基于微分方程模型的余氯浓度控制研究

摘　要

随着经济的发展和生活水平的日益提高，游泳运动日益普及。但近年来，因游泳池水质不达标而导致伤及顾客身体的事故时有发生。因此，本文基于 ARIMA 时间序列预测模型、气温日变化模型、微分方程模型建立了游泳池水中余氯浓度随时间变化的模型。并且根据余氯浓度变化模型设计了在保护顾客健康和体验的基础上尽量最大化游泳池营收的方案以供实际使用。

针对问题一，首先得到 2022 年 6 月 27 日杭州市的最高气温为 36°C, 最低气温为 28°C，建立了气温日变化的正弦—指数模型，绘制了当天的气温日变化曲线图，与当天实际温度进行比较，均方误差为 0.6804，相关系数为 0.9777。接着选取关键的历史气温数据，建立 ARIMA 时间序列预测模型，分别预测 2022 年 7 月 29 日的最高气温为 34.98°C、最低气温为 25.22°C，2022 年 7 月 30 日的最高气温为 36.06°C、最低气温为 25.09°C。最后代入气温日变化模型，绘制了这两天的气温日变化曲线图。

针对问题二，在无游泳者的情况下，首先计算出常温下余氯浓度从 0.6mg/L 降至 0.05mg/L 需要 22h, 得到余氯浓度随时间的变化关系式系数为-0.11295，绘制了常温下余氯浓度随时间变化的曲线图。然后在 7 月 29 日的气温情况下，根据 25°C 的变化系数和余氯反应速率跟气温经验关系式得到了余氯反应速率的微分方程，最终利用四阶龙格—库塔数值解法得到余氯浓度随时间变化的曲线图，并且得到池水中余氯浓度下降至 0.4mg/L 的时刻为 9：08：59。

针对问题三，常温下游泳人数和 1 小时后余氯浓度成线性关系，采用最小二乘法得到每个游泳者造成的消耗余氯速率的初始预估值，得到常温下有游泳者的余氯浓度变化的微分方程。然后在初始预估值附近区间按步长搜索，找到使误差更小的每个游泳者造成的消耗余氯速率预估值，其均方误差为 0.000001。再根据 7 月 30 日的气温情况得到了有游泳者余氯反应速率的微分方程。最终运用四阶龙格-库塔数值解法，根据题中所给的每个场次中每小时的游泳人数进行计算，在开放场次里，每当余氯下降低于 0.4mg/L 时记录下该时间点，并加药使得泳池余氯浓度增加至 0.6mg/L，继续计算。最终得出一天内加药的时间点和余氯浓度值与时间的变化曲线图。

针对问题四，由泳池余氯浓度增量与加药时间成线性关系，得到加药速率为定值。以每一小时内最高气温所能容纳的最大人数能使得余氯浓度可在限定区间内上下波动而不需持续长时间加药为约束，建立一个目标函数为运营收入的单目标优化模型。并向游泳馆的管理者给出了一些建议。

关键词：正弦—指数模型　ARIMA 预测　微分方程　四阶龙格—库塔法　最小二乘法

一、 问题介绍

1.1 研究背景

随着人们健康意识的增强，游泳健康受到越来越多的关注，游泳池的水质安全格外重要。根据《建筑给水排水与节水通用规范》中的人工游泳池水质国家标准，游泳池水的余氯浓度需要严格控制在 0.4mg/L～0.6mg/L 之间，才能起到消毒效果并且不影响游泳体验。因此，如何建立准确的余氯浓度控制模型来保持游泳池水的余氯浓度，已经成为研究的一个重要课题。

1.2 问题重述

问题一：

根据 2022 年 6 月 27 日杭州市的最高气温和最低气温，建立数学模型描述气温随时间的变化规律。接着根据提供的历史气象数据，建立数学模型预测 2022 年 7 月 29 日和 7 月 30 日两天各自的气温日变化曲线。

问题二：

在无游泳者的情况下，游泳池水中余氯的反应速率与余氯浓度成正比，而且与气温呈指数增长关系。根据所给信息，建立数学模型描绘常温情况下余氯量随时间的变化曲线。并且根据问题一的 2022 年 7 月 29 日的气温日变化曲线，建立数学模型描绘游泳池水的余氯浓度随时间的变化曲线，得到池水中余氯量下降至 0.4mg/L 的时刻（早上 9 点整初始池水余氯浓度为 0.6mg/L）。

问题三：

在有游泳者的情况下，游泳者的活动会使游泳池水的余氯浓度不断下降。当游泳池水的余氯浓度低于 0.4mg/L 时必须开启加药泵，直到余氯浓度增加至 0.6mg/L 关闭。根据所给数据建立余氯浓度下降的数学模型，并确定第一次加药时间。面对实际情况，结合以上数学模型，描绘出 2022 年 7 月 30 日余氯浓度随时间的变化曲线，不考虑加药时间，确定加药的时间点。

问题四：

当考虑加药时间时，由于气温升高和游泳人数增加，余氯浓度持续偏低需要不断加药，因此必须控制游泳进场人数。通过控制游泳人数、加药时间点和加药时长，建立优化模型使游泳馆在固定开放时段的情况下，保证获得的营业收入尽可能高。最后综合分析讨论，向首次经营游泳馆的管理者提出合理建议。

二、 问题分析

问题一分析：首先 2022 年 6 月 27 日查询日最高气温和日最低气温，利用正弦—指数模型分别模拟白天和夜晚的气温随时间变化情况，描绘 2022 年 6 月 27 日的气温日变

化曲线。接着选取合适的历史气温数据，运用 ARIMA 时间预测模型，预测 2022 年 7 月 29 日和 2022 年 7 月 30 日的最高气温和最低气温。最后求出这两天各自的气温随时间变化的函数，描绘相应的气温日变化曲线。

问题二分析：首先求解无游泳者情况下，常温时余氯浓度随时间变化的关系式和系数，描绘对应曲线。接着基于题中所给的关系式，结合问题一 2022 年 7 月 29 日的气温日变化函数，运用四阶龙格—库塔法求解微分方程的数值解，绘制相应的余氯浓度随时间变化的曲线图。

问题三分析：首先根据常温下游泳人数与 1 小时后余氯浓度数据成线性关系，确定消耗余氯速率与游泳人数成正比，将游泳人数消耗余氯速率加入到常温余氯浓度变化模型，再使用最小二乘法初步得到一个人消耗余氯速率 (即斜率)，然后在其附近的区间按等步长搜索最优值，使得误差尽量小。将最优值作为一个人消耗余氯速率加入到余氯浓度变化模型，运用四阶龙格—库塔法求解微分方程的数值解。最根据题中所给的每个场次中每小时的游泳人数和时间进行计算，在开放场次里，每当余氯下降低于下限（0.4mg/L）时记录下该时间点，并加药使得泳池余氯浓度增加至 0.6mg/L，继续计算。在非开放场次里，就不需要加药。

问题四分析：题设中要求通过加药时间点及加药时长等的调整结合进场人数的控制来实现营收最大化，要满足每一小时内最高气温所能容纳的最大人数能使得余氯浓度可在限定区间内上下波动而不需持续长时间加药，尽可能增加运营者收入。

三、 模型假设

(1) 假设 TCCA 药水浓度较大但体积小。
(2) 假设预测天气均为晴天，天气过渡平稳，气温不会发生骤变。
(3) 假设泳池中 PH 值稳定。
(4) 假设余氯的反应速率只受温度、浓度和人数的影响。
(5) 假设游泳池每天早上开馆的余氯起始浓度均为 0.6mg/L。

四、 符号说明

符号	文字说明	单位
t	时间	h
v	余氯的反应速率	mg/(L·h)
y	余氯的浓度	mg/L
MSE	均方偏差	/
r	相关系数	/
k	比例系数	/
T	温度	°C

五、 问题一：气温日变化预测模型

5.1 正弦-指数气温日变化模型的建立

2022 年 6 月 27 日杭州市的最高气温为 36°C, 最低气温为 28°C，气温日变化曲线可以通过函数进行模拟[1]。白天气温变化为正弦曲线：

$$T(t) = T_{min} + (T_{max} - T_{min}) sin \frac{\pi(t - 12 + \frac{dl}{2})}{dl + 2p} \tag{1}$$

夜间气温变化为指数曲线:

$$T(t) = \frac{T_{min} - T_{sset} e^{-\frac{n}{\tau}} + (T_{sset} - T_{min}) e^{-\frac{t - t_{sset}}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}} \tag{2}$$

其中 T_{min} 为日最低气温，T_{max} 为日最高气温，dl 是日长（14 小时），p 是日最高气温与正午时刻之间的小时数（1.5-2.0 小时），T_{sset} 为日落时刻（$t_{sset} = 12 + \frac{dl}{2}$）的温度 (由公式 1 计算得到)，$n$ 为夜长（10 小时），τ 为夜间温度变化时间常数（一般为 4 小时）。

5.2 ARIMR 气温预测模型的建立

为了绘制 2022 年 7 月 29 日和 7 月 30 日的气温日变化曲线，则需要确定这两天各自的最高气温和最低气温。天气数据是一个典型的时间序列数据，每天的气温随着时间的推移进行变化，因此引入时间序列预测方法，建立 ARIMA 模型，结合已知的历史气象数据对未来的气温进行预测。

