RPCA via ScaledGD

Zebediah

2024 年 6 月 25 日

目录

论文: Fast and Provable Tensor Robust Principal Component Analysis via Scaled Gradient Descent, 作者为 Harry Dong, Tian Tong, Cong Ma, Yuejie Chi.

这篇文章主要研究张量鲁棒主成分分析 (RPCA), 旨在从被稀疏张量 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 所污染的观测值 $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ 中恢复出一个低秩张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$, 即

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_\star + \boldsymbol{\mathcal{S}}_\star, \tag{0.1}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 是一个稀疏张量.

1 记号、定义和性质

1.1 记号

对于三阶张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 我们称 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$ 是低秩的如果它可以分解为

$$\mathcal{X}_\star = \left(\boldsymbol{U}_\star^{(1)}, \boldsymbol{U}_\star^{(2)}, \boldsymbol{U}_\star^{(3)}\right) \cdot \mathcal{G}_\star, \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{U}_\star^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_1 \times r_1}, \boldsymbol{U}_\star^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_2 \times r_2}, \boldsymbol{U}_\star^{(3)} \in \mathbb{R}^{n_3 \times r_3}$ 为因子矩阵, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_\star \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2 \times r_3}$ 为核张量, $\{r_i\}_{i=1}^3$ 为每个模态对应的秩. 等价地有

$$[\boldsymbol{\mathcal{X}}]_{i_1,i_2,i_3} = \sum_{j_1=1}^{r_1} \sum_{j_2=1}^{r_2} \sum_{j_3=1}^{r_3} \left[\boldsymbol{U}^{(1)}\right]_{i_1,j_1} \left[\boldsymbol{U}^{(2)}\right]_{i_2,j_2} \left[\boldsymbol{U}^{(3)}\right]_{i_3,j_3} [\boldsymbol{\mathcal{G}}]_{j_1,j_2,j_3}. \tag{1.2}$$

如果我们沿着每个模态将张量展平, 那么得到的矩阵都是低秩的:

$$r_1 = \operatorname{rank}\left(\mathcal{M}_1\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right)\right), \quad r_2 = \operatorname{rank}\left(\mathcal{M}_2\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right)\right), \quad r_3 = \operatorname{rank}\left(\mathcal{M}_3\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right)\right), \tag{1.3}$$

其中 $\mathcal{M}_k(\cdot)$ 表示对张量沿第 k 个模态的矩阵化 $(k = 1, 2, 3)$. 换句话说, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$ 是 $\mathcal{X}_\star$ 的多线性秩, 且通常取 $r_k \ll n_k$, 记 $n := \max_k n_k$, $r := \max_k r_k$.

此外, 对于张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 其高阶奇异值分解 (HOSVD) $\mathcal{H}_r(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ 写作

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = \left(\boldsymbol{U}^{(1)}, \boldsymbol{U}^{(2)}, \boldsymbol{U}^{(3)}, \boldsymbol{\mathcal{G}}\right). \tag{1.4}$$

1.2 定义

定义 1 (非相干性) 张量 $\mathcal{X}_\star$ 的非相干参数 μ 定义为

$$\mu := \max_k \left\{ \frac{n_k}{r_k} \left\| \boldsymbol{U}_\star^{(k)} \right\|_{2,\infty}^2 \right\}. \tag{1.5}$$

非相干参数大致衡量了 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$ 的能量在其条目上的扩散程度——当 μ 越小时, 能量越分散. 此外, 我们定义了一个新的条件数概念, 用于衡量真实张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$ 的条件情况, 这比之前使用的概念要弱:

定义 2 (条件数) 张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$ 的条件数 κ 定义为

$$\kappa := \frac{\min_k \sigma_{\max}(\mathcal{M}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star))}{\min_k \sigma_{\min}(\mathcal{M}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star))}, \tag{1.6}$$

其中

$$\sigma_{\min}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star) = \min_k \sigma_{\min}(\mathcal{M}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star)) \tag{1.7}$$

为 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$ 的最小非零奇异值.

