运筹学第八次作业参考答案（20230426）

1. $|x|^3$是否是光滑的凸函数？ x为 n 维实数向量.

解 1：

$$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, |x|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=|x|^3=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial|x|}{\partial x_i}=\frac{x_i}{|x|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=3x_i|x|$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=3\left(|x|+\frac{x_i^2}{|x|}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}=\frac{3x_i x_j}{|x|}, i\neq j$$

$$\nabla^2 f(x)=3|x|I+3xx^T\geq 0$$

故$f(x)$为凸函数。

已求出$f(x)$的一阶与二阶梯度均连续，故$f(x)$为一二阶光滑的凸函数。然而$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}$在 0 点的左右极限不连续，因此三阶不光滑。

解 2：

可根据复合函数保凸性分析。

由范数的凸性知，$\forall x1,x2\in\mathbb{R}^n,\lambda\in[0,1]$

$$|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2|\leq\lambda|x_1|+(1-\lambda)|x_2|$$

又知$x^3,x\geq 0$为凸函数且单调不减，故

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2|^3$$
$$\leq(\lambda|x_1|+(1-\lambda)|x_2|)^3\leq\lambda|x_1|^3+(1-\lambda)|x_2|^3$$
$$=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

故$f(x)=|x|^3$为凸函数

2. 判别下列函数哪些是凸函数，哪些是凹函数，哪些是非凸非凹函数，并简述理由。

a) 函数$f(x_1,x_2)=x_1x_2$，定义域为$R_{++}^2=\{(x_1,x_2)\in R^2|x_1>0,x_2>0\}$；

b) 函数$f(x_1,x_2)=60-10x_1-4x_2+x_1^2+x_2^2-x_1x_2$，定义域为$R^2$；

c) 函数$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 10x_1 - 10x_2$，定义域为$R^2$；

d) 函数$f(\boldsymbol{x}) = \min\limits_{1 \le i \le m}\{\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} + b_i\}$，定义域为$R^n$，其中$\boldsymbol{a}_i^T \in R^n, b_i \in R$为常量；

e) 函数$f(\boldsymbol{x}) = \max\limits_{1 \le i \le m}\{\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} + b_i\}$，定义域为$R^n$，其中$\boldsymbol{a}_i^T \in R^n, b_i \in R$为常量。

解：

(a) 非凸非凹函数。

首先定义域为凸集，Hessian 矩阵 $\boldsymbol{H} = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，其特征值为 1 和-1，属于不定矩阵，故为非凸非凹函数。

(b) 凸函数。

首先定义域为凸集，Hessian 矩阵 $\boldsymbol{H} = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$，故为凸函数。

(c) 凹函数。

首先定义域为凸集，Hessian 矩阵$\boldsymbol{H} = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \preccurlyeq 0$，故为凹函数。

(d) 凹函数。

首先定义域为凸集，对于最小值函数$h(\boldsymbol{x}) = \min\limits_i x_i$，对任意$0 \le \theta \le 1$，

$$
\begin{aligned}
h(\theta\boldsymbol{x} + (1-\theta)\boldsymbol{y}) &= \min_i\{\theta x_i + (1-\theta)y_i\} \\
&\ge \theta \min_i x_i + (1-\theta)\min_i y_i \\
&= \theta h(\boldsymbol{x}) + (1-\theta)h(\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

由定义知$h(\boldsymbol{x}) = \min\limits_i x_i$为凹函数。

令$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^T \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$，则$f(\boldsymbol{x}) = \min\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\}$为复合仿射映射（保外层函数的凹凸性），故为凹函数。

(e) 凸函数。

首先定义域为凸集，令$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^T \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$，则$f(\boldsymbol{x}) = \max\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\}$。由于$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$为仿射函数，参照(d)的证明知最大值函数为凸函数，复合仿射映射保凸，故为凸函数。

3. 用斐波那契法求函数

$$f(x) = -3\boldsymbol{x}^2 + 21.6\boldsymbol{x} + 1$$

在区间[0,25]上的极大点和极大值，要求缩短后区间长度不大于原区间长度的 8%.

