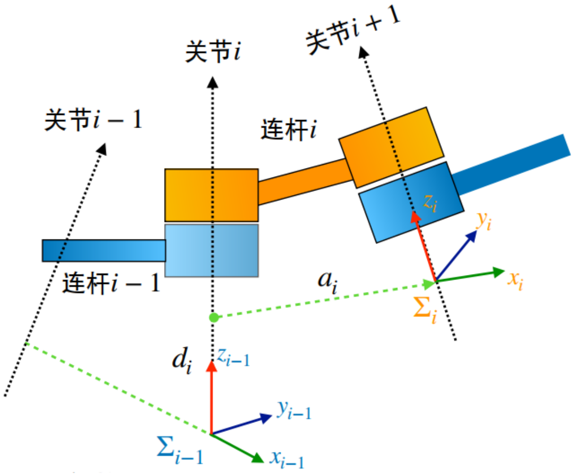
【机器人】正运动学（Forward Kinematics）

正运动学问题



模型定义：

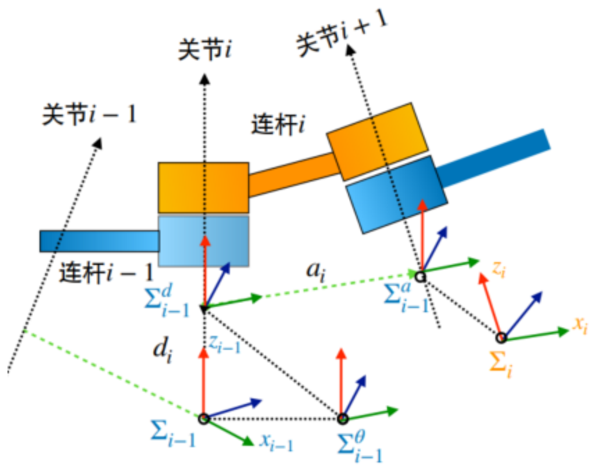
- 连杆： 从底座开始，每一个刚体做为一个连杆，从0-n，共n+1个；
- 关节： 连接两个杆件的部分，分成旋转关节和滑动关节两类，共n个；
- 坐标系： 坐标系与连杆固联，其z轴是关节 i+1 的轴线，从0到n，共n+1个（其中特殊的是基坐标系和末端坐标系 ）。特殊是说0坐标系的z轴和1坐标系可能重合

以上述图片为参考，DH参数为：

- 关节角度 (θ_i)： 旋转关节的关节变量，表示 {i-1}绕关节i （z_{i-1} 轴）转动的角度；
- 连杆偏移 (d_i)： 滑动关节的关节变量，表示{i-1} 沿关节i （z_{i-1} 轴）移动的距离；
- 连杆长度 (a_i)： 相邻坐标轴 z_{i-1}和 z_i之间的距离；
- 连杆扭角 (α_i)： 相对于$x'_{i-1}(x_i)$的扭转的角度；

标准DH方法（SDH）和改进DH方法（MDH）

DH方法



$$\begin{tikzcd}
\Sigma_{i-1} \arrow[r, "Rot_z(\theta)"] \arrow[rrrr, bend right, "{}^{i-1}_{i}T"'] & \Sigma_{i-1}^{\theta} \arrow[r, "Trans_z(d)"] & \Sigma_{i-1}^{d} \arrow[r, "Trans_x(a)"] & \Sigma_{i-1}^{a} \arrow[r, "Rot_x(\alpha)"] & \Sigma_i \ (\Sigma_{i-1}^{\alpha})
\end{tikzcd}$$

