考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

********密********封********线********

考生类别____________

第 24 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

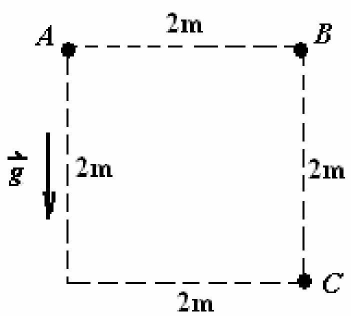
北京物理学会编印　　　　2007.12.2

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td>一</td><td colspan="4">二</td></tr>
<tr><td>1－12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr>
<tr><td>分数</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>阅卷人</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td colspan="3">二</td><td colspan="2" rowspan="2">总分</td></tr>
<tr><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr>
<tr><td>分数</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>阅卷人</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

答题说明：前 16 题是必做题，满分是 100 分；文科经管类组只做必做题；非物理 B 组限做 17 题，满分 110 分；非物理 A 组限做 17、18 题，满分 120 分；物理组限做 17、19 题，满分 120 分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理，请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

一.填空题（必做，共 12 题，每题 2 空，每空 2 分，共 48 分）

1. 在一个竖直平面内有三个质点 A、B、C，某时刻它们恰好位于每边长为 2m 的正方形三个顶点上，方位如图所示。设此时 C 无初速地自由下落，B 以 1m/s 的速度竖直向下运动，A 则以初速度 $\vec{v}_A$ 开始自由运动。不计空气阻力，如果 A 恰好在 C 落地时刻同时击中 B、C，则 C 初始离地高度为

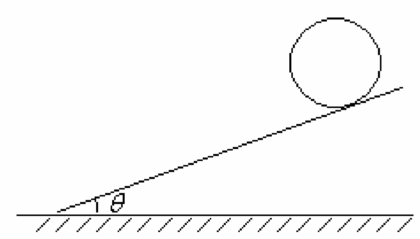


______________m，$\vec{v}_A$ 的大小为____________________m/s.

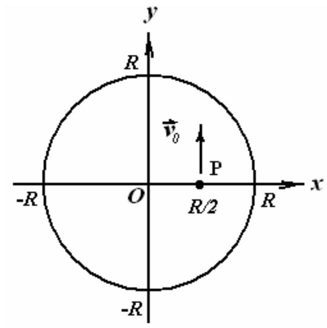
2．金属丝绕着铅垂轴弯成等距螺旋线，螺距 $h = 2cm$,旋转圆半径 $R = 3cm$。在金属丝上穿一小珠，小珠-由无速度开始下滑，不计摩擦。小珠在第一圈螺旋末端处的水平方向速度大小为____________________m/s，总的加速度大小为______________________m/s^2。

3．自然光从折射率为 n_1 的介质入射到折射率为 n_2 的介质表面上，当入射角取为布儒斯特角 θ_B =________________时，反射光为线偏振光，其振动方向与入射面______________(填“平行”或“垂直”)。

4．匀质圆柱体，$t=0$ 开始在倾角为 θ 的斜面上从静止释放，如图所示。如果圆柱体与斜面间摩擦因数 $\mu=0$，圆柱体平动下滑，$t>0$ 时刻下滑速度记为 v_0。若 $\mu>0$，但较小，圆柱体会连滚带滑地沿斜面向下运动。当 μ 达到某一临界值 μ_0= ______________时，圆柱体恰好能纯滚动地沿斜面向下运动，t 时刻质心速度为 v_0 的_____________倍。



5. 气态星球 S 的半径为 R，密度设为常量 ρ，过 S 中心点的某坐标面 o-xy 如图所示。在 $x_0=R/2, y_0=0$ 处有一飞行器 P，它具有朝着 y 轴方向的初速度 v_0，P 在而后运动过程中受到的气体阻力可忽略。当 v_0 =________________时，P 恰好不会运动到 S 的表面外，此种情况下，P 的运动轨道方程为______________________。



6．在均匀介质中沿 x 轴传播的平面简谐波，因介质对波的能量吸收，波的平均能流密度大小 $I(x)$ 随 x 衰减的规律为 $I(x)=I_0e^{-\mu x}$，其中 I_0 为 $x=0$ 处的 $I(x)$ 值，μ 为正常量。将 $x=0$ 处波的振幅记为 A_0，则 $x>0$ 处的振幅 $A(x)=$_________________。保留介质和波的种类，改取球面简谐波，考虑到介质对波的能量吸收，将 r_0 处的振幅记为 A_0，则 $r>r_0$ 处的振幅 $A(x)=$____________________。

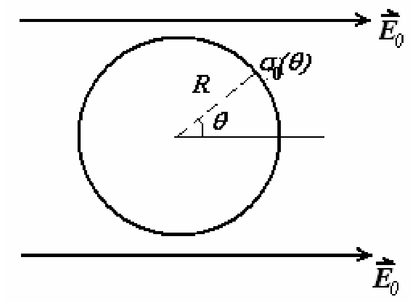
7．理想气体处于平衡态时，根据麦克斯韦速率分布函数 $f(v)=4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-mv^2/2kT}$，可导得分子平动动能在 ε 到 $\varepsilon+d\varepsilon$ 区间的概率为 $f(\varepsilon)d\varepsilon=$_______________________，其中 $\varepsilon=\frac{1}{2}mv^2$。再根据这一分布式，可导得分子平动动能的最可几值 ε_P =___________________。