ARIMA(p,d,q) 模型可以表示为：

$$(1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i L^i)(1 - L)^d X_t = (1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i L^i) \varepsilon_t \tag{3}$$

p 代表预测模型中采用的时序数据本身的滞后数，q 代表预测模型中采用的预测误差的滞后数，d 代表时序数据需要进行几阶差分化使数据稳定，L 是滞后算子。以下是模型的预测步骤：

(1) 对原始数据数据进行平稳性检验，保证时间序列是平稳的。利用 ADF 单位根平稳型检验和 KPSS 检验判断数据是否平稳，判断方法如下:

表 2　数据平稳性的判定依据

数据平稳性 计算结果 / 检验方法	0	1
ADF	不平稳	平稳
KPSS	平稳	不平稳

因此当 ADF 检验的计算结果为 1、KPSS 检验的计算结果为 0 时数据是平稳的。如果数据不平稳，则需要进行差分，直到数据平稳时停止差分，此时的数据才能进行时间序列预测。

(2) 经过平稳性检验后的数据需要通过 ACF 和 PACF 两个函数来确定 ARIMA 模型阶数。首先根据平稳时间序列的自相关图判断 q，根据偏自相关图来判断 p，如图 1。

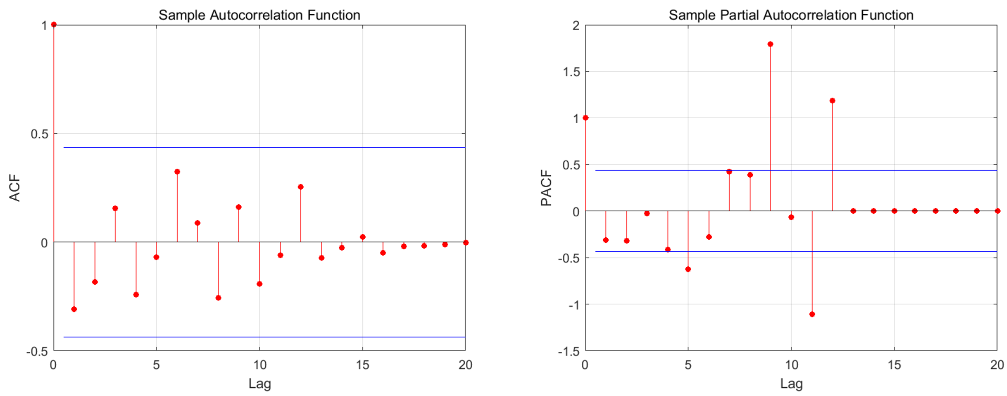

图 1　时间序列的自相关图和偏自相关图

如果 p 和 q 数字过大，需要通过 AIC 法则[2] 和 BIC 法则[2] 进行优化选择 p 和 q。

(3) 运用 MATLAB 构建模型，进行相关预测。

5.3 问题求解

5.3.1 预测最高气温和最低气温

为了保证预测的准确性，这里选取了三组 2011-2021 年中特定时间的最高气温和最低气温，分别是 7 月的气温、7 月 24 号 ~7 月 30 号的气温、7 月 29 号和 7 月 30 号的气温，即分别提取了月、周、日三组最高气温和最低气温的数据进行时间序列预测。

预测结果如图 2：

预测长度	相关值	最高气温(℃)		最低气温(℃)	
		29号	30号	29号	30号
月	p	1		13	
	q	1		1	
	估计值上限	38.53	38.52	32.65	32.77
	估计值下限	24.41	24.40	17.66	17.59
	估计值	31.47	31.46	25.16	25.18
	方差	12.98	12.98	14.61	15.01
周	p	1		11	
	q	1		2	
	估计值上限	39.09	39.09	28.49	28.11
	估计值下限	26.49	26.38	21.62	21.15
	估计值	32.79	32.73	25.06	24.63
	方差	10.33	10.52	3.07	3.15
日	p	12		10	
	q	0		4	
	估计值上限	35.88	37.07	26.29	26.28
	估计值下限	34.09	35.05	24.14	23.90
	估计值	34.98	36.06	25.22	25.09
	方差	0.21	0.27	0.30	0.37
天气预报	预报值	35	34	25	25

图 2　ARIMA 模型预测气温结果

可以看出，时间序列仅为 7 月 29 日和 7 月 30 日的数据时，预测的结果更接近天气预报的结果，而且估计值的方差很小，因此确定 2022 年 7 月 29 日的最高气温为 34.98°C、最低气温为 25.22°C，2022 年 7 月 30 日的最高气温为 36.06°C、最低气温为 25.09°C。

5.3.2 绘制气温日变化曲线

根据 2022 年 6 月 27 日杭州市的最高气温 36°C 和最低气温 28°C 代入正弦-指数气温模型求解：

$$T(t)=\begin{cases}8sin\dfrac{(t-5)\pi}{17}+28,5\leq t\leq 19\\ \dfrac{28-32.2115e^{-2.5}+4.2115e^{\frac{19-t}{4}}}{1-e^{-2.5}},19\leq t\leq 29(0\sim 5\text{时相当于}24\sim 29\text{时})\end{cases}\tag{4}$$

绘制曲线如图 3：

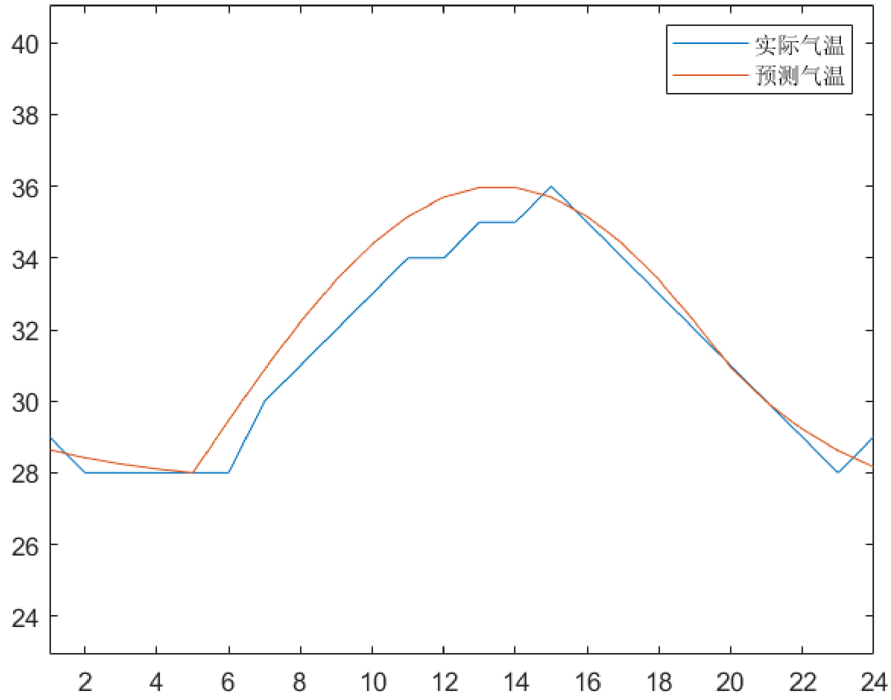

图 3　6 月 27 日实际气温和预测气温比较

MSE(均方误差)=0.680441640578137　相关系数 r=0.977470735071110

模型预测结果与实际误差较小，且相关系数接近与 1，预测气温的变化趋势与实际高度吻合。正弦-指数气温预测模型能够较好的预测气温。

再根据 ARIMA 模型预测出的 7 月 29 日和 30 日的最高气温和最低气温，使用正弦-指数气温预测模型得出 2022 年 7 月 29 日和 7 月 30 日杭州电子科技大学游泳馆内两天各自 24 小时的气温随时间变化函数：

7 月 29 日：

$$T(t)=\begin{cases}9.76sin\dfrac{(t-5)\pi}{17}+25.22, 5\leq t\leq 19\\ \dfrac{25.22-30.358e^{-2.5}+5.138e^{\frac{19-t}{4}}}{1-e^{-2.5}}, 19\leq t\leq 29(0\sim 5\text{时相当于}24\sim 29\text{时})\end{cases} \tag{5}$$

7 月 30 日：

$$T(t)=\begin{cases}10.97sin\dfrac{(t-5)\pi}{17}+25.09, 5\leq t\leq 19\\ \dfrac{25.09-30.865e^{-2.5}+5.775e^{\frac{19-t}{4}}}{1-e^{-2.5}}, 19\leq t\leq 29(0\sim 5\text{时相当于}24\sim 29\text{时})\end{cases} \tag{6}$$

