数值分析大作业

彭程 2020011075

日期：2022 年 12 月 22 日

摘　要

本文为 2022 秋《数值分析与算法》课程大作业报告。

关键词： 数值分析

1　题目一：巴塞尔问题求 π

1.1　巴塞尔问题求解

引理 (Lemma):

令 $\omega_m = \frac{\pi}{2m+1}$, 则有：

$$\cot^2\omega_m + \cot^2(2\omega_m) + \cdots \cot^2(m\omega_m) = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

证明:

由于

$$\begin{aligned}\sin n\theta &= \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \sin\theta\cos^{n-1}\theta - \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \sin^3\theta\cos^{n-3}\theta + \cdots \pm \sin^n\theta \\ &= \sin^n\theta\left(\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}\cot^{n-1}\theta - \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}\cot^{n-3}\theta + \cdots \pm 1\right)\end{aligned}$$

很显然, 令 $n = 2m+1$, 则我们有 $\cot^2\omega_m, \cot^2(2\omega_m)\cdots\cot^2(m\omega_m)$ 为多项式 $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^m - \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} x^{m-1} + \cdots \pm 1$ 的根。从而利用韦达定理我们就完成了引理的证明。

由于三角不等式 $\sin x < x < \tan x$ 在 $x \in (0, \pi/2)$ 成立，故 $\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x . \omega_m, 2\omega_m \cdots$ 带入得到

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2(k\omega_m) < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2\omega_m^2} < m + \sum_{k=1}^{m}\cot^2(k\omega_m)$$

所以应用上面引理，就可以得到

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} + \frac{m\pi^2}{(2m+1)^2}$$

令 m 趋于无穷大，故 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$。

1.2　π 的求解

为了提高收敛速度，此处我们考虑使用 $\zeta(2n)$，取 n=4，即 $\zeta(8)$。

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

$$\zeta(8)=\frac{(-1)^5\times-\frac{1}{30}(2\pi)^8}{2(8)!}=\frac{\pi^8}{9450}$$

所以有:

$$\pi=\sqrt[8]{9450\times\zeta(8)}$$

1.3 误差分析

由于:

$$\pi=\sqrt[8]{9450\times\zeta(8)}$$

设

$$f(x)=\sqrt[8]{9450x}$$

则

$$|\Delta\pi|\leq\max\left|\frac{df(x)}{dx}\right|\times|\Delta x|$$

由于 $\frac{df(x)}{dx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 当 x 取最小值时有 $\max\left|\frac{df(x)}{dx}\right|$

取 k>4，即有 $\zeta(8)>\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n^8}>1.00407$ ，此时 $\max\left|\frac{df(x)}{dx}\right|<0.4$ 因此:

$$|\Delta\pi|\leq 0.4\times|\Delta x|$$

假设我们要求解 m 位精度的 π, 即 $|\Delta\pi|\leq 5\times10^{-m-1}$，故可令 $0.4\times|\Delta x|\leq 5\times10^{-m-1}$，即 $|\Delta x|\leq 12.5\times10^{-m-1}$。只要限制方法误差和舍入误差的和小于该值即可。

1.3.1 方法误差

由于:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^8}+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$$

而:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^8}<\int_{k}^{\infty}\frac{1}{x^8}dx=\frac{1}{7k^7}$$

所以当我们用 $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^8}$ 代替真实值计算时，方法误差可以用 $\frac{1}{7k^7}$ 约束。

不妨令方法误差 $\delta_1=5\times10^{-m-1}$，即要求 $\frac{1}{7k^7}\leq 5\times10^{-m-1}$，即 $7k^7\geq 2\times10^{m}$，故取 $k=1\times10^{m/7}$

1.3.2 舍入误差

考虑 $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^8}$ 的舍入误差，不妨令舍入误差 $\delta_2=5\times10^{-m-1}$，即要求每一项的误差 $\delta\leq\frac{5\times10^{-m-1}}{k}$，而 $k=1\times10^{m/7}$，故有 $\delta\leq 5\times10^{-\frac{8}{7}m-1}$。故每一项的精度为 $\left\lfloor\frac{8}{7}m\right\rfloor+2$

1.4 编程求解

取满足条件的 k=1000，存储精度 m=24，得到精确到 20 位的 pi 值为：3.14159265358979323846

2 题目二：方程求根

令:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}-a$$

问题即转变为求解 $f(x)=0$ 的根。

由于:

$$\frac{1}{s-1}=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}dx<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}dx=\frac{s}{s-1}$$

