第三章. Poisson过程与Poisson分布.

§1. 泊松分布与泊松过程

定义： 称随机变量 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 分布，若

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$

并记为 $X\sim P(\lambda)$（或 $X\sim Poisson_\lambda$）。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k}{k!}=e^D \quad \leftarrow \text{Talor展开}$$

性质 1：（Poisson 定理） 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p_n)$（$0<p_n<1$ 依赖于 n），且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda>0$，则

↗证明见教材 P104.

$$\lim_{n\to\infty}P(X=k)=\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n{}^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

Poisson 近似定理说明了，Poisson 分布的广泛存在性的另一个理由。

性质 2： $X\sim P(\lambda)\Rightarrow EX=DX=\lambda$

性质 3：（Poisson 分布的可加性） 设相互独立随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 服从参数分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 的 Poisson 分布，则 $S_n=\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 服从参数为 $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i$ 的 Poisson 分布。

（直观理解：考虑 Poisson 过程）

性质 4：(Poisson 分布在随机选择下的不变性) 设 $X\sim P(\lambda)$（X 表示某一群体的个数），从此 X 个个体中逐个独立地以保留概率 p 筛选得到 Y 个个体，则 $Y\sim P(\lambda p)$。

直观例子： 假设某段时间里来百货公司的顾客数服从参数为 λ 的 Poisson 分布，而在百货公司里每个顾客购买电视机的概率为 p，且每个顾客是否购买电视机是独立的，求在这段时间内，百货公司内购买电视机的人数分布？

$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{\infty}P(Y=k\mid X=n)P(X=n)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}\cdot\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{q^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda q}=\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$$

1. 定义

定义： 一个整数值随机过程 $N=\{N_t,t\ge 0\}$ 满足下述三个条件，就称它为**强度为 λ 的 Poisson 过程**：

(1) $N_t=0$；

(2) N_t 是独立增量过程（即对任意的 $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$，N_t 在区间 $(t_i,t_{i+1}]$ 上的增量 $N_{t_{i+1}}-N_{t_i}$ 是相互独立的，$i=1,2,\cdots n-1$）

(3) 对任意 $t>0,s\ge 0$ 增量 $N_{s+t}-N_s\sim P(\lambda t)$，即

$$P(N_{s+t}-N_s=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$P(N_{t+\Delta t}-N_t\ge 2)=o(\Delta t)$$

$$P(N_{t+\Delta t}-N_t=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$P(\omega:N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)\ge 2)=o(h)$，而恰好发生一次理赔的概率近似地与这段时间的长度 h 成正比，即 $P(\omega:N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=1)=\lambda h+o(h)$. 因此，在$(t,\ t+h]$内无理赔发生的概率 $P(\omega:N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=0)=1-(\lambda h+o(h))$.

这里的条件 1）与 2）分别就是我们在上一章中所提到的独立增量性与时齐性，而条件 3）称为**普通性**。即 N_t 是一个时齐的独立增量过程，从而要知道其有限维分布，只需要求其一维分布 $P(N_t=k)$，记 $p_k(t)=P(\omega:N_t(\omega)=k)$.

对于 $k\ge 2$，我们有

$$\begin{aligned}p_k(t+h)&=P(\omega:N_{t+h}(\omega)=k)\\&=P(\omega:N_t(\omega)=k,N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=0)\\&\quad+P(\omega:N_t(\omega)=k-1,N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=1)\\&\quad+P(\omega:N_t(\omega)=k-m,N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=m\ge 2).\end{aligned}$$

由上面的条件 1) —3)，上式应等于（注意 $o(h)$ 的线性组合仍是 $o(h)$）

$$p_k(t)(1-\lambda h+o(h))+p_{k-1}(t)(\lambda h+o(h))+o(h).$$

通过检查上述过程可知，上式对 $k=1$ 仍然成立，从而我们得到

$$p_k(t+h)-p_k(t)=-\lambda hp_k(t)+\lambda hp_{k-1}(t)+o(h).\quad(k\ge 1)$$

在上式等号两边同除以 h，并令 $h\to 0$，就得到如下的无穷个常微分方程组

$$p_k'(t)=-\lambda p_k(t)+\lambda p_{k-1}(t)\qquad(k\ge 1)\qquad(3.1)$$

类似地，对 $k=0$ 我们还有 $\quad p_0(t+h)-p_0(t)=-\lambda p_0(t)h+o(h))$

即

$$p_0'(t)=-\lambda p_0(t).\qquad(3.2)$$

由 N_t 的定义，有 $N_0=0$，即我们有初始条件 $p_0(0)=1,p_k(0)=0$. 在此初始条件下解常微分方程组 (3.2)，就得到

$$p_0(t)=e^{-\lambda t}.$$

再由(3.1)式我们有 $\quad p_1'(t)=-\lambda p_1(t)+\lambda e^{-\lambda t}$

于是可解得 $\quad p_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$，

进一步又由(3.1)式得

$$p_2'(t)=-\lambda p_2(t)+\lambda^2te^{-\lambda t}.$$

并解得 $\quad p_2(t)=\dfrac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}.$

一般地，用数学归纳法，由(3.1) 式得到

$$p_k'(t)=-\lambda p_k(t)+\lambda p_{k-1}(t)=-\lambda p_k(t)+\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t},$$

由此解得

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.\qquad(3.3)$$

这样我们就得到了随机变量 N_t 的分布:

$$P(\omega:N_t(\omega)=k)=p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

即

$$N_t\sim\begin{pmatrix}0&1&\cdots&n&\cdots\\e^{-\lambda t}&\lambda e^{-\lambda t}&\cdots&\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}&\cdots\end{pmatrix}.$$

（上述从讲稿中copy，第6周讲稿相应部分讲得很清楚）.