8.一个平均输出功率为 $50MW$ 的发电厂，热机循环的高温热源温度为 $T_1=1000K$，低温热源温度为 $T_2=300K$，理论上热机的最高效率为___________。如果该厂只能达到这个效率的70%，为了产生 $50MW$ 的电功率，每秒需要消耗_______________ J 的热量。

考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

**********密**********封**********线**********

9． 半径 R 的导体球不带电，在匀强外电场 $\vec{E}_0$ 中已达静电平衡，表面感应电荷面密度分布记为 $\sigma_0(\theta)$ ，如图所示。若使该导体球原带电量为 $Q>0$ ，在外电场 $\vec{E}_0$ 中静电平衡后，导体球受力 $\vec{F}=$______________，表面电荷密度分布为 $\sigma_0(\theta)$ =_____________________。



10．北京地区地面附近地球磁场的水平分量记为 $B_{//}$ ，竖直向下分量记为 $B_{\perp}$ 。取电阻为 R ，半径为 r 的金属圆环，将环如图 1 所示竖直放置后，绕着它的竖直直径旋转 180^0，测得流过圆环的电量为 Q_1 。再让圆环绕着它的东西水平直径如图 2 所示方向旋转 90^0，测得流过圆环的电量为 Q_2 。据此可导得 $B_{//}$ =_____________________， $B_{\perp}$ =_____________________。

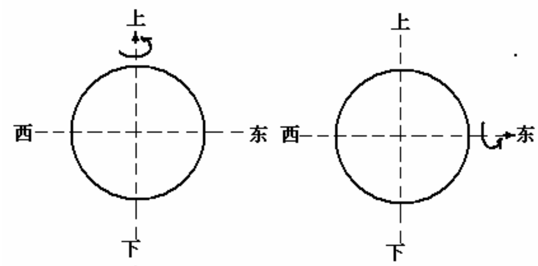


图1　　图2

11．顶角为 θ 的直角三棱镜，如图 1 所示。单色光经空气从斜边射入后，在棱镜中的折射光线与棱镜底边平行。再从棱镜出射后，相对原入射光线的偏向角为 α ，则棱镜玻璃折射率 $n=$____________________。假设 $\alpha=\theta=30^\circ$ ，再将另一个材料相同的较大直角三棱镜以图 2 所示方式拼接在图 1 的三棱镜右侧。不改变原入射光线方位，则从组合棱镜第一次出射到空气的光线相对原入射光线的偏向角 $\alpha'=$___________________。

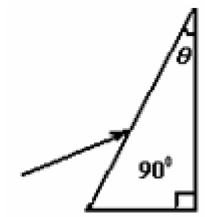


图1

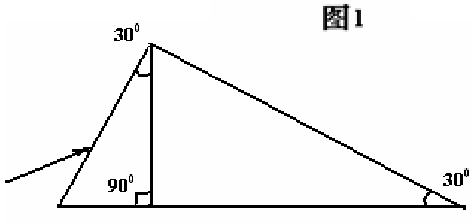
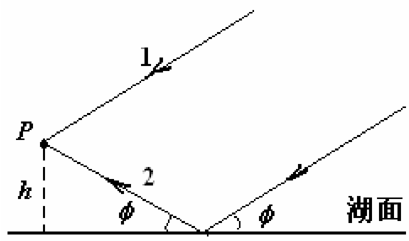


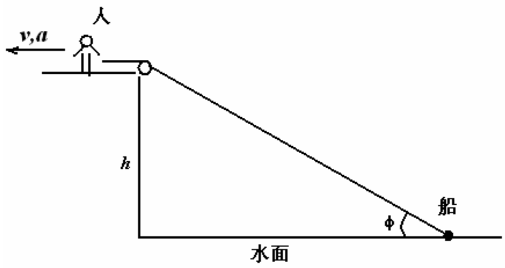
图2

12．微波探测器 P 位于湖岸水面上方 h 处，发射波长为 λ 电磁波的射电星位于地平线上方 ϕ 角时，图中所示的直射波线 1 与反射波线 2 之间的波程差 $\Delta=$___________________。已知 $h=0.5m$, $\lambda=21cm$ ，在 ϕ 从接近零度开始增大的过程中，P 接收到的信号第一次达到极大值时， $\phi=$_________________________。



二.基本计算题（必做，共 4 题，每题 13 分，共 52 分）

13.（**必做**）人在岸上用轻绳拉小船，如图所示。岸高 h,船质量 m，绳与水面夹角为 ϕ 时，人左行速度和加速度分别为 v 和 a。



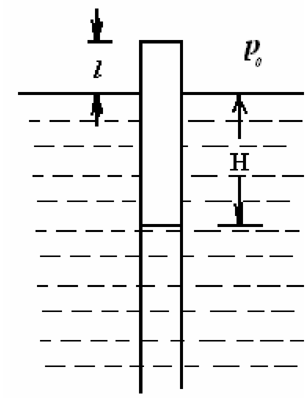
（1）不计水的水平阻力，假设船未离开水面，试求人施于绳端拉力提供的功率 P；

（2）若 $a=0, v=v_0$ (常量)，ϕ 从较小锐角开始，达何值时，船有离开水面趋势即此时水面对船的竖直方向支持力为零）？

考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

****************密****************封****************线****************

14.(**必做**)如图所示，质量 $m=50g$ ，截面积 $S=2cm^2$ 的均匀薄长试管，初始时直立在水中，露出水面部分的长度 $l=1cm$ ，管内上方封入一部分空气，外部大气压强 $p_0=10^5 Pa$ 。