绘制对应曲线如图 4 和图 5：

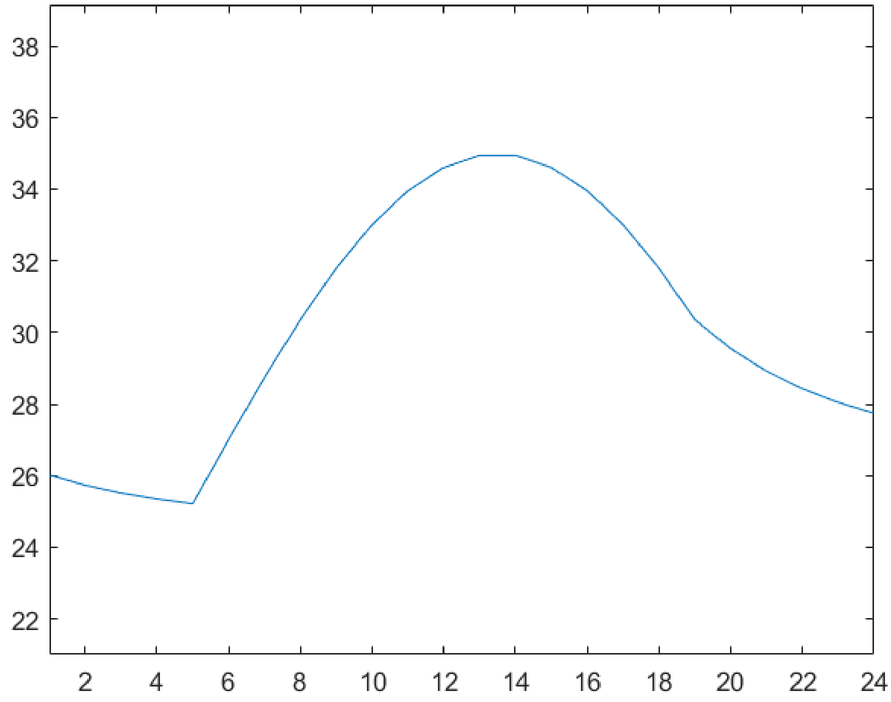

图 4　7 月 29 日 24 小时气温变化曲线

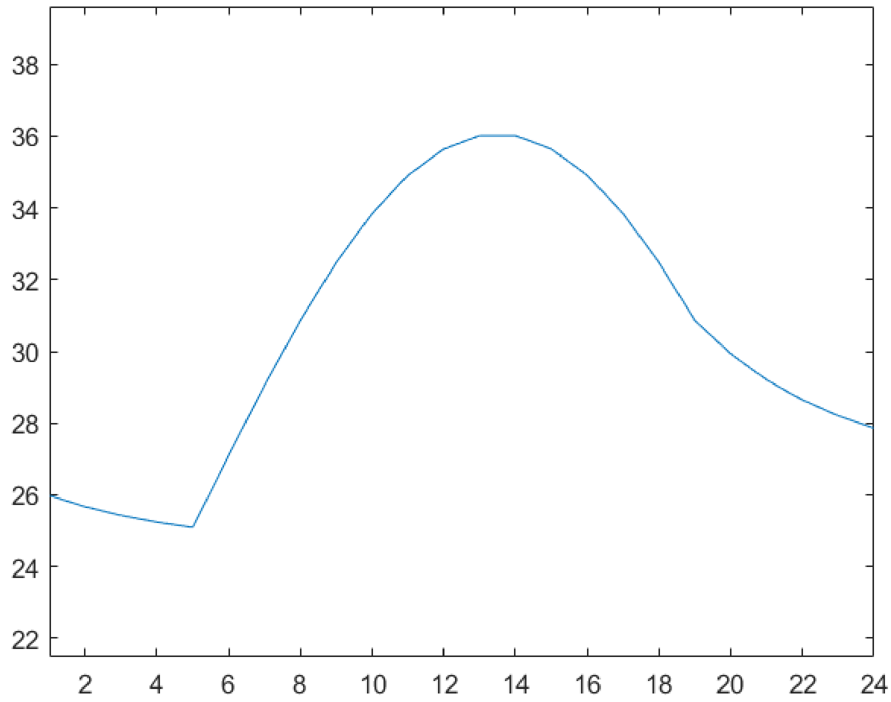

图 5　7 月 30 日 24 小时气温变化曲线

六、 问题二：无游泳者的余氯浓度变化模型

6.1 常温下余氯浓度变化模型

在无游泳者的情况下，当气温为常温 25°C 时，由于游泳池水中氯的反应速率 v 与余氯浓度 y 成正比，且余氯的起始浓度 y_0 为 0.6mg/L，即

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky \tag{7}$$

k 为比例系数，求解得出：

$$y(t)=y_0e^{kt} \tag{8}$$

而且余氯从起始浓度反应降到 0.05mg/L 时得到平均反应速率 $\bar{v}$ 为 0.025mg/(L·h)，即

$$\frac{\triangle y}{\triangle t}=\bar{v} \tag{9}$$

得出余氯浓度达到 0.05mg/L 的时长 $\triangle t=22h$，解得比例系数 $k=\frac{1}{22}\ln\frac{1}{12}$，则余氯浓度与时间的关系为：

$$y(t)=0.6e^{\frac{t}{22}\ln\frac{1}{12}} \tag{10}$$

绘制出的余氯浓度随时间的变化曲线如图：

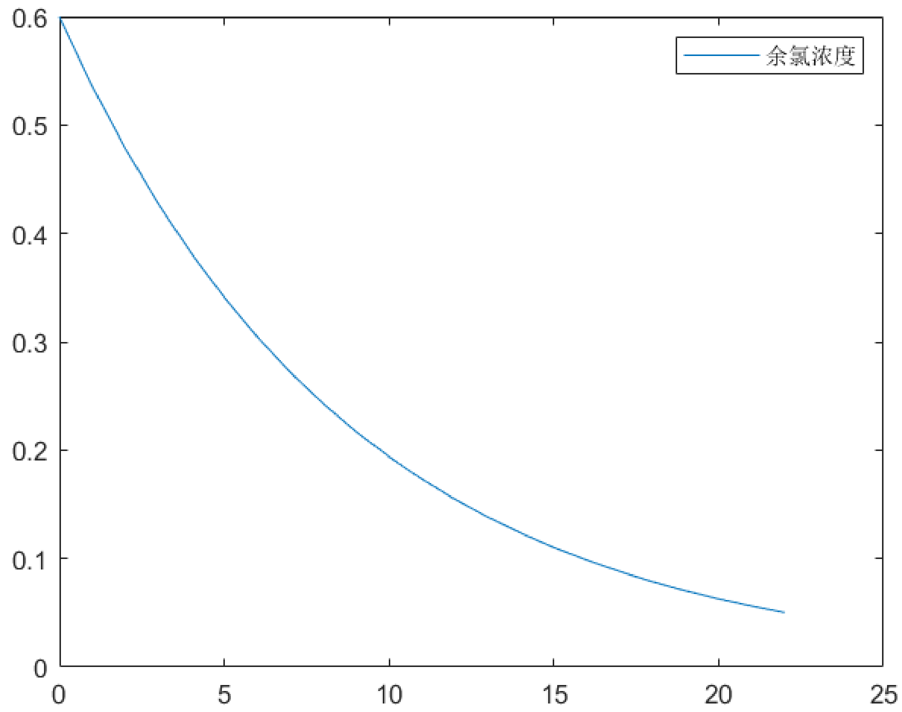

图 6　25°C 时余氯浓度随时间的变化曲线

6.2 无游泳者余氯浓度变化模型

6.2.1 模型建立

在无游泳者的情况下，由题意可知余氯反应速率与气温和浓度的关系式：

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=10^{\frac{T(t)-25}{5}}\cdot ky \tag{11}$$

由常温下的余氯浓度变化模型可知 $k=\frac{1}{22}\ln\frac{1}{12}$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=10^{\frac{T(t)-25}{5}}\cdot\frac{y}{22}\ln\frac{1}{12} \tag{12}$$

由于 T(t) 的函数很复杂，因此无法得到余氯浓度随时间变化的精确解，选择运用四阶龙格—库塔数值解法进行求解，求解公式如下：

$$\begin{cases} k_1=f(t(k),y(k)) \\ k_2=f(t(k)+\frac{h}{2},y(k)+\frac{h}{2}k_1) \\ k_3=f(t(k)+\frac{h}{2},y(k)+\frac{h}{2}k_2) \\ k_4=f(t(k)+h,y(k)+hk_3) \\ y(k+1)=y(k)+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+3k_3+k_4) \\ y(0)=0.6 \end{cases} \tag{13}$$

6.2.2 模型求解

由问题一得到的 2022 年 7 月 29 日的气温随时间变化的函数，得到 7 月 29 日无游泳者余氯浓度变化微分方程，然后利用四阶龙格-库塔数值算法进行求解。

$$f(t,y)=\begin{cases} 10^{\frac{10.97sin\frac{(t-5)\pi}{17}+0.09}{5}}\cdot\frac{y}{22}\ln\frac{1}{12},5\le t\le 19 \\ 10^{\frac{\frac{25.09-30.865e^{-2.5}+5.775e^{\frac{19-t}{4}}}{1-e^{-2.5}}-25}{5}}\cdot\frac{y}{22}\ln\frac{1}{12},19\le t\le 29(0\sim 5\text{时相当于}24\sim 29\text{时}) \end{cases} \tag{14}$$

