

所在学校

准考证号

姓名

考场

考生类别

第 29 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

北京物理学会编印

2012 年 12 月 9 日

北京物理学会对本试卷享有版权，未经允许，不得翻印出版或发生商业行为，违者必究。

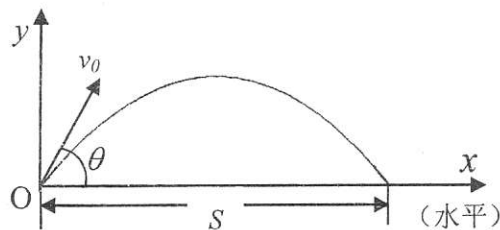
题号	一	二			
	1 ~ 10	11	12	13	14
分数					
阅卷人					
题号	三			总分	
	15	16	17		
分数					
阅卷人					

答题说明：前 14 题是必做题，满分是 120 分；文管组和农林医组只做必做题；除必做题外，非物理 B 组限做 15 题，满分 140 分；非物理 A 组限做 15、16 题，满分 160 分；物理组限做 15、17 题，满分 160 分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理，请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

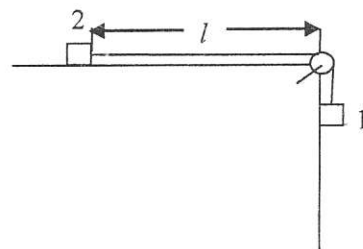
一、填空题（必做，共 10 题，每题 2 空，每空 3 分，共 60 分）

1. 如图所示的斜抛运动中，保持初速度大小 v_0 不变，

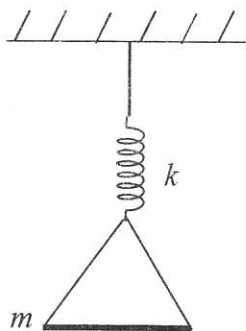
抛射角取为 $\theta_1 = 30^\circ$ 时，测得水平射程为 S_1 。抛射角改为 $\theta_2 = 60^\circ$ 时，水平射程将为 $S_2 =$ S_1 。不同的抛射角对应的诸多水平射程中最大者 $S_{\max} =$ S_1 。（空白处填数）



2. 如图所示，由质量相同的小木块 1、2 和轻绳连接的系统，木块 1 离地面足够高，木块 2 与水平桌面间无摩擦，且与桌面侧棱相距 l 。小滑轮质量可略，它与轻绳间也无摩擦。将系统从图示静止状态自由释放后，系统质心加速度大小为 $a_c =$ ，当木块 2 将到桌边时，系统质心速度大小为 $v_{ce} =$ 。

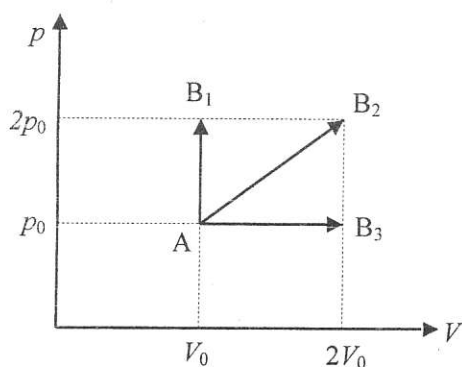
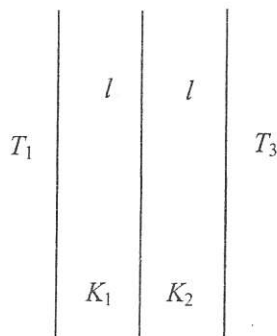


3. 如下页左上图所示，劲度系数为 k 的轻弹簧竖直悬挂着，它的下端用两根长度相同的轻绳对称地连接质量为 m 的平板。让系统从弹簧处于自由长度状态、平板处于静止状态开始释放，



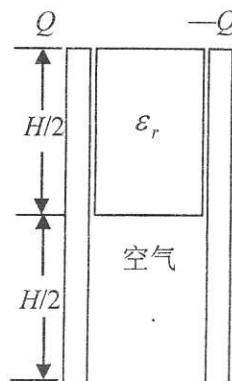
而后平板将在竖直方向上往返运动，周期 $T_0 =$ _____。若在平板向下到达其力平衡位置时，受到一个向下的冲量，假设绳不损耗机械能，而后木板仍将在竖直方向上往返运动，其周期 T 与 T_0 之间的大小关系为 T _____ T_0 。（填“大于”、“等于”或“小于”）

4. 如图所示，厚度同为 l ，热导率分别为 K_1 和 K_2 的两块金属大平板，左右并排紧靠在一起，左侧空气温度恒为 T_1 ，右侧空气温度恒为 $T_3 < T_1$ 。若两侧空气压强相同，分子数密度分别记为 n_1 和 n_3 ，则 $n_1 : n_3 =$ _____。设 $K_1 = 2K_2$ ，在热传导已达稳定状态时，则两块金属板接触面上的温度 $T_2 =$ _____。

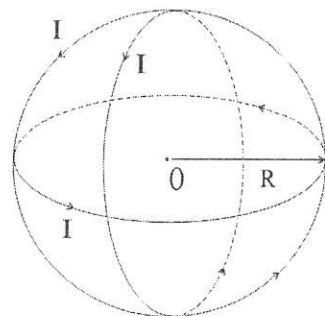


5. 单原子分子理想气体经历的三个准静态过程 AB_1 、 AB_2 、 AB_3 如图所示。这三个过程的吸热量依次为 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 ，其中最大者为 _____。这三个过程的摩尔热容量依次记为 C_{m1} 、 C_{m2} 、 C_{m3} ，其中最大者为 _____。

