

# 太阳影子定位

## 摘要

本文首先根据几何关系给出了直杆的太阳影子长度变化模型，进而通过“反问题”思维，借助直杆太阳影子变化建立数学优化模型推算出直杆的位置、日期等信息。最后，利用视频截屏技术和优化模型确定了视频的拍摄地点和拍摄日期。

问题 1，首先找到可以衡量影子长度变化的几个参数然后从三方面分析了太阳影子关于各参数长度变化的规律。我们发现影长不仅会随着太阳高度角增加而减小，而且还会受季节的影响。而后用 MATLAB 软件画出了附件 1 中直杆影长变化的曲线图。

问题 2，使用最小二乘近似法以及遗传算法建立了一个完整的优化模型，将杆长与直杆地理纬度作为变量参数，进行 100 次迭代，得出 20 组可能的解，通过合理性比较得出最可能地点在海南岛东部。

问题 3，在问题 2 优化模型的基础上，增加日期一个变量，利用与问题 2 相似的解法求得附件 2 可能的地点与日期为印度南部、2-3 月份，附件 3 可能的地点与日期为越南东南部、8-9 月份。

问题 4，利用截屏技术将视频每隔一分钟截一幅图，将截取的 40 张图片用 MATLAB 进行边缘处理得到坐标数据，利用相似变换将像素坐标转换为物理坐标。在日期已知情况下，建立最小二乘近似法模型，并使用模拟退火算法得到视频中可能的地点为呼和浩特市附近。在日期未知的情况下，增加变量日期，再利用此题的优化模型求解，确定了地点与日期。

本文的亮点是，考虑到遗传算法自身有局部搜索能力差、存在未成熟收敛和随机游走等缺陷，先使用拟合的方法将直杆可能所在位置的地理经度确定，再运用遗传算法或者模拟退火算法求解模型。

**关键词：**最小二乘近似法；遗传算法；优化模型；模拟退火算法；近似变换

## 一 问题重述

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面, 太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化, 确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

问题 1. 建立影子长度变化的数学模型, 分析影子长度关于各个参数的变化规律, 并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00–15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒, 东经 116 度 23 分 29 秒) 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

问题 2. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据, 建立数学模型确定直杆所处的地点。将你们的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据, 给出若干个可能的地点。

问题 3. 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据, 建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将你们的模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据, 给出若干个可能的地点与日期。

问题 4. 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频, 并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型, 并应用你们的模型给出若干个可能的拍摄地点。

如果拍摄日期未知, 你能否根据视频确定出拍摄地点与日期?

## 二 问题分析

### 问题 1 的分析

问题 1 在太阳光是平行光的假设下, 可以将此题看作一个简单的数学求解问题。该问题的关键在于找出各个参数与影长的联系。我们考虑到, 物体在某一点的影子的形状(长度和位置)由太阳在天体中对地球上这一点的相对位置决定, 而这个相对位置由当地的地理纬度、季节(日、月)和时间(这里的时间准确来说指时刻)三个因素决定, 由于问题 1 中我们只需考虑影子的长度, 所以我们可以用地理纬度( $\varphi$ )、太阳赤纬角( $\delta$ )、太阳高度角( $h$ )及时角( $t$ )等参数建立影子长度变化的数学模型, 并分析影长关于它们几个参数的变化规律。

而后, 利用上述建立好的模型及 MATLAB 软件, 以北京时间 9:00 到 15:00 内的时刻为变量, 编写程序就可以画出题目要求的时间段内杆子的影长变化曲线。

## 问题 2 的分析

问题 2 与问题 3 都是给出某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，要求是建立数学模型，给出若干个可能的地点或地点和日期，这是一种典型的“反问题”，即需要我们由果推因。首先利用已有数据进行二次函数拟合，基本确定直杆的地理经度，然后再采用有关“反问题”比较经典的做法——最小二乘近似法建立模型求解其他变量参数。其中，直杆长度也不确定，由于杆长不同所在的位置也可能不同，所以将杆长 $H$ 设置为变量参数之一。进而，用遗传算法的思想求解模型，可以得出直杆几个可能的位置。

## 问题 3 的分析

问题 3 与问题 2 比较，除了需要确定直杆所处的地点位置之外，同时需要确定拍摄日期，我们将问题二的最小二乘近似法模型稍加改进，增加参数日期（用积日 $N$ 来衡量），从而建立起一个三参数的优化模型，利用与问题 2 相似的算法可以得出直杆一些可能的位置与日期。

## 问题 4 的分析

附件 4 视频较大，直接用 MATLAB 处理比较困难，所以我们需要对视频进行一些处理，然后再利用 MATLAB 软件导出直杆影子在像素坐标系下的坐标数据，利用坐标变换方法中的相似变换将像素坐标系转换为物理坐标系。在日期给定时，建立最小二乘近似法的优化模型，并首先考虑遗传算法，再用模拟退火算法改进，可以得出可能的地点。如果日期没有给定，建立的优化模型将是一个四参数问题，利用本题建立的优化模型将确定可能的地点与日期。

# 三 模型假设和符号说明

## 3.1 模型假设

- (1) 假设太阳光为平行光，没有折射；
- (2) 假设海拔高度常常可以忽略；
- (3) 假设时区是东八区；

## 3.2 符号说明：

符号	符号说明
$L$	太阳光照下影子的长度
$H$	杆的高度
$h$	太阳高度角

$t$	时角
$\varphi$	观测地的地理纬度
$\delta$	太阳赤纬角
$\theta$	日角
$\omega$	杆所在位置的地理经度
$l_i$	第 $i$ 个时刻观测点的影子长度
$\hat{l}_i$	$l_i$ 的估计值

## 四、模型建立与求解

### (一) 问题 1 的模型建立与求解

根据问题分析，我们用地理纬度( $\varphi$ )、太阳赤纬角( $\delta$ )、太阳高度角( $h$ )及时角( $t$ )等参数建立数学模型并分析影长变化规律。

