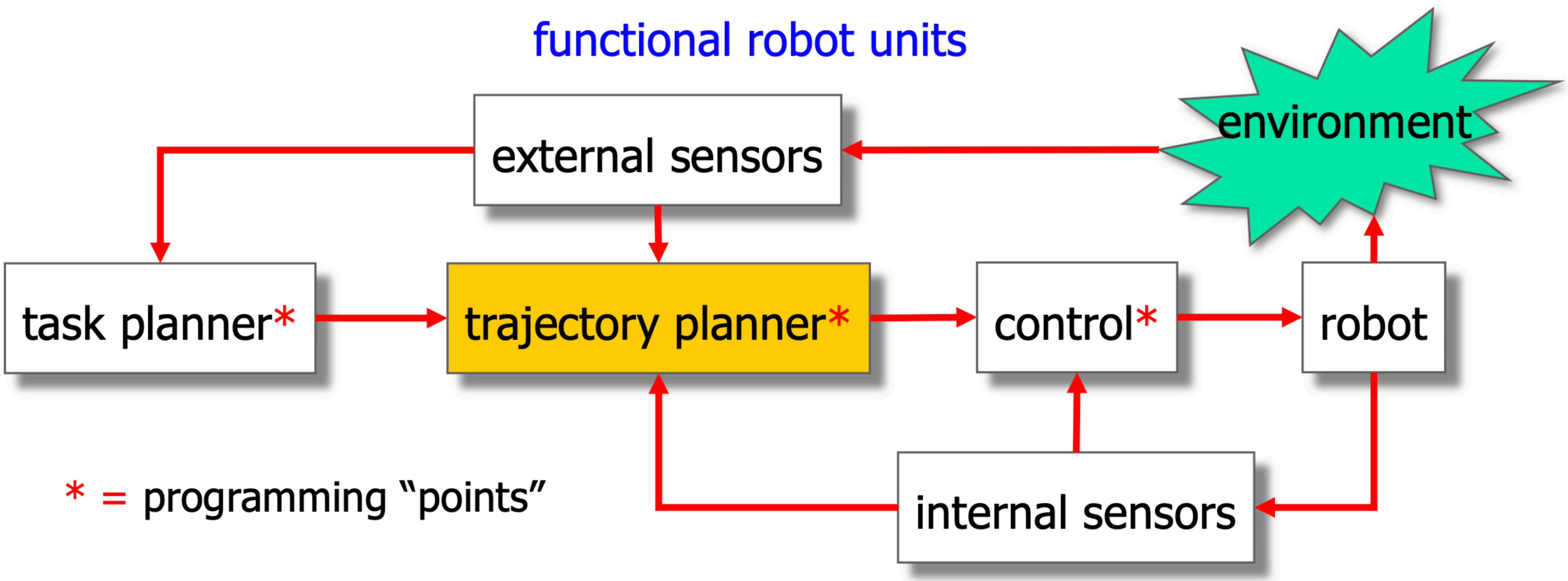
# 智能机器人-动力学与控制

—轨迹规划—

## 提纲

- ➤ **轨迹规划问题描述**
- ➤ 点到点的轨迹规划
- ➤ 通过点的轨迹规划
- ➤ 时间最优的时间尺度

# 轨迹规划问题




Big Picture of a robot system

**轨迹：**一系列随时间变化的机器人位姿（位姿的时间函数）

① 有些情况下， 机器人的轨迹完全由任务决定，例如：焊接机器人的末端（焊枪）需要跟踪一个指地的焊缝；

（讨论焊接任务）

② 另一些情况下，任务是机器人要在给定的时间内从一个位置运动到另一个位置，需要机器人自己确定满足任务的轨迹，例如：机器人给客人递送一瓶矿泉水/咖啡；

（讨论搭积木任务）

③ 轨迹是关于时间的平滑函数，而且需要满足关节速度、加速度、驱动力矩的限制。

