机械振动和机械波

习题课

内 容 提 要

机械振动与机械波

一、简谐振动的特征

1、回复力： $f = -kx$

2、动力学方程： $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

3、运动学方程： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

4、能量： $E = E_k + E_p = \dfrac{1}{2}kA^2$ **动能势能相互转化**

二、描述简谐振动的物理量

1、 **振幅:** $$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

2、**周期、频率、角频率** ：$\nu=\dfrac{1}{T}$　　$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

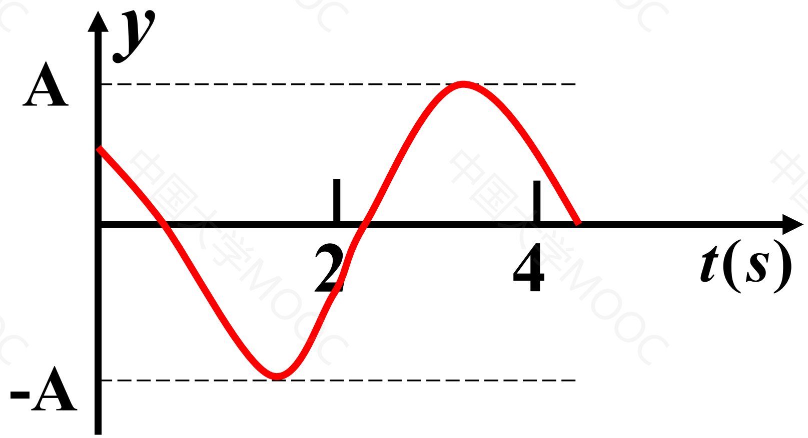
3、 **相位**($\omega t+\varphi$) **和 初相** φ

4、**相位差**： $$\Delta\varphi=(\omega_2 t+\varphi_2)-(\omega_1 t+\varphi_1)$$

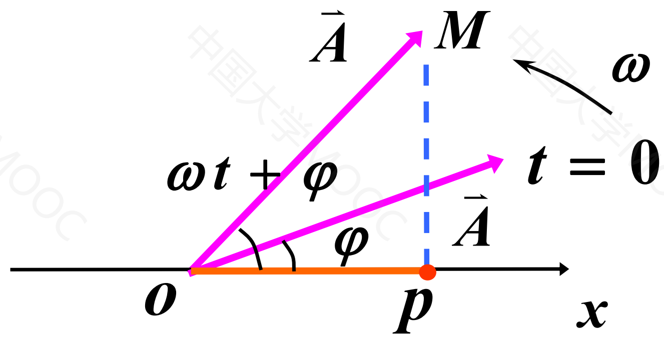
三、简谐振动的研究方法

1、解析法： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

2、振动曲线法：



3、旋转矢量法：



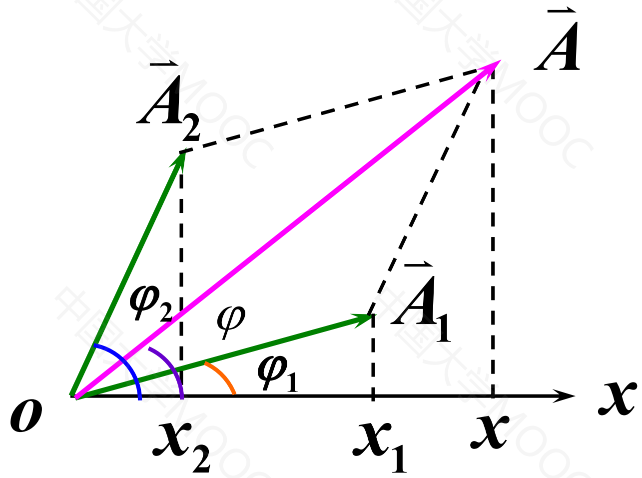
$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

四、简谐振动的合成

同方向、同频率的简谐振动的合成：

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

$$=A\cos(\omega t+\varphi)$$



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\varphi=arctg\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

