运筹学第九次作业参考答案（20230507）

1. 给出用 Goldstein 法对

$$f(x)=\sin(x)+\frac{1}{2}x^2$$

在区间$x\in[-\pi,\pi]$上做非精确搜索的步骤。

过程略，参考课件给出算法即可。注意搜索的起点为$-\pi$而非 0。

2. 给定函数

$$f(x,y)=x\ln x+y\ln y+xy$$

其中$x,y\in(0,1)$。求在点(0.5,0.5)处的牛顿方向和l_1范数下的最速下降方向。

解：

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}\ln x+1+y\\ \ln y+1+x\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y)=\begin{bmatrix}1/x & 1\\ 1 & 1/y\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x,y)|_{(0.5,0.5)}=\begin{bmatrix}1.5-\ln 2\\ 1.5-\ln 2\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y)|_{(0.5,0.5)}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

牛顿方向：

$$D=-\nabla^2 f(x,y)^{-1}\nabla f(x,y)|_{(0.5,0.5)}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.5-\ln 2\\ 1.5-\ln 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-0.269\\ -0.269\end{bmatrix}$$

l_1范数下的最速下降方向：

由于$\nabla f(0.5,0.5)$两分量相等且为正，故方向为$[-1,0]^T$或$[0,-1]^T$均可

备注：L1 范数下降又称坐标轴下降法，即只沿着梯度分量绝对值最大的方向下降，而当有多个方向能取到最大值时，任取一个分量方向即可。（课件中公式表达的是各分量不相同的情况，$[-1,-1]^T$不能满足$\nabla f(x,y)^T D=-\|\nabla f(x,y)\|_\infty$，不正确）

3. 用负梯度法和牛顿法求解以下问题，步长采用精确搜索，要求迭代进行两轮。

$$\text{minimize } 2x^2+2y^2-4x-6y+2xy$$

取初始点$(x_0,y_0)=(0,1)$。

解：

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}4x-4+2y\\4y-6+2x\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y)=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$$

负梯度法：

$$d_1=-\nabla f(x,y)|_{(x_0,y_0)}=[2,2]^T$$

$$(x_1,y_1)=(2t,1+2t)$$

精确搜索

$$f(x_1,y_1)=24t^2-8t-4$$

$t=\frac{1}{6}$时，$f(x_1,y_1)$取最小值，故$(x_1,y_1)=(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$。

$$d_2=-\nabla f(x,y)|_{(x_1,y_1)}=[0,0]^T$$

故最优解$(x^*,y^*)=(x_1,y_1)$，$f^*(x,y)=-\frac{14}{3}$

牛顿法：

$$d_1=-\nabla^2 f(x,y)^{-1}\nabla f(x,y)|_{(x_0,y_0)}=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]^T$$

方向与负梯度法相同，故精确搜索步骤及最优解同理。

4. 考虑无约束优化问题

$$\text{minimize }(1-x-y)^2+2(y-x^2)^2$$

取初始点$(0,0)$，用 Matlab 或者 Python 编程实现用两种共轭梯度法（Fletcher-Reeves、Polak-Ribiere）求解（要求采用精确直线搜索），终止条件为$\|\nabla f(x)\|_2\le 10^{-4}$。

请画出目标函数的等值线，给出每种算法求得的最优解和最优值，并画出不同算法函数值随迭代次数增加的变化曲线，以及迭代过程中决策变量在等值线上的变化曲线。

最优解在(0.618,0.382)取到，过程略。