

$g - 2$ memo

康凯歌

2022 年 1 月 28 日

目录

1	$g - 2$	2
1	磁矩	2
2	理论框架	2
3	QED 单圈贡献	7
4	HVP	8
5	标准模型与实验的结果对比	14

$$1 \quad g - 2$$

1 磁矩

根据电动力学知识，面积为 S 、电流为 I 的线圈具有的磁矩为 $\vec{M} = I\vec{S}$. 在外部磁场 \vec{B} 下，磁矩具有势能 $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$. 那么，当一个电荷为 q 、质量为 m 的点粒子以角动量 \vec{L} 运动时，它具有的磁矩为

$$\vec{\mu} = \frac{q\vec{L}}{2m} \quad (1.1)$$

由定义，电荷为 q 、自旋为 \vec{S} 的粒子由自旋引起的磁矩为

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2m} \vec{S} \quad (1.2)$$

从而，对于电荷为 $q = -e$ 的轻子来说

$$U = g \frac{e}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B} \quad (1.3)$$

根据相对论性量子力学的狄拉克方程，在非相对论极限下，自旋量子数为 $1/2$ 的粒子在外磁场 \vec{B} 中具有势能 $U = -\frac{q}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}$ ，则由自旋引起的磁矩为 $\vec{\mu} = \frac{g}{m}\vec{S}$ ，即回磁比 $g = 2$.

然而实验上测量得到的 μ^- 的回磁比并非正好为 2，偏差 $a = \frac{g-2}{2}$ 称为反常磁矩，可以通过标准模型精确计算，从而与实验的精确测量结果进行比较来检验理论的有效性。

2 理论框架

实验中将 μ^- 放在较弱的外磁场 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}^{ext}$ 中，通过测量自旋的变化来确定其磁矩。

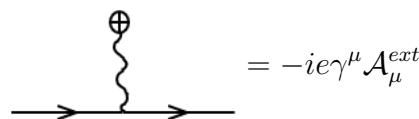
$$\frac{d\vec{S}}{dt} = g \frac{e}{2m} \vec{S} \times \vec{B} \quad (1.4)$$

理论上可以在外场基础上考虑量子涨落，记 $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{A}^{ext}$ ，真空期待值为

$$\langle \Omega | A'_\mu(x) | \Omega \rangle = \mathcal{A}_\mu^{ext} \quad (1.5)$$

$$\langle \Omega | A_\mu(x) | \Omega \rangle = 0 \quad (1.6)$$

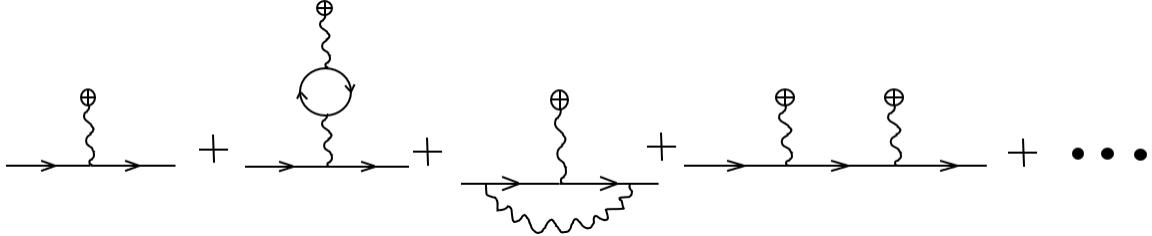
忽略 \mathcal{A}^{ext} 与 W 、 Z 、 A 等规范场之间的相互作用后，可以将原来的拉氏量写为 $\mathcal{L}_{SM}(A') = \mathcal{L}_{SM}(A) + \mathcal{L}_{ext}$ ， \mathcal{L}_{ext} 中外场与费米子的作用为 $\mathcal{L}_{ext}^{QED} = -e \mathcal{A}_\mu^{ext} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ ，其顶角为



考虑静态外场 \mathcal{A}_μ^{ext} 下质量均为 m 的轻子到轻子的跃迁矩阵

$$\langle l^-(p_2, s_2) | T e^{-i \int d^4x [H_I(x) + H^{ext}(x)]} | l^-(p_1, s_1) \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2) \delta_{s_1 s_2} + \langle l^-(p_2, s_2) | iT | l^-(p_1, s_1) \rangle$$

由于外场很弱，跃迁矩阵在微扰论中同时按照精细结构常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 和外场 \mathcal{A}_μ^{ext} 展开：



我们只需考虑一个含有外场的顶角，即：

$$\begin{aligned}
 & \langle l^-(p_2, s_2) | iT | l^-(p_1, s_1) \rangle \\
 &= \langle l^-(p_2, s_2) | T \left\{ -i \int d^4y H^{ext}(y) e^{-i \int d^4x H_I(x)} \right\} | l^-(p_1, s_1) \rangle \\
 &= \int d^4y \mathcal{A}_\mu^{ext}(y) \langle l^-(p_2, s_2) | T \left\{ -ie \bar{\Psi}(y) \gamma^\mu \Psi(y) e^{-i \int d^4x H_I(x)} \right\} | l^-(p_1, s_1) \rangle \quad (1.7) \\
 &\equiv \int d^4y \mathcal{A}_\mu^{ext}(y) e^{i(p_2 - p_1) \cdot y} T^\mu \\
 &= (2\pi) \delta(q^0) \tilde{\mathcal{A}}_\mu^{ext}(\vec{q}) T^\mu
 \end{aligned}$$