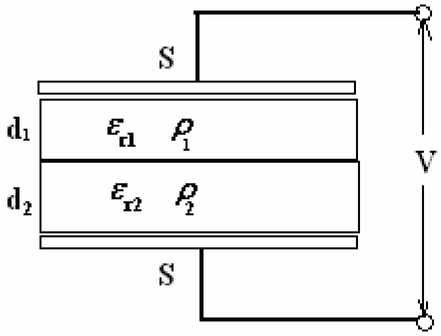
（1）试求管内、外水面的高度差 H ；

（2）今将试管缓慢地下压到某一深度时，松手后，试管既不上浮，也不下沉，试求此时试管顶端和管外水面之间的高度差 x 。

15.（**必做**）平行板电容器极板面积为 S，中间充满两层介质，它们的厚度，相对介电常数和电阻率分别为 d_1、ε_{r1}、ρ_1 和 d_2、ε_{r2}、ρ_2，两端加恒定不变的电压 V，如图所示。忽略边缘效应，试求：

（1）两种介质内的电流密度和电场强度；

（2）在两层介质交界面（包括介质 1 的下端面和介质 2 的上端面）上的总电荷面密度和自由电荷面密度。



考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

********************密**********封**********线********************

16．（必做）

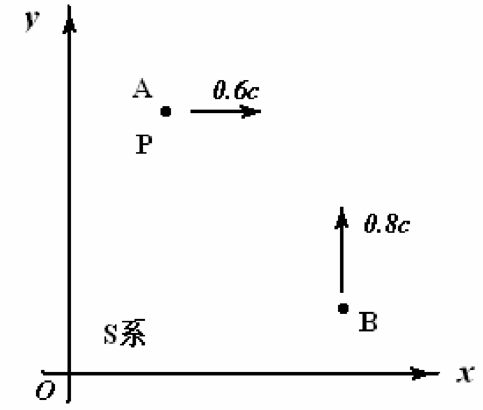
(1)试用玻尔氢原子理论中电子绕核运动轨道角动量量子化条件，导出高能态能量 E_n 与基态能量 E_1 间的关系式。

（2）已知 $E_1=-13.6eV$ ，用动能为 $12.9eV$ 的电子使处于基态的氢原子激发，而后可能产生的光谱线中波长最短的为 972 $\mathring{A}$ ，试求其它可能产生的光谱线的波长。

三．计算题（每题 10 分，文管类组不做，非物理 B 组限做第 17 题；非物理 A 组限做第 17、18 题；物理组限做第 17、19 题）

17．**（文管类组不做，其他组必做）**

惯性系 S 中有两静质量同为 m_0 的粒子 A、B，它们的速度分别沿 x, y 方向，速度大小分别为 $0.6c$、$0.8c$。某时刻粒子 A 位于 xy 平面上的 P 处，粒子 B 也在 xy 平面上，如图所示。



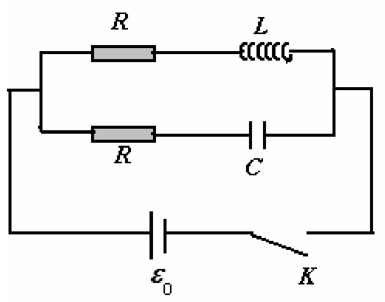
（1）S 系认定再过 $\Delta t = 5s$,A 和 B 会相碰，试问 A 认为还需经过多长时间 Δt_A 才与 B 相碰？

（2）A 认为自己位于 S 系 P 处时，质点 B 与其相距 l，试求 l。

（3）设A、B碰后粘连，且无任何能量耗散，试在S系中计算粘连体的静止质量M_0。

18．**（非物理 A 组必做，其他组不做）**

电路及相关参量如图所示，开始时 K 未接通，电容器极板上没有电荷。



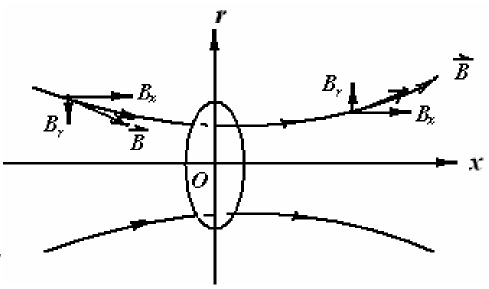
(1) $t=0$ 时刻接通 K,导出支路中 R、C 的电流 i_c 和 R、L 支路中的电流 i_L 随时间 t 的变化关系；

(2) 设经过一段时间后，i_c、i_L 同时达到各自最大值的二分之一，据此确定 R、L、C 之间的关系；

（3）经过足够长的时间，i_c 可认为已降为零，i_L 可认为已升为最大值，此时断开 K，且将该时刻改记为 $t^*=0$，试求电容器左极板上电量 q 随时间 t^* 的变化关系（答案中不可出现 R）。

19．**（物理组必做，其他组不做）**

在所讨论空间区域内，磁场 $\vec{B}$ 相对 x 轴对称分布。引入正的常量 α、β 和 B_0,磁场 $\vec{B}$ 的轴向分量 B_x 和径向分量 B_r 分别为



$$\left.\begin{array}{lll} B_x=(1-\alpha x)B_0, & B_r=\beta r B_0 & : \frac{1}{\alpha}>x>0 \\ B_x=B_0, & B_r=0 & : x=0 \\ B_x=(1+\alpha x)B_0, & B_r=-\beta r B_0 & : 0>x>-\frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} B_0=10^{-2}T$$

