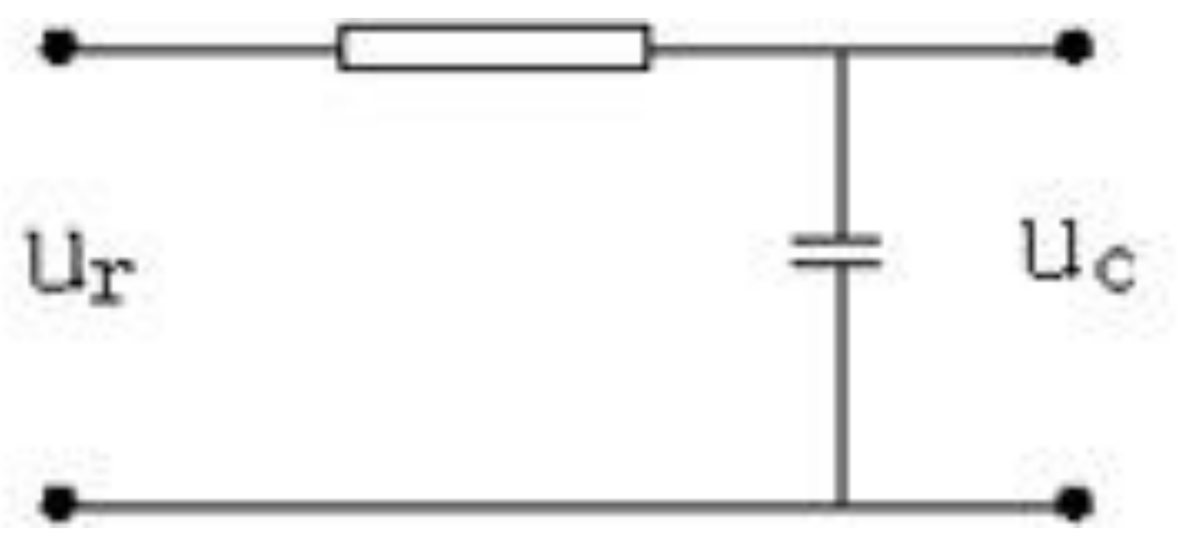
第四章：控制系统的频率响应分析

频率特性

从 RC 电路对正弦信号的响应，引出频率特性



$$u_r = Xsin\omega t$$

由电路知识可知，u_c 也是同频率的正弦信号（稳态时），

但幅值和相位发生变化：

$$\frac{\dot{u}_c}{\dot{u}_r} = \frac{\frac{1}{j\omega c}}{R + \frac{1}{j\omega c}} = \frac{1}{RCj\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{(RC)^2\omega^2 + 1}} \angle - \mathrm{argtg}RC\omega$$

利用复数阻抗的概念

频率特性

$$\frac{\dot{u}_c}{\dot{u}_r} = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

频率特性，即信号幅值相位与频率的关系。

由RC电路的传递函数 $\frac{1}{RCs+1}$ 可见，

只需 $s \rightarrow j\omega$ 就可获得系统对应的频率特性函数，即从系统的传递函数可直接计算频率特性。

频率响应法

问题： 1、频率特性有什么作用?

2、如果输入不是正弦，而是一般周期或非周期函数，该如何处理?

1. 频率特性是系统稳态时的响应，但反映的系统的运动规律可用来评价系统的稳定性、稳态精度、动态品质。

   ——利用频率特性函数研究控制系统的方法称为频率响应法。

2. 输入可分解为正弦信号叠加，而输出响应可理解对于这些正弦信号响应的叠加。

3. 与传递函数相对应，从传递函数可以计算出频率特性函数。

4. 具有明确的物理意义，即信号的传递与合成，可通过实验获得对象从数学模型。

周期函数的Fourier级数

满足Dirichlet（狄里赫利）条件的周期实函数 $f(t)$，都可表示为

一系列谐波（正余弦函数）之和：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t$$

其中：

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt, \qquad -\frac{T}{2} < t \le \frac{T}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} f(t)\sin n\omega_1 t dt,$$

T_1 为 $f(t)$ 的周期

$\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$ 为基波角频率

非周期函数的Fourier变换

可见，周期函数 $f(t)$ 的频谱是离散的，只在 $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$ 等频率下有谱线。