解：

$f(x)$在$[0,\ 25]$区间上单峰函数，取$\delta = 25\times 8\% = 2$，因为$\frac{b-a}{\delta} = \frac{25}{2} = 12.5$, $F_5 = 8,\ F_6 = 13$，所以取$n = 6$。

令$a_0 = 0, b_0 = 25$

$k = 1$ ， $t_1 = a_0 + \frac{F_5}{F_6}(b_0 - a_0) = \frac{200}{13}$，$t_1' = b_0 - \frac{F_5}{F_6}(b_0 - a_0) = \frac{125}{13}$ ， 因 为 $f(t_1') > f(t_1)$，所以$a_1 = a_0 = 0,\ b_1 = t_1 = \frac{200}{13}$;

$k = 2$，$t_2 = t_1' = \frac{125}{13}$，$t_2' = b_1 - \frac{F_4}{F_5}(b_1 - a_1) = \frac{75}{13}$，因为$f(t_2') > f(t_2)$，所以 $a_2 = a_1 = 0,\ b_2 = t_2 = \frac{125}{13}$;

$k = 3$，$t_3 = t_2' = \frac{75}{13}$，$t_3' = b_2 - \frac{F_3}{F_4}(b_2 - a_2) = \frac{50}{13}$，因为$f(t_3') > f(t_3)$，所以 $a_3 = a_2 = 0,\ b_3 = t_3 = \frac{75}{13}$;

$k = 4$，$t_4 = t_3' = \frac{50}{13}$，$t_4' = b_3 - \frac{F_2}{F_3}(b_3 - a_3) = \frac{25}{13}$，因为$f(t_4') < f(t_4)$，所以 $a_4 = t_4' = \frac{25}{13}$，$b_4 = b_3 = \frac{75}{13}$;

$k = 5$, $t_5' = t_4 = \frac{50}{13}$，$t_5 = a_4 + \frac{F_1}{F_2}(b_4 - a_4) + \epsilon$, 因为$f(t_5') > f(t_5)$, 所以$a_5 = a_4 = \frac{25}{13}$，$b_5 = t_5 = \frac{50}{13}$;

所以局部极大值点$x^* = 0.5(a_5 + b_5) = \frac{75}{26}$，$f(x^*) = \frac{9011}{235} \approx 38.3447$

4. 用黄金分割法（0.618 法）重新求解题 3，并将计算过程同斐波那契法进行比较。

解：

$f(x)$在$[0,\ 25]$区间上单峰函数，取$\delta = 25\times 8\% = 2$，因为$0.618^6 < \frac{\delta}{b-a} < 0.618^5$，所以取$n = 7$。

令$a_0 = 0, b_0 = 25$

$k = 1$ ， $t_1 = a_0 + 0.618(b_0 - a_0) = 15.450$，$t_1' = b_0 - 0.618(b_0 - a_0) =$

9.550，因为$f(t_1') > f(t_1)$，所以$a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = t_1 = 15.450$；

$k = 2$， $t_2 = t_1' = 9.550$, $t_2' = b_1 - 0.618(b_1 - a_1) = 5.902$， 因 为$f(t_2') > f(t_2)$，所以$a_2 = a_1 = 0$, $b_2 = t_2 = 9.550$；

$k = 3$， $t_3 = t_2' = 5.902$, $t_3' = b_2 - 0.618(b_2 - a_2) = 3.648$， 因 为$f(t_3') > f(t_3)$，所以$a_3 = a_2 = 0$, $b_3 = t_3 = 5.902$；

$k = 4$， $t_4 = t_3' = 3.648$, $t_4' = b_3 - 0.618(b_3 - a_3) = 2.255$， 因 为$f(t_4') < f(t_4)$，所以$a_4 = t_4' = 2.255$, $b_4 = b_3 = 5.902$；

$k = 5$， $t_5 = a_4 + 0.618(b_4 - a_4) = 4.509$, $t_5' = t_4 = 3.648$， 因 为$f(t_5') > f(t_5)$，所以$a_5 = a_4 = 2.255$, $b_5 = t_5 = 4.509$；

$k = 6$， $t_6 = t_5' = 3.648$, $t_6' = b_5 - 0.618(b_5 - a_5) = 3.116$， 因 为$f(t_6') < f(t_6)$，所以$a_6 = t_6' = 3.116$, $b_6 = b_5 = 4.509$；

所以局部极大值点$x^* = 0.5(a_6 + b_6) = 3.813$, $f(x^*) = 39.744$

比较：黄金分割法比斐波那契法多一次迭代，是斐波那契法中分数数列的极限替代每个分数值的方法，不用引入无穷小量来分析。