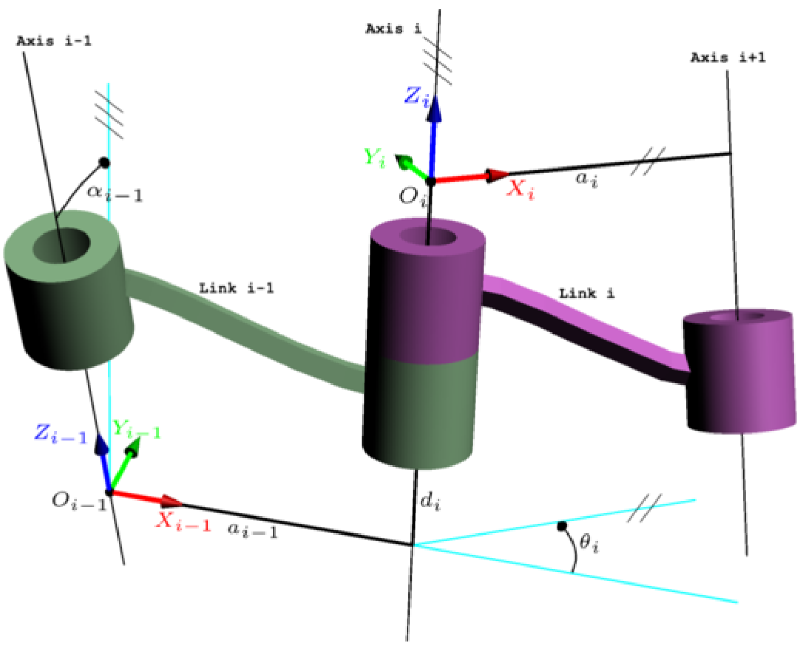
以以下几种顺序计算都是可以的：

$$i^{-1}T = Rot_z(\theta) \cdot Trans_z(d) \cdot Trans_x(a) \cdot Rot_x(a)$$
$$i^{-1}T = Trans_z(d) \cdot Rot_z(\theta) \cdot Trans_x(a) \cdot Rot_x(a)$$
$$i^{-1}T = Trans_z(d) \cdot Rot_z(\theta) \cdot Rot_x(\alpha) \cdot Trans_x(a)$$
$$i^{-1}T = Rot_z(\theta) \cdot Trans_z(d) \cdot Rot_x(a) \cdot Rrans_x(a)$$

可以直接根据DH参数求变换矩阵：

$${}_{i-1}^{\ \ i}T = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ sin\theta_i cos\alpha_{i-1} & cos\theta_i cos\alpha_{i-1} & -sin\alpha_{i-1} & -sin\alpha_{i-1}d_i \\ sin\theta_i sin\alpha_{i-1} & cos\theta_i sin\alpha_{i-1} & cos\alpha_{i-1} & cos\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

改进DH方法



SDH方法将连杆i的坐标系固定在连杆的远端，MDH方法把连杆i的坐标系固定在连杆的近端。
由此带来的区别是：

- 对于SDH方法：
  - 从远端出发
  - 先沿z_{i-1}轴转动关节角度θ，然后沿着z_{i-1}轴平移连杆偏移d，（可交换顺序）
  - 然后将z_{i-1}沿x方向平移杆长a，然后绕x轴旋转扭角α得到z_i轴；（可交换顺序）
  - 总结：DH方法只需要依次做4次基础齐次坐标变换矩阵，每次做1个平移或1个旋转，即做4次基础齐次坐标变换， 4次中只有1个关节变量。
- 对于MDH方法：
  - 从近端出发
  - 先将z_{i-1}沿x方向平移杆长a，然后绕x轴旋转扭角α得到z_i轴；（可交换顺序）

- 再沿z_{i-1}轴转动关节角度θ，然后沿着z_{i-1}轴平移连杆偏移d；（可交换顺序）

对于MDH可行的变换过程如下：

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}_{i}T &= \mathrm{Trans}_x(a)\cdot\mathrm{Rot}_x(\alpha)\cdot\mathrm{Rot}_z(\theta)\cdot\mathrm{Trans}_z(d) \text{ 或}\\
{}^{i-1}_{i}T &= \mathrm{Trans}_x(a)\cdot\mathrm{Rot}_x(\alpha)\cdot\mathrm{Trans}_z(d)\cdot\mathrm{Rot}_z(\theta) \text{ 或}\\
{}^{i-1}_{i}T &= \mathrm{Rot}_x(\alpha)\cdot\mathrm{Trans}_x(a)\cdot\mathrm{Trans}_z(d)\cdot\mathrm{Rot}_z(\theta) \text{ 或}\\
{}^{i-1}_{i}T &= \mathrm{Rot}_x(\alpha)\cdot\mathrm{Trans}_x(a)\cdot\mathrm{Rot}_z(\theta)\cdot\mathrm{Trans}_z(d)
\end{aligned}
$$