当 $f(t)$ 是非周期函数，可以看成 $T_1 \to \infty$ 的周期函数。

此时基波 $\omega_1 \to 0$，各次谐波之间的差趋向于无穷小，即无限接近，
谐波的幅值 $\to 0$

所以，非周期函数的频谱含有一切频率成分，即由无穷多个无穷小的谐波组成，它的频谱是连续的。

$$\bar{f}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

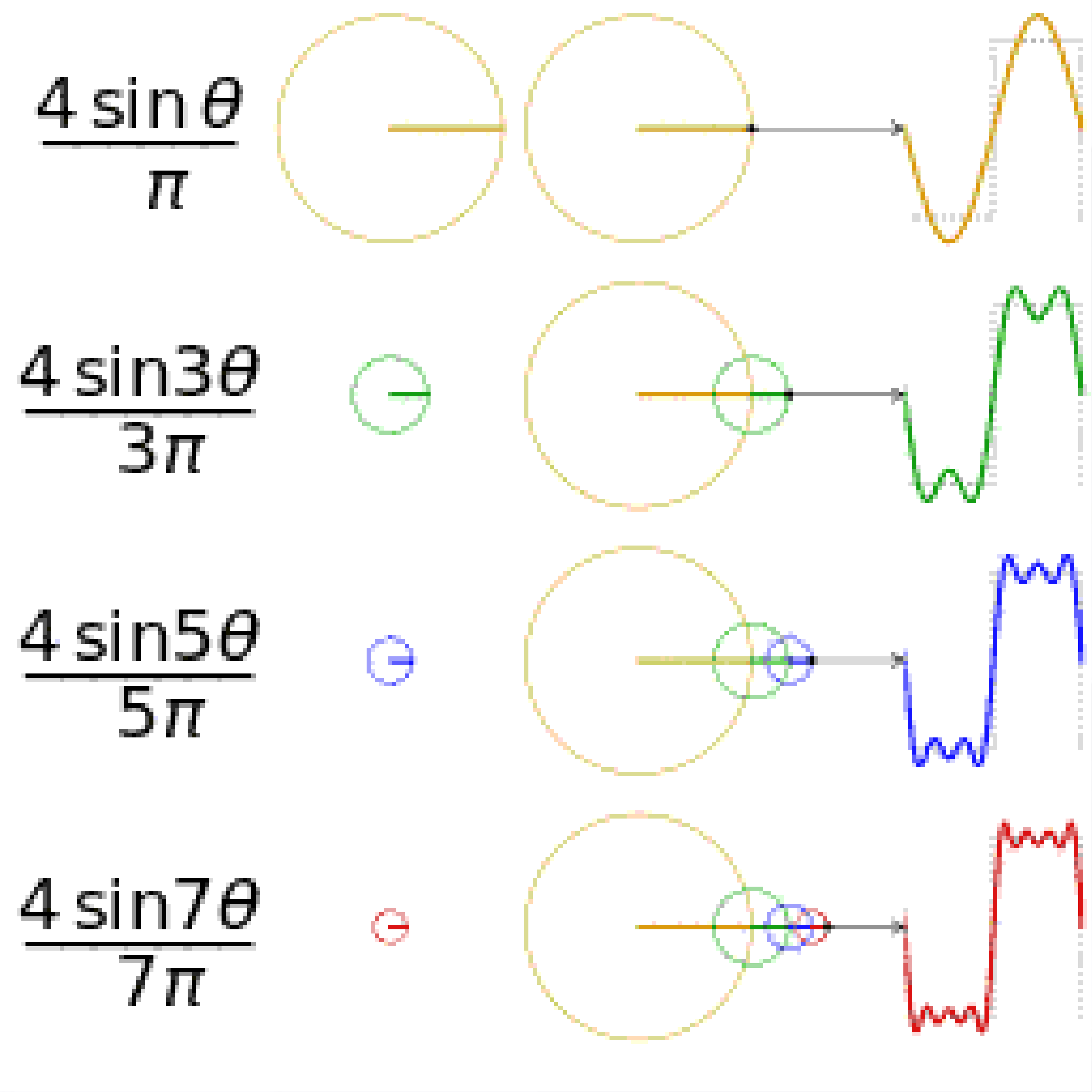
非周期情况下级数变成了积分

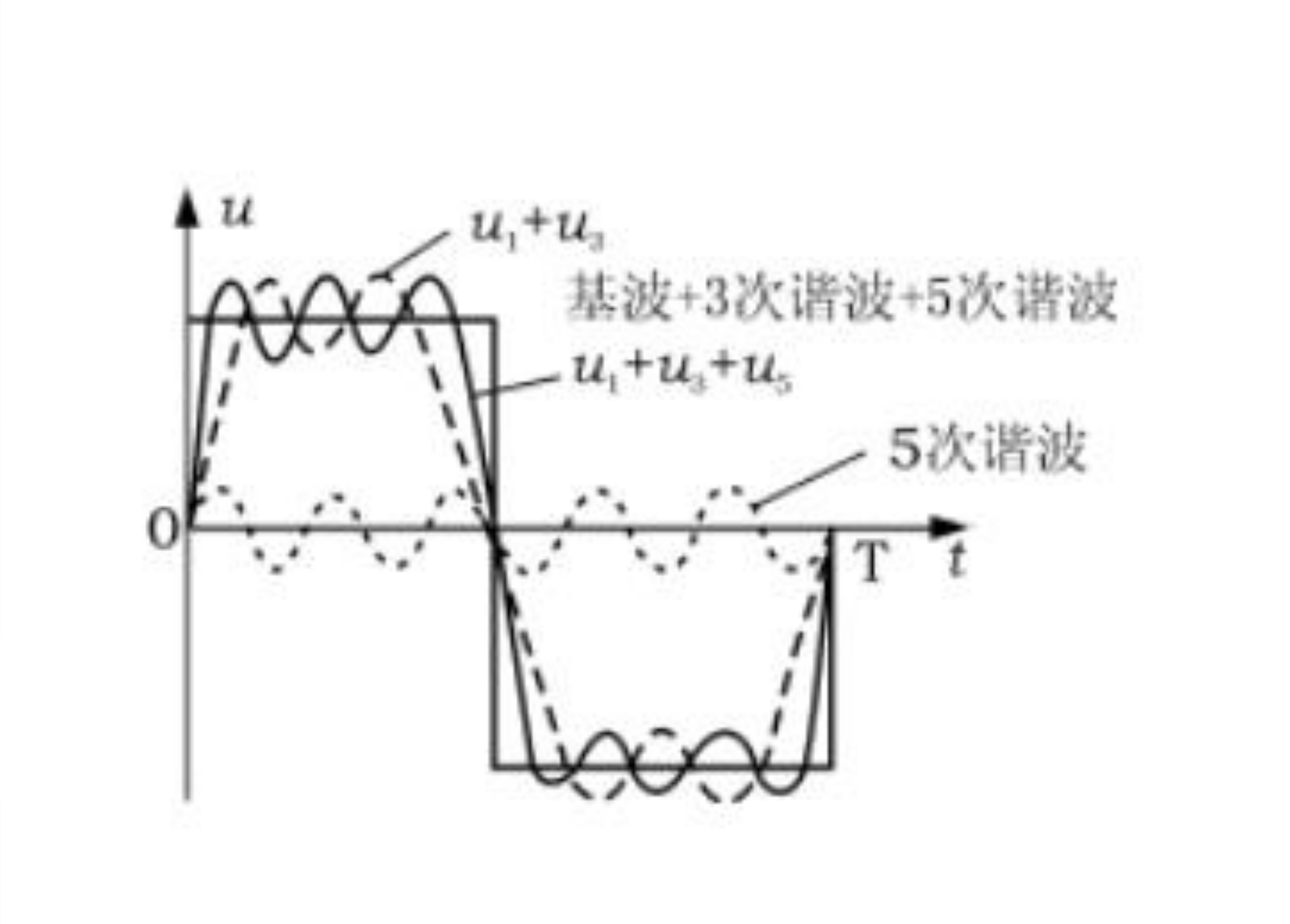
物理意义：非周期函数几乎处处可以视为无数个微小正弦函数与余弦函数之和。

参考教材P249~253

Fourier变换

矩形方波的构成





Fourier变换

Fourier变换的数学描述：

