内 容 提 要

质点力学

一、运动的描述（位矢、位移、速度、加速度）

1、位矢： $\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ （运动方程）

2、位移： $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

3、速度：

平均速度 $\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

平均速率 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 速率 $v = \dfrac{ds}{dt}$

4、加速度：

平均加速度 $\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ 加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

5、运动的叠加原理：当物体同时参与两个或多个运动时，其总的运动是各个独立运动的叠加。

6、圆周运动：（角量描述）

角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$ 角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

切向加速度 $a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\alpha$ 法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

7、一般曲线运动：

切向加速度 $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ 法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

二、牛顿运动定律

牛顿第一定律：任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，直至其他物体所施的力迫使它改变这种运动状态为止。

牛顿第二定律：物体受到作用力时所获加速度的大小与物体所受合外力的大小成正比，与物体质量成反比，加速度a的方向与合外力F的方向相同.

牛顿第三定律：当物体A以力F_1作用于物体B时，物体B也必定以力F_2作用于物体A，F_1和F_2总是大小相等，方向相反，作用在一条直线上。

三、三个定理和三个守恒律

1、功和能、动能定理、功能原理、机械能守恒定律

$$W=\int \vec{F}\bullet d\vec{r} \qquad E_k=\frac{1}{2}mv^2 \qquad E_p=-G\frac{Mm}{r}$$

质点的动能定理 $W=E_{k2}-E_{k1}=\Delta E_k$

质点系的动能定理 $W_{外}+W_{内}=E_{k2}-E_{k1}=\Delta E_k$

功能原理 $W_{外}+W_{非保守内力}=E\text{-}E_0$

机械能守恒定律

$$E_k+E_p=\text{恒量} \qquad (\text{条件}W_{外}+W_{非保守内力}=0)$$

2、冲量、动量、动量定理、动量守恒定律

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \qquad \vec{P} = m\vec{v}$$

质点的动量定理 $\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}$

质点系的动量定理 $\vec{I} = \Delta\vec{p}$

动量守恒定律 $\vec{P} =$ 恒矢量 (条件$\sum_i \vec{F}_i = 0$)

(合外力不为零，某方向合力为零，某方向动量守恒)

3、力矩、角动量、角冲量、角动量定理、角动量守恒定律

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

角动量定理 $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ 或 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

角动量守恒定律 $\vec{L} =$ 恒矢量 (条件 $\vec{M} = 0$)

刚体力学

一、定轴转动的角量描述

$$\theta=\theta(t) \qquad \omega=\frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha=\frac{d\omega}{dt}$$

二、转动定律

$$M=J\frac{d\omega}{dt}=J\alpha$$

转动惯量： $J=\sum \Delta m_i r_i^2$ $\qquad J=\int r^2 dm$

三、定轴转动力(矩)作的功、动能定理、功能原理、机械能守恒

功 $W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$

动能定理 $W=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$

功能原理 $W_{非重力}=E_2-E_1=\frac{1}{2}J\omega_2^2+mh_{c2}-\frac{1}{2}J\omega_1^2-mgh_{c1}$

机械能守恒定律 $E_k+E_p=\frac{1}{2}J\omega^2+mgh_c=$常量（条件：只有重力做功)

四、角动量定律、角动量守恒

角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M dt = L_2 - L_1$

角动量 $L = J\omega$

角动量守恒定律 $L = L_0 =$ 常量 （条件：$M = 0$）

三种情况：

（1）一个刚体

（2）可变形物体

（3）物体系

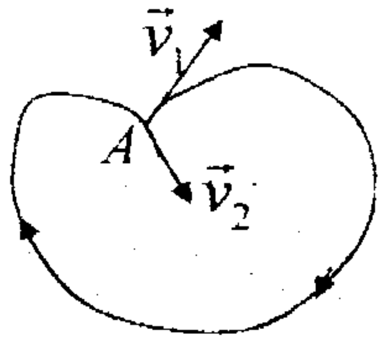
质点运动规律与刚体定轴转动的规律对照

质点的平动	刚体的定轴转动
运动定律 $\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律 $M=J\alpha$
动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{F}\mathrm{d}t=m\vec{v}-m\vec{v}_0$	角动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}-\vec{L}_0$
动量守恒定律 $\sum\vec{F}_i=0,\sum m_i\vec{v}_i=$恒量	角动量守恒定律 $\vec{M}=0,\sum J_i\vec{\omega}_i=$恒量
力的功 $W=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功 $W=\int_{\theta_0}^{\theta}M\mathrm{d}\theta$
动能 $E_k=mv^2/2$	转动动能 $E_k=J\omega^2/2$