#### 1.1 问题 1 模型建立<sup>[1]</sup>

根据问题分析，首先我们很容易得到影长 $L$ 与直杆长度 $H$ 、太阳高度角 $h$ 之间存在如下关系式：

$$L = H / \tan h \quad (1.1)$$

#### 1. 太阳高度角 $h$ 的求法

太阳高度角是指太阳光的入射方向和地平面的夹角。由于我们假设太阳光不存在折射是平行光，查阅资料我们得到太阳高度角 $h$ 的计算公式如下：

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (1.2)$$

式中，太阳赤纬以 $\delta$ 表示，观测地地理纬度用 $\varphi$ 表示（太阳赤纬与地理纬度都是北纬为正，南纬为负），地方时（时角）以 $t$ 表示。

#### 2. 求太阳赤纬角 $\delta$ 的算法

太阳赤纬（ED）即太阳直射点纬度，查阅资料得到赤纬角( $\delta$ )的计算方式：

$$\delta = 0.3723 + 23.2567 \sin \theta + 0.1149 \sin 2\theta - 0.1712 \sin 3\theta - 0.7580 \cos \theta + 0.3656 \cos 2\theta + 0.0201 \cos 3\theta \quad (1.3)$$

式中， $\theta$ 称日角，即 $\theta = 2\pi\mu/365.2422$ 。而 $\mu$ 由两部分组成，即 $\mu = N - N_0$ 。

其中， $N$ 为积日，即当天日期到当年 1 月 1 日的天数； $N_0 = 79.6764 + 0.2422 \times (N^* - 1985) - INT[(N^* - 1985)/4]$ （式中 $INT$ 表示取整数部分）。

#### 3. 时角的求法

时角为 OP 线在地球赤道平面上的投影与当地时间 12 点时地中心连线在赤道平面上的投影之间的夹角。

$$t = S_0 + T_0 - \Delta T - \alpha \quad (1.4)$$

式中，其中  $S_0$  是当天平时 0h 的恒星时 ( $S_0 = 6^h 40^m + d \times 3^m 56^s$ )，元旦子夜时的恒星时是  $6^h 40^m$ ， $d$  是从元旦起算的天数。 $T_0$  是当时北京时间， $\Delta T = 120^\circ - \lambda$  是当地的地理经度与东经  $120^\circ$  的差，化为时分秒单位， $\alpha$  是恒星的赤经。

(1.1-1.4) 式构成了求影子长度的数学模型：

$$\begin{cases} L = H / \tan h \\ \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\ t = S_0 + T_0 - \Delta T - \alpha \\ \delta = 0.3723 + 23.2567 \sin \theta + 0.1149 \sin 2\theta \\ \quad - 0.1712 \sin 3\theta - 0.7580 \cos \theta \\ \quad + 0.3656 \cos 2\theta + 0.0201 \cos 3\theta \end{cases} \quad (1.5)$$

## 1.2 影子长度关于各个参数的变化规律

对影子长度有影响的参数包括地理纬度( $\varphi$ )、太阳赤纬角( $\delta$ )、太阳高度角( $h$ )、太阳方位角、时角( $t$ )等，它们对影子长度的影响最终可以划分为以下几种：

一种是由地球公转引起的季节性影长变化规律，我们在地球上定点选取北纬  $23.5$  度，东经  $120$  度的位置点，分析此位置上的  $2$  米直杆在一年 (365 天) 中正午时分影子长度的变化曲线。我们可以发现，正午时分的影长在夏至那天最短，并且关于夏至那个点左右对称，如图 1。

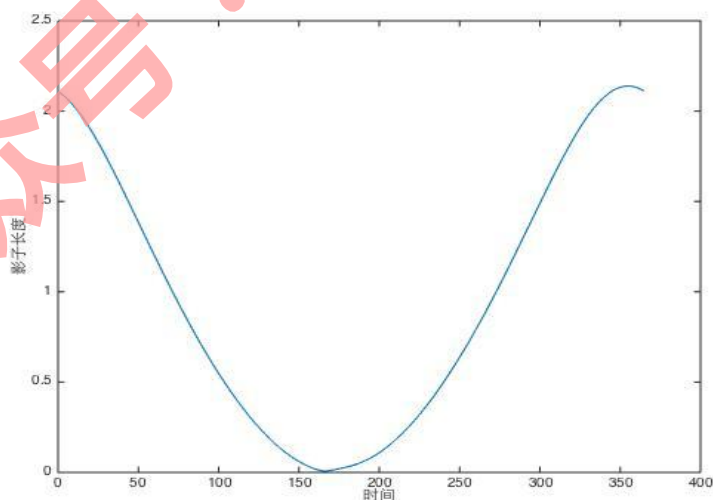


图 1 同一地点影长随日期的变化规律曲线

一种是由纬度变化引起太阳高度角变化而引起的影子长度的的变化规律，选择某天，作出 2 米直杆正午时分影长随着纬度变化的曲线。我们发现，在直射点的直杆影长最短，在直射点分别向南北方向逐渐变长。也就是说，直杆影子长度会随着太阳高度角的变大而变长，如图 2。