其中 $q = p_2 - p_1$, $\delta(q^0)$ 来源于 $\mathcal{A}_\mu^{ext}(y)$ 不依赖时间 t , 对应的物理含义即为能量守恒. $T^\mu(P, q) = -ie \bar{u}(p_2, s_2) \Gamma^\mu u(p_1, s_1)$, 其中 $P = p_1 + p_2$, $T^\mu(P, q)$ 对应的部分费曼图如下：

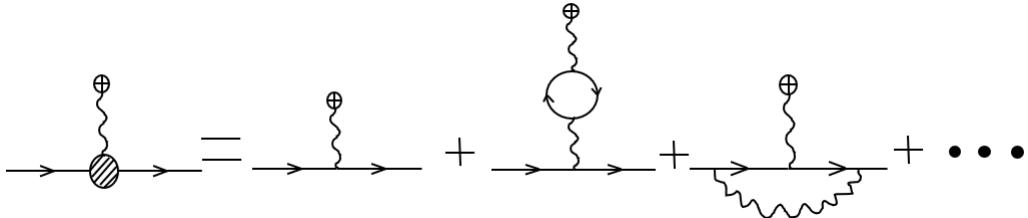


Figure 1: 外磁场下轻子到轻子的部分费曼图

这里 Γ^μ 是 4×4 矩阵，因此可以用 $\mathbf{1}, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma_5, \gamma_5 \gamma^\mu$ 来分解，另外， Γ^μ 应该以 P, q, m (即 p_1, p_2, m) 为变量，且具有洛伦兹指标 μ ，指标只能落在 P^μ, q^μ, γ^μ 上，因此 $\gamma^\mu \gamma^\nu$ 项必须伴有 P^ν, q^ν ，从而产生 p'_1 或 p'_2 ，而根据狄拉克方程，对于壳轻子有

$$(p'_1 - m)u(p_1) = 0, \bar{u}(p_2)(p'_2 - m) = 0 \quad (1.8)$$

再加上 $\gamma^\mu p + p\gamma^\mu = 2p^\mu$, 因此这一项就变成了 **1** 或 γ^μ 的项。综上, Γ^μ 一般性的协变分解为:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu A_1 + \frac{P^\mu}{2m} A_2 + \frac{q^\mu}{2m} A_3 + \gamma^\mu \gamma_5 A_4 + \frac{q^\mu}{2m} \gamma_5 A_5 + i \frac{P^\mu}{2m} \gamma_5 A_6 \quad (1.9)$$

其中 A_i 只能是 $p_1^2, p_2^2, p_1 \cdot p_2$ 的函数, 而 $p_1^2 = p_2^2 = m^2, p_1 \cdot p_2 = (2m^2 - q^2)/2$, 因此等价地, A_i 只能是 q^2 的函数.

根据瓦德恒等式 (W-T 恒等式), 连在外线在壳的费米子线上的动量为 q 的光子线有 $q_\mu T^\mu = 0$, 而由式(1.8)可得 $\bar{u}(p_2) \not{d} u(p_1) = 0, \bar{u}(p_2) \not{d} \gamma_5 u(p_1) = 2m \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1)$, 又 $q \cdot P = 0$, 代入 $q_\mu T^\mu = 0$ 可以得到 $A_3 = 0, A_5 = (-4m^2/q^2)A_4$. 再利用 Gordon 恒等式

$$\bar{u}(p_2) \frac{P^\mu}{2m} u(p_1) \equiv \bar{u}(p_2) \left(\gamma^\mu - i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right) u(p_1) \quad (1.10)$$

最终我们可以得到形状因子

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_E + \left(\gamma^\mu - \frac{2mq^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 F_A + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_M + \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \gamma_5 F_D \quad (1.11)$$

其中 $F_E = A_1 + A_2, F_A = A_4, F_M = -A_2, F_D = A_6$, 它们同样是 q^2 的函数. 一般的重整化方案中有电荷形状因子 $F_E(q^2 = 0) = 1$ 的条件 (该条件来源于, 非相对论极限下静止电势对电子的散射振幅与波恩近似对比得到电子电荷为 $F_E(0)e$, 非相对论极限下电子电荷应该为 e , 因此 $F_E(0) = 1$, PESKIN), F_A 是所谓的电磁力矩 (anapole), 这一项破坏了 P 宇称守恒, F_D 是偶极矩, 它的存在导致了 CP 破坏.

接下来要说明形状因子中 $i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_X$ 项代表自旋与磁矩的相互作用。首先这一项等效于有效相互作用的拉氏量 $\delta \mathcal{L}_{eff}^{AMM} = \overline{\Psi} \left(-\frac{e \mathcal{F}_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}}{4m} F_X \right) \Psi$, 这里由于能量守恒, $F_X = F_X(q^2 = 0)$. 其次在非相对论极限下, 且只有磁场即 $\mathcal{F}_{0\nu} = 0, B_k = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \mathcal{F}_{ij}$ 时, 对应于经典拉氏量有 $\delta \mathcal{H}_{eff}^{AMM} = -\delta \mathcal{L}_{eff}^{AMM} = F_X \frac{e}{2m} \xi^\dagger \vec{\sigma} \xi \cdot \vec{B}$. 为了说明第一点, 将形状因子中该项代回式(1.7)

$$\begin{aligned} & \int d^4y \mathcal{A}_\mu^{ext}(y) e^{iq \cdot y} (-ie) \bar{u}(p_2) i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_X u(p_1) \\ &= \int d^4y \mathcal{A}_\mu^{ext}(y) e^{iq \cdot y} (-i) \frac{\partial e^{iq \cdot y}}{\partial y^\nu} (-ie) \bar{u}(p_2) i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} F_X u(p_1) \end{aligned}$$