$$\bar{f}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

对照拉普拉斯变换：

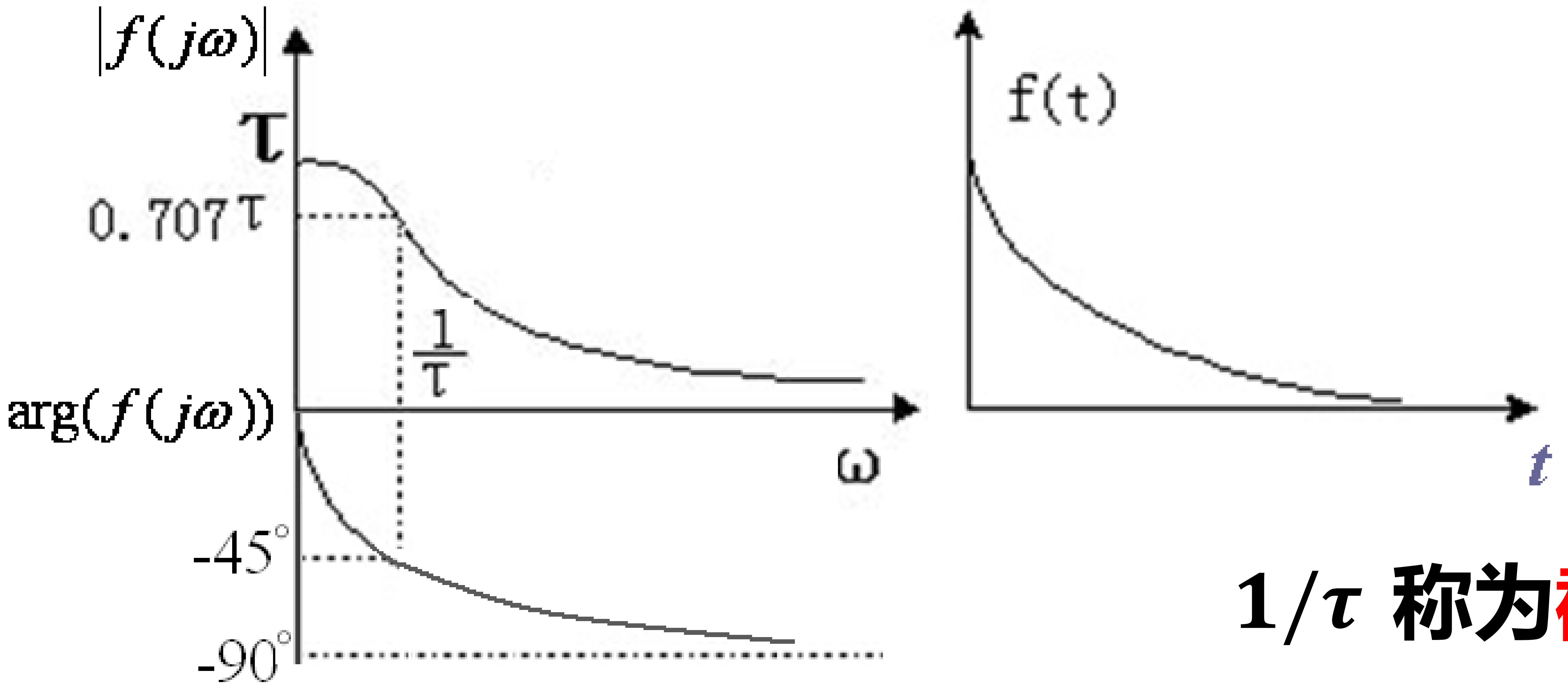
$$\bar{f}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Fourier变换

例： $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}1(t)$

$$\bar{f}(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-j\omega t} dt = \frac{\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \angle - \mathrm{argtg}\,\omega\tau$$