（讨论书法/绘画任务的轨迹应该如何定）

轨迹规划：构造一个轨迹(路径+时间点)，使机器人在给定时间内到达一系列任务点。

① 我们主要考虑三种情况的轨迹生成：

  ① 在关节和任务空间点到点的直线轨迹；

  ② 给定时间通过点的轨迹；

  ③ 通过给定路径的最短时间轨迹。

② 有障碍物的轨迹规划问题(避障轨迹)是更深入的内容，将会完成一个大作业。

轨迹规划所设计的几个要素：

① 空间

- Cartesian Space，Joint Space

② 任务

- 点到点（PTP)，多个点，连续曲线，连接曲线

③ - 轨迹得几何形式

- 直线，多项式、指数，。。。

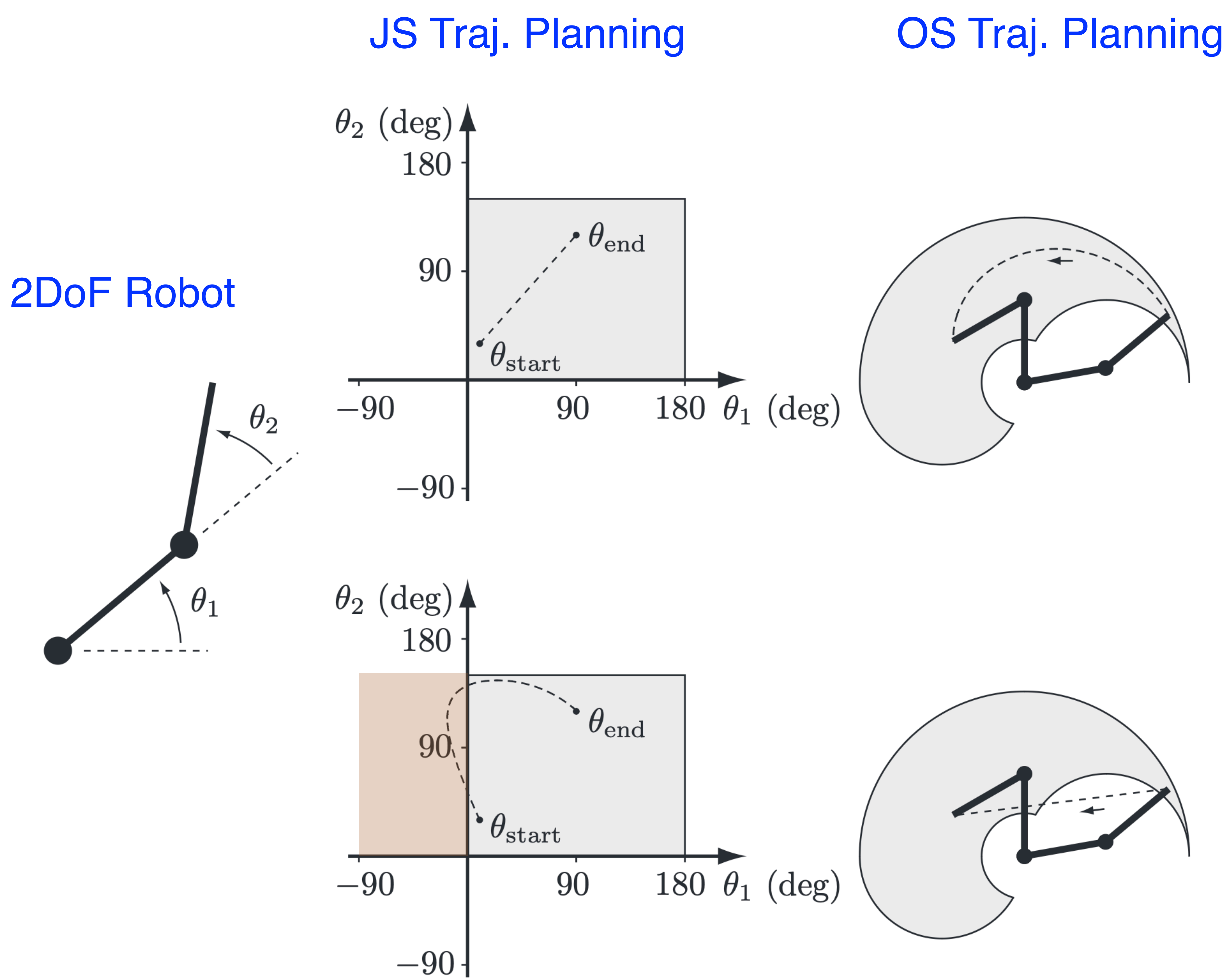
④ 时间

- bang bang（加速度），梯形（速度），多项式（位姿），。。。

⑤ 协调与独立

- 所有关节(或所有笛卡尔分量)的运动在同一时刻开始和结束；