分部积分、表面项为零

$$= - \int d^4y \frac{\partial \mathcal{A}_\mu^{ext}(y)}{\partial y^\nu} (-i) e^{iq \cdot y} (-ie) \bar{u}(p_2) i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} F_X u(p_1) \quad (1.12)$$

$\sigma^{\mu\nu}$ 的反对称性

$$\begin{aligned} &= -i \int d^4y e^{iq \cdot y} \bar{u}(p_2) \frac{e \mathcal{F}_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}}{4m} F_X u(p_1) \\ &= \langle l^-(p_2, s_2) | T \{ i \int d^4y \delta \mathcal{L}_{eff}^{AMM}(y) \} | l^-(p_1, s_1) \rangle \end{aligned}$$

满足狄拉克方程 $(i\vec{\partial} - m)\Psi = 0$ 的解为 $\Psi(x) = u(p, s)e^{-ip \cdot x}$,

$$u(p, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

其中 $\sqrt{p \cdot \sigma} \equiv \frac{1}{\sqrt{2(p_0+m)}}(p \cdot \sigma + m)$, $\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2(p_0+m)}}(p \cdot \bar{\sigma} + m)$, 非相对论极限下

$$u(p, s) \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} (1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}) \xi_s \\ (1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}) \xi_s \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

代入 $\delta\mathcal{H}_{eff}^{AMM} = \overline{\Psi} \left(\frac{e\mathcal{F}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}{4m} F_X \right) \Psi$ 中可以得到

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{eff}^{AMM} &= \frac{eF_X}{2} \mathcal{F}_{ij} \bar{u} \left(\frac{\sigma^{ij}}{2m} \right) u \\ &\approx \frac{eF_X}{2} \mathcal{F}_{ij} \frac{\epsilon^{ijk}}{2} \xi^\dagger [(1+A)\sigma^k(1-A) + (1-A)\sigma^k(1+A)] \xi \\ &\quad \left(A = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}, \text{忽略}(\frac{p}{m})^2 \text{项} \right) \\ &\approx \frac{eF_X}{2} \mathcal{F}_{ij} \epsilon^{ijk} \xi^\dagger \sigma^k \xi \\ &= eF_X B^k \xi^\dagger \sigma^k \xi \end{aligned} \quad (1.15)$$

而场论中波函数的归一化与非相对论极限下量子力学中波函数的归一化相差 $\sqrt{2E} \approx \sqrt{2m}$ 的因子, 因此, 非相对论极限下 $\delta\mathcal{H}_{eff}^{AMM} = F_X \frac{e}{2m} \xi^\dagger \vec{\sigma} \xi \cdot \vec{B} = 2F_X \frac{e}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B}$, 与式(1.3)比较可以得出 $g = 2F_X(0)$. 另外, 式(1.11)中 $\gamma^\mu F_E$ 项, 由 Gordon 恒等式(1.10)可以从中提取出来 $i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_E$ 项, 再加上式(1.11)中 $i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_M$ 项, 可得 $g = 2F_E(0) + 2F_M(0)$, 而 $F_E(0) = 1$, 从而我们得到反常磁矩为 $a = F_M(0)$.

对形状因子的高圈计算非常复杂, 而为了得到反常磁矩, 我们只需要其中的 $F_M(0) = -A_2(0)$, 而不需要计算出完整高圈结果, 因此找到一个方法提取 $A_2(0)$ 是必需且比较方便的。我们可以构造投影算子 $\mathcal{P}_{\mu i}$ 来实现这一目的。令

$$\mathcal{P}_\mu = (p_1^\mu + m) \left(\gamma^\mu c_1 + \frac{P^\mu}{2m} c_2 + \frac{q^\mu}{2m} c_3 + \gamma^\mu \gamma_5 c_4 + \frac{q^\mu}{2m} \gamma_5 c_5 - i \frac{P^\mu}{2m} \gamma_5 c_6 \right) (p_2^\mu + m) \quad (1.16)$$

令其中的 c_i 取特定值来得到对应的 $\mathcal{P}_{\mu i}$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{\mu 1} : c_1 &= c_2 \frac{s - 4m^2}{4m^2} & c_2 &= \frac{1}{d-2} \frac{2m^2}{s(s - 4m^2)} \\
 \mathcal{P}_{\mu 2} : c_2 &= c_1 \frac{(d-2)s + 4m^2}{s - 4m^2} & c_1 &= \frac{1}{d-2} \frac{2m^2}{s(s - 4m^2)} \\
 \mathcal{P}_{\mu 3} : c_3 &= -\frac{2m^2}{s(s - 4m^2)} \\
 \mathcal{P}_{\mu 4} : c_4 &= c_5 \frac{s}{4m^2} & c_5 &= \frac{1}{d-2} \frac{2m^2}{s(s - 4m^2)} \\
 \mathcal{P}_{\mu 5} : c_5 &= -c_4 \frac{(d-2)(s - 4m^2) - 4m^2}{s} & c_4 &= \frac{1}{d-2} \frac{2m^2}{s(s - 4m^2)} \\
 \mathcal{P}_{\mu 6} : c_6 &= -i \frac{2m^2}{s(s - 4m^2)} & & (1.17)
 \end{aligned}$$

