

第一次课后作业参考答案

张明阳 齐冀 储超群

March 7, 2018

1

解答:

属于 L^* 的字符串有: abaabaaabaa、aaaabaaaa和baaaaabaa, 即第1、2和4个串。

2

证明:

1. 定义函数 $f: S \rightarrow T$, 其中 $f(a) = y, f(b) = x, f(c) = z$, 显然 $Dom(f) = S$ 。
2. 因为 $\forall m, n \in S$, 如果 $f(m) = f(n)$, 则 $m = n$, 所以 f 是一一的。又因 $Ran(f) = T$, f 是映上的。
3. 因为

$$\begin{aligned}f(a * a) &= f(a) = y = f(a) \circ f(a) \\f(b * b) &= f(c) = z = f(b) \circ f(b) \\f(c * c) &= f(b) = x = f(c) \circ f(c) \\f(a * b) &= f(b) = x = f(a) \circ f(b) \\f(a * c) &= f(c) = z = f(a) \circ f(c) \\f(b * a) &= f(b) = x = f(b) \circ f(a) \\f(b * c) &= f(a) = y = f(b) \circ f(c) \\f(c * a) &= f(c) = z = f(c) \circ f(a) \\f(c * b) &= f(a) = y = f(c) \circ f(b)\end{aligned}$$

所以 $\forall m, n \in S$, 有 $f(m * n) = f(m) \circ f(n)$, 得证两个半群同构。

3

证明:

$\forall a, b \in A^*$,

1. 若 a 和 b 都包含奇数个1, 则 $f(a) = f(b) = 1$, 且 $a \cdot b$ 包含偶数个1, 则 $f(a \cdot b) = 0$, 满足 $f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$ 。
2. 若 a 和 b 都包含偶数个1, 则 $f(a) = f(b) = 0$, 且 $a \cdot b$ 包含偶数个1, 则 $f(a \cdot b) = 0$, 满足 $f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$ 。
3. 若 a 包含奇数个1, b 包含偶数个1, 则 $f(a) = 1, f(b) = 0$, 且 $a \cdot b$ 包含奇数个1, 则 $f(a \cdot b) = 1$, 满足 $f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$ 。
4. 若 a 包含偶数个1, b 包含奇数个1, 则 $f(a) = 0, f(b) = 1$, 且 $a \cdot b$ 包含奇数个1, 则 $f(a \cdot b) = 1$, 满足 $f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$ 。

所以 f 是同态映射。

因为 $f(01) = f(10) = 1$, 所以 f 不是单射, 因此 f 不是同构。