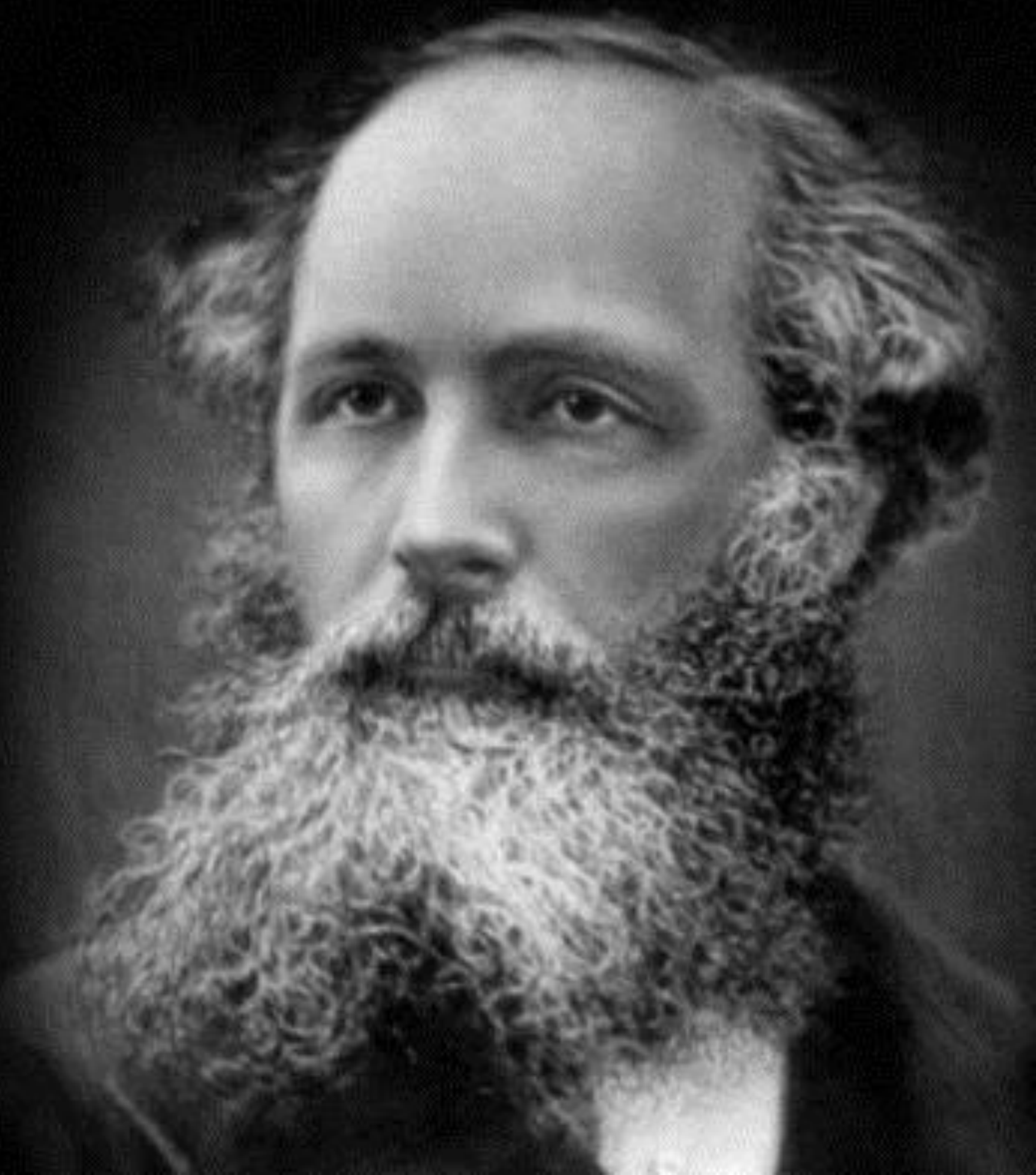
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



Jame Clerk Maxwell （1831-1879）

第21章 麦克斯韦方程组和电磁波

Maxwell equations and electromagnetic wave

21.1位移电流假设
21.2麦克斯韦方程组
21.3电磁波
*21.4坡印廷矢量
*21.5电磁波的动量
*21.6光压

在第20章，我们依据电磁感应实验结果和感生电场假设，把静电场环路定理推广到随时间变化的普遍情况：

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \rightarrow \oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

——揭示了“磁生电”的物理机制

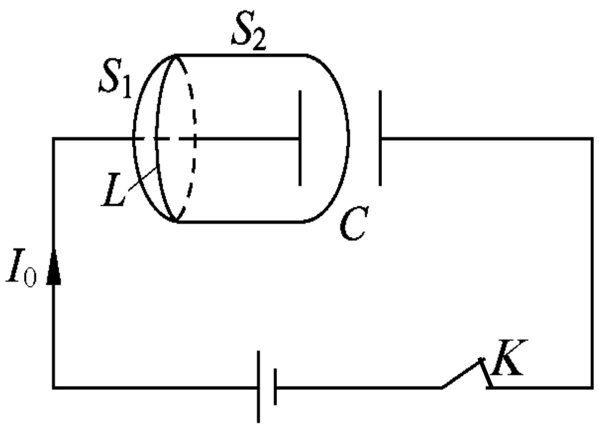
本章依据麦克斯韦的位移电流假设，把稳恒磁场的安培环路定理，推广到随时间变化的普遍情况：