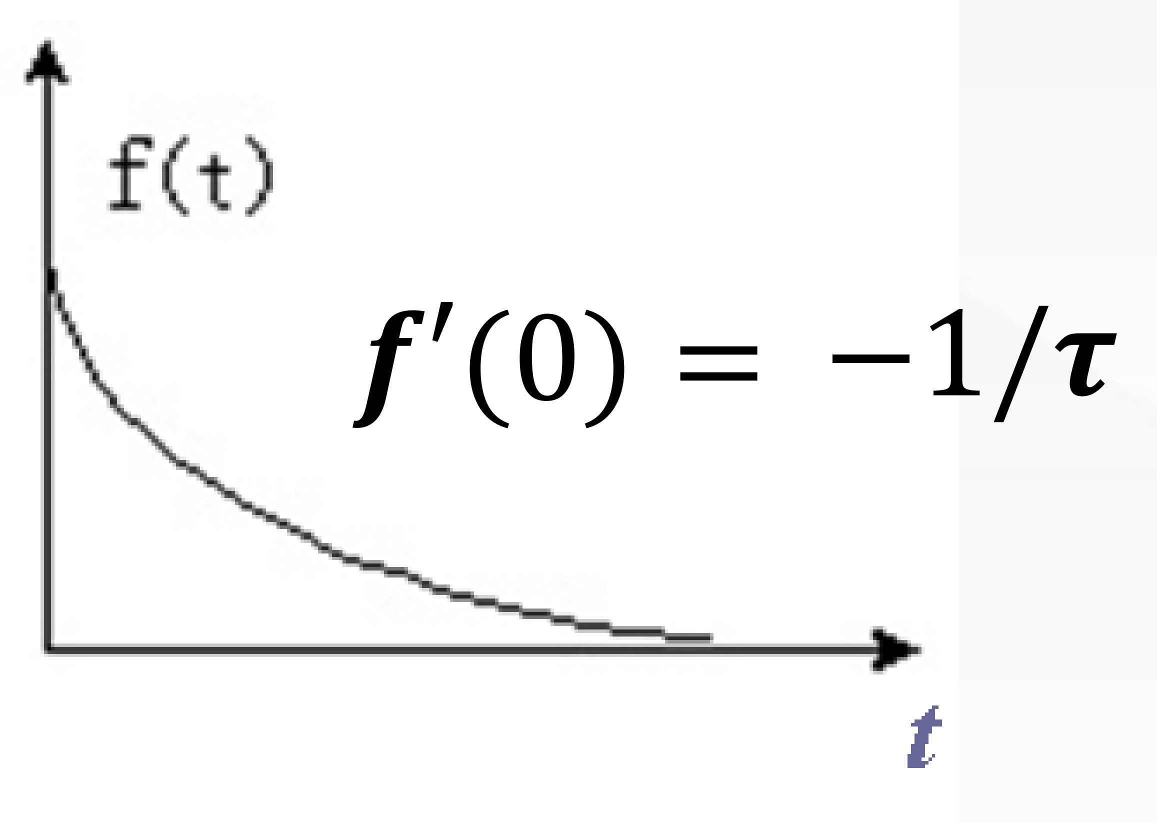
其图像为



$1/\tau$ 称为截止角频率ω_{cut}

幅值从F(j0)降到F(j0)/$\sqrt{2}$的频率

Fourier变换



由图可见： $f(t)$ 的频谱中含有一切频率成分，ω 从 $0 \to \infty$。

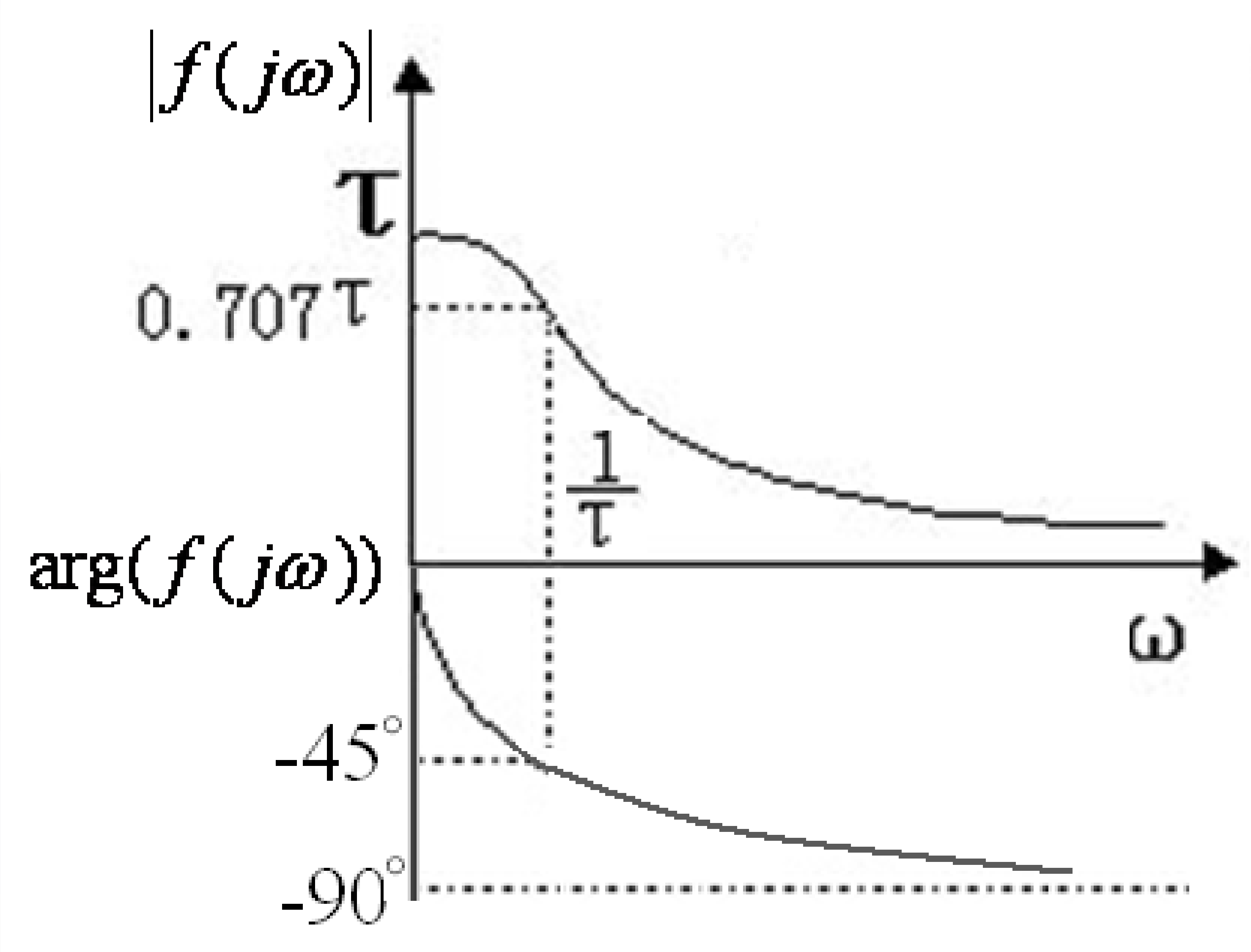
$|\bar{f}(j\omega)|$ 代表频率为 ω 的谐波的相对幅值，乘以一个无穷小量才是真的幅值。

