基于零空间投影的WBC方法

CONTENTS 目录

1.1 背景综述

➢ 问题背景

- 全身控制(Whole Body Control)是近几十年为了解决高自由度系统中多任务的控制问题而逐渐发展起来的一种控制方法。

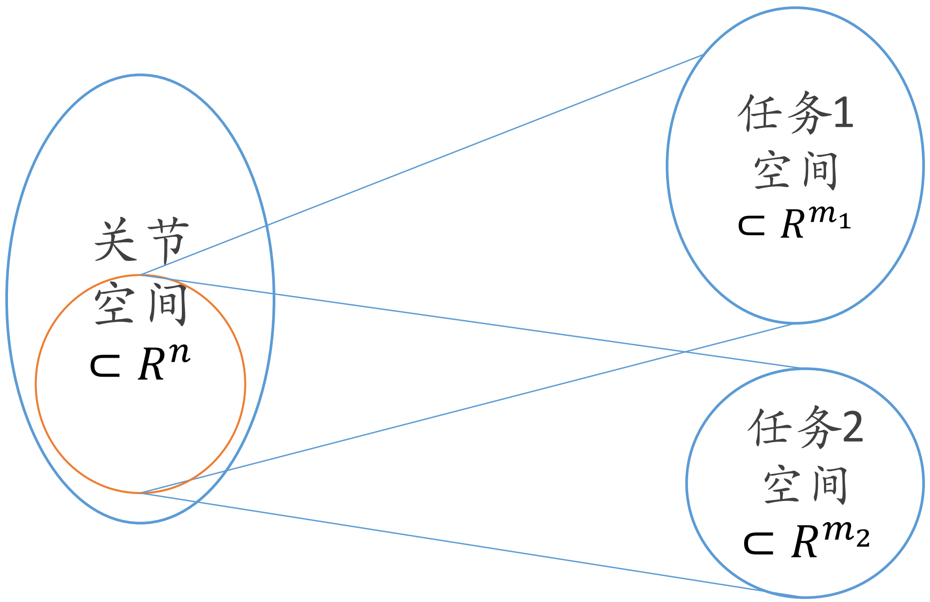
➢ 发展简史

- (Nakamura Y,Hanafusa H,Yoshikawa T,1987)首先基于运动学概念，率先通过引入任务优先级的概念来解决冗余系统控制中多任务控制
- (Siciliano, B. and J.Slotine, 1991) 提出了增广投影的计算方案，该解决方案最终以递归方式实现，简化了冗余机器人系统的多任务编程问题
- (Khatib, O.1987)给出了一个基于动力学的对机械手系统末端执行器动态行为的分析与控制框架，并在框架中提出了冗余控制方案
- (Sentis, L. and Khatib , O. 2005) 给出了基于动力学的多任务全身行为控制方案
- (Ott,2015)关于零空间投影法的综述总结了前人的工作并按照投影方案和投影性质两方面对投影法进行了定义和讨论

1.2 基本概念

➢ 冗余性

- 冗余性是多自由度系统中的特点，意味着在完成某些任务时系统关节空间会出现多解的情况。
- 如何在多解的情况中找到一个解在完成该任务后还能完成其他任务，零空间投影法便是一个方案。



1.2 基本概念

➢ 任务优先级

- Nakamura 通过引入任务优先级的概念来解决冗余系统控制中多任务控制问题

- 将一系列任务按照重要程度进行排序
  - 要求低优先级的任务不会对高优先级的任务产生影响
  - 在完成高优先级任务后尽可能完成低优先级任务

1.2 基本概念

➢ 数学描述

- 对于一个n维自由度系统，定义r个控制任务，即有关节空间$q \in R^n$，对任务i，有任务向量

$$x_i = f_i(q) \in R^{m_i} \ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{r})$$

- 其中任务i的空间维度$m_i \le n$，可以得到关节速度到任务向量速度的变换矩阵，即雅可比矩阵$J_i(q) \in R^{m_i \times n}$有以下关系

$$\dot{x}_i = J_i(q)\dot{q}$$

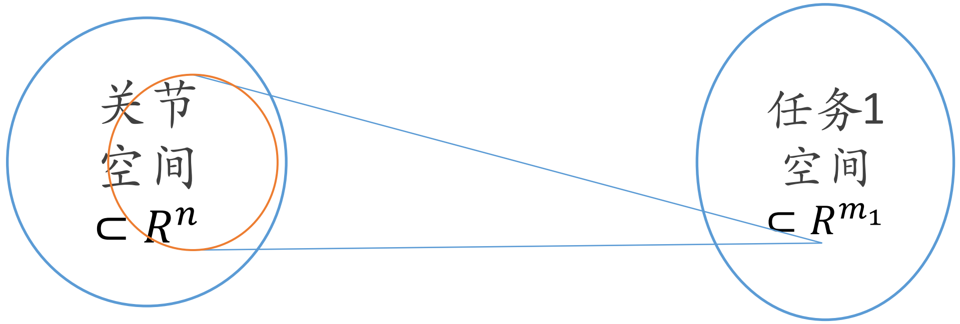
$$J_i(q) = \frac{\partial f_i(q)}{\partial q}$$

  - 后面的讨论中，认为$J_i(q)$都是非奇异的，即矩阵是行满秩的
  - 此时可以看到任务$i = 1$其任务空间维度$m_1 < n$，这就表明有$n - m_1$自由度的运动学上的冗余可以用于完成其他子任务

1.2 基本概念

➢ 数学描述

- 基于$J_i\,(q)$，我们将关节空间R^n分成两部分
  - 操作空间(Manipulable space):
    $J_i\,(q)$张成的空间
    $$\{x|\, x^T = \eta^T J, \eta \in \mathbb{R}^{m_\mathrm{i}}\ is\ any\ vector\}$$
  - 零空间(Null space):
    $J_i\,(q)$的零空间
    $$\{x|\, Jx = 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$
- 对于$\forall \dot{q} \in null(J_i)$，$J_i\dot{q} = 0$，意味着$J_i\,(q)$的零空间中的向量不会对任务$i$产生影响