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{(L内)} I_{0i} \rightarrow \oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{(L内)} I_{0i} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

——揭示了“电生磁”的物理机制

21.1 位移电流假设

以电容器充电过程为例



S_1、S_2：以L为边界的曲面，S_1 与导线相交，S_2 从电容器极板间穿过。

合上K，按安培环路定理：

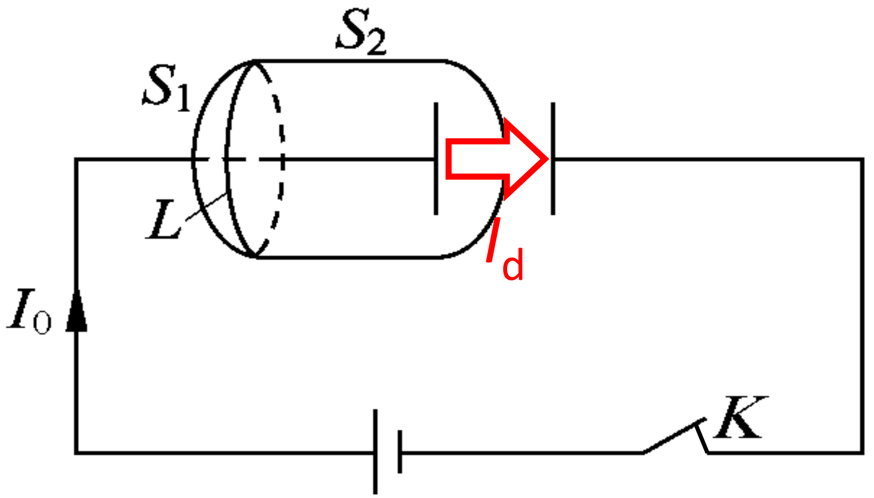
$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{(L内)} I_{0i} = \begin{cases} I_0 & (通过面S_1) \\ 0 & (通过面S_2) \end{cases} \quad ?$$

——非稳恒情况，安培环路定理不成立。

如何推广到随时间变化的普遍情况？

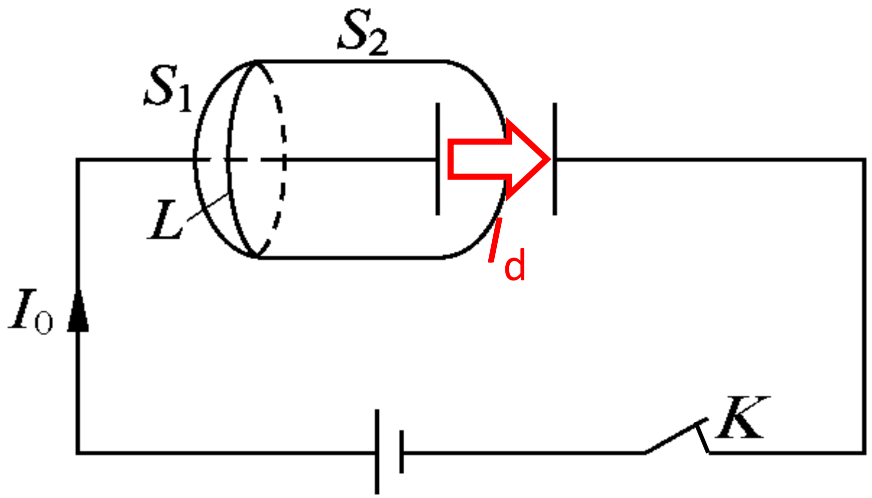
1861年麦克斯韦提出位移电流假设：

在电场变化的空间内存在“电流”——位移电流。



位移电流I_d“接续了”导线中的传导电流I_0：

$$I_d = I_0$$



q_0、σ_0：t 时刻极板自由电荷电量和面密度

A：极板面积

$$I_d = I_0 = \frac{dq_0}{dt} = A\frac{d\sigma_0}{dt} = A\frac{dD}{dt} = Aj_d$$

位移电流密度矢量：

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

——等于电位移矢量的变化率。

位移电流是不是电荷的流动？

$$I_{\mathrm{d}} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

把 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$代入，得

$$I_{\mathrm{d}} = \underbrace{\iint_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{E\text{变化引起}} + \underbrace{\iint_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{\text{极化电流}}$$

为什么是极化电流？

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial t} \cdot \mathrm{d}S = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S P \cdot \mathrm{d}S = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S P \cdot \hat{n} \mathrm{d}S$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \sigma' \mathrm{d}S = \frac{\partial q'}{\partial t}$$ （S面上极化电流）