质量 $m=5.0\times10^{-2}g$ 、半径 $r_0=0.5cm$、电感 $L=1.3\times10^{-8}H$ 的均匀超导（零电阻）圆环，开始时环内无电流，如图放置，环心位于 $x=0$ 点，x 轴为其中心垂直轴。设 $t=0$ 时刻环具有沿 x 轴方向的平动速度 $v_0=50cm/s$,

(1)已知 $\alpha=16m^{-1}$,求 β ；

(2)确定而后环沿 x 轴的运动范围。

第 24 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷答案

答题说明：前 16 题是必做题，满分是 100 分；文科经管类组只做必做题；非物理 B 组限做 17 题，满分 110 分；非物理 A 组限做 17、18 题，满分 120 分；物理组限做 17、19 题，满分 120 分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理，请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

一.填空题（必做，共 12 题，每题 2 空，每空 2 分，共 48 分）

1． $2g = 19.6m(g = 9.8m/s^2)$ ；$\sqrt{2} = 1.414m/s$.

2. $v_{水平} = \sqrt{2gh}\sin\phi = 0.62m/s$ ；$a = \sqrt{a_{切}^2 + a_{心}^2} = \sqrt{(g\cos\phi)^2 + (v_{水平}^2/R)^2} = 12.94m/s^2$

（其中：$\sin\phi = \dfrac{2\pi R}{\sqrt{h^2 + (2\pi R)^2}} = 0.994$, $\cos\phi = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + (2\pi R)^2}} = 0.106$）

3. $\theta_B = \arctan\dfrac{n_2}{n_1}$ ；垂直.　4. $\mu_0 = \dfrac{1}{3}\tan\theta$ ；$\dfrac{v}{v_0} = \dfrac{2}{3}$.　5. $v_0 = \sqrt{\dfrac{4}{3}\pi G\rho}R$ ；$4x^2 + y^2 = R^2$

.6. $A(x) = A_0 e^{-\frac{1}{2}\mu x}$ ；$A(r) = \dfrac{r}{r_0}A_0 e^{-\frac{1}{2}\mu(r-r_0)}$. 7. $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/kT}\sqrt{\varepsilon}$ ；$\varepsilon_P = \dfrac{1}{2}kT$.

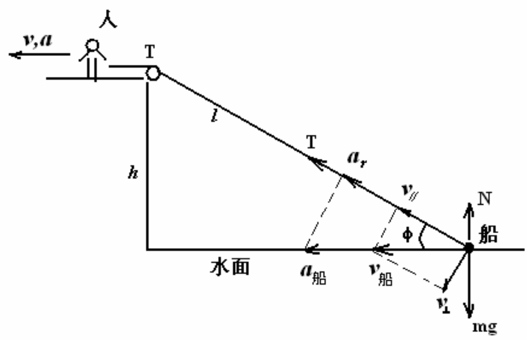
8. $\eta_{\max} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = 70\%$ ；$Q = \dfrac{W'}{\eta} = \dfrac{50}{0.49}MJ = 102MJ = 1.02\times10^8 J$

9. $\vec{F} = Q\vec{E}_0$ ；$\sigma(\theta) = \sigma_0(\theta) + \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ ；10. $B_{//} = Q_1 R/2\pi r^2$ ；$B_{\perp} = (2Q_2 - Q_1)R/2\pi r^2$.

11. $n = \sin(\alpha+\theta)/\sin\theta$ ；$\alpha' = 60^0$.　12. $\Delta = 2h\sin\phi \pm \dfrac{\lambda}{2}$ ；$\phi = \arcsin\phi(0.105) = 6^0$

二.基本计算题（必做，共 4 题，每题 13 分，共 52 分）

13．（必做）人在岸上用轻绳拉小船，如图所示。岸高 h，船质量 m，绳与水面夹角为 ϕ 时，人左行速度和加速度分别为 v 和 a。



（1）不计水的水平阻力，假设船未离开水面，试求人施于绳端拉力提供的功率 P；

（2）若 $a = 0, v = v_0$ (常量)，ϕ 从较小锐角开始，达何值时，船有离开水面趋势(即此时水面对船的竖直方向支持力为零) ？

解：参考题解图，很易得到船的左行速度 $v_{船} = v/\cos\phi$,

将 ϕ 对应的绳长记为 l，将 $v_{船}$ 分解成 $v_{//}$ 与 $v_{\perp}$,将 $\vec{a}_{船}$ 沿绳指向滑轮方向的分量记为 a_r ,

从运动学可导得

$$l = h/\sin\phi, v_{\perp} = v_{船}\sin\phi = v\tan\phi,\quad a_{船} = a_r/\cos\phi$$

$$a_r = a + \frac{v_{\perp}^2}{l} = a + \frac{v^2}{h}\sin\phi\tan^2\phi \qquad (4 分)$$

（1）人对绳端拉力等于绳内张力 T ,有 $P = Tv$

船的重力 $m\vec{g}$ 及水面对船的支持力 $\vec{N}$ 都在竖直方向上，故有 $T\cos\phi = ma_{船}=ma_r/\cos\phi$

可解得 $T = ma_r/\cos^2\phi = \dfrac{m}{\cos^2\phi}(a+\dfrac{v^2}{h}\sin\phi\tan^2\phi)$ (2分)

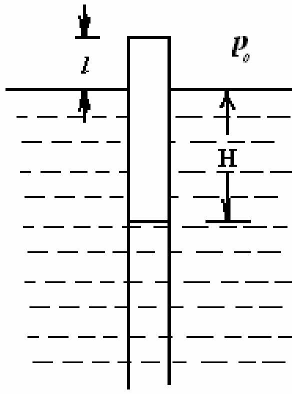
$$\Rightarrow P = Tv = \frac{mv}{\cos^2\phi}(a+\frac{v^2}{h}\sin\phi\tan^2\phi) \quad (2分)$$