其中 $d = 4 - \varepsilon$ 为维数正规化里的维数, $s = q^2$, 对于未给出的 c_i 均取为零, 如 $\mathcal{P}_{\mu 2}$ 中 $c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 0, c_6 = 0$. 结合式(1.9)可以得到

$$A_i = \text{Tr} \{ \mathcal{P}_{\mu i} \Gamma^\mu \} \quad (1.18)$$

我们在 d 维下求迹, 用到的公式有

$$\begin{aligned}
 \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}; \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \\
 g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} &= d; \quad \gamma_\mu\gamma^\mu = d\mathbf{1} \\
 \gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu &= (2-d)\gamma^\nu \\
 \gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha &= 4g^{\mu\nu}\mathbf{1} + (d-4)\gamma^\mu\gamma^\nu
 \end{aligned} \quad (1.19)$$

另外, 可以证明场论中重整化后的量只与 $\lim_{d \rightarrow 4} \text{Tr}\{\mathbf{1}\} = 4$ 这一性质有关, 因此我们可以在计算中对任意 d 维始终采取 $\text{Tr}\{\mathbf{1}\} = 4$ 这一惯例.

从上面的结果中可以得到反常磁矩为

$$\begin{aligned}
 a &= (-1) \lim_{q^2 \rightarrow 0} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m) \Lambda_{\mu 2}(p_2, p_1) (\not{p}_2 + m) \Gamma^\mu \} \\
 \Lambda_{\mu 2}(p_2, p_1) &= \frac{2m^2}{(d-2)s(s - 4m^2)} \left(\gamma_\mu + \frac{(d-2)s + 4m^2}{s - 4m^2} \frac{P_\mu}{2m} \right)
 \end{aligned} \quad (1.20)$$

由于最后 q^2 要趋于零, 我们可以将 $\Gamma^\mu(P, q)$ 对 q 作展开, 而 Λ_2 分母中有 q^2 , 因此 $\Gamma^\mu(P, q)$ 展开中只有前三项对最后结果可能有贡献, 即

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\mu(P, q) &\approx \Gamma^\mu(P, 0) + q_\nu \frac{\partial}{\partial q_\nu} \Gamma^\mu(P, q) |_{q=0} + q_\nu q_\gamma \frac{\partial}{\partial q_\nu} \frac{\partial}{\partial q_\gamma} \Gamma^\mu(P, q) |_{q=0} \\
 &\equiv V^\mu(p) + q_\nu T^{\nu\mu}(p) + q_\nu q_\gamma K^{\nu\gamma\mu}
 \end{aligned} \quad (1.21)$$

其中, $p = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{P}{2} = \lim_{q \rightarrow 0} p_1 = \lim_{q \rightarrow 0} p_2$. 因为所求的迹只是一个标量, 我们可以对其中剩余的 q 做全空间方向的平均而不会改变结果. 因为 P 和 q 是两个独立且正交的矢量, 可以相对于 P 的方向做平均. 对于线性项, 因为被积函数是奇函数, 我们有

$$\overline{q^\mu} \equiv \int \frac{d\Omega(P, q)}{4\pi} q^\mu = 0 \quad (1.22)$$

对于二次项我们先做张量分解

$$\overline{q^\mu q^\nu} \equiv \int \frac{d\Omega(P, q)}{4\pi} q^\mu q^\nu = \alpha g^{\mu\nu} + \beta \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \quad (1.23)$$

然后用 P_μ 对其收缩, 由于 $P \cdot q = 0$, 可以得到 $\beta = -\alpha$. 再用 $g_{\mu\nu}$ 对其收缩得到

$$\int \frac{d\Omega(P, q)}{4\pi} q^2 = q^2 = \alpha d + \beta = (d-1)\alpha$$

从而得到

$$\overline{q^\mu q^\nu} = \frac{q^2}{d-1} \left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2} \right) \quad (1.24)$$

将展开和求平均的技巧应用到式(1.20)中最后可以计算得到

$$\begin{aligned} a = F_M(0) &= \frac{1}{8(d-2)(d-1)m} \text{Tr} [(\not{p} + m)[\gamma^\mu, \gamma^\nu](\not{p} + m)T_{\nu\mu}(p)] \Big|_{p^2=m^2} \\ &\quad + \frac{1}{4(d-1)m^2} \text{Tr} [(m^2\gamma^\mu - (d-1)mp^\mu - d\not{p}p^\mu)V_\mu(p)] \Big|_{p^2=m^2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

这一公式是我们计算反常磁矩的主要公式. (自己的推导不太对?)

3 QED 单圈贡献

对 μ^- 的反常磁矩产生贡献的 QED 单圈图为

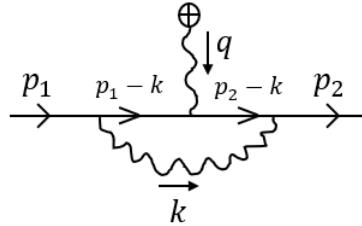


Figure 2: QED 单圈贡献

取费曼规范 ($\xi = 1$), 则该图贡献为

$$\Gamma^\mu(p, q) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} (-ie\gamma^\rho) \frac{i(p_2 - \not{k} + m)}{(p_2 - k)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{i(p_1 - \not{k} + m)}{(p_1 - k)^2 - m^2} (-ie\gamma_\rho) \frac{-i}{k^2} \quad (1.26)$$

我们首先对其进行式(1.21)的展开。

$$\begin{aligned} V^\mu &= -i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{((p-k)^2 - m^2)^2} \frac{1}{k^2} v^\mu \\ v^\mu &= \gamma^\rho (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\rho \end{aligned} \quad (1.27)$$

式(1.26)分母对 q 作展开不会得到 q^ν 的线性项,

$$\frac{1}{(p_2 - k)^2 - m^2} \frac{1}{(p_1 - k)^2 - m^2} = \frac{1}{((p-k)^2 - m^2)^2} + \mathcal{O}(q^2)$$