目录

CONTENTS

2.1 基本概念

➢ 零空间投影矩阵

- 引入矩阵$P(J_i) \in R^{n\times n}$，其作用是将任意关节空间R^n中的向量投影到J_i的零空间中，其定义为

$$P = I_n - J_{\mathrm{i}}^{\#} J_{\mathrm{i}}$$

其中$J_i^{\#} \in R^{n\times m_i}$是矩阵$J_i$的广义逆矩阵，满足$J_i J_i^{\#} = I_{m_i}$

带权重的广义逆矩阵

$$J^{W^+} = W^{-1}J^T(JW^{-1}J^T)^{-1}$$

- 零空间投影矩阵的特点:
  - 可以证明，对$\forall q \in R^n$

$$J_i P q = \left(J_i - I_{m_i} J_i\right) q = 0$$

即$Pq \in null(J_i), P$将q投影到了J_i的零空间中

  - 幂等性:

$$P^2 = P$$

2.2 两层任务模型

➤ 理论推导

- 对于一个两层分层任务来说，令$x_1 \in R^{m_1}$为第一任务优先级的任务，令$x_2 \in R^{m_2}$为第二任务优先级的任务，关节变量为$q \in \mathrm{R^n}$

- 对于$i=1$时，方程$\dot{x}_1 = J_1(q)\dot{q}$ 中$\dot{q}$关于$\dot{x}_1$的一般解为

$$\dot{q} = J_1^{\#}(q)\dot{x}_1 + P_1 y$$

  - 其中$P_1 = I_n - J_1^{\#}(q)J_1(q)$是任务1的零空间投影矩阵,$y \in R^n$是任意向量，其经过投影后不会对任务1产生影响

- 将上解代入方程$\dot{x}_2 = J_2(q)\dot{q}$ 中，求得

$$y = \tilde{J}_2^{\#}(\dot{x}_2 - J_2 J_1^{\#}\dot{x}_1) + (I - \tilde{J}_2^{\#}\tilde{J}_2)z$$

  - 其中$\tilde{J}_2 = J_2 P_1$，$z \in R^n$是任意向量

- 任务最终解为

$$\dot{q} = J_1^{\#}\dot{x}_1 + P_1\tilde{J}_2^{\#}(\dot{x}_2 - J_2 J_1^{\#}\dot{x}_1) + (I_n - J_1^{\#}J_1)(I_n - \tilde{J}_2^{\#}\tilde{J}_2)z$$

2.2 两层任务模型

➢ 理论推导

- 对于一个两层分层任务来说，令$x_1 \in R^{m_1}$为第一任务优先级的任务，令$x_2 \in R^{m_2}$为第二任务优先级的任务，关节变量为$q \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$

- 对于$i = 1$时，方程$\dot{x}_1 = J_1(q)\dot{q}$ 中$\dot{q}$关于$\dot{x}_1$的一般解为

$$\dot{q} = J_1^{\#}(q)\dot{x}_1 + P_1 y$$

  - 其中$P_1 = I_n - J_1^{\#}(q)J_1(q)$是任务1的零空间投影矩阵,$y \in R^n$是任意向量，其经过投影后不会对任务1产生影响

- 将上解代入方程$\dot{x}_2 = J_2(q)\dot{q}$ 中，求得

  - 其中$\tilde{J}_2$ =

- 任务最终解为

完成任务1

不影响任务1的前提下完成任务2

完成前两个任务后可能用于后续任务

$$\dot{q} = \boxed{J_1^{\#}\dot{x}_1} + \boxed{P_1\tilde{J}_2^{\#}\left(\dot{x}_2 - J_2 J_1^{\#}\dot{x}_1\right)} + \boxed{\left(I_n - J_1^{\#}J_1\right)\left(I_n - \tilde{J}_2^{\#}\tilde{J}_2\right)z}$$

2.3 仿真示例

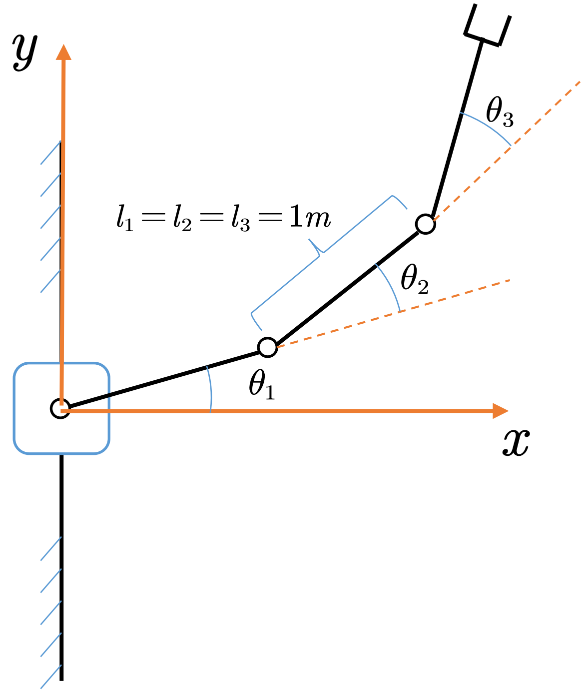
➢ 以右图三自由度机械臂模型为例：

- 任务1: 末端器位置

$$r_1 = f_1(q), \dot{r}_1 = J_1(q)\dot{q}; \quad r_1 \in \mathbb{R}^2, J_1 \in \mathbb{R}^{2\times3}$$

- 任务2: 末端器方向

$$r_2 = f_2(q), \dot{r}_2 = J_2(q)\dot{q}; \quad r_1 \in \mathbb{R}, J_1 \in \mathbb{R}^{1\times3}$$