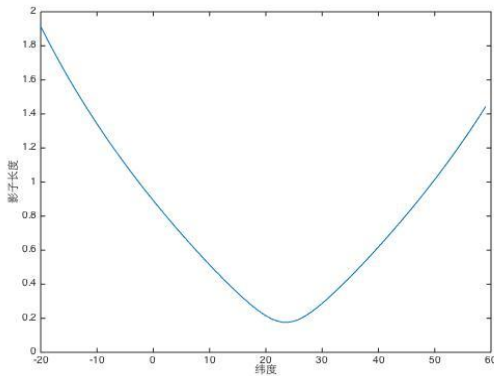


图 2 同一天正午时刻影长随纬度变化曲线

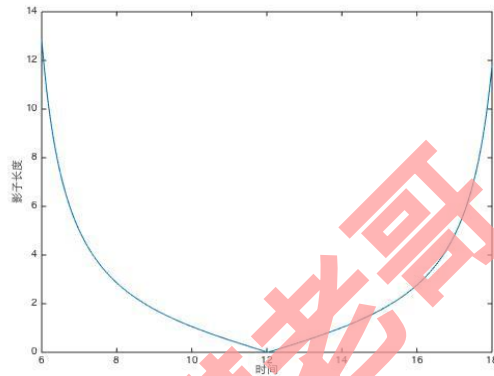


图 3 同一地点一天内影子长度随时间变化的曲线

还有另一种变化规律是一天内由于地球自转而产生太阳东升西落的现象，我们选取物体的太阳影长会先变短后变长，并以当地时间正午时分为中心左右对称，如图 3。

### 1.3 模型求解

题目中，杆的长度、当地时间与观测地经纬度都已知，分别为 3 米、北京时间 9:00-15:00、北纬 39 度 54 分 26 秒、东经 116 度 23 分 29 秒，求得太阳赤纬  $\delta$  与时角  $t$ ，利用 MATLAB 软件编写程序则可以推导出附件 1 的直杆影长  $L$  在附件 1

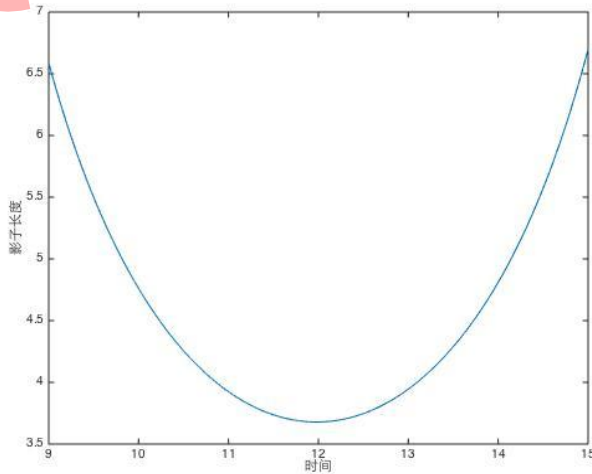


图 4 同一地点影长随日期的变化规律曲线

中时间段内变化的曲线图，如图 4。

## （二）问题 2 的模型建立与求解

### 2.1 模型的建立

为了解决此问题，我们利用了使某时刻影子长度与此时刻影子长度的估计值之差达到极小值的最小二乘近似法思想，建立如下数学模型：

$$\Phi(H, \omega, \varphi) = \min \sum_{i=1}^{21} (l_i - \hat{l}_i)^2 \quad (2.1)$$

式中， $H$ 为直杆长度（此时它是变量）， $\omega$ 表示杆所在位置的地理经度， $\varphi$ 是杆所在位置的地理纬度， $l_i$ 是第  $i$  个时刻观测点的影子长度， $\hat{l}_i$ 是它的估计值。

### 2.2 模型的求解

最小二乘近似法模型建立以后，我们期望能用遗传算法思想解决问题。对于此问题，我们考虑到遗传算法自身有局部搜索能力差、存在未成熟收敛和随机游走等缺陷，如果我们直接运用遗传算法求解该问题，则所涉及到的变量较多，所以首先通过二次函数拟合，将直杆可能的位置地理经度基本确定，再将杆长与直杆地理纬度作为变量参数，通过遗传算法的思想求解数学模型得出可能的地点。

#### 2.2.1 直杆地理经度 $\omega^*$ 的确定

首先我们根据附件 1 的坐标数据 $(x, y)$ ，以及公式 $L = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ 得出各个时刻的太阳影子长度 $L$ ，并发现它与时刻呈二次函数关系，所以我们借用 MATLAB 软件拟合影长与时刻的二次函数图像，并得出拟合出的二次函数图像为：

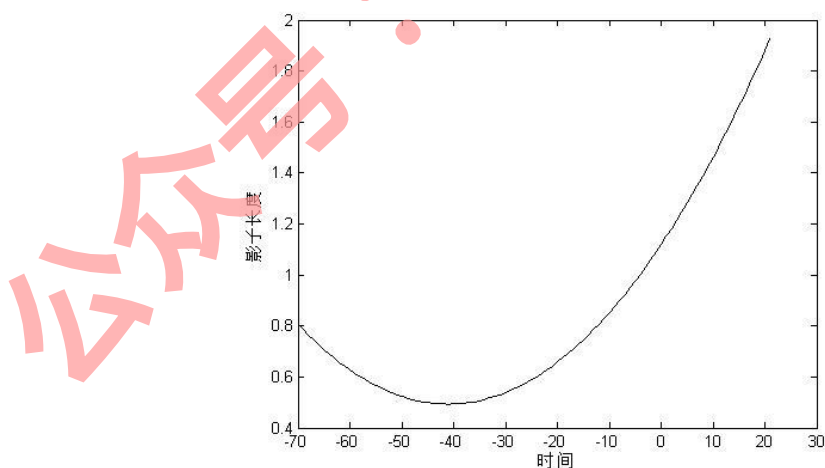


图 5 附件 1 的影长与时刻的二次函数拟合图像

二次函数式为：



$$L_1 = 0.004T^2 + 0.0305T + 1.1203 \quad (2.2)$$

根据此函数，杆子影长最短时刻是北京时间 12 点 39 分，而根据地理知识，影长最短时是当地时间正午 12 点整，比北京时间迟 39 分，则直杆所在地在东经 120 度的西侧，所以根据下式可以计算得出直杆所在地的地理经度。

$$\omega^* = \omega_0 - \frac{(T-T^*)}{4} \quad (2.3)$$

式中， $T$ 为北京时间（单位为分钟）， $T^*$ 为直杆所在地的地方时（单位为分钟）， $\omega_0$ 东经 120 度（北京时间即为此地的地方时）， $\omega^*$ 为直杆所在地的地理经度。由此我们可以基本确定直杆所在地的经度为东经 110.25 度。