质点运动规律与刚体定轴转动的规律对照

质点的平动	刚体的定轴转动
动能定理 $W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理 $W=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$
重力势能 $E_p=mgh$	重力势能 $E_p=mgh_C$
机械能守恒 只有保守力作功时 $E_k+E_p=$ 恒量	机械能守恒 只有保守力作功时 $E_k+E_p=$ 恒量

例1、物体沿一闭合路径运动，经Δt时间后回到出发点A，如图所示，初速度$\vec{v}_1$，末速度$\vec{v}_2$，且$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$，则在$\Delta t$时间内其平均速度与平均加速度$\overline{\vec{v}}$分别为$\overline{\vec{a}}$



（A）$\overline{\vec{v}} = 0$，$\overline{\vec{a}} = 0$

（B）$\overline{\vec{v}} = 0$，$\overline{\vec{a}} \neq 0$

（C）$\overline{\vec{v}} \neq 0$，$\overline{\vec{a}} \neq 0$

（D）$\overline{\vec{v}} \neq 0$，$\overline{\vec{a}} = 0$

【B】

例2、一质点的运动方程为$x=2t$，$y=19-2t^2$(SI)。

（1）写出质点的运动轨道方程；

（2）写出$t=2$秒时刻质点的位置矢量，并计算第二秒内的平均速度大小；

（3）计算2秒末质点的瞬时速度和瞬时加速度。

解：（1）由 $\begin{cases} x = 2t \\ y = 19 - 2t^2 \end{cases}$ 得 $y = 19 - \frac{1}{2}x^2 \ (x \geq 0)$

（2） $\vec{r}_2 = 4\vec{i} + 11\vec{j} \quad \vec{r}_1 = 2\vec{i} + 17\vec{j}$

$\overline{\vec{v}} = 2\vec{i} - 6\vec{j} \qquad \left|\overline{\vec{v}}\right| \doteq 6.33 m/s$

（3） $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -4\vec{j}$

$t = 2s \qquad \overline{\vec{v}} = 2\vec{i} - 8\vec{j} \qquad \vec{a} = -4\vec{j}$

例3、以速度v_0平抛一球，不计空气阻力，t 时刻小球的切向加速度大小a_τ= ______，法向加速度大小a_n= ______。

解：$v_x = v_0 \quad v_y = gt$ $\qquad v = \sqrt{v_0{}^2 + g^2 t^2}$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0{}^2 + g^2 t^2}} \qquad a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau{}^2} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0{}^2 + g^2 t^2}}$$

拓展：

以初速度v_0从地面抛出一小球，抛出方向与水平面成α的夹角，小球在轨道最高点的曲率半径为______。

$$\left(\frac{v_0{}^2 \cos^2 \alpha}{g}\right)$$

例4、在地面上以初速度v_0竖直上抛一质量为m的小球。在小球上升和下降过程中受到空气的阻力为mkv^2，k为正常量，试求：（1）小球能上升的最大高度；（2）小球返回地面时的速度。

解：（1）小球在运动过程中受到重力和空气阻力的作用，设向上为正，小球在上升的过程中受到的合力大小为

$$F_1 = -(mg + mkv^2) \qquad a_1 = -(g + kv^2)$$

$$a_1 = \frac{dv}{dt} = -(g + kv^2) \qquad dy\frac{dv}{dt} = -(g + kv^2)dy$$

$$vdv = -(g + kv^2)dy \qquad dy = -\frac{vdv}{g + kv^2}$$

于是两边积分有 $$h = \int_{v_0}^{0} -\frac{vdv}{g + kv^2} = \frac{1}{2k}\ln(1 + \frac{k{v_0}^2}{g})$$

（2）小球在下落过程中受到重力和空气阻力的作用，设向下为正，小球在下落的过程中受到的合力大小为

$$F_2 = mg - mkv^2 \qquad a_2 = g - kv^2$$

$$dy = \frac{vdv}{g - kv^2}$$

于是两边积分有 $$\frac{1}{2k}\ln(1 + \frac{kv_0{}^2}{g}) = -\frac{1}{2k}\ln(1 - \frac{kv^2}{g})$$