因此只有分子的展开对 $T^{\nu\mu}$ 有贡献

$$\begin{aligned} T^{\nu\mu} &= -i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{((p-k)^2 - m^2)^2} \frac{1}{k^2} t^{\nu\mu} \\ t^{\nu\mu} &= \frac{1}{2} \gamma^\rho (\gamma^\nu \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) - (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma_\rho \end{aligned} \quad (1.28)$$

将(1.27)和(1.28)代入式(1.25)可以得到

$$\begin{aligned} a &= -i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{((p-k)^2 - m^2)^2} \frac{1}{k^2} f_M \Big|_{p^2=m^2} \\ f_M &= 2k^2 \frac{2-d}{d-1} - 4k \cdot p + \frac{2(k \cdot p)^2}{m^2} \left(d-1 - \frac{1}{d-1} \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

f_M 即为 v^μ 和 $t^{\nu\mu}$ 代入式(1.25)求迹之后的结果. 计算上面的积分可以得到

$$a^{QED(2)} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.0011614 \quad (1.30)$$

这一贡献称为 Schwinger 项。

4 HVP

图2中虚光子的极化会对顶点产生高圈修正。定义光子传播子的单粒子不可约图为



其张量结构为 $\Pi^{\mu\nu}(q) = -(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$, 忽略规范项后, 光子的完整传播子为

$$\mu \sim \frac{q}{q} \sim \nu \equiv \sim + \mu \sim \frac{q}{q} \sim \text{1PI} \sim \nu + \mu \sim \frac{q}{q} \sim \text{1PI} \sim \text{1PI} \sim \nu + \dots = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1+\Pi(q^2))}$$

定义电荷重整化系数 $Z_3 \equiv \frac{1}{1-\Pi(0)}$, 以及重整化后的电荷 $e = \sqrt{Z_3} e_0$, 那么考虑到电荷的重整化, 把树图的光子传播子替换为完整传播子的效果就是把裸的精细结构常数替换为跑动精细结构常数 (PESKIN)

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{eff}(q^2) = \frac{\alpha}{1 + (\Pi(q^2) - \Pi(0))} \quad (1.31)$$

或者说取低能物理精细结构常数 α , 而重整化后的完整传播子为

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2(1 + \Pi(q^2) - \Pi(0))} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} (1 - \Pi_{ren}(q^2) + (\Pi_{ren}(q^2))^2 - \dots) \quad (1.32)$$

其中定义 $\Pi_{ren}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0)$. 虚光子极化为轻子的贡献可以用 QED 微扰计算, 但是由于 QCD 耦合常数的渐进自由性质, 在低能下虚光子极化为强子的贡献 (即 HVP) 无法用微扰论计算, 而需要通过色散关系将其与光子自能的虚部联系起来, 再通过光学定理将其与 e^+e^- 到强子态的散射截面联系起来, 将实验获得的截面数据代入进去来计算 HVP 贡献的反常磁矩。

下面我们先介绍色散关系。如果 $f(z)$ 在除割线 $(z_R, +\infty)$ 以外的全平面是解析的, 那么有柯西积分公式 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz' \frac{f(z')}{z' - z}$ 其中围道如图3所示, 其中实轴附近的路径紧贴割线, z 为围道内任意一点.

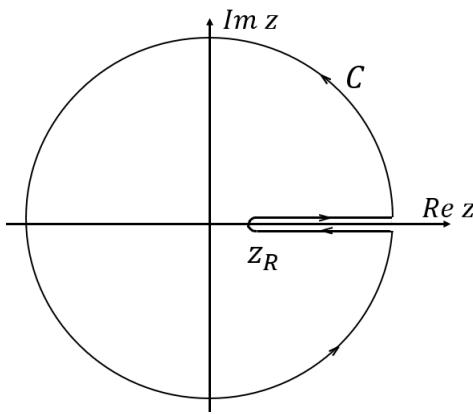


Figure 3: 围道积分

如果该函数在无穷远的围道上积分为零, 则 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_R}^\infty dz' \frac{f(z'+i\varepsilon) - f(z'-i\varepsilon)}{z'-z}$. 如果 $f(z)$ 在割线外是实解析的, 即 $f(z) = f(z^*)^*$, 那么 $f(z) - f(z^*) = 2i\text{Im}f(z)$, 我们可以得到未减除的色散关系

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{z_R}^\infty dz' \frac{\text{Im}f(z')}{z' - z} \quad (1.33)$$

如果围道上积分不为零, 而 $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 满足未减除色散关系的条件, 那么将 $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 代入(1.33)可以得到一次减除的色散关系 (郑老师; LJ)

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{\pi} \int_{z_R}^\infty dz' \frac{\text{Im}f(z')}{(z' - z_0)(z' - z)} \quad (1.34)$$

其中 z_0 为复平面上任意一点 (郑老师). 如果 $f(z)$ 满足未减除的色散关系, 那么将 $f(z)$ 和 $f(z_0)$ 分别代入(1.33)然后相减也可以得到(1.34).

