

基于微分方程的浓溶液稀释模型

摘 要

本文通过微分方程组,利用建立了浓溶液稀释模型,使用 MATLAB 的 `fsolve` 函数建立了最优流速模型。

针对问题一:首先根据题意确定每个容器内盐的改变量,建立微分方程,利用所给容器 3 的盐含量随时间变化的数据,逐步拟合求解每个容器的盐含量随数据变化函数,得到每个容器的体积为: $V_1 = 321.4993L$, $V_2 = 117.8331L$, $V_3 = 113.6216L$,得出容器 2 的盐含量随时间变化情况。

针对问题二:基于浓溶液稀释模型,利用 MATLAB 的 `fsolve` 函数求解满足条件的边界值,确定流速范围,然后得出最优流速为 $84.4663L/min$ 。

本模型建立中运用 MATLAB r2021b(图像绘制,方程求解),从而使建模过程顺利进行,使所建模型更加精简。

关键词: 微分方程、拟合求解、`fsolve` 函数

一 问题重述

浓溶液的稀释计算广泛应用于药剂生产。如图所示，由 3 个容器构成了一个稀释系统。3 个容器内装着体积分别是 V_1 、 V_2 、 V_3 的盐水。纯净水从上端倒入容器 1，随后混合液体从容器 1 流入容器 2，再从容器 2 流入容器 3，最后流出容器 3。每一段的流速是相同的为 v 。

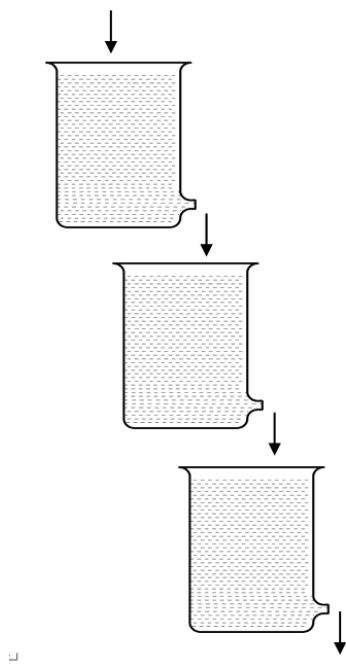


图 1: 浓溶液稀释系统

本题考察的是利用数学知识，建立浓溶液稀释模型，解决以下问题：

(1) 已知 $v_r=45.46(\text{L}/\text{min})$ ，容器内盐的初始值分别是 6.8 千克、0 千克、0 千克。容器 3 内的盐含量数据已给出，试建立数学模型，计算出容器 2 的盐含量随时间变化情况。

(2) 利用问题 (1) 的数学模型确定最快流速，确保容器 2 工作 20 分钟时，容器 2 的盐含量不超过 3.18 千克，且容器 2 的盐含量超过 2.27 千克的时间不超过 5 分钟。

二 问题分析

问题一：

由题可知，每个容器内盐的改变量为注入的盐水中所含盐量与流出的盐水中所含盐量之差。根据这一条件可以建立微分方程组，根据所给数据，拟合求出三个容器的体积。然后根据容器 2 的微分方程，计算容器 2 盐含量随时间变化情况。

问题二：

由于三个容器的体积不变，根据问题一的浓溶液稀释模型，利用 MATLAB 的 fsolve 函数计算流速范围，按要求求解最快流速问题。

三 模型假设

1. 每一段的流速是相同的；
2. 液体流入容器时立即被搅拌均匀。

四 符号说明

符号表示	文字说明
t	时间
c_i	第 i 个容器流入溶液浓度
m_i	第 i 个容器的盐含量
dm_i	dt 时第 i 个容器盐的改变量
mR_i	第 i 个容器流入盐水中所含盐量
mC_i	第 i 个容器流出盐水中所含盐量
v	溶液流速
v_{max}	溶液最快流速
$a、b、c、d、f、g$	函数系数

