人工智能基础

作业 4

1. 求取下列各式的**前束范式**，并给出求取过程。

(1) $\forall x\left\{P(x)\Rightarrow\left[\forall y\left(P(y)\Rightarrow P\big(f(x,y)\big)\right)\wedge\neg\forall y\big(Q(x,y)\Rightarrow P(y)\big)\right]\right\}$

(2) $\forall x\, P(x)\Rightarrow\{Q(y)\Rightarrow\neg[\exists y\, R(y)\Rightarrow\forall x\, S(x)]\}$

(3) $\{\forall x[P(x)\Rightarrow\exists y\, Q(x,y)]\}\vee[\forall z\, R(z)]$

1、(1) $\forall x\{P(x)\Rightarrow[\forall y(P(y)\Rightarrow P(f(x,y)))\wedge\neg\forall y(Q(x,y)\Rightarrow P(y))]\}$

变量换名 $\equiv \forall x\{P(x)\Rightarrow[\forall y(P(y)\Rightarrow P(f(x,y)))\wedge\neg\forall z(Q(x,z)\Rightarrow P(z))]\}$

否定深入 $\equiv \forall x\{P(x)\Rightarrow[\forall y(P(y)\Rightarrow P(f(x,y)))\wedge\exists z\neg(Q(x,z)\Rightarrow P(z))]\}$

$(\forall y F(y))\wedge Q$

辖域扩张 $\equiv \forall x\{P(x)\Rightarrow\forall y[(P(y)\Rightarrow P(f(x,y)))\wedge\exists z\neg(Q(x,z)\Rightarrow P(z))]\}$

$Q\wedge\exists z F(z)$

$\equiv \forall x\{P(x)\Rightarrow\forall y\exists z[(P(y)\Rightarrow P(f(x,y)))\wedge\neg(Q(x,z)\Rightarrow P(z))]\}$

$\equiv \forall x\forall y\exists z\{P(x)\Rightarrow[(P(y)\Rightarrow P(f(x,y)))\wedge\neg(Q(x,z)\Rightarrow P(z))]\}$

(2) $\forall x\, P(x)\Rightarrow\{Q(y)\Rightarrow\neg[\exists y\, R(y)\Rightarrow\forall x\, S(x)]\}$

变量换名 $\equiv \forall x\, P(x)\Rightarrow\{Q(y)\Rightarrow\neg[\underbrace{\exists z\, R(z)\Rightarrow\forall w\, S(w)}_{\equiv\ \neg\exists z R(z)\ \vee\ \forall w S(w)}]\}$

否定深入 $\equiv \forall x\, P(x)\Rightarrow\{Q(y)\Rightarrow[\exists z\, R(z)\wedge\underbrace{\neg\forall w\, S(w)}_{\equiv\ \exists w\neg S(w)}]\}$

$\equiv \forall x P(x)\Rightarrow\{Q(y)\Rightarrow\exists z\exists w[R(z)\wedge\neg S(w)]\}$

辖域扩张 $\equiv \forall x P(x)\Rightarrow\exists z\exists w\{Q(y)\Rightarrow[R(z)\wedge\neg S(w)]\}$

$((\forall x P(x))\Rightarrow Q$

$\exists x\left(P(x)\Rightarrow\exists z\exists w\{Q(y)\Rightarrow[R(z)\wedge\neg S(w)]\}\right)$

$\equiv \exists x\exists z\exists w\left(P(x)\Rightarrow\{Q(y)\Rightarrow[R(z)\wedge\neg S(w)]\}\right)$

1. (3) $\{\forall x[P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(x,y)]\} \vee [\forall z\, R(z)]$

$\forall x$辖域扩张

$$\forall x\{\underbrace{[P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(x,y)]}_{\equiv\ \exists y\ P(x) \Rightarrow Q(x,y)} \vee [\forall z\, R(z)]\}$$