6. 平行板电容器如图所示，上方介质块的相对介电常数为 ϵ_r ，不计边缘效应，静电平衡后其中电位移矢量大小记为 D_r ，下方空气层（相对介电常数取为 1）中电位移矢量大小记为 D_0 ，则 D_r 和 D_0 的关系为 $D_r =$ _____ D_0 。若将介质块向上平移 $\frac{H}{4}$ 高度，静电平衡后留在电容器内 $\frac{H}{4}$ 高度的介质层中电位移矢量大小记为 D'_r ，则 D'_r 与 D_r 之间大小关系为 D'_r _____ D_r 。（本空填“大于”、“等于”或“小于”）



7. 稳恒磁场的毕奥-沙伐尔定律为 $d\vec{B} =$ _____。如图所示，三个半径为 R 、电流强度同为 I 的电流线圈，两两正交地放在半径为 R 的球面上，球心 O 处磁感应强度的大小 $B =$ _____。



8. 太阳系外两颗恒星射来的波长同为 λ 的光，经过直径 D 的透镜所成两个爱里斑的位置如下页图 1、图 2 或图 3 所示，其中 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 分别为两细束入射光之间的可能夹角。对于大多数人来说，这两颗恒星刚好能分辨的是图 _____ 所示情况（填 1、2 或 3），对应的两细束入射光之间的夹角即为最小可分辨角，其值为 _____。

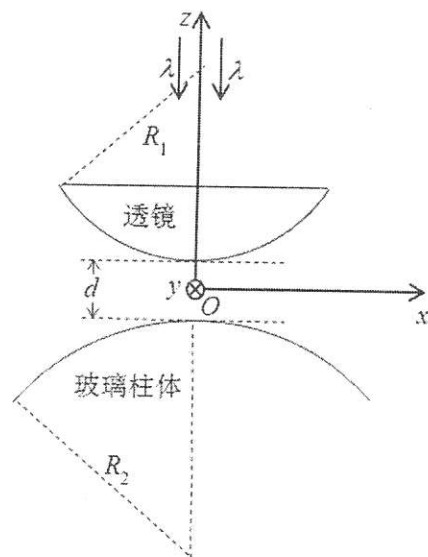
12. (15 分) 1 摩尔单原子分子理想气体, 从初态 (p_0, V_0) 经过一个准静态压缩过程, 到达终态 $\left(8p_0, \frac{1}{4}V_0\right)$ 。

(1) 假设全过程的每一无穷小过程中, 气体对外作功 dW 与吸热量 dQ 之比 $\frac{dW}{dQ}$ 均为常量 β , 试求 β ;

(2) 计算此气体的熵增量 ΔS 。

14. (15 分)

球面半径为 R_1 的平凸透镜，平放在半径为 R_2 的玻璃圆柱体侧面上方，两者间的最近距离记为 d 。如图所示，设置固定的 O - xyz 坐标系， z 轴与球心到圆柱体中央轴的垂线重合， O - xy 平面与透镜平面平行， y 轴与柱体中央轴平行， x 轴朝右。波长为 λ 的单色平行光逆着 z 轴正入射，在球面与圆柱面之间的空气膜上形成类似于牛顿环的干涉图样，图样在 O - xy 平面上表现为一系列的干涉环。



- (1). 设一开始观测到图样的中心为亮点（注意，不是亮环）。现通过将透镜上下平移使中心向内存入 10 个亮环后中心仍为亮点，试确定透镜平移的方向（上或下）和大小 Δd 。
- (2). 此时将透镜与玻璃圆柱体最小间距记为 d' ，试导出 O - xy 平面上第 k 级亮环和第 k 级暗环各自的曲线方程。
- (3). 今已观测到图样的中心为亮点，并测定中心亮点到往外数第 10 个亮环的最大间距及中心亮点到往外数第 20 个亮环的最小间距皆为 ρ ，试由 ρ 和波长 λ 确定 R_1 和 R_2 的大小。

16. (20 分, 非物理 A 组必做, 其他组不做)

(1) 场强

(1.1) 场强为 \vec{E}_0 的匀强电场中, 放入半径为 R 的导体球。若导体球原本不带电, 静电平衡后导体球表面电荷分布称为分布 I, 若导体球原本带电量为 Q , 静电平衡后导体球表面电荷分布称为分布 II, 请说出分布 II 与分布 I 之间的关系。

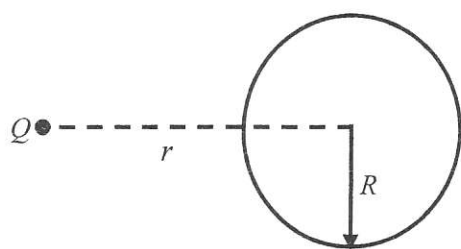


图 2

(1.2) 空间任意一个闭合曲面 S 如图 1 所示, 试问能否在 S 面上设置一种电荷分布 x , 使得 S 面所包围的空间体 V_S 是一个场强 \vec{E} 为图示矢量的匀强场区? 若能, 是否唯一? 为什么?