即小球下落到地面时的速度为 $$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{g}}}$$

例5、用铁锤把质量很小的钉子敲入木板，设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比。在铁锤敲打第一次时，能将钉子敲入$1.00cm$。如果铁锤敲打速度与第一次完全相同，那么第二次敲入多深？

（A）0.41cm　　（B）0.51cm

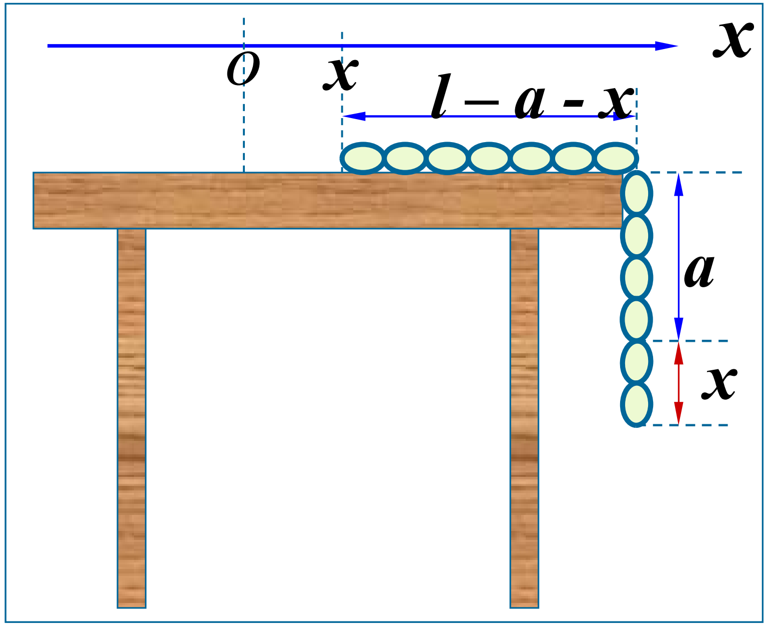
（C）0.73cm　　（D）1.00cm

【A】

例 6、一质量为 m，长为 l 的链条置于桌边，一端下垂长度为 a，若链条与桌面摩擦系数为 μ ，则：

（1）链条由开始到完全离开桌面的过程中，摩擦力做的功多少?

（2）链条开始离开桌面的速度为多大?

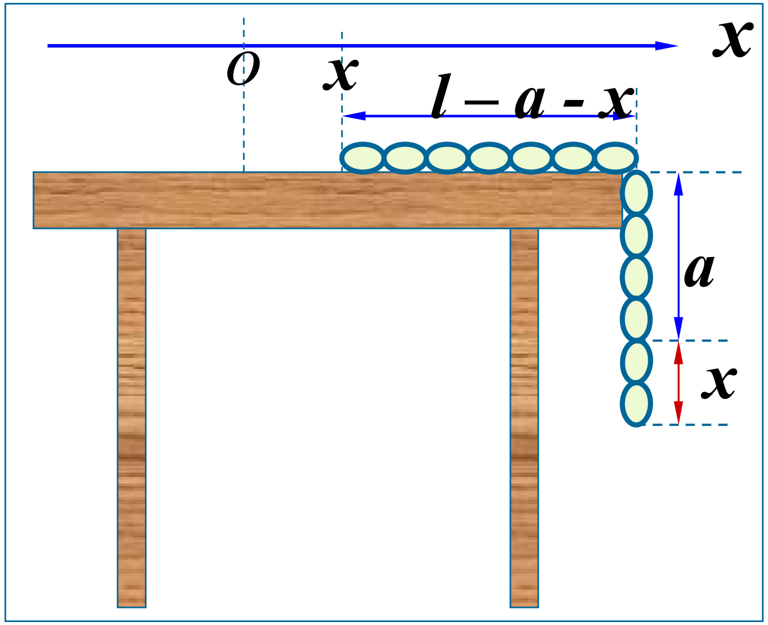


解：选坐标如图

摩擦力 $f=\mu\dfrac{mg}{l}(l-a-x)$

$$\mathrm{d}W_f=-f\mathrm{d}x$$

$$W_f=-\mu\frac{mg}{l}\int_0^{l-a}(l-a-x)\mathrm{d}x$$



$$W_f = -\mu \frac{mg}{l} \int_0^{l-a} (l-a-x)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\mu m g (l-a)^2}{2l}$$

