思考题 5 解答

1．设 $P(x<X\le y)=g(y-x)$，则

$$g(x+y)=P(0<X\le x)+P(x<X\le x+y)=g(x)+g(y)$$

注意到 $g(x)$ 是右连续，可以证明 $g(x)=cx$（微积分的题目。提示：先证明对整数成立，再证对有理数成立，对无理数由一列递减的有理数逼近即可）。由于 X 在 $[0,1]$ 取值，故对 $0\le x\le 1$， $F(x)=g(x)=cx$，而 $F(1)=1$，得到 $c=1$。从而 $X\sim U[0,1]$。

2. （1） $M_X(u)=\int_0^{\infty}e^{ux}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}f(x)dx=(1-\beta u)^{-\alpha}$， $u<\frac{1}{\beta}.$

$$E(X^n)=M_X^{(n)}(0)=\beta^n\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$（也可以直接积分）。

（2）设 $X_i\sim G(\alpha_i,\beta)$，故 $M_{X_i}(u)=(1-\beta u)^{-\alpha_i}$， $u<\frac{1}{\beta}.$

因为 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立， $M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(u)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(u)=(1-\beta u)^{-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$， $u<\frac{1}{\beta}.$ 故 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim G(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\beta)$。

（3）

$$M_{\ln X_i}(u)=E(e^{u\ln X_i})=E(X_i^u)=\int_0^{\infty}x^u\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)\beta^{\alpha_i}}x^{\alpha_i-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx=\beta^u\frac{\Gamma(\alpha_i+u)}{\Gamma(\alpha_i)},u>-\alpha_i$$

$M_Y(u)=\prod_{i=1}^{n}M_{\ln X_i}(-2u)$。故不是 Γ 分布。

注：若此题改为 $X_i\sim U[0,1]$，则

$$M_{\ln X_i}(u)=E(e^{u\ln X_i})=E(X_i^u)=\int_0^1 x^u dx=\frac{1}{u+1},u>-1$$

$M_Y(u)=\prod_{i=1}^{n}M_{\ln X_i}(-2u)=(1-2u)^{-n},u<\frac{1}{2}$。即 $Y\sim G(n,2)$

（4） $\begin{cases}U=X+Y\\ V=\dfrac{X}{X+Y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=UV\\ Y=U(1-V)\end{cases}$，故 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-u$，

显然 $u\ge 0,0\le v\le 1$，从而

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(uv,u(1-v))|u| \quad =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\beta^{\alpha_1}}(uv)^{\alpha_1-1}e^{-\frac{uv}{\beta}}\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_2}}(u(1-v))^{\alpha_2-1}e^{-\frac{u(1-v)}{\beta}}\bullet u$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\frac{u}{\beta}}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\frac{u}{\beta}}\times\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1},\quad u\ge 0,0\le v\le 1$$

故$U\sim G(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$，$V\sim \mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)$且相互独立。

3. 显然，$P(Y=0)=P(S_1>t)=e^{-\beta t}$。由于$S_n$是非减的，且

$$P(Y=t)=P(S_n\le t,S_{n+1}>t)=P(S_n\le t)-P(S_{n+1}\le t),$$

由于$S_n\sim G(n,\frac{1}{\beta})$，故

$$P(Y=t)=\int_0^t\frac{1}{\Gamma(n)\beta^{-n}}x^{n-1}e^{-\beta x}dx-\int_0^t\frac{1}{\Gamma(n+1)\beta^{-(n+1)}}x^{n}e^{-\beta x}dx=\frac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!}。$$

（或利用教材 P123 倒数第二行的结果：$P(S_n\le t)=1-e^{-\beta t}(1+\beta t+\cdots+\frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!})$）

4. 在 2（4）中已经证明。

（1） 5. 若$i>j$，则$P(X^{(1)}=i,X^{(n)}=j)=0$，

若$i=j$，则$P(X^{(1)}=i,X^{(n)}=j)=P(X_1=i,\cdots,X_n=i)=[P(X_1=i)]^n=(q^{i-1}p)^n$;

若$i<j$，则

$$P(X^{(1)}=i,X^{(n)}=j)=P(X^{(1)}=i,X^{(n)}\le j)-P(X^{(1)}=i,X^{(n)}\le j-1)$$
$$=[P(X^{(1)}>i-1,X^{(n)}\le j)-P(X^{(1)}>i,X^{(n)}\le j)]-[P(X^{(1)}>i-1,X^{(n)}\le j-1)-P(X^{(1)}>i,X^{(n)}\le j-1)]$$

由于对$k<l$，有

$$P(X^{(1)}>k,X^{(n)}\le l)=[P(k<X_i\le l)]^n=[\sum_{t=k+1}^{l}q^{t-1}p]^n=[q^k-q^l]^n$$

$$
\begin{aligned}
P(X^{(1)}=i, X^{(n)}=j) &= P(X^{(1)}=i, X^{(n)} \le j) - P(X^{(1)}=i, X^{(n)} \le j-1) \\
&= [(q^{i-1}-q^{j})^n - (q^{i}-q^{j})^n] - [(q^{i-1}-q^{j-1})^n - (q^{i}-q^{j-1})^n]
\end{aligned}
$$

（2） $(X^{(1)}, X^{(n)})$ 的分布函数为: $\forall x < y$

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= P(X^{(1)} \le x, X^{(n)} \le y) = P(X^{(n)} \le y) - P(X^{(1)} > x, X^{(n)} \le y) \\
&= [F(y)]^n - [F(y)-F(x)]^n
\end{aligned}
$$

故密度函数为

$$
f(x,y) = \begin{cases} n(n-1)[F(y)-F(x)]^{n-2} f(x) f(y), & x < y \\ 0, & x \ge y \end{cases}
$$

这里 $F(x), f(x)$ 分别为 X_1 的分布函数与密度函数。（思考：此结果也可以利用多项分布得到），

故若 $X_1 \sim E(\lambda)$，有

$$
f(x,y) = \begin{cases} n(n-1)\lambda^2 [e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y}]^{n-2} e^{-\lambda(x+y)}, & x < y \\ 0, & x \ge y \end{cases}
$$