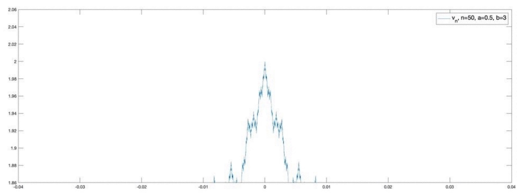
第一章. 概率与概率空间

§1. 引言.

一. 研究对象 $\begin{cases} \text{确定性} \\ \text{随机现象. (有统计规律).} \end{cases}$



§2. 随机事件及其概率.

一. 基本概念

1° 随机试验 E . 可在相同条件下重复进行.

样本空间: Ω 试验结果: $\omega \in \Omega$

事件 A: $A \subset \Omega$

A发生 $\Leftrightarrow \omega \in A$.

A $\begin{cases} \Omega & \text{全集} & \text{必然事件.} \\ \phi & & \text{不可能事件} \end{cases}$

eg: 抛硬币 $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\tilde{\Omega} = \{$正正, 反反, 一正一反$\}$.

样本空间表达不唯一, ($\tilde{\Omega}$不是等概率的)

Ω $\begin{cases} \text{有限} \\ \text{可数} \\ \text{不可数} \end{cases}$ $\Big\}$ 无限 $\omega \in \Omega$

（1） 事件之间的四种关系

关系	符号	概率论	集合论
包含关系	$A \subset B$	事件 A 发生则事件 B 必发生	A 是 B 的子集
等价关系	$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立关系	A^c	事件 A 的对立事件（或逆事件）	A 的余集
互斥关系	$AB = \phi$	事件 A 与事件 B 不能同时发生(互不相容)	A 与 B 无公共元素

（2） 事件之间的三种运算

运算	符号	概率论	集合论
事件的和（并）	$A \cup B$（或 $A+B$）	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	事件 $A_1, \cdots, A_n$ 至少有一个发生	$A_1, \cdots, A_n$ 的并集
事件的积（交）	$A \cap B$（或 AB）	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	事件 $A_1, \cdots, A_n$ 同时发生	$A_1, \cdots, A_n$ 的交集
事件的差	$A - B$（或 $A \setminus B$）	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集

对称差 $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$

（3） 事件的运算法则

交换律：$AB = BA;\ A \cup B = B \cup A$	结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(AB)C = A(BC)$
分配律：$(A \cup B)C = AC \cup BC$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$	对偶律(De Morgan 律)： $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c;\ (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$
补元律：$AA^c = \phi; A \cup A^c = \Omega$	还原律：$(A^c)^c = A$
蕴涵律：若 $AB = \phi$，则 $A \subset B^c, B \subset A^c$	分解律：若 $A \subset B$，则 $B = A \cup A^c B$
差积转换律：$A - B = AB^c = A - AB$	吸收律：若 $A \subset B$，则 $AB = A; A \cup B = B$
矛盾律：$AA = \phi$	排中律：$A \cup A^c = \Omega$

二. 概率的定义

1° 统计定义. $P(A) \triangleq \frac{n_A}{n}$

2° 古典定义 —— 古典概型

$\begin{cases} \#\Omega < +\infty \quad \text{(有限).} \\ P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{\#\Omega} \quad i \neq j \end{cases}$

基本事件的可能性相同.

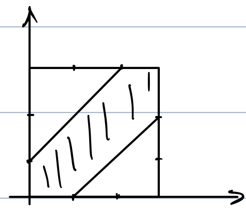
$\Rightarrow \forall A \subset \Omega \quad P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

3° 几何定义 — 几何概型 .

$\begin{cases} |\Omega| < +\infty \text{ (可求积)} \\ \qquad\qquad \text{(面积、体积…)} \\ \text{等可能.} \end{cases} \Rightarrow \quad \forall\ |A| < +\infty \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

例（约会问题）两人相约于晚 7 点到 8 点间在某地会面，先到者等足 20 分钟便立即离去．设两人的到达时刻在 7 点到 8 点间都是随机且等可能的．求两人能会面的概率 p.