$\exists y$辖域扩张

$$\forall x\, \exists y\{[P(x) \Rightarrow Q(x,y)] \vee [\forall z\, R(z)]\}$$

$\forall z$辖域扩张

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\{[P(x) \Rightarrow Q(x,y)] \vee R(z)\}$$

2. 转化下列语句为谓词逻辑公式，并说明符号含义。

(1) 任何两个实数之间都有一个实数。

(2) 尽管有人爱吃西瓜，但不是所有人都爱吃西瓜。

(3) 所有飞机都比某些汽车开得快。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, x < z \wedge z < y$

(2) $C(x)$为爱吃西瓜，$\forall x \in D$, $\exists x C(x) \wedge \exists x \neg C(x)$

(3) $P(x)$为是飞机，$C(x)$为是汽车，$F(x,y)$为 x 比 y 快，$\forall x[P(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge F(x,y))]$

3. 证明。

(1) $\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x) \vDash \forall x\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$

(2) $\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \vDash [\forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)]$

(3) $\neg\exists x \exists y[P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x,y)] \vDash \forall x \forall y[P(x) \wedge \mathrm{Q(y)} \Rightarrow \neg R(x,y)]$

(1)

$$\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x) \models \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

根据归结原理证明如下:

$$\begin{aligned} &(\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)) \wedge \neg\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ \equiv&(\exists x P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)) \wedge \exists z \neg(P(z) \Rightarrow Q(z)) \\ \equiv&\forall x \forall y(P(x) \Rightarrow Q(y)) \wedge \exists z \neg(P(z) \Rightarrow Q(z)) \end{aligned}$$

用置换$\theta\{z/c\}$消去存在量词得到

$$\forall x \forall y(P(x) \Rightarrow Q(y)) \wedge \neg(P(c) \Rightarrow Q(c))$$

用置换$\theta\{x/c, y/c\}$消去全程量词得到

$$(P(c) \Rightarrow Q(c)) \wedge \neg(P(c) \Rightarrow Q(c))$$

归结子句得到:

$$(P(c) \Rightarrow Q(c)) \wedge \neg(P(c) \Rightarrow Q(c)) \models \square$$

根据归结原理原命题证明完毕。

(2)

$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \models [\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)]$$

根据归结原理证明如下:

$$\begin{aligned} &\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge \neg[\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)] \\ \equiv&\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge \neg[\forall y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z)] \\ \equiv&\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge \neg\exists y \forall z[P(y) \Rightarrow Q(z)] \\ \equiv&\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge \exists z \forall y \neg[P(y) \Rightarrow Q(z)] \end{aligned}$$

用置换$\theta\{z/c\}$消去存在量词:

$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge \forall y \neg[P(y) \Rightarrow Q(c)]$$

用置换$\theta\{x/c, y/c\}$消去全称量词:

$$[P(c) \Rightarrow Q(c)] \wedge \neg[P(c) \Rightarrow Q(c)]$$

归结子句得到

$$[P(c) \Rightarrow Q(c)] \wedge \neg[P(c) \Rightarrow Q(c)] \models \square$$

根据归结原理原命题证明完毕。

(3)

$$\neg\exists x \exists y[P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x,y)] \models \forall x \forall y[P(x) \wedge Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y)]$$

根据归结原理证明如下:

$$\begin{aligned} &\neg\exists x \exists y[P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x,y)] \wedge \neg\forall x \forall y[P(x) \wedge Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y)] \\ \equiv&\forall x \forall y \neg[P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x,y)] \wedge \exists z \exists w \neg[P(z) \wedge Q(w) \Rightarrow \neg R(z,w)] \\ \equiv&\forall x \forall y \neg[P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x,y)] \wedge \exists z \exists w \neg[\neg(P(z) \wedge Q(w)) \vee \neg R(z,w)] \\ \equiv&\forall x \forall y \neg[P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x,y)] \wedge \exists z \exists w[P(z) \wedge Q(w) \wedge R(z,w)] \end{aligned}$$

用置换$\theta\{z/a, w/b\}$消去存在量词得:

$$\forall x \forall y \neg[P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x,y)] \wedge [P(a) \wedge Q(b) \wedge R(a,b)]$$

用置换$\theta\{x/a, y/b\}$消去全称量词得:

$$\neg[P(a) \wedge Q(b) \wedge R(a,b)] \wedge [P(a) \wedge Q(b) \wedge R(a,b)]$$

归结子句得到

$$\neg[P(a) \wedge Q(b) \wedge R(a,b)] \wedge [P(a) \wedge Q(b) \wedge R(a,b)] \models \square$$

根据归结原理原命题证明完毕。

4.