## 2.2.2 直杆的地理纬度 $\varphi^*$ 和杆长 $H$ 的确定

### 1. 遗传算法介绍

遗传算法是模拟自然界生物进化过程与机制求解极值问题的一类自组织、自适应人工智能技术，其基本思想是模拟自然界遗传机制和生物进化论而形成的一种过程搜索最优解的算法，具有坚实的生物学基础。遗传算法提供了一种求解复杂系统优化问题的通用框架，具有广泛的应用价值。

在本文中，我们主要运用了它适用于解决复杂的非线性和多维空间寻优问题的特点，结合最小二乘法近似法，寻求直杆的地理纬度 $\varphi^*$ 和杆长 $H$ 若干组可能的最优值。

### 2. 遗传算法的执行过程

遗传算法作为一种自适应全局优化搜索算法，使用二进制遗传编码，即等位基因 $\Gamma = \{0, 1\}$ ，个体空间 $H_L = \{0, 1\}^L$ ，且繁殖分为交叉与变异两个独立的步骤进行。其基本执行过程如下：

- 1) 初始化。确定种群规模为 $C$ 为 40、交叉概率 $P_c$ 、变异概率 $P_m$ 和置终止进化准则——迭代次数 100 次；设置变量个数（2 个变量，直杆长度 $H$ 与地理纬度 $\varphi^*$ ）并确定好变量上下界（ $0 < H \leq 10$ ， $0^\circ \leq \varphi^* \leq 90^\circ$ ）；随机生成 40 个个体作为初始种群 $X(0)$ ；置进化代数计数器 $t \rightarrow 0$ 。
- 2) 个体评价。计算或估价 $X(t)$ 中各个体的适应度。适应度函数为：

$$Fit(f(x)) = \begin{cases} c_{max} - f(x), & f(x) < c_{max} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.4)$$

式中， $f(x)$ 为遗传算法的目标值； $c_{max}$ 为 $f(x)$ 的最大估计值。

### 3) 种群进化。

- a) 选择(母体)。从 $X(t)$ 中运用选择算子选择出 $M/2$ 对母体( $M \geq C$ )。



- b) 交叉。对所选择的 $M/2$ 对母体, 依概率 $P_c$ 执行交叉形成 $M$ 个中间个体。
  - c) 变异。对 $M$ 个中间个体分别独立依概率 $P_m$ 执行变异, 形成 $M$ 个候选个体。
  - d) 选择(子代)。从上述所形成的 $M$ 个候选个体中依适应度选择出 $N$ 个个体组成新一代种群 $X(t+1)$ 。
- 4) 终止检验。如已满足终止准则, 则输出 $X(t+1)$ 中具有最大适应度的个体作为最优解, 终止计算; 否则置 $t \rightarrow t+1$ 并转 2)。

### 2.2.2 模型的结果与分析

遗传算法运行一次, 其目标值随迭代次数变化如图 (6)。

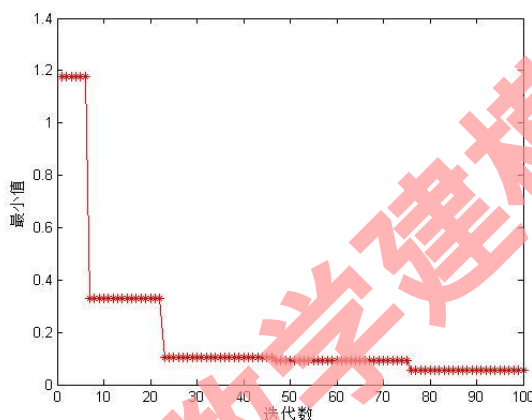


图 6 遗传算法的目标值随迭代次数的变化

将遗传算法运行 20 次, 最终算法返回了 20 组地理纬度 $\varphi^*$ 和杆长 $H$ 的最优值, 如表 1。

表 1 遗传算法所得的结果

经度	纬度	杆长	误差	地点
110.25	19.7067	1.8475	0.0089	海南
110.25	5.5425	1.9062	0.0033	南海西部
110.25	55.5132	6.3441	0.0561	俄罗斯
110.25	7.654	3.3529	0.0837	南海
110.25	2.1994	3.5288	0.1080	南海
110.25	15.4839	1.085	0.0124	南海
110.25	37.39	3.2258	0.007	陕西
110.25	11.261	3.1378	0.1824	南海

110.25	22.346	3.2258	0.0372	海南
110.25	24.4575	1.9159	0.0515	海南
110.25	16.2757	1.8475	0.0069	南海
110.25	16.0997	1.0948	0.0073	南海
110.25	10.5572	1.0948	0.0075	南海
110.25	13.9003	3.3431	0.0923	南海
110.25	20.0587	1.8671	0.0171	海南
110.25	22.61	0.3617	0.0489	海南
110.25	18.651	3.1085	0.0802	海南
110.25	26.9208	0.7234	0.0309	湖南
110.25	16.1877	1.8475	0.0068	南海
110.25	18.0352	1.9159	0.0925	海南

从上表的数据中，我们可以看出几乎所有的地点都集中于海南岛东部及其附近海域，所以我们判断出问题 2 直杆所在的地理位置大概位于海南岛东部东经 110.25 度、北纬 16 度左右的可能性较大。