(2) 船在竖直方向无运动，应有 $N = mg - T\sin\phi$ (2 分)

对 $a=0, v=v_0$,得 $N = mg - \dfrac{mv_0^2}{h\cos^2\phi}\sin^2\phi\tan^2\phi = mg - \dfrac{mv_0^2}{h}\tan^4\phi$ （N 随 ϕ 增大而减小）

$N=0$ 时，有 $\phi = \arctan\sqrt[4]{gh/v_0^2}$ (3 分)

14.(**必做**)如图所示，质量 $m=50g$,截面积 $S=2cm^2$ 的均匀薄长试管，初始时直立在水中，露出水面部分的长度 $l=1cm$,管内上方封入一部分空气，外部大气压强 $p_0 = 10^5 Pa$。



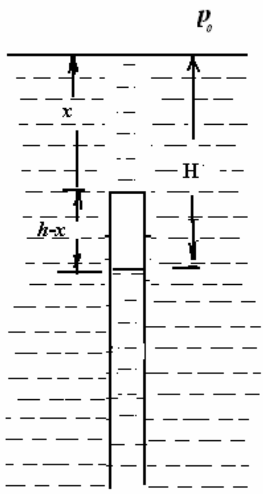
（1）试求管内、外水面的高度差 H ；

（2）今将试管缓慢地下压到某一深度时，松手后，试管既不上浮，也不下沉，试求此时试管顶端和管外水面之间的高度差 x。

解：(1) 管内空气压强 $p = p_0 + \rho gh$, ρ :水的密度

试管竖直方向力平衡方程为 $p_0S + mg = pS$

即得 $H = m/\rho S = \dfrac{50\times10^{-3}}{10^3\times2\times10^{-4}} = 0.25m = 25cm$ (5 分)



(2)题文未提及温度变化，应按等温处理。参考题解图的几何参量，对管内空气有

$$(p_0+\rho gh)(h-x) = (p_0+\rho gH)(H+l) \quad (2 分)$$

得 $h - x = \dfrac{p_0+\rho gH}{p_0+\rho gh}(H+l)$ (*)

试管竖直方向力平衡方程为

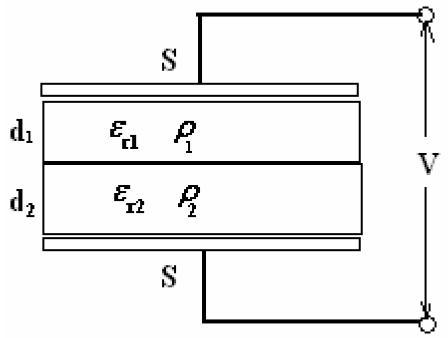
$$(p_0+\rho gx)S + mg = (p_0+\rho gh)S \quad (2 分)$$

得 $h-x = m/\rho S = H$,与(*)式联立，即得

$h = (\dfrac{p_0}{\rho g}+H)(1+\dfrac{l}{H}) - \dfrac{p_0}{\rho g} = H + l + \dfrac{l}{H}\dfrac{p_0}{\rho g}$ 代入上式得

$x = h - H = l(1+\dfrac{p_0}{H\rho g}) = 10^{-2}(1+\dfrac{10^5}{0.25\times10^3\times9.8}) \Rightarrow x = 0.418m = 41.8cm$ (4 分)

15.（必做）平行板电容器极板面积为 S，中间充满两层介质，它们的厚度，相对介电常数和电阻率分别为 d_1、ε_{r1}、ρ_1 和 d_2、ε_{r2}、ρ_2，两端加恒定不变的电压 V，如图所示。忽略边缘效应，试求：



（1）两种介质内的电流密度和电场强度；

（2）在两层介质交界面（包括介质 1 的下端面和介质 2 的上端面）上的总电荷面密度和自由电荷面密度。

解：本题电容器内的电场是直流电路中的恒定电场，电容器正、负极板中仍有不随 t 变化的电量 Q、$-Q$，且满足关系式：$Q=CU$，C：电容，U：极板间电压。

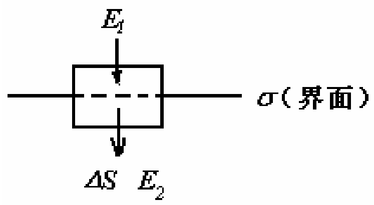
电容器内的介质中有直流电通过，电流密度 $\vec{j}$ 和场强 $\vec{E}$ 的关系为 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$，$\sigma=1/\rho$

(1)介质 1、2 内的电流从上到下，电流强度同为

$$I=\frac{V}{R_1+R_2},R_1=\frac{\rho_1 d_1}{S},R_2=\frac{\rho_2 d_2}{S}\Rightarrow I=\frac{SV}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}$$

两种介质内的电流密度同为 $\vec{j}\begin{cases}\text{从上到下}\\ j=I/S=V/(\rho_1 d_1+\rho_2 d_2)\end{cases}$ （4 分）

介质 1、2 内的场强分别为



$$\vec{E}_1\begin{cases}\text{从上到下}\\ E_1=\rho_1 j=\rho_1 V/(\rho_1 d_1+\rho_2 d_2)\end{cases}$$

$$\vec{E}_2\begin{cases}\text{从上到下}\\ E_2=\rho_2 j=\rho_2 V/(\rho_1 d_1+\rho_2 d_2)\end{cases}$$ （3 分）

