \sqrt{2-} \right) \sigma^\mu \begin{pmatrix} \eta^{(+)} \sqrt{1-} \\ \eta^{(+)} \sqrt{1+} \end{pmatrix}$$

²³注意，这只是简写，原则上是两个矩阵的直积

$$= \sqrt{2} \sqrt{k_1^2 - Q^2} \sin \frac{\theta}{2} (\sqrt{2+} \sqrt{1-} + \sqrt{2-} \sqrt{1+}) \quad (8.7)$$

其他情况都可以依次计算出来

$$M_{1(+,++)} = \sqrt{2} k_1 \sin \frac{\theta}{2} (\sqrt{2-} \sqrt{1+} - \sqrt{2+} \sqrt{1-}) + \sqrt{2} \sqrt{k_1^2 - Q^2} \sin \frac{\theta}{2} (\sqrt{2+} \sqrt{1-} + \sqrt{2-} \sqrt{1+}) \quad (8.8)$$

$$M_{1(+,-+)} = 0 \quad (8.9)$$

$$M_{1(+,0+)} = Q \cos \frac{\theta}{2} (\sqrt{2+} \sqrt{1-} + \sqrt{2-} \sqrt{1+}) \quad (8.10)$$

$$M_{1(-,++)} = \sqrt{2} k_1 \cos \frac{\theta}{2} (\sqrt{2-} \sqrt{1-} - \sqrt{2+} \sqrt{1+}) - \sqrt{2} \sqrt{k_1^2 - Q^2} \cos \frac{\theta}{2} (\sqrt{2+} \sqrt{1+} + \sqrt{2-} \sqrt{1-}) \quad (8.11)$$

$$M_{1(-,-+)} = 0 \quad (8.12)$$

$$M_{1(-,0+)} = Q \sin \frac{\theta}{2} (\sqrt{2+} \sqrt{1+} + \sqrt{2-} \sqrt{1-}) \quad (8.13)$$

作为一个检验，我们由宇称变换性质知道一定有 $M_{(+,++)} = M_{(--)}$ ，直接计算 $M_{1(--)}$ 表明这是满足的。下面不加证明地给出其余结果

$$M_{2(+,++)} = \frac{k_2 \sin \theta}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} k^2 + m_N^2 - s \right) \cos \frac{\theta}{2} (\sqrt{2-} \sqrt{1+} - \sqrt{2+} \sqrt{1-}) \quad (8.14)$$

$$M_{2(+,-+)} = \frac{k_2 \sin \theta}{\sqrt{2}} \left(s - \frac{1}{2} k^2 - m_N^2 \right) \cos \frac{\theta}{2} (\sqrt{2-} \sqrt{1+} - \sqrt{2+} \sqrt{1-}) \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} M_{2(+,0+)} &= \frac{1}{Q} \cos \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{k_1}{2} \left(\sqrt{k_1^2 + m_N^2} + \sqrt{k_2^2 + m_N^2} \right) + \sqrt{k_1^2 - Q^2} \frac{(k_1 + k_2 \cos \theta)}{2} \right) (m_\pi^2 - t) \right. \\ &\quad \left. - \left(k_1 \left(\sqrt{k_2^2 + m_\pi^2} - \frac{1}{2} \sqrt{k_1^2 - Q^2} \right) - \sqrt{k_1^2 - Q^2} \left(k_2 \cos \theta - \frac{1}{2} k_1 \right) \right) \left(\frac{s-u}{2} \right) \right] (\sqrt{2-} \sqrt{1+} - \sqrt{2+} \sqrt{1-}) \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$M_{2(-,++)} = \frac{k_2 \sin \theta}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} k^2 + m_N^2 - s \right) \sin \frac{\theta}{2} (\sqrt{2+} \sqrt{1+} - \sqrt{2-} \sqrt{1-}) \quad (8.17)$$

$$M_{2(-,-+)} = \frac{k_2 \sin \theta}{\sqrt{2}} \left(s - \frac{1}{2} k^2 - m_N^2 \right) \sin \frac{\theta}{2} (\sqrt{2+} \sqrt{1+} - \sqrt{2-} \sqrt{1-}) \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} M_{2(-,0+)} &= \frac{1}{Q} \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{k_1}{2} \left(\sqrt{k_1^2 + m_N^2} + \sqrt{k_2^2 + m_N^2} \right) + \sqrt{k_1^2 - Q^2} \frac{(k_1 + k_2 \cos \theta)}{2} \right) (m_\pi^2 - t) \right. \\ &\quad \left. - \left(k_1 \left(\sqrt{k_2^2 + m_\pi^2} - \frac{1}{2} \sqrt{k_1^2 - Q^2} \right) - \sqrt{k_1^2 - Q^2} \left(k_2 \cos \theta - \frac{1}{2} k_1 \right) \right) \left(\frac{s-u}{2} \right) \right] (\sqrt{2+} \sqrt{1+} - \sqrt{2-} \sqrt{1-}) \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} M_{3(+,++)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) (t - m_\pi^2 - k^2) (\sqrt{2-} \sqrt{1-} + \sqrt{2+} \sqrt{1+}) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} k_2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1-} \right] \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$M_{3(+,-+)} - \frac{1}{\sqrt{2}} k_2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1-} \right] \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} M_{3(+,0+)} & \frac{1}{Q} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{t - m_\pi^2 - k^2}{2} \right) \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1+} + \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1-} \right] \\ & + \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2} Q} \left(k_1 \sqrt{k_2^2 + m_\pi^2} - \sqrt{k_1^2 - Q^2} \cdot k_2 \cos \theta \right) \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1-} \right] \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} M_{3(-,++)} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) (t - m_\pi^2 - k^2) \left(\sqrt{2+} \sqrt{1-} + \sqrt{2-} \sqrt{1+} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} k_2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1-} \right] \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} M_{3(-,-+)} & - \frac{1}{\sqrt{2}} k_2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1-} \right] \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} M_{3(-,0+)} & \frac{1}{Q} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{t - m_\pi^2 - k^2}{2} \right) \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1+} + \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1-} \right] \\ & + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2} Q} \left(k_1 \sqrt{k_2^2 + m_\pi^2} - \sqrt{k_1^2 - Q^2} \cdot k_2 \cos \theta \right) \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1-} \right] \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} M_{4(+,++)} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} (s - u) \left(\sqrt{2-} \sqrt{1-} + \sqrt{2+} \sqrt{1+} \right) \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} k_2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1-} \right] - 2m_N M_{1(+,++)} \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} M_{4(+,-+)} & \frac{1}{\sqrt{2}} k_2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1-} \right] - 2m_N M_{1(+,-+)} \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} M_{4(+,0+)} & \frac{1}{Q} \cos \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1+} + \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1-} \right] \left(\frac{u - s}{2} \right) \\ & + \frac{1}{Q} \cos \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2+} \sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2-} \sqrt{1-} \right] \\ & \times \left(k_1 \left(\sqrt{k_1^2 + m_N^2} + \sqrt{k_2^2 + m_N^2} \right) + \sqrt{k_1^2 - Q^2} (k_1 + k_2 \cos \theta) \right) - 2m_N M_{1(+,0+)} \end{aligned} \quad (8.28)$$

$$M_{4(-,++)} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} (u - s) \left(\sqrt{2-} \sqrt{1+} + \sqrt{2+} \sqrt{1-} \right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}k_2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2-}\sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2+}\sqrt{1-} \right] - 2m_N M_{1(-,++)} \quad (8.29)$$

$$M_{4(-,-+)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2-}\sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2+}\sqrt{1-} \right] - 2m_N M_{1(-,-+)} \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} M_{4(-,0+)} & \quad \frac{1}{Q} \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2-}\sqrt{1+} + \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2+}\sqrt{1-} \right] \left(\frac{u-s}{2} \right) \\ & + \frac{1}{Q} \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2-}\sqrt{1+} - \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2+}\sqrt{1-} \right] \\ & \times \left(k_1 \left(\sqrt{k_1^2 + m_N^2} + \sqrt{k_2^2 + m_N^2} \right) + \sqrt{k_1^2 - Q^2} (k_1 + k_2 \cos \theta) \right) - 2m_N M_{1(-,0+)} \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$M_{5(+,++)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 k^2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \left(\sqrt{2+}\sqrt{1-} - \sqrt{2-}\sqrt{1+} \right) \quad (8.32)$$

$$M_{5(+,-+)} \quad - \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 k^2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \left(\sqrt{2+}\sqrt{1-} - \sqrt{2-}\sqrt{1+} \right) \quad (8.33)$$

$$M_{5(+,0+)} \quad \frac{1}{Q} k^2 \cos \frac{\theta}{2} \left(k_1 \sqrt{k_2^2 + m_\pi^2} - k_2 \cos \theta \sqrt{k_1^2 - Q^2} \right) \left(\sqrt{2+}\sqrt{1-} - \sqrt{2-}\sqrt{1+} \right) \quad (8.34)$$

$$M_{5(-,++)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 k^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \left(\sqrt{2-}\sqrt{1-} - \sqrt{2-}\sqrt{1-} \right) \quad (8.35)$$

$$M_{5(-,-+)} \quad - \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 k^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \left(\sqrt{2-}\sqrt{1-} - \sqrt{2-}\sqrt{1-} \right) \quad (8.36)$$

$$M_{5(-,0+)} \quad \frac{1}{Q} k^2 \sin \frac{\theta}{2} \left(k_1 \sqrt{k_2^2 + m_\pi^2} - k_2 \cos \theta \sqrt{k_1^2 - Q^2} \right) \left(\sqrt{2-}\sqrt{1-} - \sqrt{2-}\sqrt{1-} \right) \quad (8.37)$$

$$M_{6(+,++)} \quad - \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} k^2 \left(\sqrt{2-}\sqrt{1-} + \sqrt{2+}\sqrt{1+} \right) \quad (8.38)$$

$$M_{6(+,-+)} \quad 0 \quad (8.39)$$

$$M_{6(+,0+)} \quad \frac{1}{Q} k^2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2+}\sqrt{1+} + \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2-}\sqrt{1-} \right] \quad (8.40)$$

$$M_{6(-,++)} \quad \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} k^2 \left(\sqrt{2+}\sqrt{1-} + \sqrt{2-}\sqrt{1+} \right) \quad (8.41)$$

$$M_{6(-,-+)} \quad 0 \quad (8.42)$$

$$M_{6(-,0+)} \quad \frac{1}{Q} k^2 \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} + k_1 \right) \sqrt{2-}\sqrt{1+} + \left(\sqrt{k_1^2 - Q^2} - k_1 \right) \sqrt{2+}\sqrt{1-} \right] \quad (8.43)$$

9 分波计算以及归一化约定

这里我们采用

$$\mathcal{M}_{H_s}^{IJ}(s) = \frac{1}{32\pi} \int d\cos\theta \mathcal{M}_{H_s}^I(s, t) d_{\lambda, \lambda'}^J(\theta)$$

作为分波计算的出发点, H_s 代指各个螺旋度状态 $H_s \equiv \{\lambda_4, \lambda_1\lambda_2\}$, 其中 $\lambda \equiv \lambda_1 - \lambda_2$ 以及 $\lambda' \equiv \lambda_3 - \lambda_4$ 。由于我们这里考虑的是 S_{11} 分波(这里沿用 πN 散射分波记号 L_{2I2J} , 相当于 $I = 1/2, J = 1/2$), 根据分析, 有 6 个独立的螺旋度结构, 对应的维格纳 d 函数分别是

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	H_s	λ	λ'	$d_{\lambda, \lambda'}^J(\theta)$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	+, ++	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sin(\frac{\theta}{2})$
-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	+, -+	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	\
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	+, 0+	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\cos(\frac{\theta}{2})$
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-, ++	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\cos(\frac{\theta}{2})$
-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-, -+	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	\
0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-, 0+	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sin(\frac{\theta}{2})$

表 3: 螺旋度标记

S_{11} 对应的振幅和螺旋度振幅之间的联系可以利用 P 宇称来确定(可以预期仅仅差一个归一化因子)。对于所有粒子有质量的二体系统(这里虚光子也当作有质量粒子), 螺旋度基在宇称变换下有 [23]

$$P |JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \eta_1\eta_2(-)^{J-s_1-s_2} |JM - \lambda_1 - \lambda_2\rangle \quad (9.1)$$

$\eta_{1,2}$ 分别是 1, 2 粒子的内禀宇称, 这里光子和 π 都是 -1, 核子是 +1。可以得到宇称对称的螺旋度基

$$\gamma^* N \quad \frac{1}{2}(|JM\lambda_1\lambda_2\rangle \pm (-1)^{J-\frac{1}{2}} |JM - \lambda_1 - \lambda_2\rangle) \quad (9.2)$$

$$\pi N \quad \frac{1}{2}(|JM\lambda_4\rangle \pm (-1)^{J+\frac{1}{2}} |JM - \lambda_4\rangle) \quad (9.3)$$

由此可以得到满足 S_{11} 所有量子数以及对称性的振幅

$$\mathcal{M}_{M,-}^{I=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{M}_{M, \lambda_4, \lambda_1\lambda_2}^{\frac{1}{2}} + \mathcal{M}_{M, -\lambda_4, \lambda_1\lambda_2}^{\frac{1}{2}} - \mathcal{M}_{M, \lambda_4, -\lambda_1-\lambda_2}^{\frac{1}{2}} - \mathcal{M}_{M, -\lambda_4, -\lambda_1-\lambda_2}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (9.4)$$

又由于这个过程 P 宇称守恒, 分波矩阵元还满足一个关系 [8]

$$\langle -\lambda_3 - \lambda_4 | \mathcal{M}^J | -\lambda_1 - \lambda_2 \rangle = \eta \langle \lambda_3 \lambda_4 | |\mathcal{M}^J| \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad \eta = \frac{\eta_3 \eta_4}{\eta_1 \eta_2} (-1)^{s_3+s_4-s_1-s_2} \quad (9.5)$$

也就是我们这里的

$$\mathcal{M}_{M, \lambda_4, \lambda_1\lambda_2}^J = -\mathcal{M}_{M, -\lambda_4, -\lambda_1-\lambda_2}^J \quad (9.6)$$

所以 (9.4) 可以进一步简化为

$$\mathcal{M}_{M,-}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{M}_{M,\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}^{\frac{1}{2}} + \mathcal{M}_{M,-\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}^{\frac{1}{2}} \quad (9.7)$$

对于电生 S_{11} 有两组独立的振幅满足上式，分别对应多级展开中的 E_{0+} 和 $S_{0+}(L_{0+})$ (差一个归一化因子)

$$\mathcal{M}_{M,-}^{I=\frac{1}{2}, J=\frac{1}{2}} = \begin{cases} \mathcal{M}_{++}^{I=\frac{1}{2}, J=\frac{1}{2}} + \mathcal{M}_{-+}^{I=\frac{1}{2}, J=\frac{1}{2}} & E_{0+} \\ \mathcal{M}_{+0+}^{I=\frac{1}{2}, J=\frac{1}{2}} + \mathcal{M}_{-0+}^{I=\frac{1}{2}, J=\frac{1}{2}} & S_{0+} \end{cases} \quad (9.8)$$

10 实验上拟合用到的唯像学模型

1 幺正 Isobar 模型

德国 Mainz 合作组最早提出的 MAID 也就是幺正 Isobar 模型是现今最全面的包括各类共振的低能电磁激发模型，最新版叫做 MAID2007，这个模型可以将光生和电生的实验数据拟合到光子等价能量 $E_\gamma = 1\text{GeV}$ ，并且得到和实验吻合的分波数据。我们这里主要参考 [42, 43]。模型中包含足够复杂的机制，比如光子， π 和核子的直接相互作用（这里用 π 和核子的电磁形状因子来描述）—Born 项，矢量介子交换（主要是 ω 和 ρ ）项以及各种共振态的贡献 ($P_{33}(1232), P_{11}(1440), D_{13}(1520), S_{11}(1535), F_{15}(1680), D_{33}(1700)$)，共振态用相应的 Breit-Wigner 形式表达。这种模型提供了一个很好的方式来描述多极振幅以及微分截面和极化观测量。它不仅可以用于核反应，而且可以作为一个起点，预测和分析质子和中子靶上的介子光生电生产数据。

为了准确描述共振区域的贡献，我们首先需要一个描述非共振的背景，这个可以通过有效场论中计算费曼图的方式来完成。对于电磁顶角 γNN 和 $\gamma \pi\pi$ ，我们可以借助形状因子直接写出

$$\mathcal{L}_{\gamma NN} = -e\bar{\psi} \left[\gamma_\mu A^\mu F_1^{p,n}(Q^2) + \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2m_N} \partial^\mu A^\nu F_2^{p,n}(Q^2) \right] \psi \quad (10.1)$$

$$\mathcal{L}_{\gamma \pi\pi} = e \left[(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^\dagger \times \boldsymbol{\pi} \right]_3 A^\mu F_\pi(Q^2) \quad (10.2)$$

对于虚光子，可以用标准的偶极形式表示核子的 Sach 形状因子，而且假定 $F_\pi(Q^2) = F_1^p(Q^2) - F_1^n(Q^2)$ 来保证规范不变性能够满足。这个结果可以直接计算得出也可以利用振幅的奇点结构和渐进性质模型无关地得到。

在电生中描述强子体系 πNN 是一件复杂的工作，在这里有两种方式构造相互作用拉式量，一种是考虑所谓赝标耦合 (PS)

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{\text{PS}} = ig\bar{\psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\psi \quad (10.3)$$

另一种是赝矢量耦合 (PV)

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{\text{PV}} = -\frac{f}{m_\pi}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\boldsymbol{\tau} \cdot \partial^\mu\boldsymbol{\pi}\psi \quad (10.4)$$

这里 $g^2/4\pi = 14.28$, $f/m_\pi = g/2m_N$ 。低能下 PV 耦合比较合适，这是因为它满足 PCAC 假设，并且在领头阶上符合低能定理和手征微扰理论的预言。然而 PV 模型并不可重整化，这将在高能情况下出现问题。另一方面，可重整 PS 耦合在高能情况下会有比较好的行为。所以可以通过所谓连续过渡的方式来同时考虑它们。为了描述一个较宽的能量范围（到 $E_\gamma = 1\text{GeV}$ ），可以采用混合模型 (HM)，最简单的方式是将拉式量改写成

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{\text{HM}} = \frac{\Lambda_m^2}{\Lambda_m^2 + \mathbf{q}_0^2} \mathcal{L}_{\pi NN}^{\text{PV}} + \frac{\mathbf{q}_0^2}{\Lambda_m^2 + \mathbf{q}_0^2} \mathcal{L}_{\pi NN}^{\text{PS}} \quad (10.5)$$

q_0 是 πN 质心系中 π 的三动量， $\Lambda_M = 500\text{MeV}$ 是通过拟合得到。

通过以上拉式量方式得到的 CGLN 振幅 F_1, \dots, F_8 , 通常称为 Born 项贡献, 它们是背景项的最主要贡献。另外一个背景项是所谓矢量介子交换贡献。原则上来说这个数值上非常小, 但是对于我们用到的一些多级振幅会比较重要。文献中一般的介子交换拉式量可以写成

$$\mathcal{L}_{\gamma\pi V} = e \frac{\lambda_V}{m_\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu) \pi_i \partial^\rho (\delta_{i3} \omega^\sigma + \rho_i^\sigma) F_V(Q^2) \quad (10.6)$$

$$\mathcal{L}_{VNN} = \bar{\psi} \left(g_{V1} \gamma_\mu + \frac{g_{V2}}{2m_N} \sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \right) (\omega^\mu + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu) \psi \quad (10.7)$$

λ_V 是由 $V \rightarrow \pi\gamma$ 衰变定出的辐射耦合常数。关于 Q^2 的依赖统统放到了偶极形式的形状因子 F_V 中去。一般来说, 关于强耦合常数 g_{V1} (矢量耦合) 和 g_{V2} (张量耦合) 并不能直接确定, 不同的分析方式会给出比较大的偏离, $8 \leq g_{\omega 1} \leq 20, 1.8 \leq g_{\rho 1} \leq 3.2, -1 \leq g_{\omega 2}/g_{\omega 1} \leq 0$ 以及 $4.3 \leq g_{\rho 2}/g_{\rho 1} \leq 6.6$ 。目前, 这些将作为自由参数在这些范围内变化。这些耦合函数的动量依赖行为也称为顶点函数的离壳行为用单极形状因子来描述

$$g_{Vi} = \frac{\Lambda_V^2}{\Lambda_V^2 + \mathbf{k}_V^2} \tilde{g}_{Vi} \quad (10.8)$$

这些非共振部分参数的取值通过拟合多级振幅在非共振区域的值来确定, 具体的细节参考开头给出的文献。

另一个重要的考虑是来自于理论的幺正性。电生中一个重要的观察是 E_{0+} 具有比较大的虚部, 即使在 π 的能量比较低的情况下也不能忽略。微扰论树图是无法产生虚部的, 它的来源主要是由于末态相互作用造成的 πN 重散射。为了考虑这一效应恢复理论幺正性, 这里将使用一个根据幺正性 (Fermi-Watson 定理) 和 K 矩阵方法的处理, 即

$$E_{0+}^{(I)} = E_{0+}^{(I)}(Born + \omega, \rho) (1 + it_{\pi N}^I) \quad (10.9)$$

这里 $t_{\pi N}^I = [\eta_I \exp(2i\delta_{\pi N}^I) - 1]/2i$ 是 πN 弹性散射振幅, $\delta_{\pi N}^I$ 是散射相移, η_I 是非弹性系数。

当背景项固定了之后, 可以通过分析相关多极振幅来建立一个可靠的研究重子共振的方案。然而, 由于背景干扰, 提取“裸”(bare) 共振贡献的过程也不是平庸的。在目前的模型中, 我们通常考虑所谓的“修饰”(dress) 共振, 包括“裸”共振和由于背景干扰而产生的修正。考虑光生过程, 对于相关的多级振幅 $A_{l\pm}$, 共振的贡献考虑由一个能量依赖的 Breit-Winger 形式来描述

$$A_{l\pm}(W) = \overline{\mathcal{A}}_{l\pm} f_{\gamma N}(W) \frac{\Gamma_{tot} W_R e^{i\phi}}{W_R^2 - W^2 - iW_R \Gamma_{tot}} f_{\pi N}(W) C_{\pi N} \quad (10.10)$$

$f_{\pi N}(W)$ 是通常的 Breit-Winger 因子, 用于描述总宽度为 Γ_{tot} , 分宽度 $\Gamma_{\pi N}$ 以及自旋为 j 的 N^* 的衰变

$$f_{\pi N}(W) = \left[\frac{1}{(2j+1)\pi} \frac{k_W}{|\mathbf{q}|} \frac{m_N}{W} \frac{\Gamma_{\pi N}}{\Gamma_{tot}^2} \right]^{1/2}, \quad k_W = \frac{W^2 - m_N^2}{2W} \quad (10.11)$$

因子 $C_{\pi N}$ 对同位旋 $3/2$ 和 $1/2$ 分别为 $\sqrt{3/2}$, $-1/\sqrt{3}$ 。

能量依赖的分宽度可以参数化

$$\Gamma_{\pi N} = \beta_\pi \Gamma_R \left(\frac{|\mathbf{q}|}{q_R} \right)^{2l+1} \left(\frac{X^2 + q_R^2}{X^2 + \mathbf{q}^2} \right)^l \frac{W_R}{W} \quad (10.12)$$

X 是一个阻尼参数, 对于考虑的共振大概是 $X = 500\text{MeV}$ 。其他参数定义和数值见文献。对于总宽度 $\Gamma_{tot} = \Gamma_{\pi N} + \Gamma_{in}$, 其中还包含了非弹性道的贡献 Γ_{in} , 这个可以利用最为重要的两 π 衰变道来近似。 $f_{\gamma N}(W)$ 参数化是类似的。

Breit-Winger 参数化的一个重要组成部分是幺正相位 ϕ 。该参数的主要作用是将总多极振幅(背景加共振)的相位调整到相应的 πN 散射相移 $\delta_{\pi N}$ 。如果是电生情况, 这个模型需要人为加上对 Q^2 的依赖函数, 再拟合电生的实验数据, 一般根据实验数据假定共振附近螺旋度振幅对于 Q^2 的依赖是微小的。这样一个物理上简单的模型能够很好地拟合阈值到前几个共振各类分波数据。

2 动力学模型

动力学模型 (DMT) 基本思想是使用积分方程数值求解 t 矩阵, 其中在阈值附近的非共振贡献中占主导地位的末态相互作用是使用介子交换模型来估计的。共振的效应类似于 isobar 模型也是利用 Breit-Winger 形式来模拟。这里主要参考 [44–47]

最近二十年发展起来的动力学模型主要有三个, 分别是: Sato 和 Lee 提出的 S-L 模型, Kamalov、Drechesl、Tiator 和台湾的 S.N.Yang (杨信男) 提出的 Dubna-Mainz-Taipei(DMT) 模型以及动力学 Utrecht-Ohio (DUO) 模型。下面介绍动力学模型一般的框架以及着重分析 Mainz 合作组提供的 DMT 模型。

动力学模型对于 π 电生的描述是通过 t 矩阵 (不同的定义可能差一个运动学因子) 的散射方程

$$\begin{pmatrix} t_{\pi\pi} & t_{\pi\gamma} \\ t_{\gamma\pi} & t_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\pi\pi} & v_{\pi\gamma} \\ v_{\gamma\pi} & v_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{\pi\pi} & v_{\pi\gamma} \\ v_{\gamma\pi} & v_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_\pi & 0 \\ 0 & G_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{\pi\pi} & t_{\pi\gamma} \\ t_{\gamma\pi} & t_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

描述了四个过程, 分别是:

$$\begin{aligned} \pi N \rightarrow \pi N, \quad & \pi N \rightarrow \gamma^* N \\ \gamma^* N \rightarrow \pi N, \quad & \gamma^* N \rightarrow \gamma^* N \end{aligned} \quad (10.14)$$

v 是各个过程的的交换势算符, G_π, G_γ 代表 πN 和 γN 的两粒子传播子。在 QED 领头阶, $\gamma^* N \rightarrow \pi N$ 的 t 矩阵可以写作

$$t_{\gamma\pi} = v_{\gamma\pi} + v_{\gamma\pi} G_0 t_{\pi N} \quad (10.15)$$

以及

$$t_{\pi N} = v_{\pi N} + v_{\pi N} G_0 t_{\pi N} \quad (10.16)$$

这里为了方便书写, 将 $\pi\pi$ 写成 πN ²⁴, 并且定义 $G_0 \equiv G_\pi$ 。在这种近似下, 真正需要处理的积分方程只有关于 πN 的单道方程, 电生的方程一般最多计算到微扰的一圈贡献。

在 Bethe-Salpeter (BS) 方程框架下, (10.15) 和 (10.16) 都是四维方程, 交换势需要对所有两粒子不可约图求和得到。一般文献中利用两种近似, 第一个是用手征不变的有效拉式量的树图去近似得到交换势, 第二个是将 G_0 用三维形式的 g_0 替代, 将方程维数从四维约化到三维。三维传播子中还需要一个 δ 函数给相对能量一个在壳限制。最重要的是, 新传播子的选择必须使得散射振幅在物理区域有正确的解析行为, 这个是么正性所必须满足的。

众所周知, 协变性和么正性不能完全决定 g_0 的形式, 原则上有无穷多种选择方式能够满足。一类具有以下形式的三维方程被用来研究 πN 散射 [48]

$$\begin{aligned} \hat{G}_0(\tilde{k}; P) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{ds'}{s - s' + i\varepsilon} f(s, s') \left[\alpha(s, s') \not{P} + \tilde{k} + M_N \right] \\ & \times \delta^{(+)} \left([\eta_N(s') P' + \tilde{k}]^2 - m_N^2 \right) \delta^{(+)} \left([\eta_\pi(s') P' - \tilde{k}]^2 - m_\pi^2 \right) \end{aligned} \quad (10.17)$$

这里 $P' = \sqrt{s'/s}P$ 用来描述中间态的离壳程度。上标 (+) 表示只保留正能部分。 $\tilde{k} = \eta_\pi(s)p - \eta_N(s)k$ 是相对动量, η 是 s 的一个函数, 满足 $\eta_\pi(s) + \eta_N(s) = 1$ 。为了得到正确的 πN 弹性割线, 函数 $f(s, s')$ 和 $\alpha(s, s')$ 必须满足

$$f(s, s) = 1, \quad \alpha(s, s) = \eta_N(s) \quad (10.18)$$

很容易得到在 $(m_\pi + M_N)^2 \leq s \leq \infty$ 上, (10.17) 能够给出传播子 \hat{G}_0 正确的不连续度

$$\text{Disc} \left[\hat{G}_0(\tilde{k}; P) \right] = \frac{-i}{(2\pi)^2} \left(\eta_N(s) \not{P} + \tilde{k} + M_N \right) \delta^{(+)} \left([\eta_N(s)P + \tilde{k}]^2 - M_N^2 \right) \delta^{(+)} \left([\eta_\pi(s)P - \tilde{k}]^2 - m_\pi^2 \right) \quad (10.19)$$

(10.17) 中的传播子具有一个特点, 也就是两个中间态粒子同等地离壳, 保证没有相对能量的依赖。文献中有很多不同的三维形式约化方案, 不过基础大都是基于上面的 (10.17), 这些形式都令 $\eta_N(s) = \varepsilon_N(s)/(\varepsilon_N(s) + \varepsilon_\pi(s))$ 以及 $\eta_\pi(s) = \varepsilon_N(s)/(\varepsilon_N(s) + \varepsilon_\pi(s))$, $\varepsilon_N(s) = (s + M_N^2 - m_\pi^2)/2\sqrt{s}$, $\varepsilon_\pi(s) = (s - M_N^2 + m_\pi^2)/2\sqrt{s}$ 是核子和介子的质心系能量。DMT 模型中用到的是 Cooper-Jennings 约化方案, 下面约化形式都基于 Cooper 和 Jennings 的工作 [49]。

Cooper-Jennings 约化中, 函数 α, f 定义为

$$\alpha(s, s') = \eta_N(s), \quad f(s, s') = \frac{4\sqrt{ss'}\varepsilon_N(s')\varepsilon_\pi(s')}{ss' - (m_N^2 - m_\pi^2)^2} \quad (10.20)$$

²⁴主要原因是在双道下 $\pi\pi$ 能够表示 πN 弹性散射过程 (略去核子标记), 单道情况下由于不会混淆, 可以直接写成 πN

在这个约化后的三维散射方程就是所谓的 Lippmann–Schwinger 方程 (组)

$$t_{\gamma\pi}(E) = v_{\gamma\pi} + v_{\gamma\pi}g_0(E)t_{\pi N}(E) \quad (10.21)$$

$$t_{\pi N}(E) = v_{\pi N} + v_{\pi N}g_0(E)t_{\pi N}(E) \quad (10.22)$$

E 是质心系的总能量。动力学模型最重要的一个优点就是如上所述提供了一个统一的理论框架同时自洽地描述 πN 散射和 π 光生 (电生)。

$v_{\gamma\pi}$ 包括两项

$$v_{\gamma\pi}(E) = v_{\gamma\pi}^B(E) + v_{\gamma\pi}^\Delta(E) \quad (10.23)$$

$v_{\gamma\pi}^B(E)$ 是背景交换势，包括 Born 项和介子交换项， $v_{\gamma\pi}^\Delta(E)$ 是跟裸的 $\Delta(1232)$ 中间态贡献有关，也就是 $\gamma^*N \rightarrow \Delta \rightarrow \pi N$ 。方便起见， $t_{\gamma\pi}$ 也可以类似分解

$$t_{\gamma\pi} = t_{\gamma\pi}^B + t_{\gamma\pi}^\Delta \quad (10.24)$$

其中

$$t_{\gamma\pi}^B(E) = v_{\gamma\pi}^B + v_{\gamma\pi}^B g_0(E)t_{\pi N}(E) \quad (10.25)$$

$$t_{\gamma\pi}^\Delta(E) = v_{\gamma\pi}^\Delta + v_{\gamma\pi}^\Delta g_0(E)t_{\pi N}(E) \quad (10.26)$$

这样的一个优点是所有 $\Delta(1232)$ 的电磁激发都包含在 $t_{\gamma\pi}^\Delta(E)$ 中了。物理道 α 对应的修正的 $L-S$ 方程可以写作

$$t_{\gamma\pi}^{(\alpha)}(q_E, k_E; E + i\varepsilon) = e^{i\delta_\alpha} \cos \delta_\alpha \left[v_{\gamma\pi}^{(\alpha)}(q_E, k_E) + P \int_0^\infty dq' \frac{q'^2 R_{\pi N}^{(\alpha)}(q_E, q'; E) v_{\gamma\pi}^{(\alpha)}(q', k_E)}{E - E_{\pi N}(q')} \right] \quad (10.27)$$

其中 δ_α , $R_{\pi N}^{(\alpha)}$, $E_{\pi N}(q)$ 以及 P 代表 πN 相移, 反应矩阵, 总质心能量和主值积分。方程 10.27 明显满足末态定理以及清楚表示多级振幅依赖于半离壳的 πN 相互作用。为了保证主值积分的收敛性, 引入了描述势作用范围的偶极因子 $f(q, q_E) = (\Lambda^2 + q_E^2)^2 / (\Lambda^2 + q^2)^2$, 截断大概是 $\Lambda = 440$ MeV。这里方程右边 $e^{i\delta_\alpha} \cos \delta_\alpha$ 来源于 (10.9) 的幺正处理, 可以很明显的看出, 这样处理后 $t_{\gamma\pi}^{(\alpha)}$ 的相位就是对应的 πN 散射的相移

$$t_{\gamma\pi}^{(\alpha)}(q_E, q; E) = |t_{\gamma\pi}^{(\alpha)}(q_E, q; E)| e^{i\delta_\alpha(E)} \quad (10.28)$$

电磁相互作用的规范不变性要求流守恒

$$t_{\gamma\pi}(\varepsilon_\mu \rightarrow q_\mu) = 0 \quad (10.29)$$

对于 $t_{\gamma\pi}(E) = v_{\gamma\pi} + v_{\gamma\pi}g_0(E)t_{\pi N}(E)$, 第一项 $v_{\gamma\pi}$ 对于初末态粒子在壳情况满足流守恒条件, 因为交换势完全来自于规范不变、手征不变的有效拉式量诱导出的树图。然而有一个离壳的重散射行为 $v_{\gamma\pi}g_0(E)t_{\pi N}(E)$, 会造成流守恒条件的破坏, 例如我们将之展开成泡泡图求和

$$v_{\gamma\pi}g_0t_{\pi N} = v_{\gamma\pi}g_0v_{\pi N} + v_{\gamma\pi}g_0v_{\pi N}g_0v_{\pi N} + \dots \quad (10.30)$$

容易想到所有外线粒子在壳情况下，规范不变性能够满足，但是末态相互作用也就是 πN 重散射会使得和光子连接的粒子出现离壳行为，这样规范不变性会不满足。也就是说 $v_{\gamma\pi}g_0t_{\pi N}$ 不是规范不变的，这个结果完全是这个方程近似过程中带来的，为了重新得到规范不变性，不同的模型有各种各样的方法，在这个 DMT 模型中

$$J_\mu^B \rightarrow J_\mu^B - k_\mu \frac{k \cdot J^B}{k^2} \quad (10.31)$$

J_μ^B 是背景 $v_{\gamma\pi}^B$ 对应的电磁流。

$t_{\gamma\pi}^B$ 和 $t_{\pi N}$ 可以用介子交换模型计算。 Δ 的效应用 Breit-Winger 形式考虑进来，方式与 isobar 模型类似，这里不再多讨论，具体细节参考开头提到的文献。

11 $\gamma^* N \rightarrow \pi N$ 过程的色散表示

这里主要参考马垚师兄的 memo, 更早的基础文献推荐 Adler 的经典文章 [16]。只考虑单道情况下, 情况比较简单。 $\gamma^* N \rightarrow \pi N$ 过程的分波光学定理可以写成

$$\frac{\mathcal{M}(s + i\epsilon) - \mathcal{M}(s - i\epsilon)}{2i} = \text{Im } \mathcal{M}(s + i\epsilon) = \mathcal{T}^*(s + i\epsilon) \rho(s + i\epsilon) \mathcal{M}(s + i\epsilon) \quad (11.1)$$

这里 \mathcal{T} 是 S_{11} 道的 πN 分波散射振幅 (比如多级振幅), 相空间因子

$$\rho(s) = \frac{\sqrt{(s - s_L)(s - s_R)}}{s} \quad (11.2)$$

这里 $s_R \equiv (m_N + m_\pi)^2$, $s_L \equiv (m_N - m_\pi)^2$ 。从上面分波光学定理可以重新整理出

$$\mathcal{M}(s + i\epsilon) = \mathcal{S}(s + i\epsilon) \mathcal{M}(s - i\epsilon) \quad (11.3)$$

其中 $\mathcal{S}(s) = 1 + 2i\rho(s)\mathcal{T}(s)$ 是 πN 散射 \mathcal{S} 矩阵。散射振幅可以分成两个部分, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_R + \mathcal{M}_L$, \mathcal{M}_R 仅仅包含右手么正割线 (物理区域也就是从 s_R 到 $+\infty$)。剩下的 \mathcal{M}_L 包括一切左手相关的奇异性。在物理区域

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_R^+ &= \mathcal{S}\mathcal{M}_R^- + \mathcal{S}\mathcal{M}_L^- - \mathcal{M}_L^+ \\ &= \mathcal{S}\mathcal{M}_R^- + (\mathcal{S} - 1)\mathcal{M}_L \end{aligned} \quad (11.4)$$

便于推导, 这里令 $\mathcal{M}^\pm(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}(s \pm i\epsilon)$, 第二个等号是由于物理区域内 (右手割线上) \mathcal{M}_L 没有不连续度。下面我们想要寻找一个函数 $\mathcal{D}(s)$, 它在 s 平面上解析, 但是有和 \mathcal{M} 一样的右手割线。它也一样满足么正性关系

$$\frac{\mathcal{D}^+}{\mathcal{D}^-} = \frac{\mathcal{M}^+}{\mathcal{M}^-} = \mathcal{S} \quad (11.5)$$