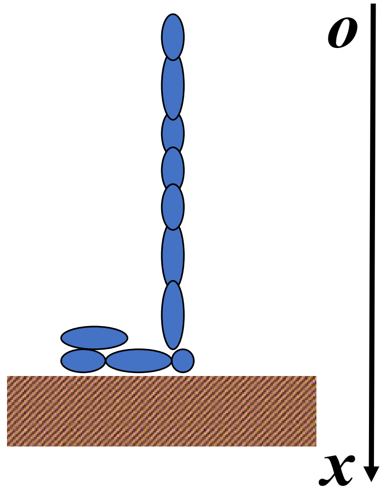
（2）链条开始离开桌面的速度为多大?

以桌面为重力势能零点，根据功能原理 $W_f = \Delta E$ 有

$$-\frac{\mu m g (l-a)^2}{2l} = \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mgl\right) - \left(0 - \frac{a}{l}mg\frac{a}{2}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}[(l^2 - a^2) - \mu(l-a)^2]}$$

例7、一质量均匀分布的柔软细绳铅直地悬挂着，绳的下端刚好触到水平桌面上，如果把绳的上端放开，绳将落在桌面上。试证明：在绳下落的过程中，任意时刻作用于桌面的压力，等于已落到桌面上的绳重量的三倍。



证明：取如图坐标，设t 时刻已有x 长的柔绳落至桌面，随后的dt 时间内将有质量为ρdx的柔绳以dx/dt 的速率碰到桌面而停止，它的动量变化为

$$dp = -dmv = -\rho dx \frac{dx}{dt}$$

根据动量定理，桌面对柔绳的冲力为：

$$F' = \frac{dp}{dt} = \frac{-\rho dx \bullet \dfrac{dx}{dt}}{dt} = -\rho v^2$$

柔绳对桌面的冲力 $F = -F'$ **即：**

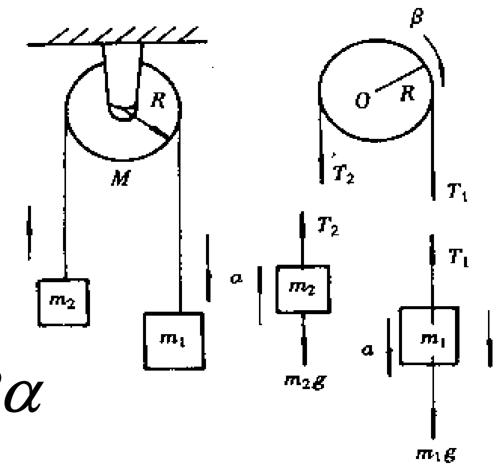
$$F = \rho v^2 \qquad 而 v^2 = 2gx$$

$$\therefore F = 2\rho gx$$

而已落到桌面上的柔绳的重量为 $mg = \rho gx$

所以 $F_{总} = F + mg = 2\rho gx + \rho gx = 3mg$

例8、如图所示，一定滑轮的质量为M，半径为R，通过一轻绳在定滑轮的两边挂着质量分别为m_1和m_2（$m_{1>}m_2$）的两物体，绳不能伸长，轴承摩擦力不计，绳与滑轮无相对滑动。求滑轮的角加速度α和绳的张力T_1和T_2。



解：$m_1g - T_1 = m_1a$

$$T_2 - m_2g = m_2a$$

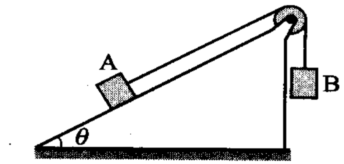
$$T_1R - T_2R = J\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha \qquad a = R\alpha$$

$$\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}\frac{g}{R} \qquad a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$$T_1 = \frac{2m_2 + M/2}{m_1 + m_2 + M/2}m_1g \qquad T_2 = \frac{2m_1 + M/2}{m_1 + m_2 + M/2}m_2g$$