$-arctg\omega\tau$ 代表频率为 ω 的谐波在 $t=0$ 时刻的初相角。

频带：通常指截止角频率的10倍。

当 τ 越小时，$f(t)$ 越尖，$f(j\omega)$ 的频带越宽。

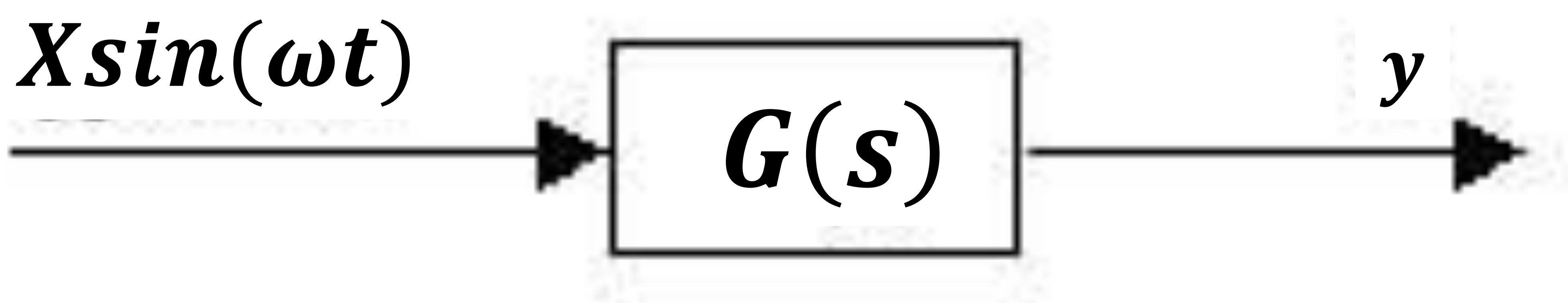
因此，变化越剧烈的函数的频带越宽，含高频成分越多。



频率特性函数

正弦信号加到对象$G(s)$会产生相应的响应，如何描述输入和输出之间的关系?

与$G(s)$有何联系?



假设 $$G(s)=\frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\ldots(s+s_n)}$$

其极点 $-s_i$ **都在左半平面。**

频率特性函数

$$\bar{y}(s) = \bar{x}(s) \cdot G(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)}$$

$$= \frac{b_1}{s+s_1} + \cdots + \frac{b_n}{s+s_n} + \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega}$$

$$y(t) = b_1 e^{-s_1 t} + \cdots + b_n e^{-s_n t} + a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t}$$

其中: $a = \bar{y}(s)(s+j\omega)|_{s=-j\omega} = G(s) \cdot \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}(s+j\omega)|_{s=-j\omega}$

$$= G(-j\omega) \cdot \frac{X\omega}{-2j\omega} = -\frac{X}{2j}|G(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)}$$

同理可得 $\bar{a} = \frac{X}{2j}|G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$ **其中** $\phi(\omega) = \mathrm{argG}(j\omega)$

频率特性函数

当 $t \longrightarrow \infty$

$$y(t) = \frac{-X}{2j}|G(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)}e^{-j\omega t} + \frac{X}{2j}|G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}e^{j\omega t}$$

$$= \frac{-X|G(j\omega)|e^{-j(\omega t+\phi(\omega))} + X|G(j\omega)|e^{j(\omega t+\phi(\omega))}}{2j}$$

$$= \frac{-X|G(j\omega)|}{2j}\left(e^{-j(\omega t+\phi(\omega))} - e^{j(\omega t+\phi(\omega))}\right)$$

$$= X|G(j\omega)|\sin[\omega t + \phi(\omega)]$$

当 $x(t) = X sin(\omega t)$

输出$y(t)$的幅值与输入$x(t)$的幅值之比等于 $G(j\omega)$的模 $\frac{|y(t)|}{|x(t)|} = |G(j\omega)|$

输出$y(t)$的相位与输入$x(t)$的相位差是$\phi(\omega)$，等于$G(j\omega)$ 的角$\arg G(j\omega)$

$G(j\omega)$：**频率特性函数，即$G(s)$中** $s \to j\omega$

频率特性函数

拓展单一正弦函数的结论：对于任意输入信号，通过$Fourier$变换可将输入信号表示为一系列正弦函数之和，对于每一项正弦函数都有上述关系。

系统的频率特性函数$\mathrm{G}(j\omega)$定义为系统的$Fourier$变换，即输出量的$Fourier$变换与输入量的$Fourier$变换之比，即传递函数$\mathrm{G}(s)$中$s \to j\omega$。

$|\mathrm{G}(j\omega)|$称为幅频特性，$\arg\mathrm{G}(j\omega)$称为相频特性，均是ω的函数，可用图像绘制，进而根据图像分析系统的特性。

