数学作业纸

（科目：随机过程与统计

班级： 姓名： 编号： 第 页

8. $4x^2+4kx+k+2=0$

$\Delta=(4k)^2-4\times4(k+2)$

$=16(k-2)(k+1)\geq0$

解得 $-1\leq k\leq2$

$\because k\sim U(0,5)$

$\therefore P(-1\leq k\leq 2)$

$=P(0<k\leq2)$

$=\frac{2-0}{5-0}=\frac{2}{5}$

10. 记 $Z_i=\begin{cases}1 & \text{顾客未等到服务(第}i\text{次)}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

$X\sim E(\lambda)$ $\frac{1}{\lambda}=5\Rightarrow\lambda=\frac{1}{5}$

$F_X(x)=1-e^{-\lambda x}$ $x>0$

$P(X\leq10)=F_X(10)=1-e^{-2}$

$\therefore P(Z_i=0)=1-e^{-2}$

$P(Z_i=1)=e^{-2}$

即 $Z_i\overset{iid}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0\\ e^{-2} & 1-e^{-2}\end{pmatrix}$ $i=1,2,\cdots,5$

$Y=\sum_{i=1}^{5}Z_i\sim B(5,e^{-2})$

$P(Y=k)=C_5^k(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{5-k}$ $k=\overset{0}{\cancel{1}},2,3,\cdots5$

Y的分布列为

Y	0	1	2	3	4	5
P	$(1-e^{-2})^5$	$5e^{-2}(1-e^{-2})^4$	$10e^{-4}(1-e^{-2})^3$	$10e^{-6}(1-e^{-2})^2$	$5e^{-8}(1-e^{-2})$	e^{-10}

$EY=5e^{-2}$ $P(Y\geq1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5\doteq0.5167$

11. 由概率密度函数的对称性

$P(2<X<4)=P(0<X<2)=0.3$

$P(X<0)=P(X>4)=\frac{1}{2}(1-2\times0.3)=0.2$

$\therefore P(X<0)=0.2$

14.

$E|X-\mu|=\int_{-\infty}^{\mu}(\mu-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

$+\int_{\mu}^{+\infty}(x-\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

令 $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$，则 $dt=\frac{1}{\sigma}dx$，$dx=\sigma dt$

$=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}te^{-\frac{1}{2}t^2}dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}te^{-\frac{1}{2}t^2}dt$

$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{1}{2}t^2}d(-\frac{1}{2}t^2)-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}d(-\frac{1}{2}t^2)$

$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\Big|_{0}^{+\infty}$

$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$

$=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

15. $h(a)=E|X-a|$

$=\int_{-\infty}^{a}(a-x)f(x)dx+\int_{a}^{+\infty}(x-a)f(x)dx$

$=a\int_{-\infty}^{a}f(x)dx-\int_{-\infty}^{a}xf(x)dx+\int_{a}^{+\infty}xf(x)dx-a\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$

$h'(a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx+af(a)-af(a)-af(a)-\int_{a}^{+\infty}f(x)dx+af(a)$

$=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx-\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=F(a)-(1-F(a))$

$=2F(a)-1$

令 $h'(a)=0$, $F(a)=\frac{1}{2}$

令 $h'(a)>0$, $F(a)>\frac{1}{2}$

令 $h'(a)<0$, $F(a)<\frac{1}{2}$

由于 $F(a)$ 随 a 单调递增(非严格)

$\therefore h'(a)$ 随 a 单调递增(非严格)

$\therefore h(a)_{min}=h(a)\Big|_{F(a)=\frac{1}{2}}$

$\therefore$ 当且仅当 $F(a)=\frac{1}{2}$ 即 $P(X\le a)=\frac{1}{2}$ 时

$h(a)$ 达到最小.

16.