五 模型建立

5.1 模型一 浓溶液稀释模型

设第 i 个容器 ($i=1,2,3$) 的盐含量随时间变化为 $m_i(t)$ ，由于液体流速相同，则容器的溶液体积 V_i 不变，流入溶液的浓度为 c_i ，则

$$c_i = \frac{m_{i-1}(t)}{V_i} \quad (1)$$

已知流速为 $v = 45.46(L/min)$ ，每个容器内盐的改变量 = 注入的盐水中所含盐量 - 流出的盐水中所含盐量，设第 i 个容器 ($i=1,2,3$) 在 dt 时，容器内盐的改变量为 dm_i ，注入的盐水中所含盐量为 mR_i ，流出的盐水中所含盐量为 mC_i ，则

$$dm_i = mR_i - mC_i \quad (2)$$

而流量的盐含量 = 流入溶液浓度 × 流量，流量 = 流速 × 流动时间，则

$$mR_i = c_i v dt \quad (3)$$

$$mC_i = \frac{m_i(t)v dt}{V_i} \quad (4)$$

联立公式 (1)(2)(3)(4)，建立微分方程：

$$\frac{dm_i}{dt} = \frac{m_{i-1}(t) - m_i(t)}{V_i} v \quad (5)$$

由于最开始注入的是纯净水，盐含量为 0， $m_0(t) = 0$ 。而且由题可知， $m_1(0) = 6.8, m_2(0) = 0, m_3(0) = 0$ ，可以利用 MATLAB 的 `dsolve` 函数求出每个容器的含盐量随时间变化的函数：

$$m_1(t) = 6.8e^{-\frac{v}{V_1}t} \quad (6)$$

$$m_2(t) = 6.8 \frac{V_1}{V_1 - V_2} (e^{-\frac{1}{V_1}vt} - e^{-\frac{1}{V_2}vt}) \quad (7)$$

$$m_3(t) = 6.8 \left[\frac{V_1^2}{(V_1 - V_2)(V_1 - V_3)} e^{-\frac{1}{V_1}vt} - \frac{V_1 V_2}{(V_1 - V_2)(V_2 - V_3)} e^{-\frac{1}{V_2}vt} + \frac{V_1 V_3}{V_1 V_2 - V_1 V_3 - V_2 V_3 + V_3^2} e^{-\frac{1}{V_3}vt} \right] \quad (8)$$

题中给出的是容器 3 的盐含量随时间变化的数据，利用 MATLAB 的 `cftool` 工具进行拟合，由于指数前的系数太过复杂，无法得出结果，不妨将公式 (8) 设为：

$$m_3(t) = 6.8(ae^{-bt} - ce^{-dt} + fe^{-gt}) \quad (9)$$

限制 b 、 d 、 g 的初始条件为正，得出拟合结果。

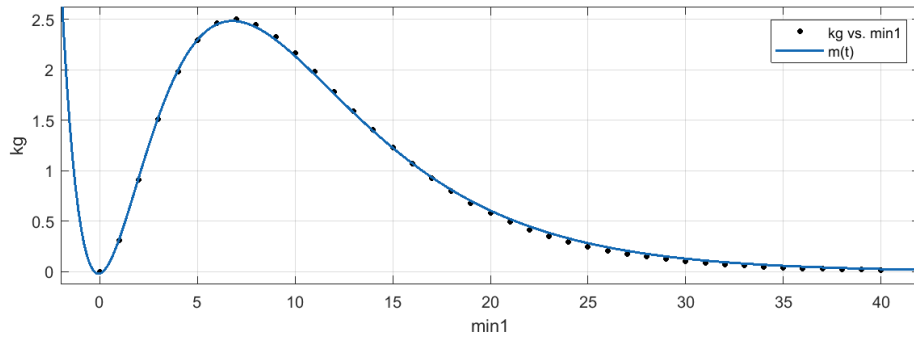


图 2: cftool 拟合曲线

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 2.267 (1.167, 3.366)
b = 0.1591 (0.1414, 0.1768)
c = 37.52 (-1.08e+04, 1.087e+04)
d = 0.3858 (-1.715, 2.487)
e = 35.25 (-1.08e+04, 1.087e+04)
f = 0.4001 (-1.791, 2.592)

Goodness of fit:

SSE: 0.02011
R-square: 0.9993
Adjusted R-square: 0.9992
RMSE: 0.02397

图 3: 拟合结果

但由于实际函数中函数系数之间存在联系，将预测结果代入公式 (8) 求解得出最终结果： $V_1 = 321.4993L$ ， $V_2 = 117.8331L$ ， $V_3 = 113.6216L$ 。曲线数值与实际数据的误差平方和变为 0.2207，相关系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.7115 \\ -0.7115 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