其中

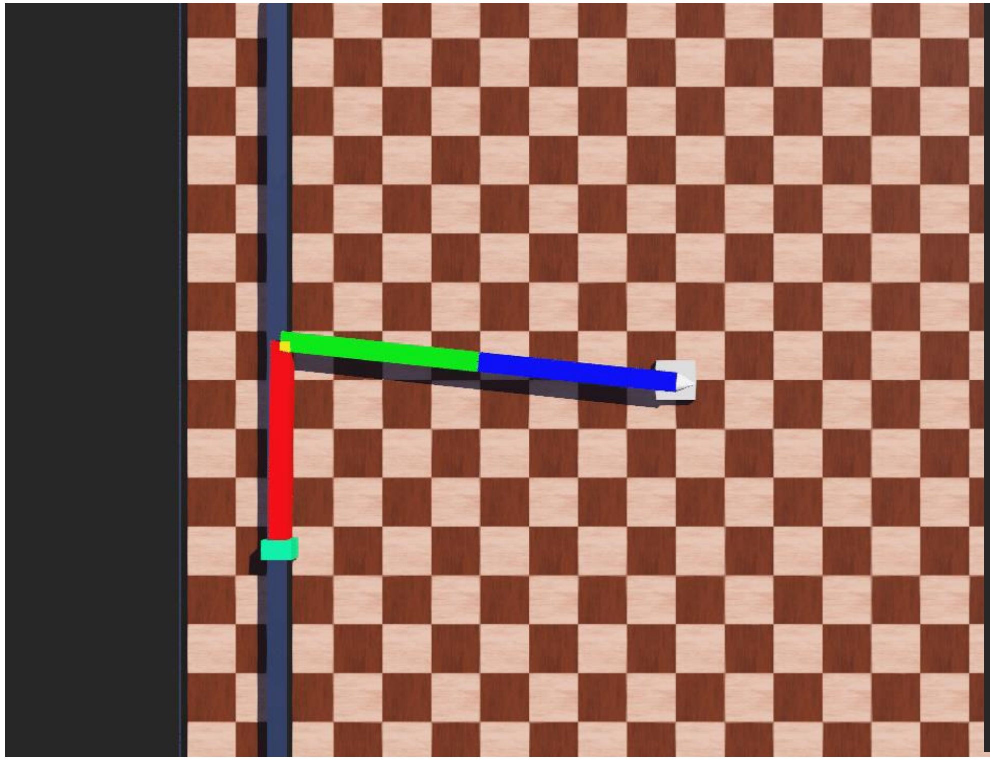
$$\begin{cases} J_1 = \begin{bmatrix} -s_1 - s_{12} - s_{123} & -s_{12} - s_{123} & -s_{123} \\ c_1 + c_{12} + c_{123} & c_{12} + c_{123} & c_{123} \end{bmatrix} \\ J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

s_1表示$\sin(\theta_1)$, s_{12}表示$\sin(\theta_1+\theta_2)$，c_{123}表示$\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$