结论：位移电流包括变化的电场和极化电流两部分，而真空中（无介质）的位移电流只是变化的电场，不产生焦耳热和电解等化学效应。

在产生磁场上，位移电流与传导电流具有相同的效果，所以

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{(L内)}(I_{0i}+I_d)$$

把 $I_d=\iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ 代入，得

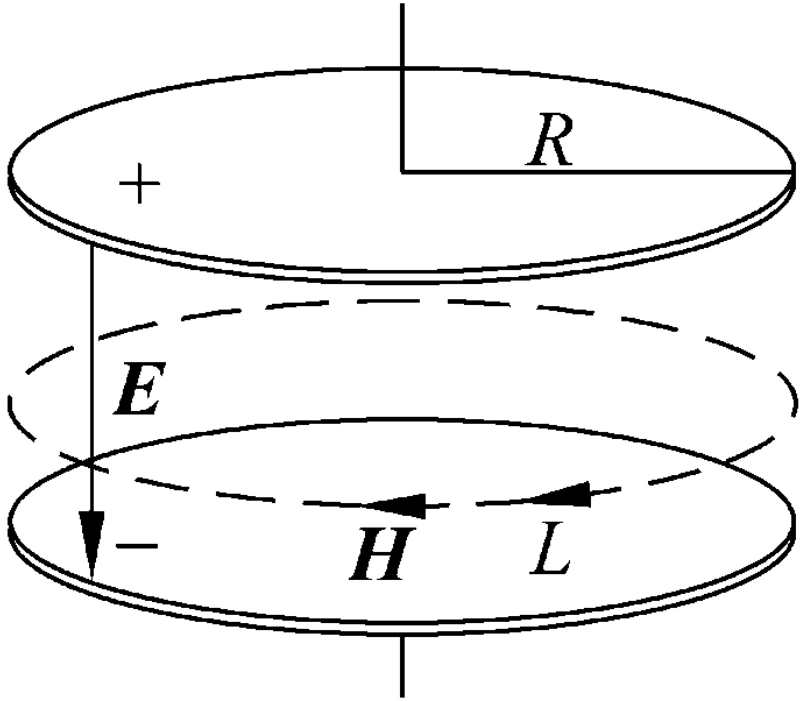
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{(L内)} I_{0i} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

——普遍情况下的安培环路定理

——表达电流和变化电场如何激发磁场

感生电场假设和位移电流假设，揭示了电场和磁场的统一性，为建立麦克斯韦方程组奠定了理论基础，这是麦克斯韦对电磁场理论所做出的最突出的贡献。

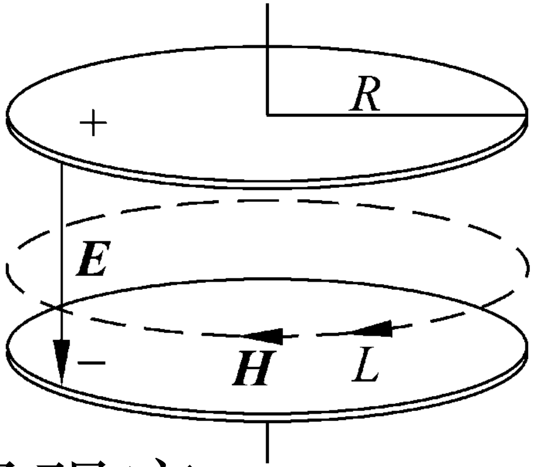
【例】圆形平行板真空电容器极板半径 R=0.1m，充电时$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 1.0\times10^{12}$ $\mathrm{V\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}}$。求：（1）电容器内的位移电流；（2）极板边缘处的磁场强度。



解 （1）电容器内的位移电流

$$I_d = \pi R^2 j_d$$

$$= \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = 0.28A$$



（2）极板边缘处的磁场强度

位移电流轴对称 → 磁场轴对称：

$$2\pi R H = I_d$$

$$H = \frac{I_d}{2\pi R} = 0.44\,A \cdot m^{-1}$$

方向与L的绕向相同。

21.2 麦克斯韦方程组

1. 方程组

积分形式　　　　微分形式

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \rho_0 \,\mathrm{d}V \qquad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

算符： $\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$

从积分形式如何得到微分形式?