### (三) 问题 3 的模型建立与求解

#### 3.1 问题 3 模型的建立

问题 3 中，我们建立了与问题 2 相似的数学优化模型来确定附件 2 与附件 3 的地点，在问题 2 模型的基础上增加了一个变量参数——日期（模型中的日期使用的是积日  $N$ ），建立数学模型如下：

$$\Omega(H, N, \omega, \varphi) = \min \sum_{i=1}^{21} (l_i - \hat{l}_i)^2 \quad (3.1)$$

式中， $H$ 、 $\omega$ 、 $\varphi$ 、 $l_i$ 、 $\hat{l}_i$  与问题 2 的模型中的含义相同； $N$  为积日，即当天日期到当年 1 月 1 日的天数，可以转化为日期（某月某日）。

#### 3.2 问题 3 模型的求解

相似地，我们依然采用了先拟合确定直杆地理经度的方法，再利用遗传算法，得出直杆可能的长度  $H$ 、地理经度  $\varphi$  与日期  $N$ 。

##### 3.2.1 直杆地理经度 $\omega^*$ 的确定

依据附件 2 与附件 3 的坐标数据  $(x, y)$ ，运用与问题 2 相同的拟合方法，分别得出附件 2 与附件 3 的拟合二次函数图像为：

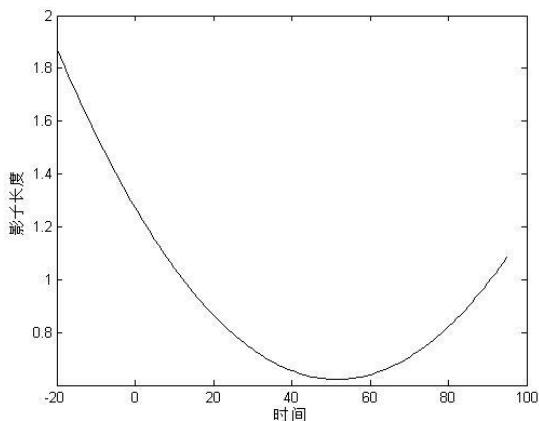


图 7 附件 2 二次函数拟合

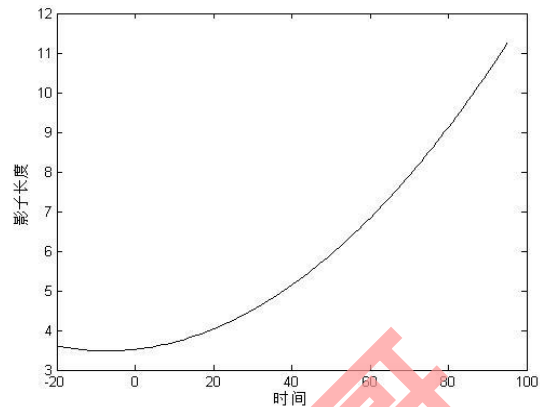


图 8 附件 3 目标函数随迭代次数的变化图像

两个二次函数图像对应的函数分别为：

$$L_2 = 0.002T^2 - 0.0253T + 1.2725 \quad (3.2)$$

$$L_3 = 0.0007T^2 + 0.0108T + 3.5227 \quad (3.3)$$

根据上述，附件 2 与附件 3 直杆影长最短时刻分别是北京时间 12 点 36 分、北京时间 12 点 48 分，而当地时间都是正午 12 点整，所以通过式 (2.3) 计算，可以基本确定附件 2 与附件 3 直杆所在地的地理经度分别为东经 79 度、东经 108 度。

### 3.2.2 直杆的地理纬度 $\varphi^*$ 、杆长 $H$ 和日期的确定

本问题的优化模型与问题 2 相比，增加了变量日期，所以，将优化模型中遗传算法的初始化步骤中变量的设置变为——设置 3 个变量（直杆长度 $H$ 、地理纬度 $\varphi^*$ 与日期 $N$ ），确定好变量上下界（ $0 < H \leq 10$ ， $0^\circ \leq \varphi^* \leq 90^\circ$ ， $0 < N \leq 356$ ）；随机生成 40 个个体作为初始种群 $X(0)$

然后以相似的方法运算，可以得出两个附件的三个变量的一些最优值，如表 2 与表 3。

### 3.3 问题 3 模型的结果分析

表 2 附件 2 中的数据通过遗传算法所得的结果

日期	经度	纬度	杆长	误差	地点
4 月 3 日	79	15.9328	7.3314	0.0656	印度
4 月 2 月	79	9.5015	7.6344	0.0036	印度
5 月 12 日	79	6.7742	8.915	0.0849	孟加拉湾

3 月 19 日	79	34.3109	8.4262	0.0934	新疆
7 月 19 日	79	5.0147	0.9091	0.0679	孟加拉湾
3 月 29 日	79	30	9.4526	0.0758	印度
7 月 26 日	79	5.5425	7.263	0.0743	孟加拉湾
8 月 22 日	79	11.349	7.6442	0.0392	印度
9 月 23 日	79	9.9534	8.5044	0.0655	印度
2 月 21 日	79	5.0147	9.8338	0.0171	孟加拉湾
3 月 26 日	79	27.0088	8.6315	0.0706	印度
5 月 26 日	79	37.9179	8.9052	0.0032	新疆
3 月 8 日	79	89.2082	8.5142	0.0277	--
9 月 23 日	79	82.522	8.5047	0.0046	--
9 月 23 日	79	0.8798	9.5406	0.0097	阿拉伯海
4 月 5 日	79	3.5191	9.697	0.0823	孟加拉湾
1 月 29 日	79	7.478	9.7458	0.0695	印度
9 月 13 日	79	10.7337	9.2864	0.0317	印度
2 月 15 日	79	35.6305	9.6676	0.095	新疆
3 月 25 日	79	5.47185	5.435	0.0034	印度

我们可以看到，利用我们建立的优化模型，将遗传算法运行 20 次求出的 20 组解，附件 2 的直杆地点大部分位于印度南部，日期主要分布在 2、3 月份。所以我们可以确定，最可能的地点是东经 79 度、北纬 9 度，而最有可能的日期在 2-3 月份之间。