将 $\Pi(q^2)$ 表示成两个电磁流的编时乘积的真空期望值，然后在两个电磁流中间插入完备性关系，进而把期望值表示成谱积分，最后可以证明 $\Pi(q^2)$ 满足一次减除的色散关系

$$\Pi(q^2) - \Pi(0) = \frac{q^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s(s - q^2 - i\varepsilon)} \quad (1.35)$$

从而结合(1.32)得到重整化后的强子真空极化贡献的光子传播子为（式(1.32)展开第二项）

$$(-ig^{\mu\nu}) \frac{-\Pi_{ren}^{had}(q^2)}{q^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Im}\Pi^{had}(s) \frac{(-ig^{\mu\nu})}{q^2 - s} \quad (1.36)$$

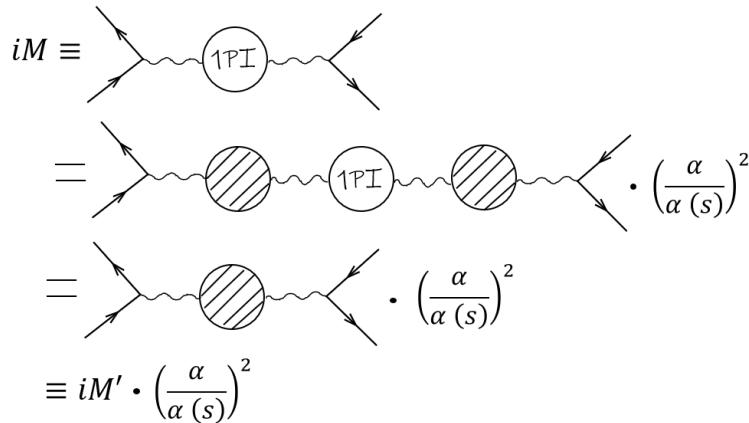
它对 QED 顶点的贡献相当于把(1.26)中 $\frac{1}{k^2}$ 替换为 $\frac{1}{k^2 - s}$ (即质量为 s 的光子)，然后再把圈积分的结果进行色散关系的积分。对于我们关心的反常磁矩，我们仍然用投影算子的方法即式(1.25)来提取圈积分对反常磁矩有贡献的部分，其结果为

$$K_1^{(2)}(s) \equiv a^{(2)heavy} \gamma = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (s/m^2)(1-x)} \equiv \frac{\alpha}{\pi} K^{(2)}(s) \quad (1.37)$$

(这里 $K_1^{(2)}(s)$ 是书上的 $K^{(2)}(s)$ ，但是书上自身有矛盾， $K^{(2)}(s)$ 是综述文献上的 $K^{(2)}(s)$) QED 单圈贡献(1.30)即相当于这里 $s = 0$ 时的结果。然后将其代入式(1.36)进行色散积分即可得到 HVP 对反常磁矩的贡献

$$a^{had} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Im}\Pi^{had}(s) K_1^{(2)}(s) \quad (1.38)$$

用光学定理可以将强子真空极化的虚部和 e^+e^- 湮灭到任意强子态的总截面联系起来，考虑正负电子的向前散射振幅。



忽略电子质量，根据光学定理，到 α 的领头阶， $\text{Im}M' = s \cdot \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ ，从而

$$\text{Im}M = s \cdot \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha(s)}\right)^2$$

而 $\text{Im}M = 4\pi\alpha \cdot \text{Im}\Pi^{had}(s)$ ，从而我们得到

$$\text{Im}\Pi^{had}(s) = \frac{\alpha s}{4\pi|\alpha(s)|^2} \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) \quad (1.39)$$

而根据 R 值的定义

$$R^{had}(s) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow hadrons)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|_{tree,s>>4m_\mu^2}} = \sigma(e^+e^- \rightarrow hadrons)/\frac{4\pi|\alpha(s)|^2}{3s}$$

从而 $\text{Im}\Pi^{had}(s) = \frac{\alpha}{3}R(s)$, 可以从实验数据中获得.

低能时, 光子极化为两个 π 介子, 我们可以根据手征有效理论来计算其虚部, 也可以来计算 $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ 的散射截面, 二者的关系应该满足光学定理推出的式(1.39).

我们来计算光子极化为两个 π 介子的虚部. 根据 QCD 的对称性构造出的手征场论最低阶的拉氏量中一个光子场和两个 π 的相互作用项为 $\mathcal{L}^{A-2\pi} = -ieA_\mu(\partial^\mu\pi^+\pi^- - \pi^+\partial^\mu\pi^-)$, 其顶角为

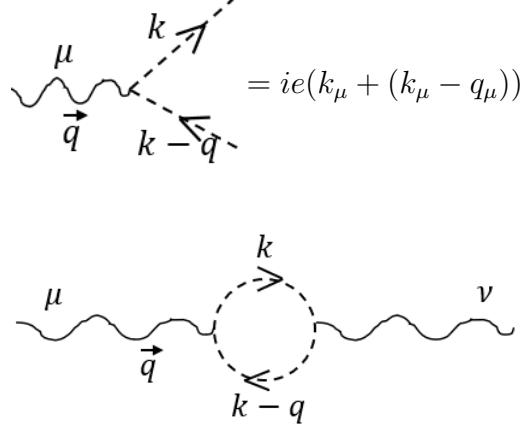


Figure 4: π 对光子极化单圈贡献

光子极化最低阶的费曼图为图4, 利用费曼规则可以得到

$$-i(q^2g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ie(2k^\mu - q^\mu)ie(2k^\nu - q^\nu) \frac{i}{k^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(k - q)^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \quad (1.40)$$

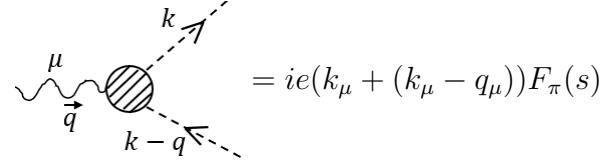
用 $g_{\mu\nu}$ 对两边作收缩可以得到

$$\Pi(q^2) = \frac{ie^2}{3q^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2k - q)^2 \frac{1}{k^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(k - q)^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} \quad (1.41)$$

