清华大学本科生考试答题纸

B 卷

考试课程 系统工程导论　　考试时间：2020 年 6 月 1 日

姓名 张博睿　　班级 自75　　学号 2017011537

注意：请将所有答案写在自行准备的白纸上，考试结束后拍照后粘贴在下面空白处，在网络学堂上提交）

清华大学在线考试要求

在考试期间，不可使用、提供或接受未经授权的任何帮助或信息，不可请人代考或者代替别人考试，按要求独立答卷，不与他人进行交流。

严格遵守校规校纪，诚信考试！若有违反考试纪律行为，会按照《清华大学学生纪律处分管理规定》《清华大学学生纪律处分管理规定实施细则》给予处理。

请勿保留试题、扩散试题！

在考试期间，不可使用、提供或接受未经授权的任何帮助或信息，不可请人代考或代替别人考试，按要求独立答卷，不与他人进行交流。

严格遵守校规校纪，诚信考试！若有违反考试纪律行为，会按照《清华大学学生纪律处分管理规定》《清华大学学生纪律处分管理规定实施细则》给予处理，请勿保留试题、扩散试题。

1. 解. 已知 $dist(a,b)=(a-b)^T\Sigma(a-b)$, $\Sigma=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}$

从而，可以计算4个样本点两两距离如下：

$dist(x_1,x_2)=[-1\ -1]\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=4$

$dist(x_1,x_3)=[0,-1]\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=4$

$dist(x_1,x_4)=[-2,0]\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}=8$

$dist(x_2,x_3)=[1\ 0]\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=2$

$dist(x_2,x_4)=[-1\ 1]\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=8$

$dist(x_3,x_4)=[-2\ 1]\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=16$

须注意：$\begin{cases} dist(A,B)=\min(dist(a,b)),\ \forall a\in A,\ b\in B. \\ R(a,b)=\dfrac{1}{dist(a,b)}. \end{cases}$

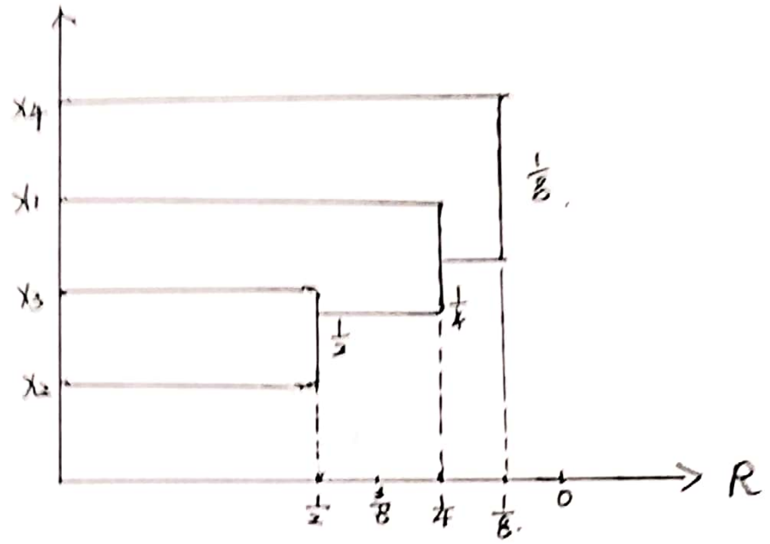
① 首先，4个样本各成一类. $C_1=x_1$, $C_2=x_2$, $C_3=x_3$, $C_4=x_4$.

② 其中 $R(x_2,x_3)=\frac{1}{2}$ 最大，故合并. $C_5=\{x_2,x_3\}$, $C_6=x_1$, $C_7=x_4$.

③ 其中 $R(C_5,C_6)=\frac{1}{4}$, $R(C_5,C_7)=\frac{1}{8}$, $R(C_6,C_7)=\frac{1}{8}$. 故合并 C_5,C_6. 得：$C_8=\{x_1,x_2,x_3\}$, $C_9=x_4$.

④ 最终 $R(C_8,C_9)=\frac{1}{8}$, 合并为 $C_{10}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$

聚类谱系图见下页



2. 解:

A). e(i): 表示后果C(i)以概率1发生的展望，数学记为.

$$e(i)=[e_1(i)\ e_2(i)\cdots e_k(i)]^T\in P\text{，其中 } e_j(i)=\begin{cases}1 & \text{if } j=i\\ 0 & \text{if } j\neq i\end{cases}$$

引入e(i)目的: 可以根据效用函数的线性性，将任意展望的效用计算问题转化为确定概率为1的e(i)效用加权，即:

$$u(\vec{p}(i))=p_1(i)e(1)+p_2(i)e(2)+\cdots+p_n(i)e(n).$$

B) AHP优点: ①定性与定量相结合

②可以解决不能完全数学建模问题、多准则、群决策

AHP缺点: ①具有主观性

②存在矩阵不一致性问题

AHP与多目标规划联系: AHP与多目标规划都使用判别矩阵特征分解并检验一致性的方式得到权重.

