传感-作业1-彭程-2020011075

1-1 什么是仪表的灵敏度和分辨率？两者间存在什么关系？

- 灵敏度用公式表示为 $S=\frac{\Delta x}{\Delta y}$，其中 Δx 表示仪表输入的变化量, Δy表示仪表输出的变化量，通过比值定义的方式，灵敏度可用于表示仪表对被测参数变化的灵敏程度。
- 分辨率指仪表输出能响应和分辨的最小输出量，表示一个测量系统对输入信号的分辨极限。
- 一般而言两者正相关，灵敏度高的仪表分辨率也高，测量误差更小，二者都可以用于表征仪表系统的敏感程度。

2-1 准确度和测量不确定度的定义是什么？两者关系如何？

- 测量准确度的定义为在同样条件下多次测量结果的平均值与真值之差，可用于表示测量结果与真实值的接近程度。
- 测量不确定度表示测量结果的不可信程度 (分散程度)，是与测量结果相关联的参数，用测量平均值的标准偏差、标准偏差的倍数或置信区间的半宽度表示。需要注意的是测量不确定度不反映测量结果与真值 是否接近的程度。
- 二者是对仪器测量结果不同角度的表示。一般而言, 测量结果可表示为 $M\in A_0+b\pm U$，其中，b为测量准确度，U为测量不确定度，测量准确度表示测量结果与真值的距离或接近程度，测量不确定度表示测量的标准偏差，准确度与真值有关，不确定度与真值无关。

2-3 正态分布变量以50%的概率落在区间a至b中，求该量的最佳估计值。设Δ=(b-a)/2是区间的半宽，求标准不确定度U与Δ的关系。

- 由于为正态分布，所以最佳估计值是 $\frac{a+b}{2}$
- 根据正态分布置信概率的数值表，当置信概率 $\phi(z)=0.5000$ 时，置信系数 $z=0.6745$，故该正态分布的标准差为 $0.67\sigma=\frac{b-a}{2}=\Delta$, $\sigma=1.49\Delta$, 所以 B 类标准不确定度为 $U=\sigma=1.49\Delta$ 。

2-4 某一测试报告给出L=(2.323±0.041)mm，置信概率为0.9545≈95%。求B类标准不确定度以及B类相对标准不确定度。

- 根据正态分布置信概率的数值表, 当置信概率 $\phi=0.9545$ 时, 置信系数 $k=2.0$ 。
- 由于 $L=(2.323\pm 0.041)\mathrm{mm}$, 即扩展不确定度 $U=0.041\ \mathrm{mm}$, 因此 B 类标准不确定度 $U_B=\frac{U}{k}=0.021\ \mathrm{mm}$, B 类相对标准不确定度 $U_{Br}=\frac{U_B}{2.323\ \mathrm{mm}}=0.904\%$ 。

2-5 已知最大允许误差为Δ，并且测量值在M±Δ 范围内可视为均匀分布，如何计算B类标准不确定度？(含计算过程)

- 由于测量值在 $[M-\Delta, M+\Delta]$ 区间内服从均匀分布, 因此二阶中心距 $\sigma^2=\int_{-\Delta}^{\Delta}x^2\frac{1}{2\Delta}\mathrm{d}x=\frac{\Delta^2}{3}$, 故 $\sigma=\frac{\sqrt{3}\Delta}{3}$
- 故 B 类标准不确定度为 $U_B=\frac{\sqrt{3}\Delta}{3}=0.577\Delta$ 。

2-6 输出量为标称值150mm的杆的长度，所用测长仪在所使用的这一段长度所给出的系统偏差是-0.06mm，输入量系统偏差的不确定度可以忽略不计，该杆经过了n=20次独立重复测量，结果如下所示，求输出量的最佳估计值及其测量不确定度U(y)。（写出计算式及计算结果）

- 平均值: $A=\sum_{i=1}^{20}M_i=150.02\ \mathrm{mm}$
- 输入量系统偏差的不确定度可以忽略, 且系统偏差 $b=-0.06\ \mathrm{mm}$ 所以真值的最佳估计值为: $A-b=150.08\ \mathrm{mm}$
- 测量不确定度: $U_{(y)}=\sqrt{\frac{1}{n\times(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}(M_i-A)^2\right)}=0.02\ \mathrm{mm}$

- 测量出的长度应写为: $150.08 \pm 0.02 \mathrm{~mm}$

2-7 对同一被测物理量用不同种方法测量得到mm组测量数据 $(x_{1i}, x_{2j}, \cdots, x_{mi})$ 。已知其平均值和方差 分别为 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_{\mathrm{m}}^2)$ 时, 求综合这组组数据的最佳方法。

- 利用加权平均法对多传感器数据进行融合, 设加权平均的权重分别为 $w_1, w_2, \cdots w_m$, 满足 $w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1$, 则最终融合后的结果可表示为 $\hat{x}_i = w_1 x_{1i} + w_2 x_{2i} + \cdots + w_m x_{mi}$ 求解使加权平均结果的不确定性最小的 w_i 。
- 由于:

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_m - x}{\sigma_m}\right)^2\right]$$

- 求导即可解得:

$$w_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

- 计算数据融合后的均值

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{m} w_i X_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma_i^2} X_i}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

- 此时:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

2-7+ 使用两种不同精度的激光测距仪测量某距离的结果分别是 $Z_1 = 300 \mathrm{~mm}, \sigma_1 = 2 \mathrm{~mm}; Z_2 = 310 \mathrm{~mm}, \sigma_2 = 1 \mathrm{~mm}$, 求其数据融合结果Z及不确定度 σ , 并解 释其含义。

- 根据题 2-7 中所得公式, 数据融合结果:

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} x_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} x_2 = 302mm$$

- 不确定度为:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 0.8 \mathrm{~mm}^2$$
$$\hat{\sigma} = 0.894 \mathrm{~mm}$$

- 上述数据融合方式满足 $\hat{x} = \operatorname{argmin}\left[\left(\frac{x_1 - x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x}{\sigma_2}\right)^2\right]$, 方差小的数据权重大, 最终不确定度小于融合前数据的不确定度。因此, 通过加权平均, 可以改善被测量的估计精度, 降低不确定度。

2-8 上述2-7题中, 如果各种检测方法的方差相同, 但测量数据的个数不同, 即已知测量平均值和 测量数据个数分别为 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ 时, 又该如何综合这些数据?

- 对于方法i，多次测量取平均得到的数据方差为：$\hat{\sigma_i}^2 = \frac{\sigma_i^2}{n_i}$，所以我们可以将平均值看为测量方法不确定度为$\hat{\sigma}_i$的新方法，于是又回到了2.7的问题。
- 计算数据融合后的均值(即所有σ_i换为$\hat{\sigma}_i$)

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{m} w_i X_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\hat{\sigma}_i^2} X_i}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\hat{\sigma}_j^2}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\hat{\sigma}_j^2}}$$