五、 机械波的形成和传播

1、机械波产生条件：（1）波源；（2）连续的介质。

机械振动在弹性介质中的传播形成波，波是运动状态的传播，介质的质点并不随波传播。

2、 横波和纵波

3、 波线和波面

4、 简谐波

5、 描述波动的几个物理量

$\nu = 1/T$ $\quad$ $\lambda = uT = \dfrac{u}{\nu}$ $\quad$ T, ν 仅由波源决定，与媒质无关。

波速 u ：决定于媒质。

六、 平面简谐波的波函数

1、
$$\begin{cases} y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_0] \\ y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y = A\cos[k(ut \mp x) + \varphi_0] \end{cases} \qquad k = 2\pi/\lambda$$

2、 波函数的物理意义

七、波的能量

1、能量密度： $$w = \rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

2、平均能量密度： $$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

3、能流密度(波的强度)： $$\vec{I} = \overline{w}\,\vec{u} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2\vec{u}$$

八、惠更斯原理

介质中波阵面(波前)上的各点，都可以看做是发射子波的波源，其后任一时刻这些子波的包迹就是新的波阵面。

九、波的干涉

1、相干条件：频率相同、振动方向相同、相位差恒定

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

2、加强与减弱的条件：

$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$ 干涉加强

$$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$ 干涉减弱

若 $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm k\lambda$$ 干涉加强

$$\delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$ 干涉减弱

十、驻波

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos(\omega t+\varphi)$$

$$x=\begin{cases} \pm k\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,\cdots \quad A_{max}=2A \quad \text{波腹} \\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{4} & k=0,1,\cdots \quad A_{\min}=0 \quad \text{波节} \end{cases}$$

相邻波节（腹）间距 $=\lambda/2$

相邻波节和波腹间距 $=\lambda/4$

相邻波节间质点同相、两侧反相半波损失

十一、多普勒效应：（以媒质为参考系）

1、波源静止、观测者运动

$$\nu' = \frac{u \pm v_o}{u}\nu$$

2、观测者静止、波源运动

$$\nu' = \frac{u}{u \mp v_S}\nu$$

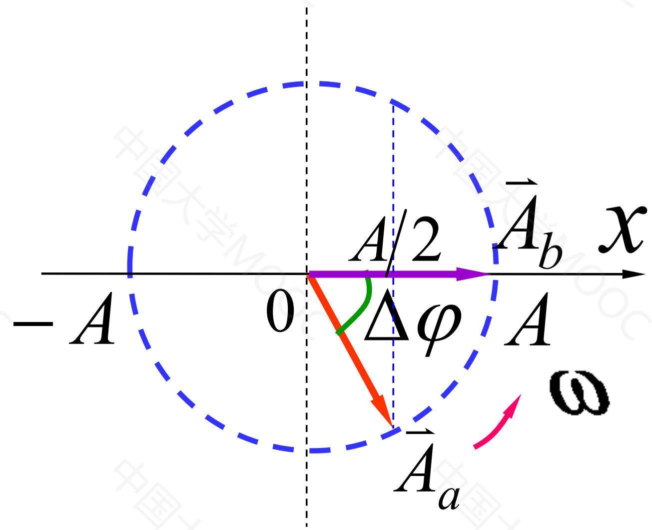
3、波源和观察者相对介质同时运动

$$\nu' = \frac{u \pm v_0}{u \mp v_S}\nu$$

例1、 一质点作谐振动，周期为T，当它由平衡位置向 x 轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路程所需要的时间为