所以有:

$$\frac{1}{s-1}<a<\frac{s}{s-1}$$

即:

$$\frac{a+1}{a}<s<\frac{a}{a-1}$$

即方程的解的范围:

$$\frac{a+1}{a}<x<\frac{a}{a-1}$$

在该范围内，有:

$$f(\frac{a+1}{a})>0,f(\frac{a}{a-1})<0$$

可以得到，在区间 $[\frac{a+1}{a},\frac{a}{a-1}]$ 上，有如下结论:

1. $f(\frac{a+1}{a})f(\frac{a}{a-1})<0$ 。
2. $x\in[\frac{a+1}{a},\frac{a}{a-1}]$ 时，$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^x}<0$，即 $f'(x)\neq 0$ 。
3. $x\geq x_0$ 时 $f^{(2)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Ln}^2(\mathrm{n})}{n^x}>0$ 不变号。
4. 取初值为 $x=\frac{a+1}{a}$, 此时 $f(x_0)f^{(2)}(x_0)>0$

由牛顿法的收敛条件, 在区间 $[\frac{a+1}{a},\frac{a}{a-1}]$ 上，初值为 $x=\frac{a+1}{a}$，牛顿迭代法收敛。

牛顿迭代公式:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\\&=x+\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}-a}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^x}}\end{aligned}$$

因此有迭代公式:

$$x_{k+1}=x_k+\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_k}}-a}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^{x_k}}}$$

2.1 误差分析

2.1.1 牛顿法方法误差

方法误差来源于牛顿迭代法带来的误差, 可以使用后验法计算误差。由于:

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)f^{(2)}(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\varphi''(x)=\frac{(f'(x)f^{(2)}(x)+f(x)f^{(3)}(x))(f'(x))^2-f(x)f^{(2)}(x)\cdot 2f'(x)f^{(2)}(x)}{(f'(x))^4}<0$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}-a,f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^x},f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln^2(n)}{n^x}$$

$\varphi'(x)$ 单调递减, 在 $[\frac{a+1}{a},\frac{a}{a-1}]$ 上:

$$\max(\varphi'(x)) = \varphi'(\frac{a+1}{a})$$

实际求 M, L 时使用迭代过程中的 x 的最大值。有方法误差:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{1-L}|x_{n+1} - x_n|$$

2.1.2 截断误差

设计算过程中保留 k 位级数，则单步的截断误差:

$$\delta_c \leq \frac{\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^x}}{\sum_{n=1}^{k}\frac{Ln(n)}{n^x}} \leq \frac{\int_k^{\infty}\frac{1}{n^x}dn}{\int_3^{\infty}\frac{1}{n^x}dn} \leq (\frac{3}{k})^{x-1}$$

则累计截断误差:

$$\delta_{n+1} \leq L \cdot \delta_n + \delta$$

推出:

$$\delta_n \leq (L)^n\left(\delta_0 + \frac{\delta}{L-1}\right) - \frac{\delta}{L-1} = \frac{L^n-1}{L-1}\delta_c \leq \frac{1}{1-L}\delta_c$$

2.1.3 舍入误差

设计算过程中保留 m 位小数，级数求和保留 k 位，则累计舍入误差:

$$\delta_{n+1} \leq L \cdot \delta_n + \frac{1}{2}(k+1) \times 10^{-m}$$

推出:

$$\delta_n \leq (L)^n\left(\delta_0 + \frac{1}{2(L-1)} \times 10^{-m}\right) - \frac{1}{2(L-1)} \times 10^{-m} = \frac{L^n-1}{L-1} \cdot \frac{1}{2} \times 10^{-m} \leq \frac{1}{1-L} \cdot \frac{1}{2}(k+1) \times 10^{-m}$$

2.1.4 总误差

由以上论述我们可以得到，总误差 δ 满足:

$$\delta \leq \frac{1}{1-L}|x_{n+1} - x_n| + \frac{1}{1-L}\delta_c + \frac{1}{1-L} \cdot \frac{1}{2}(k+1) \times 10^{-m}$$

假设要求最终结果有 t 位精度，则要求:

$$\delta \leq \frac{1}{2} \times 10^{-t}$$

我们分别约束:

$$\frac{1}{1-L}|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{4} \times 10^{-t}$$

$$\frac{1}{1-L}\delta_c \leq \frac{1}{8} \times 10^{-t}$$

$$\frac{1}{1-L}(k+1) \cdot \frac{1}{2} \times 10^{-m} \leq \frac{1}{8} \times 10^{-t}$$