(1) 给定解释I如下：

① 论域D_I是整数集。

② $F(x)$表示 x 是一个偶数，$G(x,y)$表示 x 被 y 整除，$H(x,y)$表示 x 大于 y。

③ $f(x) = 3x + 2$

④ $a = 2$

写出下列公式在解释I下的具体含义，并判断命题是否为真。

① $\forall x\left[F(x) \rightarrow \exists y\left(G(y,a) \wedge H\left(f(x),y\right)\right)\right]$

② $\exists x\left\{F(x) \wedge \forall y\left[F(y) \rightarrow G\left(f(y),f(x)\right)\right]\right\}$

(2) 给定解释I如下：

① 论域D_I是人的集合。

② $F(x)$表示 x 来自福建，$S(x)$表示 x 来自山东，$G(x,y)$表示 x 与 y 是同学，$H(x,y)$表示 x 与 y 来自相同省份，$A(x)$表示 x 为自动化系零字班学生。

③ a 表示小紫，b 表示小冬。

写出下列公式在解释I下的具体含义，并判断命题是否为真。

① $\forall x \forall y[F(x) \wedge S(y) \rightarrow \neg H(x,y)]$

② $\forall x \forall y[F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x,y)]$

③ $A(a) \wedge A(b) \rightarrow G(a,b)$

④ $\forall x[A(x) \rightarrow H(x,b)]$

(1)

① 对于所有整数 x，若 x 为偶数，则存在整数 y，使得 y 被 2 整除且$3x + 2 > y$。该命题为真。

② 存在整数 x，使得 x 是一个偶数，且对所有整数 y，若 y 为偶数，则$3y + 2$被$3x + 2$整除。该命题为真。

(2)

① 任何来自福建和任何来自山东的人不来自同一省份。该命题为真。

② 任何来自福建的两个人为同学。该命题为假。

③ 若小紫为自动化系零字班同学，小冬为自动化系零字班同学，则小紫和小冬为同学。该命题为真。（认为非同学、命题为假也可以）

④ 所有自动化系零字班同学与小冬来自相同省份。该命题为假。

5. 假设有以下前提知识：

根据规定，向敌对国家出售武器是犯罪。A 国的敌对国家有一些导弹，所有的导弹都是由 B 卖给它的，B 是 A 国公民。则 B 犯了罪。

(1) 请用这些谓词和函数将题干的自然语言转化为谓词逻辑公式。

(2) 用**演绎推理**求证目标。

(1) 向敌对国家出售武器是犯罪：$\forall x y z\ Sell(x,y,z) \wedge A(x) \wedge Weapon(y) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Sell(x,y,z)$：谓词，对 x 把 y 卖给 z 为真。 $A(x)$：谓词，对 x 是 A 国公民为真

$Weapon(y)$：谓词，对 y 为武器为真 $Hostile(z)$：谓词，对 z 是 A 的敌对国为真

A 的敌对国家有一些导弹：$\exists x y\ Hostile(x) \wedge Owns(x,y) \wedge Missile(y)$

$Owns(x,y)$：谓词，对 x 拥有 y 为真 $Missile(y)$：谓词，对 y 为导弹为真

(A 的敌对国家)所有的导弹都是由 B 卖给它的：$\exists x\ \forall y.\ Hostile(x) \wedge Owns(x,y) \wedge Missile(y) \Rightarrow Sell(B,y,x)$