(A) $T/4$　　(B) $T/12$

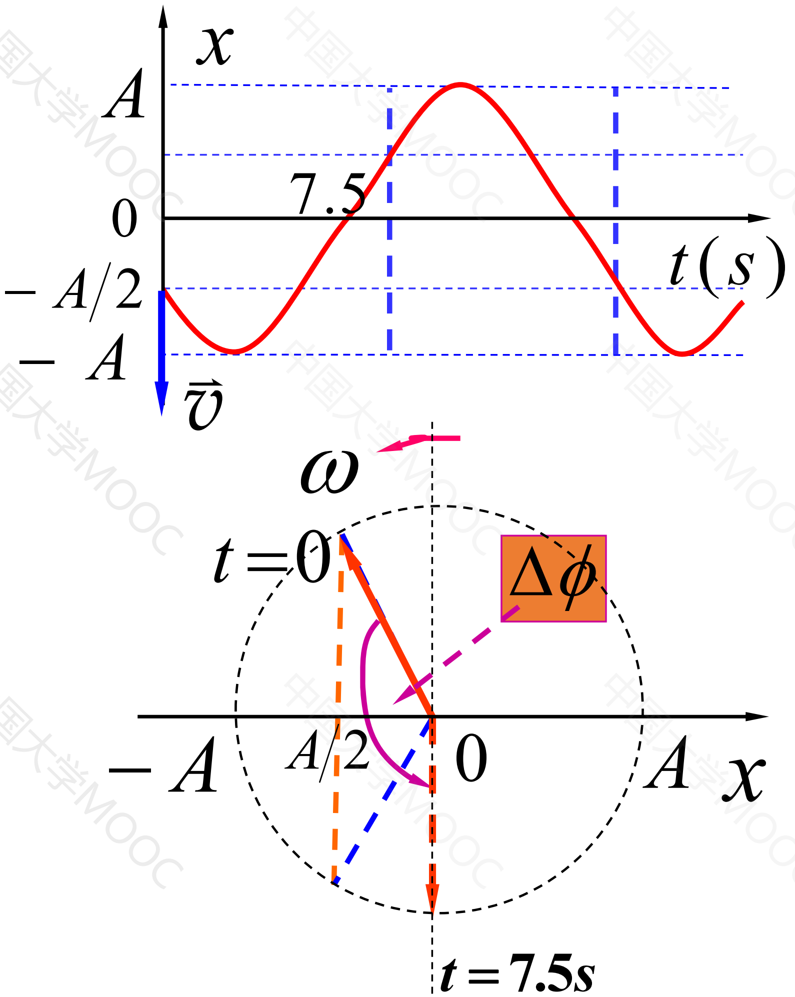
(C) $T/6$　　(D) $T/8$



$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$$

$$\Delta t = T/6$$

【C】



例2、 一简谐运动的运动曲线如图所示，求振动周期。

$$\Delta\varphi = 5\pi/6$$

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{7.5}{T}$$

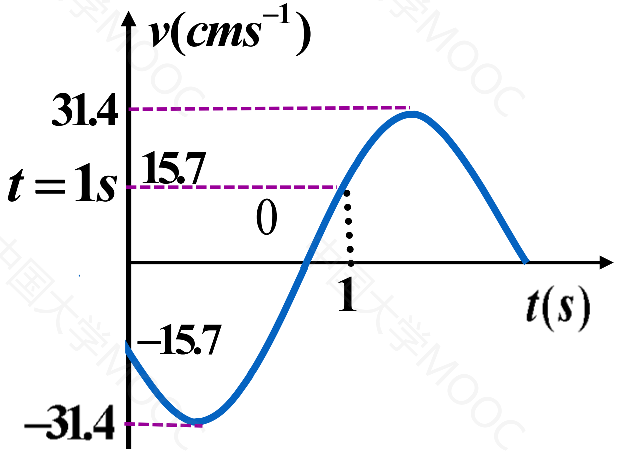
$$T = 18\text{s}$$

例3：已知某简谐振动的速度与时间关系曲线如图所示，试求 x 的振动方程。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_m = \omega A = 31.4 cms^{-1}$$