（2）参考题解图,在界面作高斯面，根据高斯定理得 $E_2\Delta S-E_1\Delta S=\sigma\Delta S/\varepsilon_0$

界面上总电荷密度为 $\sigma=\varepsilon_0(E_2-E_1)=\dfrac{\varepsilon_0(\rho_2-\rho_1)V}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}$ （2 分）

介质 1、2 内的极化强度分别为

$$\vec{P}_1=\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)\vec{E}_1,\ P_1=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)\rho_1 V}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}\ ;\ \vec{P}_2=\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-1)\vec{E}_2,\ P_2=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-1)\rho_2 V}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}$$

界面上极化电荷面密度为 $\sigma'=\sigma'_{\text{上}}+\sigma'_{\text{下}}=\dfrac{\varepsilon_0 V\left[(\varepsilon_{r1}-1)\rho_1-(\varepsilon_{r2}-1)\rho_2\right]}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}$ （3 分）

界面上自由电荷面密度为 $\sigma_0=\sigma-\sigma'=\dfrac{\varepsilon_0 V\ (\varepsilon_{r2}\rho_2-\varepsilon_{r1}\rho_1)}{\rho_1 d_1+\rho_2 d_2}$ （1 分）

16.（**必做**）

(1)试用玻尔氢原子理论中电子绕核运动轨道角动量量子化条件，导出高能态能量 E_n 与基态能量 E_1 间的关系式。

（2）已知 $E_1=-13.6eV$,用动能为$12.9eV$ 的电子使处于基态的氢原子激发，而后可能产生的光谱线中波长最短的为 972 $\overset{o}{A}$,试求其它可能产生的光谱线的波长。

解：(1）将量子化条件式　　$mvr=nh/2\pi$　　（2 分）

两边平方后得　$m^2v^2r^2=n^2h^2/4\pi^2$ ；　向心力公式　$mv^2/r=e^2/4\pi\varepsilon_0r^2$

两者联立消去mv^2 ,得　　$r=\varepsilon_0n^2h^2/\pi me^2$

代入轨道能量式　　$E=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r}=\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0r}-\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r}=-\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0r}$

得　$E=-\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2n^2}$，　即　$E_n=\dfrac{E_1}{n^2}$，$E_1=-\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}$　　（4 分）

（2）由 $E_n=E_1/n^2$ 可知，最高可激发态为　$n=4$　　（1 分）

可能产生的光谱线中波长最短的应为 λ_{41}，

由 $h\nu_{41}=E_4-E_1=-\dfrac{15}{16}E_1\Rightarrow\lambda_{41}=\dfrac{c}{\nu_{41}}=\dfrac{16}{15}(\dfrac{hc}{-E_1})$，$\dfrac{hc}{-E_1}=\dfrac{15}{16}\lambda_{41}\Rightarrow\lambda_{41}=972\mathring{A}$　（1 分）

其他可能产生的光谱线波长如下：

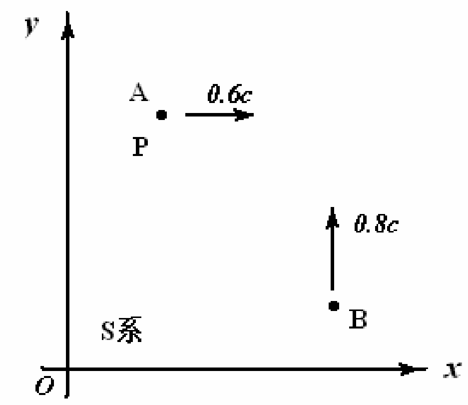
4—2：$h\nu_{42}=E_4-E_2=-\dfrac{3}{16}E_1\Rightarrow\lambda_{42}=\dfrac{c}{\nu_{42}}=\dfrac{16}{3}(\dfrac{hc}{-E_1})=\dfrac{16}{3}\times\dfrac{15}{16}\lambda_{41}\Rightarrow5\lambda_{41}=4860\mathring{A}$（1 分）

4-3：$\lambda_{43}=\dfrac{144}{7}\times\dfrac{15}{16}\lambda_{41}=18750\mathring{A}$（1 分）；3-1：　$\lambda_{31}=\dfrac{9}{8}\times\dfrac{15}{16}\lambda_{41}=1025\mathring{A}$（1 分）

3-2：$\lambda_{32}=\dfrac{36}{5}\times\dfrac{15}{16}\lambda_{41}=6561\mathring{A}$　（1 分）；2-1：　$\lambda_{21}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{15}{16}\lambda_{41}=1215\mathring{A}$（1 分）

三．计算题（每题 10 分，文管类组不做，非物理 B 组限做第 17 题；非物理 A 组限做第 17、18 题；物理组限做第 17、19 题）

17．**（文管类组不做，其他组必做）**



惯性系 S 中有两静质量同为 m_0 的粒子 A、B,它们的速度分别沿 x,y 方向，速度大小分别为 $0.6c$、$0.8c$。某时刻粒子 A 位于 xy 平面上的 P 处，粒子 B 也在 xy 平面上，如图所示。