定义 3 (α 分数稀疏性) 污染张量 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star$ 是 α 分数稀疏的, *i.e.*, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_\alpha$, 其中

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_\alpha := \left\{ \boldsymbol{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} : \|\boldsymbol{\mathcal{S}}_{i_1,i_2,:}\|_0 \le \alpha n_3, \|\boldsymbol{\mathcal{S}}_{i_1,:,i_3}\|_0 \le \alpha n_2, \|\boldsymbol{\mathcal{S}}_{:,i_2,i_3}\|_0 \le \alpha n_1, \forall 1 \le i_k \le n_k, k = 1,2,3 \right\}.$$

定义 4 (软阈值算子) 对于三阶张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, 软阈值算子 $\mathcal{T}_\zeta(\cdot) : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \mapsto \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 定义为

$$[\mathcal{T}_\zeta(\boldsymbol{\mathcal{X}})]_{i_1,i_2,i_3} := \operatorname{sgn}\left([\boldsymbol{\mathcal{X}}]_{i_1,i_2,i_3}\right) \cdot \max\left(0, |[\boldsymbol{\mathcal{X}}]_{i_1,i_2,i_3}| - \zeta\right). \tag{1.8}$$

定义 5 (距离度量) 设 $\boldsymbol{F} := (\boldsymbol{U}^{(1)}, \boldsymbol{U}^{(2)}, \boldsymbol{U}^{(3)}, \mathcal{G})$, $\boldsymbol{F}_\star := \left(\boldsymbol{U}_\star^{(1)}, \boldsymbol{U}_\star^{(2)}, \boldsymbol{U}_\star^{(3)}, \mathcal{G}_\star\right)$, 定义

$$\operatorname{dist}^2(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_\star) := \inf_{\boldsymbol{Q}^{(k)} \in \mathrm{GL}(r_k)} \sum_{k=1}^{3} \left\| \left(\boldsymbol{U}^{(k)}\boldsymbol{Q}^{(k)} - \boldsymbol{U}_\star^{(k)}\right) \boldsymbol{\Sigma}_\star^{(k)} \right\|_{\mathrm{F}}^2 + \left\| \left(\left(\boldsymbol{Q}^{(1)}\right)^{-1}, \left(\boldsymbol{Q}^{(2)}\right)^{-1}, \left(\boldsymbol{Q}^{(3)}\right)^{-1} \right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{G}} - \boldsymbol{\mathcal{G}}_\star \right\|_{\mathrm{F}}^2,$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_\star^{(k)}$ 是 $\mathcal{M}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star)$ 的奇异值矩阵, $k = 1,2,3$. 此外, 如果上确界在 $\{\boldsymbol{Q}^{(k)}\}_{k=1}^3$ 处达到, 它们被称为 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_\star$ 之间的最优对齐矩阵.

1.3 性质

多线性乘法具有几个很好的性质, 其中一个重要的性质是, 对于任意的 $\boldsymbol{B}^{(k)} \in \mathbb{R}^{r_k \times r_k}$, $k = 1,2,3$, 有

$$\left(\boldsymbol{U}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(1)}, \boldsymbol{U}^{(2)}\boldsymbol{B}^{(2)}, \boldsymbol{U}^{(3)}\boldsymbol{B}^{(3)}\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{G}} = \left(\boldsymbol{U}^{(1)}, \boldsymbol{U}^{(2)}, \boldsymbol{U}^{(3)}\right) \cdot \left(\left(\boldsymbol{B}^{(1)}, \boldsymbol{B}^{(2)}, \boldsymbol{B}^{(3)}\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{G}}\right). \tag{1.9}$$

因此对于 $\boldsymbol{Q}^{(k)} \in \mathrm{GL}(r_k), k = 1,2,3$, 有

$$\left(\boldsymbol{U}^{(1)}, \boldsymbol{U}^{(2)}, \boldsymbol{U}^{(3)}\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{G}} = \left(\boldsymbol{U}^{(1)}\boldsymbol{Q}^{(1)}, \boldsymbol{U}^{(2)}\boldsymbol{Q}^{(2)}, \boldsymbol{U}^{(3)}\boldsymbol{Q}^{(3)}\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\boldsymbol{Q}},$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\boldsymbol{Q}} = \left((\boldsymbol{Q}^{(1)})^{-1}, (\boldsymbol{Q}^{(2)})^{-1}, (\boldsymbol{Q}^{(3)})^{-1}\right) \cdot \mathcal{G}$, 即 Tucker 分解不是唯一的.