- 运动是独立计时的(根据所要求的位移和机器人的能力)




Joint Space Trajectory Planning VS Operational Space Trajectory Planning

关节空间轨迹规划中的运动学问题：

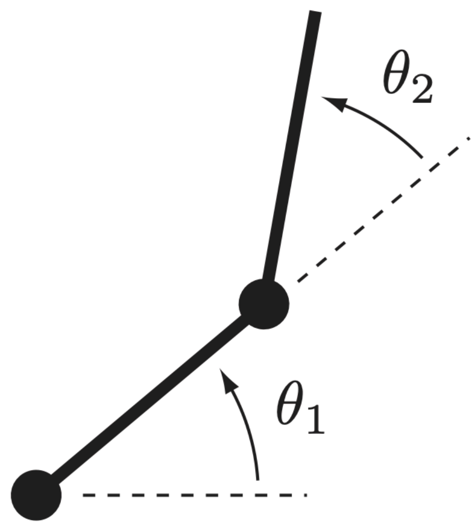
① 可能需要求解$\dot{q}$、$\ddot{q}$或$q$的更高阶导数（笛卡尔任务规划也涉及几何路径）；

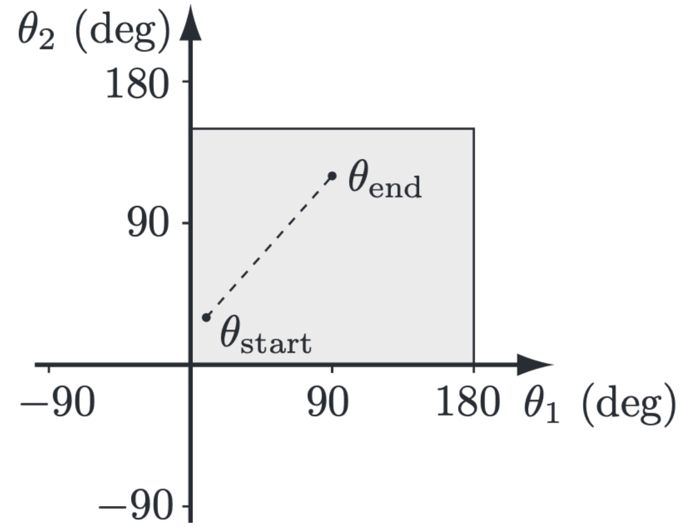
② 对于冗余机器人，最优轨迹或附加的辅助任务，可以在$\infty^{n-m}$所确定的逆解中进行；

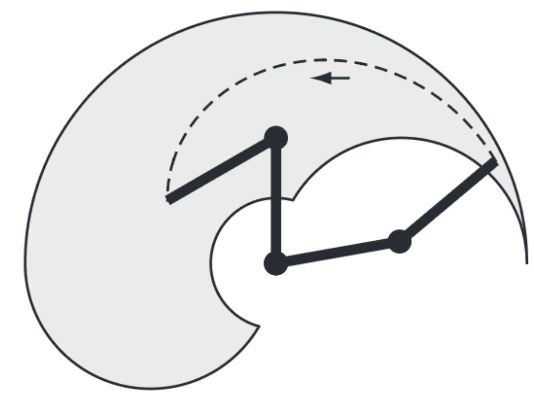
③ -离线规划并不总是可行的，例如：当与环境发生相互作用或需要采用基于传感器的运动

