【机器人】逆运动学（Inverse Kinematics）

将正运动学描述为$T(\theta)$的映射，逆运动学就是在知道末端关节的情况下，给出一种关于θ的解。

解析解法

这个问题朴素的解法是：

- 利用坐标变换矩阵列写末端位置与关节角的方程
- 问题是：不一定能找到解析解，或者可能有多组满足的解
- 因此，我们关注非线性方程组解的存在性、 多解性和求解方法

逆运动学解耦

- 条件：机器人中有3个相邻关节轴线交于一点。(工业机器人通常采用末端3个关节轴交于一点)
- $R=R_3^0 R_6^3 \rightarrow R_6^3=\left(R_3^0\right)^{-1} R=\left(R_3^0\right)^T R$

在计算解析解时，计算旋转角时采用了反余弦函数，式子中出现了sin为分母，因此会有如下问题：

- 由于$\cos(\theta)=\cos(-\theta)$，因此不能确定反余弦的象限；
- 当$\sin\theta$接近于0时，所求出的角度不够精确；
- 当$\sin\theta=0$ 或 180 时，无解；

因此必须寻求更为合理的求解方法。

- 反正切函数所在的象限空间可由自变量的分子和分母的符号确定，因而可以确定欧拉角所在的象限。
- 将一个变换矩阵左乘回来，说不定会有更利于求解的形式

数值解法

Newton-Raphon Method

寻找一个θ 使得方程成立：

$$x_d-f(\theta_d)=0$$

相当于将问题变为了方程求数值解的问题。（和数值分析里的牛顿法一样）
泰勒展开:

$$g(\theta)=g\left(\theta_0\right)+\frac{\partial g}{\partial \theta}\left(\theta_0\right)\left(\theta-\theta_0\right)+\text{ h.o.t}$$

只保留1阶项，并令方程 $g(\theta)=0$ ，可以解得

$$\theta_1=\theta_0-\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\left(\theta_0\right)\right)^{-1} g\left(\theta_0\right)$$

使用 θ_1 作为解的新的估计, 则可以得到一个数值迭代过程:

$$\theta_{k+1}=\theta_k-\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\left(\theta_k\right)\right)^{-1} g\left(\theta_k\right)$$