清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：自93 姓名：周义逐、 编号：2019010702 科目：随机过程 第 1 页

1. $E(X|Y=j)=\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

$E(X|Y=1)=1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{4}{7}+3\times\frac{1}{7}=\frac{2}{7}+\frac{8}{7}+\frac{3}{7}=\frac{13}{7}$

$E(X|Y=2)=1\times\frac{5}{15}+2\times\frac{7}{15}+3\times\frac{3}{15}=\frac{5}{15}+\frac{14}{15}+\frac{9}{15}=\frac{28}{15}$

$E(X|Y=3)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}$

$E(X|Y)$的分布列：

$E(X\|Y)$	$\frac{13}{7}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{11}{5}$
P	$\frac{7}{27}$	$\frac{15}{27}$	$\frac{5}{27}$

$EX=\sum_{j=1}^{3}E(X|Y=j)P(Y=j)$

$=\frac{13}{7}\times\frac{7}{27}+\frac{28}{15}\times\frac{15}{27}+\frac{11}{5}\times\frac{5}{27}$

$=\frac{13}{27}+\frac{28}{27}+\frac{11}{27}$

$=\frac{52}{27}$

2. $X_n\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ p & q\end{pmatrix}$

$Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k \quad Y_0=0$

$Y_2=X_1+X_2$

$Y_3=X_1+X_2+X_3$

$E(Y_3|Y_2=0)=p-q \quad P(Y_2=0)=2pq$

~~$E(Y_3|Y_2=1)=2p-q \quad P(Y_2=1)$~~

$E(Y_3|Y_2=2)=3p+q \quad P(Y=2)=p^2$

$E(Y_3|Y_2=-2)=-p-3q \quad P(Y=-2)=q^2$

$E(Y_3|Y_2)$的分布列：

$E(Y_3\|Y_2)$	$p-q$	$3p+q$	$-p-3q$
p	$2pq$	p^2	q^2

由全期望公式，$E(Y_{n+1}|Y_n)=\sum_i E(Y_{n+1}|Y_n=i)P(Y_n=i)$

$=\sum_i[(i+1)p+(i-1)q]P(Y_n=i)$

$=\sum_i[i(p+q)+(p-q)]P(Y_n=i)$

~~$=\sum_i iP(Y_n=i)$~~

$E(Y_{n+1}|Y_n=i)=(i+1)p+(i-1)q$

$=i(p+q)+p-q$

$=i+p-q$

$\therefore E(Y_{n+1}|Y_n)=Y_n+p-q$.

3.(1) 记n件产品中，一等品件数为X，

则 $X\sim B(n-1,\frac{p_1}{p_1+p_2})$

$\therefore EX=\frac{(n-1)p_1}{p_1+p_2}$.

(2) 记首次检修出现在第N次，

则 $N\sim Ge(p_3)$ $EN=\frac{1}{p_3}$

记X_i 服从 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{p_1}{p_1+p_2} & \frac{p_2}{p_1+p_2}\end{pmatrix}$. $EX_i=\frac{p_1}{p_1+p_2}$

则 $E\left(\sum_{i=1}^{N-1}X_i\right)$

$=E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N-1}X_i\middle|N\right)\right]$

$=E\left[(N-1)EX_i\right]$

$=(EN-1)EX_i$

$=\left(\frac{1}{p_3}-1\right)\frac{p_1}{p_1+p_2}$

$=\frac{p_1+p_2}{p_3}\cdot\frac{p_1}{p_1+p_2}=\frac{p_1}{p_3}$

4. 记第一次取得卡片的数字为 Y

则 $EY=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n+1}{2}$

$\therefore EX=E\left(E(X|Y)\right)$

$=E\left(\frac{Y+1}{2}\right)$

$=\frac{EY+1}{2}$

$=\frac{\frac{n+1}{2}+1}{2}$

$=\frac{n+3}{4}$

5. X 可能的取值有 0, 1, 2

L 可能的取值有 2, 3, 4.

$P(X=0, L=2)=\frac{3}{7}$

$P(X=1, L=2)=\frac{1}{7}$

$P(X=2, L=2)=0$

$P(X=1, L=3)=0$

$P(X=2, L=3)=\frac{1}{7}$

$P(X=0, L=3)=0$

$P(X=0, L=4)=\frac{1}{7}$

$P(X=1, L=4)=0$

$P(X=2, L=4)=\frac{1}{7}$

联合分布：

X \ L	2	3	4
0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
1	$\frac{1}{7}$	0	0
2	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

L 在给定 X 下的最佳的方预测值即为 $E(L|X)$

$E(L|X)=E(L|X=0)P(X=0)+E(L|X=1)P(X=1)$

$+E(L|X=2)P(X=2)$

$E(L|X=0)=2\times\frac{3}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

$E(L|X=1)=2\times 1=2$

$E(L|X=2)=3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

6. $DX=E\left[X-EX\right]^2$

$=E\left[X-E(X|Y)+E(X|Y)-EX\right]^2$

$=E\left[X-E(X|Y)\right]^2+E\left[E(X|Y)-EX\right]^2$

$+2E(X-E(X|Y))(E(X|Y)-EX)$

$=E\left\{E\left(\left[X-E(X|Y)\right]^2|Y\right)\right\}+E\left[E(X|Y)-E\left[E(X|Y)\right]\right]^2$

