(6.4)

2. ∵ T_1、T_2 分别是 θ_1、θ_2 的UMVUE

∴ $ET_1=\theta_1$，$ET_2=\theta_2$

且有对于∀零无偏估计量 φ

$Cov(T_1,\varphi)=0$ ，$Cov(T_2,\varphi)=0$

∵ $E(aT_1+bT_2)=a\theta_1+b\theta_2$

且对于∀零无偏估计量 φ

$Cov(aT_1+bT_2,\varphi)=Cov(aT_1,\varphi)+Cov(bT_2,\varphi)$

$=aCov(T_1,\varphi)+bCov(T_2+\varphi)=0+0=0$

∴ aT_1+bT_2 是 $a\theta_1+b\theta_2$ 的UMVUE.

6.(1)

$L(\theta)=f(x_1,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)$

$=\theta^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}$

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)$

$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)$

令 $\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=0\Rightarrow\hat\theta=-\frac{n}{\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)}$

$\theta<\hat\theta$，$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}>0$，$L(\theta)$ 单增

$\theta>\hat\theta$，$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}<0$，$L(\theta)$ 单减

∴ $\theta=\hat\theta$ 时，$L(\theta)_{max}$

即 $\frac{1}{\theta}=-\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)$ 时，$L(\theta)_{max}$

∴ $\hat g(\theta)_{MLE}=-\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln X_i$

(2) 令 $t=g(\theta)=\frac{1}{\theta}$，则 $f(x;t)=\frac{x^{\frac{1}{t}-1}}{t}$

$I(t)=-E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;t)\right)$

$=-E\left(\frac{2}{t^3}\ln x+\frac{1}{t^2}\right)$

$E\ln X=\int_0^1\ln x\,\theta x^{\theta-1}dx$

令 $m=-\ln x\Rightarrow x=e^{-m}$ $dx=-e^{-m}dm$

上式 $=\int_{+\infty}^0(-m)\theta e^{(\theta-1)(-m)}(-e^{-m})dm$

$=-\int_0^{+\infty}m\theta e^{(\theta-1)(-m)}e^{-m}dm$

$=-\int_0^{+\infty}m\theta e^{-m\theta}dm$

$=-\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$

$=-\frac{1}{\theta}=-t$

∴ $I(t)=\frac{1}{t^2}$

∴ CR下界：$D_\theta g(\theta)=\frac{1}{nI(t)}=\frac{t^2}{n}=\frac{1}{n}g^2(\theta)$

由(1) $\hat g(\theta)_{MLE}=-\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$

$E\left(\hat g(\theta)_{MLE}\right)=E\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln X_i\right)$

$=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(\ln X_i)$

$=-\frac{1}{n}\cdot nE\ln X$

$=-\cdot-\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\theta}$

∴ $\hat g(\theta)_{MLE}$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计

$D\left(\hat g(\theta)_{MLE}\right)=D\left(-\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)\right)$

$=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^n\ln X_i\right)=\frac{D(\ln X)}{n}$

$E(\ln^2X)=\int_0^1\ln^2x\,\theta x^{\theta-1}=\int_{+\infty}^0 m^2\theta e^{(\theta-1)(-m)}(-e^{-m})dm$

$=\int_0^{+\infty}m^2\theta e^{-m\theta}dm=\frac{1}{\theta^2}\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt=\frac{2}{\theta^2}$

∴ $D(\ln X)=E(\ln^2X)-E^2(\ln X)=\frac{1}{\theta^2}$ ∴ $D(\hat g(\theta)_{MLE})=\frac{1}{n\theta^2}=\frac{g^2(\theta)}{n}$

∴ $D(\hat g(\theta)_{MLE})$ 满足C-R下界，即 $\hat g(\theta)_{MLE}$ 为 $g(\theta)$ 的有效估计

数 学 作 业 纸

（科目：　　　）

班级：　　　　姓名：　　　　编号：　　　　第　　页

12. 设 T 为 μ^2 的 UMVUE. 由零无偏估计

定理：$\forall$ 零无偏估计量 φ, $E(T\cdot\varphi)=Cov(T,\varphi)=0$

$$E(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\cdot\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\mu)\,dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\cdot(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\mu x_i+\mu^2)}dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\cdot(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}e^{-\frac{n}{2}\mu^2}e^{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i}dx_1\cdots dx_n=0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}e^{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i}dx_1\cdots dx_n=0$$