此外, 如果我们沿不同的模展平张量 $\mathcal{X}$, 得到的矩阵遵循以下低秩分解:

$$\mathcal{M}_1(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = \boldsymbol{U}^{(1)}\mathcal{M}_1(\boldsymbol{\mathcal{G}})\left(\boldsymbol{U}^{(3)} \otimes \boldsymbol{U}^{(2)}\right)^\top = \boldsymbol{U}^{(1)}\breve{\boldsymbol{U}}^{(1)\top}, \breve{\boldsymbol{U}}^{(1)} := \left(\boldsymbol{U}^{(3)} \otimes \boldsymbol{U}^{(2)}\right)\mathcal{M}_1(\boldsymbol{\mathcal{G}})^\top, \tag{1.10}$$

$$\mathcal{M}_2(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = \boldsymbol{U}^{(2)}\mathcal{M}_2(\boldsymbol{\mathcal{G}})\left(\boldsymbol{U}^{(3)} \otimes \boldsymbol{U}^{(1)}\right)^\top = \boldsymbol{U}^{(2)}\breve{\boldsymbol{U}}^{(2)\top}, \breve{\boldsymbol{U}}^{(2)} := \left(\boldsymbol{U}^{(3)} \otimes \boldsymbol{U}^{(1)}\right)\mathcal{M}_2(\boldsymbol{\mathcal{G}})^\top, \tag{1.11}$$

$$\mathcal{M}_3(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = \boldsymbol{U}^{(3)}\mathcal{M}_3(\boldsymbol{\mathcal{G}})\left(\boldsymbol{U}^{(2)} \otimes \boldsymbol{U}^{(1)}\right)^\top = \boldsymbol{U}^{(3)}\breve{\boldsymbol{U}}^{(3)\top}, \breve{\boldsymbol{U}}^{(3)} := \left(\boldsymbol{U}^{(2)} \otimes \boldsymbol{U}^{(1)}\right)\mathcal{M}_3(\boldsymbol{\mathcal{G}})^\top. \tag{1.12}$$

给定两个张量 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$, 它们的内积定义为 $\langle\mathcal{A},\mathcal{B}\rangle=\sum_{i_1,i_2,i_3}\mathcal{A}_{i_1,i_2,i_3}\mathcal{B}_{i_1,i_2,i_3}$. 内积满足以下性质:

$$\left\langle\left(\boldsymbol{U}^{(1)},\boldsymbol{U}^{(2)},\boldsymbol{U}^{(3)}\right)\cdot\mathcal{G},\mathcal{X}\right\rangle=\left\langle\mathcal{G},\left(\boldsymbol{U}^{(1)\top},\boldsymbol{U}^{(2)\top},\boldsymbol{U}^{(3)\top}\right)\cdot\mathcal{X}\right\rangle. \tag{1.13}$$

将张量 $\|\mathcal{X}\|$ 的 Frobenius 范数和 ℓ_∞ 范数分别表示为 $\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\langle\mathcal{X},\mathcal{X}\rangle}$ 和 $\|\mathcal{X}\|_\infty=\max_{i_1,i_2,i_3}|\mathcal{X}_{i_1,i_2,i_3}|$, 则对 $\boldsymbol{Q}_k\in\mathbb{R}^{r_k\times r_k},k=1,2,3$ 有:

$$\|(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Q}_3)\cdot\mathcal{G}\|_{\mathrm{F}}\leq\|\boldsymbol{Q}_1\|\,\|\boldsymbol{Q}_2\|\,\|\boldsymbol{Q}_3\|\,\|\mathcal{G}\|_{\mathrm{F}}. \tag{1.14}$$

2 提出的算法

2.1 主要方法

我们考虑的目标函数为

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{F},\mathcal{S}):=\frac{1}{2}\left\|\left(\boldsymbol{U}^{(1)},\boldsymbol{U}^{(2)},\boldsymbol{U}^{(3)}\right)\cdot\mathcal{G}+\mathcal{S}-\mathcal{Y}\right\|_{\mathrm{F}}^2, \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{U}^{(1)},\boldsymbol{U}^{(2)},\boldsymbol{U}^{(3)},\mathcal{G})$.

