第 5 章作业答案

1

1.1

广义最优超平面的原问题

$$\min_{\boldsymbol{w},b,\boldsymbol{\xi}} \Phi(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

$$\text{s.t.} \quad y_i(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}+b) \geq 1-\xi_i, \quad \xi_i \geq 0, \quad i=1,2,\ldots,n$$

拉格朗日函数

$$\min_{\boldsymbol{w},b,\boldsymbol{\xi}}\max_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} L(\boldsymbol{w},b,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y_i(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}+b)-1+\xi_i) - \sum_{i=1}^{n}\beta_i\xi_i$$

对其求导

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \boldsymbol{x}_i = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\xi}} = C - \sum_{i=1}^{n}(C-\alpha_i-\beta_i) = 0$$

得到对偶问题

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}} Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j \boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq C \quad i=1,2,\ldots,n$$

1.2

考虑增广向量形式，$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{d\times 1}$，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，$y = \mathrm{sign}(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})$

当 $n = d+1$ 时，$\mathrm{sign}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{y}$，只要 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$ 可逆，就存在 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{y}$ 可以正确分类，所以可以打散 $d+1$ 个点。

当 $n = d+2$ 时，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{d+2}$ 之间一定线性相关，不妨设 $\boldsymbol{x}_{d+2} = \sum_{i=1}^{d+1} a_i\boldsymbol{x}_i$，则 $y_{d+2} = \mathrm{sign}(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}_{d+2}) = \mathrm{sign}(\boldsymbol{w}^T\sum_{i=1}^{d+1} a_i\boldsymbol{x}_i)$ 是确定的值，不能任意给定标签，所以不能打散 $d+2$ 个点。

综上，VC 维是 $d+1$。