表 3 附件 3 中的数据通过遗传算法所得的结果

日期	经度	纬度	杆长	误差	地点
1 月 7 日	108	8.0938	9.4917	0.0439	南海
9 月 18 日	108	2.9912	7.7322	0.0382	南海
4 月 18 日	108	0.8798	9.3939	0.0766	马来西亚
2 月 26 日	108	30.4692	5.3275	0.0795	重庆
7 月 17 日	108	9.1496	9.9413	0.0187	泰国湾
2 月 17 日	108	41.7009	2.0039	0.049	内蒙古

3 月 4 日	108	6.1584	8.6608	0.0446	南海
3 月 14 日	108	10.2933	9.8045	0.0646	泰国湾
9 月 18 日	108	25.5132	8.7781	0.0709	贵州
5 月 20 日	108	20.0587	9.2766	0.0755	南海
10 月 14 日	108	10.9091	0.0098	0.0276	越南
11 月 15 日	108	8.7097	8.6413	0.068	南海
11 月 8 日	108	9.9413	9.433	0.0655	南海
8 月 31 日	108	20.5865	9.1398	0.0163	南海
9 月 21 日	108	7.34	8.5044	0.0119	南海
1 月 19 日	108	10.8211	8.684	0.0498	越南
3 月 13 日	108	89.2962	5.1515	0.096	--
11 月 21 日	108	83.1378	9.4135	0.034	--
10 月 7 日	108	4.3988	9.3646	0.0585	南海
6 月 23 日	108	10.8211	5.3372	0.0224	越南

多次利用遗传算法运行出来的结果中，我们也可以推断出附件 3 直杆可能的地点主要分布在越南东南部及其附近海域，日期主要分布在 8、9 月份。

#### （四）问题 4 的模型建立与求解

##### 4.1 问题 4 模型的建立

###### 4.1.1 视频处理

为了得到视频中的影子位置数据，我们对视频做了以下处理：

1. 从 8 分 55 秒到 9 分 34 秒每隔一分钟截取一帧图像，再利用 MATLAB 软件读取得到 40 幅灰度图。
2. 然后对这 40 幅灰度图作降噪边缘处理，比较准确地得到直杆影子在图上的轨迹。
3. 我们以图像左上角为原点、图像左边向下方向为 x 轴正方向、上边向右方向为 y 轴正方向建立像素坐标系，将杆影在图上的轨迹导出，得到它们的位置数据。

###### 4.1.2 坐标系的转换<sup>[5]</sup>

相机在工作的实质是将 3D 物体投射并显示在 2D 屏幕上。在这个过程中，坐标系发生了一系列转换，转换顺序为：物体坐标系→世界坐标系→相机坐标系→投

影坐标系→像素坐标系。我们可以知道在透视相机作用下，有些几何属性是保持的，例如共线性，即一条直线透视变换之后仍为一条直线，然而一般的透视情况下平行直线不再保持平行。

也就是说，虽然相机工作的过程中，坐标系从物理坐标系转换到像素坐标系，但是会保留一些不变属性。已有的研究表明，通过代数表达式描述这些不变的变量，就可以把我们已经得到的像素坐标位置转换成实际中的物理坐标系。在此前已经完成的相关工作中，我们得到一些变换种类，比如等度量变换、仿射变换等。

对于此问题，我们选择相似变换建立数学模型，模型表达式如下：

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & t_x \\ s \sin \theta & s \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

这里的  $s$  代表了一个等级度数。 $\theta$  为拍摄的倾斜角。式中，不考虑相机高度的影响，所以设为 1； $(x^*, y^*)$  为像素坐标系下的位置数据， $(x, y)$  为物理坐标系下的位置数据。

#### 4.1.3 模型的建立

当日期给定时，我们首先考虑利用问题 2 的优化模型，增加一个倾斜角  $\rho$  的变量，最小二乘近似法模型即变成了一个三变量的模型：

$$\Phi(H, \omega, \varphi, \rho) = \min \sum_{i=1}^{40} (l_i - \hat{l}_i)^2 \quad (4.2)$$

当日期没有给定时，我们考虑用问题 3 的优化模型，同样增加一个倾斜角  $\rho$  变量，最小二乘近似法即变成了一个四变量的模型：

$$\Omega(H, N, \omega, \varphi, \rho) = \min \sum_{i=1}^{40} (l_i - \hat{l}_i)^2 \quad (4.3)$$

式中， $\rho$  表示倾斜角；杆长  $H$  为 2 米；其他字母含义与问题 2 和问题 3 相同。

#### 4.2 问题 4 模型的求解

事实上，我们在用问题 2 与问题 3 中优化模型的遗传算法求解模型时，我们发现有两个原因导致结果非常不准确：

- a) 倾斜角  $\rho$  的偏差太大；
- b) 涉及到的变量太多，而遗传算法不擅长处理此类问题。

所以，我们选用另一种算法求解模型——模拟退火算法。

##### 1. 模拟退火算法简介

模拟退火算法主要应用于组合优化。算法的目的是解决 NP 复杂性问题；克服优化过程陷入局部极小；克服初值依赖性。

## 2. Metropolis 准则

固体在恒定温度下达到热平衡的过程可以用 Monte Carlo 方法（计算机随机模拟方法）加以模拟，虽然该方法简单，但必须大量采样才能得到比较精确的结果，计算量很大。

## 3. 模拟退火算法的基本步骤

- 1) 给定初温  $t = t_0$ ，随机产生初始状态  $s = s_0$ ，令  $k = 0$ ；
- 2) 产生新状态  $s_j = Genete(s)$ ；
- 3) 如果  $\min\{1, \exp[-(C(s_j) - C(s))/t_k]\} \geq \text{randrom}[0,1]$ ，则令  $s = s_j$ ；
- 4) Until 抽样稳定准则满足；退温  $t_{k+1} = \text{update}(t_k)$  并令  $k = k + 1$ ；
- 5) Until 算法终止准则满足；输出算法搜索结果。