## 提纲

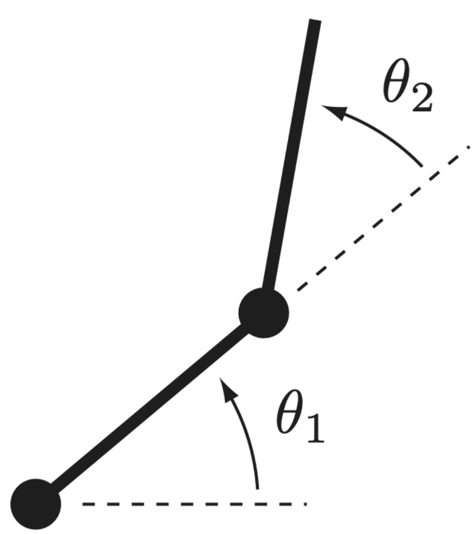
- ➤ 轨迹规划问题描述
- ➤ 点到点的轨迹规划
- ➤ 通过点的轨迹规划
- ➤ 时间最优的时间尺度

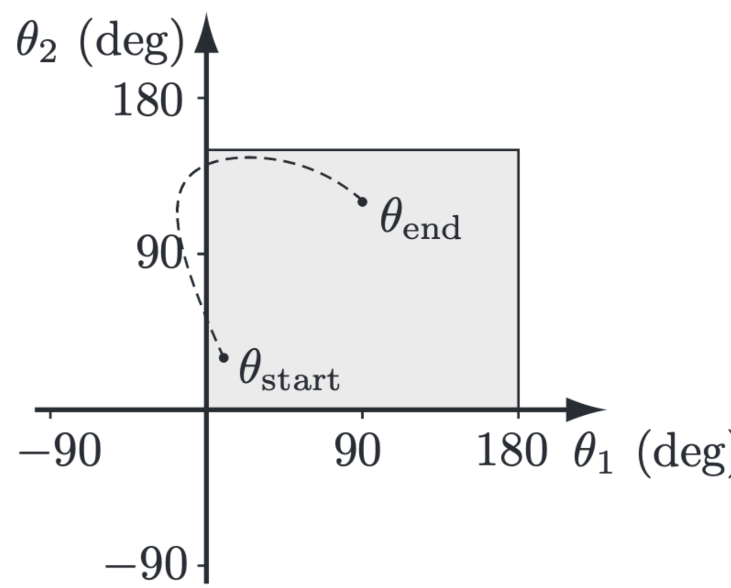


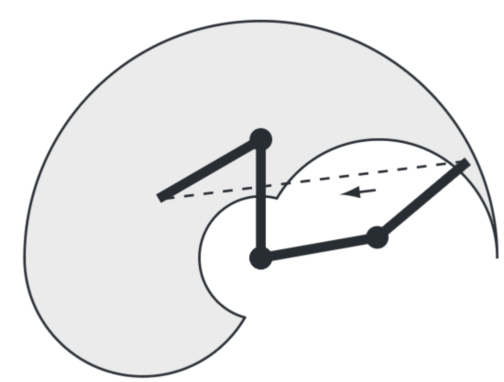



$$\theta(s) = \theta_{start} + s\left(\theta_{\text{end}} - \theta_{start}\right)$$



$$x(s) = x_{\text{start}} + s\left(x_{\text{end}} - x_{start}\right)$$

**“时间”变量S($s:[0,1]$)，$s=0$表示起点，$s=1$表示终点**

**对应时间变量T（$t:[0,T]$）**

# 三次多项式插值

**为了实现单个关节的平稳运动，轨迹函数至少需要满足四个约束条件。**

$$\left.\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0 \\ \theta(t_f) &= \theta_f\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta}(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= 0\end{aligned}\right\}$$