也就是说 \mathcal{M}/\mathcal{D} 没有右手割线。从这里可以得到一个在物理区域成立的关系

$$\begin{aligned} \text{Im}(\mathcal{D}^{-1}\mathcal{M}_R) &= \text{Im}(\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{M} - \mathcal{M}_L)) \\ &= -(\text{Im } \mathcal{D}^{-1}) \mathcal{M}_L \end{aligned} \quad (11.6)$$

因此, 关于 \mathcal{M}_R 能够用色散积分表示

$$\mathcal{M}_R(s) = \mathcal{D} \left(-\frac{s^n}{\pi} \int_{s_n}^{\infty} \frac{(\text{Im } \mathcal{D}^{-1}) \mathcal{M}_L}{s'^n (s' - s)} ds' + \mathcal{P} \right) \quad (11.7)$$

这里选择在原点做减除, n 代表减除次数, 由于色散积分表示的不确定性, \mathcal{P} 代表减除多项式, 一次减除是一个常数, 二次减除是一个一次多项式等等。由于分波振幅的么正限, 例如著名的 Froissart-Martin 限, 一般最多需要二次减除就能使得色散积分收敛。

减除多项式的来源值得做一些补充。一个简单的理解是由于 $\text{Im } f(x) = \text{Im}(f(x) + \mathcal{P}(x))$, 色散积分在差一个多项式的基础上等价, 这个多项式的自由度不能固定。这个多项式形式来源于 n 次减除的定义: 对于在某一点做 $n+1$ 次减除的函数 $f(x)$

$$f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{(x-x_0)^j}{j!} \frac{d^j f}{dx^j} \Big|_{x=x_0} = (x-x_0)^{n+1} \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\text{Im } f(x')}{(x'-x)(x'-x_0)^{n+1}} dx' \quad (11.8)$$

最后可以得到

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}_L + \mathcal{D} \left(-\frac{s^n}{\pi} \int_{s_R}^{\infty} \frac{(\text{Im } \mathcal{D}^{-1}) \mathcal{M}_L}{s'^m (s'-s)} ds' + \mathcal{P} \right) \quad (11.9)$$

对于我们的计算, 考虑将手征计算得到微扰振幅作为 \mathcal{M}_L 的一个近似, 这样只要谱函数 $\mathcal{D}(s)$ 已知的话, 就能得到满足末态定理的么正振幅。

基于前述 \mathcal{D} 满足的分波光学定理, 可以写出和 \mathcal{M} 一样的色散关系

$$\mathcal{D}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_R}^{\infty} \frac{\mathcal{T}^*(s') \rho(s') \mathcal{D}(s')}{s'-s} ds' \quad (11.10)$$

这是一个经典的积分方程, 其结果也被称为 Omn s 解, 详细的推导见 [40]

$$\mathcal{D}(s) = \tilde{\mathcal{P}}(s) \exp \left[\frac{s}{\pi} \int_{s_R}^{\infty} \frac{\delta(s')}{s'(s'-s)} ds' \right] \quad (11.11)$$

$\delta(s)$ 是 πN 弹性散射的相移, 容易知道 $\text{Im}(\ln \mathcal{D}(s)) = \delta(s)$ 。 $\tilde{\mathcal{P}}(s)$ 是一个实多项式, 代表在 s 平面上的可能的零点, 由于我们这里考虑的是单道近似, 复平面上没有零点, 可以直接令 $\tilde{\mathcal{P}}(s) = 1$, 最后的拟合结果也可以侧面印证这个假设。

12 振幅的解析延拓和 $N^*(890)$ 的耦合常数抽取

在我们的计算以及拟合中，所有的参数，比如到 $\mathcal{O}(p^2)$ 的低能常数和减除多项式都已经被固定了，完整 S_{11} 道的手征么正振幅 $\mathcal{M}(s)$ 被完全固定了。我们考虑的 $N^*(890)$ 位于 πN 阔下（也低于核子 N 的质量），它位于 s 平面的第二黎曼面上，因此，我们需要将振幅解析延拓到第二叶上去得到 $N^*(890)$ 耦合到光子和 π 介子的各类信息。

$2 \rightarrow 2$ 散射振幅的解析延拓见上节或者参考 [40] 其中分波矩阵元的么正性那一章。这里根据 (11.3) 直接给出第二叶黎曼面振幅

$$\mathcal{M}^{\text{II}}(s) = \frac{\mathcal{M}(s)}{\mathcal{S}(s)} \quad (12.1)$$

这里 \mathcal{S} 指 πN 散射 S 矩阵 (S_{11} 道) $\mathcal{S} = 1 + 2i\rho(s)\mathcal{M}(s)$ 。如果 \mathcal{S} 第二黎曼面存在一个极点位于 s_R ， S 矩阵可以在极点领域内近似为

$$\mathcal{S}(s) \simeq \mathcal{S}'(s_R)(s - s_R) \quad (12.2)$$

因而有

$$\mathcal{M}^{\text{II}}(s) \simeq \frac{\mathcal{M}(s)}{\mathcal{S}'(s_R)(s - s_R)} \quad (12.3)$$

另一方面，振幅在第二叶的极点处可以参数化为

$$\mathcal{M}^{\text{II}}(s \rightarrow s_R) = \frac{g_\gamma g_\pi}{s - s_R} \quad (12.4)$$

这里 g_γ, g_π 分别是 γN 和 πN 的“耦合”系数，具体的物理意义下面会提到。与 (12.3) 对比后可以得到

$$g_\gamma g_\pi = \frac{\mathcal{M}(s_R)}{\mathcal{S}'(s_R)} \quad (12.5)$$

其中 g_π 可以直接从弹性 πN 散射中抽取，方式完全类似于上面提到的

$$g_\pi^2 = \frac{\mathcal{T}(s_R)}{\mathcal{S}'(s_R)} \quad (12.6)$$

\mathcal{T} 是 πN 弹性散射 S_{11} 道的分波振幅。

13 极点参数抽取以及电磁衰变振幅

1 Laurent+Pietarinen(L+P) 展开方法

根据最近 PDG [50] 的更新趋势, 复平面的极点而不是 Breit-Wigner 参数, 精确地确定和定量描述了一般散射理论和 QCD 的(低能)共振特性。在文献中, 提出了一种新的描述单道过程的极点参数的方法, 这基于在实轴附近的分波 T 矩阵的 Laurent 展开。同时用一个收敛的 Pietarinen 级数来表示它的非(极点)奇异部分, 而不是用传统的幂级数来描述。由于非奇异部分的解析结构通常被物理地考虑了(包括在非弹性阈值处有支点的物理割线, 以及阈下的左手割线), Pietarinen 级数相当可靠地表示这些解析结构。

L+P 方法的出发点是基于一般化的 Laurent 展开, 利用 Mittag-Leffler 定理: 一个亚纯函数可以用它的极点和相关留数与一个附加的整函数的形式来表示。我们再假定物理振幅中出现的极点都是一阶的, 因此, T 矩阵在极点处可以参数化成

$$T(W) = \sum_{i=1}^k \frac{a_{-1}^{(i)}}{W - W_i} + B^L(W); \quad a_{-1}^{(i)}, W_i, W \in \mathbb{C} \quad (13.1)$$

其中 $a_{-1}^{(i)}, W_i$ 是极点处的留数和极点的位置, $B^L(W)$ 是整个复能量 (W) 平面上的正则函数。将展开式与实轴上的实验数据拟合, 原则上可以得到精确地得到散射矩阵极点的参数。这会有一个问题, Laurent 展开是不是一个常系数的 Breit-Wigner 呢? 下面我们要说明, 一般情况下并不是如此。

乍一看 (13.1) 大概是一个单道散射矩阵的常系数 Breit-Wigner 形式

$$\begin{aligned} T(W) \approx \sum_{i=1}^k & \frac{x_i \Gamma_i / 2}{M_i - W - i \Gamma_i / 2} + B(W) \\ & x_i, M_i, \Gamma_i, W \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (13.2)$$

M_i 是共振质量, x_i, Γ_i 是非弹性度和宽度。下面说明这个观察是不对的。

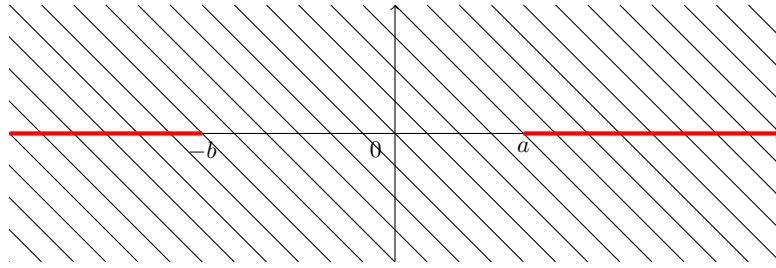
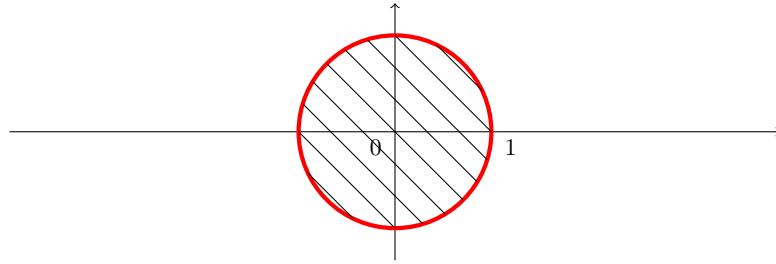
首先, 明显可以看到解析结构的区别, 前者奇异项是复的系数, 后者却是实的, 式 (13.1) 奇异部分的复系数的存在, 从根本上改变了所研究函数的实部和虚部的形式, 因此一般这两个函数不能互换。除此以外, 最为本质的区别是 (13.1) 适用范围。传统上, Breit-Wigner 一般都适用于整个复能量平面。而 Laurent 展开只是局域地适用。也就是说我们的目的不是构造整个函数, 而是仅再现附近奇点的极点参数。

Pietarinen 级数最早来自于 1961 年 Frazer 研究质子质子 pp 弹性散射时提出的一个共形映射方法 [51], Pietarinen 于 1972 首次将这个方法用来研究 πN 散射 [52], 关于共形映射在 S 矩阵解析性中的一般应用, 可以参考综述 [53]。下面先简要介绍一下这个方法。

Frazer 最早考虑复平面上只有 $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, -b]$ ($a, b > 0$) 这两段割线(对应于 NN 散射)的情况, 原有的振幅都是以散射角 $z = \cos \theta$ 作为变量展开, 为了提高收敛性, 首先可以将除

去割线的整个复平面映射到单位圆中去，于是两条割线映射成单位圆，根据黎曼映射定理，这种映射并不唯一，我们如果要求映射下，原点还是到原点、实轴 $(-b, a)$ 映射到单位圆里的 $(-1, 1)$ ，那么这个映射被唯一确定

$$w = \frac{1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{a-z}{b+z} \right)}{1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{a-z}{b+z} \right)} \quad (13.3)$$

图 16: z 平面图 17: w 平面

从而可以将一个函数 $f(z)$ 按 $w(z)$ 的幂次逐阶展开

$$f(z) = \sum_n a_n [w(z)]^n \quad (13.4)$$

$w(s)$ 的解析性保证了 $f(s)$ 的解析性质在 w 平面上保持不变，因此这个级数在 w 平面上的单位圆内收敛。理论上来说，泰勒级数在下一个奇异性处处完全失效，距离越远收敛效果越差，但是 Pietarinen 级数由于做过了共形变换，在前几阶就能很好的收敛到实际值。Frazer 最早拟合的是 pp 散射的角分布，如果用 $z = \cos \theta$ 来拟合，那么需要很高的阶数 ($n \geq 4$) 才能拟合上实验值，但是使用他的方法，前一两阶就能完美拟合上实验。

基于此，Pietarinen [52] 提出并发展了这套共形变换理论，下面的细节介绍主要基于 [54, 55]。考虑一个未知的解析函数 $F(W)$ ，有一条始于 $W = x_P$ 的割线，因此， $F(W)$ 可以被展开成

$$F(W) = \sum_{n=0}^N c_n X(W)^n, \quad W \in \mathbb{C} \quad (13.5)$$

$$X(W) = \frac{\alpha - \sqrt{x_P - W}}{\alpha + \sqrt{x_P - W}}, \quad c_n, x_P, \alpha \in \mathbb{R} \quad (13.6)$$

α, c_n 都是可调参数。这个展开的本质是用一个定义在复能量平面单位圆上完备的函数集 $\{X(W)^n, n = 1, \infty\}$ 来展开一个在 $W = x_P$ 处有枝点的函数。

在散射理论中，原则上每个分波的解析结构都是已知的，但是在 L+P 这套方法下，我们统一用实轴上的割线去拟合物理数据，看起来这样会遗漏一些割线，尤其是负能量区域的各种左手割线。在这里，我们利用近似：所有负能量区域割线近似成一条，也就是说负能量区域用一个 Pietarinen 级数去模拟（枝点在 x_P ，通过拟合得到），物理区域上每一个物理割线都由各个过程决定（枝点 (x_Q, x_R, \dots) ）的单独 Pietarinen 级数来表示。总结一下，物理的 T 矩阵可以分解成

$$\begin{aligned} T(W) &= \sum_{i=1}^k \frac{a_{-1}^{(i)}}{W - W_i} + B^L(W) \\ B^L(W) &= \sum_{n=0}^M c_n X(W)^n + \sum_{n=0}^N d_n Y(W)^n + \sum_{n=0}^N e_n Z(W)^n + \dots \\ X(W) &= \frac{\alpha - \sqrt{x_P - W}}{\alpha + \sqrt{x_P - W}}; \quad Y(W) = \frac{\beta - \sqrt{x_Q - W}}{\beta + \sqrt{x_Q - W}}; \quad Z(W) = \frac{\gamma - \sqrt{x_R - W}}{\gamma + \sqrt{x_R - W}} + \dots \\ a_{-1}^{(i)}, W_i, W &\in \mathbb{C} \\ c_n, d_n, e_n, \alpha, \beta, \gamma, \dots &\in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad x_P, x_Q, x_R \in \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C} \\ \text{and} \quad k, M, N, \dots &\in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (13.7)$$

我们注意到，这样的一个展开对于极点和物理区域的各类割线都有着较好的模拟能力（在收敛区域内），但是对于左手割线的模拟用到了近似（认为割线都在实轴上），这会导致一个理论上的问题。根据三体么正性 [56] 我们知道会有复平面上的奇异性：在能量允许的情况下，总会产生三体末态，在三体末态中，通常会有一个稳定粒子（核子或介子）和许多其他两体共振态组合的贡献，比如 ρ, Δ, \dots ，这些会提供复平面上的枝点。特别的如果只有单道的数据，我们可能会得到两种物理上完全不同的拟合结果：其一是得到一个额外的共振和稳定的初末态粒子（对应实轴上的枝点）的拟合结果；另一个是末态得到一个较低的共振（对应一个复平面的枝点）的良好拟合。这个效应在 Jülich 模型中已经得到了验证，比如是打开了 ρN 道（复平面枝点）或者是产生了一个 $N(1710)1/2^+$ 共振，用单道的数据会难以区分 [57]。

利用这套技术，我们发现单道分波分析可以准确地确定低能核子共振的极点位置和参数，但不能区分高的共振和复平面枝点。然而，如果有了其他衰变道的额外信息，特别是三体末态，一个完备的的测定是可行的。

2 电磁衰变振幅和衰变宽度

如果我们按照之前所述已经得到了分波振幅的留数，那么留数的一个最大用途就是计算极点处的重子电磁衰变振幅（baryon photo-decay amplitude）。这里主要参考 Workman、Tiator 等人的一系列工作 [58, 59]。下面先来看看极点参数和 Breit-Wigner 参数的不同处理方式。

这里稍微回顾一下 π 电生的相关内容。电生截面可以写成一个半单举的（semi-inclusive）电子散射截面（符号约定与上文稍有区别）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e dE_f} = \Gamma_V (\sigma_T + \varepsilon \sigma_L) \quad (13.8)$$

与虚光子流相关的因子可以写作

$$\Gamma_V = \frac{\alpha}{2\pi^2} \frac{E_f}{E_i} \frac{k_\ell}{Q^2} \frac{1}{1-\varepsilon} \quad (13.9)$$

E_i, E_f 是初末态电子在实验系中的能量，总横向和纵向虚光子截面可以写作

$$\sigma_T = \frac{1}{2} \left(\sigma_T^{1/2} + \sigma_T^{3/2} \right) \quad (13.10)$$

$$\sigma_T^h = 4\pi \frac{q}{k_c} \sum_{\alpha(\ell, J, I)} (2J+1) |\mathcal{A}_\alpha^h|^2 C^2 \quad (13.11)$$

$$\sigma_L = 4\pi \frac{q}{k_c} \frac{Q^2}{k^2} \sum_{\alpha(\ell, J, I)} (2J+1) |\mathcal{S}_\alpha^{1/2}|^2 C^2 \quad (13.12)$$

q, k 分别是 π, γ^* 的质心动量， $k_\ell = (W^2 - m_N^2)/2m_N$, $k_c = (W^2 - m_N^2)/2W$ 分别是实验系和质心系实光子等价能量。因子 C 为 $\sqrt{2/3}$ 对应同位旋 $3/2$, $-\sqrt{3}$ 对应 $1/2$ 。上面提到的横向和纵向分波螺旋度多级振幅 $\mathcal{A}_\alpha^h, \mathcal{S}_\alpha^{1/2}$ 可以用电、磁以及纵向（标量）多级振幅来表示

$$\mathcal{A}_{\ell+}^{1/2} = -\frac{1}{2} [(\ell+2)E_{\ell+} + \ell M_{\ell+}] \quad (13.13)$$

$$\mathcal{A}_{\ell+}^{3/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\ell(\ell+2)} [E_{\ell+} - M_{\ell+}] \quad (13.14)$$

$$\mathcal{S}_{\ell+}^{1/2} = -\frac{\ell+1}{\sqrt{2}} S_{\ell+} \quad (13.15)$$

$$\mathcal{A}_{(\ell+1)-}^{1/2} = -\frac{1}{2} [\ell E_{(\ell+1)-} - (\ell+2)M_{(\ell+1)-}] \quad (13.16)$$

$$\mathcal{A}_{(\ell+1)-}^{3/2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\ell(\ell+2)} [E_{(\ell+1)-} + M_{(\ell+1)-}] \quad (13.17)$$

$$\mathcal{S}_{(\ell+1)-}^{1/2} = -\frac{\ell+1}{\sqrt{2}} S_{(\ell+1)-} \quad (13.18)$$

$J = \ell + 1/2$ 对应 ‘+’ 多级振幅， $J = (\ell + 1) - 1/2$ 对应 ‘-’ 多级振幅。

与经由幺正振幅定义的 Breit-Wigner 散射截面进行比较（这里 $T_{i,f} = f_\ell, S_\ell = 1 + 2ikf_\ell$ ）

$$\sigma_{i,f} = \frac{4\pi}{k^2} \frac{2J+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} |T_{i,f}|^2 \quad (13.19)$$

这里 k 是初态粒子的质心动量, s_1, s_2 是两个初态粒子的自旋, $1/(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)$ 相当于求平均。

下面简洁起见只考虑光生情况, 虚光子情况类似给出。螺旋度为 h 的极化光生截面 ($\sigma_{\gamma,\pi}^h \equiv \sigma_T^h, k_c = k$)

$$\sigma_{\gamma,\pi}^h = \frac{2\pi}{k^2} (2J+1) |T_{\gamma,\pi}^h|^2 \quad (13.20)$$

对比可以得到螺旋度振幅和么正振幅之间的关系

$$T_{\gamma,\pi}^h = \sqrt{2kq} \mathcal{A}_\alpha^h C \quad (13.21)$$

为了更好地理解 Breit-Wigner 参数和极点参数之间的区别, 我们可以将 $T_{\gamma,\pi}^h$ 写做传播子和初末态的分宽度形式

$$T_{\gamma,\pi}^h(W) = \frac{(\Gamma_h/2)^{1/2} (\Gamma_\pi/2)^{1/2}}{M - W - i\Gamma/2} \quad (13.22)$$

Γ_h, Γ_π 分别是初态和末态的分宽度, 下标 h 标记初态螺旋度, π 表示末态 πN 。

在 Breit-Wigner 共振位置 $W_r = M$, 振幅变成纯虚数, 因此 BW 共振振幅可以定义成

$$\tilde{T}_{\gamma,\pi}^h = \text{Im } T_{\gamma,\pi}^h(W_r) = \frac{\Gamma_h^{1/2} \Gamma_\pi^{1/2}}{\Gamma} \quad (13.23)$$

另一个是在极点处 $W_p = M - i\Gamma/2$, 振幅将会发散, 极点参数定义成留数

$$R_{\gamma,\pi}^h = \text{Res } T_{\gamma,\pi}^h(W_p) = \frac{\Gamma_h^{1/2} \Gamma_\pi^{1/2}}{2} \quad (13.24)$$

这里留数定义和数学上定义差一个负号。 $\gamma N \rightarrow \pi N$ 过程振幅的留数可以被因子化成 $\gamma N \rightarrow \gamma N, \pi N \rightarrow \pi N$ 过程的留数

$$R_{\gamma,\pi}^h = \sqrt{\text{Res } T_{\gamma N}^h(W_p) \text{Res } T_{\pi N}^h(W_p)} \quad (13.25)$$

下面为了简介起见, 用 $\text{Res}_{\gamma(h)N}$ 和 $\text{Res}_{\pi N}$ 来分别表示留数, 容易看出 $|\text{Res}_{\gamma(h)N}| = \Gamma_h/2$, $|\text{Res}_{\pi N}| = \Gamma_\pi$ 。

在 BW 共振位置, 螺旋度为 h 的总光生截面为

$$\sigma_{\gamma,\pi}^h = \frac{2\pi}{k^2} (2J+1) \frac{\Gamma_h \Gamma_\pi}{\Gamma^2} \quad (13.26)$$

非级化的总截面

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma,\pi} &= \frac{1}{2} (\sigma_{\gamma,\pi}^{1/2} + \sigma_{\gamma,\pi}^{3/2}) \\ &= \frac{\pi}{k^2} (2J+1) (\Gamma_{1/2} + \Gamma_{3/2}) \frac{\Gamma_\pi}{\Gamma^2} \end{aligned} \quad (13.27)$$

按照 [60], 光生中间态共振可以通过螺旋度来分类:

- 初态核子自旋投影为 $M = -1/2$, 中间态共振自旋为 $M = 1/2$;
- 初态核子 $M = 1/2$, 中间共振 $M = 3/2$ (对应共振态的自旋等于或者大于 $3/2$)。这两类矩阵元可以看作是分别将核子激发成螺旋度 $1/2, 3/2$ 共振态的螺旋度振幅, 一般来说写作 $A_{\frac{1}{2}}, A_{\frac{3}{2}}$ 。其他的各类激发与 $A_{\frac{1}{2}}, A_{\frac{3}{2}}$ 都不独立 (差一个相位因子)。

为了导出衰变率, 我们考虑一个一般的共振振幅在 z 轴自旋投影为 M , 它相当于各类型自旋态 m 的叠加 (投影在距 z 轴 θ 角的轴)。因此, 如果共振具有自旋 J 且 z 轴投影分量为 M , 那么 ($d(\theta)$ 是 Wigner 转动函数)

$$|A_M^J(\theta)|^2 = \sum_{m=-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} |A_{|m|} d_{mM}^J(\theta)|^2 \quad (13.28)$$

利用这个关系可以确定共振宽度和 $A_{\frac{1}{2}}, A_{\frac{3}{2}}$ 的关系。利用衰变宽度的公式

$$\Gamma_\gamma = 2\pi \sum_M \int |A_M^J(\theta)|^2 \frac{k_\gamma^2 dk_\gamma d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{m_N}{E_N} \delta(k_\gamma + E_N - M_r) \quad (13.29)$$

我们可以建立电磁宽度和电磁衰变螺旋度振幅 $A_{1/2}, A_{3/2}$ 的关系

$$\Gamma_\gamma(M_r) = \frac{k^2}{\pi} \frac{2}{2J+1} \frac{m_N}{M_r} \left(|A_{1/2}|^2 + |A_{3/2}|^2 \right) \quad (13.30)$$

因为宽度可以直接相加 $\Gamma_\gamma = \Gamma_{1/2} + \Gamma_{3/2}$, 所以 BW 共振处总截面也可以用电磁衰变螺旋度振幅写出

$$\sigma_{\gamma,\pi}(M_r) = \frac{2m_N \Gamma_{\pi,r}}{M_r \Gamma_r^2} \left(|A_{1/2}|^2 + |A_{3/2}|^2 \right) \quad (13.31)$$

方程 (13.30) 可以作为一个电磁衰变振幅的定义

$$A_h(W) = \sqrt{\frac{\pi(2J+1)M}{2k^2 m_N}} \Gamma_h^{1/2}(W) \quad (13.32)$$

通过比较 (13.21)、(13.23) 以及 (13.32), 我们能够得到在 BW 共振处的衰变振幅

$$A_h^{\text{BW}} = C \sqrt{\frac{q_r \pi(2J+1) M_r \Gamma_r^2}{k_r m_N \Gamma_{\pi,r}}} \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^h \quad (13.33)$$

类似地, 比较 (13.21)、(13.24)、(13.25) 和 (13.32)

$$A_h^{\text{pole}} = C \sqrt{\frac{q_p 2\pi(2J+1) W_p}{k_p m_N \text{Res}_{\pi N}}} \text{Res} \mathcal{A}_\alpha^h \quad (13.34)$$

这里多出的下标 r, p 分别代表 BW 共振位置和极点位置的参数。

极点处的归一化的留数，分宽度以及分支比可以按照 PDG 的约定来得到。归一化的留数定义成抽取的留数除以极点处的半分宽度

$$R_{\text{norm},\gamma,\pi}^h \equiv \frac{R_{\gamma,\pi}^h}{\Gamma_p/2} = \frac{\Gamma_h^{1/2}\Gamma_\pi^{1/2}}{\Gamma_p} \quad (13.35)$$

这原则上可以是复值。然而极点处 $\pi N, \gamma N$ 道的分宽度

$$\Gamma_{\pi,p} = 2 |\text{Res}_{\pi N}| \quad (13.36)$$

$$\Gamma_{h,p} = 2 |\text{Res}_{\gamma(h)N}| = \frac{2 |R_{\gamma,\pi}^h|^2}{|\text{Res}_{\pi N}|} \quad (13.37)$$

以及极点处的分支比

$$B_{\text{pole}}(\pi N) = \frac{\Gamma_{\pi,p}}{\Gamma_p} = \frac{|\text{Res}_{\pi N}|}{\Gamma_p/2} \quad (13.38)$$

$$B_{\text{pole}}(\gamma^h N) = \frac{\Gamma_{h,p}}{\Gamma_p} = \frac{|R_{\gamma,\pi}^h|^2}{|\text{Res}_{\pi N}| \Gamma_p/2} \quad (13.39)$$

都是正实数。

下面考虑虚光子情况，类比上面的结果，可以导出虚光子衰变振幅（virtual-photon decay amplitudes）

$$A_h^{BW} = C \sqrt{\frac{q_r \pi(2J+1) M_r \Gamma_r^2}{k_r m_N \Gamma_{\pi,r}}} \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^h \quad (13.40)$$

$$S_{1/2}^{BW} = C \sqrt{\frac{q_r \pi(2J+1) M_r \Gamma_r^2}{k_r m_N \Gamma_{\pi,r}}} \tilde{\mathcal{S}}_\alpha^{1/2} \quad (13.41)$$

$\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^{1/2}, \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^{3/2}$, 和 $\tilde{\mathcal{S}}_\alpha^{1/2}$ 是共振振幅在 BW 位置 $W_r = M_r$ 处的虚部。

类似，极点处的虚光子衰变振幅为

$$A_h^{\text{pole}} = C \sqrt{\frac{q_p 2\pi(2J+1) W_p}{k_p m_N \text{Res}_{\pi N}}} \text{Res } \mathcal{A}_\alpha^h \quad (13.42)$$

$$S_{1/2}^{\text{pole}} = C \sqrt{\frac{q_p 2\pi(2J+1) W_p}{k_p m_N \text{Res}_{\pi N}}} \text{Res } \mathcal{S}_\alpha^{1/2} \quad (13.43)$$

k_r, k_p 是质心系实光子等价能量，相当于 $Q^2 = 0$ 时的虚光子动量。各个振幅 $\mathcal{A}_\alpha^h, \mathcal{S}_\alpha^{1/2}$ 以及留数 $A_h^{\text{pole}}, S_{1/2}^{\text{pole}}$ 都是光子虚度（photon virtuality） Q^2 的连续函数。

14 $N^*(890)$ 的抽取物理量

为了对比 $N^*(1535)$ 的从各类多级振幅抽取出的耦合参数，比较方便的是在 \sqrt{s} 平面上抽取信息，两者的联系可以简单总结如下，其中 S_{11} 道的振幅 ($I_3 = 1/2$) 可以写作

$$E_{0+}^{\text{II}}(s \rightarrow s_R) = \frac{g_\gamma g_\pi}{s - s_R} = \frac{g_\gamma g_\pi}{2\sqrt{s_R}(\sqrt{s} - \sqrt{s_R})} \quad (14.1)$$

这里 s_R 代表 $N^*(890)$ 或者 $N^*(1535)$ 的极点位置。按照通行的做法，除了极点位置和留数，还可以计算衰变振幅 $\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$ ($\frac{1}{2}$ 标记同位旋)

$$\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} = g_\gamma \sqrt{\frac{\pi}{k_r^2 m_N} \rho_{\gamma N}} \quad (14.2)$$

k_r 是极点处光子三动量的大小（衰变质心系中）。

由衰变振幅 $\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$ 我们可以进而得到 $N^*(890) \rightarrow \gamma N$ 的分宽度（极点处）

$$\Gamma_{\gamma N} = \left| \rho_{\gamma N} \frac{g_\gamma^2}{\sqrt{s_R}} \right| \quad (14.3)$$

15 $\gamma^* N \rightarrow N^*$ 唯像拉式量与虚光子衰变振幅

利用强子电磁流可以定义所谓的 $\gamma^* N \rightarrow N^*$ 螺旋度振幅 [61, 62]²⁵:

$$A_{1/2} = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{k^{\text{cm}} e}} \left\langle N^*, \lambda^* = \frac{1}{2} |\epsilon_\mu^{(+)} J^\mu| N, \lambda = -\frac{1}{2} \right\rangle , \quad (15.1)$$

$$A_{3/2} = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{k^{\text{cm}} e}} \left\langle N^*, \lambda^* = \frac{3}{2} |\epsilon_\mu^{(+)} J^\mu| N, \lambda = \frac{1}{2} \right\rangle , \quad (15.2)$$

$$S_{1/2} = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{k^{\text{cm}} e}} \left\langle N^*, \lambda^* = \frac{1}{2} \left| \frac{|\mathbf{k}|}{Q} \epsilon_\mu^{(0)} J^\mu \right| N, \lambda = \frac{1}{2} \right\rangle . \quad (15.3)$$

为了避免一些误解，下面我们给出以上矩阵元中用到的物理量的定义。

这里考虑的是这样的一个过程:

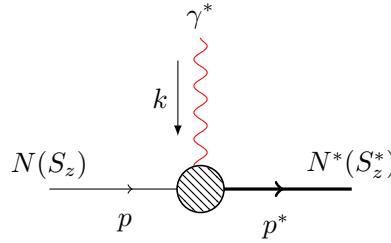


图 18: 4-动量如图所示, 满足 $p^* = p + k$

便于计算, 我们不妨把 z 轴正向定义为 N^* 静止系中光子 3-动量 \mathbf{k} 方向, 同时 $Q^2 = -k^2 > 0$, S_z , S_z^* 分别是核子和共振态自旋在 z 轴的投影。同时我们定义逆变协变矢量分别为 $a^\mu = (a_0, \mathbf{a})$, $a_\mu = (a_0, -\mathbf{a})$, 这样, 极化矢量可以写作:

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^{(0)} &= \frac{1}{Q} (|\mathbf{k}|, 0, 0, -k_0) , & \epsilon_\mu^{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) , \\ \epsilon^{(0)\mu} &= \frac{1}{Q} (|\mathbf{k}|, 0, 0, k_0) , & \epsilon^{(+)\mu} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) . \end{aligned} \quad (15.4)$$

因此, 容易得到 $\epsilon_\mu^{(+)} J^\mu = (J_x + iJ_y)/\sqrt{2}$ 以及 $(|\mathbf{k}|/Q) \epsilon_\mu^{(0)} J^\mu = J_0$, 最后一个等式利用到了规范不变性的条件: $k_\mu J^\mu = k_0 J_0 - |\mathbf{k}| J_z = 0 \Rightarrow J_z = (k_0/|\mathbf{k}|) J_0$ 。

对于 $J^P = \frac{1}{2}^-$ 的共振态 (其他更高的角动量态参考 [61–63]), $\gamma^* N \rightarrow N^*$ 规范不变的形状因子可以定义成

$$\begin{aligned} < N^* | J_\mu | N > &\equiv e \bar{u}(p^*) \tilde{J}_\mu \gamma_5 u(p) , \\ \tilde{J}_\mu &= (k^2 \gamma_\mu - \not{k} k_\mu) G_1(Q^2) + (P \cdot k \gamma_\mu - \not{k} P_\mu) G_2(Q^2) , \end{aligned} \quad (15.5)$$

²⁵这样定义归一化纯粹是为了使得最后得到的衰变宽度能够与一般微扰论中计算的宽度一致。

其中 $P = \frac{1}{2}(p^* + p)$ 。利用极化旋量的表达式，带入 $A_{1/2}$, $S_{1/2}$ 的定义和形状因子的定义 (15.5)，我们可以得到两者之间的关系：

$$\begin{aligned} A_{\frac{1}{2}} &= b [2Q^2 G_1(Q^2) - (m_{N^*}^2 - m_N^2) G_2(Q^2)] , \\ S_{\frac{1}{2}} &= -b \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{2}} [2(m_{N^*} - m_N) G_1(Q^2) + (m_{N^*} + m_N) G_2(Q^2)] , \end{aligned} \quad (15.6)$$

这里（都是 N^* 静止系下的量）

$$b = e \sqrt{\frac{E_N + m_N}{8m_N k^{\text{cm}}}}, \quad k^{\text{cm}} = \frac{m_{N^*}^2 - m_N^2}{2m_{N^*}}, \quad E_N = \frac{m_{N^*}^2 + m_N^2 + Q^2}{2m_{N^*}}, \quad |\mathbf{k}| = \sqrt{Q^2 + \frac{(Q^2 - m_{N^*}^2 + m_N^2)^2}{4m_{N^*}^2}},$$

式 (15.5) 可以通过 [63] 文中的办法导出，对于一个 $\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^-$ 的非规范不变的重子激发形状因子，可以分解为三个独立的 B_i 函数：

$$\tilde{J}_\mu = B_1 \gamma_\mu + B_2 P_\mu + B_3 k_\mu , \quad (15.7)$$

考虑规范不变性，也就是 $k_\mu \tilde{J}^\mu = 0$ ，即

$$\begin{aligned} \bar{u}(p^*) (B_1 \not{k} + B_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} + B_3 k^2) \gamma_5 u(p) \\ = B_1 (m_{N^*} + m_N) + B_2 \frac{1}{2} (m_{N^*}^2 - m_N^2) + B_3 k^2 \\ = 0 , \end{aligned}$$

得到

$$B_1 = -\frac{1}{2} (m_{N^*} - m_N) B_2 - \frac{k^2}{m_{N^*} + m_N} B_3 , \quad (15.8)$$

将这个关系代回 (15.7)，那么经过代数运算就可以得到 (15.5)，差一个归一化因子

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\mu &= \left[-\frac{1}{2} (m_{N^*} - m_N) \gamma_\mu + P_\mu \right] B_2 + \left[-\frac{k^2}{m_{N^*} + m_N} \gamma_\mu + k_\mu \right] B_3 \\ &= \bar{u}(p^*) \left[\frac{k_\mu \not{k}}{m_{N^*} + m_N} - \frac{k^2 \gamma_\mu}{m_{N^*} + m_N} \right] B_3 + \left[\frac{P_\mu \not{k}}{m_{N^*} + m_N} - \frac{P \cdot k \gamma_\mu}{m_{N^*} + m_N} \right] B_2 \gamma_5 u(p) , \end{aligned}$$

对比 (15.5) 可知

$$G_1 = -\frac{1}{m_{N^*} + m_N} B_3 , \quad G_2 = -\frac{1}{m_{N^*} + m_N} B_2 , \quad (15.9)$$

另外，为了方便对比以及更好地看出物理意义，还可以利用 Gordon 等式

$$\bar{u}(p^*) (q^{*\mu} + q^\mu) \gamma_5 u(q) = (m^* - m) \bar{u}(p^*) \gamma^\mu \gamma_5 u(q) + i \bar{u}(p^*) \sigma^{\mu\nu} (q_\nu - q_\nu^*) \gamma_5 u(q) \quad (15.10)$$

重写一下 (15.5) 中关于 G_2 那一项

$$\bar{u}(p^*) (P \cdot k \gamma_\mu - \not{k} P_\mu) \gamma_5 u(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(m_{N^*}^2 - m_N^2)\gamma_\mu - (m_{N^*} + m_N)P_\mu \frac{1}{2}(p^* + p)_\mu \\
&= \frac{1}{2}(m_{N^*} + m_N)(m_{N^*} - m_N) - \frac{1}{2}(m_{N^*} + m_N)((m_{N^*} - m_N)\gamma_\mu - i\sigma_{\mu\nu}k^\nu) \\
&= \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}k^\nu(m_{N^*} + m_N) ,
\end{aligned} \tag{15.11}$$

所以 \tilde{J}_μ 的另一种等价形式

$$\tilde{J}_\mu = (k^2\gamma_\mu - \not{k}k_\mu)G_1(Q^2) + \frac{i}{2}(m_{N^*} + m_N)\sigma_{\mu\nu}k^\nu G_2(Q^2) , \tag{15.12}$$

下面参考文献 [64] 构造的最简单的规范不变的 $\gamma, N, N^*(\frac{1}{2}^-)$ 的拉氏量:

$$\mathcal{L}_{\gamma NN^*} = \frac{e}{2(m_{N^*} + m_N)}\overline{N^*}(\kappa_{N^*}^s + \kappa_{N^*}^v\tau_3)\gamma_5\sigma_{\mu\nu}NF^{\mu\nu} + \text{h.c.} \tag{15.13}$$