例： $$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \rho_0 \,\mathrm{d}V \rightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$$

按高斯公式：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (\nabla\cdot D)\,\mathrm{d}V$$

其中S为空间区域V的边界曲面。 得

$$\iiint_V (\nabla\cdot D)\,\mathrm{d}V = \iiint_V \rho_0\,\mathrm{d}V$$

因V为任意区域，则

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$$

例：$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \rightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

按斯托克斯公式：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

其中L为曲面S的边界，有

$$\iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

因S为任意曲面 ，则有

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

在界面处场不连续，微分关系不能用了，应代之以边界关系。

2. 边界关系：

$\boldsymbol{D}_{1\mathrm{n}} = \boldsymbol{D}_{2\mathrm{n}}$（界面上无自由电荷）

$\boldsymbol{E}_{1\mathrm{t}} = \boldsymbol{E}_{2\mathrm{t}}$

$\boldsymbol{B}_{1\mathrm{n}} = \boldsymbol{B}_{2\mathrm{n}}$

$\boldsymbol{H}_{1\mathrm{t}} = \boldsymbol{H}_{2\mathrm{t}}$（界面上无传导电流）

3. 介质性质方程（各向同性线性介质）

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

$$\vec{H}=\vec{B}/\mu_0\mu_r$$

导体中的电流密度矢量：

$$\vec{j}_0=\sigma(\vec{E}+\vec{K})$$

E：稳恒电场，K：非静电力

4. 洛伦兹力公式

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$

按1～4，原则上可以解决各类经典电磁学问题。

【思考】如果在实验上发现磁单极子（磁荷），如何修改麦克斯韦方程组？

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 \, dV$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad ?$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad ?$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

21.3 电磁波

麦克斯韦于1865年预言了电磁波，1886年赫兹（Hertz） 用实验证实了电磁波的存在。

演示电磁波的发射和接收

1. 电磁波的波动方程

$$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

算符：$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

*电磁波波动方程的推导：

设在均匀无限大介质中

$$\rho_0 = 0,\ \vec{j}_0 = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

麦克斯韦方程组：

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 && && \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\
&\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} && && \nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\
&\nabla\cdot\vec{B} = 0 && \rightarrow && \nabla\cdot\vec{H} = 0 \\
&\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} && && \nabla\times\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

对式 $\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 关于时间求导：

$\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$，因 $\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$，有

$$-\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$$

用公式 $\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$，得

$$-\frac{1}{\mu}(\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E})=\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$$

因 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ ，则得 $\nabla^2\vec{E}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$

同理可证：$\nabla^2\vec{H}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$

一维平面电磁波的波动方程：

设： $\vec{E}=\vec{E}(x,t)$， $\vec{H}=\vec{H}(x,t)$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

波速： $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$

波函数：

$$\vec{E}(x,t)=\vec{E}_0\cos\omega\left(t\mp\frac{x}{v}\right)$$

$$\vec{H}(x,t)=\vec{H}_0\cos\omega\left(t\mp\frac{x}{v}\right)$$

2. 电磁波的主要性质

（1）波速：

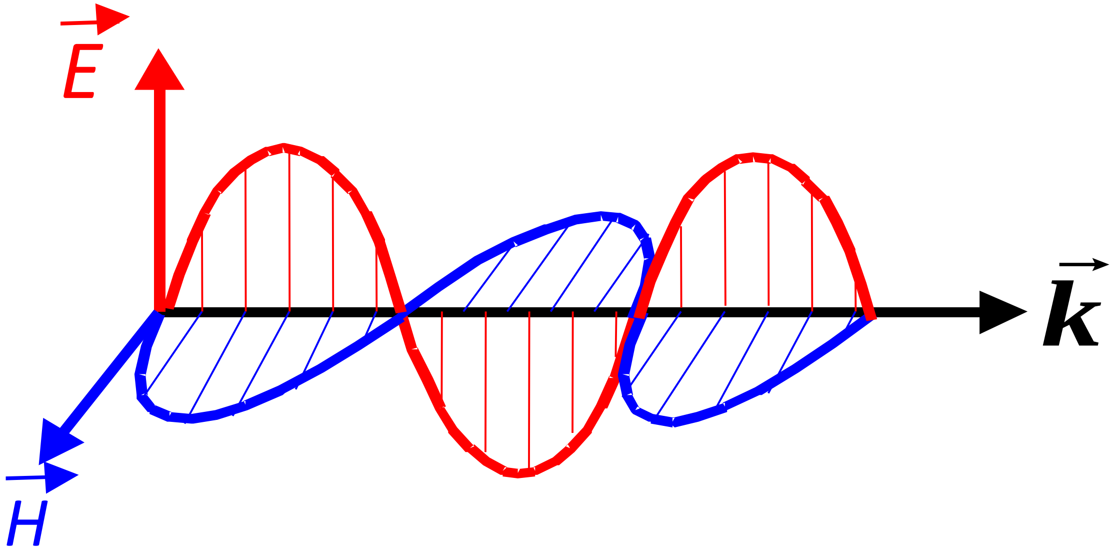
$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{n}$$

真空中的光速： $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

介质的折射率：

$$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\approx\sqrt{\varepsilon_r}$$ （非铁磁质）