得到容器 3 的盐含量随时间变化的函数：

$$m_3(t) = 6.8(2.4414e^{-0.1414t} - 44.1666e^{-0.3858t} + 41.7252e^{-0.4001t}) \quad (10)$$

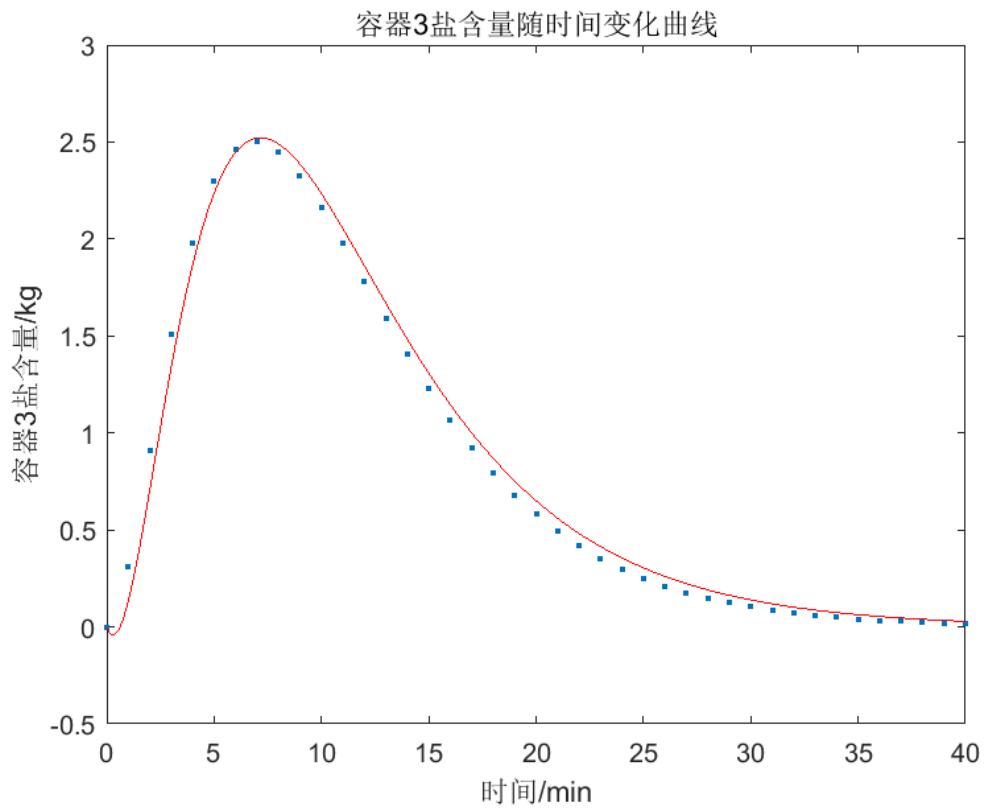


图 4: 容器 3 盐含量随时间变化曲线

根据公式 (7) 可以得出容器 2 的盐含量随时间变化的函数:

$$m_2(t) = 10.7342(e^{-0.1414t} - e^{-0.3858t}) \quad (11)$$

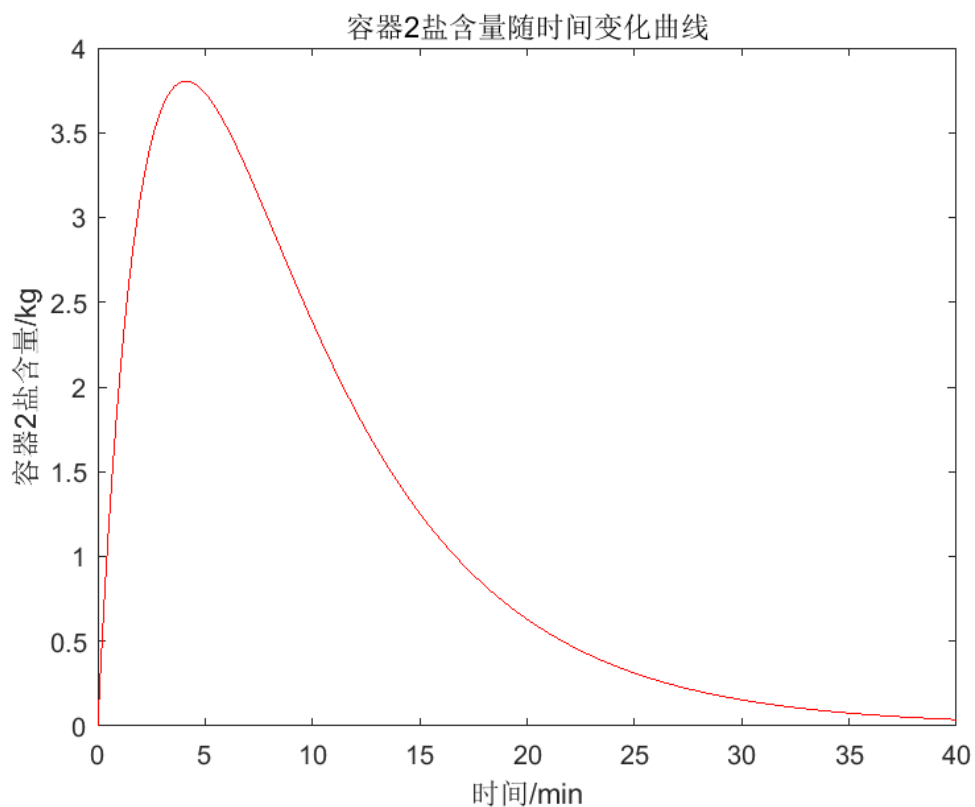


图 5: 容器 2 盐含量随时间变化曲线

5.2 模型二 最优流速模型

根据模型 1 可以确定三个容器的体积，以及容器 2 随流速和时间变化的函数：

$$m_2(v, t) = 10.7342(e^{-0.0031vt} - e^{-0.0085vt}) \quad (12)$$

根据题意得到 $t=20\text{min}$ 时刻容器 2 随流速变化的函数：

$$m_2(v, 20) = 10.7342(e^{-0.0622v} - e^{-0.1697v}) \quad (13)$$

绘制函数图，观察盐含量变化情况：

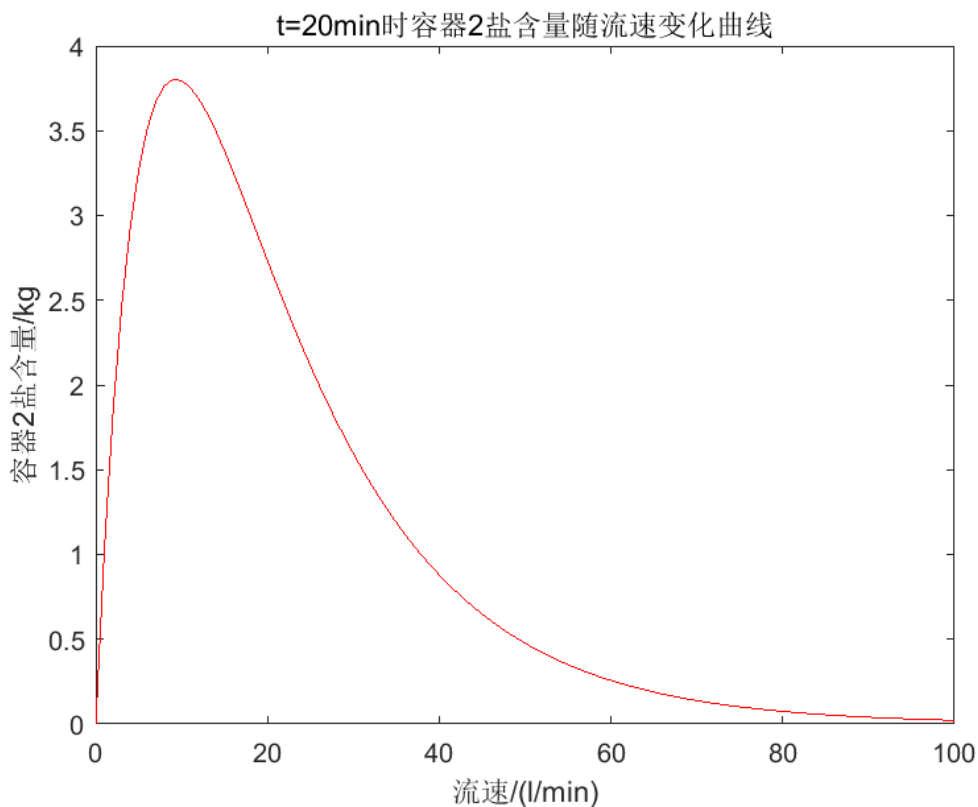


图 6: t=20min 时容器 2 盐含量随流速变化曲线

要求最快流速，每分钟流过的体积不能超过三个容器体积的最小值，即 $v < 113.6216L/min$