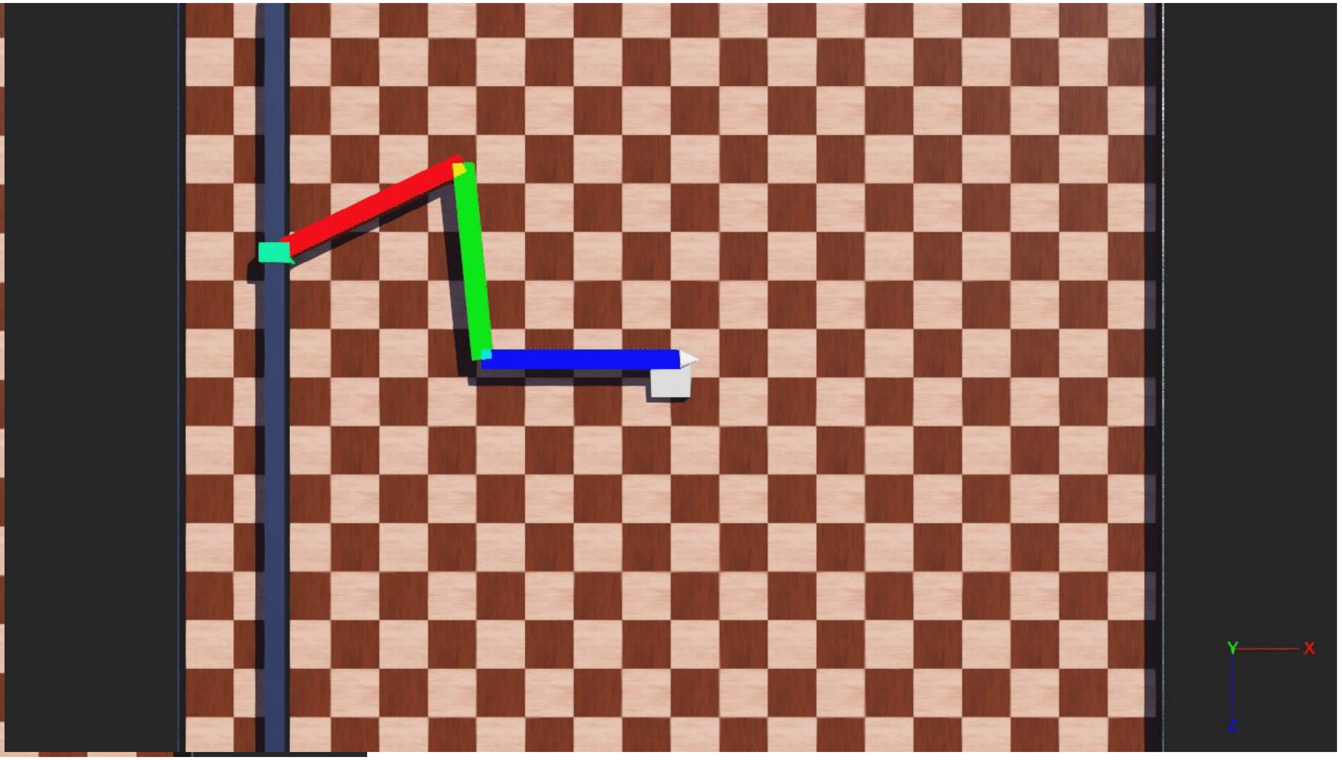
- 为了比较不同优先级下控制效果，在基座上加入沿y轴的平移扰动

2.3 仿真示例

- 任务1优先级大于任务2：
  - 末端器位置优先



- 任务2优先级大于任务1：
  - 末端器方向优先



2.4 动力学力控模型

➢ 模型简介

- 考虑一个末端器的一般任务$\mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$，关节广义坐标$\mathrm{q} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$，满足关系$\mathrm{x} = \mathrm{f}(\mathrm{q})$，则$\dot{\mathrm{x}} = J(q)\dot{q}$。
  - 其动力学方程满足关系
$$\Lambda(\mathrm{x})\ddot{\mathrm{x}} + \mu(x, \dot{x}) + p(x) = F$$
  - 以及动力学方程在广义坐标下的表示形式
$$\mathrm{A}(\mathrm{q})\ddot{\mathrm{q}} + b(q, \dot{q}) + g(q) = \Gamma$$
- (Khatib,O.,1987)给出了以下引理:

对于满足上述条件的系统，当且仅当操作器的广义关节力$\Gamma \in R^n$满足形式
$$\Gamma = \mathrm{J}^{\mathrm{T}}(q)F + \left[I_n - J^T(q)J^{\#^T}(q)\right]\Gamma_0$$
时，其在末端器上的操作力为F。其中$\Gamma_0 \in R^n$是任意力向量。

2.4 动力学力控模型

➢ 模型简介

- 考虑一个末端器的一般任务$\mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$，关节广义坐标q 则$\dot{\mathrm{x}} = J(q)\dot{q}$。
  - 其动力学方程满足关系
    $$\Lambda(\mathrm{x})\ddot{\mathrm{x}} + \mu(x,\dot{x}) + p(x) = F$$
  - 以及动力学方程在广义坐标下的表示形式
    $$\mathrm{A}(\mathrm{q})\ddot{\mathrm{q}} + b(q,\dot{q}) + g(q) = \Gamma$$
- (Khatib,O.,1987)给出了以下引理：

对于满足上述条件的系统，当且仅当操作器的广义关节力$\Gamma \in R^n$满足形式

$$\Gamma = \mathrm{J}^{\mathrm{T}}(q)F + \left[I_n - J^T(q)J^{\#^T}(q)\right]\Gamma_0$$

时，其在末端器上的操作力为F。其中$\Gamma_0 \in R^n$是任意力向量。

引理推导：

$$\mathrm{F} = \mathrm{J}^{\#^T}(q)\Gamma$$

$$\mathrm{J}^{\#^T}(q)\left\{\mathrm{J}^{\mathrm{T}}(q)F + \left[I_n - J^T(q)J^{\#^T}(q)\right]\Gamma_0\right\}$$

$$= \underbrace{\left(J \cdot J^{\#}\right)^T}_{I_m} F + \underbrace{\left[J^{\#^T} - \left(J \cdot J^{\#}\right)^T J^{\#^T}\right]}_{O_{m\times n}}\Gamma_0$$

$$= F$$

2.4 动力学力控模型

➢ 模型简介

- 考虑一个末端器的一般任务$x \in R^m$，关节广义坐标$q \in R^n$，满足关系$x = f(q)$,则$\dot{x} = J(q)\dot{q}$。
  - 其动力学方程满足关系

$$\Lambda(x)\ddot{x} + \mu(x,\dot{x}) + p(x) = F$$

  - 以及动力学方程在广义坐标下的表示形式

$$A(q)\ddot{q} + b(q,\dot{q}) + g(q) = \Gamma$$

- (Khatib,O.,1987)给出了以下引理：

对于满足上述条件的系统，当且仅当操作器的广义关节

$$\Gamma = J^T(q)F + \boxed{\left[I_n - J^T(q)J^{\#^T}(q)\right]}\Gamma_0$$

时，其在末端器上的操作力为F。其中$\Gamma_0 \in R^n$是任意力向量。

- 和前面运动学中零空间投影矩阵

$$P = I - J^{\#}J$$

仅相差转置

- 后面和动力学力控有关的零空间投影矩阵定义为

$$P = I_n - J^T(q)J^{\#^T}(q)$$

目录

CONTENTS

3.1 连续投影

- 记第$i(1\le i\le r)$级任务的动力学形式的零空间投影矩阵为

$$N_i = I_n - J_i(q)^T\left(J_i(q)^{\#}\right)^T$$

- 第i级任务的任务控制力矩为$\tau_i\in R^n$，则连续投影的思想便是先将其投影的第$i-1$级任务的零空间，再投影到第$i-2$级，直到投影到第1级任务的零空间中，最终力矩为如下形式

$$\tau=\tau_1+N_1\left(\tau_2+N_2\left(\tau_3+\cdots+N_{r-2}(\tau_{r-1}+N_{r-1}\tau_r)\right)\right)$$

- 定义以下符号

$$N_1^{suc}=I_n$$

$$N_i^{suc}(q)=N_{i-1}^{suc}(q)N_{i-1}\ \ (2\le i\le r)$$

  - 令$\tau_i^p=N_i^{suc}(q)\tau_i$，则最终力矩可简写成如下的形式

$$\tau=\sum_{i=1}^{r}\tau_i^p$$

- 思路简单直接，但不能保证严格正交性

3.2 增广投影

- 对第i级任务，将前面的$i-1$级的所有任务视作“一个任务”，由此得到了一个增广的雅克比矩阵，其定义为

$$J_{i-1}^{aug}(q)=\begin{pmatrix} J_1(q) \\ J_2(q) \\ \vdots \\ J_{i-1}(q) \end{pmatrix}$$