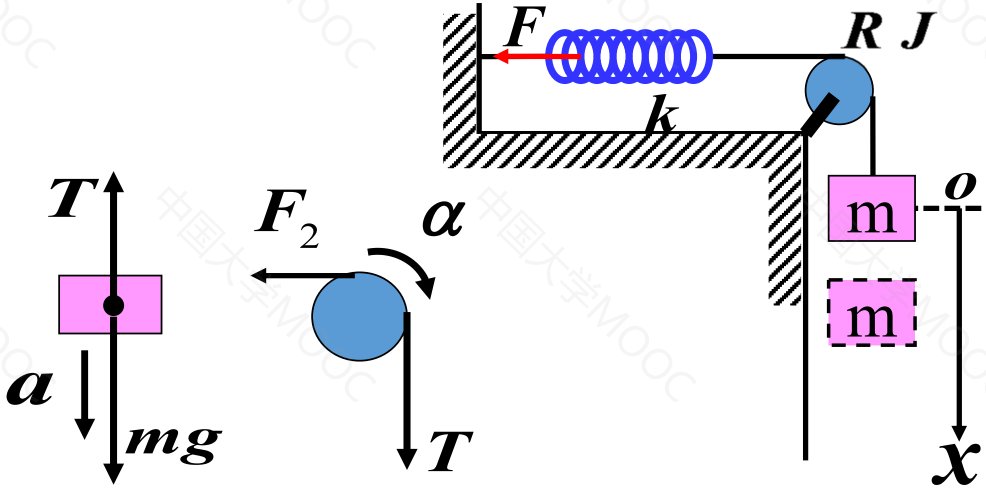


$$t = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \qquad \omega \cdot 1 = \pi$$

$$A = \frac{v_m}{\omega} = \frac{31.4}{3.14} = 10cm \qquad x = 10\cos(\pi t + \frac{\pi}{6})cm$$

例4: 振动系统由一倔强系数为k的轻弹簧、一半径为R、转动惯量为J的定滑轮和一质量为m的物体所组成。使物体略偏离平衡位置后放手，任其振动，试证物体作简谐振动，并求其周期T。



解： **方法1**：

$$mg - k\Delta l = 0 \quad (1)$$

$$mg - T = ma \quad (2)$$

$$\left[T - k(\Delta l + x)\right]R = J\frac{a}{R} \quad (3)$$

$$-kx = \left(m + \frac{J}{R^2}\right)a \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kR^2}{mR^2 + J}x = 0$$

简谐振动

$$\omega^2 = \frac{kR^2}{mR^2 + J}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + J}{kR^2}}$$

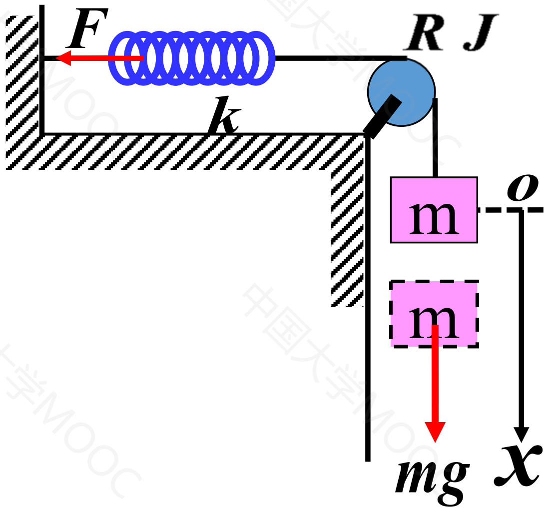
方法2:能量守恒

$$E=\frac{1}{2}mv^{2}-mgx+\frac{1}{2}J\omega^{2}+\frac{1}{2}k(\Delta l+x)^{2}$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-mgv+J\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+k(\Delta l+x)v=0$$

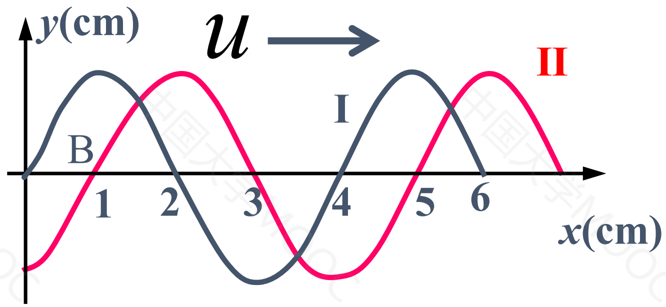
$$mg=k\Delta l\ ,\quad v=R\omega\ ,\quad a=R\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}x}{\mathrm{d}t^{2}}+\frac{kR^{2}}{mR^{2}+J}x=0$$



