演算法 PA2 (Finding MPSC)

B09901080 電機三 吳宣逸

- ## Data Structure

PA2 中我從 input file 讀入資料後，根據行數以及第一行給定的 n 值，將 n 以及**弦的數量**以下方兩個變數表示：

```
int n;          // 1 <= n <= 90000
int chord_num; // number of chords
```

為了取用資料方便，我自訂了資料類型 chord，用(i, j)表示一條弦的兩個端點，並且不限制 i 和 j 的大小關係：

```
typedef struct {
    int i; // first pivot
    int j; // second pivot
} chord;
```

接著定義主要實現尋找 MPSC 的 4 個資料結構，它們都是 1D 或 2D dynamic array：

```
chord *chords; // array of chords use first pivot as index
int **M;        // M array of MPSC problem
char **Cases;   // Memorize cases in iterations to trace back for chords (1,2,3)
chord *varychords;
```

各變數的意義以及設計想法如下：

1. chord *chords

chords 是大小 2n 的 dynamic 1D array，將第一個端點是 i 的弦存為 chords[i]，例如(8, 11)會被存在 chords[8]。另外由於弦的數量 ≦ n，因此若第 i 個點不是任何弦的端點，則用 chords[i] = (-1, -1)作為不是弦的標記。

為了能快速取用，一條弦除了存成 ij 之外還另外存一份 ji，儘管用掉兩倍空間，但可將找弦 jk 是否存在的時間複雜度由 **Ω**(lgn)(將弦存成 Balanced Binary Tree 再 search 應該是用最少空間最快的做法)變成 **O**(1)，因為取用 chords 的次數很多，所以會大大減少 search 所需時間。

2. int **M

M 是大小(2n-1) x m(i)的 dynameic 2D array，M[i’][j’]儲存弦 ij 的 MPSC 數量(i’ = i, j’ = j - i，原因之後說明)，其中

$$m(i) = \begin{cases} 2n - i, & M[i'] \; used \\ 0, & M[i'] \; not \; used \end{cases}$$

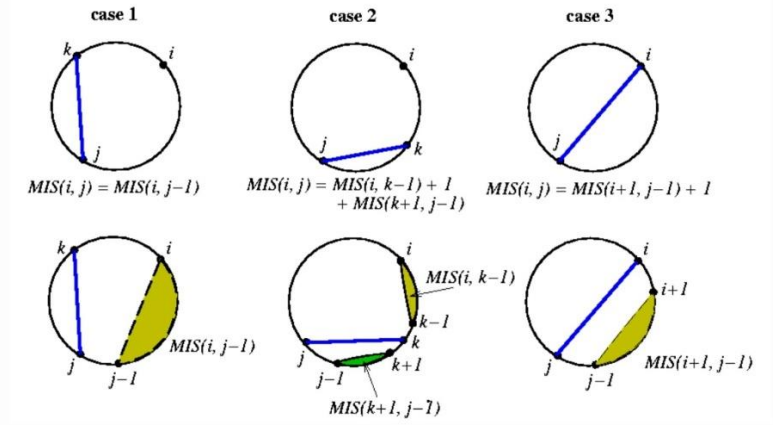
，因此 M[i’]皆初始成 nullptr，若是 M[i’] 須要儲存資料才會被 new 成新的陣列。M 的所有值都是預設-1，代表空值；而 base case 是當 i = j 時 M[i’][j’] = 0。

另外，由於實際上不論如何第 i 行只有後(2n – i)個 element 會用於儲存資料(i ≦ j)，因此 m(i)的大小不需要到 2n 而是(2n – i)即足夠，也因為是後(2n – i)個 element，因此才有前面提到的 j’ = j - i 的 mapping。

M 之所以每行在需要時才做動態配置是因為 M 會有好幾行完全不被用到，因此才做事後動態配置以節省大量的時間、空間。

3. char **Cases

除了 **Cases[i'][j']**儲存的是 M[i'][j']對應的 case 如下，以及為了節省空間以 char 儲存之外，其餘操作方式和設計想法與 M 完全相同。Cases 所有值都預設'0'，代表空值。



4. chord *varychords

用於儲存 MPSC 包含的所有弦，操作方式和設計想法與 chords 完全相同。最後會再剔除弦 ij、ji 中第一個端點較大者，並將剩餘的弦回傳，即求得自動排序好的 MPSC 了。

- Algorithm Introduction

PA2 我使用的是 top-down with memorization 的作法，主要是實做過 bottom-up 之後發現會進行許多不必要的運算，並且使用空間也較大，雖然聽說有同學使用 bottom-up 的方法也能跑出不錯的時間和空間，但可能 PA2 使用 top-down with memorization 在設計上仍是比較簡單。

下方將會簡述演算法的想法，在此之前，各 case 對應的遞迴式如下：

	Case 1	Case 2	Case 3
Number of MPSC	MIS(i, j) = MIS(i, j-1)	MIS(i, j) = MIS(i, k-1) + 1+ MIS(k+1, j-1)	MIS(i, j) = MIS(i+1, j-1) + 1
MPSC	Do nothing	Add chord (j, k) to varychords, then go (i, k-1) and (k+1, j-1).	Add chord (i, j) to varychords, then go (i+1, j-1).

整體演算法可以分成三個步驟：

1. 根據(i, j)以及弦 jk 判斷對應的 case 並記錄到 Cases[i'][j']，再根據 case 對應的遞迴式填入 M[i'][j']。實際做法是從(i, j) = (0, 2n-1)遞迴，結束後 M、Cases 所需值就被填好了。
2. 回傳 MPSC 數量，也就是(i, j) = (0, 2n-1)的 M[i'][j']值。
3. 根據 Cases 回朔 MPSC 包含的所有弦，每次將對應的弦加入 varychords。

- My Finding

在過去寫 DP 的 pseudo code 時，常常忽略節省空間的重要性，使得在 HW2 第 10 題 MPSC 問題

也是一次就切出 2n x 2n 的 M 出來，並且使用想法較簡單的 bottom-up 方法，然而在這次實作 MPSC 之後才發現原來可以在時間、空間上做到這麼大量的優化，能夠讓原本要跑 16 分鐘的程式變成在不到 1 秒就能完成。

其實我最一開始認為動態配置非常花時間，因此想全部配置成 static array 但失敗了，造成前面所述的 16 分鐘。之後改成 dynamic array 後發現效能沒預期中差，才想到 dynamic array 最耗時的只有在 allocate memory 而已，由於一次不用切出這麼多空間，而且每行最多也只要 allocate 一次即可，因此遠比開一個 static array 省時、省空間許多。這再次提醒我 time 和 space 不是永遠都是 tradeoff，有時兩者是密切相關的，因此應該要先看清兩者的關係才能夠設計出好的演算法。