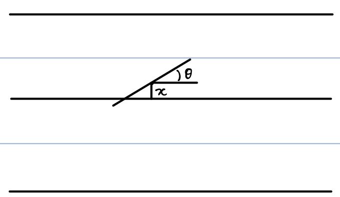
$\Omega = \left\{(x,y)\ \begin{matrix} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1\end{matrix}\right\}$

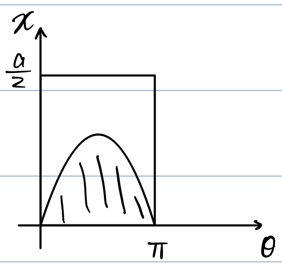


$A = \{(x,y)\in\Omega : |x-y|<\frac{1}{3}\}$

$P(A) = \frac{5}{9}$.

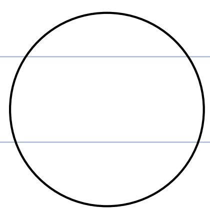
例 3（Buffon 问题） 平面上画有一族相距为 a 的平行线．向此平面投一长为 $l\,(<a)$ 的针．求针与平行线相交的概率 p. 【$\frac{2l}{a\pi}$】





$x < \frac{l}{2}\sin\theta$

例：Betrand：取弦长 $>\sqrt{3}R$ 的概率.



1° 沿直径取点，1/2

2° 在圆周取点，1/3

3° 在圆内取点，1/4.

它们只是貌似是一件事情

例 1（摸球问题、抽签问题）袋中装有 α 个白球及 β 个黑球，< 放回 独立 / 不放回．不独立.

（1）从袋中任取 $a+b$ 个球，试求所取的球恰含 a 个白球和 b 个黑球的概率（$a\le\alpha, b\le\beta$）.

【$\frac{C_\alpha^a C_\beta^b}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}$】

（2）从袋中任意地接连取出 $k+1\,(k+1\le\alpha+\beta)$ 个球，如果每球被取后不放回，试求最后取出的球是白球的概率。 【$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$】

$$P(A_k) = \begin{cases} \dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} & \leftarrow \text{超几何分布 不放回.} \\[2ex] \dfrac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = C_n^k\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^k\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{n-k} & \leftarrow \text{二项.} \end{cases}$$

$$P(B_k) = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b} & \text{放回} \\[2ex] \dfrac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \dfrac{a}{a+b} & \text{不放回.} \end{cases}$$

第k次摸到白球的概率

$\Omega = \{(w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots) : w_i = 0, 1\}$

Ω — 可数，且 $P\{w_i\} = p_i > 0$ $(\cdots)$

则 $\forall A\subset\Omega$ 有 $P(A) = \sum_{i: w_i\in A} p_i$

$P(A^{a_1,\cdots,a_n}) = \frac{1}{2^n}$

§3 概率空间

1. σ-域 (σ-代数) ⟷ $\mathcal{F}$

定义：事件族(Ω 的子集族)$\mathcal{F}$ 称为 σ **-域**(也称为 σ **-代数**或**事件体**), 如果它满足下列条件：

i) $\Omega\in\mathcal{F}$；

ii) 若 $A\in\mathcal{F}$，则 $A^c\in\mathcal{F}$；

iii) 若 $A_1, A_2, \cdots\in\mathcal{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{F}$，

$(\Omega, \mathcal{F})$ 可测空间

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 概率空间.

$\mathcal{F}_{min} = \{\Omega, \phi\}$

$\mathcal{F}_{max} = 2^{\Omega}$ (幂集)

$A\subset\Omega$ $\mathcal{F}_A = \{\Omega, \phi, A, A^c\}$ A 生成的 σ-域.

$|\mathcal{F}_{A_1,A_2,\cdots,A_k}| = 2^{2^k}$.

2. 概率.

定义：概率（也称为**概率测度**）P 为 $\mathcal{F}$ 上的非负值函数，即对每一事件 $A\in\mathcal{F}$，都可定义一个数 $P(A)$，满足下列条件：

(1) 非负性： 对一切 $A\in\mathcal{F}$，有 $P(A)\ge 0$ (1.2)

(2) 规范性： $P(\Omega)=1$. (1.3)

(3) 可数可加性： 若 $A_1, A_2, \cdots\in\mathcal{F}$ 为一列两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{1.4}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。试验的样本空间 Ω、事件 σ-域 $\mathcal{F}$ 及定义在 $\mathcal{F}$ 上的概率 P 所构成的三元组$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 称为描述该随机试验的概率空间.