上式对 $\forall\mu$ 均成立，故两边分别对 μ 求两次导，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\, n\bar{x}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}e^{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i}dx_1\cdots dx_n=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\, n^2\bar{x}^2 e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}e^{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i}dx_1\cdots dx_n=0 \quad (*)$$

而 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n})$ $\therefore E\bar{X}=\mu$, $D\bar{X}=\frac{1}{n}$, $E\bar{X}^2=\mu^2+\frac{1}{n}$

$\therefore E(\bar{X}^2-\frac{1}{n})=\mu^2$

$\therefore T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}$ 是 μ^2 的无偏估计.

而 由(*)式 $E(T\varphi)=E(\bar{X}^2\varphi)=0$　　$\forall\varphi$ 为零无偏估计量.

$\therefore T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}$ 是 μ^2 的 UMVUE

下面求DT 和C-R下界：

C-R下界：

$$\ln f(X;\mu)=\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{(X-\mu)^2}{2}$$

$$\frac{\partial\ln f(X;\mu)}{\partial\mu}=X-\mu$$

$$\frac{\partial^2\ln f(X;\mu)}{\partial\mu^2}=-1$$

$\therefore I(\mu)=1$

$\therefore$ C-R下界 $\frac{(g'(\mu))^2}{nI(\mu)}=\frac{(2\mu)^2}{n}=\frac{4\mu^2}{n}$

$D T=D\bar{X}^2=E\bar{X}^4-(E\bar{X}^2)^2$

由矩母函数 $M_X(u)=e^{\mu u+\frac{1}{2}u^2\sigma^2}$ 可求得

$E\bar{X}^4=\frac{3}{n^2}+\frac{6}{n}\mu^2+\mu^4$ $\therefore DT=\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n}\mu^2$

$\therefore DT>\frac{4\mu^2}{n}$ 即此UMVUE达不到C-R不等式的下界，其不是有效估计

14.

(1) $f(x;\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{x(x-1)}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-(x+1)(x-1)}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{x(x+1)}{2}}$　$x=0,-1,1$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

$$=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\right)}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i}{2}}$$

$$\ln L(\theta)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\right)}+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(-\frac{1}{1-\theta}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{\theta}$$

$$=\frac{1}{2\theta(1-\theta)}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i\right)(1-\theta)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2\theta(1-\theta)}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_i-2\theta\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$$

令 $\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=0$，则 $\theta_1=\frac{1}{2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

$$\therefore\ \hat{\theta}_1=\frac{1}{2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

$$E\hat{\theta}_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{n}{2}E\left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\left(\frac{1-\theta}{2}E\left(\frac{-1}{1+\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\right)+\frac{\theta}{2}E\left(\frac{1}{1+\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\cdot\frac{2\theta-1}{2}E\left(\frac{1}{1+\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\right)$$

令 $Y\triangleq\sum_{i=2}^{n}X_i^2\sim B\left(n-1,\frac{1}{2}\right)$

$$\therefore\ E\left(\frac{1}{1+Y}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^{i}}{1+i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}\frac{1}{1+i}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}C_n^{i+1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\left(2^n-1\right)$$

$$=\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ E\hat{\theta}_1=\frac{1}{2}+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$=\theta-\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\neq\theta$$

$\therefore\ \hat{\theta}_1$ 不是无偏估计.

数学作业纸 （科目： ）

班级： 姓名： 编号： 第 页

(2)

$$EX = -\frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta - \frac{1}{2} = \bar{X}$$

$$\therefore \hat{\theta}_2 = \bar{X} + \frac{1}{2}$$

(3) $I(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(X;\theta)\right)^2$

$$\ln f(x;\theta) = \frac{1}{2}X(X-1)\ln\frac{1-\theta}{2} - (X^2-1)\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X(X+1)\ln\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{2}X(X-1)\cdot\frac{-1}{1-\theta} + \frac{1}{2}X(X+1)\frac{1}{\theta}$$

$$= \frac{1}{2\theta(1-\theta)}\left(X(X+1)(1-\theta) - X(X-1)\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2\theta(1-\theta)}\left((1-2\theta)X^2 + X\right)$$