拓展

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$



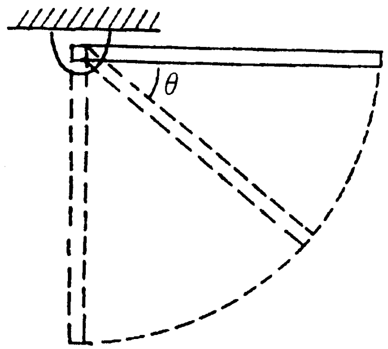
$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

$$\boxed{T_2 - m_2 g \sin\theta = m_2 a}$$

$$T_1 R - T_2 R = J\alpha = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

$$a = R\alpha$$

例9、一根长为l、质量为m的均匀细直棒，其一端有一固定的光滑水平轴，因而可以在竖直平面内转动。最初棒静止在水平位置，求它由此下摆 θ角时的角加速度和角速度。



解： $$M = mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

代入转动定律，可得

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2}mgL\cos\theta}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2L}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g\cos\theta}{2L} \qquad d\theta\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g\cos\theta}{2L}d\theta$$

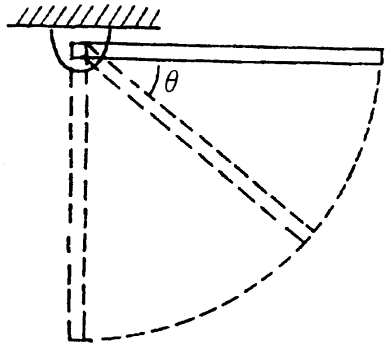
$$\omega d\omega = \frac{3g\cos\theta}{2L}d\theta$$

$$\omega^2 = \frac{3g\sin\theta}{L} \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{L}}$$

$$\frac{1}{2}mgL\sin\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL\sin\theta}{J}} = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{L}}$$

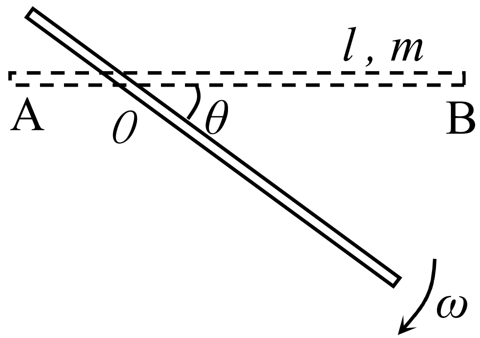
拓展：棒水平时，轴对棒的作用力



水平时 $mg - T = ma_c = m\alpha\dfrac{l}{2}$ $T = \dfrac{1}{4}mg$

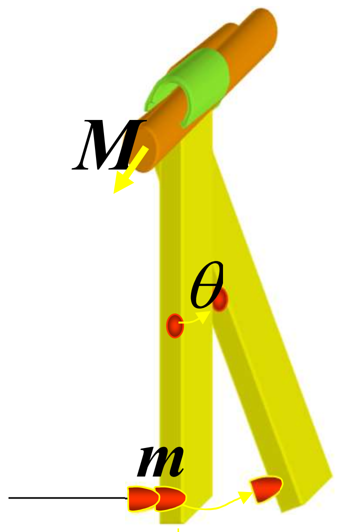
竖直时 $T - mg = ma_c = m\omega^2\dfrac{l}{2}$ $T = \dfrac{5}{2}mg$

思考：如图所示，均匀直杆质量为m，长为l，可以过o点水平轴在竖直平面内自由转动，初始时棒水平静止,AO长度为$l/4$。杆下摆到角θ 时的角加速度和角速度。



$$\alpha = \frac{12g\cos\theta}{7l} \qquad \omega = \sqrt{\frac{24g\sin\theta}{7l}}$$

例题10、一木杆长 l 可绕光滑端轴O旋转。设这时有一质量为m 的子弹以水平速度 $\vec{v}$ 射入杆端并嵌入杆内，求杆偏转的角度。



已知： $M,l,m,\vec{v}$

射入前后(即子弹与木杆的碰撞)过程，以子弹和木杆组成的系统角动量守恒！而系统的动量不守恒。为什么？

特别注意：以后凡遇到质点与刚体的碰撞之类的问题，均要应用角动量守恒求解，而一般不能应用动量守恒求解。

解：此题可分为两个过程，(1) 碰撞过程；(2) 上摆过程。
碰撞过程以子弹和木杆组成的系统的角动量守恒。上摆过程以子弹、木杆和地球组成的系统机械能守恒。

（1）碰撞过程

由角动量守恒定律：$$m l v = (\frac{1}{3} M l^2 + m l^2)\omega$$

$$\omega = \frac{m v}{(\frac{1}{3} M + m) l}$$

(2) 上摆过程：以M、m、地球为研究对象

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2+ml^2\right)\omega^2=Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)+mgl(1-\cos\theta)$$