1° 可数可加 ⇒ 有限可加.

2° $P(A^c)=1-P(A)$

3° $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

⇒ 单调性 $B\subset A \to P(A)>P(B)$.

4° $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

匹配数.

补充：事件序列的极限

设 $\{A_n\}$ 为样本空间 Ω 中的事件序列，

定义 $\{A_n\}$ 的上极限为：$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$；（当且仅当有无穷个 A_n 发生）

$\{A_n\}$ 的下极限为：$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$。（当且仅当至多有有限个 A_n 不发生）

如果 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，则称事件序列 $\{A_n\}$ 的极限存在，记为 $\lim_{n\to\infty} A_n$。

* 概率的连续性

Thm：若 $\lim_n A_n$ 存在，则 $P(\lim_n A_n)=\lim_n P(A_n)$

下连续：$A_n\uparrow$，则 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$

$\lim_n \bigcup_{i=1}^{n} A_i=\lim_n (A_1+(A_2-A_1)+\cdots+(A_n-A_{n-1}))$

例：$[0,1)$ 取到 $1/3$ 的概率.

$A_n=\{$取的数前n位为3$\}$ $\underbrace{0.3333\cdots}_{n\uparrow}$

$A_n\downarrow\{$取到$\frac{1}{3}\}\triangleq A$ $P(A)=\lim P(A_n)=0$.

$P(A_n)=\frac{1}{10^n}$

Thm：可数可加性 ⇔ 有限可加性 + 下连续性

$P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2A_3)$

$=\frac{50}{100}+\frac{33}{100}-\frac{16}{100}$

§ 4. 条件概率与独立性.

关于独立的一系列结论：

* A_i独立：$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$

* $P(A|B)>P(A) \Leftrightarrow P(B|A)>P(B)$ ⇒ 正相关

* $\begin{cases}P(A|B)=P(A)\\ P(A|B^c)=P(A)\\ P(A|B)=P(A|B^c)\\ P(AB)=P(A)\cdot P(B)\end{cases}$ ⟺ A.B独立.

* 独立不互斥，互斥不独立.

* 相互独立 ≠ 两两独立.

* 称 $A_1\cdots A_n$ i.d. 若 $\forall\, 2\le k\le n$,
$\forall\,(i_1\cdots i_k)$ 为 $(1,\dots,k)$ 的排列，$i_j\in\{1,\dots,k\}$
$P(\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j})=\prod_{j=1}^{k}P(A_{i_j})$

* 两两独立：任两个满足独立性质. (对称性)

* 相互独立：两两，三三 … 都独立

* 将n个相互独立分k组，组内运算得到k个元素仍相互独立.

条件概率的三大公式

乘法公式：$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

贝叶斯公式：$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$

全概率公式：$P(A)=\sum_i P(A|B_i)P(B_i)$

其中：$\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 Ω 的正划分

Ω划分. ⇒ $B_i\begin{cases}B_iB_j=\phi\\ \cup B_i=\Omega\end{cases}$

Bayes ⇒ $P(B_j|A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$

例 6 (赌徒输光问题) 设甲有赌本 $i(i \ge 1)$ 元，其对手乙有赌本 $a-i>0$ 元．每赌一次甲以概率 p 赢一元，而以概率 $q=1-p$ 输一元．假定不欠不借，赌博一直到甲乙中有一人输光才结束．因此，两个人中的赢者最终有总赌资 a 元． 求甲输光的概率．

解决思路首步分析法（类似的思想可以应用到抽签问题，Polya 模型等）

p_i 为i元破产概率.

$$p_i \triangleq P(A_i) = \overset{P(A_{i+1})}{\underline{P(A_i|B)}}P(B) + \overset{P(A_{i-1})}{\underline{P(A_i|B^c)}}P(B^c).$$

$$\begin{cases} p_i = p\,p_{i+1} + q\,p_{i-1} \\ p_0 = 1, \quad p_a = 0 \end{cases}$$

注：解差分方程

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_p x_{n-p} = 0$$

$$\lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \cdots + a_p = 0 \leftarrow \lambda_1 \cdots \lambda_p$$

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + \cdots + c_p \lambda_p^n$$

$x_n = (c_1 + c_2 n + \cdots + c_d n^{d-1})\lambda_1^n + \cdots$ d重根

$x_n = r^n (c_1 e^{inw} + c_2 e^{-inw}) + \cdots$ 复根.

$$px^2 - x + q = 0$$

$$q = 1 - p$$

$$x_1 = \frac{q}{p} \qquad x_2 = 1$$

$$p_i = c_1 \left(\frac{q}{p}\right)^i + c_2$$

代入 $p_0 = 1 \quad p_a = 0$

$p=q$ 时 $p_i = 1 - \frac{i}{a}$.