可以得到以下约束:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1-L}{4} \times 10^{-t}$$

$$k \geq \frac{3}{(\frac{1-L}{8} \times 10^{-t})^{\frac{1}{x_0-1}}}$$

$$m \geq t \cdot lg\frac{4(k+1)}{1-L}$$

2.2 编程求解

考虑代入 a=1.5，有效位数 t=4，此时由于级数求和位数太高，无法短时间算出结果，故将初值调整为 2（仍满足收敛条件）。

求得的中间值为：$k = 362434, m = 26, |x_{n+1} - x_n| = 1.6555e - 05$

最终得到的结果为：具有 4 位精度（误差小于 $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$）的解为 2.18528444639008390911672933 22。保留四位小数为 2.1853。

3 题目三：求解积分

由于题目中所给公式:

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dx = \zeta(x)\Gamma(x)$$

由于在第一题中已经给出了高精度计算 $\zeta(x)$ 的方法, 此处只需要计算 $\Gamma(x)$ 。$\Gamma(x)$ 定义如下：

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt (x > 0)$$

使用数值积分的牛顿-科特斯公式中的复化梯形公式计算该积分的截断, 设实际计算的定积分为:

$$\Gamma(x) = \int_0^{m} t^{x-1} e^{-t} dt (x > 0)$$

复化梯形公式递推有:

$$T_1 = \left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right)(b - a)$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + \frac{h}{2} \sum_{k=o}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

3.1 误差分析

3.1.1 方法误差

再通过数值积分计算 $\Gamma(x)$ ，此时的方法误差来源于无穷限积分的截断与牛顿科特斯迭代到 $n_i = 2^i \, (n_i > 1)$ 的方法误差。同时需要保证此时 $m^{x-1} < e^{\frac{m}{2}}$ 此时的截断误差为:

无穷积分的截断误差如下：

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma(x)_1 &= \int_m^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\leq \int_m^{+\infty} e^{\frac{t}{2}} e^{-t} dt \\ &\leq 2e^{-\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

牛顿科特斯迭代到 $n_i = 2^i \, (n_i > 1)$ 个子区间的方法误差为：

$$
\begin{aligned}
|\Delta\Gamma(x)_2| &= |\sum_{k=0}^{n_i-1} \Delta\Gamma(x)_{2_k}(f)| \\
&= |\sum_{k=0}^{n_i-1} -\frac{h^3}{12}|f''(\eta_k)||\\
&\le |\frac{mh^2}{12}\max(|f''(t)|)|
\end{aligned}
$$

$\zeta(x)$ 的截断误差分析如下，假设保留 k 位级数：

$$\Delta\zeta = \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^x} \le \int_k^{\infty}\frac{1}{n^x}dn < \frac{k^{1-x}}{x-1}$$

由于:

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= (x-1-t)t^{x-2}e^{-t}\\
f''(t) &= \left((x^2-3x+2)-2(x-1)t+t^2\right)t^{x-3}e^{-t}\\
f^{(3)}(t) &= \left(-t^3+3(x-1)t^2-3(x-1)(x-2)t+(x-1)(x-2)(x-3)\right)t^{x-4}e^{-t}\\
g(t) &= \left(-t^3+3(x-1)t^2-3(x-1)(x-2)t+(x-1)(x-2)(x-3)\right)
\end{aligned}
$$

为了求 $f''(t)$ 的上界，我们可以求出 $f^{(3)}(t)$ 的零点也就是 $f^{(2)}(t)$ 的零点，观察到 $f^{(3)}(t)$ 有三个正零点且 $g(0)>0$，所以 $f''(t)$ 在 $[0,+\infty]$ 上先增再减再增再减。最大值只能在三个极值点处求得。这里我们可以用 一元三次方程的求根公式 求得这三个极值点。

由于:

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dx = \zeta(x)\Gamma(x)$$

则总方法误差为:

$$\Delta\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dx \le \Delta\zeta(x)\times\max(\Gamma(x))+\max(\zeta(x))\times(\Delta\Gamma(x)_1+\Delta\Gamma(x)_2)$$