这里计算费曼规则我们约定导数算符作用到光子场 A^μ 上得到 $-ik^\mu$, 因此可以简化

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(-ik_\mu A_\nu + ik_\nu A_\mu) \\
&= \not{k}\not{A} - \not{A}\not{k} = (\not{k}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{k})A_\mu ,
\end{aligned}$$

因此 (15.13) 又可以显示写出

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\gamma NN^*} &= \frac{e}{2(m_{N^*} + m_N)}\overline{N^*}(\kappa_{N^*}^s + \kappa_{N^*}^v\tau_3)\gamma_5(\not{k}\not{A} - \not{A}\not{k})N \\
&\quad + \frac{e}{2(m_{N^*} + m_N)}\overline{N}((\kappa_{N^*}^s)^* + (\kappa_{N^*}^v)^*\tau_3)\gamma_5(\not{k}\not{A} - \not{A}\not{k})N^* ,
\end{aligned} \tag{15.14}$$

因此可以直接写出图.18的费曼规则:

$$i\frac{e}{2(m_{N^*} + m_N)}(\kappa_{N^*}^s + \kappa_{N^*}^v\tau_3)\gamma_5(\not{k}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{k}) , \tag{15.15}$$

以及作为 $\gamma^* N \rightarrow N^*$ 的费曼图微扰振幅:

$$i\mathcal{M} = i\frac{e}{2(m_{N^*} + m_N)}\chi_2^\dagger(\kappa_{N^*}^s + \kappa_{N^*}^v\tau_3)\chi_1\epsilon_\mu(k)\bar{u}(p^*)\gamma_5(\not{k}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{k})u(p) , \tag{15.16}$$

同时由定义

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu\mathcal{M}^\mu = \epsilon_\mu\langle N^*|J_\mu|N\rangle = e\epsilon_\mu\bar{u}(p^*)\tilde{J}_\mu\gamma_5u(p) , \tag{15.17}$$

以及 (15.7) 和 (15.12) 可以对比出最低阶振幅中的形状因子, 便于计算, 先考虑同位旋结构分解:

$$\frac{1}{2(m_{N^*} + m_N)}\chi_2^\dagger(\kappa_{N^*}^s\mathbb{1}_{2\times 2} + \kappa_{N^*}^v\tau_3)\chi_1 = \frac{1}{2(m_{N^*} + m_N)} \begin{cases} \kappa_{N^*}^s + \kappa_{N^*}^v , & p \text{ target} , \\ \kappa_{N^*}^s - \kappa_{N^*}^v , & n \text{ target} , \end{cases} \tag{15.18}$$

再将 $\not{k}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{k}$ 化简为 (15.7) 中的三个基本洛伦兹结构:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p^*) (\not{k}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{k}) \gamma_5 u(p) \\
&= (\not{p}^* - \not{p})\gamma^\mu - \gamma^\mu(\not{p}^* - \not{p}) \\
&= m_{N^*}\gamma^\mu - \not{P}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{p}^* - m_N\gamma^\mu \\
&= (m_{N^*} - m_N)\gamma^\mu - 2(p + p^*)^\mu - m_N\gamma^\mu + m_{N^*}\gamma^\mu \\
&= 2(m_{N^*} - m_N)\gamma^\mu - 4P^\mu,
\end{aligned} \tag{15.19}$$

得到

$$B_1 = 2(m_{N^*} - m_N), \quad b_2 = -4, \quad B_3 = 0, \tag{15.20}$$

利用 (15.9), 有

$$G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{4}{m_{N^*} + m_N}, \tag{15.21}$$

也就是

$$\tilde{J}^\mu = (P \cdot k \gamma^\mu - \not{k} P^\mu) \frac{4}{m_{N^*} + m_N} = 2i\sigma^{\mu\nu}k_\nu, \tag{15.22}$$

下面参考 [65] 的约定 (在微扰 QCD 中比较常用而且 $G_{1,2}$ 量纲一致), 重新定义形状因子 (与我们的结果只差一个系数):

$$\begin{aligned}
\langle N^*(p^*) | J^\mu | N(p) \rangle &= e\bar{u}_{N^*}(p^*) \gamma_5 \Gamma^\mu u_N(p), \\
\Gamma^\mu &= \frac{G_1(k^2)}{m_N^2} (\not{k} k^\mu - k^2 \gamma^\mu) - i \frac{G_2(k^2)}{m_N} \sigma^{\mu\nu} k_\nu,
\end{aligned} \tag{15.23}$$

同时 (15.6) 成为

$$\begin{aligned}
A_{1/2} &= eB [Q^2 G_1(Q^2) + m_N (m_{N^*} - m_N) G_2(Q^2)], \\
S_{1/2} &= \frac{e}{\sqrt{2}} BC [(m_N - m_{N^*}) G_1(Q^2) + m_N G_2(Q^2)],
\end{aligned} \tag{15.24}$$

运动学因子 B, C

$$B = \sqrt{\frac{Q^2 + (m_{N^*} + m_N)^2}{2m_N^5(m_{N^*}^2 - m_N^2)}}, \quad C = \sqrt{Q^2 + \frac{(Q^2 - m_{N^*}^2 + m_N^2)^2}{4m_{N^*}^2}}, \tag{15.25}$$

以及得到 $G_1 = 0, G_2 = -2m_N$, 那么最后就能计算出在唯像拉氏量 (15.13) 下树图虚光子衰变振幅:

$$\begin{aligned}
{}_{p,n} A_{1/2} &= -e \frac{m_{N^*} - m_N}{m_{N^*} + m_N} \sqrt{\frac{Q^2 + (m_{N^*} + m_N)^2}{2m_N(m_{N^*}^2 - m_N^2)}} \kappa_{N^*}^{p,n}, \\
{}_{p,n} S_{1/2} &= -\frac{e}{2(m_{N^*} + m_N)} \sqrt{\frac{Q^2 + (m_{N^*} + m_N)^2}{m_N(m_{N^*}^2 - m_N^2)}} \sqrt{Q^2 + \frac{(Q^2 - m_{N^*}^2 + m_N^2)^2}{4m_{N^*}^2}} \kappa_{N^*}^{p,n}.
\end{aligned} \tag{15.26}$$

耦合常数重新定义为 $\kappa_{N^*}^{p,n} = \kappa_{N^*}^s \pm \kappa_{N^*}^v$ 。这个结果取 $Q^2 = 0$ 和 [64] 文中式 (83) 完全一致。

16 缪子 $g - 2$ 简介以及 HVP 贡献计算方法

1 轻子磁矩的场论描述

对于 SM 中的轻子, 由于自旋 $s = 1/2$, 从而带有磁矩 $\vec{\mu} = g_\mu \frac{e}{2m_\mu} \vec{s}$, 我们定义 $g_\mu = 2(1 + a_\mu)$, 只考虑 QED 树图贡献 (也就是 Dirac 理论), $g_\mu^{(0)} = 2$ 。场论中 a_μ 可以被一个矩阵元描述:

$$\mathcal{M}(x; p) = \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{\text{em}}^\mu(x) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle \quad (16.1)$$

r_1, r_2 分别表示初末态 μ 的自旋, a_μ 的信息来自于经典情况下的零动量转移情况 $q^2 = (p_2 - p_1)^2 \rightarrow 0$ 。考虑傅里叶变换到动量空间, 可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}(q; p) &= \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{\text{em}}^\mu(x) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(q - p_2 + p_1) \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{\text{em}}^\mu(0) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle \end{aligned} \quad (16.2)$$

T 矩阵元定义成

$$\langle \mu^-(p_2) | j_{\text{em}}^\mu(0) | \mu^-(p_1) \rangle = (-ie) \bar{u}(p_2) \Gamma^\mu(P, q) u(p_1), \quad (P = p_1 + p_2). \quad (16.3)$$

QED 中只有两个独立的协变形状因子, 可以写成

$$(-ie) \bar{u}(p_2) \left[\gamma^\mu F_E(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_\mu} F_M(q^2) \right] u(p_1) \quad (16.4)$$

其中 $q = p_2 - p_1$, 经典极限下 $F_E(0) = 1$, $F_M(0) = a_\mu$ 。对于具体计算 a_μ , 我们并不需要计算完整的 $\Gamma_\mu(P, q)$, 利用所谓投影算符技术 [66] (详细的结果参考 [67]), 我们可以在 $q^2 = 0$ 附近展开 Γ_μ , 由于投影算符结构的限制, 只需要考虑展开到 q 的线性阶就可以得到所有非零贡献的结果:

$$\Gamma_\mu(P, q) \simeq \Gamma_\mu(P, 0) + q^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \Gamma_\mu(P, q) \Big|_{q=0} \equiv V_\mu(p) + q^\nu T_{\nu\mu}(p) \quad (16.5)$$

下面可以证明, 其他高阶展开对 a_μ 没有贡献。这样可以简化整个计算, 使得我们可以不需要计算完整振幅就可以得到最后 a_μ 的值。因为 a_μ 是一个标量, 不依赖于 μ 的动量方向, 因此可以考虑先对 a_μ 的表达式做一个 P 方向的角度平均 ($P \cdot q = 0$), 这样会简化最后的表达式并且不会影响 a_μ 的数值。最后的结果为

$$\begin{aligned} a_\mu &= \frac{1}{8(d-2)(d-1)m_\mu} \text{Tr} \left\{ (\not{p} + m_\mu) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\not{p} + m_\mu) T_{\nu\mu}(p) \right\} \Big|_{p^2=m_\mu^2} \\ &+ \frac{1}{4(d-1)m_\mu^2} \text{Tr} \left\{ [m_\mu^2 \gamma^\mu - (d-1)m_\mu p^\mu - d\not{p} p^\mu] V_\mu(p) \right\} \Big|_{p^2=m_\mu^2} \end{aligned} \quad (16.6)$$

2 重整化的光子自能函数与色散关系

SM 中的费米子只通过光子或者其他矢量规范玻色子产生相互作用，我们考虑的问题中，质量跑动依赖最低阶来自于一个光子真空极化的两圈图。因此，我们优先考虑这个子图也就是所谓领头阶光子极化。考虑重整化的光子传播子，(光子场强重整化因子定义为 Z_γ)

$$ie^2 D_\gamma^{\mu\nu}(q) = \frac{-ig^{\mu\nu}e^2 Z_\gamma}{q^2 (1 + \Pi'_\gamma(q^2))} + \text{gauge terms} \quad (16.7)$$

这实际上意味着电荷被替换成能标依赖的跑动电荷

$$e^2 \rightarrow e^2(q^2) = \frac{e^2 Z_\gamma}{1 + \Pi'_\gamma(q^2)} = \frac{e^2}{1 + (\Pi'_\gamma(q^2) - \Pi'_\gamma(0))} \quad (16.8)$$

第三个等号来源于我们要求在 Thomson 极限下 $q^2 \rightarrow 0$ 我们回到经典电荷值 e 。微扰论中，贡献 $\Pi'_\gamma(q^2)$ 的最低阶图来自

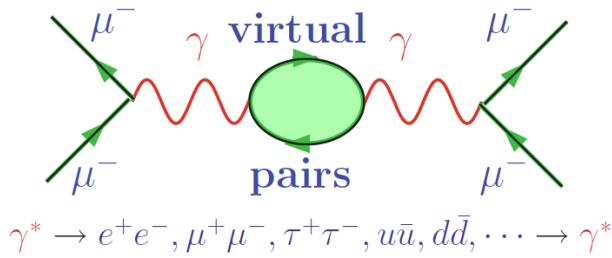


图 19: μ 散射中的真空极化图。

定义

$$\equiv -(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi'_\gamma(q^2)$$

可以利用 Källen-Lehmann 谱表示证明，光子自能函数可以用两个电磁流的编时关联函数来表示

$$ie^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T j_{\text{em}}^\mu(x) j_{\text{em}}^\nu(0) | 0 \rangle = -(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi'_\gamma(q^2) \quad (16.9)$$

由于流守恒 $\partial_\mu j_{\text{em}}^\mu(x) = 0$, 编时乘积是纯横向的。

利用精细结构常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, (16.8) 可以写作

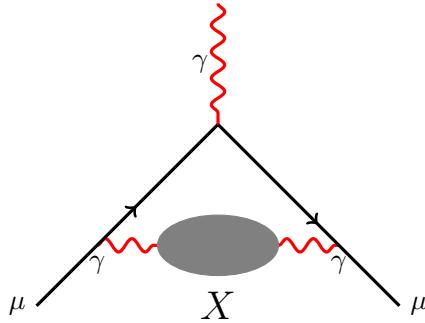
$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \Delta\alpha(q^2)} ; \quad \Delta\alpha(q^2) = -\text{Re}(\Pi'_\gamma(q^2) - \Pi'_\gamma(0)) . \quad (16.10)$$

这个结果下面讨论 HVP 会用到。

重整化的光子自能函数是一个复平面上的解析函数，满足一个色散关系 (DR)

$$-\frac{\Pi'_{\gamma \text{ ren}}(k^2)}{k^2} = \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{1}{\pi} \text{Im } \Pi'_{\gamma}(s) \frac{1}{k^2 - s} \quad (16.11)$$

一个重要的观察是 DR 中只有积分最后一项带有 k 的依赖，这个性质非常重要，基于这个可以简化 HVP 的计算，也就是在费曼图的基础上将纯 QED 的结构和真空极化（尤其是强作用贡献）分离开来处理。对于领头阶的 VP 贡献



图中的灰色泡泡代表光子完全传播子，包括 SM (或者 BSM) 中的所有贡献，对此我们只需要在 VP 图中做一个简单的替换

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} [-\Pi'_{\gamma \text{ ren}}(k^2)] \quad (16.12)$$

$\Pi'_{\gamma \text{ ren}}$ 是重整化后的自能 (原则上所有阶)，在色散积分 (16.11) 意义下，高圈图相当于将一圈顶点图中的自由光子传播子做一个直接替换

$$-i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \rightarrow -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - s} \quad (16.13)$$

也就是说给光子一个质量 \sqrt{s} ，这个结果可以直接插入光子自能函数的色散积分中去。利用 QED 微扰论的结果同时只考虑 $q^2 = 0$ 情况，重光子传播子的最后的结果为

$$a_\mu^{(2)\gamma} \equiv \frac{\alpha}{\pi} K_\mu^{(2)}(s) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (s/m_\mu^2)(1-x)} \quad (16.14)$$

这个结果是 a_μ 的领头贡献 (a_μ 的上标 (2) 代表 e^2 阶)，在考虑到光子质量 \sqrt{s} 的情况下。对于 $s \rightarrow 0$ ，回到 Schwinger 的结果。利用这个和 (16.11)，灰色泡泡的贡献可以写作

$$a_\mu^{(X)} = \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Im } \Pi'_\gamma(s) K_\mu^{(2)}(s) \quad (16.15)$$

因为 a_μ 是一个有限且确定的数，所以可以任意改变积分顺序以及积分求和顺序 (数学上满足绝对收敛)，如果我们先积分 s 后积分 x [68]，那么能得到

$$a_\mu^{(X)} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{1}{\pi} \text{Im } \Pi'_\gamma(s) \frac{x^2}{x^2 + (s/m_\mu^2)(1-x)} \quad (16.16)$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) \left[-\Pi'_\gamma^{(X)}(s_x) \right] \quad (16.17)$$

其中我们定义一个类空的参数 $s_x = -\frac{x^2}{1-x} m_\mu^2 \leq 0$, 最后一个等号来自于我们凑出一个色散积分, 其中用到了

$$\frac{x^2}{x^2 + (s/m_\mu^2)(1-x)} = -s_x \frac{1}{s - s_x} \quad (16.18)$$

如果我们反解出 $x = (1-\beta)(s_x/2m_\mu^2)$, $\beta = (1 - 4m_\mu^2/s_x)^{1/2}$, 那么

$$a_\mu^{(X)} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^0 \Pi'_\gamma^{(X)}(s_x) \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \right)^2 \frac{ds_x}{\beta s_x} \quad (16.19)$$

这里只用到了类空区间的真空极化函数。LQCD 上计算 $g - 2$ 的强作用部分 (HVP) 就是利用这一关系。

同时这个还可以联系到 QCD 中所谓的 Adler 函数 [69], 最近发展出的一套方法抽取 a_μ^{HVP} 贡献, 就是利用 $e\mu$ 的 Bhabha 散射抽取类空极化函数的信息, 这一方式的好处是误差可以做到非常小同时也是一个独立的检验相对于类时的结果 [70]。

3 强子真空极化贡献

低能 QCD 由于渐近自由是非微扰的, 从现实中低能 QCD 的表征是来源于 QCD 最强子态的谱, 例如赝标介子 π, K 和 η (Goldstone 玻色子), 蕨标单态 η' , 自旋为 1 的矢量玻色子 ρ, ω, ϕ , 以及其他关于手征对称性破缺, 比如轻夸克凝聚 $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$ ($q = u, d, s$) 等等。

夸克贡献的电磁流为

$$j_{\text{em}}^\mu \text{ had} = \sum_c \left(\frac{2}{3} \bar{u}_c \gamma^\mu u_c - \frac{1}{3} \bar{d}_c \gamma^\mu d_c - \frac{1}{3} \bar{s}_c \gamma^\mu s_c + \frac{2}{3} \bar{c}_c \gamma^\mu c_c - \frac{1}{3} \bar{b}_c \gamma^\mu b_c + \frac{2}{3} \bar{t}_c \gamma^\mu t_c \right) \quad (16.20)$$

c 是颜色指标。

通过色散关系可以得到一个联系, 首先依据解析性 (来源于因果性), 写出一个色散关系:

$$\Pi'_\gamma(k^2) - \Pi'_\gamma(0) = \frac{k^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im } \Pi'_\gamma(s)}{s(s - k^2 - i\varepsilon)} \quad (16.21)$$

然后用光学定理 (来源于幺正性) 可以将真空极化函数的虚部和 e^+e^- 湮灭到任意的总截面联系起来

$$\text{Im } \Pi'_\gamma(s) = \frac{s}{4\pi\alpha(s)} \sigma_{\text{tot}} \left(e^+e^- \rightarrow \text{anything} \right) \equiv \frac{\alpha(s)}{3} R(s) \quad (16.22)$$

以及

$$R(s) = \sigma_{\text{tot}} / \frac{4\pi\alpha(s)^2}{3s} \quad (16.23)$$

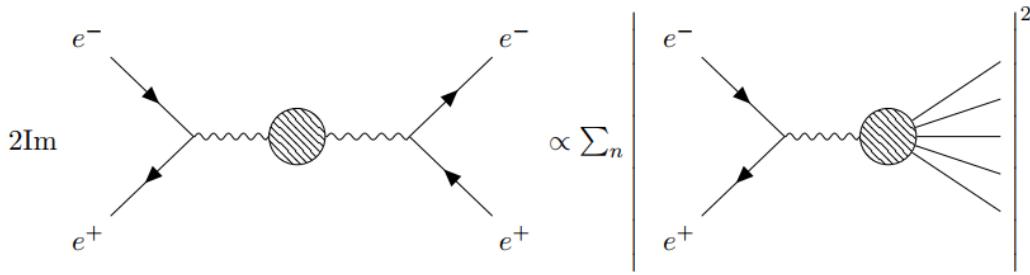


图 20: VP 函数的光学定理

归一化因子来源于树图截面 $\sigma_{\mu\mu}(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)$ ，这里考虑质心能量远大于 $\mu^+\mu^-$ 的阈 $s \gg 4m_\mu^2$ 。这里我们得到的强子贡献是完全的，对于轻子部分可以利用微扰 QED 做逐阶计算，产生一个正反轻子对的截面（用 R 值表示）在最低阶为

$$R_\ell(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_\ell^2}{s}} \left(1 + \frac{2m_\ell^2}{s}\right), (\ell = e, \mu, \tau), \quad (16.24)$$

这种方式提供了一个简便的计算来得到轻子圈对极化函数的贡献（跟完整的两圈计算结果是一样的）

$$\Pi'_{\gamma \text{ ren}}(q^2) = \frac{\alpha q^2}{3\pi} \int_{4m_\ell^2}^\infty ds \frac{R_\ell(s)}{s(s - q^2 - i\varepsilon)} \quad (16.25)$$

相反，强作用部分在低能下不能被微扰逐阶计算，这个时候最为可靠的方式就是色散关系加上光学定理，通过

$$R_{\text{had}}(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) / \frac{4\pi\alpha(s)^2}{3s} \quad (16.26)$$

我们得到对应的强子真空极化函数（先不考虑电磁阈）

$$\Pi'_{\gamma \text{ ren}}(q^2) = \frac{\alpha q^2}{3\pi} \int_{4m_\pi^2}^\infty ds \frac{R_{\text{had}}(s)}{s(s - q^2 - i\varepsilon)} \quad (16.27)$$

低能下，强作用产生的真空极化由两个带电的 π 主导，利用 π 的电磁形状因子（类时） $F_\pi(s)$ ，可以给出

$$R_{\text{had}}(s) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{\frac{3}{2}} |F_\pi(s)|^2, \quad 4m_\pi^2 < s < 9m_\pi^2 \quad (16.28)$$

这个结果也可以从相应的虚部来导出（利用 Cutkosky 规则）：

$$\text{Im } \Pi'_\gamma(\pi)(s = q^2) = \frac{\alpha}{12} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{3/2} \quad (16.29)$$

这里出现了相空间（正比于 π 动量）的三次方，来源于自旋为 1 的光子耦合到两个赝标介子，赝标介子轨道角动量一定为 1 (P 波)，因此正比于动量的三次方。

最后，HVP 的领头贡献可以写作

$$a_{\mu}^{(4)}(\text{vap, had}) = \left(\frac{\alpha m_{\mu}}{3\pi}\right)^2 \left(\int_{m_{\pi^0}^2}^{E_{\text{cut}}^2} ds \frac{R_{\text{had}}^{\text{data}}(s) \hat{K}^{(2)}(s)}{s^2} + \int_{E_{\text{cut}}^2}^{\infty} ds \frac{R_{\text{had}}^{\text{pQCD}}(s) \hat{K}^{(2)}(s)}{s^2} \right) \quad (16.30)$$

阈从 $m_{\pi^0}^2$ 开始是由于最低的强子中间态为 $\gamma^* \rightarrow \pi^0 \gamma$ (有时候不考虑电磁阈那么最低中间态从 $\pi\pi$ 开始)。 E_{cut} 是能量截断，截断上用微扰 QCD 大概是合理的。核 $\hat{K}^{(2)}(s)$ 正比于 (16.14)，这个结果可以被解析地积出来，首先定义

$$x = \frac{1 - \beta_{\mu}}{1 + \beta_{\mu}}, \beta_{\mu} = \sqrt{1 - 4m_{\mu}^2/s}, \quad (16.31)$$

这个结果为²⁶ ($s > 4m_{\mu}^2$)

$$K(s) = \frac{x^2}{2} (2 - x^2) + \frac{(1 + x^2)(1 + x)^2}{x^2} \left(\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} \right) + \frac{(1 + x)}{(1 - x)} x^2 \ln(x) \quad (16.32)$$

以及

$$\hat{K}(s) = \frac{3s}{m_{\mu}^2} K(s) \quad (16.33)$$

这个函数在积分区间内是非常缓变的，从 $\pi\pi$ 阈值 $s = 4m_{\pi}^2$ 的 0.63 单调增加到 $s \rightarrow \infty$ 的 1。

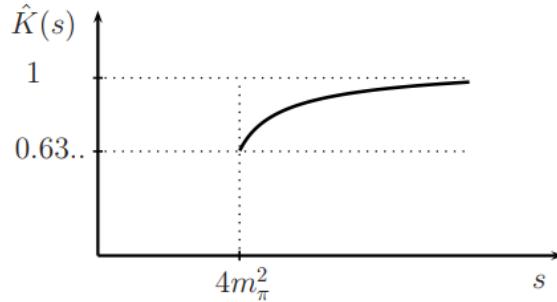


图 21: $\hat{K}^{(2)}$ 权重函数

²⁶更高阶的 $K(s)$ 函数类似地可以算出，具体见 [66]

17 一般的 Compton 散射

这里首先给出各类 Compton 散射的运动学区间，我们首先给出 Compton 散射的一个一般的运动学定义，其余类似。最一般的我们考虑所谓 VVCS: $\gamma^*(q_1) + N(p_1) \rightarrow \gamma^*(q_2) + N(p_2)$, $p_1^2 = p_2^2 = m_N^2$, 有下面 6 类典型的情况:

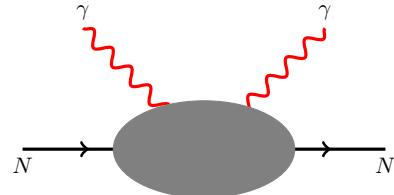


图 22: CS: $q_1^2 = q_2^2 = 0$

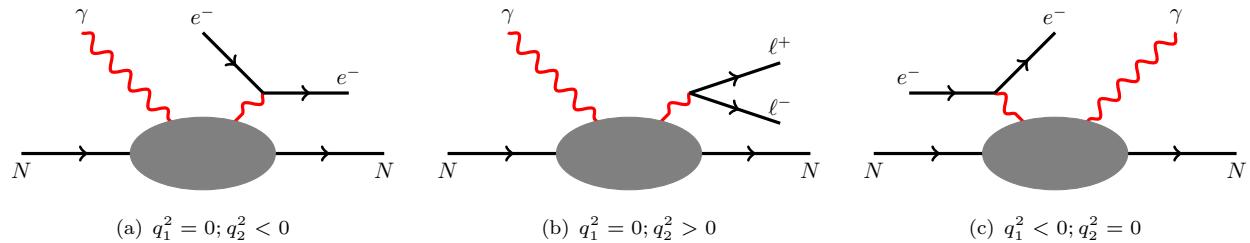


图 23: VCS

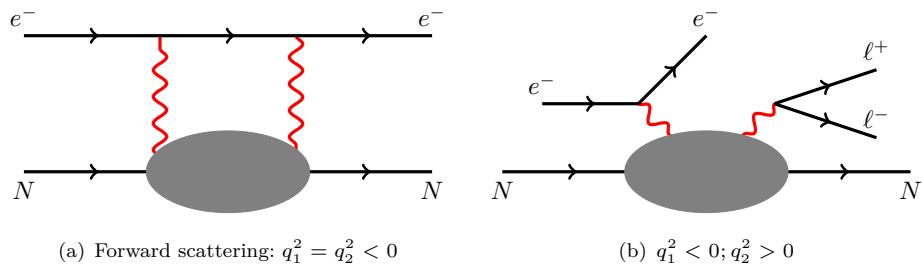


图 24: VVCS

A 附录一：自然单位下实验数据单位换算

这节主要参考 Thomson 的“Modern particle physics”[71]。物理学中基本物理量及其单位的不同选取，就构成了不同的单位制。粒子物理中常常采用自然单位制，然而实验中很多数据都是在国际单位制中给出的，在我们的拟合过程中需要一个单位换算。我们这里给出一些下文用到的基础法则。

微观物理学中涉及的基本物理量原来有长度、时间、质量、电荷、温度等五种。为了减少独立的基本物理量的数目，规定以真空的介电常数为无量纲的数 1 来定义电荷，从而使电荷不再是基本的物理量。首先，利用 Boltzmann 常数

$$\begin{aligned} k_B &= 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \\ &= 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

规定 k_B 为无量纲的数并且归一化为 1。这样温度和能量将具有相同的量纲，可以用同一单位来度量，这时原有的温度和能量的换算关系为

$$1\text{eV} = 11604.51\text{K} \quad (\text{A.2})$$

第二，利用真空光速 $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，同样规定为 1。这样时间和长度将具有相同的量纲，可以用同一单位来度量，这时原有的时间和长度的换算关系为

$$1\text{s} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m} \quad (\text{A.3})$$

第三，利用 Planck 常数 $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.5821 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$ 规定为无量纲的 1，则时间和能量的倒数将具有相同的量纲，可以用同一单位来度量，这时原有的时间和能量单位的关系为

$$1(\text{MeV})^{-1} = 6.5821 \times 10^{-22} \text{ s} \quad (\text{A.4})$$

因而自然单位制中： $\hbar = c = k_B = 1$ ，在这些规定下，只剩下一种独立的量纲，它可以由长度、时间、能量或其它任何一种有量纲的物理量中选取。在粒子物理学中通常选质量（能量）为基本量纲，质量和能量的单位用 GeV 或者 MeV 表示，有时也用费米作为长度的单位，由上面的转换可以得到一个重要的关系

$$1\text{fm} = 5.0677 \text{ GeV}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

这里根据上面得到的关系，给出几个下面用到的单位转换，几个重要的单位分别是：

$\text{GeV}, \text{fm}, \mu b(mcb), 10^{-3}/m_{\pi^+}, \text{fm}$ 是 GWU 分波数据处理里振幅分析常用的单位， $10^{-3}/m_{\pi^+}$ 是 Mainz 组拟合分波中振幅常用的单位， μb 是散射截面的单位，而理论计算中通常得到的函数

是以 GeV 的各种幂次作为单位的。下面给出各类单位的换算关系，首先是截面单位 b (barn) 的定义

$$1b \equiv 10^{-28}m^2$$

首先，最简单的

$$1 \left(\frac{10^{-3}}{m_{\pi^+}} \right) = \frac{10^{-3}}{139.6 \times 10^{-3}\text{GeV}} = \frac{1}{139.6}\text{GeV}^{-1} = 7.163 \times 10^{-3}\text{GeV}^{-1} \quad (\text{A.6})$$

$$1\text{GeV}^{-1} = 139.6 \left(\frac{10^{-3}}{m_{\pi^+}} \right) \quad (\text{A.7})$$

其次是 GeV 和 mfm 之间的转换

$$1\text{mfm} = 10^{-3}\text{fm} = 5.068 \times 10^{-3}\text{GeV}^{-1} \quad (\text{A.8})$$

$$1\text{GeV}^{-1} = 197.33\text{mfm} \quad (\text{A.9})$$

对于 μb 和 GeV

$$1\mu b = 10^{-4}\text{fm}^2 = 10^{-4} \times (5.068\text{GeV}^{-1})^2 = 2.568 \times 10^{-3}\text{GeV}^{-2} \quad (\text{A.10})$$

$$1\text{GeV}^{-2} = 0.3894 \times 10^3\mu b \quad (\text{A.11})$$

最后一个 μb 和 $10^{-3}/m_{\pi^+}$ 之间的关系

$$1\mu b = 2.568 \times 10^{-3}\text{GeV}^{-2} = 2.568 \times 10^{-3} \left(139.6 \left(\frac{10^{-3}}{m_{\pi^+}} \right) \right)^2 = 50.05 \left(\frac{10^{-3}}{m_{\pi^+}} \right)^2 \quad (\text{A.12})$$

$$1 \left(\frac{10^{-3}}{m_{\pi^+}} \right)^2 = 0.01998\mu b \quad (\text{A.13})$$

这些结果虽然简单，但是在处理数据的时候非常便利。

B 附录二：非线性实现

这里主要参考 [72]。在量子场论中，Wigner 定理告诉我们作用在希尔伯特空间的对称变换要么是幺正的要么是反幺正的 [73]。在对称算符作用下，希尔伯特空间的态的变换由对称群 G 的一个表示（投影表示）来标记。一般来说，有两种方式来实现这个对称性，一个是真空态（唯一）在所有对称变换的作用下是不变的，称为 Wigner-Weyl 实现；另一个实现包含简并的真空，它们可以在某些对称变换下相互转换，这种被称为 Nambu-Goldstone 实现。

对于 Wigner-Weyl 实现，各个激发态都属于对成群 G 的线性表示，同样的，相对应的场算符也隶属于相同的表示，因而我们可以说在 Wigner-Weyl 情况下，对称性是线性实现。与之不同，Nambu-Goldstone 实现下，真空只在完整对称群 G 的一个特殊子群 H 作用下是不变的，当群 G 元素不属于 H 时，作用在真空上会得到另一个简并的真空。如果这种作用是局部的，即不同的群元作用在不同的时空点上，就会产生一种特殊的无质量激发 Goldstone。对应于这些状态（包括 Goldstone 粒子和其他粒子）的算符不能形成 G 的线性表示，这点由线性引理保证 [74, 75]。因而我们将这种对称性实现的方式叫做非线性实现。

线性实现一个著名例子就是我们通常标准模型的拉式量构造。对于非线性实现，拉式量构造变得更加困难。在这个附录中，我们将简要介绍具有非线性实现的对称性的低能有效理论的构造。在非线性实现中构造 G 不变的拉式量标准的方法是所谓的陪集构造，最早由 Callan、Coleman、Wess 和 Zumino 于 1969 年最先提出 [74, 75]（也叫 CCWZ 构造方法）。陪集构造这个名称的来源是，Goldstone 等价于（同构）陪集空间 G/H 中的点，其中 H 是完全对称群 G 的线性实现子群，这个的证明可以参看 [5]。

1 整体对称性陪集构造的一般形式

考虑一个具有对称性的理论，其对成群是一个半单、单连通的李群 G ，同时其一个子群 H 的线性实现。我们考虑的大多数情况，只需要李群的局域性质，因此我们方便起见考虑相关的李代数 \mathfrak{g} 和 \mathfrak{h} 。这里令李代数 \mathfrak{h} 的生成元为 $V^a, a = 1, \dots, \dim \mathfrak{h}$ 。 \mathfrak{g} 中不属于 \mathfrak{h} 的其他生成元为 $A^i, i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}$ 。这个生成元组合可以选择成正交归一并且结构常数全反对称，即 $\text{tr}(V^a V^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$, $\text{tr}(A^i A^j) = \frac{1}{2}\delta^{ij}$ 以及 $\text{tr}(V^a A^i) = 0$ 。 $[V^a, V^b] = if^{abc}V^c$, $[A^i, A^j] = if^{ija}V^a$, 以及 $[V^a, A^i] = if^{aij}A^j$ ，第二个式子 $[A^i, A^j] = if^{ija}V^a$ 来自于陪集空间 G/H 为对称空间的要求。

按照上文所说 Goldstone 场 $\pi^i = \pi^i(x)$ 参数化了陪集空间，因此我们可以按照李代数指数化参数形式写出 G/H 中的一个一般元素

$$U(\pi) = e^{i\pi \cdot A} \tag{B.1}$$

在群 G 的元素 g 的左作用下， $U(\pi)$ 一般来说将不会保持 $e^{i\tilde{\pi} \cdot A}$ 的形式，比如还可能含有 V 的依赖。我们想要找到一种变换行为使得形式仍然保持，那么最简单的方式就是在右边补偿一个变

换 $h = h(g, \pi)$, 注意这里 h 含有 $\pi(x)$ 的依赖, 那么 h 也有 x 的依赖。我们可以定义变换

$$g : U(\pi) \rightarrow U(\tilde{\pi}) = gU(\pi)h^\dagger(g, \pi) \quad (\text{B.2})$$

这个表达式决定了 π^i 场的变换行为, 这当然是一个复杂且非线性的变换规则。作为群的实现 (不一定是一个表示), 结合律必须满足, 同时也得有单位元, 这可以直接看出。 $h(g_2g_1, \pi) = h(g_2, \tilde{\pi}(g_1, \pi))h(g_1, \pi)$ 和 $h(1, \pi) = 1$ 。尤其值得注意, H 的线性实现要求复合变换 $h(g, \pi)$ 满足 $h(h, \pi) = h$, 因而 $h : U(\pi) = hU(\pi)h^\dagger$, 这样才能诱导出与 x 无关的线性表示

$$h : \pi^i A^i \rightarrow \pi^i h A^i h^\dagger = \pi^i D^{ij}(h) A^j \quad (\text{B.3})$$

也就是说 $h(h, \pi)1$ 没有 π 的依赖性, 这样 π^i 在 h 的作用下恰是个线性表示。

可以想象到 π^i 场的变换是非常的复杂, 但是可以利用 $U(x)$ 来构造 G 不变的量。如果不考虑导数项, 唯一的规范不变量是 $U^\dagger U = 1$, 因此一定需要引入类似于 dU 的项。然而, dU 并不是一个协变的量, 在 g 的作用下, 由于 h 是局域的 (依赖于 x), $dU \rightarrow gdUh^\dagger + gUh^\dagger$ 。解决的办法很简单, 就是引入一个规范不变的 1 形式 \mathcal{A} , 所以定义 $dU - iU\mathcal{A} \equiv DU$, 这样协变性得到满足 $DU \rightarrow gDUh^\dagger$ 。最方便的构造 \mathcal{A} 的方式是考虑微分几何上所谓的 Maurer-Cartan 形式 $\omega = -iU^\dagger(\pi)dU(\pi)$, 直接的计算可以表明

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow -ihU^\dagger g^\dagger(gdUh^\dagger + gUh^\dagger) \\ &= -ihU^\dagger dUh^\dagger - ihdh^\dagger \\ &= h\omega h^\dagger - ihdh^\dagger \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

数学上 1 形式是定义在李代数 \mathfrak{g} 的对偶空间 \mathfrak{g}^* 中, 因而 ω 可以用 \mathfrak{g}^* 的对偶基底 $\{V_a^*, A_i^*\}$ 来展开, 或者简单来说通过 Killing 度规用 V^a, A^i 展开

$$\omega = \omega_V + \omega_A = \omega_V^a V^a + \omega_A^i A^i \quad (\text{B.5})$$

Maurer-Cartan 形式的纵向 (V) 和横向 (A) 分量在群变换下分别相当于一个规范联络和一个线性表示, 也就是说, $\omega_V \rightarrow h\omega_V h^\dagger - ihdh^\dagger$ 和 $\omega_A \rightarrow h\omega_A h^\dagger$ (因为 $hdh^\dagger \in \mathfrak{h}$)。因此, ω_V 就是我们想要的规范 1 形式 \mathcal{A} 。更一般的情况下, 如果理论还包含物质场 ψ , 在 H 的作用下下线性变换 $\psi \rightarrow D(h(g, \pi))\psi$ 。类似的, $D\psi = (d + i\omega_V^a D(T^a))\psi$ 。特别的, $\omega_A = -iU^\dagger(\pi)DU(\pi)$ 。可以验证

$$-iU^\dagger DU = -iU^\dagger (dU - iU\omega_V) = \omega - \omega_V = \omega_A \quad (\text{B.6})$$