在每次迭代开始时, 我们通过对观测残差阈值化来更新污染张量 $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_{t+1}=\mathcal{T}_{\zeta_{t+1}}\left(\mathcal{Y}-\left(\boldsymbol{U}_t^{(1)},\boldsymbol{U}_t^{(2)},\boldsymbol{U}_t^{(3)}\right)\cdot\mathcal{G}_t\right),\quad t=0,1,\cdots. \tag{2.2}$$

随着数据张量 $\mathcal{X}_t=\left(\boldsymbol{U}_t^{(1)},\boldsymbol{U}_t^{(2)},\boldsymbol{U}_t^{(3)}\right)\cdot\mathcal{G}_t$ 的估计变得更加准确, 观测残差与腐蚀项变得更加一致. 此外, 利用 ScaledGD, 我们提出通过沿缩放梯度方向迭代下降来更新低秩张量因子:

$$\boldsymbol{U}_{t+1}^{(k)}=\boldsymbol{U}_t^{(k)}-\eta\nabla_{\boldsymbol{U}_t^{(k)}}\mathcal{L}\left(\boldsymbol{F}_t,\mathcal{S}_{t+1}\right)\left(\breve{\boldsymbol{U}}_t^{(k)\top}\breve{\boldsymbol{U}}_t^{(k)}\right)^{-1},\quad k=1,2,3, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{G}_{t+1}=\mathcal{G}_t-\eta\left(\left(\boldsymbol{U}_t^{(1)\top}\boldsymbol{U}_t^{(1)}\right)^{-1},\left(\boldsymbol{U}_t^{(2)\top}\boldsymbol{U}_t^{(2)}\right)^{-1},\left(\boldsymbol{U}_t^{(3)\top}\boldsymbol{U}_t^{(3)}\right)^{-1}\right)\cdot\nabla_{\mathcal{G}_t}\mathcal{L}\left(\boldsymbol{F}_t,\mathcal{S}_{t+1}\right). \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{F}_t=\left(\boldsymbol{U}_t^{(1)},\boldsymbol{U}_t^{(2)},\boldsymbol{U}_t^{(3)},\mathcal{G}_t\right)$ 是第 t 次迭代中张量因子的估计, $\eta>0$ 是学习率, 且

$$\breve{\boldsymbol{U}}_t^{(1)}=\left(\boldsymbol{U}_t^{(3)}\otimes\boldsymbol{U}_t^{(2)}\right)\mathcal{M}_1\left(\mathcal{G}_t\right)^\top,\breve{\boldsymbol{U}}_t^{(2)}=\left(\boldsymbol{U}_t^{(3)}\otimes\boldsymbol{U}_t^{(1)}\right)\mathcal{M}_2\left(\mathcal{G}_t\right)^\top,\breve{\boldsymbol{U}}_t^{(3)}=\left(\boldsymbol{U}_t^{(2)}\otimes\boldsymbol{U}_t^{(1)}\right)\mathcal{M}_3\left(\mathcal{G}_t\right)^\top$$

用于构造梯度预条件方向, $\otimes$ 表示 Kronecker 积. ScaledGD 平衡了张量因子以找到更好的下降方向, 这在病态张量中表现更加显著. 事实上, 在病态问题中, 普通梯度下降的收敛率显著退化, 而 ScaledGD 能够在不考虑条件数的情况下仍保持线性收敛.

2.2 主要结果

直接计算 (2.3) 和 (2.4) 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{t+1}^{(k)} &= \boldsymbol{U}_t^{(k)} - \eta \nabla_{\boldsymbol{U}_t^{(k)}} \mathcal{L}\left(\boldsymbol{F}_t, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{t+1}\right)\left(\breve{\boldsymbol{U}}_t^{(k)\top} \breve{\boldsymbol{U}}_t^{(k)}\right)^{-1} \\ &= (1-\eta)\boldsymbol{U}_t^{(k)} - \eta\left(\mathcal{M}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{S}}_{t+1}\right) - \mathcal{M}_k(\boldsymbol{\mathcal{Y}})\right)\breve{\boldsymbol{U}}_t^{(k)}\left(\breve{\boldsymbol{U}}_t^{(k)\top} \breve{\boldsymbol{U}}_t^{(k)}\right)^{-1}, \quad k=1,2,3\end{aligned} \tag{2.5}$$