实际计算中 $\max(\Gamma(x))\max(\zeta(x))$ 均使用迭代中的最大值替代。

3.1.2 舍入误差

$\zeta(x)$ 的舍入误差计算如下,将级数迭代到 k 位,此时的误差为:

$$\delta\zeta \le k\times\frac{1}{2}\times 10^{-t}$$

$\Gamma(x)$ 的舍入误差来源于存储精度,考虑迭代 i 次达到 $n_i=2^i$，第 j 次的误差为 $\delta\Gamma_j$，那么有递推关系：

$$\delta\Gamma_{j+1} \le \frac{1}{2}\delta\Gamma_j + \frac{m}{2}\cdot\frac{1}{2}\times 10^{-t}$$

由等比数列递推可得:

$$\delta\Gamma_j \le (\frac{1}{2})^{j-1}(\Gamma_1-\frac{m}{2}\times 10^{-t})+\frac{m}{2}\times 10^{-t} \le (\frac{1}{2^j}+\frac{m}{2})\times 10^{-t}$$

与方法误差相同, 由于

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dx = \zeta(x)\Gamma(x)$$

则总舍入误差为:

$$\delta\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dx \le \delta\zeta(x)\times\max(\Gamma(x))+\max(\zeta(x))\times(\delta\Gamma)$$

实际计算中 $\max(\Gamma(x))$ 与 $\max(\zeta(x))$ 均使用迭代中的最大值替代。

3.1.3 总体误差分析

若要求精确到 z 位小数, 进行如下误差分配:

$$2e^{-\frac{m}{2}} \cdot max(\zeta(x)) \leq \frac{1}{16} \times 10^{-z}$$

$$\frac{mh^2}{12} \max\left(\left|f''(t)\right|\right) \cdot max(\zeta(x)) \leq \frac{1}{16} \times 10^{-z}$$

$$\frac{k^{1-x}}{x-1} \cdot max(\Gamma(x)) \leq \frac{1}{8} \times 10^{-z}$$

$$k \times \frac{1}{2} \cdot 10^{-t} \cdot \max(\Gamma(x)) \leq \frac{1}{8} \times 10^{-z}$$

$$(\frac{1}{2^i} + \frac{m}{2}) \cdot 10^{-t} \cdot \max(\zeta(x)) \leq \frac{1}{8} \times 10^{-z}$$

此处我们可以近似取迭代十次的 Γ 取整加 1 认为是其最大值，近似取保留 10000 项的 $\zeta + \frac{k^{1-x}}{x-1}$ 认为是其最大值，据此就可以解出上述约束。

3.2 编程求解

代入 x = 3.5，计算得:

$$\zeta(x) = 1.1267341035627685$$

$$\Gamma(x) = 3.3233509423179424$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dx = \zeta(x)\Gamma(x) = 3.7445328448170887$$

其中，有迭代次数 $i = 28$，存储精度 $t = 7$, 积分上限 $m = 26$。最终有四位有效数字的积分结果为: 3.7445

4 题目四：解微分方程

考虑使用改进欧拉法求解。改进欧拉法:

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right] \end{cases}$$

其中:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq M, \left|y^{(2)}(x)\right| \leq L, \left|y^{(3)}(x)\right| \leq T$$

4.1 误差分析

4.1.1 改进欧拉方法误差

方法累积误差:

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{n+1} \le (1+hM)\Delta_n + \frac{L}{2}h^2 \\ \Delta_{n+1} \le \Delta_n + \frac{h}{2}M\Delta_n + \frac{h}{2}M\bar{\Delta}_{n+1} + \frac{T\cdot h^3}{12} \end{cases}$$

所以有:

$$\Delta_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\Delta_n + \left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3$$

整理后利用等比数列递推关系可以得到:

$$\Delta_n \le [\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^n - 1]\frac{\frac{ML}{4} + \frac{T}{12}}{hM + \frac{h^2M^2}{2}} \cdot h^3$$

4.1.2 zeta 截断误差

设计算过程中保留 k 位级数，则单步的截断误差:

$$\gamma_c = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \le \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2}dx < \frac{1}{k}$$

截断误差累积:

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{n+1} \le (1+hM)\gamma_n + h\gamma_c \\ \gamma_{n+1} \le \gamma_n + \frac{h}{2}M\gamma_n + \frac{h}{2}M\bar{\gamma}_{n+1} + h\gamma_c \end{cases}$$

所以有:

$$\gamma_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\gamma_n + \left(1 + \frac{hM}{2}\right) \cdot \gamma_c$$

整理后利用等比数列递推关系可以得到:

$$\gamma_n \le [\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^n - 1]\frac{1 + \frac{hM}{2}}{hM + \frac{h^2M^2}{2}} \cdot \gamma_c$$

