1. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 服从参数为 $n, p_1, \cdots, p_n$ $(n \in N, 0 \le p_i \le 1)$ 的多项分布，即其分布为

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_k = x_k)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1! x_2! \cdots (n - x_1 - \cdots - x_k)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots (1 - p_1 - \cdots - p_k)^{(n - x_1 - \cdots - x_k)}, & x_1 + x_2 + \cdots + x_k \le n, \quad x_i \in N, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

（1）试求出 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 的任意 m 维 $(m < k)$ 分量的分布？

（2）试求出 X_i 与 X_j 的相关系数。

2. 设 $X \sim Ge(p), Y \sim Ge(\tilde{p})$ 且相互独立，试证 $X - Y$ 与 $\min(X, Y)$ 相互独立。

3. X, Y 独立同分布，且取正整数为值，则 $X \sim Ge(p)$ 当且仅当对任意正整数 j，有 $P(\min(X, Y) = j, X - Y = 0) = P(\min(X, Y) = j) P(X - Y = 0)$.

4. 某城市有汽车 N 辆，编号从 1 到 N，某人站在街头，将所看到的不同的汽车号码记下：$X_1, X_2, \cdots, X_n (n < N)$, 令 $X = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，试证：$N = \dfrac{n+1}{n} EX - 1$。

5. 在上题中，如果此人将所有他看到的汽车号码都记下，即若一辆车在他面前经过两次，他就记下两个相同的号码（即放回抽样），则 EX 为多少，它是否可以用 $\dfrac{nN}{n+1}$ 作为其近似值。

6. 记 $Cov(X, Y | Z) \triangleq E[(X - E(X | Z))(Y - E(Y | Z)) | Z]$，试证明：

（1）$Cov(X, Y | Z) = E(XY | Z) - E(X | Z) E(Y | Z)$

（2）$Cov(X, Y) = E[Cov(X, Y | Z)] + Cov(E(X | Z), E(Y | Z))$

7. 设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 为对称简单随机徘徊，且 $X_0 = 0$。

求 $P(X_1 \ne 0, X_2 \ne 0, X_3 \ne 0, X_4 \ne 0, X_5 \ne 0, X_6 = 0)$。