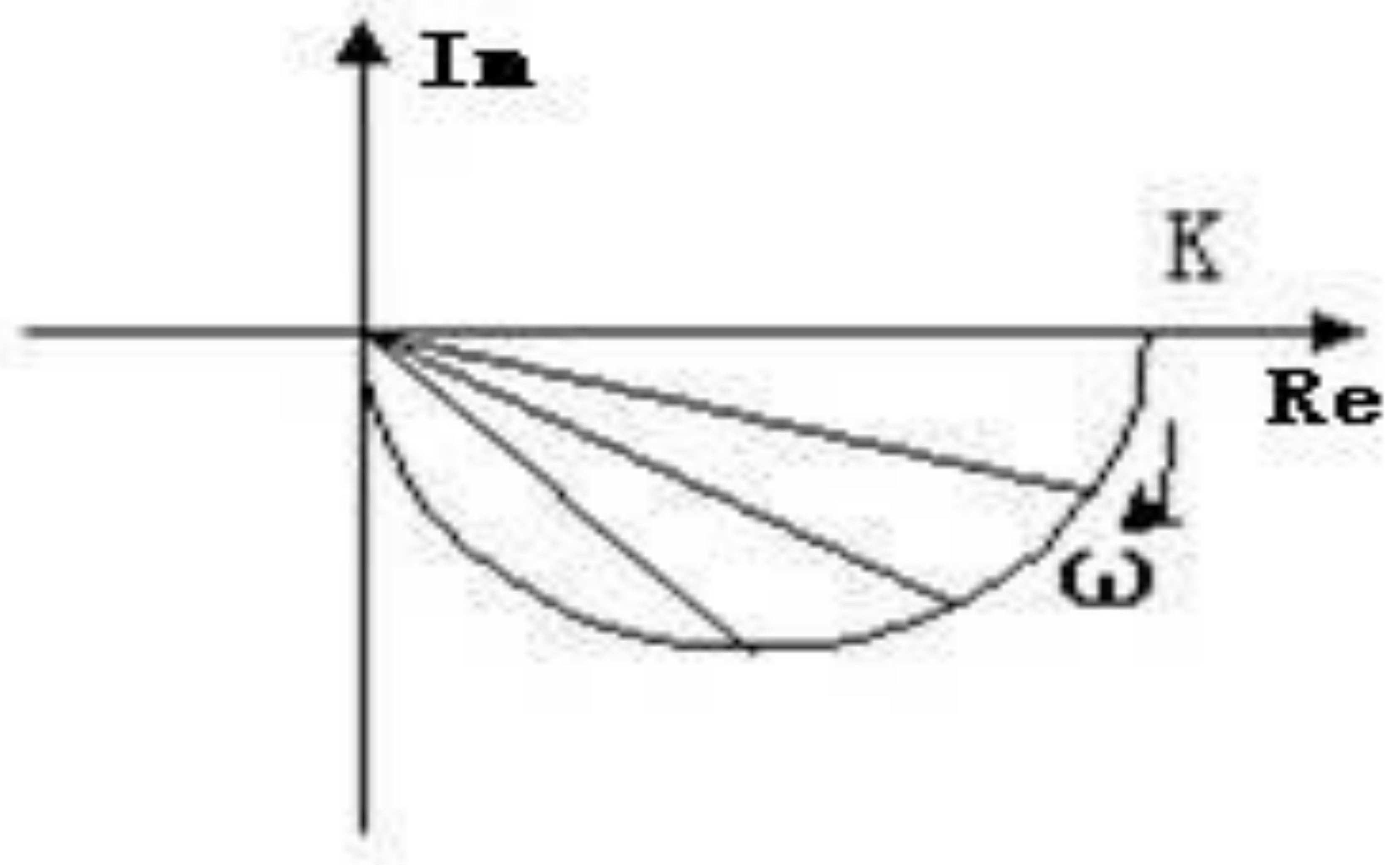
频率特性的图像

(1) 幅相频率特性图（极坐标图、Nyquist图）：在复平面上将频率特性函数的模和角同时表示出来的图。

说明：$G(jw)$具有共轭性质，其图像关于复数平面的实轴对称。

例：$$G(j\omega)=\frac{k}{1+j\omega T}=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\angle-\mathrm{argtg}\,\omega T$$

ω	0 ······	∞
$\lvert\ \rvert$	k ······	0
$\angle$	0 ······	$-\frac{\pi}{2}$



频率特性的图像

可以证明，其图像是一个半圆。

$$G(j\omega)=\frac{k}{1+j\omega T}=\frac{k}{1+\omega^2T^2}-j\frac{k\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

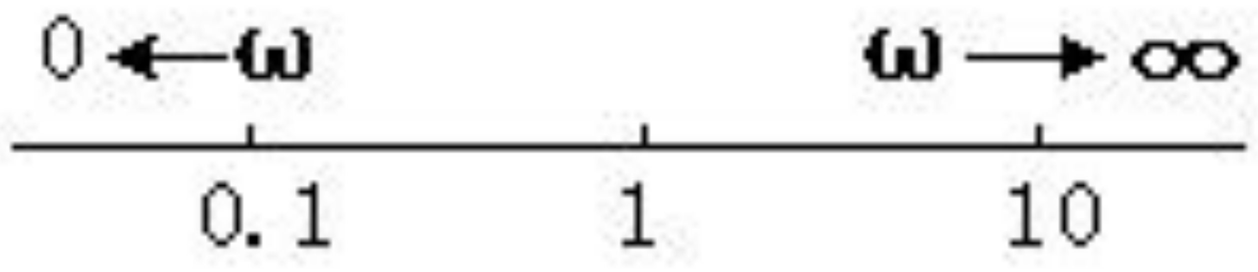
令 $x=\dfrac{k}{1+\omega^2T^2}$， $y=-\dfrac{k\omega T}{1+\omega^2T^2}$

显然， $x^2+y^2-kx=0$ **即** $(x-\dfrac{k}{2})^2+y^2=(\dfrac{k}{2})^2$

说明：根据频率特性函数的物理意义，角频率为正数，因此一般只画出正角频率对应的曲线，在需要时才根据其共轭性质补画出负角频率对应的曲线。（Nyquist稳定性判据）

频率特性的图像

(2) 对数频率特性图（Bode图，伯德图）：频率特性函数的幅值的对数值以及相位的角度值相对于取对数后角频率ω的关系图。



横坐标为ω 轴，以对数刻度表示，十倍频程

纵坐标为幅值的对数 lg| |（单位是贝尔或分贝20 lg| |），相位的角度

对数分度：

$$\lg 2 = 0.301 \qquad \lg 3 = 0.4771$$
$$\lg 4 = 0.602 \qquad \lg 5 = 0.699$$
$$\lg 6 = \lg 3 + \lg 2 = 0.778$$
$$\lg 7 = 0.845$$
$$\lg 8 = 3\lg 2 = 0.903$$
$$\lg 9 = 2\lg 3 = 0.954$$