## 4.3 问题 4 模型的结果分析

表 4 日期已知时通过模拟退火所得的结果

经度	纬度	角度	误差	地点
114.018	42.1552	8	0.0815	呼和浩特东北
114.6099	44.5655	7.5	0.0906	呼和浩特东北
115.3918	46.2273	8.6	0.0127	呼和浩特东北
113.0446	38.3228	5.8	0.0913	长沙
113.7112	41.5726	4	0.0632	太原东北
114.2783	44.1545	3.8	0.0098	呼和浩特东北
113.2889	39.0533	6	0.0278	呼和浩特东南
112.9649	36.4156	6.5	0.0547	太原南
113.9990	42.7877	5.5	0.0958	呼和浩特东北
115.3504	37.5947	21.2	0.0965	石家庄东南

在日期给定的情况下，通过最小二乘法模型与模拟退火算法，我们得到表 4 的结果，从中可以判断视频中可能的地点最可能是在呼和浩特市东北边。

表 5 日期未知时模拟退火所得的结果

日期	经度	纬度	角度	误差	地点
10 月 14 日	131.0460	25.9152	24.9872	0.0158	冲绳岛南
7 月 21 日	114.9564	35.1938	15.3662	0.0971	郑州东北



9 月 12 日	122.5277	28.4956	21.8186	0.0957	浙江沿海
6 月 8 日	112.9268	21.0724	14.4747	0.0485	广州沿海
9 月 27 日	121.2327	25.2139	4.5746	0.08	台湾北
6 月 10 日	116.2317	41.4267	38.6123	0.0142	张家口东南
3 月 20 日	138.2139	38.3699	12.5889	0.0422	日本西北沿海
8 月 11 日	117.8527	34.4881	14.5222	0.0916	连云港西
9 月 27 日	128.6233	30.6704	22.0402	0.0792	东海边境
2 月 1 日	125.3086	6.1577	1.7687	0.0959	菲律宾东南

如果视频中日期未知，则多了一个变量日期，同样通过优化模型及模拟退火算法，可以确定如表 5 的一些日期与地点。说明通过视频中的物体的太阳影子变化，我们可以有办法确定时间与地点。

## 五、模型的评价与改进

### 5.1 模型的优缺点

#### 5.1.1 模型的优点

本文建立的模型简单易懂、计算简便，同时与实际情况也没有产生很大的差距，对实际情况具有一定的指导意义。

问题 4 使用了模拟退火算法，具有质量高，初值鲁棒性强，简单、通用、易实现等优点。

#### 5.1.2 模型的缺点

为了使计算结果不出现太大偏差同时使计算简便，本文假设了太阳光为平行光，所以结果事实上是一个理论值，比实测数据要偏大。实际中由于大气层中存在水蒸气、二氧化碳和尘埃，其密度与外太空的真空并不相同，因此当太阳光从外太空的真空传入大气层时，必将发生偏折。故采用式 (4.4) 式计算太阳高度角会存在一定误差。

遗传算法其自身存在不足，如局部搜索能力差、存在未成熟收敛和随机游走等，导致算法的收敛性能差，需要很长时间才能找到最优解等问题。模拟退火算法自身也具有一些不足，由于要求较高的初始温度、较慢的降温速率、较低的终止温度，以及各温度下足够多次的抽样，因此优化过程较长。

## 5.2 模型的改进

问题 1 建立影子长度变化模型时，空气折射率理应是一个需要考虑的因素。本文除了问题 4，每个问题只用了一种模型求解，没有进行对照分析，所以本文可以多建立 1-2 个优化模型进行比对分析，使结果更有说服力。

## 六、参考文献

- [1] 陈晓勇，郑科科，《对建筑日照计算中太阳赤纬角公式的探讨》，浙江建筑，第 28 卷，第 9 期：6-12，2011 年 9 月。
- [2] 张文华，司德亮，徐淑通，祁东婷，《太阳影子倍率的计算方法及其对光伏阵列布局的影响》，太阳能技术与产品：28-31，2011 年 9 月。
- [2] 董国志，反问题的正则化方法及其计算  
<http://www.doc88.com/p-7436114096515.html>，2015 年 9 月 12 日
- [3] 葛继科，邱玉辉，吴春明，蒲国林，《遗传算法研究综述》，计算机应用研究，第 25 卷第 10 期：2911-2915，2008 年 10 月
- [4] 天文学词典查询，天体时角的计算方法，  
<http://lifeng.lamost.org/kepu/basic/basic2.htm>，2015 年 9 月 11 日
- [5] 武琳，《基于太阳阴影轨迹的经纬度估计技术研究》，天津大学，2010 年

## 七、附录

### 附录一 截取的数据

杆底部横坐标	杆底部纵坐标	影子顶点横坐标	影子顶点纵坐标
885	871	1673	869
885	871	1675	871
885	871	1663	872
885	871	1659	872
885	871	1652	872
885	871	1649	873
885	871	1644	873
885	871	1642	875
885	871	1637	874
885	871	1631	874
885	871	1625	876
885	871	1621	877
885	871	1617	877
885	871	1610	877
885	871	1607	879
885	871	1602	879
885	871	1559	879
885	871	1592	880
885	871	1588	880
885	871	1584	880
885	871	1577	880
885	871	1571	881
885	871	1573	882
885	871	1573	882
885	871	1571	882

885	871	1571	881
885	871	1550	885
885	871	1544	884
885	871	1542	884
885	871	1539	885
885	871	1534	885
885	871	1531	885
885	871	1525	885
885	871	1518	886
885	871	1514	886
885	871	1511	886
885	871	1507	887
885	871	1501	887
885	871	1499	887
885	871	1494	888

