运筹学第二次作业（20230301） 参考答案

1. 假设以下集合均为非空集合，请判断哪些集合一定有顶点，需要给出理由。

a) $\Omega_1 : \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$。

b) $\Omega_2 : \{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$，其中 A 是行满秩矩阵。

c) $\Omega_3 : \{x \in R^n \mid Ax \geq b\}$，其中 A 是列满秩矩阵。

解：

a)

该集合一定有顶点。

该集合的约束是标准形式的 LP 问题，且已知非空。则根据定理 1.2.5，其至少有一个基本可行解，继而根据定理 1.2.4，该基本可行解为Ω_1中的顶点。

b)

该集合**不**一定有顶点。

举反例即可。令$A = [1 \quad 1]$，$b = 0$，则A行满秩且Ω_2非空，但此时

$$\Omega_2 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 | x_1 + x_2 \geq 0\}$$

没有顶点。

c)

该集合一定有顶点。

设$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，且$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T, \ldots, \boldsymbol{a}_m^T)^T$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$，其中$\boldsymbol{a}_i^T$表示$\boldsymbol{A}$的第$i$行。

由题意，$\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$有解，则必有边界上的解$\boldsymbol{x}$（否则可向任一超平面的内法向量方向移动到达边界），设起作用的约束（取等号）下标为$c_1, c_2, \ldots, c_k$.

因为$\boldsymbol{A}$列满秩，$m \geq n$，必能找到n个行向量线性无关，于是$k \geq n$，也即必能找到一点$\boldsymbol{x}^*$，满足：

$$\boldsymbol{a}_{c_1}^T \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}_{c_1}$$

$$\ldots$$

$$\boldsymbol{a}_{c_k}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}_{c_k}$$
$$\boldsymbol{a}_{c_{k+1}}^T\boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{b}_{c_{k+1}}$$
$$\cdots$$
$$\boldsymbol{a}_{c_m}^T\boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{b}_{c_m}$$

事实上当$k > n$时，存在冗余等式约束可去掉，故只用考虑$k = n$的情况。

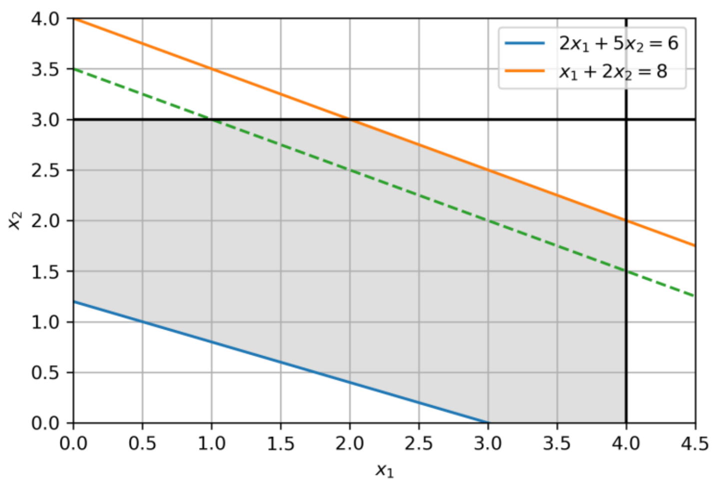
当$k = n$时，等式约束解唯一。任何异于$\boldsymbol{x}^*$的解，前k个约束至少一个取大于号，其线性组合不可能为$\boldsymbol{x}^*$.

故$\boldsymbol{x}^*$为顶点。

2. 请写出以下线性规划问题可行区域中的所有顶点，并求出最优解。

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 5x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 0 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

解：



如图所示，顶点有 $\boldsymbol{x}_1 = (2,3), \boldsymbol{x}_2 = (4,2), (4,0), (3,0), (0,1.2), (0,3)$

最优解为$\{\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \mid \forall\lambda \in [0,1]\}$，最优值为 8

（请同学们注意区分**最优解**与**最优值**）

3. 某线性规划问题的约束条件是

$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 2 \\ x_i \geq 0, \qquad i &= 1,2,3,4 \end{aligned}$$

请问 x_1, x_3 所对应的列向量 A_1, A_3 是否构成可行基？若是，请写出B, N，并求出B对应的基本可行解。

解：

$B = [A_1, A_3] = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$满秩，$N = [A_2, A_4] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，则 $B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} > 0$

因此A_1, A_3构成可行基，基本可行解为$(1,0,3,0)^\top$