- 可以得到该增广矩阵对应的零空间投影矩阵

$$P_i^{aug}(q)=I_n-J_i^{aug}(q)^T\left(J_i^{aug}(q)^{\#}\right)^T$$

  - 该零空间投影矩阵能将任意向量投影到前$i-1$级任务中任意一级任务的零空间中,保证了严格的正交性。

- 定义如下符号，得到和连续投影相似的形式

$$N_1^{aug}=I_n$$

$$N_i^{aug}(q)=P_{i-1}^{aug}(q)\ (2\le i\le r)$$

  - 令$\tau_i^p=N_i^{aug}(q)\tau_i$，则增广投影可写成和连续投影统一的形式

$$\tau=\sum_{i=1}^{r}\tau_i^p$$

3.3 增广投影改进

- 增广投影矩阵$P_i^{aug}(q)$会随着$J_i^{aug}(q)$的行向量增加而重新计算，计算效率较低
- 改进思路是对稍高优先级任务的雅可比矩阵进行修改，使它落在更高优先级任务的零空间内。这样同样保证了严格的正交性。我们令

$$\left(J_i^{proj}(q)\right)^T = N_i^{proj}(q) J_i(q)^T$$

  - 其递归定义为

$$N_1^{proj} = I_n$$

$$N_i^{proj}(q) = N_{i-1}^{proj}(q)\left(I_n - J_{i-1}^{proj}(q)^T \left(J_{i-1}^{proj}(q)^{\#}\right)^T\right) \; (2 \le i \le r)$$

  - 令$\tau_i^p = N_i^{proj}(q)\tau_i$，则

$$\tau = \sum_{i=1}^{r} \tau_i^p$$

- 事实上，对$\forall \tau \in R^n$

$$N_i^{proj}(q)\tau = N_i^{aug}(q)\tau$$

3.4 增广投影特点

- 增广投影

$$\boldsymbol{J}_{i-1}^{\mathrm{aug}}(\boldsymbol{q})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q})\\ \boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{q})\\ \vdots\\ \boldsymbol{J}_{i-1}(\boldsymbol{q})\end{pmatrix}\qquad(1)$$

$$\boldsymbol{N}_i^{\mathrm{aug}}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_{i-1}^{\mathrm{aug}}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{J}_{i-1}^{\mathrm{aug}}(\boldsymbol{q})^{\#}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{N}_i^{\mathrm{aug}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau}_i$$

优点:

- 增广投影保证了任务间的正交性。
- 即增广投影后，τ_i^p一定在$J_k(k\le i-1)$的零空间中。

- 增广投影改进

$$\begin{aligned}N_1^{\mathrm{aug}}&=\boldsymbol{I}\\ \hat{\boldsymbol{J}}_i(\boldsymbol{q})&=\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{q})\boldsymbol{N}_i^{\mathrm{aug}}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{N}_i^{\mathrm{aug}}(\boldsymbol{q})&=\boldsymbol{N}_{i-1}^{\mathrm{aug}}(\boldsymbol{q})\left(\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{J}}_{i-1}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{J}}_{i-1}(\boldsymbol{q})^{\#}\right)^{\mathrm{T}}\right)\end{aligned}\qquad(2)$$

缺点:

- 当(1)式中出现秩损失，算法出现奇异性；同样，此时(2)式中也会出现秩损失
  理由: 当(1)式中有行向量线性相关时,
  J_{i-1}^{aug}不是行满秩，则N_i^{aug}不存在
- 要避免该情况需要对任务的定义和选择做出一定判定，会存在麻烦。

目录

CONTENTS

4 二次规划(QP)方法

- 零空间投影的不足
  - 基于零空间和伪逆的方法只能处理等式任务的问题
  - 随着控制场景的发展，诸如摩擦锥约束，最大力矩限制之类不等式任务也成为了控制中需要考虑问题
- 优化求解逆运动学问题

$$\dot{\boldsymbol{q}}^* \in \arg\min_{\dot{q}} \|\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{x}}_i^*\|^2 + w_r\|\dot{\boldsymbol{q}}\|^2$$

4.1 带权重的二次规划(WQP)

优化问题:

$$\arg\min_{\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{w}},\overline{\boldsymbol{v}}} \|\overline{\boldsymbol{w}}\|_{Q_e} + \|\overline{\boldsymbol{v}}\|_{Q_i}$$

$$\text{s.t. } \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{w}} = \overline{\boldsymbol{b}}$$

$$\overline{\boldsymbol{ld}}_s \leqslant \overline{\boldsymbol{C}}_s\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{v}} \leqslant \overline{\boldsymbol{ud}}_s$$

$$\overline{\boldsymbol{ld}}_h \leqslant \overline{\boldsymbol{C}}_h\boldsymbol{x} \leqslant \overline{\boldsymbol{ud}}_h$$

其中:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_r \end{bmatrix}, \overline{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix}$$

4.2 分层二次规划(HQP)