利用 MATLAB 的 fsolve 函数求解 $m_2(v, 20) = 3.18$ 的流速，可以得出 $v_1 = 4.7049L/min$ 、 $v_2 = 16.6063L/min$ ，即要满足容器 2 工作 20 分钟时，容器 2 的盐含量不超过于 3.18 千克，得到的流速范围 $0 < v \leq 4.7049L/min$ 或 $v \geq 16.6063L/min$ 。

在此基础上，满足容器 2 的盐含量超过 2.27 千克的时间不超过 5 分钟，再次利用 MATLAB 的 fsolve 函数求出 $m_2(v, t) = 2.27$ 中满足 $0 < |t_2 - t_1| \leq 5$ 的流速。

得到最终的流速范围为： $84.4663L/min \leq v \leq 113.6163L/min$ ，可以看出，满足题目条件下的最优流速为 $84.4663L/min$ 。

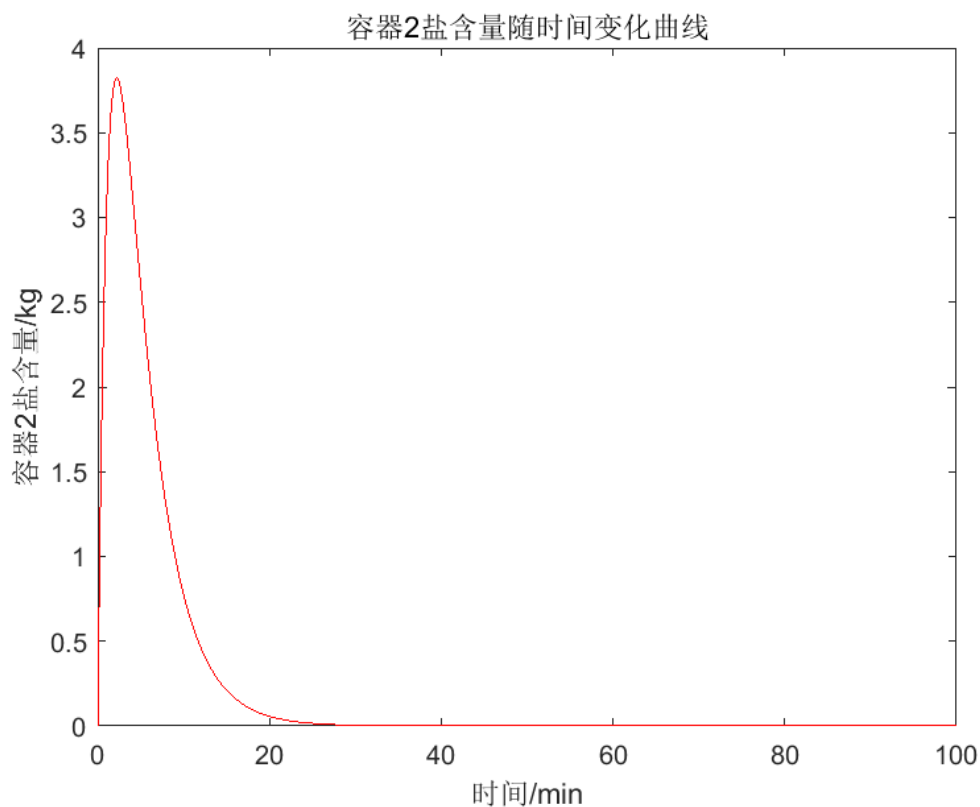


图 7: 容器 2 盐含量随最优流速变化曲线

六 模型评价

浓溶液稀释模型的误差平方和为 0.2207，拟合效果较好。题中要求的是最大流速，但是经过分析可知，当无最大流速限制时，流速越大，容器 2 的盐含量超过 2.27kg 的时间会持续减少，条件一直满足，无限制作用。而在实际情况中，在满足条件时工业的浓溶液稀释会选择最低的流速以减小成本，因此选择建立最优流速模型。