首步分析法：

以第一次试验结果作为划分

例 7 r 个人相互传球，从甲开始，每次传球时，传球者等可能地把球传给其余 $r-1$ 个人中的任意一个，求第 n 次传球时仍由甲传出的概率？

【$p_n = \frac{1}{r}[1-(\frac{-1}{r-1})^{n-2}], n \ge 2$】

解决思路末步分析法

B_n：第n次传球由甲传出

$$P_n = P(B_n) = P(B_n | B_{n-1}) P(B_{n-1}) + P(B_n | B_{n-1}^c) \cdot P(B_{n-1}^c).$$

$$= P(B_n | B_{n-1}^c) \cdot P(B_{n-1}^c).$$

$$P_n = \frac{1}{r-1}(1 - P_{n-1})$$

末步分析法：以最后一次结果作为划分。

例 5 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品，从甲箱中任取 3 件放入乙箱后，求从乙箱中任取一件产品是次品的概率．

【$\frac{1}{4}$】

解： $P(A) = \sum_{k=0}^{3} P(A | X=k) P(X=k) = 0 \times \frac{C_3^0 C_3^3}{C_6^3} + \frac{1}{6} \times \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} + \frac{2}{6} \times \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} + \frac{3}{6} \times \frac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} = \frac{1}{4}$

例 8 （续例 5） 已知从乙箱中取出的一件产品是次品的条件下，求从甲箱中取出的 3 件中有 2 件次品的概率？

例 9 （Jailer's Paradox） 甲乙丙三名囚犯获知他们中将有两人获释，一人被判死刑，而监狱里只有狱卒知道确切的结果。于是，甲写了一封家信，找到狱卒希望狱卒告诉他乙或丙那个将获释，以便让获释的那个囚犯将家信带出去。狱卒拒绝透露任何信息给甲，解释说，如果他告诉了甲，乙或丙那个获释，那么甲被判死刑的概率就从原来的 $\frac{1}{3}$ 变为 $\frac{1}{2}$ 了，是这样的吗，解释之？

例 10 （嘉宾猜奖游戏的 Bayes 公式解法）**见教材**

§5. 独立性应用

* 相关系数

$$r_{AB} = \frac{P(AB) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(A^c)P(B)P(B^c)}}$$

性质：

① $r_{A,B} > 0 \Leftrightarrow P(A|B) > P(A)$

② $r_{A,B^c} = -r_{A,B}$

③ $|r_{A,B}| < 1$

④ $r_{A,B} = 1 \Leftrightarrow P(A \triangle B) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$P(A) = P(B) = P(AB)$$

Bernoulli 概型 三个问题

* Bernoulli 试验： n重 Bernoulli trial

两点分布： 只有2种结果.

二项分布：B $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. n次有k次成功

几何分布：G $P(Y=k) = q^{k-1}p$ 第k次第1次成功

负二项分布：NB $P(Z=k) = pC_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-r}$ 第k次试验第r次成功

(Pascal分布) $= C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}$ (从k-1次选r-1次成功)

此问题在第2章还有后续讨论.

$P(X>s+t \mid X>s) = P(X>t)$

pf: $P(X>n)$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} q^{k-1}p = q^n$$

$$左 = \frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} = \frac{q^{t+s}}{q^s} = q^t = 右.$$

补充：若 C_i 为 Ω 划分

$P(A|B) = \sum_i P(A|BC_i)P(C_i)$ 是错的

条件概率测度也是概率测度.

$P(A|B) = \sum_i P(A|BC_i)P(C_i|B)$ 是对的

或写成 $P_B(A) = \sum_i P_B(A|C)P_1(C)$