2 例子一: $SU(2) \rightarrow U(1)$

作为最简单的例子, 我们考虑一个玩具模型 $SU(2) \rightarrow U(1)$ 。 $SU(2)$ 群三个生成元满足:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k \quad (\text{B.7})$$

不妨将线性实现的子群 $U(1)$ 的生成元设成 T_3 , 这样二维陪集空间 $SU(2)/U(1)$ 坐标可以被参数 π_a , ($a = 1, 2$) 通过标准方式 $U(\pi) = e^{i\pi^a T_a}$ 描述。我们让 $\pi^a = \pi^a(x)$ 显式依赖于时空坐标, 数学上来说, 就是考虑时空流形上的陪集(纤维)丛。在 $g \in SU(2)$ 的变换作用下, $U(\pi) \rightarrow gU(\pi)h(\pi, g)$, h 属于还未破缺的 $U(1)$ 。

Maurer-Cartan 形式变换下为 $\omega \rightarrow h^{-1}(\pi, g)\omega h(\pi, g) - ih^{-1}(\pi, g)d\pi h(\pi, g)$ 。 ω 可以分解成

$$\omega = \omega_A^a T_a + \omega_V T_3 \quad (\text{B.8})$$

对于变换 $g \in SU(2)$, 定义无穷小变换 $g = e^{i\xi^a T_a} e^{i\eta T_3}$, 补偿的局域变换 $h = e^{i\sigma T_3}$ 。展开 $U'(\pi) = gU(\pi)h(\pi, g)$ 所有量

$$1 + i(\pi^a + \delta\pi^a)T_a = (1 + i\xi^b T_b)(1 + i\eta T_3)(1 + i\pi^c T_c)(1 + i\sigma T_3) \quad (\text{B.9})$$

到非平庸的最低阶

$$\delta\pi^1 = \xi^1 + 2\eta\pi^2, \quad \delta\pi^2 = \xi^2 - 2\eta\pi^1, \quad \sigma = -\eta + \xi^1\pi^2 - \xi^2\pi^1 \quad (\text{B.10})$$

下面直接计算 Maurer-Cartan 形式, 知道 $U(\pi) = e^{i(\pi^1 T_1 + \pi^2 T_2)}$, 需要计算 dU , 由于 U 指数上都是非对易的算符, 我们需要用到所谓算符指数映射的导数形式 (Derivative of the exponential map)

$$\frac{d}{dt}e^{X(t)} = e^{X(t)} \frac{1 - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X} \frac{dX(t)}{dt} = e^{X(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} (\text{ad}_X)^k \frac{dX(t)}{dt} \quad (\text{B.11})$$

这里 $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$, X, Y 都是不对易的算符。所以我们有

$$dU(\pi) = e^{i(\pi^1 T_1 + \pi^2 T_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \text{ad}_{i\pi^a T_a}^n (iT_b) d\pi^b \quad (\text{B.12})$$

直接的计算得到

$$\begin{aligned} \text{ad}_{i\pi^a T_a}^{2n} (iT_1) &= i(-|\pi|^2)^{n-1} \left(-(\pi^2)^2 T_1 + \pi^1 \pi^2 T_2 \right) \\ \text{ad}_{i\pi^a T_a}^{2n-1} (iT_1) &= i(-|\pi|^2)^{n-1} \pi^2 T_3 \\ \text{ad}_{i\pi^a T_a}^{2n} (iT_2) &= i(-|\pi|^2)^{n-1} \left(\pi^1 \pi^2 T_1 - (\pi^1)^2 T_2 \right) \\ \text{ad}_{i\pi^a T_a}^{2n-1} (iT_2) &= -i(-|\pi|^2)^{n-1} \pi^1 T_3 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$n \geq 1$ 以及 $|\pi| \equiv \sqrt{(\pi^1)^2 + (\pi^2)^2}$ 。这个级数可以写成紧凑的形式, 最后我们得到

$$\begin{aligned} \omega &= \left[\left(1 - \frac{|\pi| - \sin|\pi|}{|\pi|^3} (\pi^2)^2 \right) d\pi^1 + \left(\frac{|\pi| - \sin|\pi|}{|\pi|^3} \pi^1 \pi^2 \right) d\pi^2 \right] T_1 \\ &\quad + \left[\left(\frac{|\pi| - \sin|\pi|}{|\pi|^3} \pi^1 \pi^2 \right) d\pi^1 + \left(1 - \frac{|\pi| - \sin|\pi|}{|\pi|^3} (\pi^1)^2 \right) d\pi^2 \right] T_2 \\ &\quad + \frac{1 - \cos|\pi|}{|\pi|^2} (\pi^2 d\pi^1 - \pi^1 d\pi^2) T_3 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

这样我们得到了 ω_A^a 和 ω_V 的解析表达式。可以利用这些元素构造有效拉式量。最简单的，**构造 Goldstone 场 π^a 的动能项 $\omega_A^a \wedge \omega_A^b \wedge e_a \wedge e_b$** ， e_a 是时空标架 1 形式。所以给出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\pi| - \sin |\pi|}{|\pi|^3} (\pi^2)^2 \right)^2 (\partial_\mu \pi^1)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\pi| - \sin |\pi|}{|\pi|^3} (\pi^1)^2 \right)^2 (\partial_\mu \pi^2)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{|\pi| - \sin |\pi|}{|\pi|^3} \pi^1 \pi^2 \right)^2 \left((\partial_\mu \pi^1)^2 + (\partial_\mu \pi^2)^2 \right) + \frac{|\pi|^2 - \sin^2 |\pi|}{|\pi|^4} \pi^1 \pi^2 \partial_\mu \pi^1 \partial^\mu \pi^2 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

在 π^a 场最低阶，可以得到正确的动能项

$$\frac{1}{2} (\partial_\mu \pi^a)^2 \quad (\text{B.16})$$

然后对于 π^4 阶，我们能得到

$$-\frac{1}{6} (\pi^2 \partial_\mu \pi^1 - \pi^1 \partial_\mu \pi^2)^2 \quad (\text{B.17})$$

3 例子二：介子手征微扰论的简单构造

4 手征微扰理论中的基本自由度

这节参考姚德良师兄的博士论文 [76]。对于 QCD 的(近似)手征对称性,破缺方式为 $SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V$, 子群生成元是已知的, $T_V^a = T_R^a + T_L^a$, 破缺的生成元 X^a 还不确定。常见的两种选择是 $X^a = T_R^a - T_L^a$ 和 $X^a = T_R^a$, 分别能给出常用的 u 场和 U 场。

对于第一种情况, 破缺生成元为 $X^a = T_R^a - T_L^a$, 将 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 的元素表示写成分块对角矩阵

$$g = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

其中 L, R 分别对应 $SU(3)_L$ 和 $SU(3)_R$ 中的元素的矩阵表示。对应的线性实现的子群可以写成

$$h = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

非线性实现选择 $\mathfrak{U}(x) = e^{iX \cdot \pi(x)}$ (为了避免混淆, 符号与上文有所区别) 作为矩阵表示描述陪集空间, 有 $\mathfrak{U}(x) \rightarrow g\mathfrak{U}(x)h^{-1}$ ($g, \mathfrak{U}(x)$)。由于数学上 $SU(3)_L, R$ 生成元都是一样的 ($T_L = T_R = T$), 所以

$$\mathfrak{U}(x) = e^{iX \cdot \pi(x)} = \exp i \begin{bmatrix} -T \cdot \pi & 0 \\ 0 & T \cdot \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^\dagger(\pi) & 0 \\ 0 & u(\pi) \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

其中 $u(\pi) = e^{iT \cdot \pi(x)}$ 标记分块。 \mathfrak{U} 的变换给出

$$\begin{bmatrix} u^\dagger(\pi) & 0 \\ 0 & u(\pi) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^\dagger(\pi) & 0 \\ 0 & u(\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & H^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

由此得到 u 的变换规则

$$u(\pi) \rightarrow R u(\pi) H^{-1}(g, \pi) = H(g, \pi) u(\pi) L^\dagger \quad (\text{B.22})$$

这种选取方式在讨论含重子手征微扰论时候非常重要。

另一种破缺方式是 $X^a = T_R^a$, 得到

$$\mathfrak{U}(x) = e^{iX \cdot \pi(x)} = \exp i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \cdot \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U(\pi) \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

其中 $U(\pi) = e^{iT \cdot \pi}$ 标记最下面的对角分块。变换得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U(\pi) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U(\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & H^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

上式给出 $H = L$ 以及

$$U(\pi) \rightarrow R U(\pi) L^\dagger \quad (\text{B.25})$$

比较B.22发现

$$U(\pi) = u^2(\pi) \quad (\text{B.26})$$

$U(x)$ 就是最早 Gasser 和 Leutwyler1 讨论介子手征微扰论 [29, 77] 时候引入的基本元素。

C 分波多级振幅, 分波螺旋度振幅, $\gamma^*N \rightarrow N^*$ 跃迁振幅与各类截面和观测量之间的转换关系 (初步)

1 Walker 建立的振幅范式

这一小节简要概括一下 Walker 在 1969 年在前人研究的基础上构建的一套光生振幅的约定 [78]。后世几乎所有研究这个领域的 (包括微扰 QCD 等) 计算都是基于此, 鉴于这个的重要性而且现代的文章几乎不会去重复这里面的一些逻辑推导。我们这里按照现代的符号约定重新整理一下这些结果。

Walker 文中定义的振幅与我们一般用到的不变振幅的关系为 (k_0, q_0, E_1, E_2, W 分别为光子, π , 入射、出射核子的能量和质心系的总能量)

$$\langle f | \mathcal{M} | i \rangle = 8\pi W \sqrt{16k_0 q_0 E_1 E_2} \mathcal{A} \quad (\text{C.1})$$

因子 $\sqrt{16k_0 q_0 E_1 E_2}$ 来源于 $\langle i | i \rangle = (2k_0 V)(2E_1 V)$, $\langle f | f \rangle = \prod_j (2E_j V)$ (V 代表箱归一化的体积) 的归一化选取。由于还有自旋的依赖, 这里将 \mathcal{A} 看作是一个 2×2 的矩阵, 它的列和行指标分别表示初态和末态核子的自旋

$$\mathcal{A} = (A_{fi}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

微分散射截面可以写作

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{k}|} \sum_{\text{spin}} |A_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \frac{q}{k} \text{Tr } \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} \quad (\text{C.3})$$

\mathbf{k}, \mathbf{q} 是光子, π 的动量。

在质心系中按照螺旋度对振幅分类, 定义 $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \mu = \lambda_3 - \lambda_4 = -\lambda_4$, \mathcal{A} 的元素就是螺旋度振幅 $A_{\mu\lambda}(\theta, \phi)$ 。光生八个螺旋度振幅并不独立, 对于 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_1 = -1$ 的振幅, 按照字称对称 [22]

$$A_{-\mu, -\lambda}(\theta, \phi) = -e^{i(\lambda-\mu)(\pi-2\phi)} A_{\mu, \lambda}(\theta, \phi) \quad (\text{C.4})$$

特别的, 我们重新用 H_1, \dots, H_4 作为记号指代 $\lambda_1 = +1$ 的螺旋度振幅, 并且令 $\phi = 0$, 这样八个 $A_{\mu\lambda}(\theta, 0)$ 见表4。

有时候文献中也用是否自旋翻转来表示螺旋度振幅

$$H_1 \equiv H_{SP}, \quad H_2 \equiv H_N, \quad H_3 \equiv H_D, \quad H_4 \equiv H_{SA} \quad (\text{C.5})$$

N, D, SP, SA 分别代表自旋不翻转、翻转两次、翻转同时光子和入射核子级化平行、翻转且反平行。

表 4: 螺旋度振幅 $A_{\mu\lambda}(\theta, 0)$

λ	$\lambda_1 = +1$	$\lambda_1 = -1$		
μ	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	H_1	H_2	H_4	$-H_3$
$-\frac{1}{2}$	H_3	H_4	$-H_2$	H_1

微分散射截面也是完全类似的

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{k}|} \sum_{i=1}^4 |H_i|^2 \quad (\text{C.6})$$

下面考虑入射光子级化的不对称性 (asymmetry)。光子的螺旋态具有偏振矢量

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\pm} = \mp(1/\sqrt{2})(\hat{e}_x \pm i\hat{e}_y), \quad \lambda_k = \pm 1 \quad (\text{C.7})$$

\hat{e}_x, \hat{e}_y 分别是 x, y 轴的单位矢量, z 轴指向 \mathbf{k} 的方向, y 轴指向 $\mathbf{k} \times \mathbf{q}$, 这样 \mathbf{q} 位于 xz 平面且 $\phi = 0$ 。线性极化光子电矢量垂直或者平行于反应平面, 其极化矢量分别为 $\boldsymbol{\epsilon}_{\perp}, \boldsymbol{\epsilon}_{\parallel}$, 可以写作

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\perp} = \hat{e}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_+ + \boldsymbol{\epsilon}_-) \quad (\text{C.8})$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\parallel} = \hat{e}_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_+ - \boldsymbol{\epsilon}_-) \quad (\text{C.9})$$

利用这些关系和表5, 我们线极化光子的微分截面

$$\frac{d\sigma_{\perp}(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{q}{k} (|H_1 + H_4|^2 + |H_2 - H_3|^2) \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{d\sigma_{\parallel}(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{q}{k} (|H_1 - H_4|^2 + |H_2 + H_3|^2) \quad (\text{C.11})$$

极化光子不对称性定义为

$$\Sigma = \frac{\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}}{\sigma_{\perp} + \sigma_{\parallel}} \quad (\text{C.12})$$

下面考虑具有确定角动量和宇称的螺旋度态, 分波展开这里写成

$$A_{\mu\lambda}(\theta, \phi) = \sum_j A_{\mu\lambda}^j (2j+1) d_{\lambda\mu}^j(\theta) e^{i(\lambda-\mu)\phi} \quad (\text{C.13})$$

相当于把 $A_{\mu\lambda}(\theta, \phi)$ 用函数族 $\{(2j+1)^{1/2} d_{\lambda\mu}^j(\theta) e^{i(\lambda-\mu)\phi}\}$ 展开, 这族函数互相正交且 ($d\Omega$ 积分) 归一化为 4π 。

表 5: 线极化光子振幅

$-\lambda_2$	$\epsilon_{\perp} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\epsilon_+ + \epsilon_-)$	$\epsilon_{\parallel} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_+ - \epsilon_-)$	
$\mu = -\lambda_4$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{i}{\sqrt{2}} (H_1 + H_4)$	$\frac{i}{\sqrt{2}} (H_2 - H_3)$	
$-\frac{1}{2}$	$\frac{i}{\sqrt{2}} (H_3 - H_2)$	$\frac{i}{\sqrt{2}} (H_1 + H_4)$	
		$\frac{1}{\sqrt{2}} (H_4 - H_1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} (H_2 + H_3)$
		$-\frac{1}{\sqrt{2}} (H_2 + H_3)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} (H_1 - H_4)$

令 $A_{\mu\lambda}^j \equiv H_i^j$, 将 (C.3) 对角度做积分, 可以得到

$$\sigma = 2\pi \frac{q}{k} \sum_j \sum_{i=1}^4 (2j+1) |H_i^j|^2 \quad (C.14)$$

d 函数可以用勒让德函数和它的导数来展开。 $\ell = j - \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} d_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^j(\theta) &= -\frac{1}{\ell+1} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+2)}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} (P''_{\ell+1} - P''_{\ell}) \\ d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^j(\theta) &= \frac{1}{\ell+1} \cos \frac{\theta}{2} (P'_{\ell+1} - P'_{\ell}) \\ d_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^j(\theta) &= \frac{1}{\ell+1} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+2)}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} (P''_{\ell+1} + P''_{\ell}) \\ d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^j(\theta) &= -\frac{1}{\ell+1} \sin \frac{\theta}{2} (P'_{\ell+1} + P'_{\ell}) \end{aligned} \quad (C.15)$$

这里 $P'_\ell = dP(\cos \theta)/d \cos \theta$ 螺旋度系数 $A_{\mu\lambda}^j$ 仅依赖于能量 W , 通过 (C.13) 得到

$$A_{\mu\lambda}^j = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega A_{\mu\lambda}(\theta, \phi) d_{\lambda\mu}^j(\theta) e^{-i(\lambda-\mu)\phi} \quad (C.16)$$

$A_{\mu\lambda}^j$ 具有确定的角动量但是宇称上不能确定。末态具有确定宇称的态可以通过将具有相反螺旋度 $\mu, -\mu$ 末态进行加减, 得到所谓的分波螺旋度 (宇称) 本征态

$$\begin{aligned} A_{\ell+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^j + A_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^j) \\ A_{(\ell+1)-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^j - A_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^j) \\ B_{\ell+} &= \sqrt{\frac{2}{\ell(\ell+2)}} (A_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^j + A_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^j), \ell \geq 1 \\ B_{(\ell+1)-} &= -\sqrt{\frac{2}{\ell(\ell+2)}} (A_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^j - A_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^j), \ell \geq 1 \end{aligned} \quad (C.17)$$

表 6: 螺旋度振幅 $H_{5/6}$

λ	$\lambda_1 = 0$
μ	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	H_5
$-\frac{1}{2}$	H_6
	H_6
	$-H_5$

$\ell = j - 1/2$, A, B 分别代表初态螺旋度为 $1/2, 3/2$, 因此一般也写作 $A^{1/2}, A^{3/2}$ 。前面的归一化系数是人为选取的的, 例如文献 [79, 80] 选取约定就不尽相同

$$\begin{aligned} A_{\ell+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^j + A_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^j \right) \\ A_{(\ell+1)-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^j - A_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^j \right) \\ B_{\ell+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^j + A_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^j \right), \ell \geq 1 \\ B_{(\ell+1)-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^j - A_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^j \right), \ell \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

利用 (C.13)、(C.15)、(C.17), 我们得到关于螺旋度振幅用 $A_{\ell\pm}, B_{\ell\pm}$ 的分波展开式 (不失一般性, 令 $\phi = 0$)

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \sum (B_{l+} - B_{(l+1)-}) (P_l'' - P_{l+1}'') \\ H_2 &= \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} \sum (A_{l+} - A_{(l+1)-}) (P_l' - P_{l+1}') \\ H_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \sum (B_{l+} + B_{(l+1)-}) (P_l'' + P_{l+1}'') \\ H_4 &= \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \sum (A_{l+} + A_{(l+1)-}) (P_l' + P_{l+1}') \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

根据 [62], 对于标量多级振幅 $S_{l\pm}$, 还需要引入 $H_{5/6}$, 其螺旋度关系见表6

$$\begin{aligned} H_5 &= \frac{Q}{|\mathbf{k}|} \cos \frac{\theta}{2} \sum (l+1) (S_{l+} + S_{(l+1)-}) (P_l' - P_{l+1}') \\ H_6 &= \frac{Q}{|\mathbf{k}|} \sin \frac{\theta}{2} \sum (l+1) (S_{l+} - S_{(l+1)-}) (P_l' + P_{l+1}') \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

散射截面用 $A_{\ell\pm}, B_{\ell\pm}$ 写为 (k_0^* 是质心系中光子等价能量)

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{tot}} &= \sigma_{1/2} + \sigma_{3/2} + \epsilon \sigma_L^{\text{tot}} \\ \sigma_{1/2} &= 2\pi \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{k}|} \sum 2(l+1) \left[|A_{l+}|^2 + |A_{(l+1)-}|^2 \right] \\ \sigma_{3/2} &= 2\pi \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{k}|} \sum \frac{l}{2}(l+1)(l+2) \left[|B_{l+}|^2 + |B_{(l+1)-}|^2 \right] \\ \sigma_L^{\text{tot}} &= 4\pi \frac{|\mathbf{q}|}{k_0^*} \sum \frac{Q^2}{\mathbf{k}^2} (l+1)^3 \left[|S_{l+}|^2 + |S_{(l+1)-}|^2 \right]\end{aligned}\quad (\text{C.21})$$

蓝字来自于虚光子贡献 [62]。

按照 CGLN [2] 的展开方式, 将具体的级化初末态带入振幅可以得到螺旋度振幅和 CGLN 多级振幅之间的关系

$$\begin{aligned}H_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} (\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4) \\ H_2 &= \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} \left[(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1) + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)(\mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_4) \right] \\ H_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} (\mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_4) \\ H_4 &= \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \left[(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)(\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4) \right]\end{aligned}\quad (\text{C.22})$$

对比 CGLN 展开式 (用 $E_{\ell\pm}, M_{\ell\pm}$ 展开), 利用 (C.19)、(C.22), 可以得到

$$E_{0+} = A_{0+}, \quad M_{1-} = A_{1-} \quad (\text{C.23})$$

当 $\ell \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned}E_{l+} &= \frac{1}{l+1} \left(A_{l+} + \frac{1}{2} l B_{l+} \right) \\ M_{l+} &= \frac{1}{l+1} \left[A_{l+} - \frac{1}{2} (l+2) B_{l+} \right] \\ E_{(l+1)-} &= -\frac{1}{l+1} \left[A_{(l+1)-} - \frac{1}{2} (l+2) B_{(l+1)-} \right] \\ M_{(l+1)-} &= \frac{1}{l+1} \left[A_{(l+1)-} + \frac{1}{2} l B_{(l+1)-} \right]\end{aligned}\quad (\text{C.24})$$

同样的, 可以反解出

$$\begin{aligned}A_{l+} &= \frac{1}{2} [(l+2)E_{l+} + lM_{l+}] \\ B_{l+} &= E_{l+} - M_{l+} \\ A_{(l+1)-} &= -\frac{1}{2} [lE_{(l+1)-} - (l+2)M_{(l+1)-}] \\ B_{(l+1)-} &= E_{(l+1)-} + M_{(l+1)-}\end{aligned}\quad (\text{C.25})$$

这里的约定和 [62, 81] 一致, 但是按照 (C.18) 的约定

$$\begin{aligned} A_{l+} &= -\frac{1}{2} [(l+2)E_{l+} + lM_{l+}] \\ B_{l+} &= \frac{1}{2}\sqrt{l(l+2)}(E_{l+} - M_{l+}) \\ A_{(l+1)-} &= -\frac{1}{2} [lE_{(l+1)-} - (l+2)M_{(l+1)-}] \\ B_{(l+1)-} &= -\frac{1}{2}\sqrt{l(l+2)}(E_{(l+1)-} + M_{(l+1)-}) \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

对于电生情况, (C.19) 还会多出两个螺旋度振幅 [82]

$$\begin{aligned} H_5 &= \cos \frac{\theta}{2} (\mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_6) \\ H_6 &= -\sin \frac{\theta}{2} (\mathcal{F}_5 - \mathcal{F}_6) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

D Feshbach 共振理论简介

1 Lippmann-Schwinger 方程

这一节主要参考 [83]。这里我们研究一个双原子的两道系统，简洁起见，只考虑一个入射的连续态、出射的连续态以及一个略高于入射能量的束缚态。这个时候就只有两个散射道，连续态，称为开通道；束缚态，称为闭通道。无穷远两个道无耦合，但是当入射能量和束缚态能量接近时，两个道耦合不可忽略，原子可以被散射到束缚态，此时束缚态有一定衰变时间。此时 S 矩阵中有一项是由连续态 \rightarrow 散射态 \rightarrow 连续态的贡献。

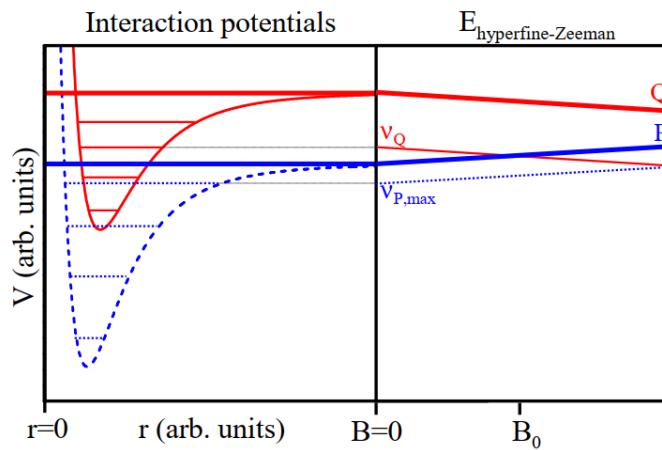


图 25: Feshbach 共振的物理理解，图取自 [84]。

首先将 Schrödinger 方程解耦合，得到散射态波函数。将 Hilbert 空间拆分为两个子空间，分别对应开通道和闭通道，同时定义投影算符 P, Q 。定态 Schrödinger 方程为

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

，分别向两个空间投影，有

$$PH(P^2 + Q^2)|\Psi\rangle = EP|\Psi\rangle, \quad QH(P^2 + Q^2)|\Psi\rangle = EQ|\Psi\rangle, \quad (\text{D.1})$$

简化后得到

$$(E - H_{PP})P|\Psi\rangle = H_{PQ}Q|\Psi\rangle, \quad (E - H_{QQ})Q|\Psi\rangle = H_{QP}P|\Psi\rangle \quad (\text{D.2})$$

其中， $H_{pp} = PHP, H_{PQ} = PHQ, H_{QP} = QHP, H_{QQ} = QHQ$ ，解式 (D.2) 可以得到

$$Q|\Psi\rangle = \frac{H_{QP}}{E - H_{QQ} + i\epsilon}P|\Psi\rangle \quad (\text{D.3})$$

将 (D.3) 再带入 (D.2)

$$(E - H_{PP}) P|\Psi\rangle = H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ} + i\epsilon} H_{QP} P|\Psi\rangle \quad (\text{D.4})$$

上式可以重写做

$$(E - H_{\text{eff}})|\Psi\rangle = 0, \quad H_{\text{eff}} = H_{PP} + H_{PQ} \frac{I}{E - H_{QQ} + i\epsilon} H_{QP} \quad (\text{D.5})$$

形式上我们已经将耦合解开，得到了关于开通道对应于子空间波函数所满足的 Schrödinger 方程。 H_{eff} 的第二项的物理含义就是从开通道到闭通道再到开通道的一种行为，同时也可以看到 H_{eff} 对于碰撞粒子能量有很强的依赖性。

将 H_{PP} 看做自由项， $H_{PP} + H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ} + i\epsilon} H_{QP}$ 看作相互作用。定义子空间格林函数 $G_p^{(+)}(E) = (E - H_{PP} + i\eta)^{-1}$ ，同时定义子空间的定态方程 $(E - H_{PP}) P |\varphi_p^{(+)}\rangle = 0$ ，Lippmann-Schwinger (L-S) 方程可以写作 [85]

$$P|\Psi\rangle = |\varphi_p^{(+)}\rangle + G_p^{(+)}(E) H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ} + i\epsilon} H_{QP} P|\Psi\rangle \quad (\text{D.6})$$

选取渐进态边界条件使得 $\varphi_p^{(+)}$ 为开通道中入射球面波与出射球面波的叠加，即（见 D.19）

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_p^{(+)} = \frac{\exp(-ikr)}{r} - S \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (\text{D.7})$$

由于方程 (D.6) 两边均有 $P|\Psi\rangle$ ，利用 H_{PP}, H_{QQ} 的本征态来展开格林函数

$$\frac{1}{E - H_{QQ} + i\epsilon} = \sum_m \frac{|\phi_m\rangle \langle \phi_m|}{E - \epsilon_m} + \int d\alpha \frac{|\phi(\alpha)\rangle \langle \phi(\alpha)|}{E - \alpha + i\epsilon} \quad (\text{D.8})$$

当我们的格林函数参数（也就是入射能量）恰好等于某一个闭通道的束缚态能量本征值时，我们的格林函数只需要考虑该成分即可： $|\phi_B\rangle, \epsilon_B$ ，也就是说

$$\frac{1}{E - H_{QQ} + i\epsilon} \simeq \frac{|\phi_B\rangle \langle \phi_B|}{E - \epsilon_B} \quad (\text{D.9})$$

带入式 (D.6)

$$P|\Psi\rangle = |\varphi_p^{(+)}\rangle + G_p^{(+)}(E) H_{PQ} \frac{|\phi_B\rangle \langle \phi_B|}{E - \epsilon_B} H_{QP} P|\Psi\rangle \quad (\text{D.10})$$

同时左乘 $\langle \phi_B | H_{QP} | \Psi \rangle$ ，得到

$$\langle \phi_B | H_{QP} P | \Psi \rangle = \langle \phi_B | H_{QP} | \varphi_p^{(+)} \rangle + \frac{1}{E - \epsilon_B} \langle \phi_B | H_{QP} G_p^{(+)}(E) H_{PQ} | \phi_B \rangle \langle \phi_B | H_{QP} P | \Psi \rangle \quad (\text{D.11})$$

从而

$$\langle \phi_B | H_{QP} P | \Psi \rangle = \frac{(E - \epsilon_B) \langle \phi_B | H_{QP} | \Psi_p^{(+)} \rangle}{E - \epsilon_B - \langle \phi_B | H_{QP} G_p^{(+)}(E) H_{PQ} | \phi_B \rangle} \quad (\text{D.12})$$

再将上式代回 (D.10)

$$P|\Psi\rangle = |\varphi_p^{(+)}\rangle + G_p^{(+)} H_{PQ} |\phi_B\rangle \times \frac{\langle \phi_B | H_{QP} | \varphi_p^{(+)} \rangle}{E - \epsilon_B - \langle \phi_B | H_{QP} G_p^{(+)}(E) H_{PQ} | \phi_B \rangle} \quad (\text{D.13})$$

2 散射矩阵

这一节主要参考 [86]。冷原子温度一般在 nK 量级，一般势垒大概 $\sim (10 \sim 100)\text{mK}$,, 因此只有 S 波需要考虑。

具体讨论之前，我们先来考虑两个不可区分原子碰撞的单道散射问题 [85, 87]。在质心系中，问题简化为求在分子势场中的径向 S 波的（积分）Schödinger 方程。对应的正则（regular）解 $u(r)$, 正则的含义是 $\lim_{r \rightarrow 0} u(r)$ 是有限的。我们将 $u(r)$ 归一化为 $u_N(r)$, 要求它的渐进行为与 0 阶贝塞尔函数（自由原子 Schödinger 方程的正则解）一样

$$u_N(r) \sim \sin(kr + \delta_0)/(kr), \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{D.14})$$

这里 δ_0 代表 S 波相移 ($S_0 = \exp(2i\delta_0)$)。散射理论中，一种有用的归一化方法是将散射波分成波矢 \mathbf{k} 的入射平面波和出射的球面波

$$\varphi_k(r) \sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \frac{f \exp(ikr)}{r}, \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{D.15})$$

其中 $f = [\exp(2i\delta_0) - 1]/2ik$, 取定坐标轴 ($\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \equiv \exp(ikz) = \exp(ikr \cos \theta)$), 利用两个分波展开式

$$\exp(ikz) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2ikr} [(-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr}] P_l(\cos \theta) \quad (\text{D.16})$$

$$\varphi(r, \theta) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ki} (S_l - 1) P_l(\cos \theta) \quad (\text{D.17})$$

可以得到 (D.15) 的 S 波成分

$$[\varphi_k(r)]_s = \exp(i\delta_0) u_N(r) \quad (\text{D.18})$$

另一种标准化的归一化方法，要求 Schödinger 方程的解是入射和出射球面波的叠加：

$$\varphi^{(+)}(r) \sim \exp(-ikr)/r - S_0 \exp(ikr)/r, \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{D.19})$$

比较 u_N 和 $\varphi^{(+)}$ 的渐进行为，有

$$\varphi^{(+)}(r) = -2ik \exp(i\delta_0) u_N(r) \quad (\text{D.20})$$

进一步，渐进解 $u_N(r)$ 基本上与能量无关：德布罗意波长 $2\pi/k$ 远大于相互作用尺度 L 。于是，当核间距离 r 处于下面区域时（相移来源于类比硬球散射，硬球半径为 a ）：

$$L < r < k^{-1} : \delta_0 \simeq -ka \quad (\text{D.21})$$

a 为散射长度, 渐进解与碰撞能量无关, 只由散射长度决定:

$$u_N(r) \simeq (kr + \delta_0) / kr \simeq 1 - a/r, \quad L < r < k^{-1} \quad (\text{D.22})$$

利用渐进散射态 $|\mathbf{k}\rangle$ (不是平面波态) 来展开格林算符 $G_p^{(+)}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | G_p^{(+)}(E) H_{PQ} | \phi_B \rangle &= \int d^3 r' \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{r} | (E - H_{PP} + i\eta)^{-1} | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | H_{PQ} | \phi_B \rangle \\ &= \int d^3 r' \left(\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{4\pi k'^2 dk'}{(2\pi)^3} \frac{\langle \mathbf{r} | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r}' \rangle}{k^2 - k'^2 + i\eta} \right) \langle \mathbf{r}' | H_{PQ} | \phi_B \rangle \\ &= \int d^3 r' \left(\frac{m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{4\pi k'^2 dk'}{(2\pi)^3} \frac{\langle \mathbf{r} | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r}' \rangle}{k^2 - k'^2 + i\eta} \right) \langle \mathbf{r}' | H_{PQ} | \phi_B \rangle \\ &\xrightarrow{\text{s-wave}} \int d^3 r' \left(\frac{m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{4\pi k'^2 dk'}{(2\pi)^3} \frac{\langle \mathbf{r} | \mathbf{k}' \rangle_s \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r}' \rangle_s}{k^2 - k'^2 + i\eta} \right) \langle \mathbf{r}' | H_{PQ} | \phi_B \rangle \\ &= \int d^3 r' \frac{-im}{2\pi\hbar^2} k h_0(kr + \delta_0) j_0(kr' + \delta_0) \langle \mathbf{r}' | H_{PQ} | \phi_B \rangle \\ &\xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \int d^3 r' \frac{-im}{2\pi\hbar^2} k \frac{-i \exp(ikr)}{kr} \exp(i\delta_0) u_N(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | H_{PQ} | \phi_B \rangle \\ &= -\left(\frac{M}{4\pi\hbar^2} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \exp(i\delta_0) \int d^3 r' u_N(\mathbf{r}') H_{PQ} \phi_B(\mathbf{r}') \\ &= -\left(\frac{M}{4\pi\hbar^2} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \exp(i\delta_0) \alpha \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

此时已经把折合质量 m 换成单原子质量 $M = 2m$, 第 4 个等号利用围道积分计算, 具体细节参考文献 [87, 88] (注意归一化)

$$\int_{-\infty}^\infty k'^2 dk' \frac{\langle \mathbf{r} | \mathbf{k}' \rangle_s \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r}' \rangle_s}{k^2 - k'^2 + i\eta} = 2\pi ik^2 \frac{h_0(kr + \delta_0) \cdot j_0(kr' + \delta_0)}{-2k} \quad (\text{D.24})$$

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle_l = j_l(kr + \delta_0) \quad (\text{D.25})$$

同时用到了渐进行为

$$h_0(kr + \delta_0) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \frac{-i}{kr} \exp(ikr + i\delta_0), \quad j_0(kr' + \delta_0) \xrightarrow{kr' \rightarrow \infty} u_N(r') \quad (\text{D.26})$$

同时

$$\alpha = \int d^3 r' u_N(\mathbf{r}') H_{PQ} \phi_B(\mathbf{r}') \quad (\text{D.27})$$

利用 $\langle \mathbf{r} | \varphi_p^{(+)} \rangle = -2ik \exp(i\delta_0) u_N(r)$, 有

$$\begin{aligned} \langle \phi_B | H_{QP} | \varphi_p^{(+)} \rangle &= -2ik \exp(i\delta_0) \int d^3 r \phi_B(\mathbf{r}) H_{QP} u_N(r) \\ &= -2ik \exp(i\delta_0) \alpha \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

下面求解 $\langle \phi_B | H_{QP} G_p^{(+)}(E) H_{PQ} | \phi_B \rangle$, 不妨令

$$\epsilon'_B = \operatorname{Re} \langle \phi_B | H_{QP} G_p^{(+)} H_{PQ} | \phi_B \rangle \quad (\text{D.29})$$

$$\frac{\Gamma_B}{2} = -\operatorname{Im} \langle \phi_B | H_{QP} G_p^{(+)} H_{PQ} | \phi_B \rangle \quad (\text{D.30})$$

利用 $|\mathbf{k}\rangle$ 展开

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_B}{2} &= -\operatorname{Im} \left(\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\langle \phi_B | H_{QP} | \mathbf{k} \rangle|^2}{E - E_k + i\eta} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{|\langle \phi_B | H_{QP} | \mathbf{k} \rangle|^2}{E - E_k + i\eta} + \frac{|\langle \phi_B | H_{QP} | \mathbf{k} \rangle|^2}{E - E_k - i\eta} \right) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\eta |\langle \phi_B | H_{QP} | \mathbf{k} \rangle|^2}{(E - E_k)^2 + \eta^2} \\ &= \pi \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\langle \phi_B | H_{QP} | \mathbf{k} \rangle|^2 \delta(E - E_k) \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

最后一个等式利用到了

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{D^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(D) \quad (\text{D.32})$$

利用 (D.18), 当 $kr \rightarrow \infty$ 时,

$$\langle \phi_B | H_{QP} | \mathbf{k} \rangle = \int d^3 r \langle \phi_B | H_{QP} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle \simeq \exp(i\delta_0) \int d^3 r \phi_B(\mathbf{r}) H_{QP} u_N(\mathbf{r}) = \exp(i\delta_0) \alpha \quad (\text{D.33})$$

在极低温下, 矩阵元 $\langle \phi_B | H_{QP} | \mathbf{k} \rangle$ 主要涉及 S 波, 而低能下 S 波的 $u_N(r)$ 不依赖于 \mathbf{k} , 因此

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_B(E)}{2} &= \pi \alpha^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(E - E_k) \\ &= \pi \alpha^2 \int \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \delta(E - E_k) m \frac{\sqrt{2mE_k}}{\hbar^3} dE_k \\ &= \frac{\alpha^2 M k}{2\pi \hbar^2} \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