绘制的曲线图如图：

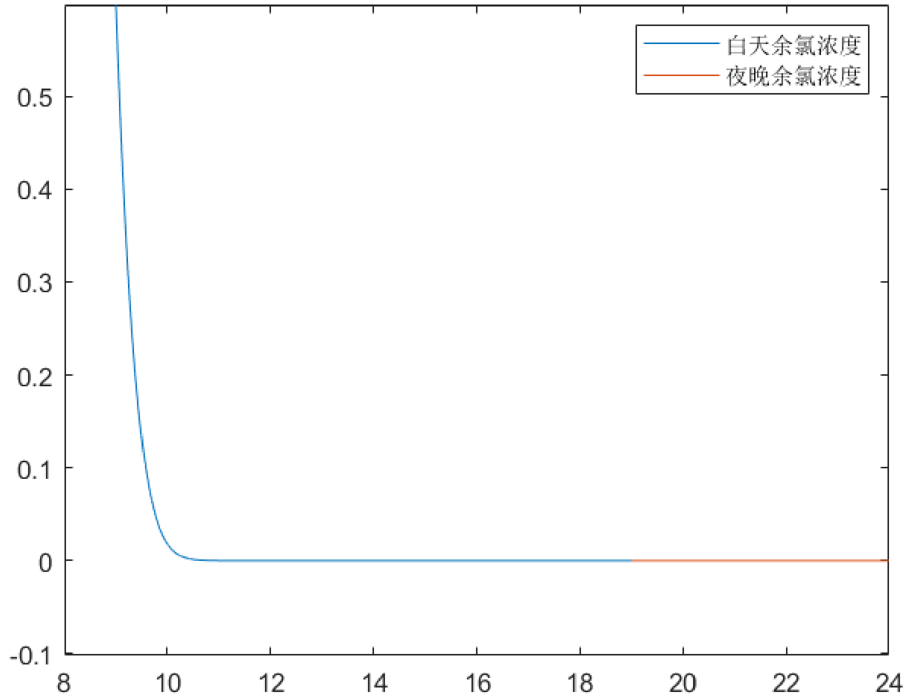

图 7　7 月 29 日一整天池水中余氯浓度随时间变化曲线图

已知早上 9 点整初始池水余氯浓度为 0.6mg/L，则杭电游泳馆 2022 年 7 月 29 日池水中余氯量下降低至 0.4mg/L 的时刻为 9：08：59。

七、 问题三：有游泳者的余氯浓度变化模型

7.1 常温下有游泳者余氯浓度变化模型

根据查询文献[3] 及其数据显示：人体的汗液和其他分泌物及人体表皮携带的菌类会与游泳池水中的余氯反应，使得余氯浓度降低，并且由于运动中的人体的搅动，增加了池水与空气的接触，空气中的尘埃含有大量的卫生物，这也会增加余氯浓度的下降。

根据附件 3 给出的常温下 (25°C) 游泳人数和 1 小时后余氯浓度下降统计数据，如图：

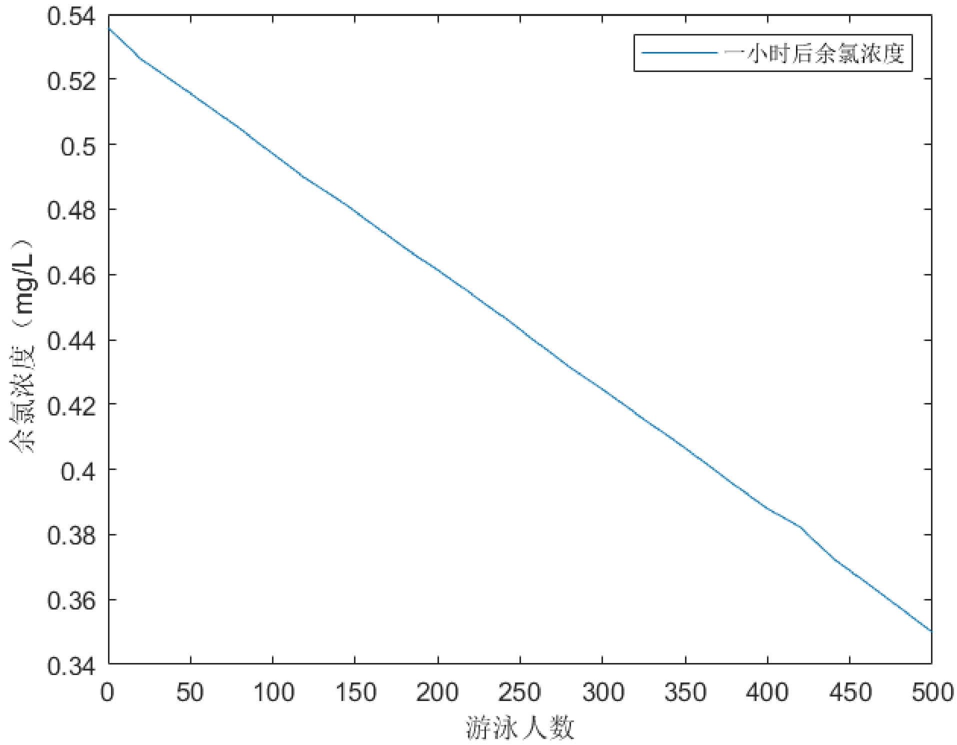

图 8　泳池 25°C 水温时游泳人数与 1 小时后余氯浓度关系

由图得,游泳人数与 1 小时后余氯浓度关系成线性关系，根据附件数据及查阅文献[4]得到游泳人数增加而消耗的余氯浓度速率与人数成正比，与当前余氯浓度关系不大。故其斜率即为每增加一个游泳者所需增加的消耗余氯浓度速率。

设该线性关系为：

$$y = v_{人} * n + b \tag{15}$$

采用最小二乘法得：$v_{人}$=-0.000367，b=0.534415　（a 为初始预估值）

再根据常温下 (25°C) 余氯浓度变化模型加入游泳者人数增加的消耗余氯浓度速率得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{22}\ln\frac{1}{12} - v_{人} * n \tag{16}$$

再根据初值为 0.6 得到：

$$y(t) = 0.6e^{\frac{t}{22}\ln\frac{1}{12}} - v_{人} * n * t \tag{17}$$

将 t(时间) 固定为 1，n(游泳人数) 为变量，得到 25°C 时 1 小时后余氯浓度和游泳人数的函数：

$$y(n) = 0.6e^{\frac{1}{22}\ln\frac{1}{12}} - v_{人} * n * t \tag{18}$$

$v_{人}$ 的初始预估值代入计算得：

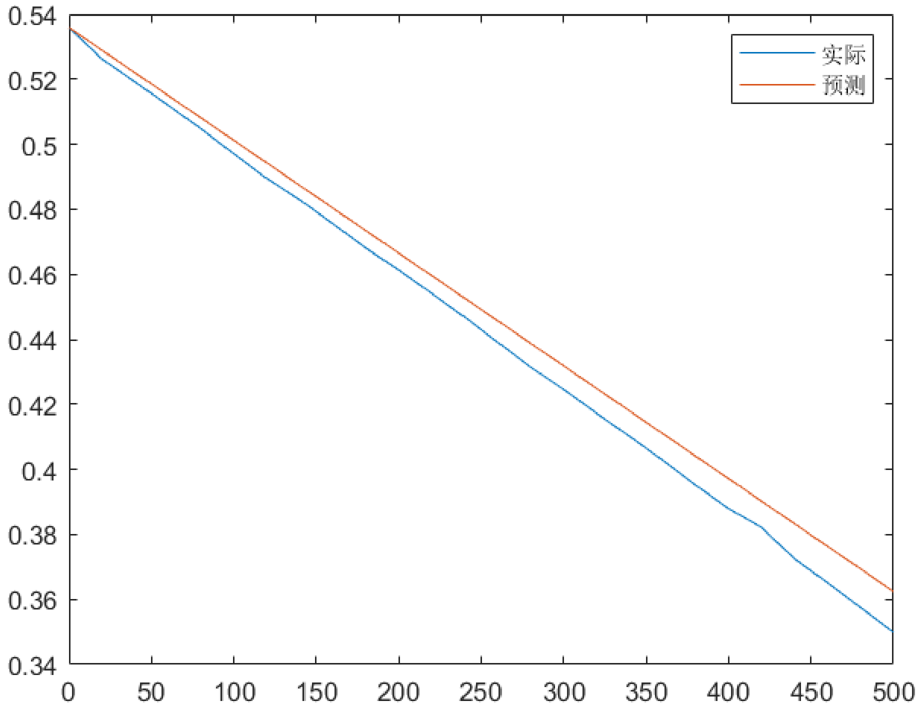

图 9　$v_{人}$=-0.000367 时预测曲线和实际曲线比较

MSE(均方偏差)=0.000049，由图得误差较大。故将 $v_{人}$ 在 [-0.0004,-0.0003] 区间里以 0.000001 为步长进行搜索，找到一个使得误差尽量小的值。

