

1 (1) 假设 X_1, \dots, X_n 相互独立, 且同服从参数为 λ 的指数分布, 求 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的分布;

(2) 假设 X_1, X_2 相互独立, 分别服从参数为 λ_1, λ_2 的指数分布, 求 $P(X_1 < X_2)$.

2 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是以参数为 λ 的时齐泊松过程, 令 $S_0 = 0$, $S_n (n \geq 1)$ 表示第 n 个事件发生的时刻, $X_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 1)$ 表示第 $n-1$ 个事件与第 n 个事件发生的时间间隔. 试求 $S_n, X_n (n \geq 1)$ 的概率密度函数.

3 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是以参数为 λ 的时齐泊松过程, 令 $S_0 = 0$, $S_n (n \geq 1)$ 表示第 n 个事件发生的时刻, $X_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 1)$ 表示第 $n-1$ 个事件与第 n 个事件发生的时间间隔, 则对 $0 < s < t$, 求 $P(X_1 \leq s | N(t) = 1)$

4 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是以参数为 λ 的时齐泊松过程, 令 $S_0 = 0$, $S_n (n \geq 1)$ 表示第 n 个事件发生的时刻, 又设每一发生事件以概率 P 属于类型 1, 以概率 $1-P$ 属于类型 2, 且与其它事件相互独立. 让 $N_1(t), N_2(t)$ 分别表示时间区间 $[0, t]$ 上发生事件中分别属于类型 1 和属于类型 2 的数目, 显然 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, 试证明 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 分别是参数为 λP 和 $\lambda(1-P)$ 的泊松分布, 且相互独立.

5 设 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是相互独立, 分别以参数为 λ_1 和 λ_2 的时齐泊松过程, 令 $S_0^i = 0$, $S_n^i (n \geq 1)$ 表示第 i 个过程中第 n 个事件发生的时刻, $i=1, 2$.

求 $P(S_1^1 < S_1^2)$, 进一步试求 $P(S_n^1 < S_m^2)$.

6 设 (X, Λ) 的概率分布为: Λ 的边缘分布密度为 $\frac{1}{\lambda^2} e^{-\beta/\lambda}, \lambda > 0$, 其中 β 为正常数;

给定 $\Lambda = \lambda$ 时, X 服从参数为 λ 的指数分布, 求 EX .

7 设 X, Y 独立同分布于参数为 λ 的指数分布, 求

$$Z = \begin{cases} 3X + 1, & \text{若 } X \geq Y \\ 6Y, & \text{若 } X < Y \end{cases}$$

的数学期望.

8 设 X_1, \dots, X_n 是相互独立的 n 个随机变量, $X_i \sim F_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$, 若

$Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ 试求 Y, Z 的分布.