## 附录二 第二问相关程序

```

fun.m:
function ObjV=fun(unit)
load matlab data
h=unit(:,1);
b1=unit(:,2);
time.year=2015;
time.month=4;
time.day=18;
location.altitude = 0;
time.UTC =8;

time.hour = 14;
time.min = 42;
time.sec = 0;
for j=1:length(unit)
    location.longitude = 110.25;
    location.latitude = b1(j);

for i=1:21

```

```

        if time.min>60
            time.min=0;
            time.hour=time.hour+1;
        end
        a=sun_position(time,location);
        l2(i)=h(j)/tan((a.zenith)/180*pi);
        time.min=time.min+3;
    end
    a1=data(:,1);
    a2=data(:,2);
    l1=sqrt(a1.^2+a2.^2);
    l=0;
    for k=1:21
        l=l+(l1(k)-l2(k))^2;
    end
    ObjV(j)=l;
end
ObjV=ObjV';

run_genetic.m:
clc;clear,close all;
NVAR=2;
NIND=40;
MAXGEN=100;
LIND=10;
GGAP=0.9;
trace=zeros(2,MAXGEN);
FieldD=[ LIND LIND;
         0 0;
         10 90;
         1 1;
         0 0;
         1 1;
         1 1];
Chrom=crtbp(NIND,LIND*NVAR);
unit=bs2rv(Chrom,FieldD);
ObjV=fun(unit);
for gen=1:MAXGEN
    FitnV=ranking(-ObjV);
    SelCh=select('sus',Chrom,FitnV,GGAP);
    SelCh=recombin('xovsp',SelCh,0.7);
    SelCh=mut(SelCh);
    unit=bs2rv(SelCh,FieldD);
    ObjVSel=fun(unit);
end

```

```

[Chrom ObjV]=reins(Chrom,SelCh,1,1,ObjV,ObjVSel);
[Y(gen),I(gen)]=min(ObjV);
trace(1,gen)=min(ObjV);
trace(2,gen)=sum(ObjV)/length(ObjV);
end
unit=bs2rv(Chrom,FieldD);
figure
plot(trace(1,1:gen),'b-o');
hold on
plot(trace(2,1:gen),'r-o');
XY=unit(I(gen),:)
Z=min(Y)

```

### 附录三 第四问相关程序

```

g.m:
function y = g( m )
location.altitude = 0;
A=fun1(m(4));
time.year = 2015;
time.month = A(1);
time.day = A(2);

time.hour=8;
time.min =55;
time.sec=0;
time.sec = 00;
time.UTC = +8;

location.longitude=m(1);
location.latitude=m(2);
L=2;

h=[2.323389734
2.329283311
2.293887466
2.282088066
2.261439117
2.252595865
2.237846657
2.23197138
2.21720809

```

```

2.199509127
2.181843109
2.170066558
2.158267558
2.137619319
2.128828366
2.114080044
1.987245048
2.084619463
2.072821041
2.061022631
2.040375441
2.022719306
2.028663966
2.028663966
2.022765035
2.022719306
1.960994679
1.943238563
1.937340033
1.92855375
1.913807957
1.904960507
1.887265666
1.866689987
1.854893969
1.846046985
1.834325191
1.816632086
1.810734411
1.7960708511;

```

```

maxchange = 0;
change = 0;

```

```

h=cos(m(3)/180*pi)*h;
y=0;
for i=1:1:40

```

```

    out=sun_position(time,location);
    final=L/tan((90-out.zenith)/180*pi);
    y=y+(final-h(i))^2;

```



```

change =abs(final - h(i));

maxchange= max (maxchange, change);

time.min = time.min + 1;
if time.min >= 60;
    time.hour = time.hour + 1;
    time.min = 00;
end

end

y=y+maxchange;

end

fff.m:
function fff=y ()
clc;clear;close all;
set(gcf,'DoubleBuffer','on');
m1 = 120;
m2 = 30;
m3 = 4.3;
m4 = 82 ;

dm1=0.3;

dm2 = 0.3;

dm3 = 0.5;

dm4 = 20;

start=[m1,m2,m3,m4];
fm0=g(start);

T=8000;
N=60;
Lm=0.99;
LT=0.9;

```

```

while T>0.001;
    for k=1:100;

        m(1)=m1+dm1*(2*rand-1);

        if m(1) > 180
            m(1)=180-rand*dm1;
        end
        if m(1) < -180
            m(1)=-180+rand*dm1;
        end

        m(2)=m2+dm2*(2*rand-1);
        if m(2) > 90
            m(2)= 90-rand*dm2;
        end
        if m(2) < -90
            m(2)=-90+rand*dm2;
        end

        m(3)=m3+dm3*(2*rand-1);
        if m(3)>30
            m(3)=30-rand*dm3;
        end
        if m(3)<0
            m(3)=0+rand*dm3;
        end

        temp=(rand*2-1)*dm4;
        if temp >0;
            m(4) = m4 + ceil(temp);
        end
        if temp <0;
            m(4)=m4+floor(temp);
        end

        if m(4) > 365
            m(4) = m(4) - ceil(rand*dm4);
        end
        if m(4) <0
            m(4) = m(4) + ceil(rand*dm4);
        end
    end
end

```

```

end

fm=g(m);
Df=fm-fm0;
if rand<exp(-Df/T);
    m1=m(1);
    m2=m(2);
    m3=m(3);
    m4=m(4);
    fm0=fm
end

end
T=T*L*T;
dm1=dm1*Lm;
dm2=dm2*Lm;
dm3=dm3*Lm;
dm4=dm4*Lm;

end
m1
m2
m3
m4
fun1(m4)

end

```

公众号：数学建模老哥