以及

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{G}}_{t+1} &= \boldsymbol{\mathcal{G}}_t - \eta\left(\left(\boldsymbol{U}_t^{(1)\top}\boldsymbol{U}_t^{(1)}\right)^{-1}, \left(\boldsymbol{U}_t^{(2)\top}\boldsymbol{U}_t^{(2)}\right)^{-1}, \left(\boldsymbol{U}_t^{(3)\top}\boldsymbol{U}_t^{(3)}\right)^{-1}\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\mathcal{G}}_t}\mathcal{L}\left(\boldsymbol{F}_t, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{t+1}\right) \\ &= (1-\eta)\boldsymbol{\mathcal{G}}_t - \eta\left(\left(\boldsymbol{U}_t^{(1)\top}\boldsymbol{U}_t^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{U}_t^{(1)\top}, \left(\boldsymbol{U}_t^{(2)\top}\boldsymbol{U}_t^{(2)}\right)^{-1}\boldsymbol{U}_t^{(2)\top}, \left(\boldsymbol{U}_t^{(3)\top}\boldsymbol{U}_t^{(3)}\right)^{-1}\boldsymbol{U}_t^{(3)\top}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{S}}_{t+1} - \boldsymbol{\mathcal{Y}}\right).\end{aligned} \tag{2.6}$$

算法流程如下所示:

Algorithm 1 ScaledGD for tensor robust principal component analysis

1: **Input:** the observed tensor $\mathcal{Y}$, the multilinear rank $\boldsymbol{r}$, learning rate η, and $\{\zeta_t\}_{t=0}^T$.
2: **Initialization:** $\boldsymbol{\mathcal{S}}_0 = \mathcal{T}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}_0}(\mathcal{Y})$ and $\left(\boldsymbol{U}_0^{(1)}, \boldsymbol{U}_0^{(2)}, \boldsymbol{U}_0^{(3)}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\right) = \mathcal{H}_{\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{\mathcal{Y}} - \boldsymbol{\mathcal{S}}_0\right)$
3: **for** $t = 0, 1, \cdots, T-1$ **do**
4: Update the corruption tensor $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{t+1}$ via (2.2);
5: Update the tensor factors $\boldsymbol{F}_{t+1} = \left(\boldsymbol{U}_{t+1}^{(1)}, \boldsymbol{U}_{t+1}^{(2)}, \boldsymbol{U}_{t+1}^{(3)}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_{t+1}\right)$ via (2.5) and (2.6).
6: **end for**
7: **Output:** the tensor factors $\boldsymbol{F}_T = \left(\boldsymbol{U}_T^{(1)}, \boldsymbol{U}_T^{(2)}, \boldsymbol{U}_T^{(3)}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_T\right)$.

定理 1 设 $\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_\star + \boldsymbol{\mathcal{S}}_\star \in \mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$，其中 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$ 是 μ-非相干且具有多线性秩为 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$ 的张量，$\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star$ 是 α-稀疏的. 假设阈值 $\{\zeta_k\}_{k=0}^\infty$ 满足 $\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\|_\infty \le \zeta_0 \le 2\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\|_\infty$ 且 $\zeta_{t+1} = \rho\zeta_t, t\ge 1$，适当选取 $\zeta_1 = 8\sqrt{\frac{\mu^3 r_1 r_2 r_3}{n_1 n_2 n_3}}\sigma_{\min}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star)$，$\frac{1}{7}\le\eta\le\frac{1}{4}$，$\rho = (1-0.45\eta)$，则对所有 $t\ge 0$，迭代 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_t = (\boldsymbol{U}_t^{(1)}, \boldsymbol{U}_t^{(2)}, \boldsymbol{U}_t^{(3)})\cdot\boldsymbol{\mathcal{G}}_t$ 满足

$$\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_t - \boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\|_{\mathrm{F}} \le 0.03\rho^t\sigma_{\min}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star), \tag{2.7}$$

$$\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_t - \boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\|_\infty \le 8\rho^t\sqrt{\frac{\mu^3 r_1 r_2 r_3}{n_1 n_2 n_3}}\sigma_{\min}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star), \tag{2.8}$$

$$\|\boldsymbol{\mathcal{S}}_t - \boldsymbol{\mathcal{S}}_\star\|_\infty \le 16\rho^t\sqrt{\frac{\mu^3 r_1 r_2 r_3}{n_1 n_2 n_3}}\sigma_{\min}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star), \tag{2.9}$$

其中扰动水平满足 $\alpha \le \frac{c_0}{\mu^2 r_1 r_2 r_3 \kappa}$，$c_0 > 0$ 是足够小的常数. 选择 ρ 的值是为了简化证明，不应视为最佳收敛速度.