本题中的模型利用 MATLAB 软件进行优化求解，结果可靠，符合题目要求。但是实际生活中的情况多变，本模型距离现实生活中的应用还有一些差距。

附录

以下代码均用 MATLAB 编写。

6.1 模型一 concentration.m

```
clc
syms v V1 V2 V3
%求解微分方程
m1=dsolve('Dm1=(-m1)*v/V1','m1(0)=6.8','t');
m2=dsolve('Dm2=(6.8*exp(-t*v/V1)-m2)*v/V2','m2(0)=0','t');
m3=dsolve('Dm3=(6.8*V1*(exp(-t*v/V1)-exp(-t*v/V2))/(V1-V2)-m3)*v/V3','m3(0)=0','t');
%cftool拟合结果
%fittedmodel;
%goodness;
%重新求参
min=0:0.01:40;
V =[45.46/0.1414,45.46/0.3858,45.46/0.4001];
x(1)=V(1)*V(1)/((V(1)-V(2))*(V(1)-V(3)));
x(2)=V(1)*V(2)/((V(1)-V(2))*(V(2)-V(3)));
x(3)=V(1)*V(3)/(V(1)*V(2)-V(1)*V(3)-V(2)*V(3)+V(3)^2);
syms t
m(t)=6.8*(x(1)*exp(-0.1591*t)-x(2)*exp(-0.3858*t)+x(3)*exp(-0.4001*t));
kgm=double(feval(m,min));
%计算误差平方和与相关矩阵
sse=sum((kg-kgm).^2);
R=corrcoef(min1,kgm);
%绘制拟合图像
plot(min1,kg,'.',min,feval(m,min),'r'), xlabel('时间/min'), ylabel('容器3盐含量/kg'),
    title('容器3盐含量随时间变化曲线');
%求解容器2的函数,绘制图像
mm(t)=6.8*V(1)/(V(1)-V(2))*(exp(-0.1414*t)-exp(-0.3858*t));
figure(2);
plot(min,feval(mm,min),'r'), xlabel('时间/min'), ylabel('容器2盐含量/kg'), title('容器2盐含量随时间变化曲线');
```

6.2 模型二 max_v.m

```
clear
clc
syms v t
%绘制t=20min时的流速函数图像
m(v)=10.7342*(exp(-0.0622*v)-exp(-0.1697*v));
vr=0:0.01:100;
plot(vr,m(vr),'r'), xlabel('流速/(l/min)'), ylabel('容器2盐含量/kg'), title('t=20min时容器2盐含量随流速变化曲线');
```

```

%计算自变量v
x=fsolve(@(v)10.7342*(exp(-0.0622*v)-exp(-0.1697*v))-3.18,[0 20]);
V=zeros(1,200000);
j=1;
%求解第一个区间的符合值
for v=0:x(1)
    tx=fsolve(@(t)10.7342*(exp(-0.0031*v*t)-exp(-0.0085*v*t))-2.27,[0 100]);
    t=abs(tx(2)-tx(1));
    if t>0.0001&&t<=5
        V(j)=v;
        j=j+1;
    end
end
%求解第二个区间的符合值
for v=x(2):0.01:113.6216
    tx=fsolve(@(t)10.7342*(exp(-0.0031*v*t)-exp(-0.0085*v*t))-2.27,[0 5]);
    t=abs(tx(2)-tx(1));
    if t>0.0001&&t<=5
        V(j)=v;
        j=j+1;
    end
end
V(find(V==0))=[];
vm=min(V);
%绘制v_max的图像
mm=@(t)10.7342*(exp(-0.0031*vm*t)-exp(-0.0085*vm*t));
figure(2);
T=0:0.01:100;
plot(T,mm(T),'r'), xlabel('时间/min'), ylabel('容器2盐含量/kg'), title('容器2盐含量随时间变化曲线');

```