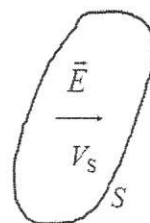


图 1

(2) 电势

(2.1) 如图 2 所示, 空间有电量为 Q 的固定点电荷, 在其静电场区域中取一个半径为 R 的几何球面, 其球心与点电荷相距 $r > R$, 试求该几何球面上的平均电势 \overline{U}_1 。

(2.2) 如图 3 所示, 空间有半径为 R_0 、电量为 Q 的固定均匀带电圆环, 在其静电场区域中取一个半径为 R 的几何球面, 球心与圆环中心的连线与环平面垂直, 间距 $r > R$, 试求该几何球面上的平均电势 \overline{U}_2 。

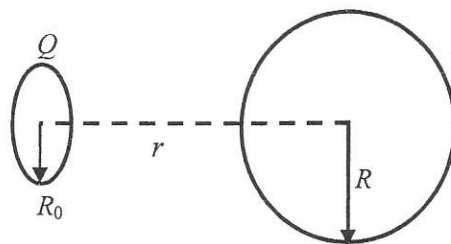


图 3

(2.3) 承 (2.2) 问, 改设 $R^2 > r^2 + R_0^2$, 再求半径 R 的几何球面上的平均电势 \overline{U}_3 。

17. (20 分, 物理组必做, 其他组不做)

空间有匀强磁场, 磁感应强度 \vec{B} 的方向如图 1 所示。在与 \vec{B} 垂直的平面上设置 $o-xy$ 坐标框架, 图中 \vec{k} 是未画出的 z 坐标轴的方向矢量。 $t=0$ 时刻, 质量 m 、电量 $q>0$ 的质点位于 $x=0$ 、 $y=\frac{l}{2}$ 处, 质量也为 m 、电量为 $-q$ 的质点位于 $x=0$ 、 $y=-\frac{l}{2}$ 处, 两质点用一根长为 l 的轻杆连接着。 $t=0$ 时, 系统质心 C 静止, 轻杆带着两个质点绕 C 点在 $o-xy$ 平面上沿顺时针方向, 以初始角速度 ω_0 旋转。除磁场力外, 不存在其它外作用力。

为杆引入顺时针旋转为正方向的转角 ϕ , 为过程态引入质心速度 \vec{v}_c 沿 q 到 $-q$ 方向的分速度 $v_{c\parallel}$ 和垂直于杆沿图 2 所示方向的分速度 $v_{c\perp}$ 。

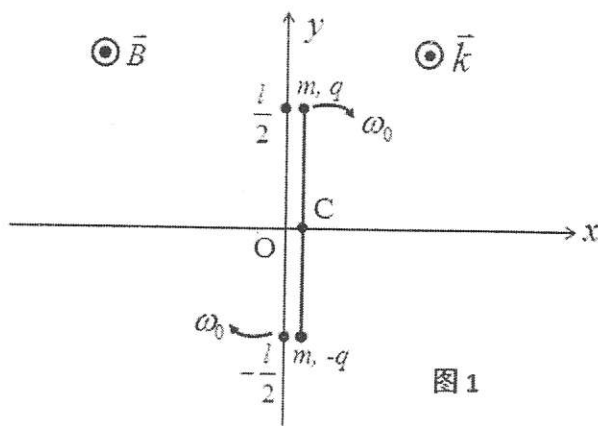


图 1

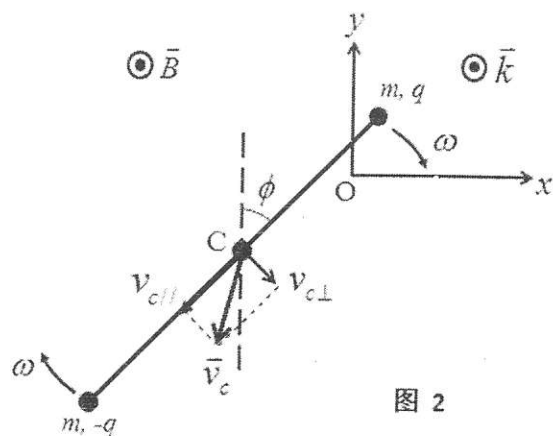


图 2

- (1) 将转角为 ϕ 时杆的旋转角速度 ω 和质心的分速度 $v_{c\parallel}$ 均设成已给的参量, 试求此时质心加速度的两个分量 a_{cx} 、 a_{cy} 和杆的旋转角加速度 β 。

- (2) 将转角 ϕ 随时间 t 变化的函数记为 $\phi(t)$ 。

- (2.1) 导出关于 $\phi(t)$ 的微分方程, 方程中只可包含 m 、 q 、 B 参量;

- (2.2) 导出 ω^2 随 ϕ 变化的函数表达式, 式中只可包含 m 、 q 、 B 和 ω_0 、 ϕ 参量;

- (2.3) 分析地判定系统能否达到 ω 为非零常量的稳定运动状态。

- (3) 假设杆可连续不停地旋转。

- (3.1) 确定 ω_0 取值范围;

- (3.2) 导出质心 C 的坐标量 y_c 的取值范围;

- (3.3) 设 $m \gg \frac{qB}{\omega_0}$, ω_0 取值可使杆连续不停地旋转, 试近似地导出并画出质心 C 的运动轨道。

第 29 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

参考答案

$$1. S_2 = 1 \times S_1, \quad S_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} S_1; \quad 2. a_c = \frac{\sqrt{2}}{2} g, \quad v_{ce} = \sqrt{2lg};$$

$$3. T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, T > T_0;$$

$$4. n_1 : n_3 = T_3 : T_1, \quad T_2 = \frac{2T_1 + T_3}{3}; \quad 5. Q_2, \quad C_{m3}; \quad 6. D_r = \epsilon_r D_0, D_r' > D_r;$$

$$7. d\vec{B} = \frac{\mu_0 Id\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}, \quad B = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2R}; \quad 8. \text{图 3, } Q_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D};$$

$$9. \text{光从空间一点传播到另一点是沿着光程为极值的路径传播的, } \Delta = nd \tan \theta;$$

$$10. v = \frac{1}{3}c, \quad M_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}m_0$$