3 定理 1 的证明

定理 1 的证明主要使用归纳假设. 我们首先给定以下假设:

$$\operatorname{dist}\left(\boldsymbol{F}_t, \boldsymbol{F}_\star\right) \leq \epsilon_0 \rho^t \sigma_{\min}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right), \tag{3.1}$$

$$\max_k\left\{\sqrt{\frac{n_k}{r_k}}\left\|\left(\boldsymbol{U}_t^{(k)} \boldsymbol{Q}_t^{(k)}-\boldsymbol{U}_\star^{(k)}\right) \boldsymbol{\Sigma}_\star^{(k)}\right\|_{2, \infty}\right\} \leq \rho^t \sqrt{\mu} \sigma_{\min}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right), \tag{3.2}$$

其中 $\rho=1-0.45\eta$, $\epsilon_0<0.01$ 是充分小的常数, $\left\{\boldsymbol{Q}_t^{(k)}\right\}_{k=1}^3$ 是 $\boldsymbol{F}_t$ 和 $\boldsymbol{F}_\star$ 的最优对齐矩阵 (作用是使得两个矩阵或张量在某种变换下尽可能一致).

3.1 归纳: 局部收缩

下面的引理 1 保证了距离度量的收缩, 引理 2 则建立了非相干性度量的收缩, 因此我们可以反复应用引理 1 和引理 2 进行归纳.

引理 1 (距离收缩) *设 $\boldsymbol{\mathcal{Y}}=\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star+\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 其中 $\mathcal{X}_\star$ 是 μ-非相干且具有多线性秩 $\boldsymbol{r}=\left(r_1, r_2, r_3\right)$ 的张量, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star$ 是 α-稀疏的. 令 $\boldsymbol{F}_t:=\left(\boldsymbol{U}_t^{(1)}, \boldsymbol{U}_t^{(2)}, \boldsymbol{U}_t^{(3)}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_t\right)$ 为算法 1 的第 t 次迭代. 如果假设 (3.1), (3.2) 在第 t 次迭代中成立, 设 $\alpha \leq \frac{c_0 \rho}{\sqrt{\mu^3 r_1 r_2 r_3 r}}$, c_0 为某个足够小的常数, 在定理 1 中的 ζ_{t+1} 的选取下, 只要 $\eta \leq 1/4$, 那么第 $(t+1)$ 次迭代 $\boldsymbol{F}_{t+1}$ 满足*

$$\operatorname{dist}\left(\boldsymbol{F}_{t+1}, \boldsymbol{F}_\star\right) \leq \epsilon_0 \rho^{t+1} \sigma_{\min}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right).$$

引理 2 (非相干性收缩) *设 $\boldsymbol{\mathcal{Y}}=\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star+\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 其中 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$ 是 μ-非相干且具有多线性秩 $\boldsymbol{r}=\left(r_1, r_2, r_3\right)$ 的张量, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star$ 是 α-稀疏的. 令 $\boldsymbol{F}_t:=\left(\boldsymbol{U}_t^{(1)}, \boldsymbol{U}_t^{(2)}, \boldsymbol{U}_t^{(3)}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_t\right)$ 为算法 1 的第 t 次迭代. 如果假设 (3.1), (3.2) 在第 t 次迭代中成立, 设 $\alpha \leq \frac{c_1}{\mu^2 r_1 r_2 r_3}$, c_1 为某个足够小的常数, 在定理 1 中的 ζ_{t+1} 的选取下, 只要 $1/7 \leq \eta \leq 1/4$, 那么第 $(t+1)$ 次迭代 $\boldsymbol{F}_{t+1}$ 满足*

$$\max_k\left\{\sqrt{\frac{n_k}{r_k}}\left\|\left(\boldsymbol{U}_{t+1}^{(k)} \boldsymbol{Q}_{t+1}^{(k)}-\boldsymbol{U}_\star^{(k)}\right) \boldsymbol{\Sigma}_\star^{(k)}\right\|_{2, \infty}\right\} \leq \rho^{t+1} \sqrt{\mu} \sigma_{\min}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right),$$

其中 $\left\{\boldsymbol{Q}_t^{(k)}\right\}_{k=1}^3$ 是 $\boldsymbol{F}_t$ 和 $\boldsymbol{F}_\star$ 的最优对齐矩阵.

3.2 谱初始化

为了建立归纳假设, 我们仍需要检查谱初始化. 以下引理表明, 谱初始化在 $t=0$ 时也满足归纳假设 (3.1), (3.2).