优化问题：

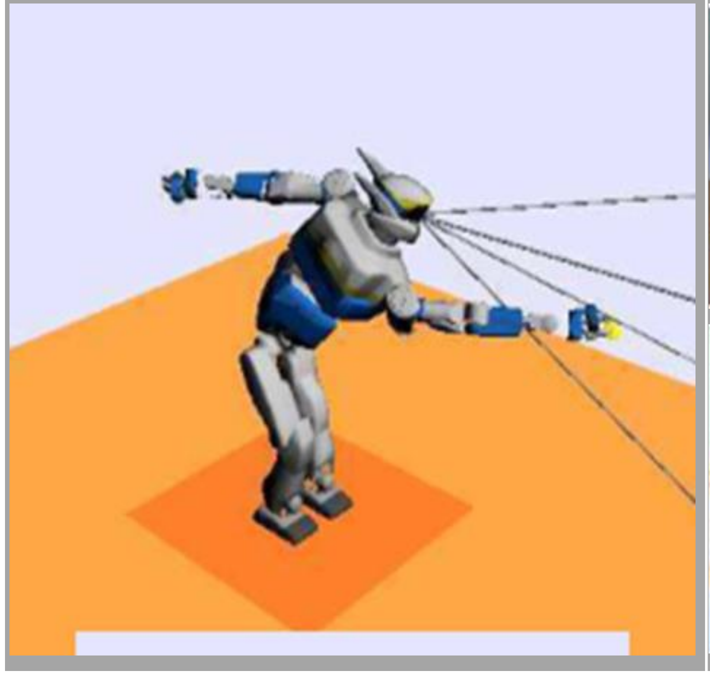
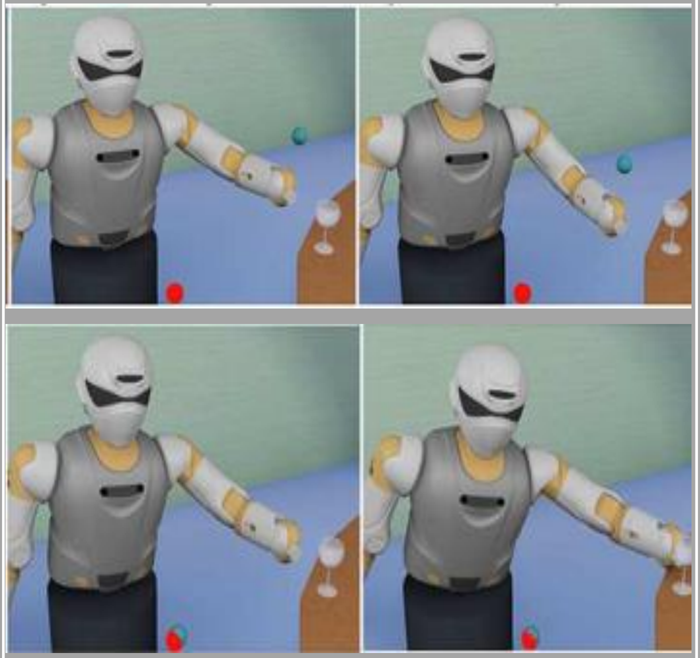
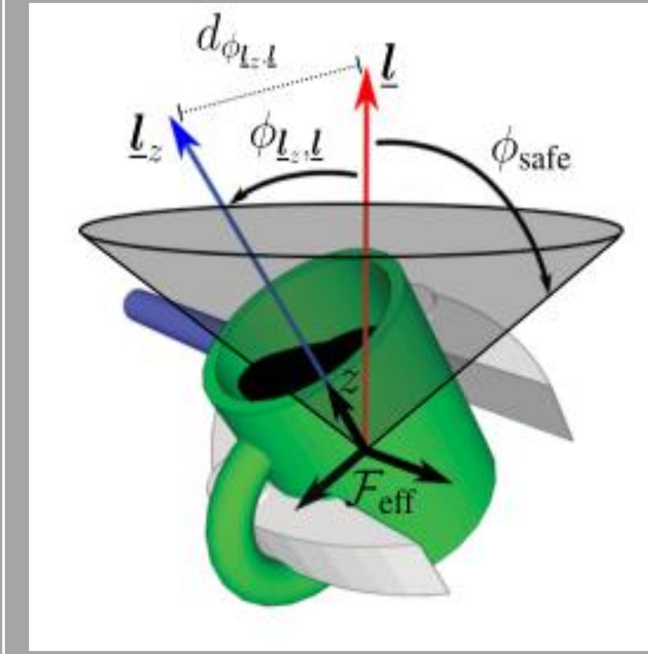
$$\underset{\boldsymbol{x}_k,\overline{\boldsymbol{v}}_k}{\arg\min}\ \left\|\overline{\boldsymbol{A}}_k\boldsymbol{x}_k-\overline{\boldsymbol{b}}_k\right\|_{Q_e}+\left\|\overline{\boldsymbol{v}}_k\right\|_{Q_i}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t. } & \overline{\boldsymbol{ld}}_{s,k}\leqslant\overline{\boldsymbol{C}}_{s,k}\boldsymbol{x}_k+\overline{\boldsymbol{v}}_k\leqslant\overline{\boldsymbol{ud}}_{s,k}\\
& \overline{\boldsymbol{ld}}_h\leqslant\overline{\boldsymbol{C}}_h\boldsymbol{x}_k\leqslant\overline{\boldsymbol{ud}}_h\\
& \overline{\boldsymbol{A}}_{k-1}^{aug}\boldsymbol{x}_k=\overline{\boldsymbol{A}}_{k-1}^{aug}\boldsymbol{x}_{k-1}^{*}\\
& \overline{\boldsymbol{ld}}_{k-1}^{aug}\leqslant\overline{\boldsymbol{C}}_{k-1}^{aug}\boldsymbol{x}_k+\overline{\boldsymbol{v}}_{k-1}^{aug\,*}\leqslant\overline{\boldsymbol{ud}}_{k-1}^{aug}
\end{aligned}$$

其中：

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{k-1}^{aug}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{A}}_1\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{A}}_{k-1}\end{bmatrix}\quad \overline{\boldsymbol{C}}_{k-1}^{aug}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{C}}_{s,1}\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{C}}_{s,k-1}\end{bmatrix},\ \overline{\boldsymbol{v}}_{k-1}^{aug\,*}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{v}}_1^{*}\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{v}}_{k-1}^{*}\end{bmatrix},\ \overline{\boldsymbol{ld}}_{k-1}^{aug}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{ld}}_{s,1}\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{ld}}_{s,k-1}\end{bmatrix},\ \overline{\boldsymbol{ud}}_{k-1}^{aug}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{ud}}_{s,1}\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{ud}}_{s,k-1}\end{bmatrix}$$