其中, $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 。 $\Gamma_B(E)$ 称为共振宽度, 通过相空间因子依赖于碰撞粒子能量。如果定义约化宽度 $\gamma = \alpha^2 \left(\frac{M}{4\pi \hbar^2} \right)$, 与 \mathbf{k} 无关, 则 $\Gamma_B(E) = 2\gamma k$ 。最后将 $P|\Psi\rangle$ 向 $\langle \mathbf{r}|$ 投影

$$\langle \mathbf{r} | P | \Psi \rangle = \frac{\exp(-ikr)}{r} - \left[1 - \frac{i\Gamma_B(E)}{E - E_B + i\Gamma_B(E)/2} \right] \exp(2i\delta_0) \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (\text{D.35})$$

其中 $E_B = \epsilon_B + \epsilon'_B$ 。根据上式以及 $\delta_0 = -ka$, 得到 S 矩阵

$$S = \exp(-2ika) \left[1 - i \frac{\Gamma_B(E)}{E - E_B + i\Gamma_B(E)/2} \right] \quad (\text{D.36})$$

利用有效散射长度，令 $S = \exp(-2ia_{\text{eff}}k)$, $a_{\text{eff}} = a + a'$ (这个形式来源于胡宁表示 [89])。也就是说

$$\exp(-2ika') = 1 - i \frac{\Gamma_B(E)}{E - E_B + i\Gamma_B(E)/2} = \frac{E - E_B - i\Gamma_B(E)/2}{E - E_B + i\Gamma_B(E)/2} \quad (\text{D.37})$$

所以得到

$$a_{\text{aff}} = a + \frac{1}{2k} \arctan \frac{\Gamma_B(E - E_B)}{(E - E_B)^2 - \Gamma_B^2/4} \quad (\text{D.38})$$

低能极限下， $E, E_B \rightarrow 0$, $E - E_B \rightarrow -\varepsilon$ 。 ε 代表入射态和束缚态的能量差，也就是 Feshbach 共振的失谐度 (detuning)。将式 (D.38) 按 k 逐阶展开，有

$$\lim_{E \rightarrow 0} a_{\text{eff}}(E) = a - \frac{\gamma}{\varepsilon} \quad (\text{D.39})$$

3 碱金属原子的磁 Feshbach 共振

碱金属原子最外层只有一个电子，原子间相互作用为范德瓦尔斯力和库仑力。首先考虑一个强外磁场的情况。电子和核的自旋均被极化。考虑两个碱金属原子，电子自旋分别为 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$, 总自旋 $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ 。 $S = 1$ (自旋三重态) 时，电子自旋波函数对称，空间波函数反对称，最外层两电子倾向于远离，两电子库伦排斥能降低；总自旋 $S = 0$ (自旋单态) 时，自旋波函数反对称，空间波函数对称，最外层两个电子倾向于靠近，库伦排斥能升高。因此，总自旋 $S = 0$ 的态所感受到的势要比 $S = 1$ 高，也就是说， $S = 0$ 的能谱要比 $S = 1$ 的高 $\Delta = B(2\mu_e + \mu_N)$, μ_e 、 μ_N 分别为电子磁矩和核磁矩。考虑入射态为 $S = 1$ 的三重态，出射态有 $S = 1$ 和 $S = 0$ 两种， $S = 1$ 为开通道， $S = 0$ 为闭通道，此时两原子形成准分子束缚态。

考虑超精细结构相互作用

$$V_{\text{hf}} = \frac{a_{\text{hf}}}{\hbar^2} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{i}_1 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{i}_2) \quad (\text{D.40})$$

由于 V_{hf} 和 \mathbf{S} 不对易，故 V_{hf} 可以翻转总自旋。在接近共振的情况下，两通道之间的耦合由超精细相互作用提供。根据式 (D.27)，表征两个道间耦合强度的参数

$$\alpha = \langle S_{out} | V_{hf} | S_{in} \rangle \times \int d^3r \phi_B(\mathbf{r}) u_N(r) \quad (\text{D.41})$$

实际上，一般物理系统的共振是在中等强度磁场下发生的，此时单个原子的真正自旋态并不是由例如 m_i, m_s 来表征。相反，单原子的自旋自由度处于一种状态，使单原子哈密顿量的自旋相关部分对角线化：

$$H_{\text{spin}(1)} = \left(\frac{a_{\text{hf}}}{\hbar^2} \right) \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{i}_1 + \mathbf{B} \cdot \frac{2\mu_e \mathbf{s}_1 - \mu_N \mathbf{i}_1}{\hbar} \quad (\text{D.42})$$

a_{hf} 依赖于同位素。磁场 \mathbf{B} 等于 $\mathbf{0}$ 时， $f = s+i$ 为好量子数。这里将超精细作用看成小量，利用简并微扰论处理。原子态处于线性叠加态 $c_{-1/2} |m_i = m + \frac{1}{2}; m_s = -\frac{1}{2}\rangle + c_{+1/2} |m_i = m - \frac{1}{2}; m_s = +\frac{1}{2}\rangle$

中，系数可将 $H_{\text{spin}(1)}$ 对角化。当每一个碱金属原子处于这个叠加态上时，双原子系统一般也处在自旋单态和三重态的叠加态上。双原子间的相互作用可以表示成

$$\hat{V} = \sum_S V_S(r) \hat{\Pi}_S \quad (\text{D.43})$$

其中 $\hat{\Pi}_S$ 为投影算符（向总电子自旋为 0, 1 的子空间投影）。另外利用一个技巧

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{i}_1 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{i}_2 &= [(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \cdot (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) + (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \cdot (\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)] / 2 \\ &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{S}_d \cdot \mathbf{I}_d) / 2 \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

其中，总核自旋 $\mathbf{I} = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2$ ，自旋差算符 $\mathbf{S}_d = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$, $\mathbf{I}_d = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2$ 。 $\mathbf{S}_d, \mathbf{I}_d$ 将不同的自旋态（单态-三重态）耦合起来。由此可以写出双原子系统的哈密顿量

$$\begin{aligned} H_{\text{spin}(1,2)} &= \left(\frac{a_{\text{hf}}}{2\hbar^2} \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \frac{2\mu_e \mathbf{S} - \mu_N \mathbf{I}}{\hbar} + \sum_S V_S(\mathbf{r}) \hat{\Pi}_S + \left(\frac{a_{\text{hf}}}{2\hbar^2} \right) \mathbf{S}_d \cdot \mathbf{I}_d \\ &= H_{\text{spin}(1,2)}^{(0)} + \sum_S V_S(\mathbf{r}) \hat{\Pi}_S + \left(\frac{a_{\text{hf}}}{2\hbar^2} \right) \mathbf{S}_d \cdot \mathbf{I}_d \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

根据 (D.45)，可以将态空间划分成一系列标号为 j 的子空间。在子空间中， S, I 为好量子数， $H_{\text{spin}(1,2)}^{(0)}$ 被对角化。子空间态矢为 $|I, S; M_I, M_S\rangle$ 的线性叠加。两原子散射时，将入射自旋态 $|S_{\text{in}}\rangle$ 投影到散射道 j : $|S_{\text{in}}\rangle = \sum_j |S_{\text{in}}; j\rangle$ 。如果相互作用可以将 j 道的态跃迁到另一个总自旋翻转态 $|S_{j'}\rangle$ 且此时的相互作用势可以支持一个束缚态存在（束缚态能量 E_B 与 j 道的连续态能量接近），就会发生 Feshbach 共振。根据 (D.27)，道耦合强度

$$\alpha_{j,j';B} = \left(\frac{a_{\text{hf}}}{2\hbar^2} \right) \langle S_j | \mathbf{S}_d \cdot \mathbf{I}_d | S_{\text{in}}; j \rangle \int d^3 r \phi_B(r) u_{N,J}(r) \quad (\text{D.46})$$

具体冷原子实验中，两道的能量差 (ε) 一般是由磁场的大小 B 控制的。 Δ 表示两个散射道势阱在无穷远的差值， E_B 为准束缚态分子的束缚能， $E_b = E_B$ 。很容易看到 $\Delta = E_B + \varepsilon$ ，见图26。

当磁场 B 取共振值时， $B = B_m$, $\Delta = E_B$ 。靠近共振处时， $\Delta \simeq E_B + \frac{\partial \Delta}{\partial B} \times (B - B_m)$, $\varepsilon \simeq \frac{\partial \Delta}{\partial B} \times (B - B_m)$ 。因此，(D.39) 可以写成

$$a_{\text{eff}} \simeq a \left(1 - \frac{\delta B}{B - B_m} \right), \quad \delta B = \frac{\gamma}{a \times \partial \Delta / \partial B} \quad (\text{D.47})$$

可以看到，在共振点附近，散射长度对磁场的变化非常敏感，由此可以借助磁场调节散射长度。图27为实验上获得的 ${}^6\text{Li}$ 散射长度随磁场大小的变化，共振点附近，散射长度发散。

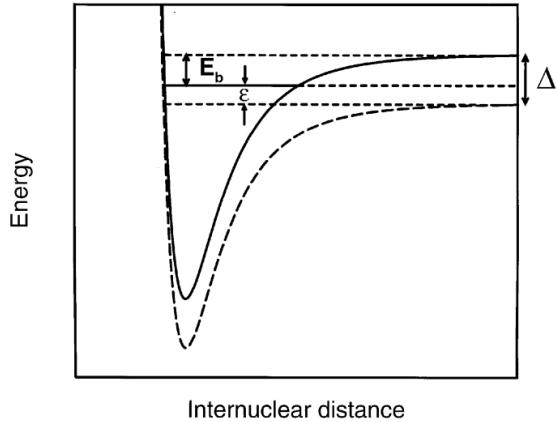
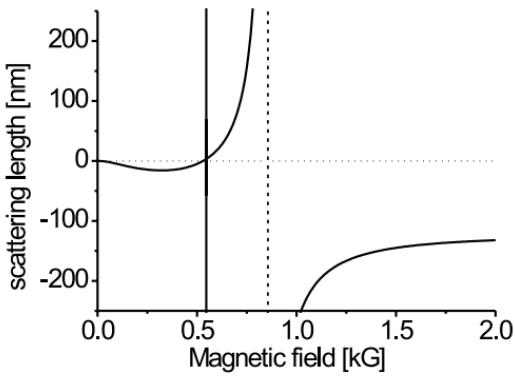


图 26: 基本的双通道模型 [86]。

图 27: ${}^6\text{Li}$ 散射长度随磁场变化曲线 [90]。

E 规范不变性与强子结构

粒子的离壳特性是不可观测的，并且不是唯一的，它们不仅取决于微观模型，还取决于粒子对应场的表示方式。在某些情况下，它们可以完全转化为特定反应的接触项贡献。当我们在下面讨论“壳外效应”，就是为了说明这一点，本节主要参考 [91]。

一个最直接的方式实现模型的规范不变性是最小替换 (minimal substitution)，对于给定的一个带电系统与光子直接耦合，这种方法生成一类最小集合，得到规范不变的振幅。下面我们要看到，这种方法在多大程度上能够得到自洽的结果。

1 π 电磁顶角的一般形式

考虑带电情况 ($e > 0$)，自旋为 0 的粒子电磁顶角可以写作

$$\Gamma^\mu(p', p) = e \left[(p' + p)^\mu F(q^2, p'^2, p^2) + q^\mu G(q^2, p'^2, p^2) \right] \quad (\text{E.1})$$

p, p' 是初末态介子的动量, 光子动量为 $p' - p$ 。时间反演不变性要求

$$F(q^2, p'^2, p^2) = F(q^2, p^2, p'^2), \quad G(q^2, p'^2, p^2) = -G(q^2, p^2, p'^2) \quad (\text{E.2})$$

我们这里处理所谓不可约电磁顶角算符 (irreducible electromagnetic vertex operator), 规范不变性可以导出所谓的 Ward-Takahashi(WT) 恒等式 [92, 93]:

$$q_\mu \Gamma^\mu(p', p) = e_\pi [\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p)]. \quad (\text{E.3})$$

这里的 $\Delta(p)$ 是所谓的完全的 (dressed) 重整化的传播子, $e_\pi = e\hat{e}_\pi (\hat{e}_{\pi^\pm} = \pm 1)$ 。利用 (E.1), WT 恒等式变为

$$(p'^2 - p^2) F(q^2, p'^2, p^2) + q^2 G(q^2, p'^2, p^2) = \hat{e}_\pi [\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p)] \quad (\text{E.4})$$

可以很容易看出 $G(q^2, p^2, p^2) = 0$, 这暗示我们可以因子化 G

$$G(q^2, p'^2, p^2) = (p'^2 - p^2) g(q^2, p'^2, p^2) \quad (\text{E.5})$$

其中解析函数 g 在 $p'^2 = p^2$ 时不奇异。利用这个可以重写正规顶点

$$\Gamma^\mu(p', p) = e [(p' + p)^\mu f(p'^2, p^2) + (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) (p' + p)_\nu g(q^2, p'^2, p^2)] \quad (\text{E.6})$$

这里 f 定义成

$$\begin{aligned} f(p'^2, p^2) &= F(q^2, p'^2, p^2) + \frac{q^2}{p'^2 - p^2} G(q^2, p'^2, p^2) \\ &= F(q^2, p'^2, p^2) + q^2 g(q^2, p'^2, p^2) \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

通过 (E.6) 与 q_μ 的缩并, 可以看到 f 通过 WT 恒等式完全依赖于两个标量, p'^2, p^2 ,

$$f(p'^2, p^2) = \hat{e}_\pi \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p)}{p'^2 - p^2} \quad (\text{E.8})$$

(E.6) 式中第二项是单独规范不变的, 没有其他更多的规范约束对于 g 。由于这一项的存在, 顶点算符才依赖于 q^2 。事实上, 函数 $G(q^2, p'^2, p^2)$, 或者 $g(q^2, p'^2, p^2)$ 对于 q^2 依赖是非常重要的, 式 (E.4) 右边仅仅依赖于 p^2, p'^2 , 并不依赖于 q^2 。因此没有 G , 形状因子 F 就不会依赖于 q^2 。

但是值得注意的是, 当 $p'^2 = p^2$ 时, $G(q^2, p'^2, p^2)$ 等于 0 不能排除顶点的 q^2 依赖, 因为

$$\lim_{p'^2 \rightarrow p^2} \Gamma^\mu(p', p) = e (p + p')^\mu F(q^2, p^2, p^2) \quad (\text{E.9})$$

利用 (E.4) 和 (E.5),

$$F(q^2, p^2, p^2) = \hat{e}_\pi \frac{\partial \Delta^{-1}(p)}{\partial p^2} - q^2 g(q^2, p^2, p^2) \quad (\text{E.10})$$

这个表达式包含了在壳的情况

$$F(q^2) \equiv F(q^2, p^2, p^2) \Big|_{p^2=m^2} \quad (\text{E.11})$$

正比于 q^μ 的一项经常被文献忽略是因为守恒流情况下虚光子动量的项不会对计算产生贡献。这个结论只对协变规范成立，也就是朗道或者费曼规范，例如库伦规范就不成立。在顶点算符去掉这一项，相当于取定了某个规范。

对于实光子，由于 $\epsilon \cdot q = 0$, G 没有贡献，又由于 $q^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{q^2=0}^\mu(p', p) &= e(p' + p)^\mu f(p'^2, p^2) \\ &= e(p' + p)^\mu F(0, p'^2, p^2) \\ &= e_\pi(p' + p)^\mu \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p)}{p'^2 - p^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

因此，通过洛伦兹对称和规范不变性，对应实光子的电磁顶点可以被证明完全由介子传播子的逆的有限阶导数决定。这包括顶点对离壳变量 p^2 和 p'^2 的依赖关系。

对于电生，基于极点项（波恩项）的模型描述，由于每一项都不满足规范不变性，但是加起来必须满足，这就对核子形状因子和介子形状因子有要求 [94]

$$F_1^V(q^2) = F_\pi(q^2) \quad (\text{E.13})$$

下面来看一下最小替换方法与我们上面得到的一般结果的比较。最小替换方法可以参考 [38, 95]，方法的核心是在 $-\Delta^{-1}(p)$ 中将 p 替换成 $p - e_\pi A$ ，然后通过泛函导数，识别 A_μ 的线性项。数学上相当于是从 $\pi\pi$ 相互作用项中规范不变地加入一个（或者多个）光子场，生成 $\gamma\pi\pi$ 的顶点。最简单方式是将传播子的逆在 $p^2 = m^2$ 处展开

$$\Delta^{-1}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (p^2 - m^2)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!} \left. \left(\frac{\partial}{\partial p^2} \right)^n \Delta^{-1}(p) \right|_{p^2=m^2} \quad (\text{E.14})$$

计算细节参考 [95]，这里给出结果

$$\Gamma_{\text{MS}}^\mu(p', p) = e_\pi(p' + p)^\mu \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{l=1}^n (p'^2 - m^2)^{l-1} (p^2 - m^2)^{n-l} \quad (\text{E.15})$$

利用等式 $a^n - b^n = (a - b) \sum_{l=1}^n a^{n-l} b^{l-1}$ ，能够重写这个结果

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{MS}}^\mu(p', p) &= e_\pi(p' + p)^\mu \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p)}{p'^2 - p^2} \\ &= e(p' + p)^\mu f(p'^2, p^2) \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

与一般情况 (E.6) 对比，可以发现利用 MS 得到的顶点函数不包括第二项 G ，因此不含 q^2 依赖。这里将 (E.6) 第二项称为“非最小”项。只有在 $q^2 = 0$ 的情况下，才有

$$\Gamma_{\text{MS}}^\mu(p', p) = \Gamma_{q^2=0}^\mu(p', p) \quad (\text{E.17})$$

2 核子电磁形状因子

最一般的核子形状因子可以写作 [96]

$$\Gamma^\mu(p', p) = e \sum_{i,j=+,-} \Lambda_i(p') \left[\gamma^\mu F_{ij}^1 + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} F_{ij}^2 + \frac{q^\mu}{M} F_{ij}^3 \right] \Lambda_j(p) \quad (\text{E.18})$$

$F_{ij}^{1,2,3}$ 这 12 个标量函数表征了不在壳顶点，投影算符定义为

$$\Lambda_\pm(p) = \frac{W \pm \not{p}}{2W}, \quad W = \sqrt{p^2} \quad (\text{E.19})$$

为了讨论方便，可以写成另一种形式 [97]

$$\Gamma^\mu(p', p) = e \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right)^{-1} \sum_{i,j=+,-} \Lambda_i(p') \left(\frac{P^\mu}{M} G_{ij}^E + N^\mu G_{ij}^M + \frac{q^\mu}{2M} G_{ij}^q \right) \Lambda_j(p) \quad (\text{E.20})$$

其中

$$N^\mu = \frac{\gamma^\mu \not{P} - \not{q} \not{P} \gamma^\mu}{4M^2}, \quad P = \frac{p' + p}{2} \quad (\text{E.21})$$

注意到 $q \cdot N = 0$ ，利用这个，类似上节，可以得到因子化的一个关系

$$G_{ij}^q(q^2, p'^2, p^2) = (p'^2 - p^2) g_{ij}^q(q^2, p'^2, p^2) \quad (\text{E.22})$$

更多的限制来自于 WT 恒等式，

$$q_\mu \Gamma^\mu(p', p) = e_N [S^{-1}(p') - S^{-1}(p)] \quad (\text{E.23})$$

$e_N = e \hat{e}_N$ ，是核子电荷 ($\hat{e}_p = 1, \hat{e}_n = 0$)， S^{-1} 是核子传播子的逆，可以参数化为

$$S^{-1}(p) = A(p^2) + \frac{\not{p}}{W} B(p^2) \quad (\text{E.24})$$

利用投影算符，可以得到

$$G_{ij}^E(q^2, p'^2, p^2) + q^2 g_{ij}^q(q^2, p'^2, p^2) = \frac{2M}{p'^2 - p^2} \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) \hat{e}_N [A(p'^2) - A(p^2) + iB(p'^2) - jB(p^2)] \quad (\text{E.25})$$

类似地得到

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(p', p) &= e_N (p' + p)^\mu \frac{S^{-1}(p') - S^{-1}(p)}{p'^2 - p^2} + e \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right)^{-1} \\ &\times \sum_{i,j=+,-} \Lambda_i(p') \left[N^\mu G_{ij}^M(q^2, p'^2, p^2) + (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \frac{P_\nu}{M} g_{ij}^q(q^2, p'^2, p^2) \right] \Lambda_j(p) \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

和介子一样，上式第一项完全来源于 WT 恒等式，第二项才会出现 q^2 依赖，并且独立的规范不变（不取决于传播子性质）。顺便注意到，如果在树图水平上选择 $S^{-1} = \not{p} - m$ ，第一项会得到

$$e_N \frac{(p' + p)^\mu \not{q}}{(p' + p) \cdot q} \quad (\text{E.27})$$

与通常的 $e_N \gamma^\mu$ 刚好差一个规范不变的项。这个并不是特例，由于 γ 矩阵非交换特性，最小替换结果可以差一个规范不变的项（不依赖于 q^2 ），这样会在涉及到虚光子的时候产生不便。

3 π 的实康普顿散射

这一节考虑实康普顿散射 (RCS)，作为一个非常好的例子可以简要说明我们上面提到的各类情况。这里考虑 π^+ , $\gamma(q, \epsilon) + \pi^+(p) \rightarrow \gamma(q', \epsilon') + \pi^+(p')$, 不变振幅可以写作

$$\mathcal{M} = -i\epsilon_\mu \epsilon'_\nu M^{\mu\nu} = -i\epsilon_\mu \epsilon'_\nu (M_A^{\mu\nu} + M_B^{\mu\nu}) \quad (\text{E.28})$$

我们将总振幅分解成两个部分，分别是 s 和 u 道介子极点项 (A) 和剩余项 (B)。

RCS 的康普顿张量 $M^{\mu\nu}$ 的 A 部分可以写作 s 道和 u 道的一般形式

$$\begin{aligned} M_A^{\mu\nu} = & \Gamma^\nu(p', p' + q') \Delta(p' + q') \Gamma^\mu(p + q, p) \\ & + \Gamma^\mu(p', p' - q) \Delta(p' - q) \Gamma^\nu(p - q', p). \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

对于 RCS，外线粒子都是在壳的， $p^2 = p'^2 = m^2$ 并且实光子满足 $q^2 = q'^2 = 2$ ，因此

$$\begin{aligned} M_A^{\mu\nu} = & e^2 [(2P^\nu + q^\nu) F(0, m^2, s) \Delta(p' + q') (2P^\mu + q'^\mu) F(0, s, m^2) \\ & + (2P^\mu - q'^\mu) F(0, m^2, u) \Delta(p' - q) (2P^\nu - q^\nu) F(0, u, m^2)] \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

定义 $2P = p + p'$ ，以及 Mandelstam 变量

$$s = (p + q)^2, \quad t = (p - p')^2, \quad u = (p - q')^2, \quad s + t + u = 2m^2 \quad (\text{E.31})$$

所有正比于 q^μ, q'^ν 的项都没有贡献 (q^ν, q'^μ 有贡献)。利用 WT 恒等式 (E.4) 可以得到半在壳的形状因子的等式

$$F(0, s, m^2) = \Delta^{-1}(p' + q') (s - m^2)^{-1} \quad (\text{E.32})$$

$$F(0, u, m^2) = \Delta^{-1}(p' - q) (u - m^2)^{-1} \quad (\text{E.33})$$

注意到某一个顶点离壳部分被传播子离壳行为给完全抵消了，A 张量变为

$$\begin{aligned} M_A^{\mu\nu} = & e^2 \left\{ (2P^\nu + q^\nu) (2P^\mu + q'^\mu) \frac{F(0, m^2, m^2) + [F(0, m^2, s) - F(0, m^2, m^2)]}{s - m^2} \right. \\ & \left. + (2P^\mu - q'^\mu) (2P^\nu - q^\nu) \frac{F(0, m^2, m^2) + [F(0, m^2, u) - F(0, m^2, m^2)]}{u - m^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

$$\equiv M_{\text{pole}}^{\mu\nu} + \Delta M^{\mu\nu} \quad (\text{E.35})$$

A 张量可以分成两部分，第一部分只包含在壳贡献，通常称为极点贡献，由于 $F(0, m^2, m^2) = 1$ ，

$$M_{\text{pole}}^{\mu\nu} = e^2 \left[\frac{(2P^\nu + q^\nu)(2P^\mu + q'^\mu)}{s - m^2} + \frac{(2P^\mu - q'^\mu)(2P^\nu - q^\nu)}{u - m^2} \right] \quad (\text{E.36})$$

第二个部分是我们关心的，包括了 A 张量中不在壳部分

$$\begin{aligned} \Delta M^{\mu\nu} &= e^2 [(2P^\nu + q^\nu)(2P^\mu + q'^\mu)h(s) + (2P^\mu - q'^\mu)(2P^\nu - q^\nu)h(u)] \\ &= e^2 \{4[h(s) + h(u)]P^\mu P^\nu + 2[h(s) - h(u)](P^\mu q^\nu + q'^\mu P^\nu) + [h(s) + h(u)]q'^\mu q^\nu\} \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

其中函数 $h(z)$ 在 $z \rightarrow m^2$ 时是解析的，因为 $F(0, m^2, m^2) = 1$ ，

$$h(z) = \frac{F(0, m^2, z) - F(0, m^2, m^2)}{z - m^2} \quad (\text{E.38})$$

为了方便讨论，下面把 $\Delta M^{\mu\nu}, M_B^{\mu\nu}$ 用张量基表示出来，下面简要推导无自旋粒子康普顿张量 $M^{\mu\nu}$ 的分解。

* * *

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \sum_{i=1}^{10} M_i T_i^{\mu\nu} \\ &= M_1 g^{\mu\nu} + M_2 P^\mu P^\nu + M_3 (P^\mu q^\nu - q'^\mu P^\nu) + M_4 (P^\mu q^\nu + q'^\mu P^\nu) + M_5 (P^\mu q'^\nu - q^\mu P^\nu) \\ &\quad + M_6 (P^\mu q'^\nu + q^\mu P^\nu) + M_7 (q^\mu q^\nu + q'^\mu q'^\nu) + M_8 (q^\mu q^\nu - q'^\mu q'^\nu) + M_9 q^\mu q'^\nu + M_{10} q'^\mu q^\nu \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

对于 RCS，函数 M_i 取决于两个运动学不变量

$$x = \frac{1}{2}(q + q') \cdot P, \quad y = q \cdot q' \quad (\text{E.40})$$

对于在壳 $p^2 = p'^2$ 情况， $x = q \cdot P = q' \cdot P$ 。考虑光子的交叉对称性， $q \leftrightarrow -q', \mu \leftrightarrow \nu$ ，暗示函数 M_i 满足

$$M_i(x, y) = \pm M_i(-x, y), \quad + : i = 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, \quad - : i = 4, 6, 8 \quad (\text{E.41})$$

考虑电荷共轭不变性 (π^+ 和 π^-)

$$M_{\pi^+}^{\mu\nu}(P, q, q') = M_{\pi^-}^{\mu\nu}(P, q, q') \quad (\text{E.42})$$

同时利用交叉对称性可以将 M_{π^-} 转换成 M_{π^+} ，这样得到

$$M^{\mu\nu}(P, q, q') = M^{\mu\nu}(-P, q, q') \quad (\text{E.43})$$

这个导致

$$M_i(x, y) = \pm M_i(-x, y), \quad + : i = 1, 2, 7, 8, 9, 10, \quad - : i = 3, 4, 5, 6 \quad (\text{E.44})$$

利用这两个关系，最后知道

$$M_3 = M_5 = M_8 = 0 \quad (\text{E.45})$$

进一步可以提取适当的 x 的幂次使得不变振幅仅仅是 x^2 的函数。实光子情况下，同时将正比于 q^μ, q'^ν 的项去掉，剩余四个结构重写成

$$M^{\mu\nu} = c_1 g^{\mu\nu} + c_2 P^\mu P^\nu + c_3 x (P^\mu q^\nu + q'^\mu P^\nu) + c_4 q'^\mu q^\nu \quad (\text{E.46})$$

其中 $c_i = c_i(x^2, y)$ 。习惯上重新排列上式使得前两个结构并不独立规范不变，同时后两个结构独自规范不变²⁷，

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \sum_{i=1}^4 a_i \mathcal{T}_i^{\mu\nu} \\ &= a_1 g^{\mu\nu} + a_2 P^\mu P^\nu \\ &\quad + a_3 [4x^2 g^{\mu\nu} - 4x (P^\mu q^\nu + q'^\mu P^\nu) + 4y P^\mu P^\nu] + a_4 \frac{1}{2} (y g^{\mu\nu} - q'^\mu q^\nu) \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

* * *

我们讨论中， x, y 满足

$$x = \frac{1}{2} (q + q') \cdot P = \frac{1}{4} (s - u), \quad y = q \cdot q' = -\frac{1}{2} t \quad (\text{E.48})$$

首先将 $\Delta M^{\mu\nu}$ 分解，见式 (E.37)

$$\Delta M^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^4 \mathcal{T}_i^{\mu\nu} \Delta a_i \quad (\text{E.49})$$

$$\Delta a_1 = e^2 [F(0, m^2, s) + F(0, m^2, u) - 2] \quad (\text{E.50})$$

$$\Delta a_2 = -\frac{2e^2}{x} [F(0, u, m^2) - F(0, m^2, s)] \quad (\text{E.51})$$

$$\Delta a_3 = -\frac{e^2}{2x} [h(s) - h(u)] \quad (\text{E.52})$$

$$\Delta a_4 = -2e^2 [h(s) + h(u)] \quad (\text{E.53})$$

对于 B 张量，利用 WT 恒等式， $q_\mu M^{\mu\nu} = q'_\nu M^{\mu\nu} = 0$ ，以及式 (E.3)、(E.29)，得到对于 B 张量的限制，

$$q_\mu M_B^{\mu\nu} = e [\Gamma^\nu(p' - q, p) - \Gamma^\nu(p', p + q)] \quad (\text{E.54})$$

²⁷这样好处是讨论规范不变性时候可以清楚地分开两类结构

$$q'_\nu M_B^{\mu\nu} = e [-\Gamma^\mu(p' + q', p) + \Gamma^\mu(p', p - q')] \quad (\text{E.55})$$

后一个式子可以利用光子交叉对称性直接从第一个式子得到。展开 B 张量，

$$M_B^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^4 \mathcal{T}_i^{\mu\nu} b_i \quad (\text{E.56})$$

与 q_μ 收缩，我们得到

$$q_\mu M_B^{\mu\nu} = b_1 q^\nu + x b_2 P^\nu \quad (\text{E.57})$$

利用实光子顶角 (E.12) 以及 WT 恒等式的限制

$$q_\mu M_B^{\mu\nu} = e^2 \{ 2P^\nu [F(0, u, m^2) - F(0, m^2, s)] - q^\nu [F(0, u, m^2) + F(0, m^2, s)] \} \quad (\text{E.58})$$

这里去掉了正比于 q^ν 的项。比较两式可以得到

$$b_1 = -e^2 [F(0, u, m^2) + F(0, m^2, s)] \quad (\text{E.59})$$

$$b_2 = \frac{2e^2}{x} [F(0, u, m^2) - F(0, m^2, s)] \quad (\text{E.60})$$

规范不变性不会给出对 b_3, b_4 的其他限制。

将离壳张量 $\Delta M^{\mu\nu}$ 和 $M_B^{\mu\nu}$ 组合起来，我们可以得到对于第一个结构

$$a_1 \equiv \Delta a_1 + b_1 = -2e^2 \quad (\text{E.61})$$

也就是说，离壳的部分都被消去了。类似的，

$$a_2 \equiv \Delta a_2 + b_2 = 0 \quad (\text{E.62})$$

完整结果

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= M_{\text{pole}}^{\mu\nu} + \Delta M^{\mu\nu} + M_B^{\mu\nu} \\ &= M_{\text{pole}}^{\mu\nu} - 2e^2 g^{\mu\nu} + \mathcal{T}_3^{\mu\nu} (\Delta a_3 + b_3) + \mathcal{T}_4^{\mu\nu} (\Delta a_4 + b_4). \end{aligned} \quad (\text{E.63})$$

可以定义

$$M_{\text{Born}}^{\mu\nu} \equiv M_{\text{pole}}^{\mu\nu} - 2e^2 g^{\mu\nu} \quad (\text{E.64})$$

为点粒子的规范不变张量，与标量 QED 树图结果一致（不考虑顶点的离壳效应）。对于

$$(\Delta a_3 + b_3) \mathcal{T}_3^{\mu\nu} + (\Delta a_4 + b_4) \mathcal{T}_4^{\mu\nu} \quad (\text{E.65})$$

并没有任何限制要求离壳贡献在张量 A 和 B 中被消去。正如文献所说 [98–100]，“离壳效应”并没有绝对的含义，通过改变介子场的表示，离壳效应能够在 A 部分和 B 部分之间相互转换。简而言之，就是 $(\Delta a_3 + b_3)$ 或 $(\Delta a_4 + b_4)$ 总体并不改变，但是各部分比例可能变化。

作为对比可以看一下最小替换的结果。振幅张量分解为

$$M_{\text{MS}}^{\mu\nu} = M_A^{\mu\nu} + M_{B,\text{MS}}^{\mu\nu} \quad (\text{E.66})$$

对于 A 张量，最小替换和一般的结果对于实光子是完全一样的。B 张量需要二阶泛函导数作用，这里直接给出结果 [95]

$$\begin{aligned} M_{B,\text{MS}}^{\mu\nu} = & e^2 \left\{ -2g^{\mu\nu} \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p)}{p'^2 - p^2} \right. \\ & - (2P + q)^\nu (2P + q')^\mu \frac{1}{s - p'^2} \left[\frac{\Delta^{-1}(p + q) - \Delta^{-1}(p)}{s - p^2} - \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p)}{p'^2 - p^2} \right] \\ & \left. - (2P - q')^\mu (2P - q)^\nu \frac{1}{u - p'^2} \left[\frac{\Delta^{-1}(p - q') - \Delta^{-1}(p')}{u - p'^2} - \frac{\Delta^{-1}(p') - \Delta^{-1}(p)}{p'^2 - p^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.67})$$

考虑初末态介子均在壳

$$\begin{aligned} M_{B,\text{MS}}^{\mu\nu} = & e^2 \left\{ -2g^{\mu\nu} \right. \\ & - (2P + q)^\nu (2P + q')^\mu \frac{1}{s - m^2} [F(0, s, m^2) - F(0, m^2, m^2)] \\ & \left. - (2P - q')^\mu (2P - q)^\nu \frac{1}{u - m^2} [F(0, u, m^2) - F(0, m^2, m^2)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.68})$$

容易看出，这个结果完全没有任何离壳成分，它就是之前定义的波恩项

$$M_{\text{MS}}^{\mu\nu} = M_{\text{Born}}^{\mu\nu} \quad (\text{E.69})$$

F 离壳效应的不可观测性

下面举两个例子来说明这个现象，主要来源 [100]。

1 $\pi\pi$ 韧致辐射

这里在非线性 σ 模型下计算 $\pi\pi$ 韧致辐射（不需要考虑高阶 χ PT），利用两种参数化

$$U(x) = \frac{1}{F} [\sigma(x) + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x)], \quad \sigma(x) = \sqrt{F^2 - \vec{\pi}^2(x)} \quad (\text{F.1})$$

$$U(x) = \exp \left[i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\phi}(x)}{F} \right] \quad (\text{F.2})$$

拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \right] + \frac{F^2 m_\pi^2}{4} \text{Tr} (U + U^\dagger) \quad (\text{F.3})$$

协变导数 $D_\mu U = \partial_\mu U + \frac{i}{2} e A_\mu [\tau_3, U]$ 。根据等价定理 [101, 102]，无论是哪一种变量，自由场部分形式都必须是不变的。那么就只需要考虑四点项，首先看 $\pi^+(p_1) + \pi^0(p_2) \rightarrow \pi^+(p_3) + \pi^0(p_4)$ ，这就涉及到四点相互作用

$$\mathcal{L}_1^{4\pi} = \frac{1}{2F^2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - \frac{m_\pi^2}{8F^2} (\vec{\pi}^2)^2 \quad (\text{F.4})$$

$$\mathcal{L}_2^{4\phi} = \frac{1}{6F^2} \left(\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - \vec{\phi}^2 \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} \right) + \frac{m_\pi^2}{24F^2} (\vec{\phi}^2)^2 \quad (\text{F.5})$$

同时， $\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2)$, $\pi_0 = \pi^3$ (ϕ_i 也是一样)，相应的振幅为

$$\mathcal{M}_1^{\pi\pi} = \frac{i}{F^2} T_0(p_1, p_3) \quad (\text{F.6})$$

$$\mathcal{M}_2^{\pi\pi} = \frac{i}{F^2} \left[T_0(p_1, p_3) - \frac{1}{3} (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4) \right] \quad (\text{F.7})$$

其中， $T_0(p_1, p_3) = (p_3 - p_1)^2 - m_\pi^2$, $\Lambda_i = p_i^2 - m_\pi^2$ 。很明显地看到，如果外腿不在壳的话，那么振幅就会不一样。下面考虑韧致辐射 $\pi^+(p_1) + \pi^0(p_2) \rightarrow \pi^+(p_3) + \pi^0(p_4) + \gamma(k)$ ，对于参数化 (F.1)，相互作用就是标量 QED 形式

$$\frac{F^2}{4} \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \right] = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}) - ieA_\mu (\pi^- \partial^\mu \pi^+ - \pi^+ \partial^\mu \pi^-) + e^2 A^2 \pi^+ \pi^- \quad (\text{F.8})$$

树图就只有两个结果，初态辐射或者末态辐射（从 π^+ ），振幅为²⁸

$$\mathcal{M}_1^{\pi\pi\gamma} = \frac{i}{F^2} T_0(p_1 - k, p_3) \frac{i}{(p_1 - k)^2 - m_\pi^2} (-2iep_1 \cdot \epsilon) - 2iep_3 \cdot \epsilon \frac{i}{(p_3 + k)^2 - m_\pi^2} \frac{i}{F^2} T_0(p_1, p_3 + k)$$

²⁸记号简单起见，省略末态极化矢量的复共轭标记，不影响这里的讨论

$$= e \left(\frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot k} - \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot k} \right) \frac{i}{F^2} [T_0(p_1, p_3) - 2(p_1 - p_3) \cdot k] \quad (\text{F.9})$$