搜索后得到 $v_{人}$=-0.000393 时，误差最小，MSE=0.000001，如图：

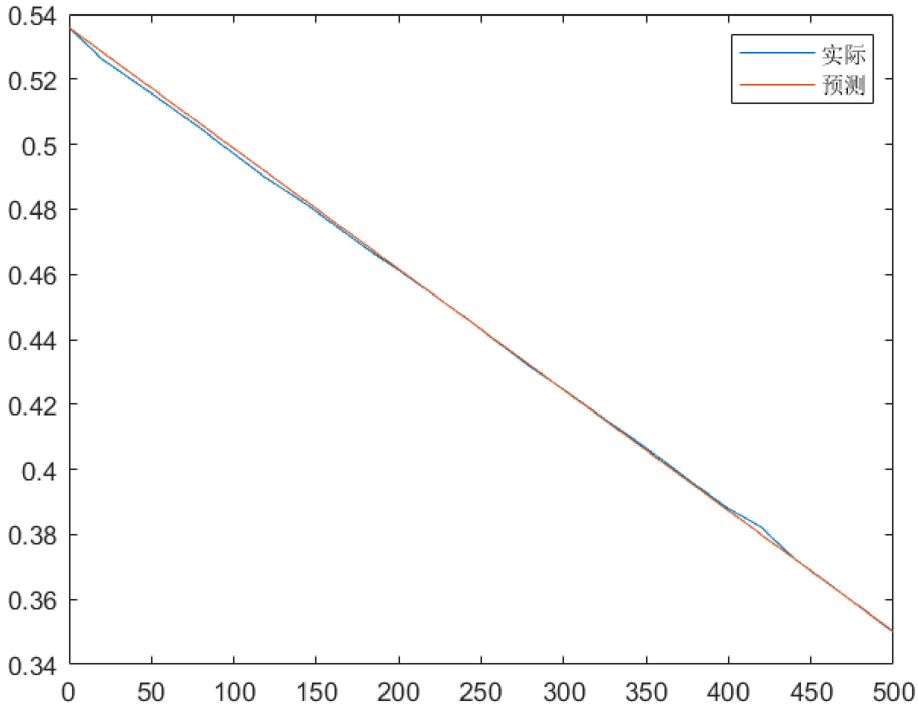

图 10　$v_{人}$=-0.000393 时预测曲线和实际曲线比较

由图得预测曲线与实际曲线基本吻合，故确定 $v_{人}$ 取-0.000393。

7.2 有游泳者余氯浓度变化模型

7.2.1 模型建立

将游泳者增加的消耗余氯浓度速率加入到问题二中的余氯浓度变化微分方程中，得到：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 10^{\frac{T(t)-25}{5}} \cdot \frac{y}{22}\ln\frac{1}{12} - 0.000393 * n \tag{19}$$

同样运用四阶龙格—库塔数值解法进行求解，求解公式如下：

$$\begin{cases} k_1 = f(t(k), y(k)) \\ k_2 = f(t(k) + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t(k) + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t(k) + h, y(k) + hk_3) \\ y(k+1) = y(k) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4) \\ y(0) = 0.6 \end{cases} \tag{20}$$

7.3 模型求解

由问题一得到的 2022 年 7 月 30 日的气温随时间变化的函数，得到 7 月 30 日的有游泳者余氯变化微分方程，利用四阶龙格-库塔方法进行求解。

$$
f(t,y)=\begin{cases}10^{\frac{10.97sin\frac{(t-5)\pi}{17}+0.09}{5}}\cdot\frac{y}{22}\ln\frac{1}{12}-0.000393*n,5\leq t\leq 19\\ 10^{\frac{\frac{25.09-30.865e^{-2.5}+5.775e^{\frac{19-t}{4}}}{1-e^{-2.5}}-25}{5}}\cdot\frac{y}{22}\ln\frac{1}{12}-0.000393*n\\ \quad ,19\leq t\leq 29(0\sim 5\text{时相当于}24\sim 29\text{时})\end{cases} \tag{21}
$$

根据题中所给的每个场次中每小时的游泳人数和时间进行计算，在开放场次里，每当余氯下降低于下限（0.4mg/L）时记录下该时间点，并加药使得泳池余氯浓度增加至0.6mg/L，继续计算。在非开放场次里，就不需要加药。

得到一天内 (9 点以后) 余氯浓度值与时间的变化曲线图：

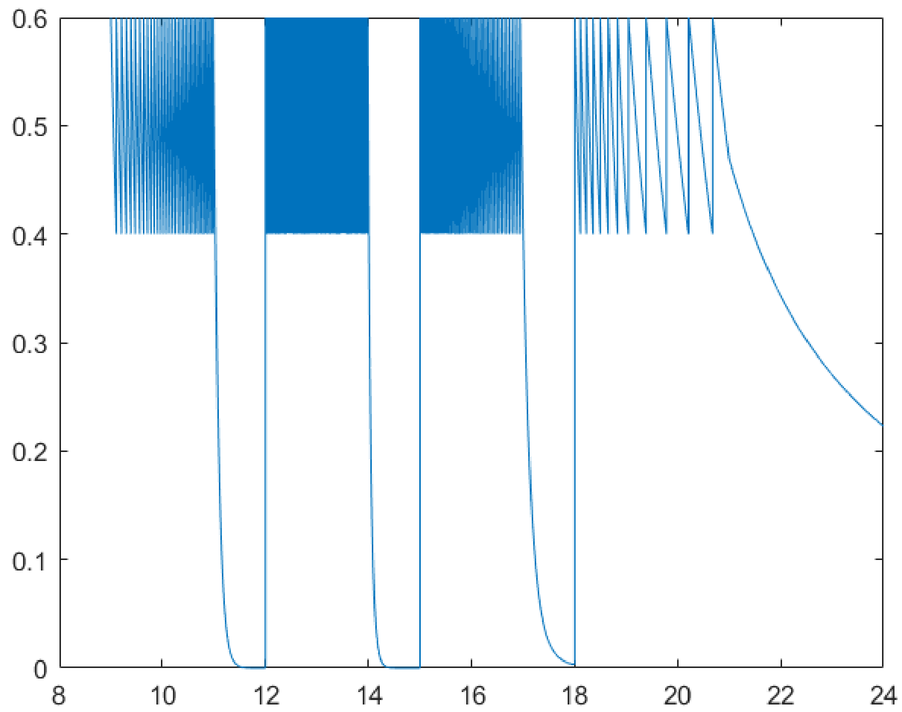

图 11　一天内 (9 点以后) 余氯浓度值与时间的变化曲线图

一天内加药的时间点的表格过大，故见附录。

八、 问题四：游泳馆的营收优化模型

8.1 模型建立

根据问题一，得到 7 月平均最高气温为 34°C，平均最低气温为 25°C。考虑到游泳馆内温度较外界较低，根据经验公式故取游泳馆温度低外界气温 2°C。

考虑到顾客体验和水质标准，设定游泳池内余氯浓度在 0.4-0.5(mg/L) 区间内，每隔一小时改变游泳馆内限制人数。要使杭电游泳馆在固定开放场次的前提下，获得尽可能高的营业收入。可简化成每一小时内允许进入的人数尽可能高。