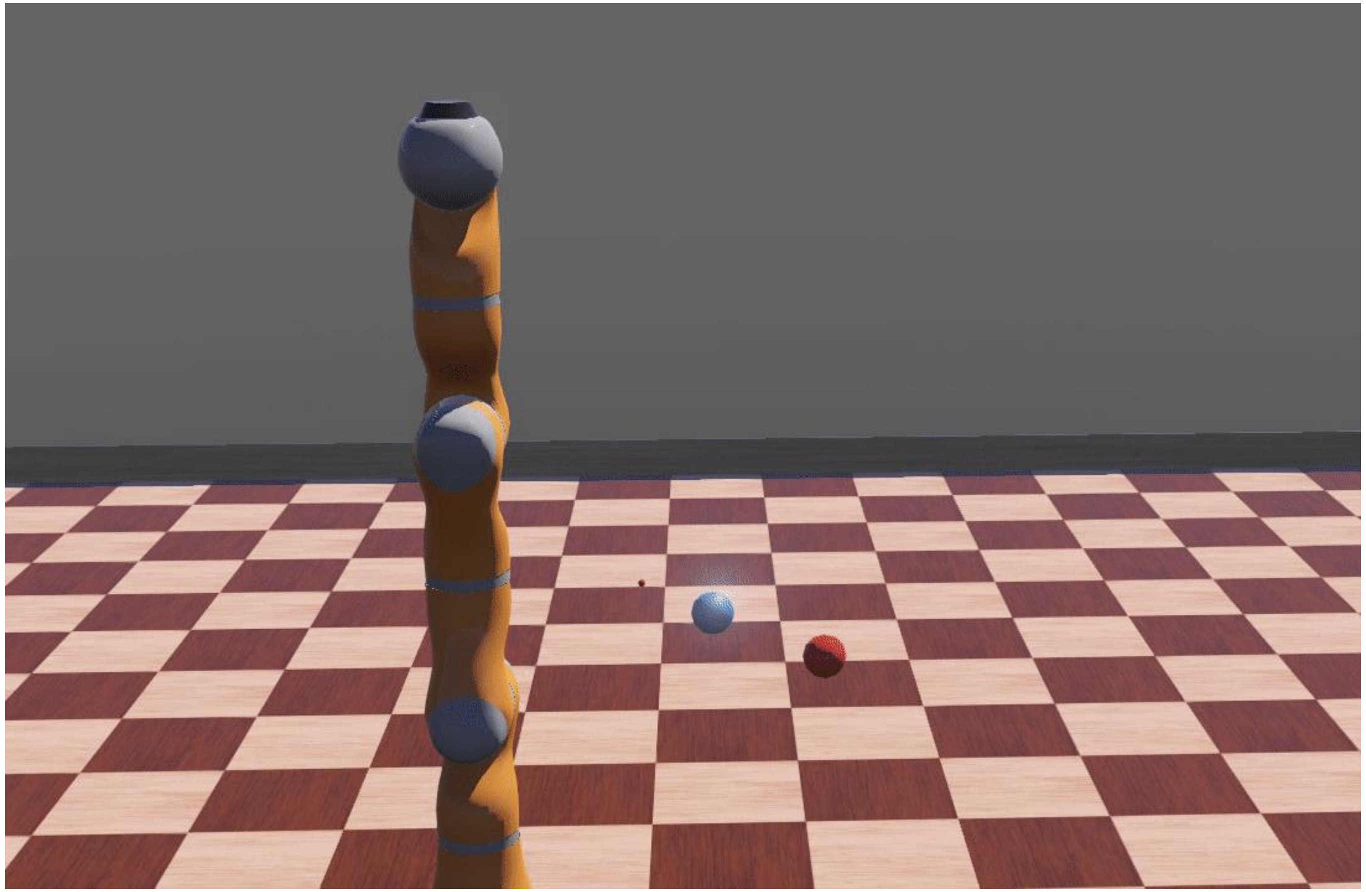
4.3 机器人控制问题分析

一个任务场景由多个子任务组成	不同场景中子任务要求不同	各种控制相关的约束
		

4.3 多个子任务控制

➢ 单个任务场景

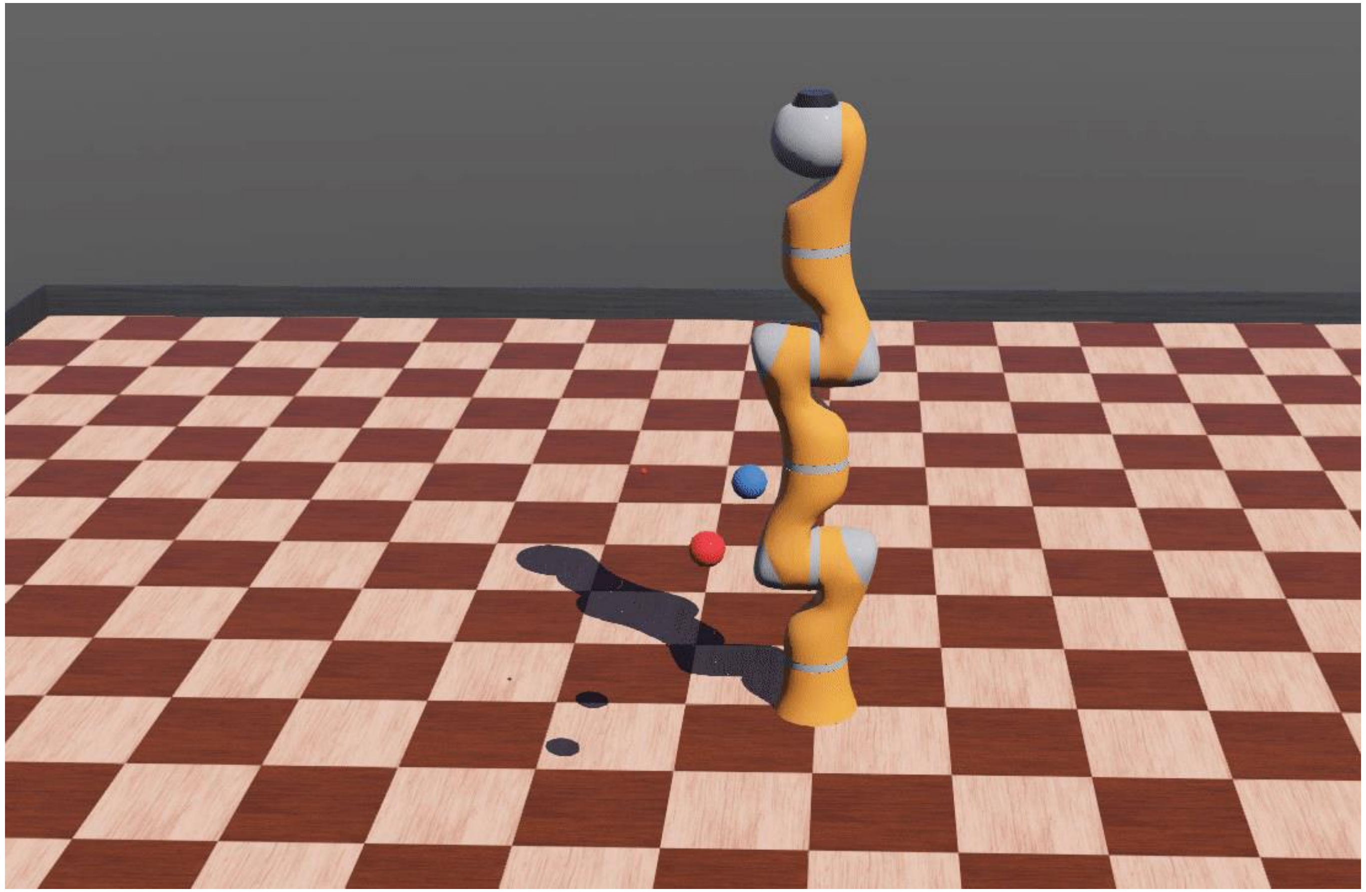
■ 机械臂目标抓取+固定障碍物



4.3 多个子任务控制

➢ 变化的任务场景

- 机械臂目标抓取+移动障碍物

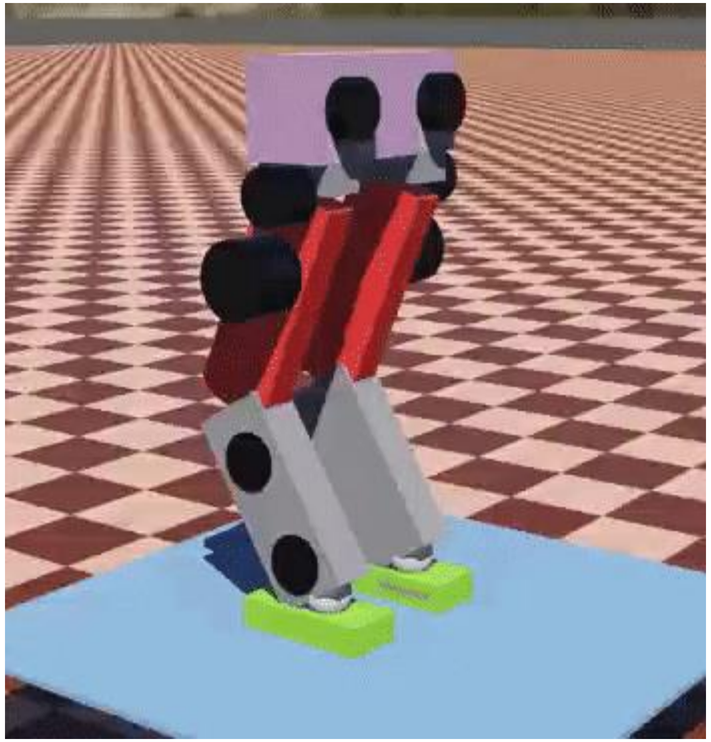


4.3 多个子任务控制

- 通过任务优先级实现多个子任务控制
  - 通过优先级实现不同子任务间的解耦
  - 当任务冲突时，优先级更低的任务不能影响优先级更高的任务