对于第二种参数化，离壳部分正比于 $-\frac{1}{3}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4)$ ，这部分会被所谓接触项给抵消掉。因为按照 (F.2) 参数化，还会有四个 ϕ 和一个 A 的相互作用

$$\mathcal{L}_2^{\phi^+ \phi^- \phi^0 \phi^0 A} = \frac{ieA_\mu}{3F^2} (\partial^\mu \phi^+ \phi^- - \phi^+ \partial^\mu \phi^-) \phi^0 \phi^0 \quad (\text{F.10})$$

多出的这个图就是接触项，总振幅

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^{\pi\pi\gamma} = & \frac{i}{F^2} \left\{ T_0(p_1 - k, p_3) - \frac{1}{3} [(p_1 - k)^2 - m_\pi^2] \right\} \frac{i}{(p_1 - k)^2 - m_\pi^2} (-2iep_1 \cdot \epsilon) \\ & - 2iep_3 \cdot \epsilon \frac{i}{(p_3 + k)^2 - m_\pi^2} \frac{i}{F^2} \left\{ T_0(p_1, p_3 + k) - \frac{1}{3} [(p_3 + k)^2 - m_\pi^2] \right\} \\ & + \frac{2ie}{3F^2} (p_1 + p_3) \cdot \epsilon \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

简单代数计算给出 $\mathcal{M}_1^{\pi\pi\gamma} = \mathcal{M}_2^{\pi\pi\gamma}$ ，也就是离壳部分被接触项完全抵消，这给了一个暗示那就是接触项和离壳项是不可区分的，因为会给出完全一样的可观测效应。

2 费米子耦合的玩具模型

这里利用一个玩具模型计算 NN 刚致辐射和 CS，这个模型拉式量

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(iD^\mu - m)\Psi - \frac{e\kappa}{4m}\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Psi + \bar{\Phi}(i\partial^\mu - m)\Phi + g\bar{\Psi}\Psi\bar{\Phi}\Phi \quad (\text{F.12})$$

协变导数 $D_\mu\Psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi$ ， κ 是质子的反常磁矩， Ψ, Φ 分别表示质子和中子场。这里一个简化是不考虑中子的磁矩，这样费曼图会大大减少并且不需要考虑全同粒子的效应。这样的简化并不会改变我们论述的核心。

标准的费曼规则如下：

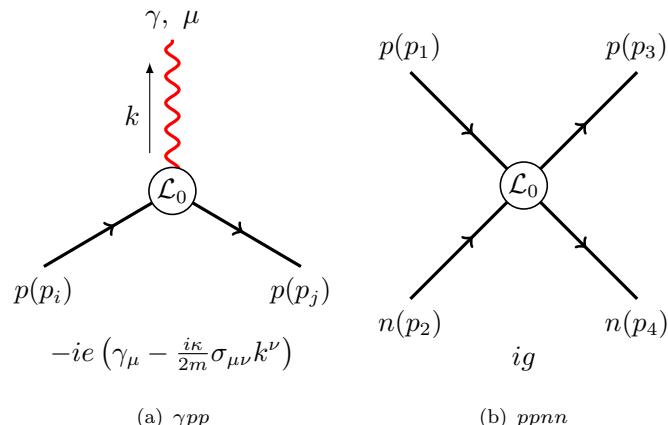


图 28: \mathcal{L}_0 的费曼规则

NN 引致辐射树图振幅

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0^{NN\gamma} = & ie g \bar{u}_n(p_4) u_n(p_2) \bar{u}_p(p_3) \left[\left(\not{\epsilon} - \frac{i\kappa}{2m} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^\mu k^\nu \right) \frac{\not{p}_3 + \not{k} + m}{(p_3 + k)^2 - m^2} \right. \\ & \left. + \frac{\not{p}_1 - \not{k} + m}{(p_1 - k)^2 - m^2} \left(\not{\epsilon} - \frac{i\kappa}{2m} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^\mu k^\nu \right) \right] u_p(p_1)\end{aligned}\quad (\text{F.13})$$

核子 CS 的振幅

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0^{CS} = & -ie^2 \bar{u}(p_f) \left[\left(\not{\epsilon}_2 - \frac{i\kappa}{2m} \sigma_{\mu\nu} \epsilon_2^\mu k_2^\nu \right) \frac{\not{p}_f + \not{k}_2 + m}{(p_f + k_2)^2 - m^2} \left(\not{\epsilon}_1 + \frac{i\kappa}{2m} \sigma_{\mu\nu} \epsilon_1^\mu k_1^\nu \right) \right. \\ & \left. + \left(\not{\epsilon}_1 + \frac{i\kappa}{2m} \sigma_{\mu\nu} \epsilon_1^\mu k_1^\nu \right) \frac{\not{p}_f - \not{k}_1 + m}{(p_f - k_1)^2 - m^2} \left(\not{\epsilon}_2 - \frac{i\kappa}{2m} \sigma_{\mu\nu} \epsilon_2^\mu k_2^\nu \right) \right] u(p_i)\end{aligned}\quad (\text{F.14})$$

我们知道场的重新定义不会改变物理可观测量，因此可以对拉式量做一个场的变换

$$\mathcal{L}_0(\Psi + \delta\Psi) = \mathcal{L}_0(\Psi) + \Delta\mathcal{L}(\Psi) \quad (\text{F.15})$$

这里 $\Delta\mathcal{L}(\Psi)$ 为

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} = & \bar{\Psi} \left[(i\not{D} - m) - \frac{e\kappa}{4m} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g\bar{\Phi}\Phi \right] \delta\Psi \\ & + \delta\bar{\Psi} \left[(i\not{D} - m) - \frac{e\kappa}{4m} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g\bar{\Phi}\Phi \right] \Psi \\ & + \delta\Psi \left[(i\not{D} - m) - \frac{e\kappa}{4m} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g\bar{\Phi}\Phi \right] \delta\Psi\end{aligned}\quad (\text{F.16})$$

下面的策略是将 $\Delta\mathcal{L}$ 分成两部分 $\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}_1 + \Delta\mathcal{L}_2$ ， $\Delta\mathcal{L}_1$ 包括拉氏量中直接生成对于顶点的离壳贡献外加一些规范不变要求的接触项， $\Delta\mathcal{L}_2$ 为剩余的部分只包含纯接触项。这样可以分别计算 $\mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_0 - \Delta\mathcal{L}_2$ 进行对比。

因此，我们有两个拉格朗日量，一个给出了顶点的离壳贡献，另一个则没有。然而，两者都给出了完全相同的可测量的物理振幅，因此这些可观测量对拉格朗日量中参数的依赖完全相同。所以，我们必须得出这样的结论：对于物理过程来说，离壳贡献并不是一个有意义的概念。人们可以通过与数据比较来测量某一唯像模型的拉氏量中的参数，但这些系数不能以任何有意义的方式与顶点的离壳贡献唯一关联。下面用计算来说明这个。

选取一族特殊的变换

$$\Psi \rightarrow \Psi + \tilde{a}g\Phi\Phi\Psi + \tilde{b}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Psi \quad (\text{F.17})$$

\tilde{a}, \tilde{b} 都是实数。由此生成的拉氏量为（只关心引致辐射和 CS 有贡献的项）

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_1 = & \tilde{a}g \left[\bar{\Psi}(\overset{\leftarrow}{i\not{D}} - m - eA) \Psi \bar{\Phi}\Phi + \bar{\Phi}\Phi\bar{\Psi} \left(i\not{D} - m - eA \right) \Psi \right] \\ & + \tilde{b}e \left[\bar{\Psi}(\overset{\leftarrow}{i\not{D}} - m - eA) \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Psi + \bar{\Psi} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(i\not{D} - m - eA \right) \Psi \right]\end{aligned}\quad (\text{F.18})$$

和

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_2 = & -eg \left(\frac{\tilde{a}\kappa}{2m} - 2\tilde{b} \right) \bar{\Phi}\Phi\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Psi \\ & - \frac{e^2\tilde{b}\kappa}{2m}\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sigma_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Psi \\ & + \tilde{a}beg \left[\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(i\overleftarrow{\partial} - m - eA)\Psi\bar{\Phi}\Phi + \bar{\Phi}\Phi\bar{\Psi}(i\overrightarrow{\partial} - m - eA)\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Psi \right] \\ & + e^2\tilde{b}^2\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(i\overrightarrow{\partial} - m - eA)\sigma_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Psi\end{aligned}\quad (\text{F.19})$$

这里定义 $\bar{\Psi}i\overleftarrow{\partial} \equiv -i(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu$ 。关于 $\Delta\mathcal{L}_1$ 的 $4N$ 顶角费曼规则（没有特别说明，动量标记和上图一致）

$$i\tilde{a}g \left[(\not{p}_3 - m) + (\not{p}_1 - m) \right] \quad (\text{F.20})$$

以及 γNN 电磁顶角

$$-2ie\tilde{b} \left[(\not{p}_f - m) i\sigma_{\mu\nu}\epsilon^\mu k^\nu + i\sigma_{\mu\nu}\epsilon^\mu k^\nu (\not{p}_i - m) \right] \quad (\text{F.21})$$

另外由于规范不变性，还有一些来源于协变导数的接触项顶点， $\gamma 4N$ 顶点和 $\gamma\gamma NN$ 顶点

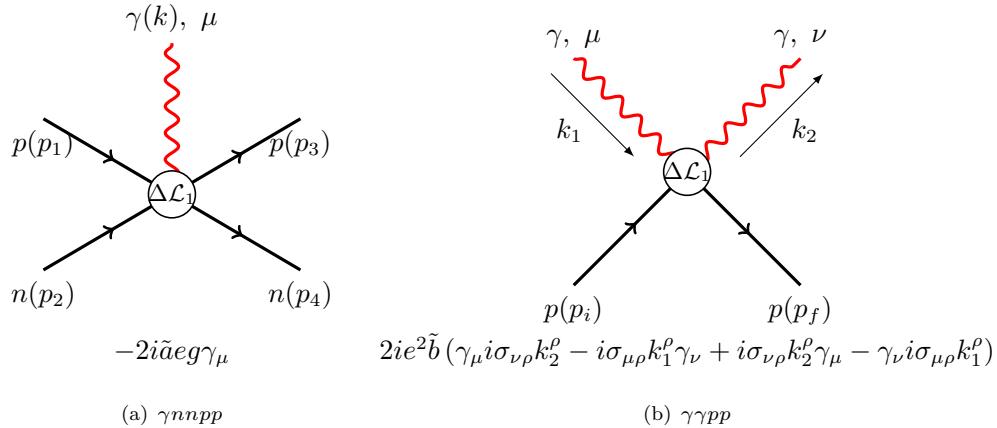


图 29: $\Delta\mathcal{L}_1$ 中 $\gamma 4N$ 顶点和 $\gamma\gamma NN$ 顶点的费曼规则

另一种拉氏量 $\mathcal{L}_0 - \Delta\mathcal{L}_2$ 只生成接触项， $\Delta\mathcal{L}_2$ 对应的 $\gamma 4N$ 顶点和 $\gamma\gamma NN$ 顶点费曼规则为

$$2iegi\sigma_{\mu\nu}k^\nu \left(\frac{\tilde{a}\kappa}{2m} - 2\tilde{b} \right) - 2ieg\tilde{a}\tilde{b} \left[(\not{p}_1 - \not{k} - m) i\sigma_{\mu\nu}k^\nu + i\sigma_{\mu\nu}k^\nu (\not{p}_3 + \not{k} - m) \right] \quad (\text{F.22})$$

和

$$\begin{aligned}2i\frac{e^2\kappa}{m}\tilde{b} (i\sigma_{\mu\rho}k_1^\rho i\sigma_{\nu\alpha}k_2^\alpha + i\sigma_{\nu\alpha}k_2^\alpha i\sigma_{\mu\rho}k_1^\rho) \\ - 4ie^2\tilde{b}^2 \left[i\sigma_{\mu\rho}k_1^\rho (\not{p}_i - \not{k}_2 - m) i\sigma_{\nu\alpha}k_2^\alpha + i\sigma_{\nu\alpha}k_2^\alpha (\not{p}_i + \not{k}_1 - m) i\sigma_{\mu\rho}k_1^\rho \right]\end{aligned}\quad (\text{F.23})$$

利用费曼规则，下面显式地来计算 NN 软致辐射，首先考虑拉氏量 $\mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$ 。纯 \mathcal{L}_0 的贡献上文已经算出，关于 $\Delta\mathcal{L}_1$ 贡献分为三部分，第一部分是一个顶点来自 \mathcal{L}_0 另一个顶点来自于 $\Delta\mathcal{L}_1$ 的图，

$$ieg\bar{u}_n(p_4)u_n(p_2)\bar{u}_p(p_3)\left[2\tilde{a}\not{\epsilon}-\left(\frac{\tilde{a}\kappa}{m}-4\tilde{b}\right)i\sigma_{\mu\nu}\epsilon^\mu k^\nu\right]u_p(p_1) \quad (\text{F.24})$$

第二项是两个顶点都来自于 $\Delta\mathcal{L}_1$ ，

$$2ieg\tilde{a}\bar{b}\bar{u}_n(p_4)u_n(p_2)\bar{u}_p(p_3)\left[i\sigma_{\mu\nu}\epsilon^\mu k^\nu\left(\not{p}_3+\not{k}-m\right)+\left(\not{p}_1-\not{k}-m\right)i\sigma_{\mu\nu}\epsilon^\mu k^\nu\right]u_p(p_1) \quad (\text{F.25})$$

第三项是用协变导数多出来的接触项

$$-2ieg\tilde{a}\bar{u}_n(p_4)u_n(p_2)\bar{u}_p(p_3)\not{\epsilon}u_p(p_1) \quad (\text{F.26})$$

注意到 (F.24) 会抵消掉接触项 (F.26)，最后 $\Delta\mathcal{L}_1$ 贡献都正比于 $\sigma_{\mu\nu}\epsilon^\mu k^\nu$ 。

实际上， \tilde{a} 和 \tilde{b} 的值并没有明确地告诉我们任何关于离壳行为的信息。下面计算 $\mathcal{L}_0 - \Delta\mathcal{L}_2$ 可以看的更清楚。 $-\Delta\mathcal{L}_2$ 有两个接触项，分别为

$$-ieg\left(\frac{\tilde{a}\kappa}{m}-4\tilde{b}\right)\bar{u}_n(p_4)u_n(p_2)\bar{u}_p(p_3)i\sigma_{\mu\nu}\epsilon^\mu k^\nu u_p(p_1) \quad (\text{F.27})$$

和

$$2ieg\tilde{a}\bar{b}\bar{u}_n(p_4)u_n(p_2)\bar{u}_p(p_3)\left[i\sigma_{\mu\nu}\epsilon^\mu k^\nu\left(\not{p}_3+\not{k}-m\right)+\left(\not{p}_1-\not{k}-m\right)i\sigma_{\mu\nu}\epsilon^\mu k^\nu\right]u_p(p_1) \quad (\text{F.28})$$

可以看到 $-\Delta\mathcal{L}_2$ 和 $\Delta\mathcal{L}_1$ 的贡献完全一样，这是可以预期的。因此 $\mathcal{L}_0 - \Delta\mathcal{L}_2$ 给出完全一样的 \tilde{a} 和 \tilde{b} ，但是 $\mathcal{L}_0 - \Delta\mathcal{L}_2$ 并不包含任何离壳贡献，仅仅有接触项，因此 \tilde{a} 和 \tilde{b} 与离壳行为没有任何物理意义的联系。

更一般地可以考虑这么一个拉氏量 $\mathcal{L}(\eta) = \mathcal{L}_0 + (1 - \eta)\Delta\mathcal{L}_1 - \eta\Delta\mathcal{L}_2$ ， η 是一个任意的实参数。 $\mathcal{L}(\eta)$ 也能给出相同的 NN 软致辐射振幅，但是离壳部分的 \tilde{a}, \tilde{b} 会变为 $(1 - \eta)\tilde{a}, (1 - \eta)\tilde{b}$ 。所以，这类离壳行为是不可观测的。回过头来看，这个结果并不奇怪。离壳振幅的概念在某种意义上是一个数学概念，它只适用于费曼图的一部分。离壳粒子不是物理的，人们永远无法直接测量它。这样的振幅只有放在一个更大的图中才有意义，图中有适当的相互作用，使粒子回到质壳上。因此，在描述这样一种中间的、非物理的状态时，我们应该预料到在很大程度上具有模糊性。

对于 CS 也是类似的。首先考虑 $\mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$ ，一个顶点来自 \mathcal{L}_0 另一个来自 $\Delta\mathcal{L}_1$ 的振幅为

$$\begin{aligned} &+2i\tilde{b}e^2\bar{u}(p_f)\left[\left(\not{\epsilon}_2-\frac{i\kappa}{2m}\sigma_{\mu\nu}\epsilon_2^\mu k_2^\nu\right)i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_1^\alpha k_1^\beta-i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_2^\alpha k_2^\beta\left(\not{\epsilon}_1+\frac{i\kappa}{2m}\sigma_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu k_1^\nu\right)\right]u(p_i) \\ &-2i\tilde{b}e^2\bar{u}(p_f)\left[\left(\not{\epsilon}_1+\frac{i\kappa}{2m}\sigma_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu k_1^\nu\right)i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_2^\alpha k_2^\beta-i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_1^\alpha k_1^\beta\left(\not{\epsilon}_2-\frac{i\kappa}{2m}\sigma_{\mu\nu}\epsilon_2^\mu k_2^\nu\right)\right]u(p_i) \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

两个顶点同时来自 $\Delta\mathcal{L}_1$ ，

$$4i\tilde{b}^2e^2\bar{u}(p_f)\left[i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_2^\mu k_2^\nu\left(\not{p}_f+\not{k}_2-m\right)i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_1^\alpha k_1^\beta\right]u(p_i)$$

$$4i\tilde{b}^2e^2\bar{u}(p_f)\left[i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu k_1^\nu\left(\not{p}_f - \not{k}_1 - m\right)i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_2^\alpha k_2^\beta\right]u(p_i) \quad (\text{F.30})$$

还有来源于协变导数的 $\gamma\gamma NN$ 接触相互作用

$$2ie^2\tilde{b}\bar{u}(p_f)\left(\not{\epsilon}_1i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_2^\mu k_2^\nu - i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu k_1^\nu\not{\epsilon}_2 + i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_2^\mu k_2^\nu\not{\epsilon}_1 - \not{\epsilon}_2i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu k_1^\nu\right)u(p_i) \quad (\text{F.31})$$

(F.31) 会和 (F.29) 中部分相消, 最后只剩下纯磁矩贡献。下面来看 $\mathcal{L}_0 - \Delta\mathcal{L}_2$, 拉氏量 $-\Delta\mathcal{L}_2$ 给出的贡献纯粹是接触项

$$\begin{aligned} & -2i\frac{e^2\kappa}{m}\tilde{b}\bar{u}(p_f)\left(i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu k_1^\nu i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_2^\alpha k_2^\beta + i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_2^\alpha k_2^\beta i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu k_1^\nu\right)u(p_i) \\ & + 4ie^2\tilde{b}^2\bar{u}(p_f)\left[i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu k_1^\nu\left(\not{p}_i - \not{k}_2 - m\right)i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_2^\alpha k_2^\beta + i\sigma_{\alpha\beta}\epsilon_2^\alpha k_2^\beta\left(\not{p}_i + \not{k}_1 - m\right)i\sigma_{\mu\nu}\epsilon_1^\mu k_1^\nu\right]u(p_i) \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

这和 $\Delta\mathcal{L}_1$ 生成的振幅一样。

此外, 还有一个有意思的观察。考虑拉氏量 $\mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$ 作为一个唯像模型来研究核子电磁相互作用, 可以认为, 即使系数 \tilde{b} 不代表离壳效应, 它也可以用来参数化相互作用的未知特征。这完全是可能的, 唯像模型的意义就在于此。然而, 这种参数化对此拉氏量描述的各种过程都有影响, 它并不总是能够导致与数据一致的结果。

例如我们可以从 (F.14)、(F.29)、(F.30) 和 (F.31) 对比实验数据提取质子的电磁极化率 (electromagnetic polarizabilities)。在实验系中考虑所谓两分量形式同时利用 Coulomb 规范, 可以导出

$$\mathcal{M}^{CS} = i\chi_f^\dagger \left[-\frac{e^2}{m}\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 + \omega_1\omega_2\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 \left(-\frac{4e^2}{m}\left(\kappa\tilde{b} + 4m^2\tilde{b}^2\right) \right) + \omega_1\omega_2\vec{\epsilon}_2 \times \hat{k}_2 \cdot \vec{\epsilon}_1 \times \hat{k}_1 \left(\frac{4e^2\kappa\tilde{b}}{m} \right) + \dots \right] \chi_i \quad (\text{F.33})$$

第一项是所谓的 Thomson 项, 后两项与极化率有关, 具体的细节可以参考 [103–106]。由此可以抽取极化率 (尤其注意电磁单位制)

$$\bar{\alpha} = -\frac{e^2}{4\pi}\frac{4}{m}\left(\kappa\tilde{b} + 4m^2\tilde{b}^2\right), \quad \bar{\beta} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{4\kappa\tilde{b}}{m} \quad (\text{F.34})$$

质子二阶极化率的实验值是已知的, $\bar{\alpha} = (12.1 \pm 0.8 \pm 0.5) \times 10^{-4}\text{fm}^3$ [100], 由此可以解出 \tilde{b} ,

$$\tilde{b} = \frac{\kappa}{8m^2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{16\pi m^3\bar{\alpha}}{e^2\kappa^2}}\right) \quad (\text{F.35})$$

容易计算 $16\pi m^3\bar{\alpha}/e^2\kappa^2 \simeq 22 \gg 1$, 相当于 \tilde{b} 无解。因此唯像拉氏量计算中尤其需要自洽性检验, 比如同一个拉氏量计算各类过程互不矛盾。

简短地概括, 也就是说我们无法测量这个“离壳系数” (\tilde{a}, \tilde{b} 等等), 因此无法根据模型对它的预测来衡量模型的正确性或不正确性。

G Coleman-Norton 定理

Landau 方程 [107] 是判断费曼积分奇异性的重要方程，关于它的导出细节和各类性质应用可以参考专著 [56, 108, 109]。这里着重说明一个 Coleman 和 Norton 在 1965 年证明的定理 [110] ——Landau 方程可以解释为费曼积分的经典极限，其中在壳的传播子描述了物理粒子在时空中的运动。我们这里按照 [110, 111] 的方式给出这个定理的一个物理理解（证明）——如果我们把费曼积分写成位型空间（坐标空间）中的积分，我们可以直接看到 Landau 方程精确地再现了经典极限 ($\hbar \rightarrow 0$)，这样就可以用经典粒子的轨迹来联系费曼图。

考虑一个任意的费曼图 G , G 有 N 条内线和 n 个顶点，对于领头阶奇异性 (α_i 均不为零)，费曼参数空间的 Landau 方程可以写作：

$$\text{Conservation laws: } \sum_{j=1}^N e_{kj} q_j + p_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (\text{G.1})$$

$$\text{Circuit equations: } \sum_{j=1}^N e_{Cj} \alpha_j q_j = 0 \quad \text{for all circuits } C, \quad (\text{G.2})$$

$$\text{On mass shell equations: } m_j^2 - q_j^2 = 0 \quad (j = 1, \dots, N). \quad (\text{G.3})$$

这里 α_j, q_j, p_k, m_j 分别代表费曼参数，内线动量，外线动量和内线质量。 e_{kj} 等于 $+1$ 表示入射到顶点 a_k (出射则等于 -1)， e_{Cj} 表示圈 C 正向 (不妨取逆时钟) 与 q_j 一致时为 $+1$ (相反则为 -1)，其他顶点，线非临近情况均为 0。其中还隐藏了一个图形关系， $\sum_{j=1}^N e_{kj} e_{Cj} = 0$ 。物理区域的奇异性要求 Landau 方程满足 p_k 都是实的且 $\alpha_j \in [0, 1]$ 。

一个更加形象的理解是来源于最简单的欧姆 (Ohm) 定律，如果将 α_j, q_j 看作电路网络里的电阻和电流，那么 (G.1) 和 (G.2) 可以分别当作基尔霍夫 (Kirchhoff) 第一和第二定律。这个类比让我们想到了可以定义 $-z_k$ 作为每个顶点的“电动势”

$$\alpha_j q_j = -(z_l - z_m) = - \sum_{k=1}^n e_{kj} z_k \quad (\text{G.4})$$

j 的方向从 a_l 到 a_m , z_j 同样满足 (G.2)，另一方面，(G.1) 和 (G.3) 可以重写成

$$\sum_{i=1}^n w_{ki} z_i - p_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (\text{G.5})$$

$$m_j^2 - y_j^2 \left(\sum_{s=1}^n e_{sj} z_s \right)^2 = 0 \quad (j = 1, \dots, N) \quad (\text{G.6})$$

其中定义 (这里不用爱因斯坦求和约定)

$$w_{ki} = \sum_{j=1}^N e_{kj} e_{ij} y_j \quad (\text{G.7})$$

$$y_j = 1/\alpha_j \quad (\text{G.8})$$

下面将会看到, z_k 可以理解成顶点 a_k 的时空坐标。考虑位形空间的费曼积分表示, 这里简单起见只考虑标量粒子且没有导数耦合 (考虑的话也不改变主要结论),

$$F_G(p) = \text{const} \times \int \prod_{k=1}^n d^4 z_k \exp \left(i \sum_{k=1}^n p_k z_k \right) \prod_{j=1}^N \Delta_F \left(- \sum_{k=1}^n e_{kj} z_k, m_j^2 \right), \quad (\text{G.9})$$

$\Delta_F(z, m_j^2)$ 是位形空间的费曼传播子

$$\Delta_F(z, m^2) = i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq \cdot z}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (\text{G.10})$$

$$= \frac{-i}{8\pi^2} \int_0^\infty dy \exp \left[-\frac{i}{2} \left(yz^2 + \frac{m^2 - i\varepsilon}{y} \right) \right] \quad (\text{G.11})$$

这里用到了 Schwinger 固有时方法 (proper-time formalism) [112]。因此

$$F_G(p) = \text{const} \int \prod_{k=1}^n dz_k \int_0^\infty \prod_{j=1}^N dy_j \exp[-i\Phi(p, z_k, y_j) - \varepsilon(y_j)] \quad (\text{G.12})$$

其中

$$\Phi(p, z_k, y_j) = - \sum_{k=1}^n p_k z_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[y_j \left(\sum_{k=1}^n e_{kj} z_k \right)^2 + m_j^2/y_j \right] \quad (\text{G.13})$$

$$\varepsilon(y_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \epsilon/y_j \quad (\text{G.14})$$

$F_G(p)$ 的领头阶奇异性来自于 (G.12) 中震荡积分中 $\phi(p, z_k, y_j)$ 的稳相点 (stationary point), 这里只考虑宗量 z_k, y_j , 奇异性来源于

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (\text{G.15})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = 0 \quad (y = 1, \dots, N) \quad (\text{G.16})$$

这就是上面的 Landau 方程 (G.5)、(G.6)。

原则上, $\exp(-i\Phi)$ 应该写作 $\exp(-i\Phi/\hbar)$, 如果我们回到经典极限 $\hbar \rightarrow 0$, 唯一对于 $F_G(p)$ 有贡献的就是满足 (G.15)、(G.16) 的稳相点。因此可以这么说, 费曼图 G 的奇异性表示经典粒子的时空轨迹。

$F_G(p)$ 的非领头奇异性来自于 $y_j \rightarrow \infty$ 的端点奇异性, 另一个 $y_j \rightarrow 0$ 的奇异性由于 $\varepsilon(y_j)$ 的存在不会有奇异性贡献。对于 $y_j \rightarrow \infty$, 我们有 $z_l - z_m = 0$, 相当于两个点合并成一个点, 这样我们可以得到一个 G 的约化图, 然后重复上面的讨论能够得到相同的结论。

最后，利用 (G.4)、(G.5)，可以定义

$$y_j = \frac{m_j}{\tau_j} \quad (\text{G.17})$$

τ_j 是粒子 j 的固有时，所以

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N y_j \left(\sum_{k=1}^n e_{kj} z_k \right)^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \left(\frac{z_l - z_m}{\tau_j} \right) \tau_j \quad (\text{G.18})$$

就是经典作用量的动能项。

H π 电生的 Mandelstam 图

$2 \rightarrow 2$ 散射的物理区域是由著名的 Kibble 函数 [113] 决定的，最原始的 Kibble 函数导出需要满足外线粒子均在壳，但是我们考虑的 π 电生中 γ^* 并不在壳 ($k^2 = -Q^2 < 0$)，这样似乎会破坏这一点。这个是可以克服的，因为我们可以从一个更一般的角度导出 [114]。

将粒子依次编号成 $1, 2, 3, 4$, s, t, u 道分别写作

$$\begin{aligned} s.1 + 2 &\rightarrow 3 + 4 \\ t.1 + \bar{3} &\rightarrow \bar{2} + 4 \\ u.1 + \bar{4} &\rightarrow \bar{2} + 3 \end{aligned} \tag{H.1}$$

构造一个和任意三个四维矢量 q_μ 之积对偶的四维矢量 L_λ

$$L_\lambda = \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho \tag{H.2}$$

在一个粒子的静止系中（比如粒子 1）， $q_1 = (q_1^0, \mathbf{0})$ 。此时 L 只有空间分量 $L_i = \epsilon_{i0kl} q_1^0 q_2^k q_3^l$ ，因此 L 类空，且在任意参考系下 $L^2 \leq 0$ ，将 L^2 显示写出来，得到

$$\left| \begin{array}{ccc} q_1^2 & q_1 \cdot q_2 & q_1 \cdot q_3 \\ q_2 \cdot q_1 & q_2^2 & q_2 \cdot q_3 \\ q_3 \cdot q_1 & q_3 \cdot q_2 & q_3^2 \end{array} \right| \geq 0 \tag{H.3}$$

这个条件可以用 s, t, u 重新写出来，这样适用于三个交叉道

$$stu \geq as + bt + cu \tag{H.4}$$

其中，

$$\begin{aligned} a\Sigma &= (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2) (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) \\ b\Sigma &= (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2) (m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2) \\ c\Sigma &= (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2) (m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2) \end{aligned} \tag{H.5}$$

$\Sigma = \sum_{i=1}^4 m_i^2$ 。定义 Kibble 函数为 $\Gamma(s, t, u) = stu - as - bt - cu$ ，三个交叉道物理区域当且仅当 $\Gamma \geq 0$ 。这个形式的一个好处是不依赖于粒子是否在壳，只要 $p_i^2 = m_i^2$ 是良定义的（这总是可以做到的）。

对于电生， s 道和 u 道运动学上是一样的，因此比较方便地可以定义一个交叉对称变量 (crossing symmetric variable) $\nu = (s - u)/(4m_N)$ 。Mandelstam 平面由 $\nu - t$ 两个变量定义。电

生物物理区域（方便起见下面只考虑 Q^2 不太大的情况）可以利用 Kibble 函数看出来，对于电生

$$a = c = \frac{m_N^2(Q^2 + m_\pi^2)^2}{\Sigma} \quad (\text{H.6})$$

$$b = \frac{(m_N^4 - Q^2 m_\pi^2)(2m_N^2 - m_\pi^2 + Q^2)}{\Sigma} \quad (\text{H.7})$$

那么 (H.4) 不等式可以变为

$$stu(2m_N^2 + m_\pi^2 - Q^2) \geq (s+u)m_N^2(Q^2 + m_\pi^2)^2 + t(m_N^4 - Q^2 m_\pi^2)(2m_N^2 - m_\pi^2 + Q^2) \quad (\text{H.8})$$

利用 $s+u = 2m_N^2 + m_\pi^2 - Q^2 - t$, 以及

$$su = \frac{(s+u)^2 - (s-u)^2}{4} = \frac{(2m_N^2 + m_\pi^2 - Q^2 - t)^2 - 16m_N^2\nu^2}{4} \quad (\text{H.9})$$

可以得到电生 Kibble 函数为

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu, t) = & \frac{1}{4} (2m_N^2 + m_\pi^2 - Q^2) \left((2m_N^2 + m_\pi^2 - Q^2 - t)^2 - 16m_N^2\nu^2 \right) t \\ & - m_N^2 (2m_N^2 + m_\pi^2 - Q^2 - t) (m_\pi^2 + Q^2)^2 - (2m_N^2 + m_\pi^2 + Q^2) (m_N^4 - m_\pi^2 Q^2) t \end{aligned} \quad (\text{H.10})$$

Mandelstam 图：

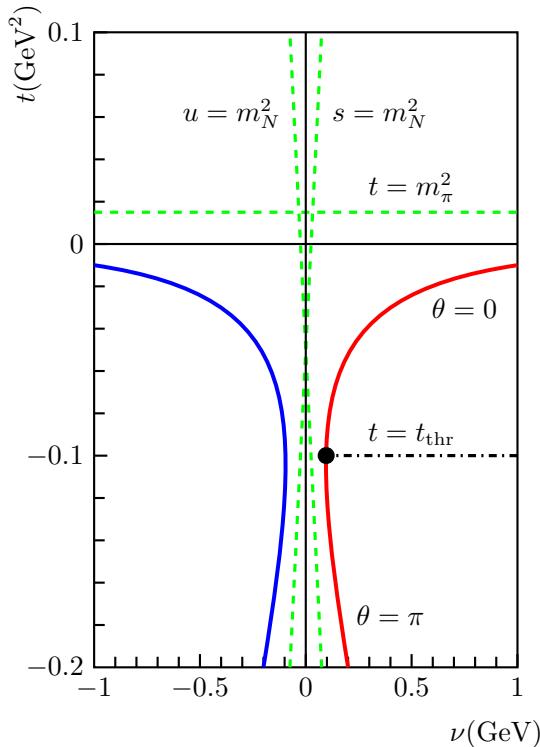


图 30: π 电生的 Mandelstam 平面，这里取 $Q^2 = 0.1 \text{ GeV}^2$ ，红、蓝实线分别是 s 道和 u 道物理区域的边界， $t \geq t_{\text{thr}}$ 区域对应朝前方向过程 ($\theta = 0$)， $t \leq t_{\text{thr}}$ 区域对应朝后方向过程 ($\theta = \pi$)。核子和 π 极点用虚线分别表示。

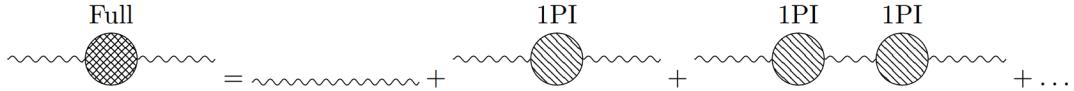
这里极点都变成了直线, 例如 $s = m_N^2$, 我们利用 $s+t+u = 2m_N^2 + m_\pi^2 - Q^2$, $\nu = (s-u)/(4m_N)$, 带入 $s = m_N^2$, 得到 $t = 4m_N\nu + m_\pi^2 - Q^2$, 这就是 s 道极点的表示, 同理 u 道极点也是类似 $t = -4m_N\nu + m_\pi^2 - Q^2$ 。另外, 利用 t 的表达式 (7.1), 带入 s 道的阈值 $s = (m_\pi^2 + m_N^2)^2$, 得到此时

$$t_{\text{thr}} = -\frac{m_N(m_\pi^2 + Q^2)}{m_N + m_\pi} \quad (\text{H.11})$$

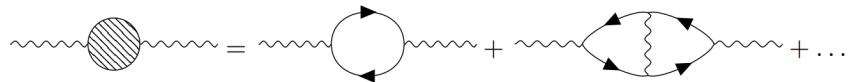
$$\nu_{\text{thr}} = \frac{m_\pi [(2m_N + m_\pi)^2 + Q^2]}{4m_N(m_N + m_\pi)} \quad (\text{H.12})$$

I 光子自能函数与真空极化

光子完全传播子可以用单粒子不可约图 (1PI) 来展开 单粒子不可约插入图是由所有可能的



1PI 图加起来构成的，也就是不能通过切割一条内部线将其分割成两个子图的图



定义 1PI 插入图 $-i\Pi^{\mu\nu}(q)$, q 是光子携带的动量, 完全传播子可以写作

$$\begin{aligned} iD_\gamma^{\alpha\beta}(q) &= \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} + \frac{-ig^{\alpha\mu}}{q^2} [-i\Pi_{\mu\nu}(q)] \frac{-ig^{\nu\beta}}{q^2} \\ &\quad + \frac{-ig^{\alpha\mu}}{q^2} [-i\Pi_{\mu\nu}(q)] \frac{-ig^{\nu\rho}}{q^2} [-i\Pi_{\rho\sigma}(q)] \frac{-ig^{\sigma\beta}}{q^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

首先, 利用洛伦兹分解和 Ward 恒等式, 我们可以推断 $\Pi^{\mu\nu}(q)$ 的横向部分

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) \quad (\text{I.2})$$

由此可以重写上面的级数

$$\begin{aligned} iD_\gamma^{\alpha\beta}(q) &= \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} + \frac{-ig^{\alpha\mu}}{q^2} \Delta_\mu^\beta [-\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots] \\ &= \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} [1 - \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots] + \frac{iq^\alpha q^\beta}{q^4} [-\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots] \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

$\Pi(q^2)$ 是一个解析的标量函数。这里我们用到了一个类似幂等的关系

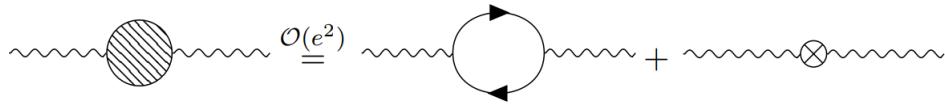
$$\Delta_\mu^\beta = i(q^2 g_{\mu\lambda} - q_\mu q_\lambda) \frac{-ig^{\lambda\beta}}{q^2} = g_\mu^\beta - \frac{q_\mu q^\beta}{q^2} \quad (\text{I.4})$$

物理上真空极化是作为一个费曼图的子图连接在各种费米子线上的, 因此根据 Ward 恒等式, 所有正比于 q^μ, q^ν 的项会和完整图中其他结构进行缩并, 从而得到 0。因此完全传播子我们可以写成更加简洁的形式

$$iD_\gamma^{\alpha\beta}(q) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} [1 - \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots] = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2 [1 + \Pi(q^2)]} \quad (\text{I.5})$$