（1）S 系认定再过 $\Delta t=5s$,A 和 B 会相碰，试问 A 认为还需经过多长时间 Δt_A 才与 B 相碰？

（2）A 认为自己位于 S 系 P 处时，质点 B 与其相距 l，试求 l。

（3）设A、B碰后粘连，且无任何能量耗散，试在S系中计算粘连体的静止质量M₀。

解：(1) 已知从粒子某时刻位于 S 系中的 P 位置，到粒子 A 于另一时刻在 S 系中的另一位置与粒子 B 相碰，经历的时间,S 系用两个静钟测得为 $\Delta t=5s$，则 S 系认为 A(参考系 A)用一个相对 S 系运动的时钟测得的时间必为

$$\Delta t_A=\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}\Delta t\approx\frac{4}{5}\times 5=4s \qquad (2\text{ 分})$$

（2）S 系中 B 的速度 $u_x=0,u_y=0.8c$,A 系中 B 的速度便为

$$u'_x=\frac{u_x-v_A}{1-\frac{v_A}{c^2}u_x}=u_x-v_A=-0.6c, \qquad u'_y=\frac{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}u_y}{1-\frac{v_A}{c^2}u_x}=\frac{4}{5}\times 0.8c=\frac{3.2}{5}c$$

A 系中 B 的速率为 $u'_B=\sqrt{u'^2_x+u'^2_y}=0.877c$

因此，开始时 A 认为 B 与其相距 $l=u'_B\cdot\Delta t_A=3.51c\cdot s$ (3 分)

（3）碰前 $m_A=m_0\Big/\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}=\frac{5}{4}m_0,m_B=m_0\Big/\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}=\frac{5}{3}m_0,$

碰后粘连踢质量记为 M，速度记为 u_x,u_y 则有

$$M=m_A+m_B=\frac{35}{12}m_0 \quad (2\text{ 分})； \qquad Mu_x=m_A\times 0.6c=\frac{3}{4}m_0c\Rightarrow u_x=\frac{9}{35}c \quad (1\text{ 分})$$

$$Mu_y=m_B\times 0.8c=\frac{4}{3}m_0c\Rightarrow u_x=\frac{16}{35}c \quad (1\text{ 分}) \quad \Rightarrow u^2=u_x^2+u_y^2=\frac{337}{35^2}c^2$$

$$\Rightarrow M_0=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}M=\sqrt{1-\frac{337}{35^2}}\times\frac{35}{12}m_0\Rightarrow M_0=\frac{\sqrt{888}}{12}m_0=2.48m_0 \qquad (1\text{ 分})$$

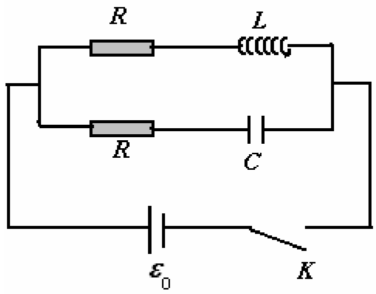
18．**（非物理 A 组必做，其他组不做）**

电路及相关参量如图所示，开始时 K 未接通，电容器极板上没有电荷。

(1) $t=0$ 时刻接通 K，导出 R、C 支路中的电流 i_c 和 R、L 支路中的电流 i_L 随时间 t 的变化关系；

(2)设经过一段时间后，i_c、i_L 同时达到各自最大值的二分之一，据此确定 R、L、C 之间的关系；

（3）经过足够长的时间，i_c 可认已还降为零，i_L 可认为已升为最大值，此时断开 K，且将该时刻改记为 $t^*=0$，试求电容器左极板上电量 q 随时间 t^* 的变化关系（答案中不可出现 R）。



解：(1) RC 支路：$\dfrac{q}{C}+i_C R=\varepsilon_0 \Rightarrow \dot{q}+\dfrac{q}{RC}=\dfrac{\varepsilon_0}{R}, t=0时q=0$

解为 $\quad q=C\varepsilon_0(1-e^{-t/RC})\quad，\quad i_C=\dot{q}=\dfrac{\varepsilon_0}{R}e^{-t/RC}$ （2 分）

RL 支路：$\varepsilon_0-L\dfrac{di_L}{dt}=Ri_L \quad\Rightarrow\quad \dot{i}_L+\dfrac{R}{L}i_L=\dfrac{\varepsilon_0}{L},\ \ t=0时i_L=0$

解为 $\quad i_L=\dfrac{\varepsilon_0}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$ （2 分）

(2) i_C 降为最大值 ε_0/R 的二分之一时刻为 $\dfrac{1}{2}=e^{-t/RC}\Rightarrow t_1=RC\ln 2$

i_L 降为最大值 ε_0/R 的二分之一时刻为 $\dfrac{1}{2}=(1-e^{-\frac{R}{L}t})\Rightarrow t_2=\dfrac{L}{R}\ln 2$

$t_1=t_2\Rightarrow RC=\dfrac{L}{R}$ 得 $R=\sqrt{L/C}$ （1 分）

（3）$t^*=0$ 断开 K 时，原 R、C 支路电流 i_C 已消失，但电容器极板电量被保留，原 R、L 支路电流 i_L 因电感作用而被保留，形成 R、L、C、R 闭合回路。初条件为

$t^*=0$ 时，$q=q_0=C\varepsilon_0$，$i=i_0=\varepsilon_0/R$

回路方程为 $\quad \dfrac{q}{C}-L\dfrac{di}{dt^*}=i\cdot 2R$

顺时针方向的 i，对应 C 左极板电量 q 的变化关系为 $\quad i=-\dfrac{dq}{dt^*}=-\dot{q}$

回路方程可改过为 $\quad \ddot{q}+\dfrac{2R}{L}\dot{q}+\dfrac{q}{LC}=0$ （2 分）

$\Rightarrow \ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2=0$，其中$\beta=R/L,\omega_0=1/\sqrt{LC}$，因$R=\sqrt{L/C}$，故$\beta=\omega_0$