波矢： $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}$



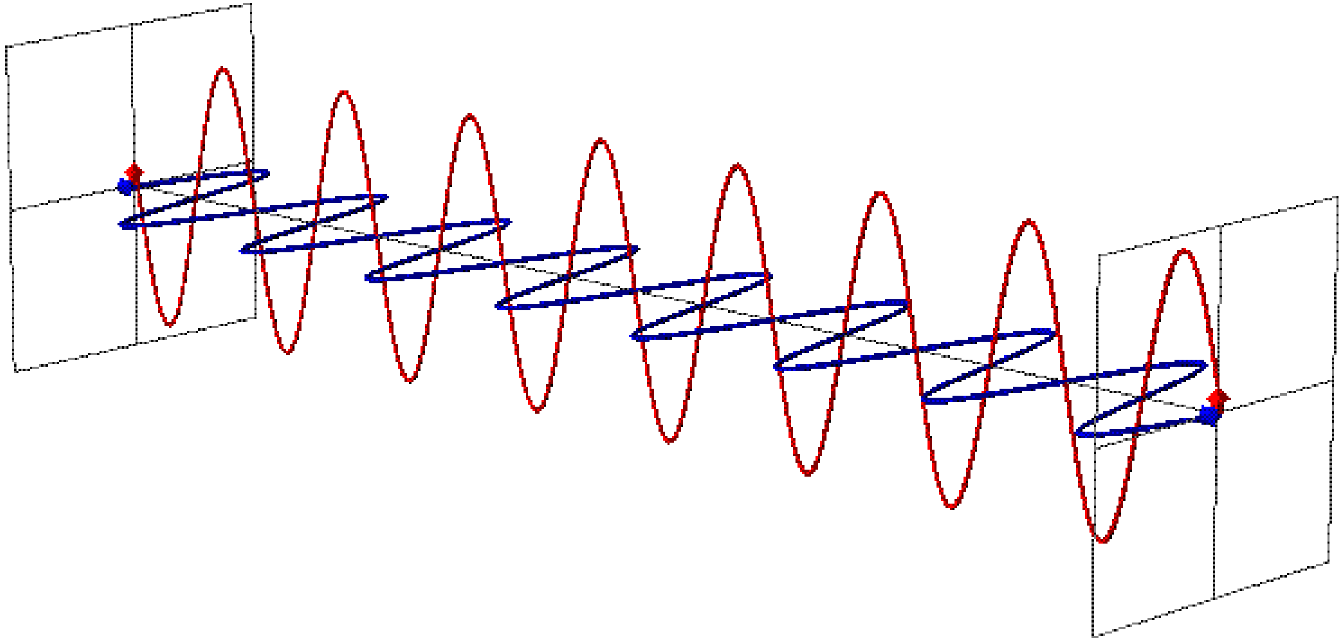
（2）电磁波是横波：$\vec{E}\perp\vec{k}$，$\vec{H}\perp\vec{k}$

（3）$\vec{E}$、$\vec{H}$、$\vec{k}$互相垂直，成右手螺旋关系。

（4）E、H 同相位

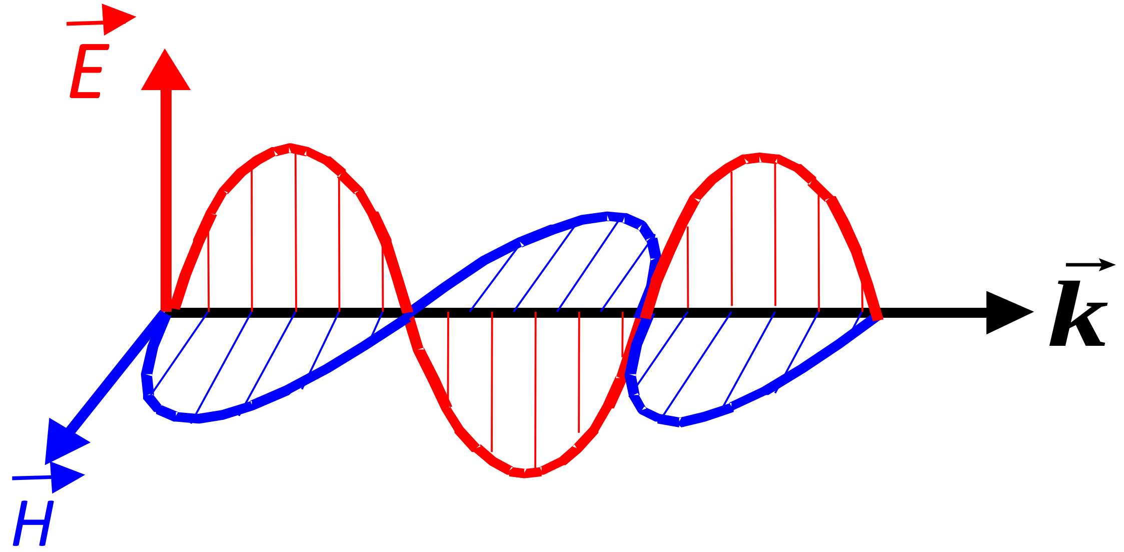
$$H=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E$$

