课后作业习题答案与提示–Part I

若有错误，请指出

练习1. 考察函数$w=f(z)=\sqrt{|x||y|^\beta}$在$z=0$处可导性，其中$\beta\geq 1$为常数。

提示. 在$z=0$处，令$\Delta z=re^{i\theta}$，观察到$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\sqrt{r^{1+\beta}|\cos\theta||\sin\theta|^\beta}}{re^{i\theta}}$，因为$\Delta z\to 0\Leftrightarrow r\to 0$，所以当$\beta=1$时,不可导,其余情况均可导。

练习2. 试构造函数$w=f(z)$,使得它在$\mathbb{C}$上连续，在$z=0$可导，但在0点的任何空心邻域内均有$f(z)$的解析点与奇点。

答案. 例子：

$$w=f(z)=\begin{cases} z^2, & Imz\geq 0,\\ \bar{z}^2, & Imz<0.\end{cases}$$

练习3. 设$n\geq 2$为固定正整数，考察函数

$$w=f(z)=\begin{cases} \frac{\bar{z}^n}{z}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

在$z=0$处连续性及可导性。

提示. 同第一道练习中方法可得在$z=0$处：$n>2$ 时可导，$n=2$时连续不可导(注：$n=1$时不连续)。

练习4. 书上P67: 10 (4)(5)

Proof. (4). $\arg f(z)\equiv\theta\in(-\pi,\pi]\Rightarrow e^{-i\theta}f(z)$恒取实值，应用10(1)证明过的结论得出，$e^{-i\theta}f(z)\equiv const$, 从而$f(z)\equiv const$.

(5). a,b,c不全为0$\Rightarrow a^2+b^2\neq 0$,

$$\begin{aligned} au+bv=c &\Rightarrow au_x+bv_x\equiv 0, au_y+bv_y\equiv 0\Rightarrow (au_x+bv_x)^2+(au_y+bv_y)^2\equiv 0\\ &\Rightarrow (a^2+b^2)(u_x^2+u_y^2)=(a^2+b^2)(v_x^2+v_y^2)\equiv 0\\ &\Rightarrow u_x^2+u_y^2\equiv 0, v_x^2+v_y^2\equiv 0\Rightarrow u_x=v_y\equiv 0,\ u_y=-v_x\equiv 0\\ &\Rightarrow u\equiv const, v\equiv const.\end{aligned}$$

□

练习5. 对任意给定的$z \in \mathbb{C}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} n \ln(1+\frac{z}{n}) = z.$$

提示. $n\ln(1+\frac{z}{n}) = n\ln\sqrt{(1+\frac{x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2} + in\arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} \to x+iy,\ n\to\infty.$

练习6. 设Jordan闭曲线C围成的区域面积为S,试求下列积分的值：

$$\oint_C \bar{z}dz.$$

答案：$2iS$.

练习7. 书上第三章习题: 21.

提示.：注意到

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \oint_C [\frac{f(z)}{z-z_0}]'dz = 0,$$

因为$\frac{f(z)}{z-z_0}$作为$[\frac{f(z)}{z-z_0}]'$在D上的原函数，根据积分路径无关性的三个充要条件即知。

练习8. 设$\rho > 0, a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq \rho$，求证:

$$I = \oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \begin{cases} \frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2}, & |a|<\rho, \\ \frac{2\pi\rho}{|a|^2-\rho^2}, & |a|>\rho. \end{cases}$$

Proof. 令$z = re^{i\theta}$,在C_ρ：$|z| = \rho$, 上, $|z|^2 = z\bar{z} = \rho^2$. $|dz| = ds = \rho d\theta = -i\rho\frac{dz}{z}$. 于是

$$I = \oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \oint_{C_\rho} \frac{-i\rho dz}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})z} = -i\rho \oint_{C_\rho} \frac{dz}{(z-a)(\rho^2-\bar{a}z)}$$

Case 1. $|a| < \rho$.