填空题答案注解:

注解 1: 第 3 题第二小空

平板因受冲量, 振幅将大于原值。平板向上运动到弹簧处于自由长度状态时, 因软绳不能压缩弹簧而使平板从简谐振动改变为竖直上抛运动。又因不能受弹簧的向下推力, 而使平板起减速作用的向下加速度不如简谐振动时那么大, 故上抛时间要大于向上简谐振动所需时间。据此可知 $T > T_0$ 。

注解 2: 第 4 题第二小空

左侧金属板设置从左到右的 x 坐标, 在不同的 x 处取相同大小的 s 截面, 单位时间通过的热量 Q 不随 x 变化, 即有

$$-k_1 \frac{dT}{dx} S = Q \Rightarrow \int_{T_1}^{T(x)} -dT = \frac{Q}{k_1 S} \int_0^x dx$$

$$\text{得 } T_1 - T(x) = \frac{Q}{k_1 S} x \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{Q}{k_1 S} l$$

$$\text{对右侧金属板同样可求得 } T_2 - T_3 = \frac{Q}{k_2 S} l$$

$$\text{两式联立, 考虑到 } k_1 = 2k_2, \text{ 可解得 } T_2 = \frac{2T_1 + T_3}{3}$$

注解 3: 第 6 题第二小空

介质块上移, 使得原来为抵消介质极化场影响所需的导体板中一部分自由电荷向下移动, 导体板下方区域自由电荷面密度 σ'_0 就会比原有的 σ_0 大。即得介质中电位移矢量大小为:

$$D'_r = \epsilon_r \sigma'_0 > \epsilon_r \sigma_0 = D_r$$

注解 4: 第 10 题

$$m_A = \frac{5}{4}m_0, \quad \begin{cases} M = m_A + m_B = \frac{9}{4}m_0 \\ Mv = m_A \cdot \frac{3}{5}c \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{3}c, \quad M_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}m_0$$

11.解: (1) 由图中给出的感应电流方面, 可列出基尔霍夫方程组:

$$\begin{cases} \varepsilon = I_1 \cdot 3R + IR \\ \varepsilon = I_2 \cdot 3R + IR \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \quad (1) \quad (6\text{分})$$

由于 $\varepsilon = ka^2$ (2) (2分)

可得到各感应电流为:

$$\begin{cases} I = \frac{2\varepsilon}{5R} = \frac{2ka^2}{5R} \\ I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{5R} = \frac{ka^2}{5R} \end{cases} \quad (3) \quad (2\text{分})$$

$$(2) \quad \varepsilon_{AB} = \varepsilon_{AB}(\text{左}) + \varepsilon_{AB}(\text{右}) = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (3\text{分})$$

$$U_{AB} = IR - \varepsilon_{AB} = -\frac{1}{10}ka^2 \quad (2\text{分})$$

12. 解: (1) 由
$$\begin{cases} dQ = \frac{dW}{\beta} = p \frac{dV}{\beta} \\ dQ = dW + dU = pdV + \frac{3}{2}RdT \end{cases} \quad \text{得} \quad (1 - \frac{1}{\beta})pdV + \frac{3}{2}RdT = 0$$

与 $pdV + Vdp = RdT$, 消去 dT 后可得

$$n \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0, \quad n = \frac{5\beta - 2}{3\beta}$$

积分后, 可得 $p_2 V_2^n = p_1 V_1^n$

将 $p_2 = 8p_0$, $p_1 = p_0$; $V_2 = \frac{V_0}{4}$, $V_1 = V_0$ 代入后, 即得:

$$n = \frac{3}{2} \Rightarrow \beta = 4 \quad (10\text{分})$$

$$(2) \text{ 据理想气体熵增公式 } \Delta S = \nu C_{mv} \ln \frac{p_2}{p_1} + \nu C_{mp} \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\text{而 } C_{mv} = \frac{3}{2}R, \quad C_{mp} = \frac{5}{2}R, \text{ 得 } \Delta S = -\frac{1}{2}R \ln 2 \quad (5\text{分})$$

13.解: (1)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}B \cdot v_E = \frac{1}{2}v_D \cdot (A+C) \\ \frac{1}{2}v_F \cdot (A-C) = \frac{1}{2}v_D \cdot (A+C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_E = \sqrt{\frac{GM_s}{A}} \\ v_F = \left[\frac{A+C}{B} \right] \cdot \sqrt{\frac{GM_s}{A}} \end{cases} \quad (4\text{分})$$

$$(2) \text{ 取 E 点 } E = \frac{1}{2}Mv_E^2 - G \frac{M_s M}{A} = -\frac{GM_s M}{2A} \quad (2\text{分})$$

$$(3) \text{ 在 D 处, P 的主体和探测器初速度同为 } v_D = \frac{A-C}{B} \sqrt{\frac{GM_s}{A}}, \text{ 发射分离后,}$$

$$\text{P 主体圆运动: } v_1 = \sqrt{\frac{GM_s}{A+C}}$$

探测器抛物线运动: $\frac{1}{2}m_2v_2^2 - G\frac{M_s m_2}{A+C} = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM_s}{A+C}}$

分离过程

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_D, \quad m_1 = \gamma m_2 \Rightarrow \gamma = \frac{v_2 + v_D}{v_1 - v_D}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{\frac{2}{A+C}} + \frac{A-C}{B\sqrt{A}}}{\sqrt{\frac{1}{A+C}} - \frac{A-C}{B\sqrt{A}}}$$

由于 $C = \frac{\sqrt{3}}{2}A$, $B = \frac{1}{2}A \Rightarrow A = 2B$, $C = \sqrt{3}B$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{3}}} - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{[2\sqrt{2-\sqrt{3}} - (2-\sqrt{3})]}{[\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} - (2-\sqrt{3})]} = \frac{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2.808 \quad (9分)$$

14.