这是一个临界阻尼振动方程，通解为

$$q=(A_1+A_2t^*)e^{-\beta t^*};i=-\dot{q}=\left[-A_2+\beta(A_1+A_2t^*)\right]e^{-\beta t^*}$$

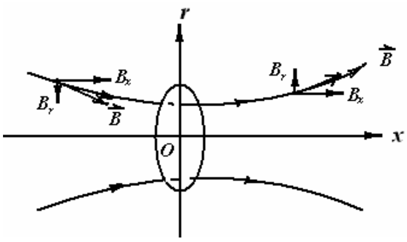
由初条件可解得

$A_1=q_0=C\varepsilon_0$，$A_2=\beta A_1-\dfrac{\varepsilon_0}{R}=\dfrac{RC}{L}\varepsilon_0-\dfrac{\varepsilon_0}{R}=0$

即得 $$q=A_1e^{-\beta t^*}=C\varepsilon_0{}^{-t^*/\sqrt{LC}}$$ （3 分）

19．（物理组必做，其他组不做）

在所讨论空间区域内，磁场 $\vec{B}$ 相对 x 轴对称分布。引入正的常量 α、β 和 B_0 ，磁场 $\vec{B}$ 的轴向分量 B_x 和径向分量 B_r 分别为



$$\left.\begin{aligned} &B_x=(1-\alpha x)B_0,\quad B_r=\beta rB_0 : \frac{1}{\alpha}>x>0 \\ &B_x=B_0,\qquad\qquad B_r=0 \quad : x=0 \\ &B_x=(1+\alpha x)B_0,\quad B_r=-\beta rB_0 : 0>x>-\frac{1}{\alpha} \end{aligned}\right\} B_0=10^{-2}T$$

质量 $m=5.0\times10^{-2}\,g$ 、半径 $r_0=0.5cm$、电感 $L=1.3\times10^{-8}\,H$ 的均匀超导（零电阻）圆环，开始时环内无电流，如图放置，环心位于 $x=0$ 点，x 轴为其中心垂直轴。

设 $t=0$ 时刻环具有沿 x 轴方向的平动速度 $v_0=50cm/s$,

(1)已知 $\alpha=16m^{-1}$,求 β ；

(2)确定而后环沿 x 轴的运动范围。

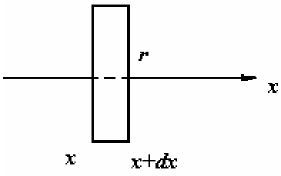


图1

解：(1) 在 $\frac{1}{\alpha}>x>0$ 区域，以 r 为端面半径，x 和 $x+dx$ 为两端面位置，取图 1 所示高斯圆筒面。据磁场高斯定理，有

$$\alpha B_x\pi r^2+B_r\cdot2\pi rdx=0\Rightarrow\beta rB_0=B_r=-\frac{\pi r^2}{2\pi r}\frac{dB_x}{dx}=\frac{\alpha}{2}rB_0$$

即得　　$\beta=\alpha/2=8m^{-1}$　　　　(3 分)

对 $0>x>\frac{1}{\alpha}$ 区域，同样可据高斯定理导得 $\beta=\alpha/2$。

(2) 在 $\frac{1}{\alpha}>x>0$ 区域，将环处于 x 位置的速度记为 v ,沿图 2（其中 $\vec{e}_x$ 为 x 轴方向矢量）方向动生感应电动势记为 ε_V ,感应电流记为 i ,自感电动势记为 ε_L ,则有

$$\varepsilon_V+\varepsilon_L=0,\quad \varepsilon_V=vB_r\cdot2\pi r_0=\alpha\pi r_0^2B_0v,\quad \varepsilon_L=-L\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow di=\frac{\alpha}{L}\pi r_0^2B_0vdt=\frac{\alpha}{L}\pi r_0^2B_0dx$$

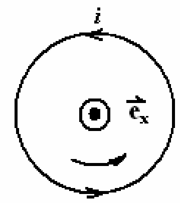


图2

两边积分，因 $x=0$ 时 $i=0$,取得　$i=\frac{\alpha}{L}\pi r_0^2B_0x$　　　　(3 分)

环因此受安培力　　$F_x=-iB_r\cdot2\pi r_0=-\frac{\alpha^2}{L}\pi^2r_0^4B_0^2x$

与 $F_x=m\ddot{x}$ 联立，

得 $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$,其中　$\omega_0=\frac{\alpha\pi r_0^2B_0}{\sqrt{mL}}=\frac{16\pi(5.0\times10^{-3})^2}{\sqrt{5.0\times10^{-5}\times1.3\times10^{-8}}}s^{-1}=15.6s^{-1}$　(2 分)

可见，环因 v_0 离 $x_0=0$ 点，进入 $\frac{1}{\alpha}>x>0$ 区域后，即作简谐运动，右振幅为

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\frac{v_0}{\omega}=\frac{0.5}{15.6}m=3.2\times10^{-2}m$$　　(1 分)

经过半个振动周期，环返回到 $x=0$ 时具有大小同为 $v_0=50cm/s$ 的反向速度。因对称性，环进入 $0>x>\frac{1}{\alpha}$ 区域。仍作角频率为 ω_0 的简谐振动，左振幅同为 $A=3.2\times10^{-2}m$ 。因此，$t>0$ 后，环沿 x 轴电运动范围为

$3.2cm \geq x \geq -3.2cm$ （1 分）