  - 在子任务不冲突时，能够保证都完成
- 相关算法：Whole-Body Control
  - 基于零空间投影的方法(NSP)

    不能解决不等式约束问题
  - 多目标优化方法(QP-based)

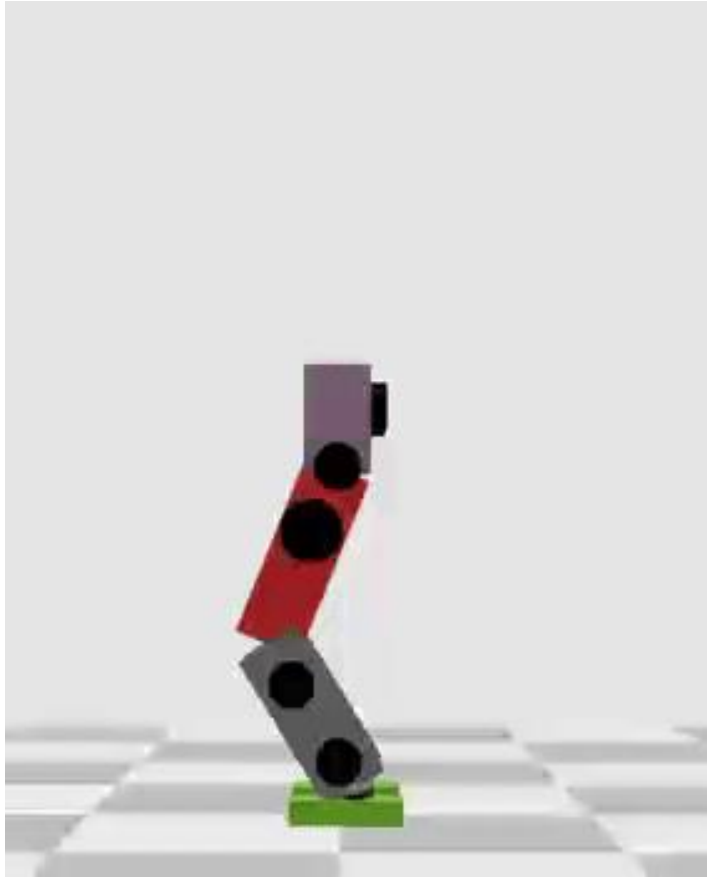
    耗时更长



4.3 不同场景过渡

➢ 不同优先级之间的过渡问题

- 从时间序列看，一系列动作可以由不同组动作连续变化构成
- 不同组动作中子任务的优先级不同
- 直接切换优先级可能会造成力矩突变，动作变化生硬



➢ 相关算法：

- 通过前后的优化问题构造过渡中的优化问题
- 在优化问题中引入零空间投影，利用零空间投影矩阵的连续变化实现过渡(RHP-HQP)