**三次样条：**

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t\end{aligned}\right\}$$

**求解约束条件可得：**

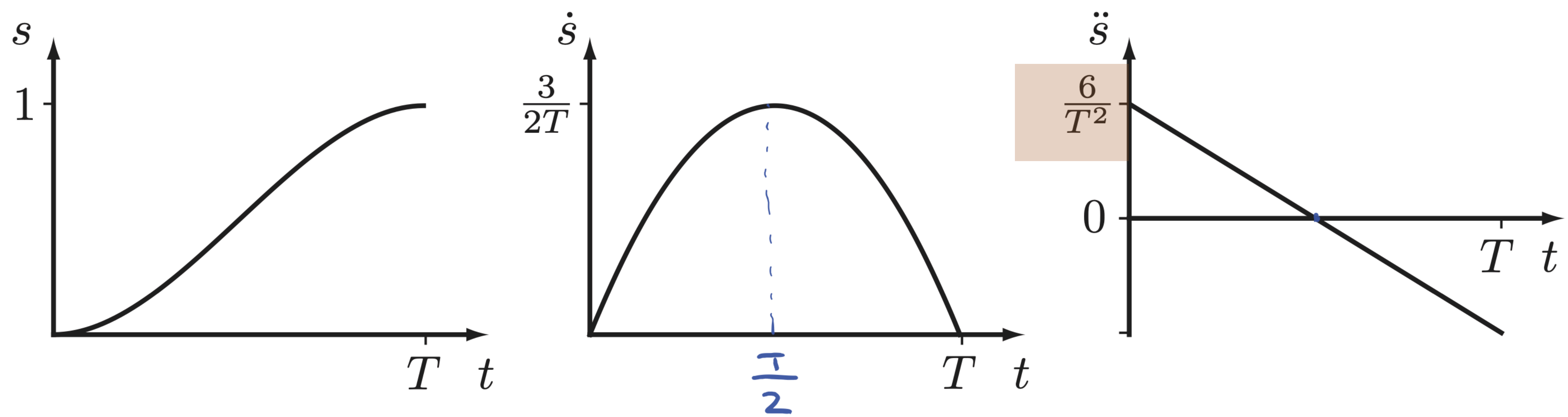
$$\left.\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0)\end{aligned}\right\}$$

$$\theta(s) = \theta_{start} + s\left(\theta_{\text{end}} - \theta_{start}\right)$$

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$s(0) = 0, s(T) = 1, \dot{s}(0) = \dot{s}(T) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{T^2}, a_3 = -\frac{2}{T^3}$$