下面我们用另一种方法，称为**矩母函数方法**，以一次性地推导出全部 $p_k(t)$ 的表达式，引入一个参数 z，并定义

$$M(t,z)\stackrel{\Delta}{=}Ee^{zN_t}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{zk}p_k(t),$$

它称为 N_t 的**矩母函数**．那么我们有

$$\frac{\partial M(t,z)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{zk}p'_k(t)=-\lambda\sum_{k=0}^{\infty}e^{zk}p_k(t)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}e^{zk}p_{k-1}(t)$$

$$=-\lambda M(t,z)+\lambda e^{z}M(t,z)=\lambda(e^{z}-1)M(t,z).$$

这是一个 z 为参数的关于自变量 t 的常系数常微分方程，且满足初始条件 $M(0,z)=p_0(0)=1$．此方程的解为

$$M(t,z)=e^{\lambda t(e^{z}-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}e^{zk}.$$

按矩母函数的定义，便得到表达式

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

这种矩母函数方法，适用于只取自然数值的随机变量的分布.

§2. Poisson 过程性质.

Poisson 过程:

(1) $N_t=0$;

(2) N_t 是独立增量过程（即对任意的 $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$，N_t 在区间 $(t_i,t_{i+1}]$ 上的增量 $N_{t_{i+1}}-N_{t_i}$ 是相互独立的，$i=1,2,\cdots n-1$）

(3) 对任意 $t>0,s\ge 0$ 增量 $N_{s+t}-N_s\sim P(\lambda t)$，即

$$P(N_{s+t}-N_s=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

结论： 数学定义 ⇔ 物理定义

性质：

1° $\{N_t:t\ge 0\}$ 为时齐独立增量过程，且 $N_t\sim P(\lambda t)$.

从而 $EN_t=\lambda t$ $\quad DN_t=\lambda t$ ← 证明见 P_{102}

$Cov(N_s,N_t)=\underbrace{\lambda(s\wedge t)}_{\text{小的那个}}$ ← 用概念推一下即可.

2° 有限维分布. $\forall t_1\le t_2\le\cdots\le t_n$

$P(N_{t_1}=k_1,\cdots,N_{t_n}=k_n)$.

$=P(N_{t_1}-N_0=k_1-k_0)P(N_2-N_1=k_2-k_1)\cdots$

$$=\frac{\lambda^{k_n}e^{-\lambda t_n}t_1^{k_1}(t_2-t_1)^{k_2-k_1}\cdots(t_n-t_{n-1})^{k_n-k_{n-1}}}{k_1!(k_2-k_1)!\cdots(k_n-k_{n-1})!}$$

3° $\{N_t:t\ge 0\}$ 是 连续时间 Markov 过程 ↪ 历史无关

$p(j|i)=P(N_t=j\mid N_s=i)=P(N_t-N_s=j-i)\qquad t>s$

$=\frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}e^{-\lambda(t-s)}}{(j-i)!}$

4°(可加性) $\{N_t^{(i)},t\ge 0\}$ 为 $\lambda>0$ — Poisson 相互独立.

$\{\sum_{i=1}^{n}N_t^{(i)}:t\ge 0\}$. $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i>0$.

5° 条件 同④

$N_t^{(1)}\mid N_t^{(1)}+N_t^{(2)}=n\sim B(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$

$P(N_t^{(1)}=k\mid N_t^{(1)}+N_t^{(2)}=n)=\frac{P(N_t^{(1)}=k)P(N_t^{(2)}=n-k)}{P(N_t^{(1)}+N_t^{(2)}=n)}=C_n^k(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k}$

6° 与二项分布的联系

$N_s\mid N_t=n\sim B(n,\frac{s}{t})$.

$P(N_s=k\mid N_t=n)=\frac{P(N_s=k)P(N_t-N_s=n-k)}{P(N_t=n)}$

$$=\frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}$$

$=C_n^k(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k}$

7° 分流性

$\{N_t^p:t\ge 0\}$

$\{N_t^q:t\ge 0\}$

$P(N_t^p=m,N_t^q=n)$

$=P(N_t^p=m,N_t^q=n\mid N_t=m+n)P(N_t=m+n)$

$=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}p^m q^n\frac{(\lambda t)^{m+n}e^{-\lambda t}}{(m+n)!}$

$=\frac{(\lambda pt)^m e^{-\lambda pt}}{m!}\frac{(\lambda qt)^n e^{-\lambda qt}}{n!}$

$=P(N_t^p=m)P(N_t^q=n)$

* 复合 Poisson 过程

$\{N_t: t\geq 0\}$ — λ — Poisson 过程.

$X_i \overset{iid}{\sim} F(x)$ $\{X_i\}$ 与 $\{N_t: t\geq 0\}$ 独立.

Def $Y=\begin{cases}0 & N_t=0 \\ \sum_{i=1}^{N_t} X_i, & \end{cases}$ 则 $\{Y_t, t\geq 0\}$ 为复合泊松过程.

公司盈余: $U_t = u_0 + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$

Thm. $\{Y_t: t\geq 0\}$ 为时齐独立增量过程.

且. $M_{Y_t}(u) = Ee^{uY_t}$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} E\left(e^{u\sum_{i=1}^{N_t} X_i} \,\middle|\, \underbrace{N_t=n}_{\text{独立.}}\right) P(N_t=n)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(M_{X_i}(u)\right)^n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda t M_{X_i}(u)]^{\lambda}}{n!}$$

$$= e^{\lambda t[M_{X_i}(u)-1]}$$

$\Rightarrow EY_t = \lambda t EX_1$

$DY_t = \lambda t E(X_i^2)$

泊松过程是一类特殊的更新过程.

其时间间隔服从 iid 的指数分布.