根据附件 4 给出的泳池余氯浓度增量与加药时间关系的统计数据，如图：

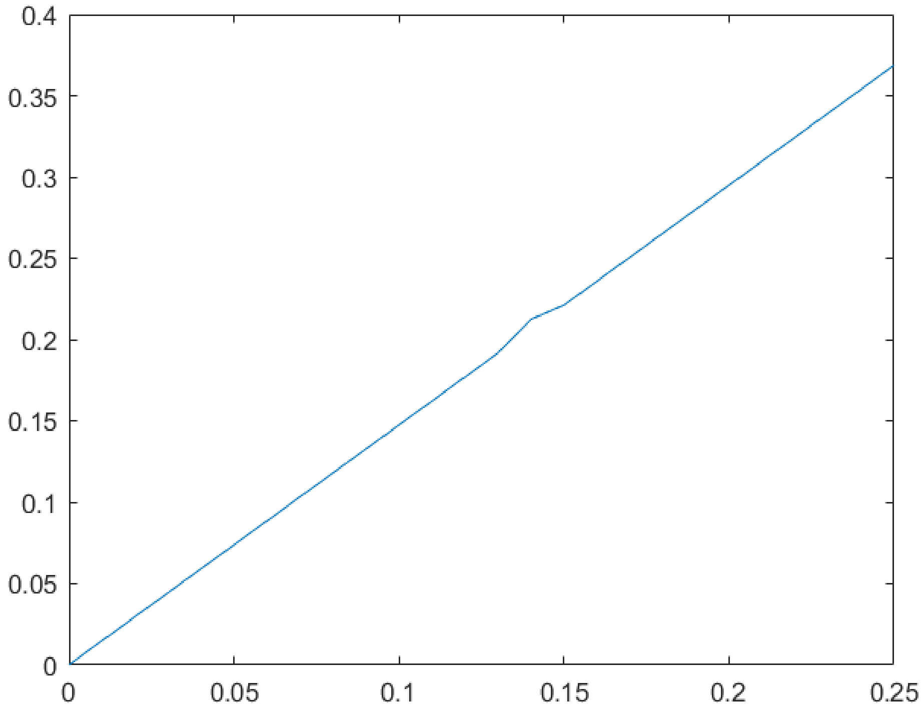

图 12　泳池余氯浓度增量与加药时间关系图

由图得，余氯浓度增量与加药时间成正比，即其斜率为单位时间内加药的速率。设该线性关系为：

$$y = v_{药} * t \tag{22}$$

采用最小二乘法得：$v_{药}$=1.4754 MSE=0.0002, 如图：

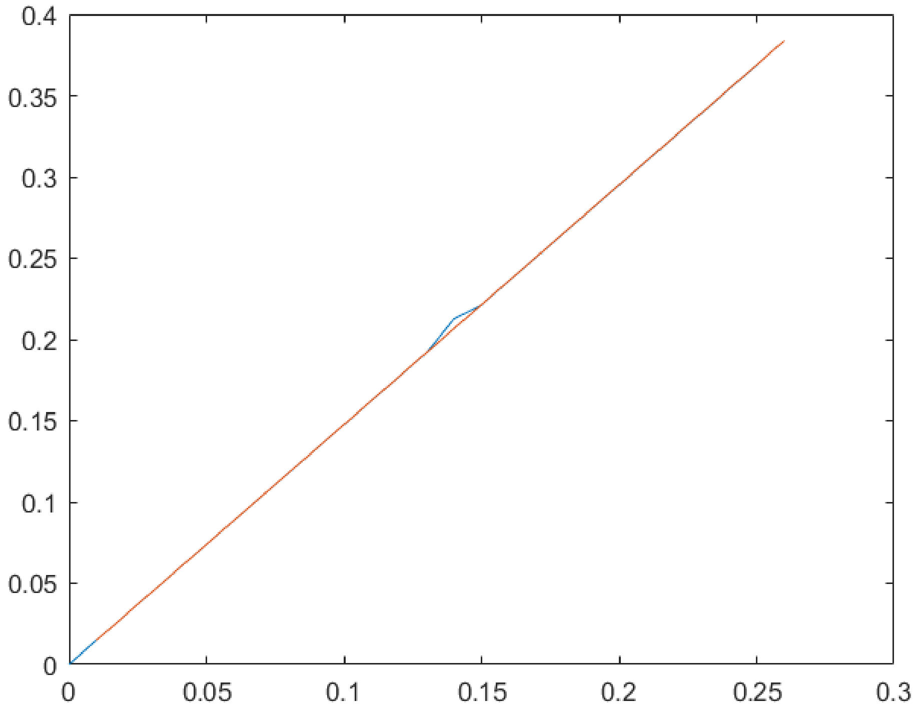

图 13 泳池余氯浓度增量与加药时间关系预测与实际比较

由上得加药时有游泳者余氯变化微分方程:

$$f_{加药}(t,y,n)=\begin{cases}10^{\frac{10.97sin\frac{(t-5)\pi}{17}-2}{5}}\cdot\dfrac{y}{22}\ln\dfrac{1}{12}-0.000393*n+1.4759, 5\leq t\leq 19\\ 10^{\frac{\frac{25.09-30.865e^{-2.5}+5.775e^{\frac{19-t}{4}}}{1-e^{-2.5}}-27}{5}}\cdot\dfrac{y}{22}\ln\dfrac{1}{12}-0.000393*n+1.4759\\ \quad ,19\leq t\leq 29(0\sim 5\text{时相当于}24\sim 29\text{时})\end{cases} \tag{23}$$

约束条件: 在加药时，泳池中的余氯浓度可以到达设定区间的上限 0.5mg/L。基于上述条件，得到从 i 时到 i+1 时段内的单目标规划模型:

$$\textbf{max } n$$
$$s.t.\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t,y,n)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}>0\\ t\in[i,i+1]\\ h\in[0,521]\\ y\in[0.4,0.5]\end{cases} \tag{24}$$

8.2 模型求解

由上述的约束条件，使用四阶龙格-库塔数值解法解得在 7 月温度条件下，余氯浓度在 [0.4,0.5] 波动每一时刻泳池能容许的最大人数如下图:

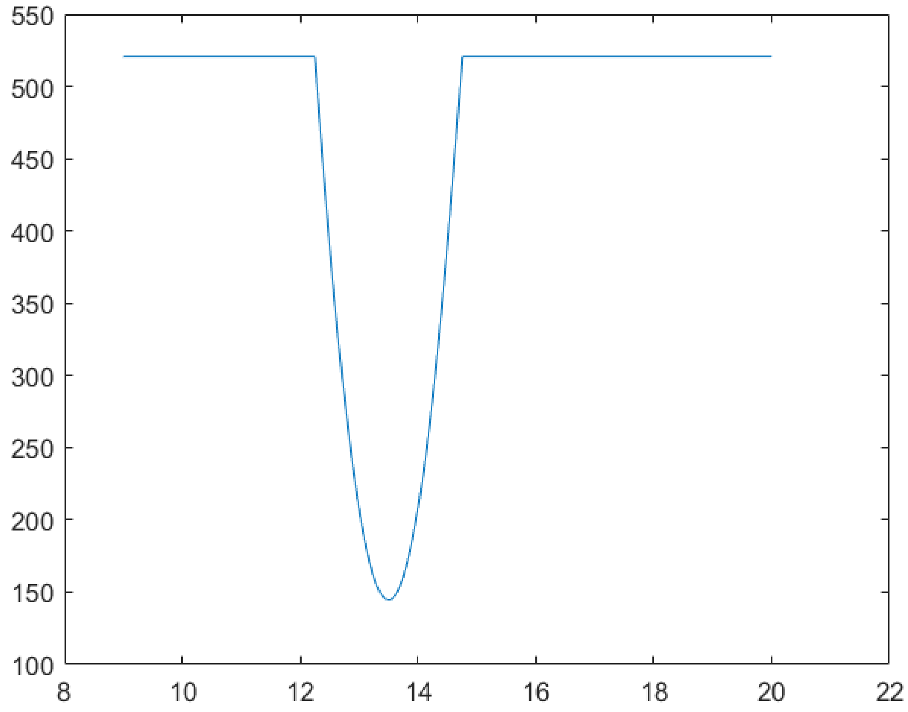

图 14　每一时刻泳池能容许的最大人数

根据杭电泳池开放场次时间，得到每小时泳池的限制人数如下表：

表 3　游泳池开放时间段的最大游泳人数

上午	9:00-10:00	10:00-11:00	12:00-13:00
人数	521	521	207
下午	13:00-14:00	15:00-16:00	16:00-17:00
人数	144	521	521
晚上	18:00-19:00	19:00-20:00	20:00-21:00
人数	521	521	521

8.3 相关建议

根据模型可以发现，在温度较高情况下，余氯的反应速率大幅增快，使得泳池能容许的最大人数大幅下降，因此我们提出以下建议：

(1) 游泳馆内增加控温设备，使得游泳馆内室温尽量保持在 25°C。

(2) 增设余氯浓度实时检测设备，精准的控制加药时间点和加药时间。

(3) 在开放场次整时点，计算下一小时内游泳池能容许的最大人数，进行对限入人数做出调整。
(4) 可以对气温较低的上午开放时段和晚上开放时段的票价进行适当的下调，吸引更多的顾客。

九、 模型的评价、改进与推广

9.1 模型的优点

(1) 本文对杭州游泳馆天气状况进行了合理的假设，降低了了温度的预测难度。
(2) 本文通过调整泳池余氯浓度变化区间，增加顾客的游泳体验感，来提高运营收入。

9.2 模型的不足

(1) 现实中气温变化是混沌系统，气温随时处于随机波动状态是难以预测的。
(2) 本文仅考虑了泳池能容纳的最大人数来衡量运营收入，还行考虑一天内游泳者来游泳的变化趋势。

9.3 模型的改进与推广

(1) 时间序列预测模型虽然合理, 但准确性不高, 后期可以根据实时数据试着采用其他算法对气温进行预测。
(2) 在考虑温度，人数，气温对余氯反应速率的影响时，可以进一步考虑水温等因素改进后的模型，可对泳池人数调控更精确，加药时间点更准确。

参考文献

[1] 余卫东. 气温日变化过程的模拟与订正 [C]. //2008 年全国农业气象学术年会论文集. 2008:379-383.

[2] 时间序列 (ARIMA) 模型及其 matlab 实现 [OL]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/495845415. 2022/04/10.

[3] 影响泳池余氯的五大因素 [OL].http://www.szpool.net/tips/t804.html.2020/01/16

[4] 余氯量在游泳池中的变化 [OL].https://wenku.baidu.com/view/4f1ff4db53e79b89680203d8ce2f0066f53364fa.html?qq-pf-to=pcqq.c2c.2022/06/29

十、附录

本文代码均使用 MATLAB　R2021b 进行编译。

10.1 MATLAB 实现问题一

10.1.1 白天的气温函数

```
function Td = Td(t,Tmax,Tmin,dl,p)
%UNTITLED2 此处显示有关此函数的摘要
%   此处显示详细说明
Td=Tmin+(Tmax-Tmin)*sin((pi*(t-12+dl/2))/(dl+2*p));
end
```

10.1.2 夜间的气温函数

```
function Te = Te(t,tsset,Tmin,Tsset,n,q)
%UNTITLED2 此处显示有关此函数的摘要
%   此处显示详细说明
Te=(Tmin-Tsset*exp(-n/q)+(Tsset-Tmin)*exp(-(t-tsset)/q))/(1-exp(-n/q));
end
```