C). ① 系统建模：ISM (John Warfield)

② 系统分析：多项式回归（魏尔斯特拉斯）.

③ 系统决策：决策的过程（西蒙）、纳什均衡（纳什）

④ 系统评价：AHP (Saaty)

D) ① K-均值一定会收敛：首先每一步迭代中，有

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{t\in w_i}(x(t)-c_i)^T(x(t)-c_i) \le \sum_{i=1}^{k}\sum_{t\in w_i}(x(t)-c_i)^T(x(t)-c_i)$$

可见，每迭代一步，目标函数不增

根据"单调有界必收敛"可知算法收敛.

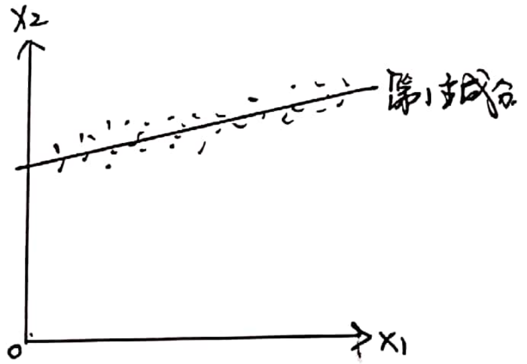
② 不一定最优：因为 k-means 是贪心算法，受初始值、样本分布影响大，只能保持收敛局部极值点

E) ① PCA步骤：1) 对数据进行规范化得 $\tilde{x}$

2) 计算 $\tilde{x}$ 的协方差矩阵，并特征分解 $\tilde{X}\tilde{X}^T$

3) 根据降维程度选择最大前 k 个特征值及特征向量.

4) 计算样本在低维空间投影

② 

③ PCA与病态线性回归：

[不同] PCA优化目标为 $\max\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{N} l^T(k)\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)l(k)$.（投影方差最大）

病态线性回归优化目标为 $\min\sum_{t=1}^{N}(x(t)-Ly(t))^T(x(t)-Ly(t))$.（误差最小）

[相同] 两者优化目标实则等价，并最终都使用协方差矩阵特征分解完成求解

④ 压缩比：$\eta = \frac{m\times N + m\times n + n + n}{n\times N}$ 其中：

- $m\times N$ 在m个主成分方向投影
- $m\times n$ m个主成分向量
- n 样本方差
- n 样本均值

F) ① 源远流长：大禹治水.

② 突然崛起：北极星导弹核潜艇计划

③ 迅速扩张：载人航天工程

④ 返璞归真：交通、地理、金融等

G) 可以。 ① 确定可达矩阵

② 计算底层要素 ($E(i) \supseteq F(i)$)

③ 判断并更新可达矩阵直至结束

H) 已知：$L = \sum_{i=1}^{n} [y_i \log(\hat{y}_i) + (1-y_i)\log(1-\hat{y}_i)]$，$\hat{y}_i = \frac{e^{ax_i}}{1+e^{ax_i}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{y}_i} = \frac{y_i}{\hat{y}_i} - \frac{1-y_i}{1-\hat{y}_i} = \frac{y_i - \hat{y}_i}{\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)}$$

$$\frac{d\hat{y}_i}{da} = \frac{x_i e^{ax_i}(1+e^{ax_i}) - e^{ax_i} x_i e^{ax_i}}{(1+e^{ax_i})^2} = \frac{x_i e^{ax_i}}{(1+e^{ax_i})^2}.$$

综上：$\frac{\partial L}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \hat{y}_i} \frac{d\hat{y}_i}{da} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - \hat{y}_i}{\hat{y}_i(1-\hat{y}_i)} \frac{x_i e^{ax_i}}{(1+e^{ax_i})^2}$，其中 $\hat{y}_i = \frac{e^{ax_i}}{1+e^{ax_i}}$

3. 解：

(1) 已知可达矩阵A.

① 选择4为参考变量：

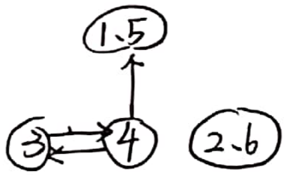
4指向：1.5

4被指：X

4互指：3.

4不指：2.6.

