

《系统工程导论》2019年春季学期期末考试

试

1. 简答题（35分）

a. K均值算法（6）

1. K-means算法一定收敛吗？为什么？
2. K-means算法一定能找到最优解吗？为什么

b. 主成分分析

1. 列出PCA的基本步骤
2. 假设只保留一个主成分，在图中画出保留的PCA主轴
3. PCA与病态线性回归的关系
4. 给出压缩比公式，阐述其中各个元素的意义

c. 重要学者（5）

举出五个在工程控制论、定性建模、定量建模、决策论中有突出贡献的学者，并说出他们在本课程中相关的学术贡献

d. 简单填空（3）

模型的基本要素是哪几种？

e. 求导

线性回归除了用于回归问题，其实也可以用于分类问题。有样本集 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ， $y_i \in \{0, 1\}$ 。用（简化了截距项的）sigmoid函数处理输出：

$$\hat{y}_i = \frac{e^{ax_i}}{1 + e^{ax_i}}$$

采用（去掉负号的）交叉熵函数作为损失函数：

$$L = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \log(y_i) + (1 - \hat{y}_i) \log(1 - y_i)$$

求 $\frac{\partial L}{\partial a}$

f. 一维K均值算法加速

K均值算法中，有一个步骤是把一个点从一类划分到另一类中。这样我们往往最后要重新计算「类均值」和「类方差和」（笔者自己起的名字）。我们可以采用更新式的算法来简化计算，这样就不用全都推倒重算，能够加速算法：

1. 假设某一类原来有 N_i 个点，均值为 m_i ；现在把其中的样本 y 从这一类中移走，求新的均值 \hat{m}_i
2. 这一类原来的类平方和是 $L_i = \sum (x_i - m_i)^2$ ，现在把其中的样本 y 从这一类中移走，求新的类平方和 \hat{L}_i

2. ISM

1. 给定可达矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求骨架图（要求用尽量少的单向边）

2. 通过骨架图求邻接矩阵

3. 系统聚类

四个样本 $x_1 = (1, 1)^T, x_2 = (0, 1)^T, x_3 = (0, 0)^T, x_4 = (2, 0)^T$ ，进行系统聚类。但是这里要求使用马氏距离：

$$\begin{aligned} a, b \text{ 距离 } \text{dist}(a, b) &= (a - b)^T \Sigma (a - b) \\ A, B \text{ 两类距离 } \text{dist}(A, B) &= \min_{a \in A, b \in B} \text{dist}(a, b) \\ A, B \text{ 相似度 } R(A, B) &= \frac{1}{\text{dist}(A, B)} \end{aligned}$$

这里直接给定了 $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ，所以其实就是一个广义内积而已.....不必惊慌

4. AHP

三个公司选一个最好的，总评可以分为评价指标：指标1、指标2，指标2又可以分为指标2-1、指标2-2。给出了每个指标划分

1. 画出决策层次图
2. 看一下每个判断矩阵是不是一致的。矩阵很简单，秩是1，都是一致的
3. 给出最后的选择，为什么

5. 群决策

四个决策，给出六组人的偏好断面（如 $a > b > c > d$ ）和每组人数，计算简单多数票规则、绝对多数票规则、Borda规则下的最终决策

6. 决策树

一个一元钱的游戏：四张卡片上写着ABCD：抽到A赚3元，抽到B赚2元，抽到C赔2元，抽到D赔4元。每抽一次都可以选择继续还是就此停止，每次抽卡片不放回。画出决策树，决定要不要玩这个游戏。

条件：如果第一次抽到A，最佳决策是别接着玩了，期望收益3元；如果第一次抽到D，期望收益 $-\frac{1}{3}$ 元。这两个条件用来简化决策树。

注意，是整个游戏1元钱，不是抽一次1元。

7. 风险决策

有A、B、C仨同学。A、B的效用函数：

$$v(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$$

C的效用函数：

$$v(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$$

仨同学喜欢买股票。A打算花1000元购买A和B两类股票。其中t元买甲股票，1000-t元买乙股票。买甲的话，以概率p价值翻倍，以概率1-p赔光；买乙的话，以概率q价值翻倍，以概率1-q赔光。

1. 这仨人都是什么型决策者？
2. 求A同学买甲、乙股票的效用函数 $f(t), g(t)$ ，然后确定他应该怎么分配手中的钱。这里 $p = 0.7, q = 0.6$
3. A同学把自己的股票全都送给了B，求证一定存在一个价格r，使得B会把股票都出售给C

1.