$$E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2 = E\left(\frac{1}{2\theta(1-\theta)}\left((1-2\theta)X^2 + X\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4\theta^2(1-\theta)^2}\left((1-2\theta)^2EX^4 + EX^2 + 2(1-2\theta)EX^3\right)$$

$$EX^2 = \frac{1}{2} \qquad EX^4 = \frac{1}{2} \qquad EX^3 = EX = \theta - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{上式} = \frac{1}{4\theta^2(1-\theta)^2}\left((1-2\theta)^2\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2(1-2\theta)(\theta-\frac{1}{2})\right)$$

$$= \frac{1}{2\theta(1-\theta)}$$

$$\therefore \text{C-R 下界}: \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{2\theta(1-\theta)}{n}$$

（科目：随机数学与统计

数 学 作 业 纸

班级：　　　　姓名：　　　　编号：　　　　第　　页

(6.5)

2. 样本X的分布：$X|\theta \sim U[\theta,\theta+1]$

$f(x|\theta)=\prod_{i=1}^{n} 1_{\{\theta<x_i<\theta+1\}}$

θ的先验分布

$\pi(\theta)=\frac{1}{6}$　　$10<\theta<16$

由观测值 $x_1=11.7$ $x_2=12.1$, $x_3=12.0$

样本的边际密度函数：

$m(x)=\int_{10}^{16} f(x|\theta)\cdot\frac{1}{6}d\theta=\int_{10}^{16} 1_{\{\theta<x_1,x_2,x_3<\theta+1\}}\cdot\frac{1}{6}d\theta$

$=0.6\times\frac{1}{6}=0.1$

应用Bayes公式求后验分布：

$\pi(\theta|x)=\frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{m(x)}=10\cdot\prod_{i=1}^{3} 1_{\{\theta<x_i<\theta+1\}}\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{3}1_{\{11.1<\theta<11.7\}}$

$\therefore \theta|X \sim U(11.1,11.7)$

7. $p(x|\theta)=\theta x^{\theta-1}$, $0<x<1$

令 $Y=-\ln X$，则 $p(y|\theta)=\theta e^{-\theta y}$，$y>0$

$X_1\cdots X_n$ 为X的样本，令 $Y_i=-\ln X_i$

则 $Y_1\cdots Y_n$ 为Y对应的样本，

$f(Y|\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta e^{-\theta y_i}=\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}y_i}$　　$y_i>0$ $i=1,2,\cdots,n$.

$\pi(\theta)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta}$　　$\theta>0$

$\therefore \pi(\theta|Y)\propto\theta^{n+\alpha-1}e^{-(\lambda+\sum_{i=1}^{n}y_i)\theta}$　　$\theta>0$.

$\therefore \theta|Y\sim Ga(n+\alpha,\lambda+\sum_{i=1}^{n}y_i)$

$\therefore \hat\theta=E(\theta|Y)=\frac{n+\alpha}{\lambda+\sum_{i=1}^{n}Y_i}=\frac{n+\alpha}{\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

8. 样本X的分布：

$f(x|\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}1_{\{0<x_i<\theta\}}=\frac{1}{\theta^n}1_{\{0<x_1,x_2,\cdots x_n<\theta\}}$

θ的先验分布：

$\pi(\theta)=\frac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^{\beta+1}}$，$\theta>\theta_0$

$h(x,\theta)=\frac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^{n+\beta+1}}1_{\{0<x_1\cdots x_n<\theta\}}$　　$\theta>\theta_0$

$\pi(\theta|X)\propto\frac{1}{\theta^{n+\beta+1}}$　　$\theta>\max\{\theta_0,\max_i\{x_i\}\}$

∴后验分布依然是帕累托分布，

参数β变成了 $n+\beta$

参数 θ_0 变成了 $\max\{\theta_0,\max_i\{x_i\}\}$

∴帕累托分布是θ的共轭先验分布.