上式原则上是 QED 无穷阶的结果，但是我们具体应用都是到固定阶，比如考虑 $\mathcal{O}(e^2)$ 阶，根据重整化拉氏量

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{ren}} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{D}\psi - m\bar{\psi}\psi - e\left[\mu^{\frac{D-2}{2}}\right]\bar{\psi}\not{A}\psi \\ & -\frac{1}{4}\delta_3 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \delta_2 i\bar{\psi}\not{D}\psi - m\delta_m\bar{\psi}\psi - e\left[\mu^{\frac{D-2}{2}}\right]\delta_1\bar{\psi}\not{A}\psi\end{aligned}\quad (\text{I.6})$$



$$= \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} [-\Pi_2(q^2) - \delta_3] \quad (\text{I.7})$$

因此可以将重整化后的完整的传播子近似成

$$i\bar{D}_F^{\alpha\beta}(q) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} [1 - \bar{\Pi}_2(q^2) + \bar{\Pi}_2^2(q^2) + \dots] = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2 [1 + \bar{\Pi}_2(q^2)]} \quad (\text{I.8})$$

这里我们定义

$$\bar{\Pi}_2(q^2) = \Pi_2(q^2) + \delta_3 \quad (\text{I.9})$$

作为重整化的 VP 函数（到 $\mathcal{O}(e^2)$ 阶）。我们将之前忽略的量纲补齐，也就是乘以 e^2 ，然后可以定义跑动电荷 $e^2(q^2)$

$$ie^2\bar{D}_F^{\alpha\beta}(q) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} \frac{e^2}{[1 + \bar{\Pi}_2(q^2)]} = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} e^2(q^2) \quad (\text{I.10})$$

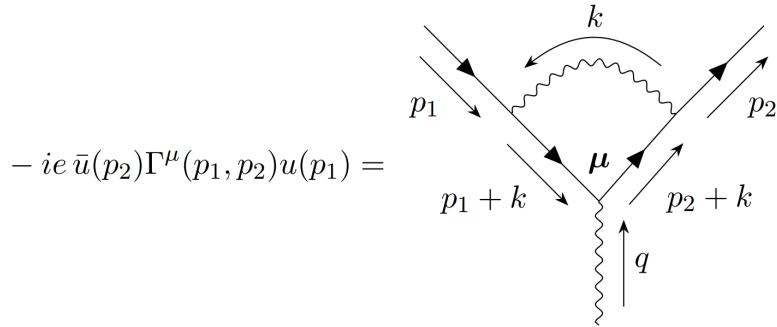
因此，在 NLO 阶，我们可以直接做替换

$$\frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} \xrightarrow{\text{NLO}} \frac{-ig^{\alpha\beta}}{q^2} [-\bar{\Pi}_2(q^2)] \quad (\text{I.11})$$

J QED 顶角关联与 $K_\mu(s)$ 函数

1 顶角关联

定义单圈在壳轻子顶角



显示写出来，得到

$$-ie\bar{u}(p_2)\Gamma^\mu(p_1, p_2)u(p_1) = (-ie\mu^{\frac{\varepsilon}{2}})^3 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 - \lambda^2} \bar{u}(p_2) \left[\gamma^\alpha \frac{i[(k + p_2) + m]}{(k + p_2)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{i[(k + p_1) + m]}{(k + p_1)^2 - m^2} \gamma^\beta \right] u(p_1) \quad (\text{J.1})$$

这里给出光子一个有限质量，第一是为了保持红外有限，第二也是最重要的，就是为了方便我们讨论色散积分计算 $g - 2$ 。处理完整个积分可以得到

$$\bar{u}(p_2)\Gamma^\mu(p_1, p_2)u(p_1) = \bar{u}(p_2)[G(q^2)\gamma^\mu + H(q^2)(p_1 + p_2)^\mu]u(p_1) \quad (\text{J.2})$$

我们定义两个辅助函数

$$G(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\Delta_\varepsilon - 2 - 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \log\left(\frac{\Delta}{\mu^2}\right) + 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{q^2(1+xy) - m^2(x+y)^2 - 2m^2 - (x+y)(q^2 - 4m^2)}{\Delta} \right] \quad (\text{J.3})$$

$$H(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m(x+y)(x+y-1)}{\Delta} \quad (\text{J.4})$$

以及

$$\Delta_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \log(4\pi), \quad (\text{J.5})$$

$$\Delta = m^2(x+y)^2 - q^2xy + \lambda^2(1-x-y). \quad (\text{J.6})$$

利用在壳重整化条件，在 $q \rightarrow 0$ 极限下，重整化顶点退回到树图形式 $-ie\gamma^\mu$ 。这意味着（单圈）重整化顶点函数 $\bar{\Gamma}^\mu$ 满足

$$\bar{\Gamma}^\mu(p_1, p_2) = 0 \quad \text{for } q = (p_2 - p_1) \rightarrow 0 \quad (\text{J.7})$$

我们可以用 Gordon 恒等式

$$\bar{u}(p_2)(p_2 + p_1)^\mu u(p_1) = \bar{u}(p_2)[2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(p_1) \quad (\text{J.8})$$

重组 (J.2)

$$\bar{u}(p_2)\Gamma^\mu(q)u(p_1) = \bar{u}(p_2)[(G(q^2) + 2mH(q^2))\gamma^\mu - iH(q^2)\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(p_1) \quad (\text{J.9})$$

我们强调 $\Gamma^\mu(p_1, p_2)$ 只依赖于 $q = p_2 - p_1$, 同时根据重整化拉氏量 (I.6), 得到

$$\bar{\Gamma}^\mu(q) = \Gamma^\mu(q) + \delta_1\gamma^\mu \quad (\text{J.10})$$

利用 Pauli-Dirac 形状因子, 重整化顶角写成

$$\bar{u}(p_2)\bar{\Gamma}^\mu(q)u(p_1) = \bar{u}(p_2)\left[F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{i}{2m}F_2(q^2)\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p_1) \quad (\text{J.11})$$

对比得到

$$F_1(q^2) = G(q^2) + 2mH(q^2) + \delta_1 \quad (\text{J.12})$$

$$F_2(q^2) = -2mH(q^2) \quad (\text{J.13})$$

2 $K(s)$ 函数

这里介绍一下 $g-2$ 中色散积分用到的 $K(s)$ 函数的计算, 虽然我们关心的是强作用的贡献, 但是 $K(s)$ 可以微扰逐阶计算, 我们下面给出 $K^{(2)}(s)$ 的详细计算。

根据 (I.11), 对于顶角函数加上自能修正 (灰色泡泡 X), 整个图可以写成

$$\begin{aligned} -ie\bar{u}(p_2)\Gamma_{(X)}^\mu(p_1, p_2)u(p_1) &= (-ie\mu^{\frac{5}{2}})^3 \frac{1}{\pi} \int_{4m_e^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Im } \Pi(s) \\ &\times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 - s} \bar{u}(p_2) \left[\gamma^\alpha \frac{i[(k + p_2) + m_\mu]}{(k + p_2)^2 - m_\mu^2} \gamma^\mu \frac{i[(k + p_1) + m_\mu]}{(k + p_1)^2 - m_\mu^2} \gamma^\beta \right] u(p_1) \end{aligned} \quad (\text{J.14})$$

重整化的顶角可以写作

$$\bar{u}(p_2)\bar{\Gamma}_{(X)}^\mu(q)u(p_1) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_e^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Im } \Pi(s) \bar{u}(p_2) \left[F_1(q^2, s)\gamma^\mu + \frac{i}{2m_\mu}F_2(q^2, s)\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] u(p_1) \quad (\text{J.15})$$

其中 $F_2(q^2) = -2mH(q^2)$, 并且利用 (J.4) 以及变换积分测度, 得到 HVP 的 a_μ 的 LO 贡献 $F_2(0, s)$

$$a_\mu^{(X)} = \frac{1}{\pi} \int_{4m_e^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Im } \Pi(s) K_\mu^{(2)}(s) \quad (\text{J.16})$$

以及核函数

$$K_\mu^{(2)}(s) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (s/m_\mu^2)(1-x)} \quad (\text{J.17})$$

K 投影算符方法

我们定义 ($r_i = \pm 1/2$ 代表自旋)

$$i\Gamma_{\gamma\ell\ell}^\mu(p_1, p_2; r_1, r_2) = \langle \ell^-(p_2, r_2) | j_{\text{em}}^\mu(0) | \ell^-(p_1, r_1) \rangle = i\bar{u}(p_2, r_2) \Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu u(p_1, r_1) \quad (\text{K.1})$$

选择 $P = p_1 + p_2$, $q = p_2 - p_1$ ($P \cdot q$), 那么最一般的在壳协变的分解可以写成

$$\Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu = \gamma^\mu A_1 + \frac{P^\mu}{2m} A_2 + \frac{q^\mu}{2m} A_3 + \gamma^\mu \gamma_5 A_4 + \frac{q^\mu}{2m} \gamma_5 A_5 + i \frac{P^\mu}{2m} \gamma_5 A_6 \quad (\text{K.2})$$

这里我们已经利用到了 Gordon 恒等式

$$\begin{aligned} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu &= -P^\mu + 2m\gamma^\mu, & i\sigma^{\mu\nu} P_\nu &= -q^\mu \\ i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 &= -P^\mu \gamma_5, & i\sigma^{\mu\nu} P_\nu \gamma_5 &= -q^\mu \gamma_5 + 2m\gamma^\mu \gamma_5, \end{aligned} \quad (\text{K.3})$$

同时规范不变性要求 $q_\mu \bar{u}_2 \Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu u_1 = 0$, 从而要求 $A_3 = 0$, $A_5 = \frac{-4m^2}{q^2} A_4$ 。我们保留四个物理的形状因子

$$\bar{u}_2 \Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu u_1 = \bar{u}_2 \left(\gamma^\mu A_1 + \frac{P^\mu}{2m} A_2 + \left(\gamma^\mu - \frac{2mq^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 A_4 + i \frac{P^\mu}{2m} \gamma_5 A_6 \right) u_1. \quad (\text{K.4})$$

再利用 Gordon 分解式, 可以写成四个常用的表示

$$\Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu = \gamma^\mu F_E(q^2) + \left(\gamma^\mu - \frac{2mq^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 F_A + i\sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} F_M(q^2) + \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} \gamma_5 F_D(q^2) \quad (\text{K.5})$$

$F_E = A_1 + A_2$ 是电荷形状因子, 归一化为 $F_E(0) = 1$; $F_A = A_4$ 是所谓的电磁力矩 (anapole), 显式违反 P 守恒, 同时当 $q^2 \rightarrow 0$ 时: $F_A(0) = 0$; 磁形状因子定义为 $F_M = -A_2$, 它导致了著名的反常磁矩 $a_\ell = F_M(0)$; 最后一项是所谓的电偶极矩项 $F_D = A_6$, 它如果存在则会导致 CP 破坏, 一般定义为 $d_\ell = -\frac{F_D(0)}{2m}$ 。

投影算符方法来源是基于 γ 矩阵的正交完备性。对于标量函数 A_i , 我们利用投影算符 $\mathcal{P}_{\mu i}$ 可以得到

$$A_i = \text{Tr} \{ \mathcal{P}_{\mu i} \Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu \} \quad (\text{K.6})$$

首先我们只关心在壳情况, 因此类似 $\delta \Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu = \dots (\not{p}_1 - m) + (\not{p}_2 - m) \dots$ 的项没有贡献 ($\bar{u}_2 \delta \Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu u_1 = 0$)。这样我们可以构造投影矩阵 $\not{p}_{1,2+} m$ 分别乘在投影算符算符的左边和右边, 针对我们定义的形状因子, 最一般的算符形式可以写成

$$\mathcal{P}^\mu = (\not{p}_1 + m) \left(\gamma^\mu c_1 + \frac{P^\mu}{2m} c_2 + \frac{q^\mu}{2m} c_3 + \gamma^\mu \gamma_5 c_4 + \frac{q^\mu}{2m} \gamma_5 c_5 - i \frac{P^\mu}{2m} \gamma_5 c_6 \right) (\not{p}_2 + m) \quad (\text{K.7})$$

满足

$$\text{Tr} \{ \mathcal{P}_\mu \delta \Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu \} = 0 \quad (\text{K.8})$$

为了定出各个系数，我们做投影

$$\text{Tr} \{ \mathcal{P}_\mu \Pi_{\gamma\ell\ell}^\mu \} = \sum_{i=1}^6 g_i A_i \quad (\text{K.9})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 g_i A_i &= A_1 [c_1 (2ds - 4s + 8m^2) + c_2 (-2s + 8m^2)] \\ &\quad + A_2 \left[c_1 (-2s + 8m^2) + c_2 \left(-4s + \frac{s^2}{2m^2} + 8m^2 \right) \right] \\ &\quad + A_3 \left[c_3 \left(2s - \frac{s^2}{2m^2} \right) \right] \\ &\quad + A_4 [c_4 (2ds - 8dm^2 - 4s + 8m^2) + c_5 (2s)] \\ &\quad + A_5 \left[c_4 (-2s) + c_5 \left(\frac{s^2}{2m^2} \right) \right] \\ &\quad + A_6 \left[c_6 \left(2s - \frac{s^2}{2m^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$s = q^2$ 。首先注意到 A_3, A_4 都不和其他振幅混合，因此 c_3 或者 c_6 的处理较为简单。另外 A_1, A_2 与 A_5, A_6 这两对分别不影响，因此只用同时处理一对就好。 \mathcal{P}_i 的原则是选择 c_i ，使得 g_i 以及 $g_j = 0$ ($j \neq i$)。非零的系数列举如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : c_1 &= c_2 \frac{s - 4m^2}{4m^2} & c_2 &= \frac{1}{(d-2)f_1(d)} \frac{2m^2}{s(s-4m^2)} \\ \mathcal{P}_2 : c_2 &= c_1 \frac{(d-2)s + 4m^2}{s - 4m^2} & c_1 &= \frac{1}{(d-2)f_1(d)} \frac{2m^2}{s(s-4m^2)} \\ \mathcal{P}_3 : c_3 &= \frac{1}{f_1(d)} \frac{2m^2}{s(s-4m^2)} \\ \mathcal{P}_4 : c_4 &= c_5 \frac{s}{4m^2} & c_5 &= \frac{1}{(d-2)f_1(d)} \frac{2m^2}{s(s-4m^2)} \\ \mathcal{P}_5 : c_5 &= -c_4 \frac{(d-2)(s-4m^2) - 4m^2}{s} & c_4 &= \frac{1}{(d-2)f_1(d)} \frac{2m^2}{s(s-4m^2)} \\ \mathcal{P}_6 : c_6 &= -i \frac{1}{f_1(d)} \frac{2m^2}{s(s-4m^2)} \end{aligned}$$

我们这里定义 $f_1(d) = f(d)/f(d=4)$, $f(d) = 2^{(d/2)}$, 一般来说, 维数正规化下可以直接让 $f(d) = 4$ 不改变物理结果。

所有的投影算符满足

$$\mathcal{P}_i^\mu = (\not{p}_1 + m) \Lambda_i^\mu(p_2, p_1) (\not{p}_2 + m)$$

例如，我们关心的 A_2 的投影算符有

$$\Lambda_2^\mu(p_2, p_1) = \frac{2m^2}{(d-2)s(s-4m^2)} \left(\gamma^\mu + \frac{(d-2)s + 4m^2}{(s-4m^2)} \frac{P^\mu}{2m} \right).$$

A_i 在单圈下由下面积分给出

$$A_i = e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{f_i(k)}{\left((p_2 - k)^2 - m^2\right) \left((p_1 - k)^2 - m^2\right) k^2} \quad (\text{K.10})$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(k) &= (4m^2 - 2s) - 4k \cdot P + (d-4)k^2 + \frac{2(k \cdot q)^2}{s} - \frac{2(k \cdot P)^2}{(s-4m^2)}, \\ f_2(k) &= -\frac{8m^2}{s-4m^2} \left(k \cdot P + k^2 + (d-1) \frac{(k \cdot P)^2}{(s-4m^2)} - \frac{(k \cdot q)^2}{s} \right), \\ f_3(k) &= \frac{8m^2}{s} k \cdot q \left(1 - (d-2) \frac{k \cdot P}{(s-4m^2)} \right). \end{aligned} \quad (\text{K.11})$$

同时方便起见定义传播子分母分别为 (1) $\equiv (p_1 - k)^2 - m^2$, (2) $\equiv (p_2 - k)^2 - m^2$, (3) $\equiv k^2$ 。那么

$$\begin{aligned} f_1(k) &= (4m^2 - 2s) + (d-8)(3) + 2(1) + 2(2) \\ &\quad + \frac{(k \cdot q)}{s} [(1) - (2)] - \frac{(k \cdot P)}{(s-4m^2)} [2(3) - (1) - (2)] \\ f_2(k) &= -\frac{4m^2}{s-4m^2} (4(3) - (1) - (2) \\ &\quad + (d-1) \frac{(k \cdot P)}{(s-4m^2)} [2(3) - (1) - (2)] - \frac{(k \cdot q)}{s} [(1) - (2)]) \\ f_3(k) &= \frac{4m^2}{s} [(1) - (2)] \left(1 - (d-2) \frac{k \cdot P}{(s-4m^2)} \right) \end{aligned} \quad (\text{K.12})$$

方便起见我们利用积分缩写符号 $\int_k \dots = \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \dots$, 按照标准定义给出各类函数: $\int_k \frac{1}{(1)(2)(3)} = C_0((p_2 - p_1)^2, p_1^2, p_2^2; m_\gamma^2, m^2, m^2)$, $\int_k \frac{1}{(1)(2)} = B_0(s; m^2, m^2)$, $\int_k \frac{1}{(1)(3)} = \int_k \frac{1}{(2)(3)} = B_0(m^2; 0, m^2)$, $\int_k \frac{k^\mu}{(1)(3)} = -p_1^\mu \frac{A_0(m^2)}{2m^2}$, $\int_k \frac{k^\mu}{(2)(3)} = -p_2^\mu \frac{A_0(m^2)}{2m^2}$, $\int_k \frac{k^\mu}{(1)(2)} = 0$, $\int_k \frac{1}{(1)} = \int_k \frac{1}{(2)} = A_0(m^2)$ 以及 $\int_k \frac{1}{(3)} = 0$, 利用这些关系容易写出

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ (4m^2 - 2s) C_0((p_2 - p_1)^2, p_1^2, p_2^2; m_\gamma^2, m^2, m^2) \right. \\ &\quad \left. - 3B_0(s; m^2, m^2) + 4B_0(m^2; 0, m^2) - 2 \right\} \\ A_2 &= \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{-4m^2}{s-4m^2} (B_0(s; m^2, m^2) - B_0(m^2; 0, m^2)) \right\} \\ A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{K.13})$$

我们这里目的是为了计算 μ 子的反常磁矩 $a_\mu = F_M(0) = -A_2(0)$, 我们只需要考虑经典极限 $s = q^2 \rightarrow 0$

$$a_\mu = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) \Lambda_2^\mu(p_2, p_1) (\not{p}_2 + m) \Pi_\mu(P, q) \right\} \quad (\text{K.14})$$

我们注意到投影算符 $\Lambda_2^\mu(p_2, p_1)$ 有一个 $1/q^2$ 的整体因子，然后我们最终又要让整体取零动量转移极限，那么可以想象，最后有非零贡献的 $\Pi_\mu(P, q)$ 的 q^2 依赖形式一定是少数的。因此我们只需要 $\Pi_\mu(P, q)$ 的前三阶泰勒展开形式 ($q^2 = 0$ 附近)

$$\Pi_\mu(P, q) \simeq \Pi_\mu(P, 0) + q^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \Pi_\mu(P, q) \Big|_{q=0} + q^\nu q^\gamma \frac{\partial}{\partial q^\nu} \frac{\partial}{\partial q^\gamma} \Big|_{q=0} \equiv V_\mu(p) + q^\nu T_{\nu\mu}(p) + q^\nu q^\gamma K_{\nu\gamma\mu} \quad (\text{K.15})$$

当 $q = 0$ 时我们定义 $p = P/2 = p_1$ 。其他 q 的依赖来自于 Tr 中的 $p_2 = (P+q)/2, p_1 = (P-q)/2$ 。所有非零的 q 的依赖只正比于 q^μ 和 $q^\mu q^\nu$, $q^\mu q^\nu$ 二次项来自于 $q^\nu q^\gamma K_{\nu\gamma\mu}$ 中的贡献可以计算都严格为零 (Tr 中其他部分除了提供一个 $1/q^2$ 外都不提供 q 的依赖)。我们想要的 a_μ 只是一个有限的数，因此不存在任何动量依赖也不存在收敛性问题，所以我们可以以此对整个表达式在取极限之前，做对剩余的 q 依赖的空间平均，因为 P 和 q 是两个独立且正交的矢量，因此可以对 P 方向做平均。对于线性项

$$\overline{q^\mu} \equiv \int \frac{d\Omega(P, q)}{4\pi} q^\mu = 0 \quad (\text{K.16})$$

因为积分函数是个奇函数。但是对于二次项

$$\overline{q^\mu q^\nu} \equiv \int \frac{d\Omega(P, q)}{4\pi} q^\mu q^\nu = \alpha g^{\mu\nu} + \beta \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \quad (\text{K.17})$$

系数 α, β 待定。利用 P_μ 与之收缩，得到一个约束

$$\alpha = -\beta \quad (\text{K.18})$$

与 $g_{\mu\nu}$ 收缩

$$\int \frac{d\Omega(P, q)}{4\pi} q^2 = q^2 \int \frac{d\Omega(P, q)}{4\pi} = q^2 = \alpha d + \beta = (d-1)\alpha \quad (\text{K.19})$$

因此

$$\alpha = \frac{q^2}{(d-1)} \quad (\text{K.20})$$

综合上述可以得到

$$\overline{q^\mu q^\nu} = \frac{q^2}{(d-1)} \left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \right). \quad (\text{K.21})$$

利用上式可以简化表达式，最后

$$\begin{aligned} a_\mu &= \frac{1}{8(d-2)(d-1)m} \text{Tr} \{ (\not{p} + m) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\not{p} + m) T_{\nu\mu}(p) \} \\ &\quad + \frac{1}{4(d-1)m^2} \text{Tr} \{ [m^2 \gamma^\mu - (d-1)m p^\mu - d \not{p} p^\mu] V_\mu(p) \} \Big|_{p^2=m^2} \end{aligned} \quad (\text{K.22})$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_\mu(P, q) &= \text{Diagram with top vertex } \overset{\mu}{\not{q}} \text{ and bottom vertices } p+q/2 \text{ and } p-q/2; \\
 V_\mu(p) &= \text{Diagram with top vertex } \overset{\mu}{\not{q}} \text{ and bottom vertices } p \text{ and } p; \\
 T_{\nu\mu}(p) &= \text{Diagram with top vertex } \overset{\mu}{\not{q}} \text{ and bottom vertices } p \text{ and } p - \text{Diagram with top vertex } \overset{\mu}{\not{q}} \text{ and bottom vertices } p \text{ and } p
 \end{aligned}$$

图 31: $T_{\mu\nu}$ 是一个零动量转移的反对称化导数构成的张量, 黑点构成的线代表一个光子或者色散积分中讨论到的“重”光子

问题约化为了计算在壳自能类型的图

在 $T_{\mu\nu}$ 中额外的顶角是通过对内部传播子求偏导得到的

$$\frac{\partial}{\partial q^\nu} \frac{i}{\not{p} - \not{k} \mp \not{q}/2 - m} \Big|_{q=0} = \mp \frac{1}{2} \frac{i}{\not{k} - m} (-i\gamma_\nu) \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \quad (\text{K.23})$$

这里费米传播子我们写成类似标量传播子形式

$$\frac{i}{\not{p}_i - \not{k} - m} = \frac{i(\not{p}_i - \not{k} + m)}{(p_i - k)^2 - m^2} \quad (\text{K.24})$$

这样只有分子的展开才会贡献给 $T_{\mu\nu}$, 因为两个标量传播子展开

$$\frac{1}{(p_2 - k)^2 - m^2} \frac{1}{(p_1 - k)^2 - m^2} = \frac{1}{((p - k)^2 - m^2)^2} + \mathcal{O}(q^2) \quad (\text{K.25})$$

按照

$$i\Gamma^\mu(p_2, p_1) = -i^6 e^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} D_{\rho\sigma}(k) \frac{\gamma^\rho(\not{p}_2 - \not{k} + m)}{((p_2 - k)^2 - m^2)} \frac{\gamma^\mu(\not{p}_1 - \not{k} + m)}{((p_1 - k)^2 - m^2)} \gamma^\sigma \quad (\text{K.26})$$

光子传播子写作 (R_ξ 规范下并且带有一个有限质量)

$$D_{\rho\sigma}(k) = - \left(g_{\rho\sigma} - (1 - \xi) \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2 - \xi m_\gamma^2} \right) \frac{1}{k^2 - m_\gamma^2 + i\varepsilon} \quad (\text{K.27})$$

作为例子, 对于 QED 单圈图贡献我们要计算 Tr , 其中要用到 $V_\mu, T_{\mu\nu}$ 的张量结构为 (对于动量 k 的积分可以拿到 Tr 外面)

$$\begin{aligned}
 V_\mu &\sim v_\mu = \gamma^\rho(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\rho \\
 T_{\nu\mu} &\sim t_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\gamma^\rho(\gamma_\nu\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + m) - (\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\mu\gamma_\nu)\gamma_\rho
 \end{aligned}$$

整个 Tr (除了积分外) 得到

$$2k^2 \left(\frac{1}{d-1} - 1 \right) - 4k \cdot p + \frac{(2k \cdot p)^2}{2m^2} \left(d - 1 - \frac{1}{d-1} \right) \quad (\text{K.28})$$

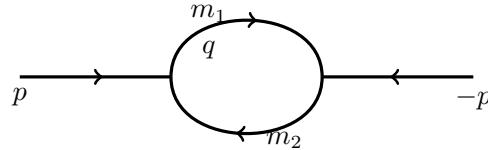
再对 k 做积分, 得到结果

$$a_\mu = \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{2}{3} \{ B_0(m^2; 0, m^2) - B_0(0; m^2, m^2) + 1 \} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (\text{K.29})$$

一个观察是 (K.13) 与这里的结果结构是不一样的 (最后结果完全一样), 这是因为两次计算取极限和积分的操作顺序不同。在维数正规化下, 尤其要注意式 (K.22) 中时空维数 d , 我们在积分之前都应该保持 d 是任意的, 最后再取为 4, 否则最后结果会差一个常数项, 这当然是错误的。

L 圈函数的色散表示（谱表示）

1 标量两点函数



标量两点函数定义为

$$\begin{aligned} B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) &= \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\nu^{D-4}}{[q^2 - m_1^2][(q-p)^2 - m_2^2]}, \\ &\stackrel{D=4}{=} \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - m_1^2][(q-p)^2 - m_2^2]}. \end{aligned} \quad (\text{L.1})$$

下面我们只计算虚部（没有 UV 发散）因此直接取 $D = 4$ 即可。我们定义 $s \equiv p^2$, 同时在 p 的质心系中做计算。两点函数有所谓的正常阈 $s = (m_1 + m_2)^2$, 根据 Cutkosky's 规则 [115], 不连续度为

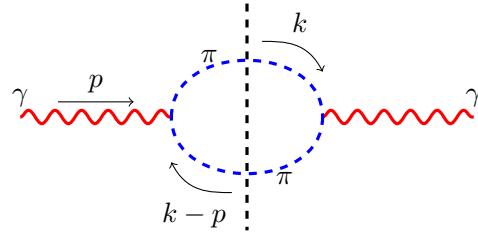
$$\begin{aligned} B_0(s + i\epsilon) - B_0(s - i\epsilon) &= \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (-2\pi i \delta(q^2 - m_1^2) \theta(q^0)) (-2\pi i \delta((q-p)^2 - m_2^2) \theta(-q^0 + p^0)) \\ &= 2i \int \frac{d^3 q}{|q^0|} \delta((q-p)^2 - m_2^2) \theta(-q^0 + p^0) \\ &= 2i \int \frac{d^3 q}{\sqrt{m_1^2 + \vec{q}^2}} \delta\left(m_1^2 + s - m_2^2 - 2\sqrt{m_1^2 + \vec{q}^2} \sqrt{s}\right) \theta\left(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + \vec{q}^2}\right) \\ &= i \int \frac{d^3 q}{|\vec{q}| \sqrt{s}} \delta\left(|\vec{q}| - \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}}\right) \theta\left(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + \vec{q}^2}\right) \\ &= 2\pi i \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{s} \equiv 2i \Delta_s B_0(s) \end{aligned} \quad (\text{L.2})$$

这里有一点值得说明一下，其一是 Cutkosky's 规则的写法，我们知道计算一个图的不连续度也就是虚部，图像上就是将中间的传播子切断然后使得中间态在壳，物理上来说就是使得这个过程能够发生（四动量守恒），具体到我们这里，选定入射方向为正向，切割粒子 m_1 有一个 $\theta(q^0)$ ，但是切割 m_2 按照约定 (m_2 动量为 $p - q$) 得到的阶跃函数应为 $\theta(-q^0 + p^0)$ 。

B_0 满足一个一次减除的色散关系

$$B_0(s) - B_0(0) = \frac{s}{\pi} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} ds' \frac{\Delta_s B_0(s')}{(s' - s - i\epsilon) s'} \quad (\text{L.3})$$

下面我们给出这一个应用的例子，也就是计算光子自能图（中间态是两 π ）的吸收部分。



π 的矢量（电磁）形状因子（类时）定义为

$$\langle \pi^+ (p_+) \pi^- (p_-) | V_\mu(0) | 0 \rangle = (p_+ - p_-)_\mu F_\pi^V(s), \quad (\text{L.4})$$

$s = (p_+ + p_-)^2$ 。因此如图有 ($s = p^2$)

$$\begin{aligned} \text{Im}\Pi(s) &\propto \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (p - k - k)^2 |F_\pi^V(s)|^2 \delta(k^2 - m_\pi^2) \theta(k^0) \delta((k - p)^2 - m_\pi^2) \theta(p^0 - k^0) \\ &\propto |F_\pi^V(s)|^2 (s - 4m_\pi^2) \frac{\lambda^{1/2}(s, m_\pi^2, m_\pi^2)}{s} \\ &\propto |F_\pi^V(s)|^2 \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{3/2} \end{aligned} \quad (\text{L.5})$$

其中利用到在壳条件 $k^2 = m_\pi^2, p^2 = s, (k - p)^2 = m_\pi^2$, 那么就有 $(p - 2k)^2 = 4m_\pi^2 - s$ 与 k 无关, 可以拿到积分外面去, 剩下的积分就是我们计算的标量两点函数 (除掉一个归一化因子)。

M 勒让德函数的一个定理证明

这里给出一个文献 [116] 中的定理的证明，定理表述如下：

Theorem M.1

$$\frac{P'_\ell(z)}{P'_{\ell+1}(z)} < \frac{P'_{\ell+1}(z)}{P'_{\ell+2}(z)} < \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{P'_\ell(z)}{P'_{\ell+1}(z)} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \quad \text{for } z > 1; \quad (\text{M.1})$$

这里主要是要证明 $P'_\ell(z) / P'_{\ell+1}(z)$ 在 ℓ 增加的时候的单调性，各类特殊函数的书上均没有这个定理的证明，并且标准教材很少讨论 $z > 1$ 时候 $P_\ell(z)$ 的性质，这里我们利用递推关系和数学归纳法来给出这个证明。

首先先给出一个引理：如果 $z > 1$ ，有 $P_{\ell+1}(z) > P_\ell(z)$ 。我们用数学归纳法来证明，首先假定 $P_{\ell_1}(z) > P_{\ell-1}(z)$ ，然后证明 $P_{\ell+1}(z) > P_\ell(z)$ 。因为当 $\ell = 0$ 时， $P_0(z) = 1, P(z) = z$ 。利用 Rodrigues 关系

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad (\text{M.2})$$

当 $z > 1$ 时，明显 $P_\ell(z) > 0$ 对于任意 ℓ 都成立。最后利用递推关系 [117]（以下递推关系都可以见 NIST 数据库）

$$(\ell + 1)P_{\ell+1}(z) = (2\ell + 1)zP_\ell(z) - \ell P_{\ell-1}(z) \quad (\text{M.3})$$

有

$$\begin{aligned} \frac{P_{\ell+1}}{P_\ell} &= \frac{(2\ell + 1)z}{\ell + 1} - \frac{\ell}{\ell + 1} \frac{P_{\ell-1}}{P_\ell} \\ &> \frac{(2\ell + 1)}{\ell + 1} - \frac{\ell}{\ell + 1} = 1 \end{aligned}$$

> 那一行利用到了 $z > 1$ 和 $P_{\ell-1}/P_\ell < 1$ 。因此对于任意 ℓ ，都有 $P_{\ell+1} > P_\ell$ ，引理证毕。

再利用一个递推关系：

$$\frac{z^2 - 1}{\ell} \frac{d}{dz} P_\ell(z) = zP_\ell(z) - P_{\ell-1}(z) \quad (\text{M.4})$$

可以得到

$$\frac{P'_\ell(z)}{P'_{\ell+1}(z)} = \frac{\ell}{\ell + 1} \frac{2\ell + 3}{2\ell + 1} \times \frac{(\ell + 1)(P_{\ell+1}(z) - P_{\ell-1}(z))}{(\ell + 2)(P_{\ell+1}(z) - P_\ell(z))} \quad (\text{M.5})$$

假定 $\frac{P'_\ell(z)}{P'_{\ell+1}(z)} < \frac{P'_{\ell+1}(z)}{P'_{\ell+2}(z)}$ ，那么根据 (M.5)，得到一个不等式

$$\begin{aligned} &(2\ell + 5)(2\ell + 1)(\ell + 2)^2(\ell + 1)^2 (P_{\ell+2}(z) - P_\ell(z))^2 \\ &- (2\ell + 3)^2(\ell + 3)(\ell + 2)(\ell + 1) (P_{\ell+1}(z) - P_{\ell-1}(z))^2 > 0 \end{aligned} \quad (\text{M.6})$$

容易得到 ($\ell > 0$)

$$(2\ell + 5)(2\ell + 1)(\ell + 2)^2(\ell + 1)^2 - (2\ell + 3)^2(\ell + 3)(\ell + 2)(\ell + 1) > 0 \quad (\text{M.7})$$

那么如果能够有

$$(P_{\ell+2}(z) - P_\ell(z))^2 - (P_{\ell+1}(z) - P_{\ell-1}(z))^2 > 0 \quad (\text{M.8})$$

这个定理就能成立了，分析一下这个不等式的结构

$$\begin{aligned} & (P_{\ell+2}(z) - P_\ell(z))^2 - (P_{\ell+1}(z) - P_{\ell-1}(z))^2 \\ = & P_{\ell+2}(z)^2 + P_\ell(z)^2 - 2P_{\ell+2}(z)P_\ell(z) - P_{\ell+1}(z)^2 - P_{\ell-1}(z)^2 + 2P_{\ell+1}(z)P_{\ell-1}(z) > 0 \end{aligned} \quad (\text{M.9})$$

因为 $P_{\ell+2}(z)^2 > P_{\ell+1}(z)^2$, $P_\ell(z)^2 > P_{\ell-1}(z)^2$, 因此只需证明 $P_{\ell+1}(z)P_{\ell-1}(z) > P_{\ell+2}(z)P_\ell(z)$ 成立即可。下面利用数学归纳法证明，首先假设 $P_{k+1}(z)P_{k-1}(z) > P_{k+2}(z)P_k(z)$ 成立，当 $k = 1$ 时， $P_2(z)P_0(z) - P_1(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 1)$, 当 $z > 1$ 时恒成立，然后对于 $k \rightarrow k + 1$ 情况 ($P_k = P_k(z)$)

$$\begin{aligned} & P_{k+2}P_k - P_{k+1}^2 \\ = & \frac{(2k+3)zP_{k+1} - (k+1)P_k}{k+3}P_k - \frac{(2k+1)zP_k - kP_{k-1}}{k+1}P_{k+1} \\ > & \frac{(2k+3)zP_{k+1}P_k - (k+1)P_k^2}{k+3} - \frac{(2k+1)zP_{k+1}P_k - kP_k^2}{k+1} \\ = & \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) (zP_{k+1}P_k - P_k^2) > 0 \end{aligned} \quad (\text{M.10})$$

因此对于 $k + 1$, 关系仍然成立, 综上所述, (M.1) 第一个不等号成立。 $\ell \rightarrow \infty$ 极限值可以利用递推关系 (M.4) 先都化简成 P_ℓ (不包括任何导数项), 然后利用一个渐近展开关系 [117],

$$P_\ell \left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell e}} \frac{(1+e)^{\frac{\ell+1}{2}}}{(1-e)^{\frac{\ell}{2}}} + \mathcal{O}(\ell^{-1}) \quad (\text{M.11})$$

简单代数计算得到

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{P'_\ell(z)}{P'_{\ell+1}(z)} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \quad (\text{M.12})$$

N 交叉对称的色散关系

交叉对称的色散关系最早是 Auberson 和 Khuri 于 1972 年建立起来的 [118]。最近这一方法又有了新进展，在 [119] 中推广了交叉对称色散关系，并且基于此得出了一些 Positivity bounds，以及给出了一般化有限能量下的 Froissart bound，[120] 中，还将这些关系应用到了共形场论 (CFT) 中。下面基于 [118, 119]，简要介绍一下交叉对称色散关系表示。

首先这里考虑的是等质量的 $2 \rightarrow 2$ 散射，质量都是 m ，定义 Mandelstam 变量为 s, t, u ，以及一组新的参量 $s_1 = s - \mu/3, s_2 = t - \mu/3, s_3 = u - \mu/3 = -s_1 - s_2, \mu = 4m^2$ ，这样我们可以参数化一个三次超曲面， $[s_1(z) - a][s_2(z) - a][s_3(z) - a] = -a^3$ ， a 是一个实参数，其中的 s_i 都可以对称地参数化为

$$s_k = a - \frac{a(z - z_k)^3}{z^3 - 1}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{N.1})$$

其中 z_k 是 1 的三个立方根，我们约定

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \exp \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad z_3 = \exp \frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \quad (\text{N.2})$$