$\theta\sim U[0,\pi]$

$f(\theta)=\frac{1}{\pi}$

$L(\theta)=2R\sin\theta$

$$EL=\int_0^{\pi}2R\sin\theta\frac{1}{\pi}\,d\theta$$

$$=\frac{2R}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{2R}{\pi}\int_0^{\pi}d(\cos\theta)$$

$$=-\frac{2R}{\pi}\cos\theta\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2R}{\pi}(-1-1)=\frac{4R}{\pi}$$

22. $u^2-2Xu+Y=0 \Leftrightarrow 4X^2-4Y\ge 0 \Leftrightarrow X^2\ge Y$

$\because X, Y$ 独立

$\therefore f(x,y)=\begin{cases}2xe^{-y} & 0<x<1,\ y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

设 $D_f=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ y>0\}$

$A=\{(x,y)\mid x^2\ge y\}$

$$\therefore P(X^2\ge Y)=\iint_{D_f\cap A}f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{x^2}2xe^{-y}\,dy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{x^2}-2x\,d(e^{-y})$$

$$=\int_0^1-2xe^{-y}\Big|_0^{x^2}dx$$

$$=\int_0^1-2xe^{-x^2}+2x\,dx$$

$$=\int_0^1e^{-x^2}d(-x^2)+\int_0^1 2x\,dx$$

$$=e^{-x^2}\Big|_0^1+x^2\Big|_0^1$$

$$=e^{-1}-1+1=e^{-1}$$

23. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

$$=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{2x^2y}\,dy$$

$$=\frac{1}{2x^2}\ln y\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}$$

$$=\frac{1}{2x^2}\left(\ln x-\ln\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{\ln x}{x^2}\quad 1\le x<+\infty$$

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x^2} & 1\le x<+\infty\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^{+\infty}\frac{1}{2x^2y}dx=\frac{1}{2y^2} & 1\le y<+\infty\\ \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}\frac{1}{2x^2y}dx=\frac{1}{2} & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

在区域 $D=\{(x,y)\mid 1\le x<+\infty,\ \frac{1}{x}<y<x\}$

$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

∴ X,Y 不独立.

25.

(a) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-|x|}dx$

$=0$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-|x|}dx$

$=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$

$=-\int_0^{+\infty}x^2d(e^{-x})$

$=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx$

$=-2\int_0^{+\infty}x\,d(e^{-x})=-2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$

$=-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2$ ∴ $DX=EX^2-EX=2$

(b) $Cov(X,|X|)$

$=E(X|X|)-E|X|EX$

$=E(X|X|)$

$E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$

∴ $Cov(X,|X|)$

∴ $r_{X,|X|}=0$

∴ X与$|X|$不相关

(c) $|X|=\begin{cases}X & X>0\\ -X & X<0.\end{cases}$

X与$|X|$是否不独立.

通过计算证明如下：

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}dx=\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_0^x\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\ge 0\end{cases}$$

$$F_{|X|}(x)=P(|X|\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ P(-x\le X\le x)=P(X\le x)-P(X\le -x)=1-e^{-x} & x\ge 0\end{cases}$$

$$F_{X,|X|}(x,y)=P(X\le x,|X|\le y)=\begin{cases}0 & y<0\\ 1-e^{-y} & 0\le y<x\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-y} & y\ge 0,\ y\ge x\ge 0\\ \frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-y} & y\ge 0>x\end{cases}$$

$F_{X,|X|}(x,y)\neq F_X(x)F_{|X|}(y)$

∴ $X,|X|$ 不独立

32. $X \sim N(0,1)$

$$EX^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,d(e^{-\frac{x^2}{2}})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,d(x^{n-1})$$

$$= (n-1)\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= (n-1)EX^{n-2}$$

当 $n=2k+1$ $k\in N_+$ 时，$EX^n=0$

当 $n=2k$，$k\in N_+$ 时，$EX^n=EX^{2k}=(2k-1)!!$

$\because Cov(X, X^n) = EX^{n+1} - EX\,EX^n$

$$= EX^{n+1} = \begin{cases} 0 & n=2k \quad k\in N_+ \\ (2k-1)!! & n=2k-1 \quad k\in N_+ \end{cases} = \begin{cases} 0 & n=2k,\ k\in N_+ \\ n!! & n=2k-1,\ k\in N_+ \end{cases}$$

$DX=\sigma^2=1$

$$DX^n = EX^{2n} - (EX^n)^2 = (4k-3)!! \quad n=2k-1 \quad k\in N_+$$

$$r_{X,X^n} = \frac{Cov(X,X^n)}{\sqrt{DX}\sqrt{DX^n}} = \begin{cases} 0 & n=2k,\ k\in N_+ \\ \frac{(2k-1)!!}{\sqrt{(4k-3)!!}} & n=2k-1,\ k\in N_+ \end{cases} = \begin{cases} 0 & n=2k,\ k\in N_+ \\ \frac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}} & n=2k-1,\ k\in N_+ \end{cases}$$