(2) 对于参数为 β、θ_0 的Pareto分布，

$E\theta=\int_{\theta_0}^{+\infty}\frac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^{\beta+1}}\cdot\theta d\theta$

$=\beta\theta_0^\beta\int_{\theta_0}^{+\infty}\theta^{-\beta}d\theta$

$=\frac{\beta\theta_0^\beta}{-\beta+1}\theta^{-\beta+1}\Big|_{\theta_0}^{+\infty}$

$=\frac{\beta\theta_0^\beta}{\beta-1}\cdot\theta_0^{-\beta+1}$

$=\frac{\beta}{\beta-1}\theta_0$

$\therefore\hat\theta=E(\theta|X)=\frac{n+\beta}{n+\beta-1}\cdot\max\{\theta_0,\max_i x_i\}$

$=\frac{n+\beta}{n+\beta-1}\max\{\theta_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

(6.1)

11. ①求λ的充分统计量

$f(x;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$　　$x_i>0$ $i=1,2,\cdots,n$

由因子分解定理：

$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是λ的充分统计量

$\boxed{\begin{array}{l}\text{令}\ \frac{\partial\ln L(\lambda)}{\partial\lambda}=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}\\ \hat\lambda_{MLE}=\frac{1}{\bar X}\quad \bar X\text{也为}\lambda\text{的充分统计量}\end{array}}$

数学作业纸 （科目： ）

班级： 姓名： 编号： 第 页

$X\sim E(\lambda)$ 即 $X\sim Ga(1,\lambda)$

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(n,\lambda)$

$f(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}\quad x>0.$

选取 $Y=2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i$ 为~~枢轴量~~

则 $f(y)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\frac{y^{n-1}}{(2\lambda)^{n-1}}e^{-\frac{1}{2}y}\cdot\frac{1}{2\lambda}$

$=\frac{1}{2^n\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-\frac{1}{2}y}\quad y>0$

$\therefore Y\sim Ga(n,\frac{1}{2})$ 即 $Y\sim\chi^2(2n)$

② 等尾置信区间：

$P(y_{\frac{\alpha}{2}}\le Y\le y_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha.$

其中 $P(Y\le y_{\frac{\alpha}{2}})=\frac{\alpha}{2}.\ P(Y\le y_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}$

$\therefore y_{\frac{\alpha}{2}}=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)$

$y_{1-\frac{\alpha}{2}}=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)$

③ $\therefore$ 置信区间为 $\left[\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^{n} X_i},\ \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$

19.(1) 先求 $X_{(1)}$ 的分布：

$F_{X_{(1)}}(x)=P(X_{(1)}\le x)=P(\min_i X_i\le x)$

$=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x))$

$F_X(x)=\int_\theta^x e^{-(x-\theta)}dx=\int_0^{x-\theta}e^{-t}dt=\begin{cases}1-e^{-(x-\theta)} & x>\theta\\ 0 & 否则.\end{cases}$

$\therefore F_{X_{(1)}}(x)=1-\prod_{i=1}^{n}e^{-(x-\theta)}=1-e^{-n(x-\theta)}\quad x>\theta$

$f_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases}ne^{-n(x-\theta)} & x>\theta.\\ 0 & 否则\end{cases}$

令 $Y=X_{(1)}-\theta.$

则 $f_Y(y)=\begin{cases}ne^{-ny} & y>0\\ 0 & 否则\end{cases}$

$\therefore X_{(1)}-\theta\sim E(n)$ 与 θ 无关.

(2) 选取 Y 为枢轴量.

求置信区间：

$P(y_1\le Y\le y_2)=1-\alpha.$

~~其中 $P(Y\le y)=\frac{\alpha}{2}$~~

~~$\Rightarrow\int_0^{y_{\frac{\alpha}{2}}}ne^{-ny}dy=-e^{-ny}\Big|_0^{y_{\frac{\alpha}{2}}}=1-e^{-ny_{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\alpha}{2}$~~

~~$\Rightarrow y_{\frac{\alpha}{2}}=-\frac{1}{n}\ln(1-\frac{\alpha}{2})$~~

$\Rightarrow P(y_1\le Y\le y_2)=-e^{-ny}\Big|_{y_1}^{y_2}=e^{-ny_1}-e^{-ny_2}$

由于~~密度~~~~单调递减~~

$\because y_1=0$ 时置信区间最短.

此时有 $1-e^{-ny_2}=1-\alpha.$

$y_2=-\frac{1}{n}\ln\alpha$

$\therefore 0\le Y\le-\frac{1}{n}\ln\alpha.$

$\therefore$ 置信区间为

$[X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\alpha,\ X_{(1)}]$