4.1.3 舍入误差

假设 ζ 函数保留至 k 位，舍入误差累积:

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{n+1} \le (1+hM)\delta_n + \frac{1}{2}(1+k) \cdot 10^{-m} \\ \delta_{n+1} \le \delta_n + \frac{h}{2}M\delta_n + \frac{h}{2}M\bar{\delta}_{n+1} + \frac{1}{2}(1+hk) \cdot 10^{-m} \end{cases}$$

所以有:

$$\delta_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\delta_n + \left(1 + \frac{hM}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}(1+hk) \cdot 10^{-m}$$

整理后利用等比数列递推关系可以得到:

$$\delta_n \le [\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^n - 1]\frac{1 + \frac{hM}{2}}{hM + \frac{h^2M^2}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1+hk) \cdot 10^{-m}$$

4.1.4 整体误差分析

$$|\zeta(y)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$|\zeta'(y)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln(n)}{n^y} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln(n)}{n^2} \le 1$$

$$|\zeta''(y)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln^2(n)}{n^y} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln^2(n)}{n^2} \le 2$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \zeta'(y) \le 1$$

$$\left|y^{(2)}(x)\right| = \zeta'(y)\cdot y'(x) = \zeta'(y)\cdot\zeta(y) \le \frac{\pi^2}{6}$$

$$\left|y^{(3)}(x)\right| = (\zeta''(y) + (\zeta'(y))^2)\zeta(y) \le \frac{\pi^2}{2}$$

而:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le M, \left|y^{(2)}(x)\right| \le L, \left|y^{(3)}(x)\right| \le T$$

故取:

$$M = 1, L = 2, T = 5$$

考虑到 $n = \frac{a-2}{h}$,

$$\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^n = \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^{\frac{a-2}{h}} < e^{a-2}$$

所以进一步有:

$$\Delta_n \le [\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^n - 1]\frac{\frac{ML}{4} + \frac{T}{12}}{hM + \frac{h^2M^2}{2}} \cdot h^3 \le (e^{a-2} - 1)\cdot\frac{2(a-2)^2}{n^2}$$

$$\delta_n \le [\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^n - 1]\frac{1 + \frac{hM}{2}}{hM + \frac{h^2M^2}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 + hk)\cdot 10^{-m} \le (e^{a-2} - 1)\cdot\frac{n(1+hk)}{2(a-2)}\cdot 10^{-m}$$

$$\gamma_n \le [\left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)^n - 1]\frac{1 + \frac{hM}{2}}{hM + \frac{h^2M^2}{2}} \cdot \gamma_c \le (e^{a-2} - 1)\cdot\frac{n}{(a-2)}\cdot\gamma_c$$

若要求精确到 t 位小数, 首先进行误差分配, 令 $\Delta = \frac{1}{4}\times 10^{-t}, \delta = \frac{1}{8}\times 10^{-t}, \gamma = \frac{1}{8}\times 10^{-t}$

由第一个不等式可得:

$$\left(e^{a-2} - 1\right)\frac{2(a-2)^2}{n^2} = \Delta$$

求解迭代次数:

$$n = \left\lceil \sqrt{8\left(e^{(a-2)} - 1\right)\cdot(a-2)^2\cdot 10^t} \right\rceil$$

由第二个不等式可得

$$\left(e^{a-2} - 1\right)\frac{n(1+hk)}{2(a-2)} \times 10^{-m} = \delta$$

求解存储精度:

$$m = \left\lceil t + \lg\frac{4n(1+hk)\left(e^{a-2} - 1\right)}{(a-2)} \right\rceil$$

由第三个不等式可得

$$\left(e^{a-2} - 1\right)\frac{n}{(a-2)}\cdot\gamma_c = \gamma$$

求解级数计算位数:

$$k = \left\lceil \frac{4n\left(e^{a-2} - 1\right)}{(a-2)} \cdot 10^t \right\rceil$$

根据求解结果, 将 $[2, a]$ 按步长 $h = \frac{a-2}{n}$ 划分, 利用改进 Euler 公式迭代 n 次, 每次结果以 m 位小数存储即可实现任意精度 t 求解。

4.2 编程求解

对于初始条件 $y(2) = 2$，迭代次数为：$n = 1430$，存储精度为 $m = 9$ ，级数截断为：$k = 182727$，编程求得 x=4 精确到 4 位的解为:4.4051090275898。保留四位为：4.4051。