$+2E\left\{E\left(X-E(X|Y)\right)\left(E(X|Y)-EX\right)|Y\right\}$

$=E\left[D(X|Y)\right]+D\left[E(X|Y)\right]$

$+2E\left\{\left(E(X|Y)-EX\right)E\left(X-E(X|Y)|Y\right)\right\}$

$=E\left[D(X|Y)\right]+D\left[E(X|Y)\right]$

$+2E\left\{\left(E(X|Y)-EX\right)\left(E(X|Y)-E(X|Y)\right)\right\}$

$=E\left[D(X|Y)\right]+D\left[E(X|Y)\right]$

7. (a) $P(X_n \geq 0, n=1,2,3,4)$

$= P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=1, X_2=0, X_3=1)$

$= P(X_1-X_0=1, X_2-X_1=1) + P(X_1-X_0=1, X_2-X_1=-1, X_3-X_2=1)$

$= P(X_1=1)P(X_1=1) + P(X_1=1)P(X_1=-1)P(X_1=1)$

$= p^2 + p^2 q = p^2(1+q)$

(d) $P(|X_n|>2, n=1,2,3,4)$

$= P(X_1=1, X_2=2, X_3=3) + P(X_1=-1, X_2=-2, X_3=-3)$

$= P^3(X_1=1) + P^3(X_1=-1) = p^3+q^3$

$\therefore P(|X_n| \leq 2, n=1,2,3,4)$

$= 1-(p^3+q^3)$

$= 1-(p+q)(p^2-pq+q^2)$

$= (p+q)^2-(p^2-pq+q^2)$

$= 3pq$

39. (a) 左边 $= \dfrac{P(X_{n+1}=i_{n+1}, X_n=i_n, \cdots X_0=i_0)}{P(X_n=i_n, \cdots, X_0=i_0)}$

$= \dfrac{P(X_{n+1}-X_n=i_{n+1}-i_n, X_n-X_{n-1}=i_n-i_{n-1}, \cdots, X_0=i_0)}{P(X_n-X_{n-1}=i_n-i_{n-1}, \cdots, X_0=i_0)}$

$= \dfrac{P(X_{n+1}-X_n=i_{n+1}-i_n)P(X_n-X_{n-1}=i_n-i_{n-1})\cdots P(X_0=i_0)}{P(X_n-X_{n-1}=i_n-i_{n-1})\cdots P(X_0=i_0)}$

$= P(X_{n+1}-X_n=i_{n+1}-i_n)$

右边 $= \dfrac{P(X_{n+1}=i_{n+1}, X_n=i_n)}{P(X_n=i_n)}$

$= \dfrac{P(X_{n+1}-X_n=i_{n+1}-i_n, X_n=i_n)}{P(X_n=i_n)}$

$= \dfrac{P(X_{n+1}-X_n=i_{n+1}-i_n)P(X_n=i_n)}{P(X_n=i_n)}$

$= P(X_{n+1}-X_n=i_{n+1}-i_n)$

$\therefore$ 左边 = 右边

(b) 左边 $= \dfrac{P(X_{n+1}=i_{n+1}, X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1})}{P(X_n=i_n)}$

$= \dfrac{P(X_{n+1}-X_n=i_n, X_n=i_n, X_n-X_{n-1}=i_n-i_{n-1})}{P(X_n=i_n)}$

$= \dfrac{P(X_{n+1}-X_n=i_{n+1}-i_n)P(X_n=i_n)P(X_n-X_{n-1}=i_n-i_{n-1})}{P(X_n=i_n)}$

$= \dfrac{P(X_{n+1}-X_n=i_{n+1}-i_n)P(X_n=i_n)}{P(X_n=i_n)} \cdot \dfrac{P(X_n=i_n)P(X_n-X_{n-1}=i_n-i_{n-1})}{P(X_n=i_n)}$

$= \dfrac{P(X_{n+1}=i_{n+1}, X_n=i_n)}{P(X_n=i_n)} \cdot \dfrac{P(X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1})}{P(X_n=i_n)}$

$= P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n) P(X_{n-1}=i_{n-1} | X_n=i_n)$

= 右边

补充题1：

设Y表示第一次选择的门洞，X为总时间

则 $E(X|Y=1)=2$

$E(X|Y=2)=3+\frac{1}{2}\times 7+\frac{1}{2}\times 2=7.5$

$E(X|Y=3)=5+\frac{1}{2}\times 5+\frac{1}{2}\times 2=8.5$

$EX=\frac{1}{3}[E(X|Y=1)+E(X|Y=2)+E(X|Y=3)]$

$=\frac{1}{3}\times 18=6$

补充题2：

记骰子在第N次出现6点，$N\sim Ge(\frac{1}{6})$，$EN=6$

X_i为前N-1次中第i次抛掷出现3点，则 $X_i\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ $EX_i=\frac{1}{5}$

$EX=E\left(\sum_{i=1}^{N-1}X_i\right)=E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N-1}X_i\,\middle|\,N\right)\right]$

$=E\left((N-1)EX_1\right)=(EN-1)EX_1=5\times\frac{1}{5}=1$