1、

原问题：

$$\min \quad c^T X$$
$$\text{s.t.} \quad AX \geq b$$

$\Rightarrow$ 规范型：

$$\min \quad c^T X^+ - c^T X^-$$
$$\text{s.t.} \quad (A \quad -A)\begin{pmatrix} X^+ \\ X^- \end{pmatrix} \geq b$$
$$X^+、X^- \geq 0$$

$\Rightarrow$ 标准型：

$$-\max \quad (-c^T \quad c^T \quad 0)\begin{pmatrix} X^+ \\ X^- \\ \tilde{X} \end{pmatrix}$$
$$\text{s.t.} \quad (A \quad -A \quad -I_m)\begin{pmatrix} X^+ \\ X^- \\ \tilde{X} \end{pmatrix} = b$$
$$X^+, X^-, \tilde{X} \geq 0$$

$\Rightarrow$ 标准型的对偶

$$-\min \quad b^T \tilde{Y}$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} A^T \\ -A^T \\ -I_m \end{pmatrix} \tilde{Y} \geq \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Y = -\tilde{Y}$

$$\max \quad b^T Y$$
$$\text{s.t.} \quad A^T Y = c$$
$$Y \geq 0$$

∴ 原问题的对偶规划为：

$$\max \quad 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 4y_4$$
$$\text{s.t.} \quad 5y_1 + y_2 + y_3 + 8y_4 = 10$$
$$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 = 10$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

2.

(1) 化为标准型：

$$\max \quad -(x_1+x_3)$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+2x_2+x_4=5$$

$$\frac{1}{2}x_2+x_3=3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

从 $X=(5, 0, 3, 0)^T$ 开始.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	2	0	1	5
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	3
	0	$\frac{5}{2}$	0	1	$z+8$

x_2进基，保留第一行 x_2：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$z+\frac{7}{4}$

∴ 已找到最优解 $(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, 0)^T$. [原问题中为 $(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{4})^T$]

最优目标函数值为 $-\frac{7}{4}$

∴ $\min(x_1+x_2) = \frac{7}{4}$

(2) $\min \ x_1 + x_3$

s.t. $-x_1 - 2x_2 \geq -5$

$\frac{1}{2}x_2 + x_3 = 3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\Longrightarrow$

$\max \ -5y_1 + 3y_2$

s.t. $-y_1 \leq 1$

$-2y_1 + \frac{1}{2}y_2 \leq 0$

$y_2 \leq 1$

$y_1 \geq 0$

(3) P的互补松弛条件：

$\hat{x}_1 \cdot (-y_1 - 1) = 0$

$\hat{x}_2 \cdot (-2y_1 + \frac{1}{2}y_2) = 0$

$\hat{x}_3 \cdot (y_2 - 1) = 0$

代入 $\hat{X} = (0, \frac{5}{2}, \frac{7}{4})^T$ 得：

$$\begin{cases} -2y_1 + \frac{1}{2}y_2 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{4} \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

∴ 对偶问题最优解为 $Y = (\frac{1}{4}, 1)^T$，

最优目标函数值为 $\frac{7}{4}$

3.

(1) 对偶问题：

$$\max \quad b_1 y_1 + y_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} y_1 + y_2 &\le 5 \\ -y_1 + y_2 &\le 0 \\ 6y_1 + 2y_2 &\le 21 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(2) 由互补松弛性条件：

$$\hat{x}^T(A^T\hat{y} - c) = 0 \ ,$$

即：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - 5) = 0 \\ \frac{1}{4}(6y_1 + 2y_2 - 21) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{11}{4} \\ y_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\hat{Y}^T(b - A\hat{x}) = 0$$

即

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{4} - b_1 = 0 \\ \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 2$$

∴ 最优解 $(y_1, y_2) = (\frac{11}{4}, \frac{9}{4})$，最优函数值为 $\frac{31}{4}$

4. 问题A的对偶：

$$\min \quad b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3$$

$$\text{s.t.} \quad a_{11}y_1+a_{21}y_2+a_{31}y_3 \geq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+a_{3n}y_3 \geq c_n$$

问题B的对偶

$$\min \quad k_1b_1y_1+k_2b_2y_2+(b_3+k_3b_1)y_3$$

$$\text{s.t.} \quad k_1a_{11}y_1+k_2a_{21}y_2+(a_{31}+k_3a_{11})y_3 \geq c_1$$

$$\vdots$$

$$k_1a_{1n}y_1+k_2a_{2n}y_2+(a_{3n}+k_3a_{1n})y_3 \geq c_n$$

令 $z_1=k_1y_1+k_3y_3$, $z_2=k_2y_2$, $z_3=y_3$

则问题B的对偶变为：

$$\min \quad b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3$$

$$\text{s.t.} \quad a_{11}z_1+a_{21}z_2+a_{31}z_3 \geq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}z_1+a_{2n}z_2+a_{3n}z_3 \geq c_n$$

这与问题A的对偶是一致的，故：

$$\begin{cases} y_1 = k_1\hat{y}_1+k_3\hat{y}_3 \\ y_2 = k_2\hat{y}_2 \\ y_3 = \hat{y}_3 \end{cases}$$