B：常量

B 是 A 国公民：$A(B)$

导弹是武器：$\forall x.\ Missle(x) \Rightarrow Weapon(x)$

目标：B 犯了罪：$Criminal(B)$

(2) 演绎推理证明：

① $\exists x y\ Hostile(x) \wedge Owns(x,y) \wedge Missile(y)$

置换 $\theta = \{x/C, y/M_1\}$，得到 $Hostile(C)$，$Owns(C, M_1)$，$Missle(M_1)$

② $\exists x\ \forall y.\ Hostile(x) \wedge Owns(x,y) \wedge Missile(y) \Rightarrow Sell(B,y,x)$，①

置换 $\theta = \{x/C, y/M_1\}$ 得到 $Sell(B, M_1, C)$ 假言推理

③ $\forall x.\ Missle(x) \Rightarrow Weapon(x)$，①

置换 $\theta = \{x/M_1\}$ 得到 $Weapon(M_1)$ 假言推理

④ $\forall x y z\ Sell(x,y,z) \wedge A(x) \wedge Weapon(y) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$，$A(B)$，②，③

置换 $\theta = \{x/B, y/M_1, z/C\}$ 得到 $Criminal(B)$ 假言推理

得证

6. 假设有以下前提知识：

① 小紫喜欢养所有宠物。

② 任何任何人可以养且不以经济为目的的生物就是宠物。

③ 小冬养小兔子且小冬以快乐为目的。

④ 小冬养的所有生物小紫都养。

目标：小紫喜欢养小兔子。

(1) 请用这些谓词和函数将题干（包括前提和目标）的自然语言转化为谓词逻辑公式。

(2) 用**归结原理**求证目标。

没说喜欢只养不一定要

6. ① $\forall x\ Pet(x) \wedge Have(Zi, x) \Rightarrow Like(Zi, x)$. 养. 这句话翻译不同（不包括Have）

② $\forall y\ \forall x\ [\ NotMoney(x, y) \wedge Have(x, y)\ ] \Rightarrow Pet(y)$ 判断时候合理. 逻辑对即可.

③ $Have(Dong, Rabbit) \wedge Happy(Dong, Rabbit)$

④ $\forall x\ (\ Have(Dong, y)) \Rightarrow Have(Zi, y)$.

隐含 $Happy(x, y) \Rightarrow NotMoney(x, y)$

目标 $Like(Zi, Rabbit)$

①化为 $\neg Pet(x) \vee \neg Have(Zi, x) \vee Like(Zi, x)$.

②化为 $\neg NotMoney(x, y) \vee \neg Have(x, y) \vee Pet(y)$

④化为 $\neg Have(Dong, y) \vee Have(Zi, y)$

隐含化为 $\neg Happy(x, y) \vee NotMoney(x, y)$

③子句集 $Have(Dong, Rabbit)$ $Happy(Dong, Rabbit)$

归结有

目标 $\neg Like(Zi, Rabbit)$ 目标取非 加入子句集

KB⊢α 即证 KB∧¬α 不可满足

③ $Have(Dong, Rabbit)$

④ $\neg Have(Dong, y) \vee Have(Zi, y) \Rightarrow Have(Zi, Rabbit)$

③ $Happy(Dong, Rabbit)$

隐含 $\neg Happy(x, y) \vee NotMoney(x, y) \Rightarrow NotMoney(Dong, Rabbit)$.

$$\left.\begin{array}{l} Have(Dong, Rabbit) \\ NotMoney(Dong, Rabbit) \\ ③\ \neg NotMoney(x, y) \vee \neg Have(x, y) \vee Pet(y) \end{array}\right\} \Rightarrow Pet(Rabbit).$$

$$\left.\begin{array}{l} Pet(Rabbit) \\ Have(Zi, Rabbit) \\ \neg Pet(x) \vee \neg Have(Zi, x) \vee Like(Zi, x) \end{array}\right\} \Rightarrow Like(Zi, Rabbit)$$

$Like(Zi, Rabbit)$ $\neg Like(Zi, Rabbit) \Rightarrow \square$ 证毕

4/9