- (1). 空气薄膜上下表面反射光的光程差为 2 倍薄膜厚度, 因此干涉图样中心向外条纹级次依次增高, 故“吞环”使中心条纹级次增高, 需向上平移透镜,

$$2\Delta d = 10\lambda$$

$$\Rightarrow \Delta d = 5\lambda \quad (\text{以上3分})$$

- (2). 球面各点参量取 1 为下标, 柱面各点参量取 2 为下标. 参考题解图, 将 $O-xy$ 平面上的 (x, y) 点, 沿 z 轴向上到透镜球面的距离记为 h_1 , 沿 z 轴向下到柱面的距离记为 h_2 . 可为空气膜等厚干涉建立下述方程:

$$2(h_1 + h_2) + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (\text{亮点或亮环}) \quad (1)$$

$$2(h_1 + h_2) + \frac{\lambda}{2} = (k + \frac{1}{2})\lambda \quad (\text{暗点或暗环}) \quad (2)$$

$$h_1 = d_1 + R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x_1^2 + y_1^2)} \approx d_1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}$$

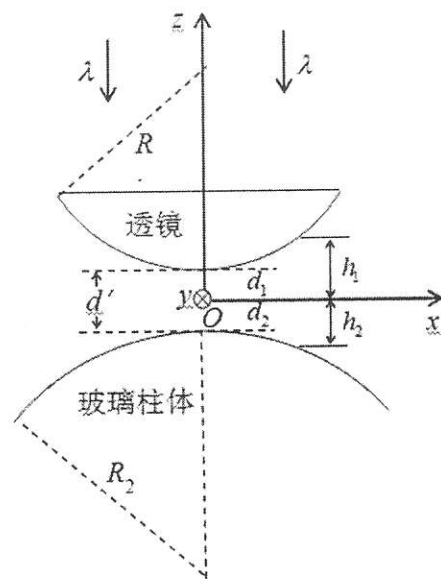
$$h_2 = d_2 + R_2 - \sqrt{R_2^2 - x_2^2} \approx d_2 + \frac{x_2^2}{2R_2} \quad (\text{与 } y_2 \text{ 无关})$$

$$x_1 = x_2 = x, \quad y_1 = y_2 = y$$

$$d_1 + d_2 = d'$$

$$\text{可得 } 2(h_1 + h_2) = 2d' + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})x^2 + \frac{1}{R_1}y^2$$

干涉环的曲线方程为:



题解图

$$2d' + \frac{x^2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} + \frac{y^2}{R_1} = \begin{cases} (k - \frac{1}{2})\lambda & \text{亮点或亮环} \\ k\lambda & \text{暗点或暗环} \end{cases} \quad (6\text{分})$$

可见均为椭圆曲线，且 x 方向为短轴方向， y 方向为长轴方向。

附注：

a) 表达式中可带入 $d' = d + \Delta d = d + 5\lambda$ 关系。

b) 方程(1)、(2)中 “ $+\frac{\lambda}{2}$ ” 可算为 “ $-\frac{\lambda}{2}$ ”，相应推导正确不扣分。

(3). 设中心亮点的级次为 k_0 ，则将中心点坐标 ($x=0, y=0$) 带入亮点 (环) 方程得

$$2d' = (k_0 - \frac{1}{2})\lambda$$

中心亮点到往外数第 n 个亮环方程为

$$\frac{x^2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} + \frac{y^2}{R_1} = (k_0 + n - \frac{1}{2})\lambda - 2d' = n\lambda$$

故依题意知 $\frac{\rho^2}{R_1} = 10\lambda$

$$\frac{\frac{\rho^2}{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} = 20\lambda$$

解得 $R_1 = R_2 = \frac{\rho^2}{10\lambda} \quad (6\text{分})$

15. 解：绳作用力出现前瞬间和消失后瞬间，球 1、2 的速度分别如题解图中的实线箭矢和虚线箭矢所示。可列角动量守恒方程和能量守恒方程：

$$R \cdot 2mv_2 - R \cdot mv_1 = R \cdot 2mv_0 - R \cdot mv_0$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2mv_2^2 + \frac{1}{2} \cdot mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2mv_0^2 + \frac{1}{2} \cdot mv_0^2$$

可解得： $\begin{cases} v_1 = v_0 \\ v_2 = v_0 \end{cases}$ (初态，删去) $\begin{cases} v_1 = -\frac{5}{3}v_0 \\ v_2 = -\frac{1}{3}v_0 \end{cases}$ (末态，与题解图方向相反)

速度变化过程中，绳对球 1、2 提供的冲量大小同为 I ，据动量定理有

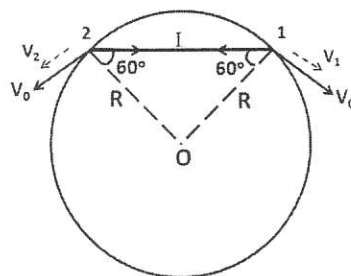
$$I \cos 30^\circ = (-mv_1) - (-mv_0) = \frac{8}{3}mv_0$$

$$\text{或 } I \cos 30^\circ = (-2mv_2) - (-2mv_0) = \frac{8}{3}mv_0$$

$$\text{得 } I = \frac{16}{3\sqrt{3}}mv_0 \quad (8\text{分})$$

(2)