电磁波



（电磁波演示和视频）

*21.4 坡印廷（Poynting）矢量



1. 电磁波的能量密度（energy density）

电磁场的能量密度： $w=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

对各向同性介质： $w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

对电磁波：

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E$$

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\mu \cdot \frac{\varepsilon}{\mu} E^2 = w_{\mathrm{e}}$$

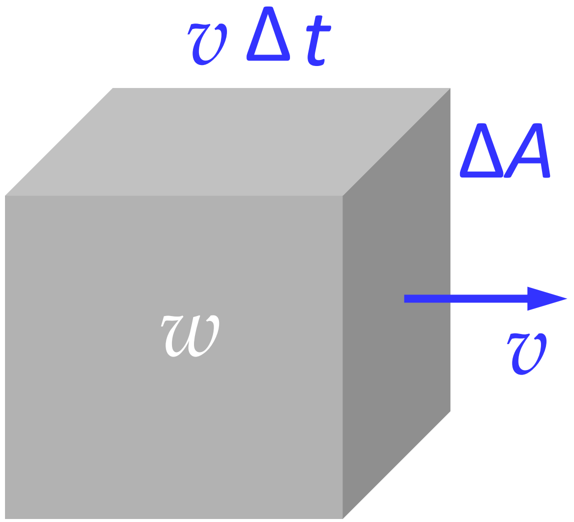
$$w = 2w_{\mathrm{e}} = \varepsilon E^2 = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, HE = \sqrt{\varepsilon\mu}\, HE$$

电磁波能量密度：

$$w = \frac{EH}{v}$$

2. 电磁波的能流密度 （energy flow density）

单位时间内，通过垂直波传播方向的单位面积的能量：



$$w = \frac{EH}{v}$$

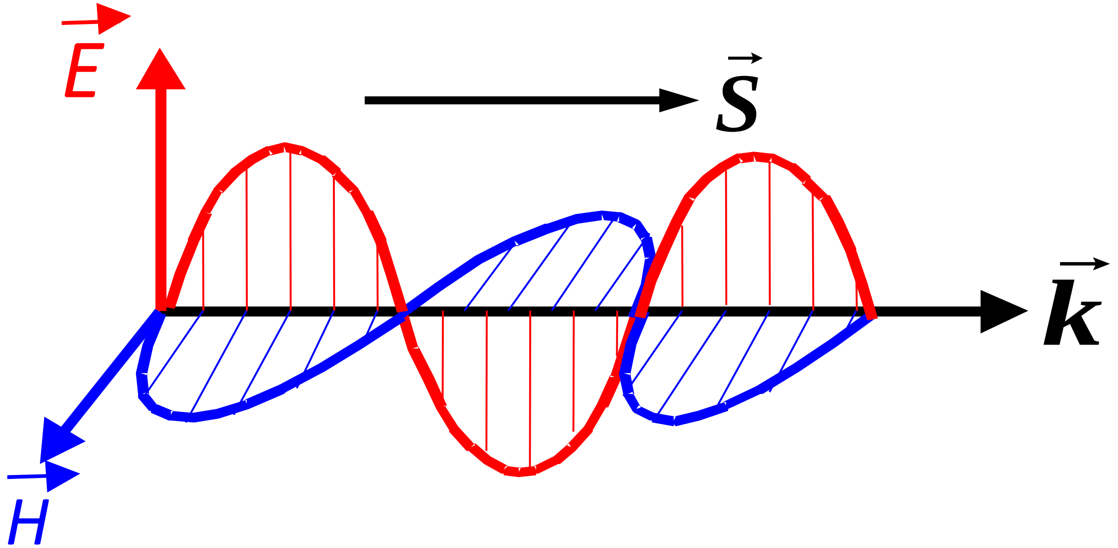
$$S = \frac{w \cdot v\Delta t\Delta A}{\Delta t\Delta A} = wv$$

