问题三：与 Bernoulli 试验相关的模型问题

（1）　在一个具有成功（S）的概率为 p，失败（F）的概率为$1-p$ 的 n 重 Bernoulli 试验中，记Y_n表示组合 SF 发生的次数，求EY_n与$D(Y_n)$。

答案：　$EY_n=\sum_{i=1}^{n-1}Ef(X_i,X_{i+1})=(n-1)pq$；

$EY_n^2=(n-1)pq+(n-2)(n-3)p^2q^2$，故　$D(Y_n)=pq[n-1+pq(5-3n)]$

具体解答如下：

记

$$f(X_i,X_{i+1})=\begin{cases}1, & A_i=S,A_{i+1}=F\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

则$Y_n=\sum_{i=1}^{n-1}f(X_i,X_{i+1})$，由于

$f(X_i,X_{i+1})\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ pq & 1-pq\end{pmatrix}$，故$EY_n=\sum_{i=1}^{n-1}Ef(X_i,X_{i+1})=(n-1)pq$

$$DY_n=D[\sum_{i=1}^{n-1}f(X_i,X_{i+1})]=\sum_{i=1}^{n-1}D[f(X_i,X_{i+1})]+2\sum_{i<j\le n-1}\sum Cov[f(X_i,X_{i+1}),f(X_j,X_{j+1})]$$

$$Cov[f(X_i,X_{i+1}),f(X_j,X_{j+1})]=E[f(X_i,X_{i+1})f(X_j,X_{j+1})]-E[f(X_i,X_{i+1})]E[f(X_j,X_{j+1})]$$
$$=E[f(X_i,X_{i+1})f(X_j,X_{j+1})]-(pq)^2$$

而

$$f(X_i,X_{i+1})f(X_j,X_{j+1})=\begin{cases}1, & A_i=S,A_{i+1}=F,A_j=S,A_{j+1}=F,|i-j|>1\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

故当$|i-j|>1$时，$Cov(f(X_i,X_{i+1}),f(X_j,X_{j+1}))=0$，实际上是独立的，

而$|i-j|=1$时，$Cov(f(X_i,X_{i+1}),f(X_j,X_{j+1}))=0-(pq)^2$

$$\sum_{i<j\le n-1}\sum Cov[f(X_i,X_{i+1}),f(X_j,X_{j+1})]$$
$$=\sum_{j=2}^{n-1}\{\sum_{i=1}^{j-2}Cov[f(X_i,X_{i+1}),f(X_j,X_{j+1})]+Cov[f(X_{j-1},X_j),f(X_j,X_{j+1})]\}$$
$$=\sum_{j=2}^{n-1}\{0+Cov[f(X_{j-1},X_j),f(X_j,X_{j+1})]\}$$
$$=\sum_{j=2}^{n-1}\{0+[-(pq)^2]\}$$
$$=-(n-2)(pq)^2$$

$$\sum_{i<j\le n-1}\sum Cov[f(X_i,X_{i+1}),f(X_j,X_{j+1})]=-2(n-2)(pq)^2$$
$$DY_n=D[\sum_{i=1}^{n-1}f(X_i,X_{i+1})]=\sum_{i=1}^{n-1}D[f(X_i,X_{i+1})]+2\sum_{i<j\le n-1}\sum Cov[f(X_i,X_{i+1}),f(X_j,X_{j+1})]$$
$$=(n-1)pq(1-pq)-2(n-2)(pq)^2$$
$$=(n-1)pq+(5-3n)(pq)^2$$

（2） 设 X 与 Y 相互独立，分布服从负二项分布 $NB(r_1,p)$ 和 $NB(r_2,p)$，证明：

$$P(X=x\mid X+Y=t)=\frac{C_{x-1}^{r_1-1}C_{t-x-1}^{r_2-1}}{C_{t-1}^{r_1+r_2-1}}$$

证明：易证 $X+Y\sim NB(r_1+r_2,p)$，从而

$$P(X=x\mid X+Y=t)=\frac{C_{x-1}^{r_1-1}p^{r_1}q^{x-r_1}C_{t-x-1}^{t_2-1}p^{r_2}q^{t-x-r_2}}{C_{t-1}^{r_1+r_2-1}p^{r_1+r_2}q^{t-r_1-r_2}}=\frac{C_{x-1}^{r_1-1}C_{t-x-1}^{r_2-1}}{C_{t-1}^{r_1+r_2-1}}$$

（3） 设 X 与 Y 相互独立同分布，且 $P(X=k)=p_k>0,\quad k=0,1,\cdots$，如果

$$P(X=t\mid X+Y=t)=P(X=t-1\mid X+Y=t)=\frac{1}{t+1},\quad t\ge 0$$

则 X 与 Y 均服从几何分布。

证明：由于 $P(X=t\mid X+Y=t)=\dfrac{p_t p_0}{\sum_{k=0}^{i}p_k p_{t-k}}=\dfrac{1}{t+1},\quad t\ge 0$

$$P(X=t-1\mid X+Y=t)=\frac{p_{t-1}p_1}{\sum_{k=0}^{i}p_k p_{t-k}}=\frac{1}{t+1},\quad t\ge 0$$

得到 $\frac{p_t}{p_{t-1}}=\frac{p_1}{p_0}$，从而 $p_t=(\frac{p_1}{p_0})^t p_0$，又由于 $\sum_{t=0}^{\infty} p_t=1 \Rightarrow \frac{p_1}{p_0}<1$ 且 $1-p_0=\frac{p_1}{p_0}$。

（4） 独立同分布随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 服从参数为 p 的几何分布当且仅当

$N_n=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 服从参数为 $1-(1-p)^n$ 的几何分布。

证明提示：$X_1,\cdots,X_n\ i.i.d. \sim Ge(p)$，故 $P(X_i\geq k)=q^{k-1}$。

$$P(N_n=k)=[P(X_1\geq k)]^n-[P(X_1\geq k+1)]^n=q^{nk-n}-q^{nk}=q^{n(k-1)}(1-q^n),\quad k=1,2,\cdots$$