例5：已知$t=0$时的波形曲线为Ⅰ，波沿x方向传播，经$t=1/2\text{s}$后波形变为曲线Ⅱ。已知波的周期$T>0.5\text{s}$，试根据图中绘出的条件求出波动可能的表达式，并求B点的可能振动表达式。(已知振幅$A=0.01\text{m}$)

解：由图可知：$\lambda = 0.04\text{m}$



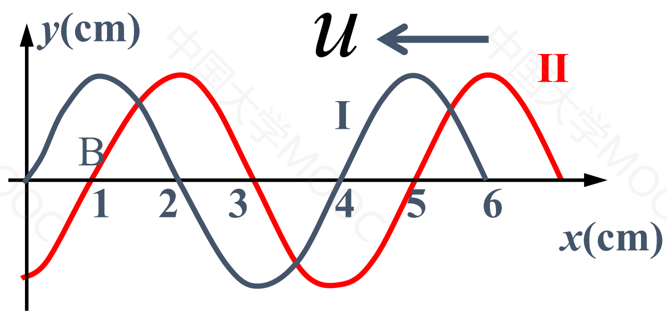
（1）设波沿 x 正方向传播

$$\frac{T}{4} = 0.5 \qquad T = 2s$$

原点振动表达式：$y_o = 0.01\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

$$y = 0.01\cos(\pi t - 50\pi x + \frac{\pi}{2}) \qquad y_B = 0.01\cos \pi t$$

(2）设波沿 x 负方向传播



$$\frac{3T}{4}=0.5 \qquad T=\frac{2}{3}s$$

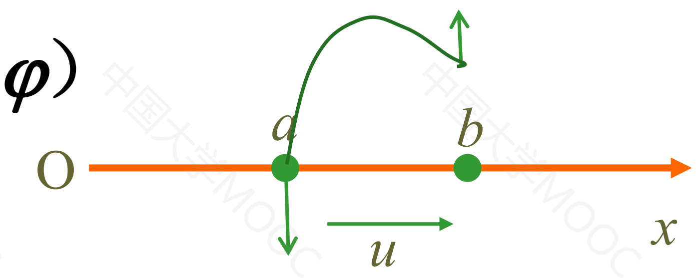
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=3\pi \qquad \varphi=-\frac{\pi}{2} \qquad y_o=0.01\cos(3\pi t-\frac{\pi}{2})$$

$$y=0.01\cos(3\pi t+50\pi x-\frac{\pi}{2})$$

$$y_B=0.01\cos(3\pi t)$$

例6.一平面简谐波沿 x 正方向传播，振幅$A=10\text{cm}$，圆频率$\omega = 7\pi s^{-1}$ 当t=1.0s时，位于x=10cm处的质点 a 经过平衡位置向 y 轴负方向运动。此时,位于x=20cm处的质点b的位移为5cm, 且向 y 轴正方向运动。设该波波长 $\lambda > 10\,cm$ ，试求该波的波函数。

解：设该波的波函数为:$y = A\cos(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda} + \varphi)$



由题意知 t=1.0s 时

$$\varphi_a = 2k_a\pi + \pi/2 \qquad \varphi_b = 2k_b\pi + 5\pi/3$$

$$0 < \Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_b < 2\pi$$

$$\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_b = \frac{5\pi}{6} \qquad \lambda = 0.24\ m$$