根据 Cutkosky's 规则, 其虚部为

$$\begin{aligned} \text{Im}\Pi(s) &= \frac{1}{2i} \frac{ie^2}{3q^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2k - q)^2 (-2\pi i \delta(k^2 - m_\pi^2) \theta(k^0)) (-2\pi i \delta((k - q)^2 - m_\pi^2) \theta(q^0 - k^0)) \\ &= \frac{\alpha}{12} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (1.42)$$

其中 $s = q^2$. 高圈图的修正相当于给相互作用顶角一个 π 的电磁形状因子



那么光子极化为两个 π 介子的完整虚部为

$$\text{Im}\Pi(s) = \frac{\alpha}{12} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right)^{\frac{3}{2}} |F_\pi(s)|^2 \quad (1.43)$$

当能量高于手征对称性破缺尺度 $\Lambda_x (\sim 1\text{GeV})$ 时, 手征微扰场论不再适用, 这时也无法用 QCD 微扰计算, 需要从正负电子到强子态的散射截面的实验数据中获得强子真空极化的虚部, 从而计算其对反常磁矩的贡献; 当能量高到能量截断 E_{cut} 之上时, QCD 耦合常数足够小, 这时在远离共振态的区域用微扰 QCD 来进行计算大概是合理的, 而在共振区域仍需用实验数据. 即

$$a_\mu^{had} = \left(\frac{\alpha m_\mu}{3\pi} \right)^2 \left(\int_{4m_\pi^2}^{\Lambda_x^2} ds \frac{R_{ChPT}^{had} \hat{K}^{(2)}(s)}{s^2} + \int_{\Lambda_x^2}^{E_{cut}^2} ds \frac{R_{data}^{had} \hat{K}^{(2)}(s)}{s^2} \right. \\ \left. + \int_{E_{cut}^2 \text{ non-res}}^{\infty} ds \frac{R_{pQCD}^{had} \hat{K}^{(2)}(s)}{s^2} + \int_{E_{cut}^2 \text{ res}}^{\infty} ds \frac{R_{data}^{had} \hat{K}^{(2)}(s)}{s^2} \right) \quad (1.44)$$

其中 $\hat{K}^{(2)}(s) = \frac{3s}{m_\mu^2} K^{(2)}(s)$, 根据式(1.37)可以得到它的解析结果.

$$K^{(2)}(s) = \frac{x^2}{2}(2-x^2) + \frac{(1+x^2)(1+x)^2}{x^2} \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right) \\ + \frac{1+x}{1-x} x^2 \ln(x) \quad (1.45)$$

这里 $x = \frac{1-\beta_\mu}{1+\beta_\mu}$, $\beta_\mu = \sqrt{1-4m_\mu^2/s}$.

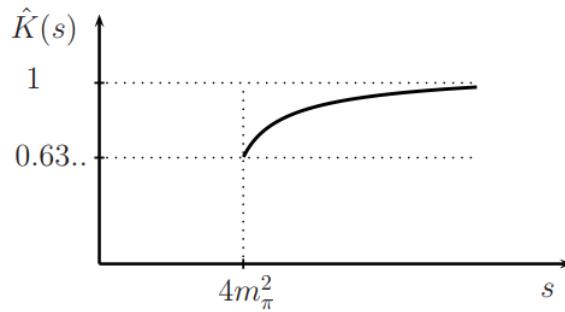


Figure 5: 权重函数

810MeV 以下, $\sigma_{tot}^{had}(s) \simeq \sigma_{\pi\pi}(s)$ 是一个很好的近似, 而反常磁矩的积分公式中被积函数分母的 s^2 导致高能区域贡献被压低, 因此正负电子湮灭到两个 π 给出了 HVP 对反常磁矩最大的贡献.

类似式(1.44), 在 m_π^2 与 $E_{cut} = 5.2\text{GeV}$ 之间以及 5.2GeV 以上的 Υ 共振区域 $9.46\text{GeV} - 13\text{GeV}$ 采用 $R(s)$ 实验数据代入, 在 5.2GeV 以上其它区域采用微扰 QCD 进行计算, 可以得到领头阶 HVP 对反常磁矩的贡献为

$$a_\mu^{(4)}(vap, had) = 690.30[5.26] \times 10^{(-10)}$$

基于 e^+e^- 实验数据得到不同能量区间对反常磁矩的贡献比例和对误差的贡献比如下图:

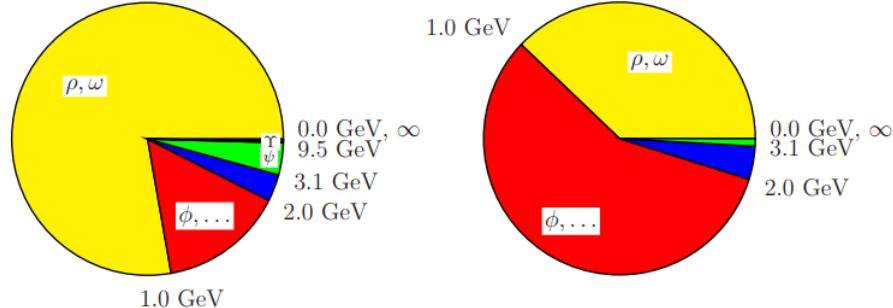


Figure 6: 不同区域对反常磁矩的贡献比例 (左) 和误差占比 (右)

由于应用实验数据的范围不同、选择的实验数据的不同以及理论方法的不同 (如: 只用实验数据, 用微扰 QCD 的区域, sum rule 方法, 低能有效理论的方法), 2008 年之前人们得到的 $a_\mu^{(4)}(vap, had)$ 理论结果分布在 $684.6[6.4] \times 10^{-10}$ 到 $711.0[5.8] \times 10^{-10}$ 之间.