即



② 选择5为~~参~~考变量：

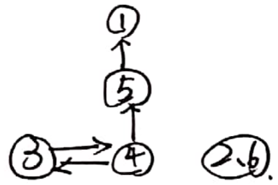
5指向：1

5被指：3.4

5互指：X

5不指：2.6.

合并，即



③ 选择2变量：

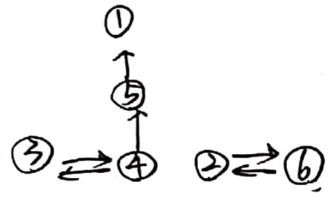
2指向：X

2被指：X

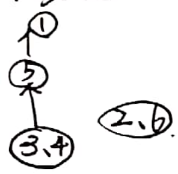
2互指：6.

2不指：1.3.4.5

合并修正，即



综上：骨架图为：



(2) 在上述骨架图基础上，邻接矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 解:

① 简单多数: $A = 4+7 = 11$　　$C = 9$

$B = 3$　　$D = 4+4 = 8$

最终选择 A.

② 绝对多数: Round 1: $A=11, B=3, C=9, D=8$ 未出现过半选择, B出局

Round 2: $A=11$　$C=12$ $D=8$. 未出现过半. D出局

Round 3: $A=15$　$C=16$.

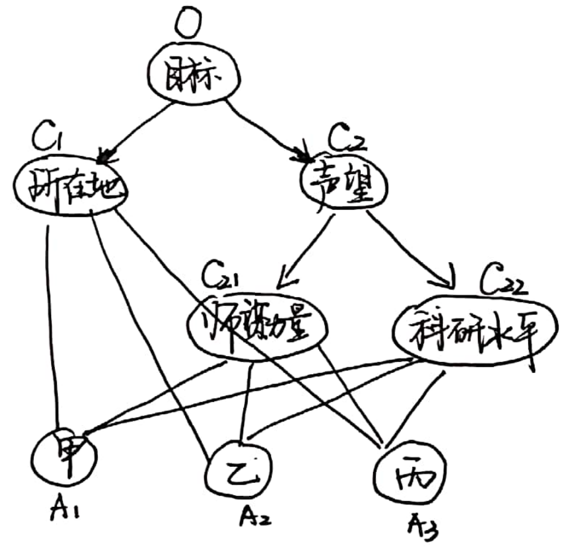
最终选择 C.

③ Borda 规则: $A = 3\times11 + 1\times11 = 44$　　$C = 9\times3 + 2\times14 + 4 = 59$

$B = 3\times3 + 2\times17 + 7 = 50$.　　$D = 8\times3 + 9\times1 = 33$

最终选择 C.

5. 解: A). 模型为:



B). B: 特征值为: 2,0 → 一致. ($(\lambda-1)^2-1=\lambda^2-2\lambda=0$)

C: 特征值为: 3,0,0 → 一致. ($\lambda^2(\lambda-3)=0$)

D: 特征值为: 3,0,0 → 一致 ($\lambda^2(\lambda-3)=0$)

c). 每个学校评分记为 $S_甲, S_乙, S_丙$ ($i=甲,乙,丙$).

$$S_i = w_{c_1} a_{c_1} + w_{c_{21}} a_{c_{21}} + w_{c_{22}} a_{c_{22}}.$$

① 通过对 A 分解，得：特征向量为 $\left[\frac{3}{10}\ \frac{7}{10}\right]^T$

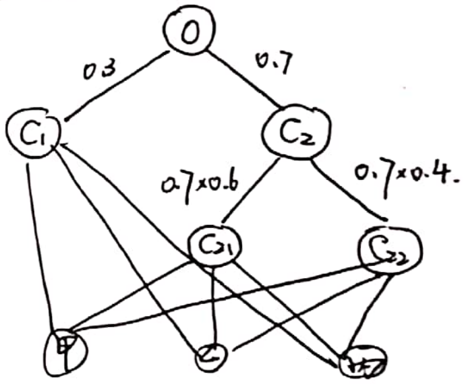
② 对B分解，得：$w_B = \left[\frac{3}{5}\ \frac{2}{5}\right]^T$

③ 对C分解，得：$w_C = \left[\frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{2}{5}\right]^T$

④ 对D分解，得：$w_D = \left[\frac{3}{10}\ \frac{4}{10}\ \frac{3}{10}\right]^T$

⑤ 对E分解，得：$w_E = \left[\frac{7}{10}\ \frac{2}{10}\ \frac{1}{10}\right]^T$.