(2.1) 绳长达 R 后，绳内出现弹性拉力，使球 1、2 沿运动反方向各自获得切向加速度。球 1 质量小，切向加速度大，速度先减到 $v_{10} = 0$ ，此时球 2 沿运动方向速度尚未减到零，大小记为 v_{20} 。绳长达 $2R$ 时，对 1、2 作用力无切向分量。由角动量守恒方程和能量守恒方程



题解图

$$R \cdot 2mv_{20} = R \cdot 2mv_0 - R \cdot mv_0$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2mv_{20}^2 + \frac{1}{2} \cdot k(2R - R)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2mv_0^2 + \frac{1}{2} \cdot mv_0^2$$

$$\text{解得: } v_{20} = \frac{1}{2}v_0, \quad k = \frac{5mv_0^2}{2R^2} \quad (3\text{分})$$

(2.2) 将 $t=0$ 到 $t=t_e$ 的运动过程分为四个阶段。

第 I 阶段: 从 $t=0$ 开始, 到绳长达 R 为止, 所经时间记为 Δt_1 。

$$\text{有 } \Delta t_1 = \frac{\frac{\pi}{3}R}{2v_0} = \frac{\pi R}{6v_0}$$

第 II 阶段: 从绳长达 R 开始, 到绳长达 $2R$ 为止, 所经时间记为 Δt_2 。此过程中球 1、2 速度大小分别记为 v_1 、 v_2 , 由角动量守恒方程:

$$R \cdot 2mv_2 - R \cdot mv_1 = R \cdot 2mv_0 - R \cdot mv_0$$

$$\Rightarrow 2v_2 - v_1 = v_0$$

可得路程关联式:

$$2 \int_0^{\Delta t_2} v_2 dt - \int_0^{\Delta t_2} v_1 dt = \int_0^{\Delta t_2} v_0 dt \quad \Rightarrow 2S_2 - S_1 = v_0 \Delta t_2$$

与 $S_1 + S_2 = \frac{2}{3}\pi R$ 联立, 再将 $S_1 = \alpha S_2$ 代入, 得:

$$\begin{cases} 2S_2 - \alpha S_2 = v_0 \Delta t_2 \\ \alpha S_2 + S_2 = \frac{2}{3}\pi R \end{cases}$$

$$\text{即有 } \Delta t_2 = \frac{2(2-\alpha)}{3(1+\alpha)} \cdot \frac{\pi R}{v_0}$$

第 III 阶段, 从绳长降到 $2R$ 开始, 到绳长又恢复到 R 为止, 所经时间为 Δt_3 。

整个过程即为第 II 阶段的逆过程, 故有: $\Delta t_3 = \Delta t_2$

第 IV 阶段: 从绳长降到 R 开始, 到两球碰撞为止, 所经时间设为 Δt_4 。

此过程为第 I 阶段的逆过程, 故有 $\Delta t_4 = \Delta t_1$, 合成后可得

$$t_e = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 = \frac{3-\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{\pi R}{v_0} \quad (9\text{分})$$

16. 解 (1)

(1.1) 分布 II 为分布 I 与 Q 在球面上均匀分布 $\left(\sigma_0 = \frac{Q}{4\pi R^2}\right)$ 的叠加。 (2 分)

(1.2) 能, 分布不唯一。假想带电量为 Q 的导体恰好充满该区域 V_S , 并放置在场强为 $-\vec{E}$ 的匀强电场中。达到静电平衡后, 该假想导体表面电荷分布在区域 V_S 内产生的电场需严格抵消场为 $-\vec{E}$ 的匀强外电场, 因此该分布单独在区域 V_S 内产生的电场是场强为 \vec{E} 的匀强电场, 即可满足题目的要求。此外, 因 Q 取值任意, 因此分布不唯一。 (4 分)

(2)

(2.1) 点电荷 Q 的电场在 R 球面上有一个电势分布, 其平均值 \overline{U}_1 为所求。

以 R 球面球心为中心, 以 r 为半径设置一个球面。点电荷 Q 从其原来位置移动到 r 球面上其他位置时, R 球面上电势分布会变化, 但其平均值不变, 仍为 \overline{U}_1 。

结合电势叠加原理, 将点电荷 Q 均匀分布在 r 球面上, R 球面上出现新的电势分布, 但其平均值不变, 仍为所求的 \overline{U}_1 。此时新的电势分布属于均匀带电球面 (Q, r) 内部 $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 的等势分布,

即得 $\bar{U} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ (6分)

或者说等于原点电荷 Q 在 R 球面球心处的电势。

(2.2) 据 (2.1) 问解答, (Q, R_0) 环上任意无穷小线元电荷 dQ 为 R 球面提供的平均电势为:

$$d\bar{U}_2 = \frac{d\theta}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad r' = \sqrt{r^2 + R_0^2}$$

叠加便得: $\bar{U}_2 = \frac{\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + R_0^2}}$ (2分)

(2.3) 如题解图所示, 以 R 球面球心为中心, 以 $r' = \sqrt{r^2 + R_0^2}$ 为半径设置一个球面。将 (Q, R) 均匀带电圆环电量 Q 集中为一个点电荷 Q 放置在 r' 球面上, R 球面上的电势分布会变化, 但其平均值不变, 仍为所求是 \bar{U}_3 。反之, 再将点电荷 Q 均匀分布在 r' 球面上, R 球面上的电势分布会变化, 但其平均值不变, 仍为所求量 \bar{U}_3 。此时 R 球面上的电势分布, 等于均匀带电球面 (Q, r') 外, 半径为 R 的同心球面上电势 $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ 的等势分布, 即得:

$$\bar{U}_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (6分)$$

备注:

(2) 题也可采用“将电势转化为电势能”的方法求解, 此处从略。

从 (2.3) 问的上述参考解答中可以得知, R 球面内任意一个点电荷 Q 的电场为 R 球面平均电势的贡献均为 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ 。引申后即得 R 球面内, 任意总电量为 Q 的静电荷系为 R 球面平均电势的贡献均

为 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ 。因此 (2.3) 问中即使取消 (2.2) 问中所设“球心与圆环中心连线与环平面垂直”, 只

要保证环在 R 球面内, 仍有 $\bar{U}_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$, 编题时为适当降低难度, 故承 (2.2) 问设置 (2.3) 问。

17. 解: (1) 运动学量: $\vec{v}_c = \vec{v}_{c\parallel} + \vec{v}_{c\perp}, \quad \vec{\omega} = -\omega \vec{k}$

系统受磁场力分别为:

$$\vec{v}_{c\parallel} \text{ 对应的两个质点所受磁场力 } \begin{cases} \text{合力为零} \\ \text{相对质心力矩之和 } \vec{M} = qBlv_{c\parallel} \vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{v}_{c\perp} \text{ 对应的两个质点所受磁场力 } \begin{cases} \text{合力为零} \\ \text{相对质心力矩之和为零} \end{cases}$$

$$\vec{\omega} \text{ 对应的两个质点所受磁场力 } \begin{cases} \text{合力 } \vec{F}_\omega: \text{沿 } q \text{ 到 } -q \text{ 为正方向; } F_\omega = qBl\omega \\ \text{相对质心力矩之和为零} \end{cases}$$

得: $\vec{a}_c = \frac{\vec{F}_\omega}{2m} \begin{cases} \text{方向: 沿 } q \text{ 到 } -q \text{ 为正方向} \\ \text{大小: } a_c = \frac{qBl\omega}{2m} \end{cases}$

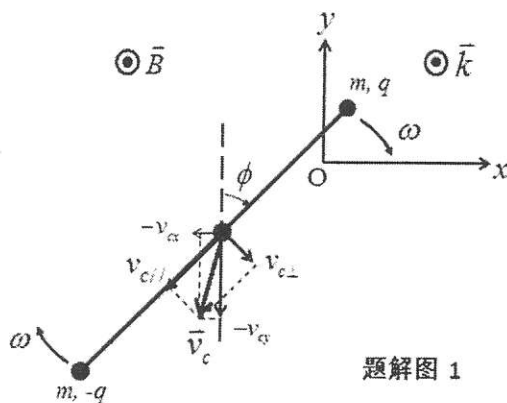
$$\begin{cases} a_{cx} = -a_c \sin \phi = -\frac{qBl}{2m} \omega \sin \phi \\ a_{cy} = -a_c \cos \phi = -\frac{qBl}{2m} \omega \cos \phi \end{cases}$$

由

$$\vec{M} = I_C \vec{\beta}, \quad \vec{M} = qBlv_{c\parallel} \vec{k}, \quad I_C = 2 \times m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} ml^2$$

得 $\vec{\beta} = \frac{2qB}{ml} v_{c\parallel} \vec{k} \quad (4分)$

(2)



题解图 1

(2.1) 参考题解图 1, \vec{v}_c 两组分量间的关系为:

$$\begin{cases} -v_{cx} = v_{c\parallel} \sin \phi - v_{c\perp} \cos \phi \\ -v_{cy} = v_{c\parallel} \cos \phi + v_{c\perp} \sin \phi \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} v_{cx} = -v_{c\parallel} \sin \phi + v_{c\perp} \cos \phi \\ v_{cy} = -v_{c\parallel} \cos \phi - v_{c\perp} \sin \phi \end{cases}$$

可得: $v_{c\parallel} = -(v_{cx} \sin \phi + v_{cy} \cos \phi)$, (用同样的方法可得 $v_{c\perp} = v_{cx} \cos \phi - v_{cy} \sin \phi$)

$$\text{由 } \frac{dv_{cx}}{dt} = a_{cx} = -\frac{qBl}{2m} \omega \sin \phi$$

$$\Rightarrow dv_{cx} = -\frac{qBl}{2m} \sin \phi d\phi$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_{cx}} dv_{cx} = -\frac{qBl}{2m} \int_0^{\phi} \sin \phi d\phi$$

$$\text{得: } v_{cx} = \frac{qBl}{2m} (\cos \phi - 1)$$

$$\text{由 } \frac{dv_{cy}}{dt} = a_{cy} = -\frac{qBl}{2m} \omega \cos \phi$$

$$\Rightarrow dv_{cy} = -\frac{qBl}{2m} \cos \phi d\phi$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_{cy}} dv_{cy} = -\frac{qBl}{2m} \int_0^{\phi} \cos \phi d\phi$$

$$\text{得: } v_{cy} = -\frac{qBl}{2m} \sin \phi$$

将 $v_{cx} \sim \phi$, $v_{cy} \sim \phi$ 代入前面所得 $v_{c\parallel} \sim v_{cx}, v_{cy}$ 关系式, 得:

$$v_{c\parallel} = \frac{qBl}{2m} \sin \phi (= -v_{cy}), \text{ (类似可得 } v_{c\perp} = \frac{qBl}{2m} (1 - \cos \phi) = -v_{cx} \text{)}$$