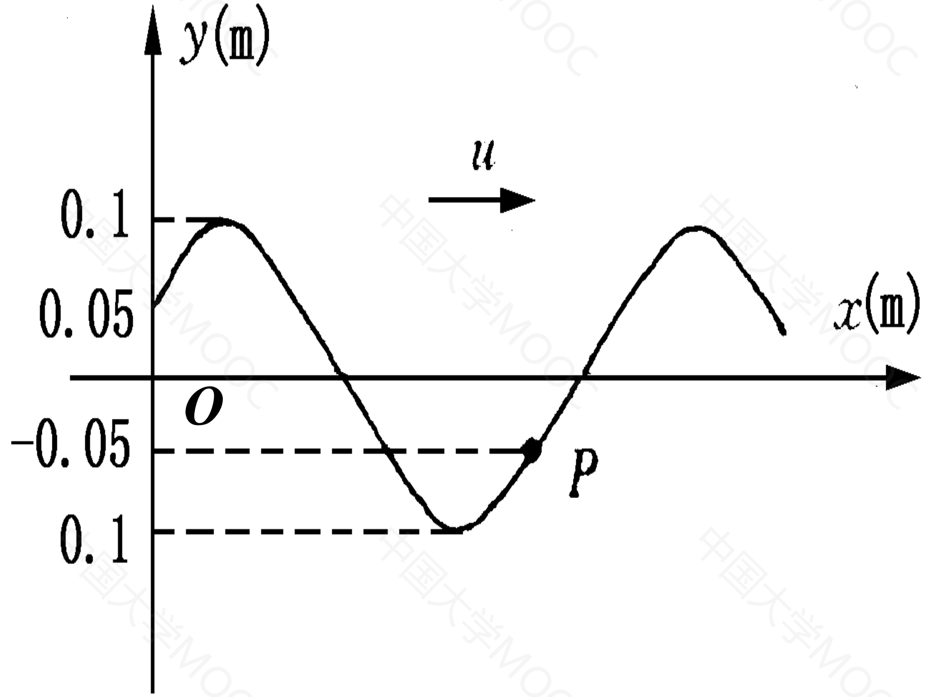
$$\varphi_a = 2k_a\pi + \pi/2 = 7\pi \times 1 - \frac{2\pi}{0.24} \times 0.1 + \varphi$$

$$\varphi = \pi/3$$

故得波函数为

$$y = 0.1\cos(7\pi t - \frac{2\pi x}{0.24} + \frac{\pi}{3})(m)$$

例7：一列机械波沿x轴正方向传播，t=0时的波形如图所示，已知波速为10 m·s^{-1}，波长为2m，求：(1) 波函数；(2)P点的坐标；(3)P点回到平衡位置所需的最短时间。



解：（1）设波函数为

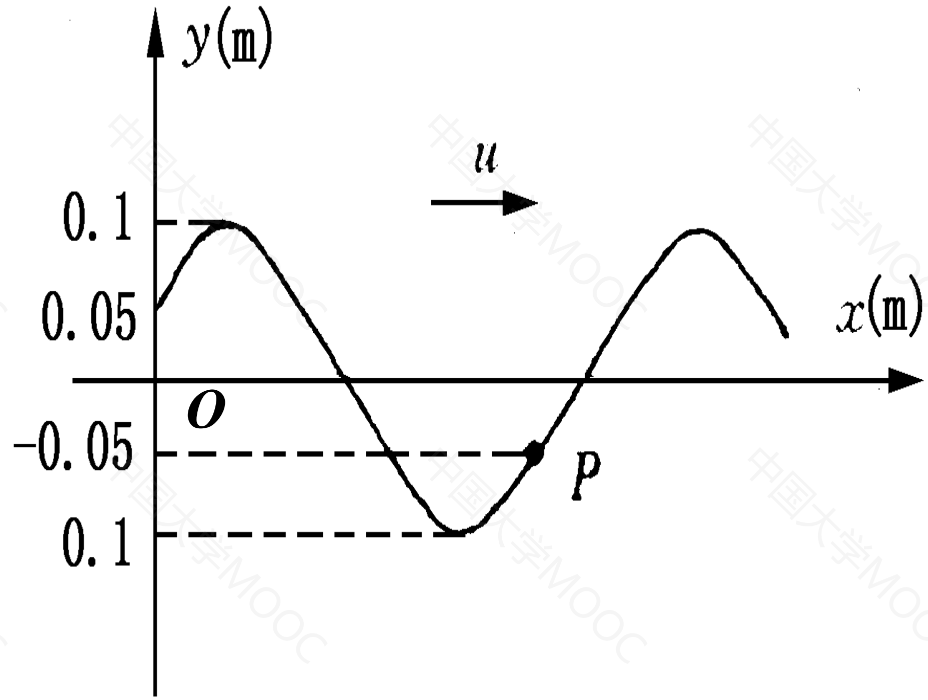
$$y = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi)$$