10.1.3 ARIMA 预测模型

```
clear,clc
%导入数据
load daymax;
data=daymax';
%平稳性检验
[ddata d]=Test(data);
%绘制自相关与偏自相关图
figure;autocorr(ddata);ylabel('ACF'); %ACF确定q值
figure;parcorr(ddata);ylabel('PACF'); %PACF确定p值

p=12;q=0;
% %计算pq取值(pd值难确定时使用暴力破解法)
% pmax=5;qmax=5;
% [p q]=findPQ(data,pmax,qmax,d);

%建立ARIMA模型
Mdl=arima(p,d,q);
EstMdl=estimate(Mdl,data');

%模型预测
step=3;
[forData,YMSE]=forecast(EstMdl,step,'Y0',data');
lower=forData-1.96*sqrt(YMSE); %95%置信区间下限
```

```
upper=forData+1.96*sqrt(YMSE); %95%置信区间上限

%平稳性检验函数
function [data d]=Test(origin)
%输入:origin(原始数据)
%输出:data(平稳数据)和d(差分阶数)
   for i=0:5
      if adftest(origin)==1&&kpsstest(origin)==0
         data=origin;
         d=i;
         break;
      else
         origin=diff(origin);
      end
   end
end

%通过AIC与BIC准则确定pq取值函数
function [p q]=findPQ(data,pmax,qmax,d)
%输入: data(平稳时间序列) pmax(p预估最大值) qmax(q预估最大值) d(差分阶数)
%输出: p(模型阶数) q(模型阶数)
   data=reshape(data,length(data),1);
   LOGL=zeros(pmax+1,qmax+1);
   PQ=zeros(pmax+1,qmax+1);
   for p=0:pmax
      for q=0:qmax
         model=arima(p,d,q);
         [fit,~,logL]=estimate(model,data); %指定模型的结构
         LOGL(p+1,q+1)=logL;
         PQ(p+1,q+1)=p+q; %计算拟合参数的个数
      end
   end
   LOGL=reshape(LOGL,(pmax+1)*(qmax+1),1);
   PQ=reshape(PQ,(pmax+1)*(qmax+1),1);
   m2=length(data);
   [aic,bic]=aicbic(LOGL,PQ+1,m2);
   aic0=reshape(aic,(pmax+1),(qmax+1));
   bic0=reshape(bic,(pmax+1),(qmax+1));
   aic1=min(aic0(:));
   index=aic1==aic0;
   [pp qq]=meshgrid(0:pmax,0:qmax);
   p0=pp(index);
   q0=qq(index);
   aic2=min(bic0(:));
   index=aic2==bic0;
   [pp qq]=meshgrid(0:pmax,0:qmax);
   p1=pp(index);
   q1=qq(index);
   if p0^2+q0^2>p1^2+q1^2
      p=p1;
      q=q1;
```

```
    else
        p=p0;
        q=q0;
    end
end
```

10.1.4 绘制气温曲线图

```
T=[];
dl=14;
tsset=19;
n=24-dl;
p=1.5;
q=4;
%白天从5-19, 夜间0-5, 19-24,即t=19-23, 24-29.
Tmin=25.09;
Tmax=36.06;
%T1=Td(t,Tmax,Tmin,dl,p);
Tsset=Td(tsset,Tmax,Tmin,dl,p);
%T2=Te(t,tsset,Tmin,Tsset,n,q);
for t=1:4%25-28
    T(t)=Te(t+24,tsset,Tmin,Tsset,n,q);
end

for t=5:19
    T(t)=Td(t,Tmax,Tmin,dl,p);
end

for t=20:24
    T(t)=Te(t,tsset,27,Tsset,n,q);
end
T=T'
plot(t0,T)

% d=T-T0
% d=d.^2
%
% m=mean(d)%MSE
% r=corr(T,T0)%相关系数

% plot(t0,T0,t0,T)
% legend('实际气温','预测气温');

axis equal
```

10.2 MATLAB 实现问题二

10.2.1 白天的余氯浓度函数

```
function f=fun1(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25.2163605408939+(34.9828941193427-25.2163605408939)*
sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5);
end
```

10.2.2 夜间的余氯浓度函数

```
function f=fun2(t,y)
Tsset=Td(19,34.9828941193427,25.2163605408939,14,1.5);
f=-0.112950302263091*y*10^(((25.2163605408939-Tsset*exp(-10/4)+(Tsset-25.2163605408939)*
exp(-(t-18)/4))/(1-exp(-10/4))-25)/5);
end
```

10.2.3 绘制常温下余氯浓度变化曲线图

```
t=[0:22];
y=[];
for i= 0:22
    y(i+1)=0.6*exp(i/22*(log(1/12)))
end
plot(t,y)
legend('余氯浓度');
```

10.2.4 绘制无游泳者余氯浓度变化曲线图

```
[t1,T1]=ode45(@fun1,[9:0.0001:19],0.6)
[t2,T2]=ode45(@fun2,[19:0.0001:24],T1(100001))
plot(t1,T1,t2,T2)
legend('白天余氯浓度','夜晚余氯浓度');
```

10.3 MATLAB 实现问题三

10.3.1 步长搜索最优预估值

```
cbest=0;
min=1;
for c=0.0003:0.000001:0.0004
    nmgL=[]
    for i=1:27
        [t1,V1]=ode45(@(t,y)-0.112950302263091*y-num(i)*c,[0:0.1:1],0.6);
        nmgL(i)=V1(11);
    end

    nmgL=nmgL'
```

```
    d=mgL-nmgL;
    d=d.^2;
    m=mean(d)%MSE
    if m<min
        min=m;
        cbest=c;
    end
end
nmgL=[]
for i=1:27
    [t1,V1]=ode45(@(t,y)-0.112950302263091*y-num(i)*cbest,[0:0.1:1],0.6);
    nmgL(i)=V1(11);
end
nmgL=nmgL'
d=mgL-nmgL;
d=d.^2;
m=mean(d)%MSE
plot(num,mgL,num,nmgL)
legend('实际','预测');
```