对数幅频特性图

对数相频特性图

频率特性的图像

惰性单元的对数频率特性图

$$G(j\omega)=\frac{k}{1+j\omega T}$$

假设 $k=1,T=0.5$

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

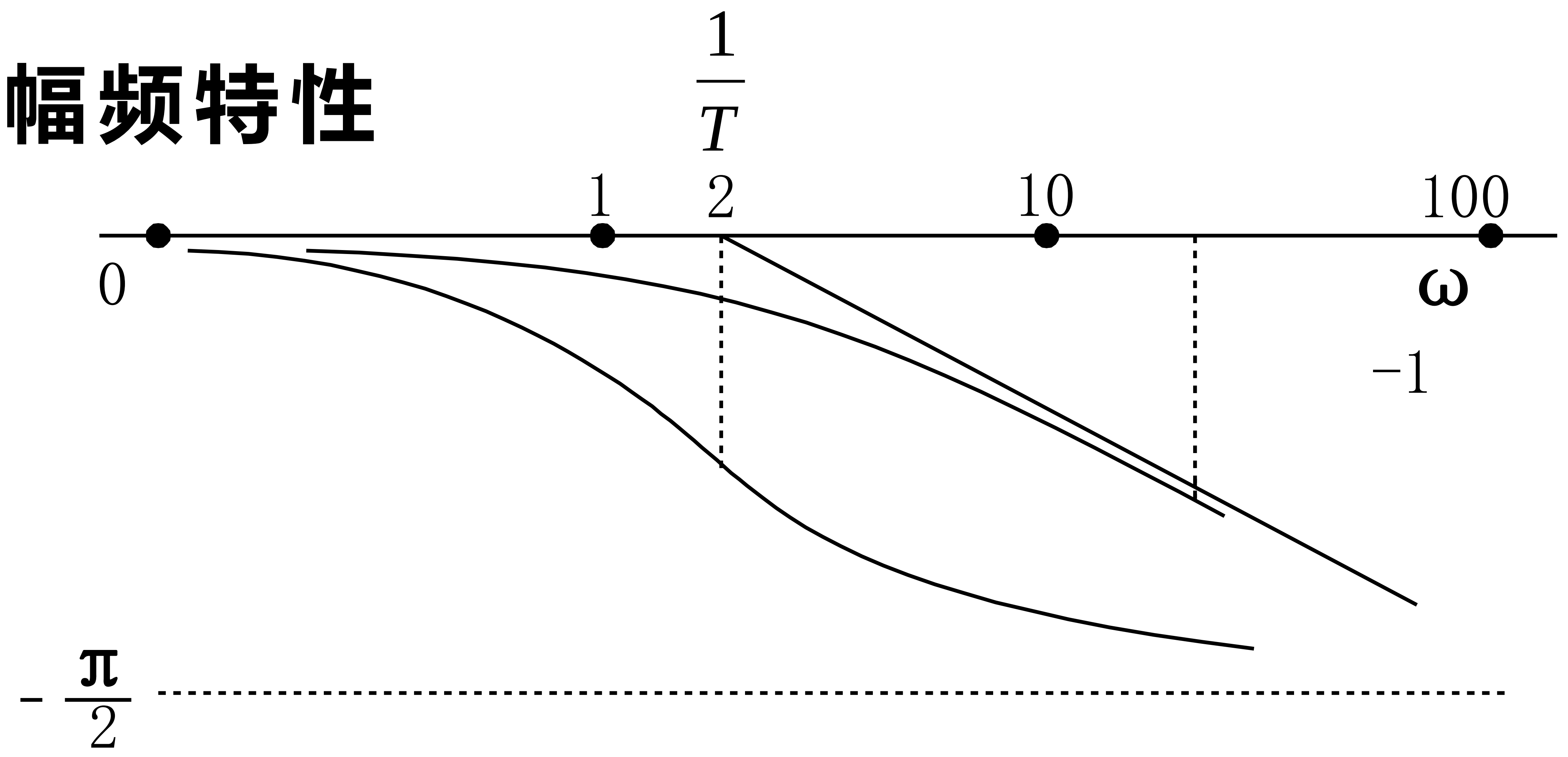
$$\omega=\frac{1}{T},|\,|=\frac{1}{\sqrt{2}},20\lg|\,|=-10\lg 2=-3\text{分贝}$$