$$= \frac{EH}{v}v = EH$$

能流密度：

$$S = EH$$

3. 能流密度矢量



能流密度矢量： $\vec{S}=S\frac{\vec{v}}{v}=\vec{E}\times\vec{H}$

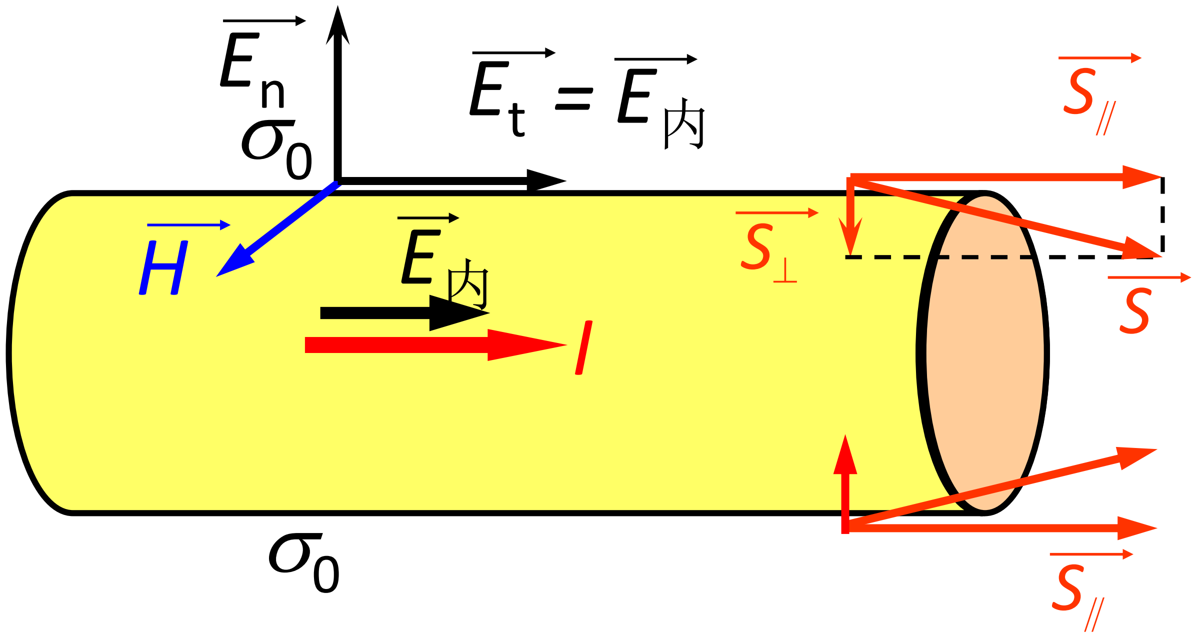
——坡印庭（Poynting）矢量

4. 电磁波的强度

——能流密度在一个周期内的平均值：

$$I=\bar{S}=\frac{1}{2}E_0H_0\propto E_0^2\text{或}H_0^2$$

【例】按场的观点看电磁能量沿导线的传输



$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E}_n \times \vec{H} + \vec{E}_t \times \vec{H} = \vec{S}_{//} + \vec{S}_\perp$$

$\vec{S}_{//} = \vec{E}_n \times \vec{H}$——沿导线由电源传向负载

$\vec{S}_\perp = \vec{E}_t \times \vec{H}$——沿导线径向由外向内传播，补偿导线焦耳热损耗。

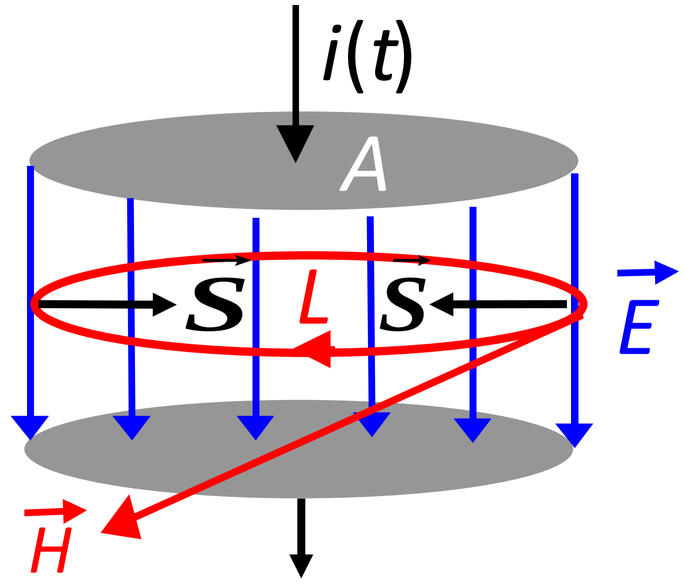
【思考】输电线表面为什么会有电荷？

【例】电容充电过程的能量传输

设 $\dfrac{\partial E}{\partial t} > 0$，则

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \varepsilon_0 \iint_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A} > 0$$