低能下, 不同实验组给出的 $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ 实验数据如图7所示. 不同组的数据之间在分布上

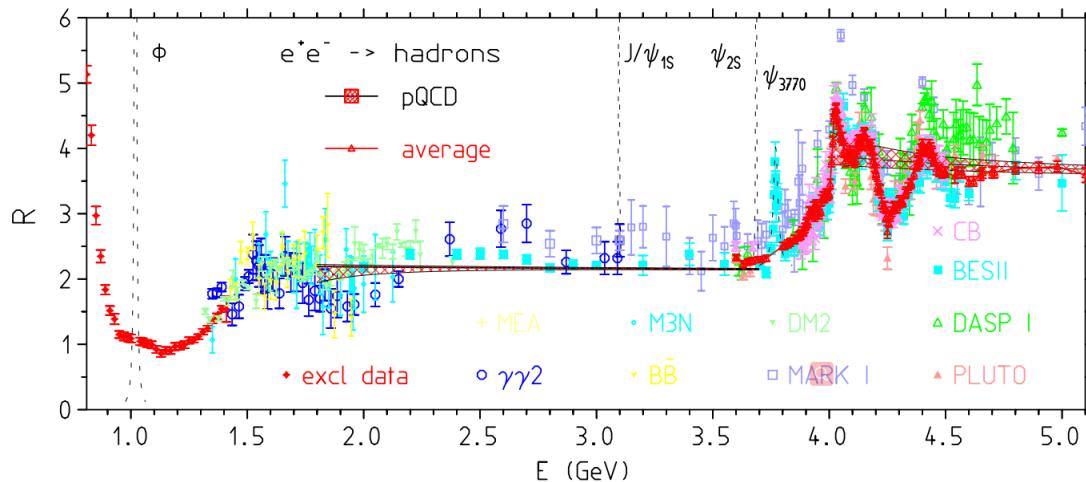


Figure 7: $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ 实验数据

存在系统偏差。最近 BaBar 用初态辐射方法 (ISR) 初步精确测量的 $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-(\gamma)$ 的散射截面再次揭示了与之前实验结果相比很大的差异，这个积分结果产生了 $\delta a_\mu^{had}(\pi\pi) \simeq +13.5 \times 10^{-10}$ 的移动，而且与从 τ 谱函数得到的结果更加一致。新的基于 e^+e^- 的结果与更近的 Belle τ 结果也符合得更好。在 e^+e^- 的实验中，由于探测器灵敏度有限，实验中辐射出来的软光子无法被探

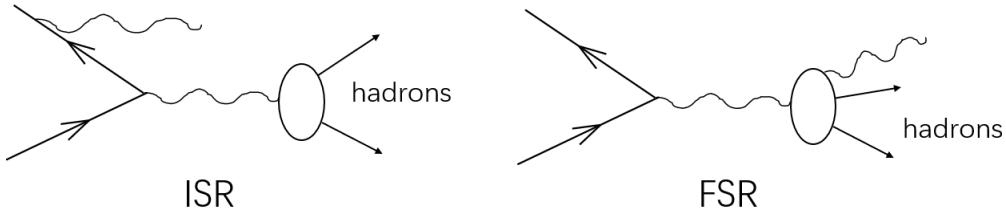


Figure 8: 光子辐射

测到，需要从实验数据中排除这种辐射过程。如图8光子可以从初态辐射出来，也可以从中末态辐射出来，而实验中无法区分这两种情况。初态辐射需要从实验结果中剔除掉，而用末态辐射得出的 $R(s)$ 来计算反常磁矩相当于次领头阶 HVP 图9的贡献。

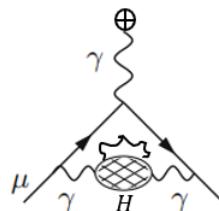


Figure 9: 次领头阶 HVP 的一个贡献

5 标准模型与实验的结果对比

标准模型中所有贡献为：包含全部四圈和部分五圈图的 QED 贡献： $116584718.1[0.2] \times 10^{(-11)}$ ；领头阶强子真空极化： $6903.0[52.6] \times 10^{(-11)}$ ；次领头阶强子真空极化： $-100.3[1.1] \times 10^{(-11)}$ ；强子 LBL： $116.0[39.0] \times 10^{(-11)}$ ；包含两圈的弱作用： $153.2[1.8] \times 10^{(-11)}$ ；以上各个部分放在一起得到标准模型的结果： $116591790.0[64.6] \times 10^{(-11)}$. 其中 HVP 的计算对误差贡献最大，这很大一部分是由正负电子湮灭到强子态的实验误差导致的；其次强子 LBL 的误差也比较大，主要由于数值计算精度导致。目前最精确的实验 BNL E821 测量结果为： $116592080[63] \times 10^{(-11)}$ 理论值比实验结果小了 3.2 个标准差，新物理可能对这一偏差有所修正，但是通过选取不同的区域采用微扰 QCD 计算、不同的有效方法进行低能 QCD 计算得到的 HVP 贡献有所差异，再结合不同的强子 LBL 计算结果，不同作者得出的标准模型理论误差与实验的偏差在 0.7 到 4.2 个标准差之间。