数 学 作 业 纸

（科目：随机数学与统计

班级：自93　　姓名：周义亚　　编号：2019010702　　第 1 页

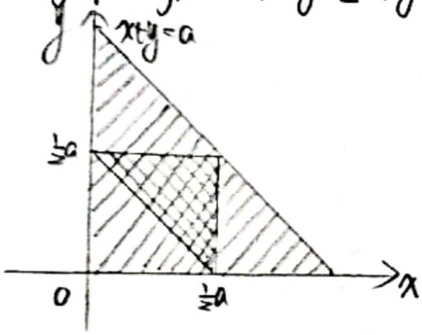
1. 设木棍长为a，分成的三段中其中两端分别为x, y，则$x+y<a$.

$\Omega = \{(x,y) \mid x+y<a, x>0, y>0\}$

记这三段能搭成三角形为事件A，

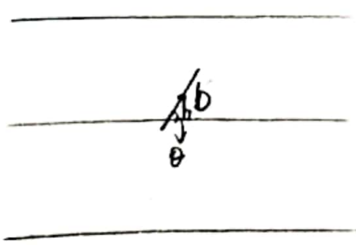
则 $A=\{(x,y) \mid (x,y)\in\Omega$ 且 $x+y>a-x-y$,
$a-x-y+x>y,\ a-x-y+y>x\}$

$=\{(x,y) \mid (x,y)\in\Omega$ 且 $x+y>\frac{1}{2}a,\ y<\frac{1}{2}a,\ x<\frac{1}{2}a\}$



$P(A)=\frac{测A}{测\Omega}=\frac{1}{4}$

2.（Buffon问题）

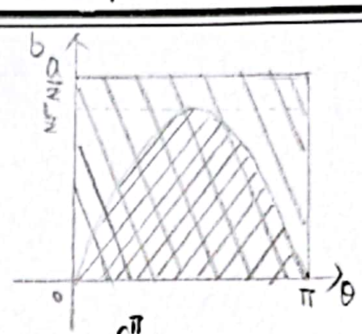


设这根针中点距最近的平行线的距离为b，与平行线的夹角为θ.

则 $\Omega=\{(\theta,b) \mid 0\le b\le \frac{a}{2},\ 0\le\theta\le\pi\}$

记针与平行线相交为事件A，

则 $A=\{(\theta,b) \mid (\theta,b)\in\Omega$ 且 $\frac{l}{2}\sin\theta>b\}$



$$p=P(A)=\frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\theta\, d\theta}{\frac{a}{2}\cdot\pi}=\frac{2l}{\pi a}$$

(3) $P(A)=\frac{A_n^n}{N^n}=\frac{n!}{N^n}$

$P(B)=\frac{A_N^n}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$

(4)

$50\times p+50\times 3p=1.$

$50\times 4p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{200}$

取一数为平方数可能是

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

设此事件为A则 $P(A)=7\times p+3\times 3p=16p=0.08$

(5) 证明：

(a) 先 $A\subset B \Rightarrow I_A(x)\le I_B(x)$ 证明：

$A\subset B \Rightarrow \forall x\in A$ 有 $x\in B$.

若 $x\in A$，则 $x\in B$，则 $I_A(x)=I_B(x)=1$，$\therefore I_A(x)\le I_B(x)$ 成立

若 $x\notin A$，则 $I_A(x)=0$，$\therefore I_A(x)\le I_B(x)$

再 $I_A(x)\le I_B(x) \Rightarrow A\subset B$ 证明：

$\because I_A(x)\le I_B(x)$

$\therefore \forall x\in A$，有 $I_A(x)=1$ $\therefore 1\le I_B(x)$ 则 $I_B(x)=1$，$\therefore x\in B$

$\therefore \forall x\in A,\ x\in B$

$\therefore A\subset B$

(b) $I_{\bigcup_i A_i}(x)=\max\limits_i I_{A_i}(x)$ 的证明：

对于任意 x：

①若 $\exists i_0$, $x\in A_{i_0}$, 则 $x\in\bigcup\limits_i A_i$, $I_{\bigcup_i A_i}(x)=1$

而 $\max\limits_i I_{A_i}(x)=I_{A_{i_0}}(x)=1$

$\therefore I_{\bigcup_i A_i}(x)=\max\limits_i I_{A_i}(x)$

②若 $\forall i$, $x\notin A_i$, 则 $x\notin\bigcup\limits_i A_i$, $I_{\bigcup_i A_i}(x)=0$

由于 $\forall i$, $x\in A_i$, $I_{A_i}(x)=0$

$\therefore \max\limits_i I_{A_i}(x)=0$

$\therefore I_{\bigcup_i A_i}(x)=\max\limits_i I_{A_i}(x)$

综上，$I_{\bigcup_i A_i}(x)=\max\limits_i I_{A_i}(x)$

$I_{\bigcap_i A_i}(x)=\min\limits_i I_{A_i}(x)$ 的证明：

对于任意 x

①若 $\forall i$, $x\in A_i$, 则 $x\in\bigcap\limits_i A_i$, $I_{\bigcap_i A_i}(x)=1$

由于 $\forall i$, $x\in A_i$, $I_{A_i}(x)=1$

$\therefore \min\limits_i I_{A_i}(x)=1$ $\therefore I_{\bigcap_i A_i}(x)=\min\limits_i I_{A_i}(x)$

②若 $\exists i_0$, $x\notin A_{i_0}$, 则 $x\notin\bigcap\limits_i A_i$, $I_{\bigcap_i A_i}(x)=0$

而 $\min\limits_i I_{A_i}(x)=I_{A_{i_0}}(x)=0$

$\therefore I_{\bigcap_i A_i}(x)=\min\limits_i I_{A_i}(x)$

综上，$I_{\bigcap_i A_i}(x)=\min\limits_i I_{A_i}(x)$