$$I = -i\rho \oint_{C_\rho} \frac{\frac{1}{\rho^2-\bar{a}z}}{z-a}dz = -i\rho\cdot 2\pi i\frac{1}{\rho^2-\bar{a}z}|_{z=a} = \frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2};$$

Case 2. $|a| > \rho$. 类似可得。 □

练习9. 设$f(z)$在圆盘$D: |z-z_0| < R$上解析，在$\overline{D}$上连续，证明面积平均值公式：

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D f(z)dxdy.$$

提示.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta \Rightarrow$$

$$\int_0^R f(z_0)rdr = \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})rd\theta dr \Rightarrow$$
$$f(z_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D f(z)dxdy.$$

练习10. 设$f(z)$为整函数，且已知$f(0)=A$, $f'(0)=B$, 对给定的$r>0$及正整数n，试求：

(1) $I_1=\int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta$, (2) $I_2=\int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta$. (此处为$n$次方)

提示. $z=re^{i\theta}$, $d\theta=\frac{dz}{iz}$, $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=(1+\frac{z+\bar{z}}{2r})/2=\frac{2rz+z^2+r^2}{4rz}$, $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=(1-\frac{z+\bar{z}}{2r})/2=\frac{2rz-z^2-r^2}{4rz}$,这样，

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=\oint_{|z|=r} f^n(z)\frac{2rz+z^2+r^2}{4rz}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=r} f^n(z)\frac{2rz+r^2}{4riz^2}dz\\&=2\pi i[\frac{f^n(0)}{2i}+\frac{r}{4i}[f^n(z)]'_{z=0}]=2\pi i[\frac{A^n}{2i}+\frac{rnA^{n-1}B}{4i}]=\pi[A^n+\frac{rnA^{n-1}B}{2}].\end{aligned}$$

类似可得：

$$I_2=\int_0^{2\pi} f^n(re^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta=\pi[A^n-\frac{rnA^{n-1}B}{2}].$$

练习11. 设$f(z)$在$|z|\le 2$内解析，已知$f(0)=A$, $f'(0)=B$, $f''(0)=C$, 试求积分

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}(2-z)f(\bar{z})dz.$$

提示. 先化成参数积分，$z=e^{i\theta}$, $dz=ie^{i\theta}d\theta$，然后再转成*Cauchy*积分公式或高阶导数公式计算, 可求得

$$\oint_{|z|=1} f(\bar{z})dz=2\pi iB,\ \oint_{|z|=1} zf(\bar{z})dz=\pi iC.$$

练习12. 设$f(z)$在$|z|>1$上解析且有界，给定z_0满足$|z_0|<1$以及正整数n,求证：

$$\oint_{|z|=2}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=0.$$

Proof. 在$|z|>1$上, $|f(z)|<M$.对所有充分大的r,由复合闭路定理有

$$\oint_{|z|=2}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned}|\oint_{|z|=2}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}|=|\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}|&\le\oint_{|z-z_0|=r}\frac{|f(z)||dz|}{|z-z_0|^{n+1}}\\&\le\oint_{|z-z_0|=r}\frac{Mds}{r^{n+1}}=\frac{2\pi M}{r^n}.\end{aligned}$$

令$r\to+\infty$,则得到我们需要的结论。

□

练习13. 判断下列级数的敛散性（如收敛，须说明是条件收敛还是绝对收敛）：

$$(1).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i}{n}}{n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2ni}}{n^p},\quad \text{这里 } p>0.$$

答案. *(1).* $\sin\frac{i}{n} = \frac{e^{-1/n}-e^{1/n}}{2i} = \frac{-1}{2i}[\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})]$. 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i}{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2i}[\frac{2}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})], \quad \text{绝对收敛}.$$

(2). 发散。

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2ni}}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\cos(2n)}{n^p}+i\frac{\sin(2n)}{n^p}],$$

Case 1. $p>1$, 绝对收敛; *Case 2.* $0<p\le 1$, 由*Dirichlet* 判别法知，条件收敛。