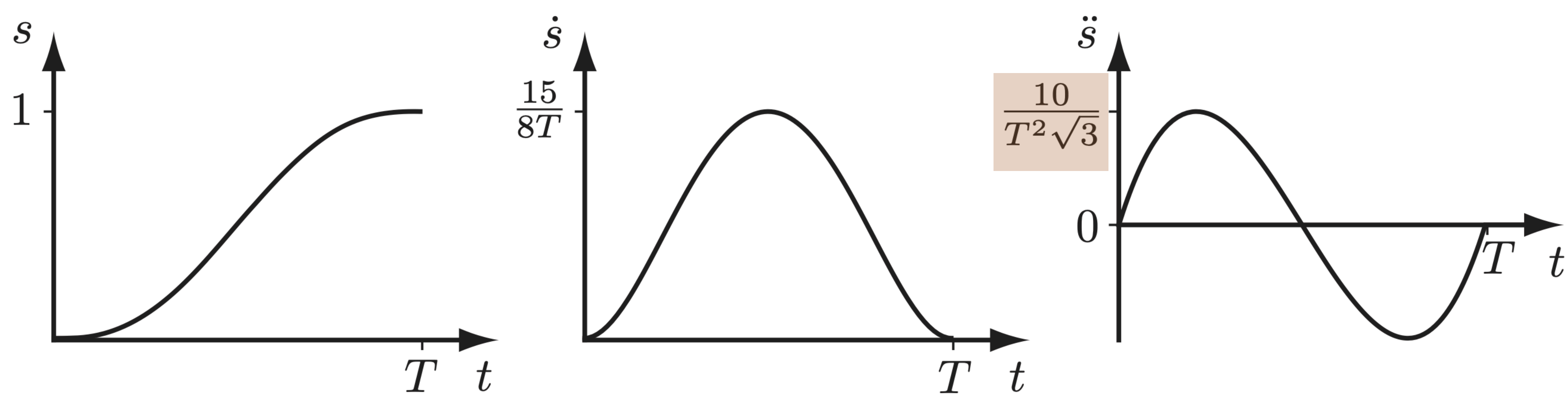


# 五次多项式插值

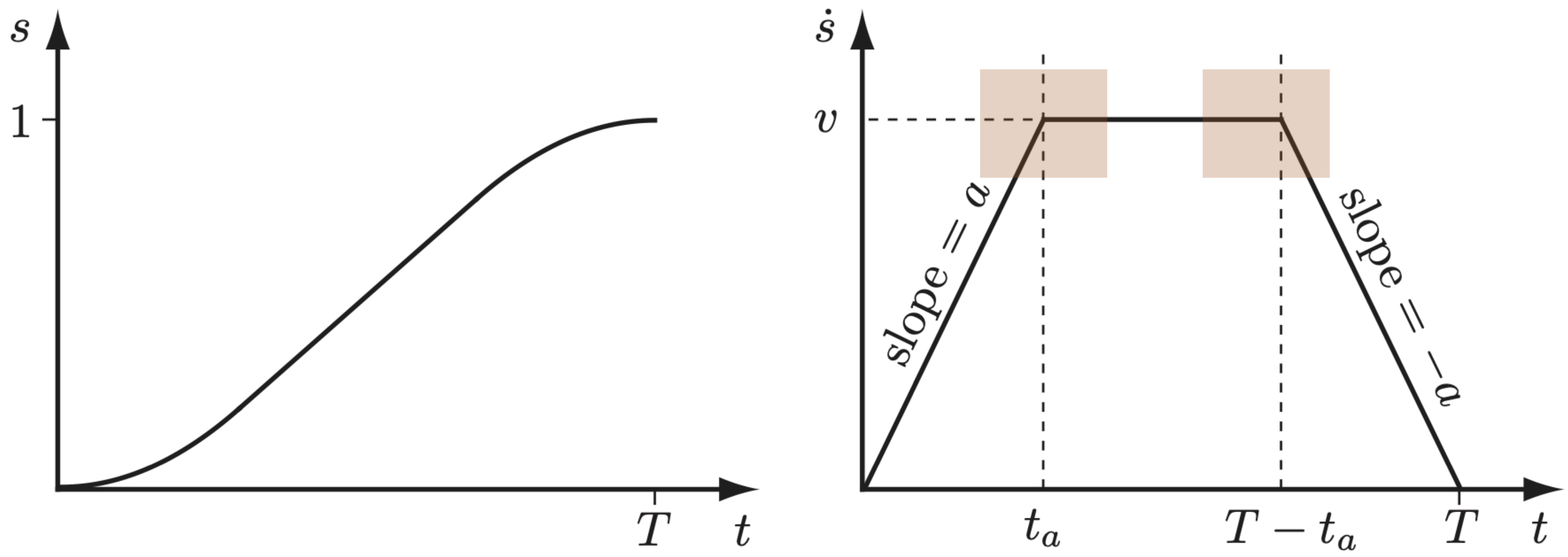
$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$s(0) = 0, s(T) = 1, \dot{s}(0) = \dot{s}(T) = \ddot{s}(0) = \ddot{s}(T) = 0$$

