思考题 5

1. 随机变量 X 在 $[0,1]$ 取值，且 $\forall 0 \le x < y \le 1$，$P(x < X \le y)$ 只依赖于 $y-x$，试证：$X \sim U[0,1]$。

2. 记 $X \sim G(\alpha,\beta)$（称参数为 α,β 的 Γ 分布），若

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（1） 求出 X 的矩母函数 $M_X(u)$，并由此求出 $E(X^n)$。

（2） 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim G(\alpha_i,\beta)$，试求 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的分布。

（3） 试问 $Y=-2\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ 是否为 Γ 分布，为什么？

（4） 证明 $U=X_1+X_2$ 与 $V=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ 相互独立。

3. 若 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，且 $X_i \sim E(\beta)$（参数为 β 的指数分布），记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$。如果记 Y 为 $S_n \in [0,t]$ 的个数，试求 Y 的分布。

4. 记 $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,\ \alpha>0,\beta>0$，称 X 服从参数为 α,β 的 B 分布，如果它的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$

设 $Y_i \sim G(\alpha_i,\beta)$ 相互独立，试证 $V=\dfrac{Y_1}{Y_1+Y_2} \sim \mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)$。

5. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，记 $X^{(1)}=\min\limits_{1\le i\le n}X_i,\quad X^{(n)}=\max\limits_{1\le i\le n}X_i$

（1）若 $X_1 \sim Ge(p)$，求 $(X^{(1)},X^{(n)})$ 的分布律；

（2）若 $X_1 \sim E(\lambda)$，求 $(X^{(1)},X^{(n)})$ 的分布密度。