$$A = 0.1m \qquad T = \frac{\lambda}{u} = 0.2s$$

$$\omega = 2\pi v = 2\pi\frac{u}{\lambda} = 10\pi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad y = 0.1\cos(10\pi t - \pi x + \frac{\pi}{3})\ m$$

$$0 < \varphi_0 - \varphi_p < 2\pi$$



$$\varphi_p = \frac{2\pi}{3} - 2\pi$$

$$-\pi x_p + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 2\pi$$

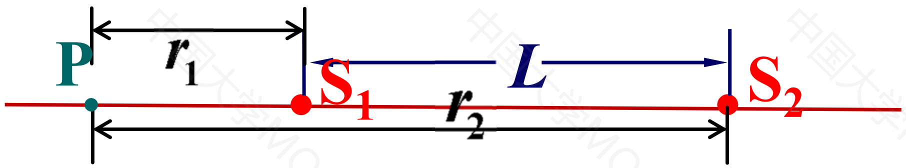
$$x_p = \frac{5}{3} m \qquad 10\pi t_{\min} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \qquad t_{\min} = \frac{1}{12} s$$

例8：两相干波源S_1、S_2相距9m，振动频率都为100hz，S_2比S_1超前$\pi/2$，波源发出的简谐波的波速都为400m/s,问在S_1、S_2的连线上，哪些点振动加强？哪些点振动减弱？ （包括S_1左侧、S_1 S_2之间及S_2右侧区域的各点）

解： $\lambda=\dfrac{u}{\nu}=4m$ $\qquad \varphi_2-\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

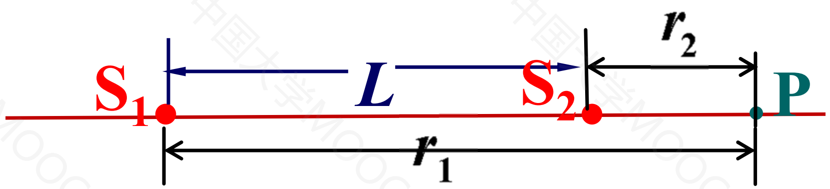
(1)波源S_1左侧区域的点



$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{4}\times 9=-4\pi$$

S_1左侧所有点振动加强

(2)波源S_2右侧区域的点

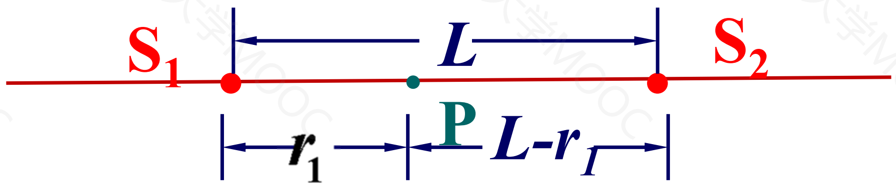


$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{4}\times(-9)=5\pi$$

S_2右侧所有点振动减弱

(3)波源S_1与波源S_2之间的区域的点

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4}\left(L - 2r_1\right) = -4\pi + \pi r_1$$