$$\theta=\arccos\left[1-\frac{3m^2v^2}{(M+3m)(M+2m)gl}\right]$$

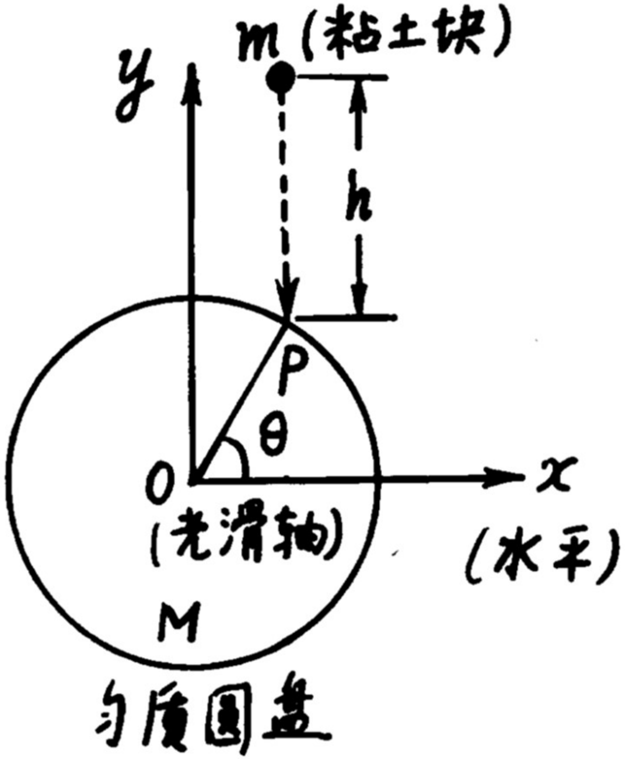
拓展：如果是弹性碰撞呢

$$lmv=lmv'+\frac{1}{3}Ml^2\omega$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3}Ml^2\omega^2$$

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3}Ml^2\omega^2=Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

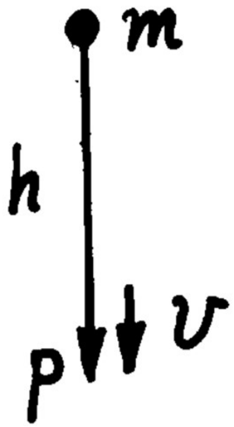
例11、如图所示已知：$M=2m$，h，$\theta=60°$



求：碰撞后瞬间盘的 $\omega_0=?$

P转到x轴时盘的$\omega=?$　$\alpha=?$

解：m下落：



$$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{2gh}$$

碰撞 Δt 极小，对 m +盘系统，冲力远大于重力，故重力对 O力矩可忽略，角动量守恒：

$$mvR\cos\theta = J\omega_0$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

得： $$\omega_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{4R}$$

对 m+M+地球系统，只有重力做功， E守恒，

令 P、x 重合时 E_P=0。

则： $$mgR\sin\theta + \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{gh}{2R^2}\cos^2\theta + \frac{g}{R}\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{2R} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}(h + 4\sqrt{3}R)}$$

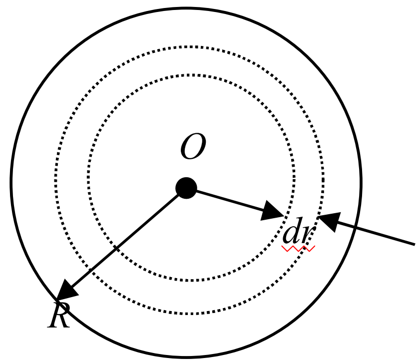
$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{mgR}{2mR^2} = \frac{g}{2R}$$

例12、质量为m半径为R的匀质圆盘可绕过盘心的光滑竖直轴在水平桌面上转动。盘与桌面间的滑动摩擦系数为μ。若用外力使其角速度达到ω_0时,撤去外力，求：此后圆盘还能转动多长时间?

解： $$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

$$dM_f = rdN = r\mu dmg = r\cdot\mu\sigma 2\pi rdrg = 2\pi g\mu\sigma r^2 dr$$

$$M_f = \frac{2}{3}\mu mgR$$



$$t = \frac{J\omega_0}{M_f} = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$