10.3.2 绘制有游泳者余氯浓度变化曲线图

```
% plot(num,mgL);
% [a,b]=polyfit(num,mgL,1);
t0=[];
V0=[];
k=1;
%9-11点场
time1=[];
i=1;
time1(i)=9;
while time1(i)<10
    [t1,V1]=ode45(@fun9,[time1(i):0.0001:10],0.6);
    j=1;
    while V1(j)>=0.4 && t1(j)<10
        t0(k)=t1(j);
        V0(k)=V1(j);
        k=k+1;
        j=j+1;
    end
    if V1(j)>=0.4 && t1(j)>=10
        break
    end
    i=i+1
    time1(i)=t1(j);
end

V10=min(V1);
[t1,V1]=ode45(@fun10,[10:0.0001:11],V10);
j=1;
```

```
while V1(j)>=0.4 && t1(j)<11
    t0(k)=t1(j);
    V0(k)=V1(j);
    k=k+1;
    j=j+1;
end
i=i+1
time1(i)=t1(j);
while time1(i)<11
    [t1,V1]=ode45(@fun10,[time1(i):0.0001:11],0.6);
    j=1;
    while V1(j)>=0.4 && t1(j)<11
        t0(k)=t1(j);
        V0(k)=V1(j);
        k=k+1;
        j=j+1;
    end
    if V1(j)>=0.4 && t1(j)==11
        break
    end
    i=i+1
    time1(i)=t1(j);
end
V11=min(V1)
%11-12
[t1,V1]=ode45(@fund,[11:0.0001:12],V11)
j=1;
while t1(j)<12
    t0(k)=t1(j);
    V0(k)=V1(j);
    k=k+1;
    j=j+1;
end


%12-14点场
time2=[];
i=1;
time2(i)=12;
while time2(i)<13
    [t1,V1]=ode45(@fun12,[time2(i):0.0001:13],0.6);
    j=1;
    while V1(j)>=0.4 && t1(j)<13
        t0(k)=t1(j);
        V0(k)=V1(j);
        k=k+1;
        j=j+1;
    end
    if V1(j)>=0.4 && t1(j)>=13
        break
    end
```

```
    i=i+1
    time2(i)=t1(j);
end

V13=min(V1);
[t1,V1]=ode45(@fun13,[13:0.0001:14],V13);
j=1;
while V1(j)>=0.4 && t1(j)<14
    t0(k)=t1(j);
    V0(k)=V1(j);
    k=k+1;
    j=j+1;
end
i=i+1
time2(i)=t1(j);
while time2(i)<14
    [t1,V1]=ode45(@fun13,[time2(i):0.0001:14.0001],0.6);
    j=1;
    while V1(j)>=0.4 && t1(j)<14
        t0(k)=t1(j);
        V0(k)=V1(j);
        k=k+1;
        j=j+1;
    end
    if V1(j)>=0.4 && t1(j)>=14
        break
    end
    i=i+1
    time2(i)=t1(j);
end
V14=min(V1)
%14-15
[t1,V1]=ode45(@fund,[14:0.0001:15],V14)
j=1;
while t1(j)<15
    t0(k)=t1(j);
    V0(k)=V1(j);
    k=k+1;
    j=j+1;
end




%15-17点场
time3=[];
i=1;
time3(i)=15;
while time3(i)<16
    [t1,V1]=ode45(@fun15,[time3(i):0.0001:16],0.6);
    j=1;
```

```
    while V1(j)>=0.4 && t1(j)<16
        t0(k)=t1(j);
        V0(k)=V1(j);
        k=k+1;
        j=j+1;
    end
    if V1(j)>=0.4 && t1(j)>=16
        break
    end
    i=i+1
    time3(i)=t1(j);
end

V16=min(V1);
[t1,V1]=ode45(@fun16,[16:0.0001:17],V16);
j=1;
while V1(j)>=0.4 && t1(j)<17
    t0(k)=t1(j);
    V0(k)=V1(j);
    k=k+1;
    j=j+1;
end
i=i+1
time3(i)=t1(j);
while time3(i)<17
    [t1,V1]=ode45(@fun16,[time3(i):0.0001:17.0001],0.6);
    j=1;
    while V1(j)>=0.4 && t1(j)<17
        t0(k)=t1(j);
        V0(k)=V1(j);
        k=k+1;
        j=j+1;
    end
    if V1(j)>=0.4 && t1(j)>=17
        break
    end
    i=i+1
    time3(i)=t1(j);
end

V17=min(V1)
%17-18
[t1,V1]=ode45(@fund,[17:0.0001:18],V17)
j=1;
while t1(j)<18
    t0(k)=t1(j);
    V0(k)=V1(j);
    k=k+1;
    j=j+1;
end
```

```
%18-21点场
time4=[];
i=1;
time4(i)=18;
while time4(i)<19
    [t1,V1]=ode45(@fun18,[time4(i):0.0001:19],0.6);
    j=1;
    while V1(j)>=0.4 && t1(j)<19
        t0(k)=t1(j);
        V0(k)=V1(j);
        k=k+1;
        j=j+1;
    end
    if V1(j)>=0.4 && t1(j)>=19
        break
    end
    i=i+1
    time4(i)=t1(j);
end

V19=min(V1);
[t1,V1]=ode45(@fun19,[19:0.0001:20],V19);
j=1;
while V1(j)>=0.4 && t1(j)<20
    t0(k)=t1(j);
    V0(k)=V1(j);
    k=k+1;
    j=j+1;
end
i=i+1
time4(i)=t1(j);
while time4(i)<20
    [t1,V1]=ode45(@fun19,[time4(i):0.0001:20.0001],0.6);
    j=1;
    while V1(j)>=0.4 && t1(j)<20
        t0(k)=t1(j);
        V0(k)=V1(j);
        k=k+1;
        j=j+1;
    end
    if V1(j)>=0.4 && t1(j)>=20
        break
    end
    i=i+1
    time4(i)=t1(j);
end

V20=min(V1);
[t1,V1]=ode45(@fun20,[20:0.0001:21],V20);
j=1;
```

```
while V1(j)>=0.4 && t1(j)<21
    t0(k)=t1(j);
    V0(k)=V1(j);
    k=k+1;
    j=j+1;
end
i=i+1
time4(i)=t1(j);
while time4(i)<21
    [t1,V1]=ode45(@fun20,[time4(i):0.0001:21.0001],0.6);
    j=1;
    while V1(j)>=0.4 && t1(j)<21
        t0(k)=t1(j);
        V0(k)=V1(j);
        k=k+1;
        j=j+1;
    end
    if V1(j)>=0.4 && t1(j)>=21
        break
    end
    i=i+1
    time4(i)=t1(j);
end

V21=min(V1)
%21-24
[t1,V1]=ode45(@fune,[21:0.0001:24],V21)
j=1;
while t1(j)<24
    t0(k)=t1(j);
    V0(k)=V1(j);
    k=k+1;
    j=j+1;
end
time1=time1'
time2=time2'
time3=time3'
time4=time4'

plot(t0,V0)







%上午场
function f=fun9(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25.0887665176789+(36.0607510392325-25.0887665176789)* ...
    sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5)-80*3.928000000000000e-04;
```

```
end
function f=fun10(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25.0887665176789+(36.0607510392325-25.0887665176789)* ...
    sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5)-190*3.928000000000000e-04;
end
%下午1
function f=fun12(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25.0887665176789+(36.0607510392325-25.0887665176789)* ...
    sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5)-3.928000000000000e-04*220;
end
function f=fun13(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25.0887665176789+(36.0607510392325-25.0887665176789)* ...
    sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5)-3.928000000000000e-04*340;
end
%下午2
function f=fun15(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25.0887665176789+(36.0607510392325-25.0887665176789)* ...
    sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5)-3.928000000000000e-04*280;
end
function f=fun16(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25.0887665176789+(36.0607510392325-25.0887665176789)* ...
    sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5)-3.928000000000000e-04*380;
end
%晚上
function f=fun18(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25.0887665176789+(36.0607510392325-25.0887665176789)* ...
    sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5)-3.928000000000000e-04*320;
end

function f=fun19(t,y)
Tsset=Td(19,36.0607510392325,25.0887665176789,14,1.5);
f=-0.112950302263091*y*10^(((25.0887665176789-Tsset*exp(-10/4)+(Tsset-25.0887665176789)* ...
    exp(-(t-18)/4))/(1-exp(-10/4))-25)/5)-3.928000000000000e-04*480;
end
function f=fun20(t,y)
Tsset=Td(19,36.0607510392325,25.0887665176789,14,1.5);
f=-0.112950302263091*y*10^(((25.0887665176789-Tsset*exp(-10/4)+(Tsset-25.0887665176789)* ...
    exp(-(t-18)/4))/(1-exp(-10/4))-25)/5)-3.928000000000000e-04*520;
end

function f=fund(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25.0887665176789+(36.0607510392325-25.0887665176789)* ...
    sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5);
end
function f=fune(t,y)
Tsset=Td(19,36.0607510392325,25.0887665176789,14,1.5);
f=-0.112950302263091*y*10^(((25.0887665176789-Tsset*exp(-10/4)+(Tsset-25.0887665176789)* ...
    exp(-(t-18)/4))/(1-exp(-10/4))-25)/5);
end
```

[H]

表 4　问题三一天内加药的时间点

加药的时间点			
上午场	下午第 1 场	下午第 2 场	晚上场
9	12	15	18
9.1085	12.0264	15.0264	18.1106
9.2097	12.0526	15.053	18.2298
9.3046	12.0786	15.0798	18.3592
9.394	12.1045	15.1068	18.5008
9.4786	12.1302	15.134	18.6574
9.559	12.1557	15.1614	18.8327
9.6356	12.1811	15.189	19.0472
9.7088	12.2064	15.2168	19.3925
9.779	12.2315	15.2448	19.7826
9.8464	12.2565	15.2731	20.2124
9.9113	12.2814	15.3016	20.6806
9.9739	12.3061	15.3304	
10.0339	12.3307	15.3594	
10.0917	12.3552	15.3887	
10.1477	12.3796	15.4182	
10.2021	12.4039	15.448	
10.255	12.428	15.4781	
10.3065	12.452	15.5085	
10.3567	12.4759	15.5392	
10.4056	12.4997	15.5703	
10.4534	12.5234	15.6017	
10.5001	12.5471	15.6334	
10.5458	12.5707	15.6655	
10.5905	12.5942	15.698	
10.6343	12.6176	15.7309	
10.6772	12.6409	15.7642	
10.7193	12.6641	15.7979	

10.7606	12.6873	15.832	
10.8012	12.7104	15.8666	
10.841	12.7334	15.9016	
10.8802	12.7564	15.9371	
10.9187	12.7793	15.9731	
10.9566	12.8021	16.0096	
10.9939	12.8249	16.0464	
	12.8476	16.0838	
	12.8702	16.1218	
	12.8928	16.1604	
	12.9153	16.1997	
	12.9378	16.2396	
	12.9602	16.2803	
	12.9826	16.3217	
	13.0049	16.3639	
	13.0271	16.4069	
	13.0492	16.4508	
	13.0713	16.4956	
	13.0934	16.5414	
	13.1154	16.5882	
	13.1374	16.6361	
	13.1594	16.6852	
	13.1813	16.7355	
	13.2032	16.7871	
	13.2251	16.8401	
	13.247	16.8946	
	13.2689	16.9507	
	13.2907		
	13.3125		
	13.3343		

	13.3561		
	13.3779		
	13.3997		
	13.4215		
	13.4433		
	13.465		
	13.4867		
	13.5084		
	13.5301		
	13.5518		
	13.5736		
	13.5954		
	13.6172		
	13.639		
	13.6608		
	13.6826		
	13.7044		
	13.7262		
	13.7481		
	13.77		
	13.7919		
	13.8138		
	13.8357		
	13.8577		
	13.8797		
	13.9017		
	13.9238		
	13.9459		
	13.968		
	13.9902		

10.4 MATLAB 实现问题四

```
d1=0.4
d2=0.5
vy=1.4754
k=1
tk=[];
peoplek=[];
for t=9:0.00001:19
    peoplek(k)=(vy-0.112950302263091*d2*10^((25+(34-25)*sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-2-25)/5))/3.92800000000
    tk(k)=t;
    if peoplek(k)>521
        peoplek(k)=521;
    end
    k=k+1;
end
Tsset=Td(19,34,25,14,1.5);

for t=19.00001:1:21
    peoplek(k)=(vy-0.112950302263091*d2*10^(((25-Tsset*exp(-10/4)+(Tsset-25)*exp(-(t-18)/4))/(1-exp(-10/4))-2-25
    tk(k)=t;
    if peoplek(k)>521
        peoplek(k)=521;
    end
    k=k+1;
end



plot(tk,peoplek)



function f=fund(t,y)
f=-0.112950302263091*y*10^((25+(31-25)*sin((pi*(t-12+14/2))/(14+2*1.5))-25)/5)-3.928000000000000e-04*people;
end
function f=fune(t,y)
Tsset=Td(19,34,25,14,1.5);
f=-0.112950302263091*y*10^(((25-Tsset*exp(-10/4)+(Tsset-25)*exp(-(t-18)/4))/(1-exp(-10/4))-25)/5)-3.92800000000
end
```