坡印庭矢量：

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

——能量从侧面流入电容器

【思考】放电过程能流的方向？

*21. 5 电磁波的动量

电磁波的能量密度：

$$w = \frac{EH}{v}$$

电磁波的质量密度：

$$m = \frac{w}{c^2} = \frac{EH}{c^2 v}$$

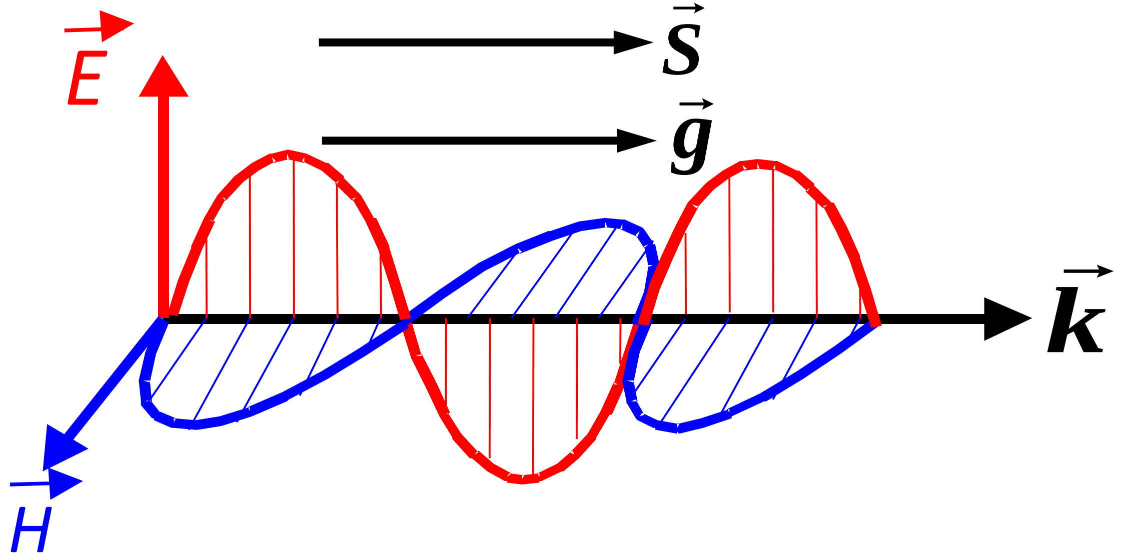
电磁波的动量密度（momentum density）：

$$\vec{g} = m\vec{v} = \frac{1}{c^2}\vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2}$$

能量： $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$

动量： $\vec{g}=\dfrac{\vec{S}}{c^2}=\dfrac{\vec{E}\times\vec{H}}{c^2}$



演示：电磁波有动量

*21.6 光压——辐射压强

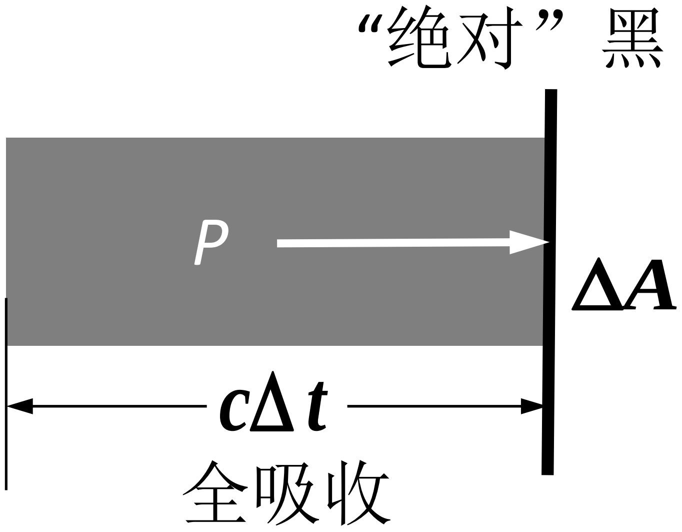
电磁波的动量密度：$g = \dfrac{EH}{c^2}$

• 垂直射到“绝对”黑表面

光压：

$$P = \frac{g \cdot c\Delta t\Delta A}{\Delta t\Delta A}$$

$$= gc = \frac{EH}{c}$$

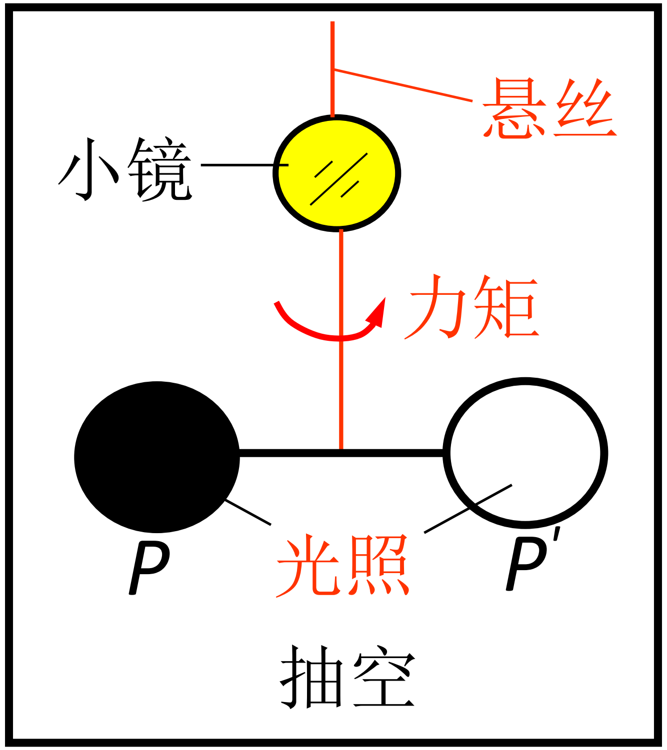


• 垂直射到完全反射表面：

$$P' = 2P = 2\frac{EH}{c}$$

你相信光有压强吗？

1899年列别捷夫首次测定了光压：



离100W灯泡1m

$$P \sim 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2}$$

太阳光压：10^{-6} N/m^2

大气压：10^{5} N/m^2

光具有能量和动量——“粒子性” ——光子