$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi, \quad k = 0,1,2,3,...$$

振动加强

$$r_1 = 0, 2, 4, 6, 8m$$

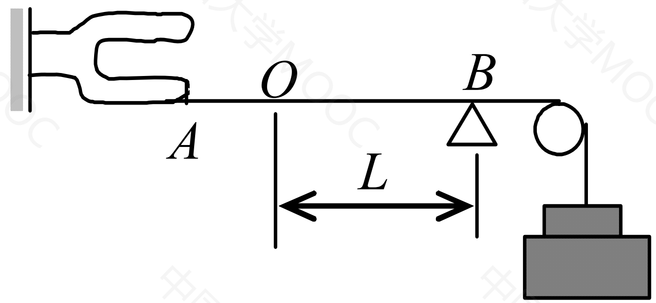
$$\Delta\varphi = \pm\left(2k+1\right)\pi, \quad k = 0,1,2,3,...$$

振动减弱

$$r_1 = 1, 3, 5, 7, 9m$$

例9．一弦线的左端系于音叉的一臂的A点上，右端固定在B点，并用T = 7.20 N的水平拉力将弦线拉直，音叉在垂直于弦线长度的方向上作每秒50次的简谐振动（如图）。这样，在弦线上产生了入射波和反射波，并形成了驻波。弦的线密度η = 2.0 g/m，弦线上的质点离开其平衡位置的最大位移为4 cm．在t = 0时，O点处的质点经过其平衡位置向下运动，O、B之间的距离为L = 2.1 m。（已知$u=\sqrt{\frac{T}{\eta}}$） 试求：

(1) 入射波和反射波的表达式；(2) 驻波的表达式。



解：

$$u=\sqrt{\frac{T}{\eta}}=60\ m\cdot s^{-1}$$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{60}{50}=1.2\ m$$

取O 点为x 轴和y 轴的原点，x 轴向右，y 轴向上

设入射波表达式为

$$y_1 = A\cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi)$$

因OB长为四分之一波长的奇数倍，则O点为波腹，反射波的表达式为

$$y_2 = A\cos(2\pi\nu t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi)$$

弦线上驻波表式为

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos\ (2\pi\nu t + \varphi)$$

据此，O 点振动方程为

$$y_0 = 2A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

弦线上质点的最大位移为$2A$，即 $2A = 4\ \text{cm}$

再由题给条件可得 $\varphi = \dfrac{1}{2}\pi$

(1) 入射波 $$y_1 = 2.0\times10^{-2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi x}{0.6} + \frac{\pi}{2}\right)\ m$$

反射波 $$y_2 = 2.0\times10^{-2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi x}{0.6} + \frac{\pi}{2}\right)\ m$$

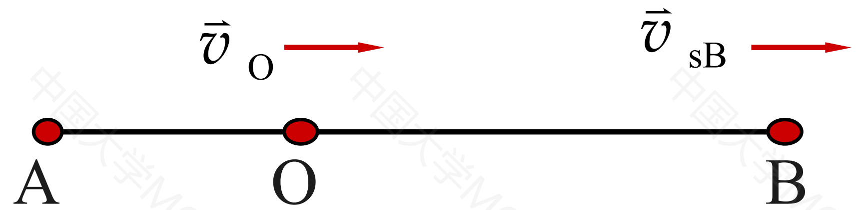
(2) 驻波 $$y = 4.0\times10^{-2}\cos\frac{\pi x}{0.6}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ m$$

例10：A、B 为两个汽笛，其频率皆为500Hz，A 静止，B 以60m/s 的速率向右运动，在两个汽笛之间有一观察者O，以30m/s 的速度也向右运动，已知空气中的声速为330m/s，求：

（1）观察者听到来自A 的频率

（2）观察者听到来自B 的频率

（3）观察者听到的拍频



解：

(1) $\nu' = \dfrac{u + v_o}{u}\nu = \dfrac{330 + (-30)}{330} \times 500 = 454.5\ Hz$

(2) $\nu'' = \dfrac{u + v_o}{u + v_S}\nu = \dfrac{330 + 30}{330 + 60} \times 500 = 461.5\ Hz$

(3) $\Delta\nu = \left|\nu' - \nu''\right| = 7\ \mathrm{Hz}$