**我们可以用这6个约束唯一地解出系数。**



# 梯形



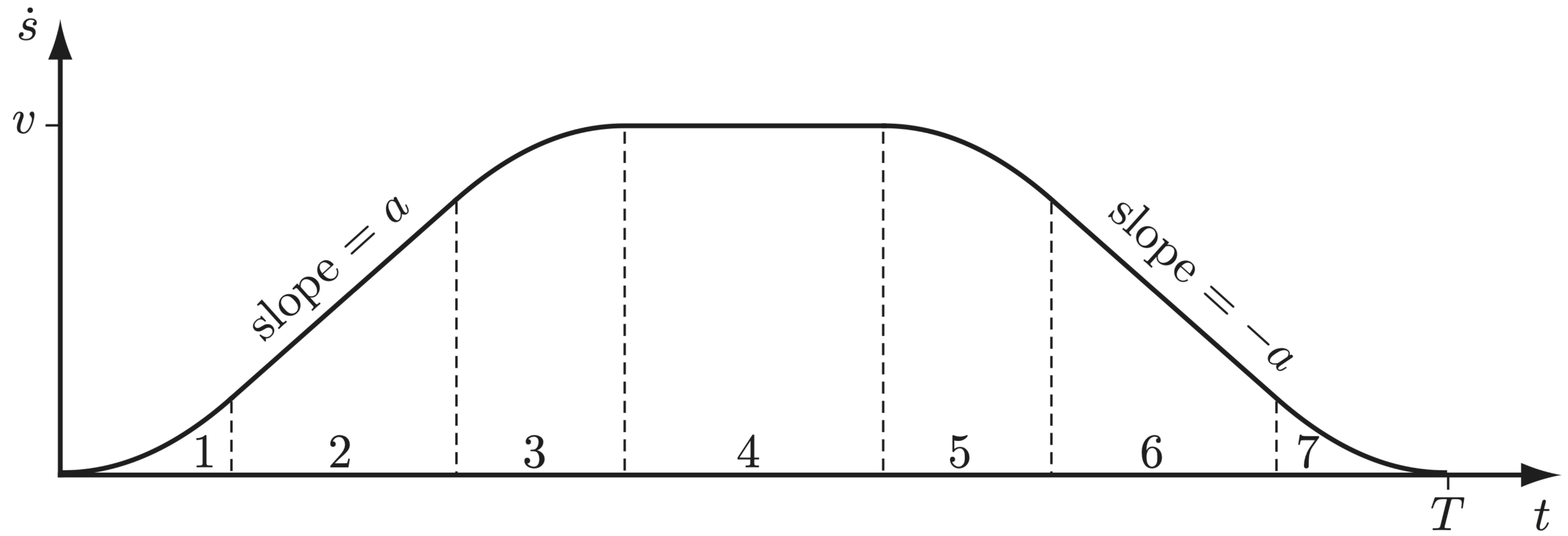

$t \in [0, t_a] : \ddot{s} = a$ 恒加速阶段

$t \in (t_a, T - 2t_a] : \dot{s} = v$ 恒速阶段

$t \in (T - 2t_a, T] : \ddot{s} = -a$ 恒减速阶段

# S形曲线

## 梯形曲线导致加速度的不连续，进一步可以改成S形曲线




(1)$constant\ jerk : d^3s/dt^3 = J$

(2)$constant\ acceleration : \ddot{s} = a$

(3)$constant\ negativejerkd^3s/dt^3 = -J;$

(4)$coasting\ at\ constant : \dot{s} = v$

(5)$constant\ negative\ jerk;$

(6)$constant\ deceleration;$

(7)$constant\ positive\ jerk$

## 提纲

- 轨迹规划问题描述
- 点到点的轨迹规划
- 通过点的轨迹规划
- 时间最优的时间尺度

# 提纲

- ➤ 轨迹规划问题描述
- ➤ 点到点的轨迹规划
- ➤ 通过点的轨迹规划
- ➤ 时间最优的时间尺度