$$\text{由 } \beta = \frac{2qB}{ml} v_{c\parallel} \bar{k}, \quad v_{c\parallel} = \frac{qBl}{2m} \sin \phi, \quad \phi \text{ 旋转正方向与 } \bar{k} \text{ 反向,}$$

$$\text{得: } \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\beta = -\frac{2qB}{ml} \cdot \frac{qBl}{2m} \sin \phi = -\frac{q^2 B^2}{m^2} \sin \phi$$

$$\text{所求关于 } \phi(t) \text{ 的微分方程即为: } \ddot{\phi} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \sin \phi = 0 \quad (4\text{分})$$

$$(2.2) \text{ 将 } \ddot{\phi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\phi}$$

$$\text{代入上式, 得: } \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \int_0^{\phi} \sin \phi d\phi$$

$$\text{所以 } \omega^2 \text{ 随 } \phi \text{ 变化的函数即为 } \omega^2 = \omega_0^2 - 2\left(\frac{qB}{m}\right)^2 (1 - \cos \phi) \quad (2\text{分})$$

(2.3) 系统若能达到 ω 为非零常量的稳定状态, 则由上式要求此后 ϕ 为不变量,

于是必有 $\omega = \frac{d\phi}{dt} = 0$, 与 ω 为非零常量矛盾。据此, 系统不可能达到 ω 为非零常量的稳定状态。(1分)

(3)

(3.1) 由 (2.2) 问解答可知, 为使杆可连续不停地旋转, 要求 ϕ 取任意值均对应 $\omega^2 > 0$, 即得 ω 。

$$\text{取值范围为 } \omega_0 > \frac{2qB}{m} \quad (1\text{分})$$

$$(3.2) \text{ 由 } v_{cy} = -\frac{qBl}{2m} \sin \phi, \quad \ddot{\phi} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \sin \phi = 0 \Rightarrow \sin \phi = -\left(\frac{m}{qB}\right)^2 \ddot{\phi} = -\left(\frac{m}{qB}\right)^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{得: } \frac{dy_c}{dt} = \frac{qBl}{2m} \cdot \left(\frac{m}{qB}\right)^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{ml}{2qB} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_0^{y_c} dy_c = \frac{ml}{2qB} \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

$$\Rightarrow y_c = -\frac{ml}{2qB} (\omega_0 - \omega)$$

杆连续不停旋转过程中 ω 恒为正, 由 (2.2) 问解答可得到

$$\omega_{\max} = \omega_0, \quad \omega_{\min} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\left(\frac{qB}{m}\right)^2}$$

$$\text{故 } y \text{ 取值范围为 } 0 \geq y_c \geq -\frac{ml}{2qB} \left(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - 4\left(\frac{qB}{m}\right)^2}\right) \quad (3\text{分})$$

$$(4) \text{ 由 } \omega^2 = \omega_0^2 - 2\left(\frac{qB}{m}\right)^2 (1 - \cos \phi), \quad \frac{qB}{m} \ll \omega_0$$

得 $\omega \approx \omega_0, \quad \phi \approx \omega_0 t$

$$\text{则有 } \frac{dx_c}{dt} = v_{cx} = \frac{qBl}{2m} \cdot (\cos \phi - 1) = \frac{qBl}{2m} \cdot (\cos \omega_0 t - 1)$$

$$\Rightarrow \int_0^{x_c} dx_c = \frac{qBl}{2m\omega_0} \left[\int_0^{\phi} \cos \phi d\phi - \int_0^{\phi} d\phi \right]$$

$$\text{得 } x_c = \frac{qBl}{2m\omega_0} (\sin \phi - \phi)$$

$$\text{由 } \frac{dy_c}{dt} = v_{cy} = -\frac{qBl}{2m} \cdot \sin \phi = -\frac{qBl}{2m} \cdot \sin \omega_0 t$$

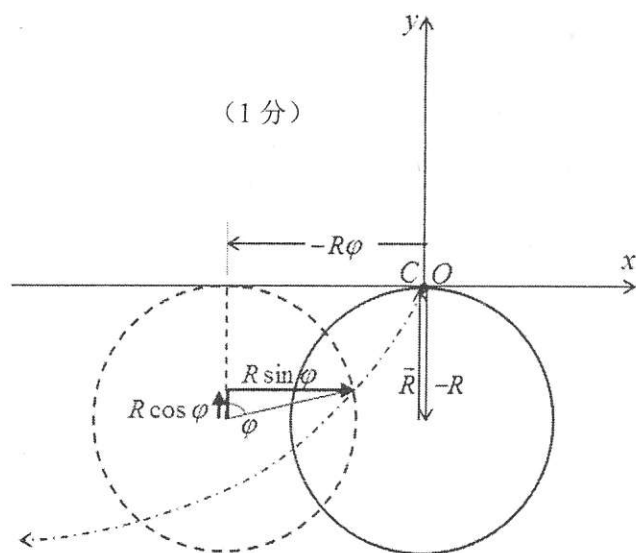
$$\Rightarrow \int_0^{y_c} dy_c = -\frac{qBl}{2m\omega_0} \int_0^{\phi} \sin \phi d\phi$$

$$\text{得 } y_c = \frac{qBl}{2m\omega_0} (\cos \phi - 1)$$

质心轨道的参量方程可表述为:

$$\begin{cases} x_c = R \sin \phi - R\phi \\ y_c = R \cos \phi - R \end{cases} \quad R = \frac{qBl}{2m\omega_0} \quad (4\text{分})$$

轨道是一条滚轮线, 如题解图 2 所示。



题解图 2