从而，标记权重在图上：



综上：$S_甲 = 0.3\times0.2 + 0.42\times0.3 + 0.28\times0.7 = 0.382$

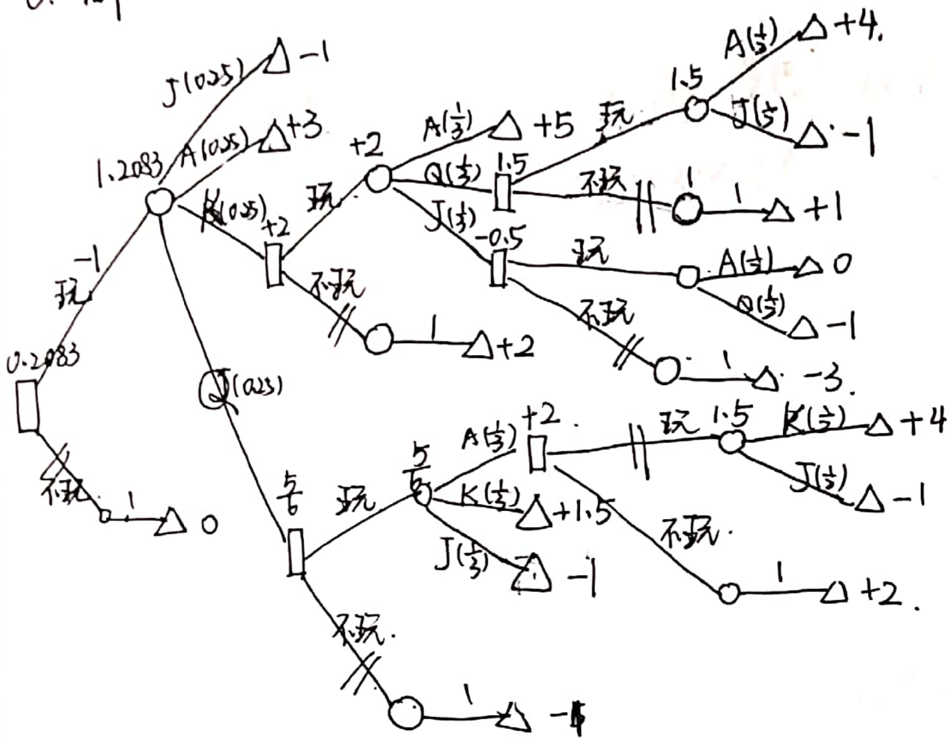
$S_乙 = 0.3\times0.4 + 0.42\times0.4 + 0.28\times0.2 = 0.344$

$S_丙 = 0.3\times0.4 + 0.42\times0.3 + 0.28\times0.1 = 0.274$

最终选择甲

扫描全能王 创建

6. 解:



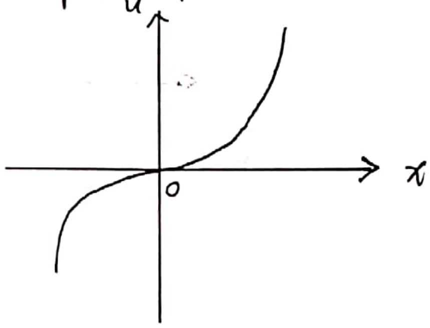
综上: 应选择玩. 收益为 $\frac{5}{24} \approx 0.2083$

扫描全能王 创建

7. 解：A) $u(x)=x^3$

对甲同学：x取值偏向负半轴，为凹函数，是保守型

对老板：x取值偏向正半轴，为凸函数，是冒险型.



B). 老板持有券的效用为 $U_{持} = pU(R)+(1-p)u(0) = pR^3$.

设等效用下价格为 Q_1，则 $u(Q_1) = pR^3 = Q^3 \Rightarrow Q=\sqrt[3]{p}\,R$

综上：其可接受最低价为 $(p)^{\frac{1}{3}}R$.

C) 同学若不买 $U(0)=0$.

若以 Q_2 买入. $U_{买}= p(-Q_2+R)^3+(1-p)(-Q_2)^3 = p(R-Q_2)^3-(1-p)Q_2^3$

令上述两者相等 $p(R-Q_2)^3=(1-p)Q_2^3$.

解：$Q_2=\frac{p^{\frac{1}{3}}}{(1-p)^{\frac{1}{3}}+p^{\frac{1}{3}}}R$

综上最高价为 $\frac{p^{\frac{1}{3}}}{(1-p)^{\frac{1}{3}}+p^{\frac{1}{3}}}R$

D). 由于 $Q_2=\frac{p^{\frac{1}{3}}}{(1-p)^{\frac{1}{3}}+p^{\frac{1}{3}}}R < p^{\frac{1}{3}}R = Q_1$ $\left((1-p)^{\frac{1}{3}}+p^{\frac{1}{3}}>1\right)$

说明老板最低价大于同学最高价，不能交易