引理 3 (初始化时的距离) *设 $\boldsymbol{\mathcal{Y}}=\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star+\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 其中 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$ 是 μ-非相干且具有多线性秩 $\boldsymbol{r}=\left(r_1, r_2, r_3\right)$ 的张量, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star$ 是 α-稀疏的. 令 $\boldsymbol{F}_0:=\left(\boldsymbol{U}_0^{(1)}, \boldsymbol{U}_0^{(2)}, \boldsymbol{U}_0^{(3)}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\right)$ 为谱初始化的输出, 其中阈值满足 $\left\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right\|_{\infty} \leq \zeta_0 \leq 2\left\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right\|_{\infty}$. 对某个充分小的常数 $c_0>0$, 如果 $\alpha \leq \frac{c_0}{\sqrt{\mu^3 r_1 r_2 r_3 r \kappa}}$, 我们有*

$$\operatorname{dist}\left(\boldsymbol{F}_0, \boldsymbol{F}_\star\right) \leq 54.1 c_0 \sigma_{\min}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right).$$

引理 4 (初始化时的不相关性) 设 $\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_\star + \boldsymbol{\mathcal{S}}_\star \in \mathbb{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 其中 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star$ 是 μ-非相干且具有多线性秩 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$ 的张量, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_\star$ 是 α-稀疏的. 令 $\boldsymbol{F}_0 := \left(\boldsymbol{U}_0^{(1)}, \boldsymbol{U}_0^{(2)}, \boldsymbol{U}_0^{(3)}, \boldsymbol{\mathcal{G}}_0\right)$ 为谱初始化的输出, 其中阈值满足 $\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\|_\infty \le \zeta_0 \le 2\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\|_\infty$. 对某个充分小的常数 $c_0 > 0$, 如果 $\alpha \le \frac{c_0}{\mu^2 r_1 r_2 r_3 \kappa}$, 那么谱初始化满非相干性条件

$$\max_k \left\{ \sqrt{\frac{n_k}{r_k}} \left\| \left(\boldsymbol{U}_0^{(k)} \boldsymbol{Q}_0^{(k)} - \boldsymbol{U}_\star^{(k)} \right) \boldsymbol{\Sigma}_\star^{(k)} \right\|_{2,\infty} \right\} \le \sqrt{\mu}\sigma_{\min}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\star\right),$$

其中 $\left\{\boldsymbol{Q}_0^{(k)}\right\}_{k=1}^3$ 是 $\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}_\star$ 的最优对齐矩阵.

上述引理的证明可参见文章的附录.

4 实验结果简述

这部分内容我将直接使用简洁的语言叙述, 若要深入了解细节可参考原文. 实验主要包含以下三个:

- **随机生成三阶张量实验.** 此实验随机生成了一个大小为 $(100, 100, 100)$ 的张量, 并给予水平为 α 污染. 并与 RiemannianGD 算法进行了比较, 发现 ScaledGD 每次迭代成本小, 并且速度要快得多.
- **MNIST 实验.** 此实验选取 MNIST 库中标签为 2 的所有图像作为输入, 即输入的张量是大小为 $(5958, 28, 28)$ 的张量. 实验分为三组: 一是添加 70% 椒盐噪声; 二是随机替换其中 500 张图像; 三是添加 50% 椒盐噪声并随机替换其中 500 张图像. 实验结果显示在所有情况下, ScaledGD 比 TNN 更准确地恢复了与正确数字对应的低秩部分. 此外，ScaledGD 修正了形状奇怪或异常的数字, 使低秩分量更加均匀, 但 TNN 在低秩输出中大多保留了这些情况. 更重要的是, ScaledGD 作为一种可缩放的非凸方法运行得要快得多, 而 TNN 使用凸优化的计算成本更高.
- **视频背景减除实验.** 此实验将 ScaledGD 应用于使用 VIRAT 数据集中的视频进行背景减除任务. 视频数据可以被视为一个跨越高度、宽度、帧以及场景中不同颜色通道的多维张量. 这里, 低秩张量对应于视频中的背景, 该背景在帧间是相对静止的, 而稀疏张量对应于包含移动物体的前景, 这些前景占用的像素数量很少. 一个合理的假设是, 对于对应于帧的模式, 背景张量是低秩的, 但在其他模式中是全秩的. 受到这一观察的启发, 可能会尝试选择性地仅更新核心张量和对应于帧模式的因子矩阵, 同时在谱初始化后保持其他因子矩阵不变. 实验结果表明, 跳过全秩因子矩阵的更新产生了质量上相似的结果, 同时每次迭代的速度显著提高了大约 4.6 到 5 倍.