可以验证这样的参数化确实满足超曲面方程。同时限制 $-\mu/3 \leq a < 2\mu/3$ ，并且在 [118] 中证明了振幅在 $-6.71\mu < a < 2\mu/3$ 都是解析的。根据 (N.1)，我们可以直接计算得到 $a = (s_1 s_2 s_3) / (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1)$ 是一个三个道都对称的参数。基于这个观察，振幅 $\mathcal{M}(s_1, s_2)$ ，可以写作关于 (z, a) 的解析函数， $\bar{\mathcal{M}}(z, a) = \mathcal{M}[s_1(z), s_2(z)]$ ，下面假定 $\mathcal{M}[s_1(z), s_2(z)]$ 在 $s_k \geq 2\mu/3, k = 1, 2, 3$ 时有物理割线，那么这些实轴上的 (s_1, s_2 平面) 割线会对称地被映射到 z 平面上单位圆的部分弧，下面来详细解释这个结果。

在 z 平面上三个道的物理割线也可以分成三块， $V(a) = V_1(a) \cup V_2(a) \cup V_3(a)$ ，这些区域完全被参数化 (N.1) 决定了。例如，我们考虑 $s_1 \geq \frac{2\mu}{3}$ ($s \geq \mu$)，首先要求 $\text{Im}(s_1) = 0$ 。因为只考虑 s 道，那么 $s_1 = \frac{3a}{z+1/z+1}$ ，可以看到

$$\text{Im}(s_1) = 0 \text{ if } a = 0 \text{ or } |z| = 1 \text{ or } \arg(z) = \pi$$

也就是三个条件满足一个即可。作为例子，我们来看一下条件 $|z| = 1$ ，首先考虑参数 a 区间 $-\frac{2\mu}{9} < a < 0$ ，限制条件来源于 $s_1 = \frac{3a}{z+1/z+1} \geq \frac{2\mu}{3}$ ，令 $\arg(z) = \alpha$ ，那么有

$$\frac{3a}{z+1/z+1} = \frac{3a}{1+2\cos\alpha} \geq \frac{2\mu}{3} \quad (\text{N.3})$$

考虑到 $-\frac{2\mu}{9} < a < 0$ ，得到

$$\cos\alpha \geq \frac{9a - 2\mu}{4\mu} \quad (\text{N.4})$$

也即（考虑 $\arg(z) > 0$ ）

$$\frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \phi_0(a) \quad (\text{N.5})$$

这里注意到一个特点，那就是我们定义的辐角范围为 $(-\pi, \pi]$ ，且从上面可以看到限制区域对于 z 是对称的。 $\phi_0(a)$ 的定义统一见下文。完全类似，对于 $0 < a < \frac{2\mu}{3}$,

$$\phi_0(a) \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3} \quad (\text{N.6})$$

另一个条件是 $\arg(z) = \pi$ ，此时 $z = -|z| < 0$ ，此时只有同时有 $a \leq -\frac{2\mu}{9}$ 时才能满足。这时不等式变成

$$\frac{-3a|z|}{|z|^2 - |z| + 1} \geq \frac{2\mu}{3} \quad (\text{N.7})$$

解得

$$\rho_-(a) \leq |z| \leq \rho_+(a) \quad (\text{N.8})$$

其中，

$$\phi_0(a) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\left[\left(\frac{2\mu}{3} - a \right) \left(a + \frac{2\mu}{9} \right) \right]^{1/2}}{a - \frac{2\mu}{9}} \right\}, \quad 0 < \phi_0 \leq \pi \quad (\text{N.9})$$

$$\rho_{\pm}(a) = \frac{9}{4\mu} \left\{ \left(\frac{2\mu}{9} - a \right) \pm \left[\left(\frac{2\mu}{3} - a \right) \left(-a - \frac{2\mu}{9} \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (\text{N.10})$$

其余区域完全类似（考虑到对称性），最后将所有区域整理一下：

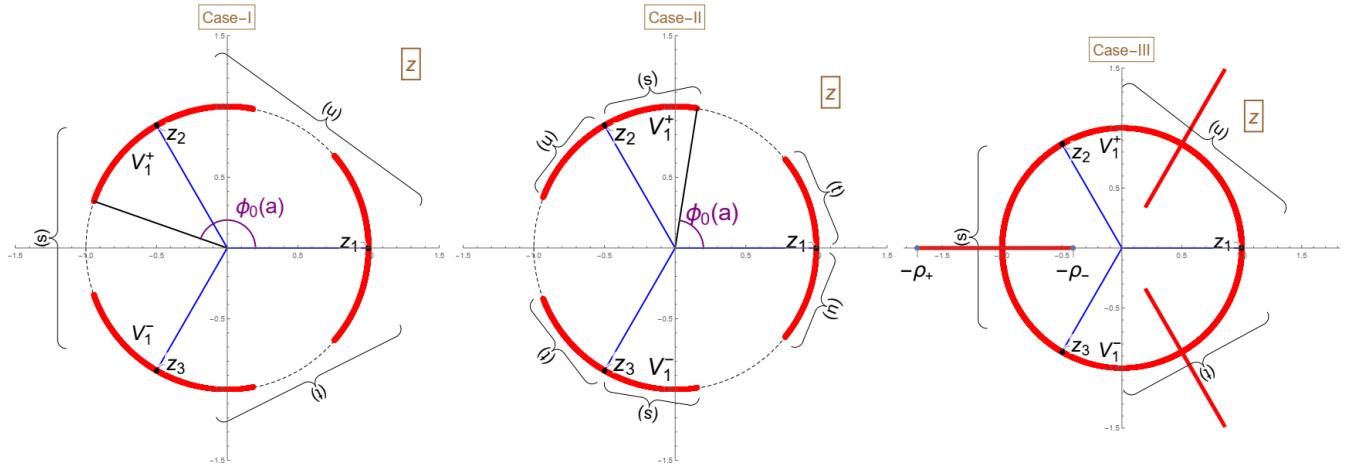
$$V_1(a) = \begin{cases} \{z; |z| = 1, \frac{2}{3}\pi \leq |\arg z| \leq \phi_0(a)\} & \text{if } -\frac{2\mu}{9} < a < 0 \\ \{z; |z| = 1, \phi_0(a) \leq |\arg z| \leq \frac{2}{3}\pi\} & \text{if } 0 < a < \frac{2\mu}{3} \\ \{z; |z| = 1, \frac{2}{3}\pi \leq |\arg z| \leq \pi\} \cup \{z; \rho_-(a) \leq |z| \leq \rho_+(a), \arg z = \pi\} & \text{if } a \leq -\frac{2\mu}{9} \end{cases} \quad (\text{I}), (\text{II}), (\text{III})$$

$$V_2(a) = e^{2i\pi/3} V_1(a), \quad V_3(a) = e^{4i\pi/3} V_1(a), \quad (\text{N.11})$$

图示如下

基于此可以写出一个固定 a 关于 z 的色散关系，但是一般来说我们喜欢在 s_1, s_2 平面讨论物理，这样我们还需要一些变换操作将 (s_1, s_2) 和 (z, a) 联系起来。还是简单起见，我们考虑 s 道（利用对称性，其他道结论类似）的不连续度

$$\mathcal{A}_1(s_1, s_2) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i} [\mathcal{M}(s_1 + i\epsilon, s_2) - \mathcal{M}(s_1 - i\epsilon, s_2)], \quad s \geq 2\mu/3 \quad (\text{N.12})$$

图 32: $V(a)$ 的所有情况, 假定 $\mu = 4$ 。

类似地, z 平面上关于 $V(a)$ 的不连续的可以定义为

$$\overline{\mathcal{A}}(z, a) \equiv \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i} [\overline{\mathcal{M}}((1 + \epsilon)z, a) - \overline{\mathcal{M}}((1 - \epsilon)z, a)] & \text{for } |z| = 1 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i} [\mathcal{M}(ze^{-i\epsilon}, a) - \overline{\mathcal{M}}(ze^{i\epsilon}, a)] & \text{for } \arg z = \pi \left(\bmod \frac{2}{3}\pi \right) \end{cases} \quad (\text{N.13})$$

由实解析性条件 $\mathcal{M}(s, t) = \mathcal{M}^*(s^*, t^*)$, 可以得到 (定义 $\overline{\mathcal{M}}(z, a)$ 以区别于 $\mathcal{M}(s_1, s_2)$), $\overline{\mathcal{M}}(z, a) = \overline{\mathcal{M}}^*(1/z^*, a)$, 这个来源于 (N.1)。利用这个关系进一步得到

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}}(z, a) &= \overline{\mathcal{A}}^*(z, a) && \text{for } |z| = 1 \\ \overline{\mathcal{A}}(z, a) &= -\overline{\mathcal{A}}^*\left(\frac{1}{z^*}, a\right) && \text{for } \arg z = \pi \left(\bmod \frac{2}{3}\pi \right). \end{aligned} \quad (\text{N.14})$$

这里注意我们 $\overline{\mathcal{A}}^*$ 的定义为 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i} [\overline{\mathcal{M}}^*(\dots) - \overline{\mathcal{M}}^*(\dots)]$ 。为了联系 $\overline{\mathcal{A}}(z, a)$ 和 $\mathcal{A}(s_1, s_2)$, 我们首先注意到 $V(a)$ 可以划分为两个区域, 其中 $\text{Im}(s_1)$ 的符号相反, 也就是 (这里 $k = 1, 2, 3$, 我们用 $k = 1$ 举例, 但是对于其他的也成立)

$$V_k(a) = V_k^+(a) \cup V_k^-(a), \quad \text{with} \quad \text{Im}(z/z_k) \quad \text{or} \quad (|z| - 1) \begin{cases} \geq 0 \text{ in } V_k^+(a) \\ \leq 0 \text{ in } V_k^-(a) \end{cases} \quad (\text{N.15})$$

直接计算

$$\operatorname{Im}(s_1) = -3\epsilon a \begin{cases} \frac{2\sin\phi}{(1+2\cos\phi)^2}, & z = (1+\epsilon)e^{i\phi} \\ \frac{\rho(\rho+1)^3}{(\rho^3+1)^2}(\rho-1), & z = -\rho e^{-i\epsilon} \end{cases}. \quad (\text{N.16})$$

如果 $V_k^\pm(a)$ 代表 $\operatorname{Im}(s_k)$ 符号为正（负），那么利用上式，有

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}}(z, a) &= \begin{cases} \mathcal{A}_k(s_1, s_2), & z \in V_k^+(a) \\ -\mathcal{A}_k(s_1, s_2), & z \in V_k^-(a) \end{cases} \quad a < 0 \text{ (cases I and III)} \\ \overline{\mathcal{A}}(z, a) &= \begin{cases} -\mathcal{A}_k(s_1, s_2), & z \in V_k^+(a) \\ \mathcal{A}_k(s_1, s_2), & z \in V_k^-(a) \end{cases} \quad a > 0 \text{ (case II)} \end{aligned} \quad (\text{N.17})$$

根据 Froissart-Martin bound，振幅最多需要二次减除 [121]，

$$\mathcal{M}(s_1, s_2) = o(s_1^2) \quad \text{for } |s_1| \rightarrow \infty, \quad s_2 = \text{fixed}, \quad (s_1, s_2) \in \mathcal{D} \quad (\text{N.18})$$

这里 \mathcal{D} 表示 Martin domains [121]。对于 $\overline{\mathcal{M}}(z, a)$ 我们可以找到一个类似的行为，当 $z \rightarrow z_k$ 时，注意到 $s_k \rightarrow a$ ，此时 $s_j \simeq \text{constant} \times \frac{a}{z-z_k}$ ($j \neq k$)。因此，我们也有类似渐进行为

$$\overline{\mathcal{M}}(z, a) = o\left(\frac{1}{(z-z_k)^2}\right), \quad \text{as } z \rightarrow z_k, \quad a \text{ fixed} \quad (\text{N.19})$$

将振幅做 Taylor 展开，(收敛域为 $|z| < \rho_-(a)$ 或 $|z| < 1$)

$$\overline{\mathcal{M}}(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) z^n. \quad (\text{N.20})$$

有一个关系 $\overline{\mathcal{M}}(0, a) = \mathcal{M}(s_1 = 0, s_2 = 0) = f_0 = \overline{\mathcal{M}}(\infty, a) = \overline{\mathcal{M}}^*(0, a)$ ，可以看到， f_0 独立于 a 且是一个实数。我们能够写出一个色散关系（这里将 $\overline{\mathcal{M}}(z', a)$ 乘以 $z^3 - 1$ 是为了让围道积分在 $z = z_k$ 的圆弧上收敛，这相当于用 s, t 写色散关系时候的二次减除）

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{I}} dz' \frac{z'^3 - 1}{z'^3(z' - z)} \overline{\mathcal{M}}(z', a) = \frac{z^3 - 1}{z^3} \overline{\mathcal{M}}(z, a) + \frac{f_0}{z^3} + \frac{f_1(a)}{z^2} + \frac{f_2(a)}{z}, \quad (\text{N.21})$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{E}} dz' \frac{z'^3 - 1}{z'^3(z' - z)} \overline{\mathcal{M}}(z', a) = \overline{\mathcal{M}}(\infty, a) = f_0 \quad (\text{N.22})$$

这里 \mathcal{I}, \mathcal{E} 分别代表 $V(a)$ 的内部和外部区域 ($z \notin V(a), |z| < 1$)。对于内部 \mathcal{I} 的积分，在 $z = 0$ 的留数给出 $f_0, f_1, f_2, z = z'$ 的留数给出 $\frac{z^3 - 1}{z^3} \overline{\mathcal{M}}(z, a)$ 。将这两个积分做差，就能得到 z 平面关于区域 $V(a)$ 的色散关系

$$\overline{\mathcal{M}}(z, a) = f_0 + f_1(a) \frac{z}{1 - z^3} + f_2(a) \frac{z^2}{1 - z^3} + \frac{z^3}{(1 - z^3) \pi} \int_{V(a)} dz' \frac{z'^3 - 1}{z'^3(z' - z)} \overline{\mathcal{A}}(z', a) \quad (\text{N.23})$$

如果我们考虑一个三个道交叉对称的情况（比如 $\pi_0 \pi_0$ 散射）。此时 $\overline{\mathcal{M}}(z, a)$ 是 z^3 的函数（我们可以定义 $x = (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = \frac{27a^2 z^3}{(z^3 - 1)^2}$, $y = s_1 s_2 s_3 = \frac{27a^3 z^3}{(z^3 - 1)^2}$ 两个完全对称的量，振幅完全依赖于这两个量的任意代数组合，因此总可以写成宗量为 z^3 的函数），

$$\overline{\mathcal{M}}_0(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(a) z^{3n} \quad (\text{N.24})$$

此时色散关系简化为

$$\overline{\mathcal{M}}_0(z, a) = \alpha_0 + \frac{z^3}{(1 - z^3) \pi} \int_{V(a)} dz' \frac{z'^3 - 1}{z'^3(z' - z)} \overline{\mathcal{A}}(z', a). \quad (\text{N.25})$$

对比上面两式，可以发现

$$\alpha_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_{V(a)} dz' \overline{\mathcal{A}}(z', a) \frac{1 - z'^{-3n}}{z'}, \quad n \geq 1 \quad (\text{N.26})$$

将 (N.26) 带入 (N.24) 再对 n 求和，最终得到

$$\overline{\mathcal{M}}_0(z, a) = \alpha_0 + \frac{z^3}{(1 - z^3) \pi} \int_{V(a)} dz' \frac{z'^3 - 1}{z'(z'^3 - z^3)} \overline{\mathcal{A}}(z', a) \quad (\text{N.27})$$

这是三道交叉对称情况下的色散积分，与 (N.25) 的唯一区别是色散积分里面 $z \rightarrow z^3$ 。最后我们需要将这个表达式转换成以 s_1, s_2 为宗量的形式，具体的计算略繁琐，但是技术不难，我们在 $-2\mu/9 < a < 0$ 情况下举例说明。首先是要将 z' 用 s'_1 解出来，注意到 z' 有两个解（作为 s_1 的二次方程），如果一个解是 $z'(s'_1)$ ，那么另一个解一定是 $z^{*\prime}(s'_1)$ ，因为 $|z'(s'_1)| = 1$ ，此时令一个解为 $z' = \exp(i\alpha), \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3a - s'_1}{2s'_1}\right)$ 。做积分变量替换，那么首先会得到

$$\begin{aligned} & \frac{z^3}{(1 - z^3) \pi} dz' \frac{z'^3 - 1}{z'(z'^3 - z^3)} \overline{\mathcal{A}}(z', a) \\ &= \left(\frac{z^3}{(1 - z^3)} \frac{dz'(s'_1)}{ds'_1} \frac{z'^3(s'_1) - 1}{z'(s'_1)(z'^3(s'_1) - z^3)} \overline{\mathcal{A}}(z'(s'_1), a) \right. \\ & \quad \left. + \frac{z^3}{(1 - z^3)} \frac{dz^{*\prime}(s'_1)}{ds'_1} \frac{z^{*\prime 3}(s'_1) - 1}{z^{*\prime}(s'_1)(z^{*\prime 3}(s'_1) - z^3)} \overline{\mathcal{A}}(z^{*\prime}(s'_1), a) \right) ds'_1 \end{aligned} \quad (\text{N.28})$$

我们注意到 $\overline{\mathcal{A}}(z'(s'_1), a) = \overline{\mathcal{A}}(z^{*\prime}(s'_1), a) = \mathcal{A}_1(s'_1, s_2^+(s'_1, a))$ ，其中

$$s_2^{(+)}(s'_1, a) = -\frac{s'_1}{2} \left[1 - \left(\frac{s'_1 + 3a}{s'_1 - a} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{N.29})$$

最后化简成

$$\mathcal{M}_0(s_1, s_2) = \alpha_0 + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2\mu}{3}}^{\infty} \frac{ds'_1}{s'_1} \mathcal{A}\left(s'_1; s_2^{(+)}(s'_1, a)\right) H(s'_1; s_1, s_2, s_3) \quad (\text{N.30})$$

其中

$$H(s'_1; s_1, s_2, s_3) = \left[\frac{s_1}{(s'_1 - s_1)} + \frac{s_2}{(s'_1 - s_2)} + \frac{s_3}{(s'_1 - s_3)} \right] \quad (\text{N.31})$$

称为交叉对称的核， α_0 是减除常数。

参考文献

- [1] N. M. Kroll and M. A. Ruderman. A Theorem on photomeson production near threshold and the suppression of pairs in pseudoscalar meson theory. *Phys. Rev.*, 93:233–238, 1954.
- [2] G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low, and Yoichiro Nambu. Relativistic dispersion relation approach to photomeson production. *Phys. Rev.*, 106:1345–1355, 1957.
- [3] E. Amaldi, S. Fubini, and G. Furlan. Pion Electroproduction. Electroproduction At Low-energy And Hadron Form-factors. *Springer Tracts Mod. Phys.*, 83:1–162, 1979.
- [4] S. Weinberg. Phenomenological Lagrangians. *Physica*, A96(1-2):327–340, 1979.
- [5] S. Scherer and M. R. Schindler. A Primer for Chiral Perturbation Theory. *Lect. Notes Phys.*, 830:pp.1–338, 2012.
- [6] V. Bernard, N. Kaiser, T. S. H. Lee, and Ulf-G. Meissner. Threshold pion electroproduction in chiral perturbation theory. *Phys. Rept.*, 246:315–363, 1994.
- [7] M. Hilt, B. C. Lehnhart, S. Scherer, and L. Tiator. Pion photo- and electroproduction in relativistic baryon chiral perturbation theory and the chiral MAID interface. *Phys. Rev.*, C88:055207, 2013.
- [8] A. D. Martin and T. D. Spearman. *Elementary Particle Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1970.
- [9] J. D. Bjorken and S. D. Drell. *Relativistic quantum fields*. 1965.
- [10] K. M. Watson. The Effect of final state interactions on reaction cross-sections. *Phys. Rev.*, 88:1163–1171, 1952.
- [11] W. Greiner and J. Reinhardt. *Quantum electrodynamics*. 1992.
- [12] V. Bernard, L. Elouadrhiri, and Ulf-G. Meissner. Axial structure of the nucleon: Topical Review. *J. Phys.*, G28:R1–R35, 2002.
- [13] J. S. Ball. Application of the Mandelstam Representation to Photoproduction of Pions from Nucleons. *Phys. Rev.*, 124:2014–2028, 1961.
- [14] P. Dennery. Theory of the Electro- and Photoproduction of pi Mesons. *Phys. Rev.*, 124:2000–2010, 1961.
- [15] F. A. Berends, A. Donnachie, and D. L. Weaver. Photoproduction and electroproduction of pions. 1. Dispersion relation theory. *Nucl. Phys.*, B4:1–53, 1967.

- [16] S. L. Adler. Photoproduction, electroproduction and weak single pion production in the (3,3) resonance region. *Annals Phys.*, 50:189–311, 1968. [,225(1968)].
- [17] B. Borasoy, P. C. Bruns, Ulf-G. Meissner, and R. Nissler. A Gauge invariant chiral unitary framework for kaon photo- and electroproduction on the proton. *Eur. Phys. J.*, A34:161–183, 2007.
- [18] R. M. Davidson. Photoproduction and electroproduction of mesons. *Czech. J. Phys.*, 44:365–403, 1995.
- [19] B. Pasquini, D. Drechsel, and L. Tiator. Invariant amplitudes for pion electroproduction. *Eur. Phys. J.*, A34:387–403, 2007.
- [20] M. L. Goldberger and K. M. Watson. *Collision Theory M. L. Goldberger; K. M. Watson*. Amsterdam: North-Holland, 1964.
- [21] L. D. Pearlstein and A. Klein. Transition Amplitudes for Photoproduction of Mesons from Nucleons and Photodisintegration of the Deuteron. *Phys. Rev.*, 107:836–842, 1957.
- [22] M. Jacob and G. C. Wick. On the General Theory of Collisions for Particles with Spin. *Annals Phys.*, 7:404–428, 1959. [Annals Phys.281,774(2000)].
- [23] S. U. Chung. Spin Formalisms. 1971.
- [24] William A. Bardeen and W. K. Tung. Invariant amplitudes for photon processes. *Phys. Rev.*, 173:1423–1433, 1968. [Erratum: Phys. Rev.D4,3229(1971)].
- [25] M. Araki, J. L. Lucio, and S. S. Hsiao. Gauge invariant projection method for the pion photoproduction and electroproduction amplitudes. *Phys. Rev.*, C48:455–458, 1993.
- [26] S. Scherer and J.H. Koch. Pion electroproduction at threshold and PCAC. *Nucl. Phys. A*, 534:461–477, 1991.
- [27] T. Fuchs and S. Scherer. Pion electroproduction, PCAC, chiral ward identities, and the axial form-factor revisited. *Phys. Rev. C*, 68:055501, 2003.
- [28] R. Jackiw. FIELD THEORETIC INVESTIGATIONS IN CURRENT ALGEBRA. 9 1986.
- [29] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral Perturbation Theory to One Loop. *Annals Phys.*, 158:142, 1984.
- [30] Nadia Fettes, Ulf-G. Meissner, Martin Mojzis, and Sven Steininger. The Chiral effective pion nucleon Lagrangian of order p^{**4} . *Annals Phys.*, 283:273–302, 2000. [Erratum: Annals Phys. 288, 249–250 (2001)].

- [31] E. Kazes. Generalized current conservation and low energy limit of photon interactions. *Il Nuovo Cimento*, 13(6):1226–1239, 1959.
- [32] H.W.L. Naus and J.H. Koch. Electromagnetic Interaction of an Off-shell Nucleon. *Phys. Rev. C*, 36:2459–2465, 1987.
- [33] H.W.L. Naus, J.H. Koch, and James Lewis Friar. Off-shell form-factors and low-energy theorems for pion photoproduction. *Phys. Rev. C*, 41:2852–2864, 1990.
- [34] J.W. Bos, S. Scherer, and J.H. Koch. Hadron structure and gauge invariance in photoproduction and electroproduction of pions. *Nucl. Phys. A*, 547:488–518, 1992.
- [35] C.H.M. van Antwerpen and I.R. Afnan. A Gauge invariant unitary theory for pion photoproduction. *Phys. Rev. C*, 52:554–567, 1995.
- [36] T.E. Rudy, H.W. Fearing, and S. Scherer. The Off-shell electromagnetic form-factors of pions and kaons in chiral perturbation theory. *Phys. Rev. C*, 50:447–459, 1994.
- [37] Yohanes Surya and Franz Gross. Unitary, gauge invariant, relativistic resonance model for pion photoproduction. *Phys. Rev. C*, 53:2422–2448, 1996.
- [38] Helmut Haberzettl. Gauge invariant theory of pion photoproduction with dressed hadrons. *Phys. Rev. C*, 56:2041–2058, 1997.
- [39] J. Kennedy and T. Spearman. Singularities in partial-wave amplitudes for two ingoing and two outgoing particles. *Phys. Rev.*, 126:1596–1602, 05 1962.
- [40] 郑汉青. 量子场论 (上) . 2018.
- [41] F. Halzen and A. D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*. 1 1984.
- [42] D. Drechsel, O. Hanstein, S.S. Kamalov, and L. Tiator. A Unitary isobar model for pion photoproduction and electroproduction on the proton up to 1-GeV. *Nucl. Phys. A*, 645:145–174, 1999.
- [43] D. Drechsel, S.S. Kamalov, and L. Tiator. Unitary Isobar Model - MAID2007. *Eur. Phys. J. A*, 34:69–97, 2007.
- [44] V. Pascalutsa, M. Vanderhaeghen, and S. N. Yang. Electromagnetic excitation of the Delta(1232)-resonance. *Phys. Rept.*, 437:125–232, 2007.

- [45] S. S. Kamalov, S N Yang, D. Drechsel, O. Hanstein, and L. Tiator. Gamma* N \rightarrow Delta transition form-factors: A New analysis of the JLab data on p (e, e-prime p) pi0 at $Q^{**2}=(2.8-(GeV/c)^{**2}$ and $4.0-(GeV/c)^{**2}$). *Phys. Rev. C*, 64:032201, 2001.
- [46] S.S. Kamalov and S. N. Yang. Pion cloud and the Q^{**2} dependence of gamma* N \longleftrightarrow Delta transition form-factors. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4494–4497, 1999.
- [47] S.S. Kamalov, Guan-Yeu Chen, Shin-Nan Yang, D. Drechsel, and L. Tiator. Pi0 photo-production and electroproduction at threshold within a dynamical model. *Phys. Lett. B*, 522:27–36, 2001.
- [48] C. T. Hung, S. N. Yang, and T.S.H. Lee. Meson exchange pi N models in three-dimensional Bethe-Salpeter formulation. *Phys. Rev. C*, 64:034309, 2001.
- [49] E.D. Cooper and B.K. Jennings. Obtaining the One-body Limit From the Relativistic Two-body Equation. *Nucl. Phys. A*, 500:553–562, 1989.
- [50] P.A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.
- [51] William R. Frazer. Applications of Conformal Mapping to the Phenomenological Representation of Scattering Amplitudes. *Phys. Rev.*, 123:2180–2182, 1961.
- [52] E. Pietarinen. Dispersion relations and experimental data. *Nuovo Cim. A*, 12:522–531, 1972.
- [53] M.P. Locher and T. Mizutani. The Use of Analyticity in Nuclear Physics. *Phys. Rept.*, 46:43, 1978.
- [54] Alfred Švarc, Mirza Hadžimehmedović, Hedim Osmanović, Jugoslav Stahov, Lothar Tiator, and Ron L. Workman. Pole positions and residues from pion photoproduction using the Laurent-Pietarinen expansion method. *Phys. Rev. C*, 89(6):065208, 2014.
- [55] Alfred Švarc, Mirza Hadzimehmedovic, Hedim Osmanovic, Jugoslav Stahov, Lothar Tiator, and Ron L. Workman. Introducing the Pietarinen expansion method into the single-channel pole extraction problem. *Phys. Rev. C*, 88(3):035206, 2013.
- [56] Vladimir N. Gribov. *Strong interactions of hadrons at high emnnergies: Gribov lectures on Theoretical Physics*, volume 27. Cambridge University Press, 10 2012.
- [57] S. Ceci, M. Doring, C. Hanhart, S. Krewald, U.-G. Meissner, and A. Svarc. Relevance of complex branch points for partial wave analysis. *Phys. Rev. C*, 84:015205, 2011.
- [58] R.L. Workman, L. Tiator, and A. Sarantsev. Baryon photo-decay amplitudes at the pole. *Phys. Rev. C*, 87(6):068201, 2013.

- [59] L. Tiator, M. Döring, R.L. Workman, M. Hadžimehmedović, H. Osmanović, R. Omerović, J. Stahov, and A. Švarc. Baryon transition form factors at the pole. *Phys. Rev. C*, 94(6):065204, 2016.
- [60] L.A. Copley, G. Karl, and E. Obryk. Single pion photoproduction in the quark model. *Nucl. Phys. B*, 13:303–319, 1969.
- [61] I.G. Aznauryan, V.D. Burkert, and T.-S.H. Lee. On the definitions of the $\gamma^* N \rightarrow N^*$ helicity amplitudes. 10 2008.
- [62] I.G. Aznauryan and V.D. Burkert. Electroexcitation of nucleon resonances. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 67:1–54, 2012.
- [63] R.C.E. Devenish, T.S. Eisenschitz, and J.G. Korner. Electromagnetic $N - N^*$ transition form factors. *Phys. Rev. D*, 14:3063–3078, 1976.
- [64] M. Benmerrouche, Nimai C. Mukhopadhyay, and J.F. Zhang. Effective Lagrangian approach to the theory of eta photoproduction in the N^* (1535) region. *Phys. Rev. D*, 51:3237–3266, 1995.
- [65] V.M. Braun et al. Electroproduction of the $N^*(1535)$ resonance at large momentum transfer. *Phys. Rev. Lett.*, 103:072001, 2009.
- [66] Riccardo Barbieri and E. Remiddi. Electron and Muon $1/2(g-2)$ from Vacuum Polarization Insertions. *Nucl. Phys. B*, 90:233–266, 1975.
- [67] Friedrich Jegerlehner. *The Anomalous Magnetic Moment of the Muon*, volume 274. Springer, Cham, 2017.
- [68] B. e. Lautrup, A. Peterman, and E. de Rafael. Recent developments in the comparison between theory and experiments in quantum electrodynamics. *Phys. Rept.*, 3:193–259, 1972.
- [69] Stephen L. Adler. Some Simple Vacuum Polarization Phenomenology: $e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons}$: The μ - Mesic Atom x-Ray Discrepancy and g_μ^{-2} . *Phys. Rev. D*, 10:3714, 1974.
- [70] C. M. Carloni Calame, M. Passera, L. Trentadue, and G. Venanzoni. A new approach to evaluate the leading hadronic corrections to the muon $g-2$. *Phys. Lett. B*, 746:325–329, 2015.
- [71] Mark Thomson. *Modern particle physics*. Cambridge University Press, New York, 2013.
- [72] Masako Bando, Taichiro Kugo, and Koichi Yamawaki. Nonlinear Realization and Hidden Local Symmetries. *Phys. Rept.*, 164:217–314, 1988.

- [73] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations.* Cambridge University Press, 6 2005.
- [74] S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino. Structure of phenomenological Lagrangians. 1. *Phys. Rev.*, 177:2239–2247, 1969.
- [75] Jr. Callan, C. G., S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino. Structure of phenomenological Lagrangians. 2. *Phys. Rev.*, 177:2247–2250, 1969.
- [76] 姚德良. 在 EOMS 方案中到 $O(q4)$ 阶的 $\pi - N$ 散射振幅的研究. PhD thesis, 北京大学, 2013.
- [77] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark. *Nucl. Phys. B*, 250:465–516, 1985.
- [78] R.L. Walker. Phenomenological analysis of single pion photoproduction. *Phys. Rev.*, 182:1729–1748, 1969.
- [79] Frits A. Berends and A. Donnachie. An Energy Independent Multipole Analysis of Pion Photoproduction Through the Second Resonance Region. *Nucl. Phys. B*, 136:317–332, 1978.
- [80] R.A. Arndt, R.L. Workman, Z. Li, and L.D. Roper. Pion photoproduction resonance couplings in the second resonance region. *Phys. Rev. C*, 42:1864–1866, 1990.
- [81] Richard A. Arndt, Ron L. Workman, Zhujun Li, and L.David Roper. Partial Wave Analysis of Pion Photoproduction. *Phys. Rev. C*, 42:1853–1863, 1990.
- [82] L. Tiator, R.L. Workman, Y. Wunderlich, and H. Haberzettl. Amplitude reconstruction from complete electroproduction experiments and truncated partial-wave expansions. *Phys. Rev. C*, 96(2):025210, 2017.
- [83] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, and A. Axelsson. Resonances in ultracold collisions of ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$, and ${}^{23}\text{Na}$. *Phys. Rev. A*, 51:4852–4861, Jun 1995.
- [84] B. Marcelis, E. G. M. van Kempen, B. J. Verhaar, and S. J. J. M. F. Kokkelmans. Feshbach resonances with large background scattering length: Interplay with open-channel resonances. *Phys. Rev. A*, 70:012701, Jul 2004.
- [85] R Taylor, J. Scattering Theory: *The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*. 1972.
- [86] Eddy Timmermans, Paolo Tommasini, Mahir Hussein, and Arthur Kerman. Feshbach resonances in atomic bose-einstein condensates. *Physics Reports*, 315(1-3):199–230, 1999.

- [87] Charles J. Joachain. *Quantum Collision Theory (Third Edition)*. 1983.
- [88] 张永德. 高等量子力学 (上下). 科学出版社, 2009.
- [89] Ning Hu. On the Application of Heisenberg's Theory of S-Matrix to the Problems of Resonance Scattering and Reactions in Nuclear Physics. *Phys. Rev.*, 74:131–140, 1948.
- [90] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. F. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon. Measurement of the interaction energy near a feshbach resonance in a ${}^6\text{Li}$ fermi gas. *Phys. Rev. Lett.*, 91:020402, Jul 2003.
- [91] J. H. Koch, V. Pascalutsa, and S. Scherer. Hadron structure and the limitations of phenomenological models in electromagnetic reactions. *Phys. Rev. C*, 65:045202, 2002.
- [92] John Clive Ward. An Identity in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 78:182, 1950.
- [93] Y. Takahashi. On the generalized Ward identity. *Nuovo Cim.*, 6:371, 1957.
- [94] S. Nozawa and T. S. H. Lee. Electroproduction of Pions on the Nucleon. *Nucl. Phys. A*, 513:511–542, 1990.
- [95] S. Kondratyuk and O. Scholten. Nonperturbative model for the half off-shell gamma N N vertex. 1999.
- [96] Adam M. Bincer. Electromagnetic structure of the nucleon. *Phys. Rev.*, 118:855–863, 1960.
- [97] K. J. Barnes. Choice of electromagnetic form factors. *Physics Letters*, 1(5):166–168, 1962.
- [98] S. Scherer and H. W. Fearing. Compton scattering by a pion and off-shell effects. *Phys. Rev. C*, 51:359–363, 1995.
- [99] Harold W. Fearing. Nucleon nucleon bremsstrahlung: An example of the impossibility of measuring off-shell amplitudes. *Phys. Rev. Lett.*, 81:758–761, 1998.
- [100] H. W. Fearing and S. Scherer. Field transformations and simple models illustrating the impossibility of measuring off-shell effects. *Phys. Rev. C*, 62:034003, 2000.
- [101] J. S. R. Chisholm. Change of variables in quantum field theories. *Nucl. Phys.*, 26(3):469–479, 1961.
- [102] S. Kamefuchi, L. O'Raifeartaigh, and Abdus Salam. Change of variables and equivalence theorems in quantum field theories. *Nucl. Phys.*, 28:529–549, 1961.
- [103] Abraham Klein. Low-Energy Theorems for Renormalizable Field Theories. *Phys. Rev.*, 99:998–1008, 1955.

- [104] A. I. L'vov. Theoretical aspects of the polarizability of the nucleon. *Int. J. Mod. Phys. A*, 8:5267–5303, 1993.
- [105] S. Scherer. Real and virtual Compton scattering at low-energies. *Czech. J. Phys.*, 49:1307–1345, 1999.
- [106] Martin Schumacher. Polarizability of the nucleon and Compton scattering. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 55:567–646, 2005.
- [107] L. D. Landau. On analytic properties of vertex parts in quantum field theory. *Nucl. Phys.*, 13(1):181–192, 1960.
- [108] Richard John Eden, Peter V. Landshoff, David I. Olive, and John Charlton Polkinghorne. *The analytic S-matrix*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
- [109] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. International Series In Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [110] S. Coleman and R. E. Norton. Singularities in the physical region. *Nuovo Cim.*, 38:438–442, 1965.
- [111] N. Nakanishi. Classical motion of particles and the physical-region singularity of the feynman integral. *Prog. Theor. Phys.*, 39:768–771, 1968.
- [112] Julian S. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, 82:664–679, 1951.
- [113] T. W. B. Kibble. Kinematics of General Scattering Processes and the Mandelstam Representation. *Phys. Rev.*, 117:1159–1162, 1960.
- [114] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii. *QUANTUM ELECTRODYNAMICS*, volume 4 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [115] R. E. Cutkosky. Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes. *J. Math. Phys.*, 1:429–433, 1960.
- [116] Juan Jose Sanz-Cillero, De-Liang Yao, and Han-Qing Zheng. Positivity constraints on the low-energy constants of the chiral pion-nucleon Lagrangian. *Eur. Phys. J. C*, 74:2763, 2014.
- [117] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.1.1 of 2021-03-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.

- [118] G. Auberson and N. N. Khuri. Rigorous parametric dispersion representation with three-channel symmetry. *Phys. Rev. D*, 6:2953–2966, 1972.
- [119] Aninda Sinha and Ahmadullah Zahed. Crossing Symmetric Dispersion Relations in Quantum Field Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 126(18):181601, 2021.
- [120] Rajesh Gopakumar, Aninda Sinha, and Ahmadullah Zahed. Crossing Symmetric Dispersion Relations for Mellin Amplitudes. *Phys. Rev. Lett.*, 126:211602, 2021.
- [121] André Martin. *Scattering Theory: Unitarity, Analyticity and Crossing*, volume 3. 1969.