$$\omega\ll\frac{1}{T},|\,|\approx 1,20\lg|\,|=0\text{分贝}$$

$$\omega\gg\frac{1}{T},|\,|\approx\frac{1}{\omega T},20\lg|\,|=-20\lg\omega T$$

ω 每增大十倍，| | 下降20分贝。

幅频特性



频率特性的图像

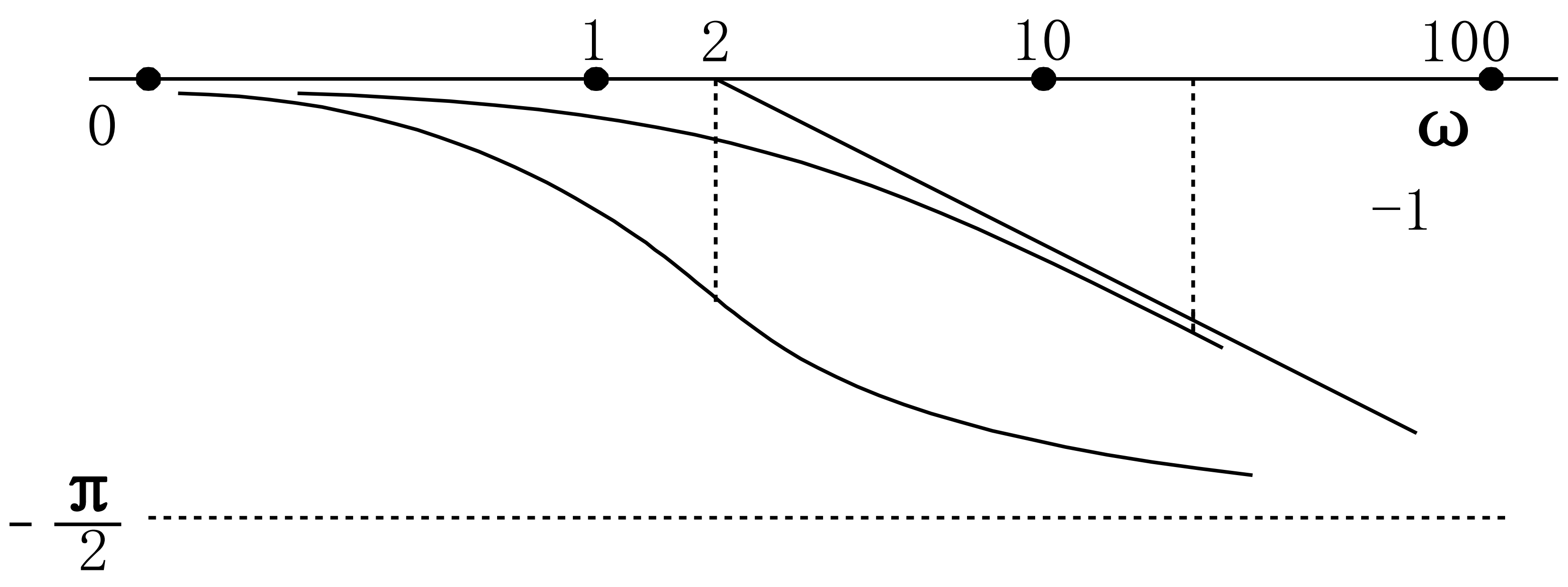
$$\angle = -\arg tg\omega T$$

$$\omega = \frac{1}{T}, \angle = -45^{\circ}$$

$$\omega \gg \frac{1}{T}, \angle \to -90^{\circ}$$

$$\omega \ll \frac{1}{T}, \angle \to 0^{\circ}$$

相频特性



$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{a}{T} \\ \omega = \dfrac{1/a}{T} \end{array}\right\}$$ 是关于$\omega = \frac{1}{T}$中心对称

$$\theta_1 = \arg tga, \quad \theta_2 = \arg tg\frac{1}{a}, \quad \theta_1 + \theta_2 = 90^{\circ}$$

频率特性的图像

对数频率特性的优点：

1) 取对数后**展宽了频率的范围**。

2) k 变，幅频特性曲线只是**上下移动**
T变，幅、相频特性曲线只是**左右移动**
形状不变

3) **几个频率特性相乘（对应传递函数的串联），对数幅、相特性曲线相加**。

$$G_1(j\omega)G_2(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\phi_1(\omega)} \cdot |G_2(j\omega)|e^{j\phi_2(\omega)} = |G_1||G_2|e^{j[\phi_1+\phi_2]}$$

$$20\lg|G_1G_2| = 20\lg|G_1| + 20\lg|G_2| \qquad \angle G_1G_2 = \phi_1 + \phi_2$$

4) **两个频率特性互为倒数，幅、相特性反号**，关于 ω 轴对称。

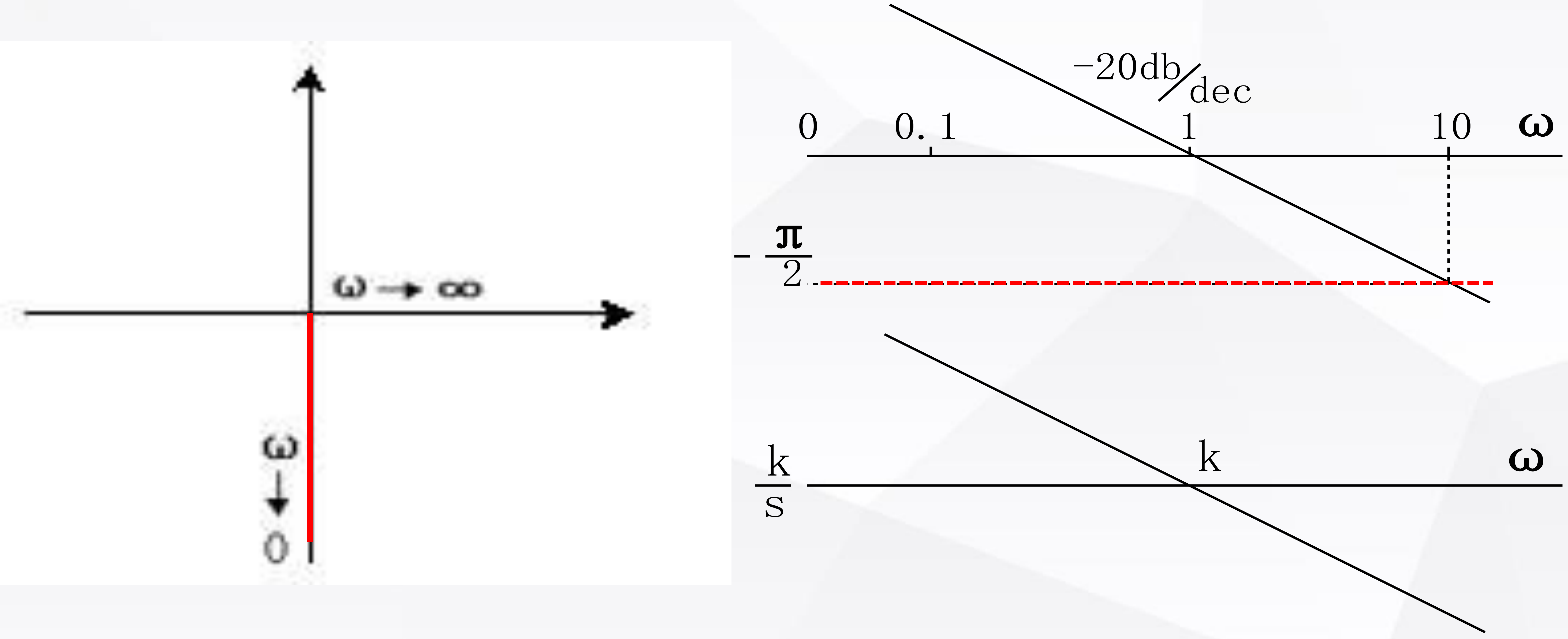
$$G_1 = \frac{1}{G_2} \qquad |G_1| = \frac{1}{|G_2|} \qquad \phi_1 = -\phi_2$$

$$20\lg|G_1| = -20\lg|G_2|$$

基本单元的频率特性函数

(1)比例单元　$G(s)=k, G(j\omega)=k, |\ | = k, \angle = 0^{\circ}$

(2)积分单元　$G(s)=\frac{1}{s}, G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}, |\ | = \frac{1}{\omega}, \angle = -90^{\circ}$



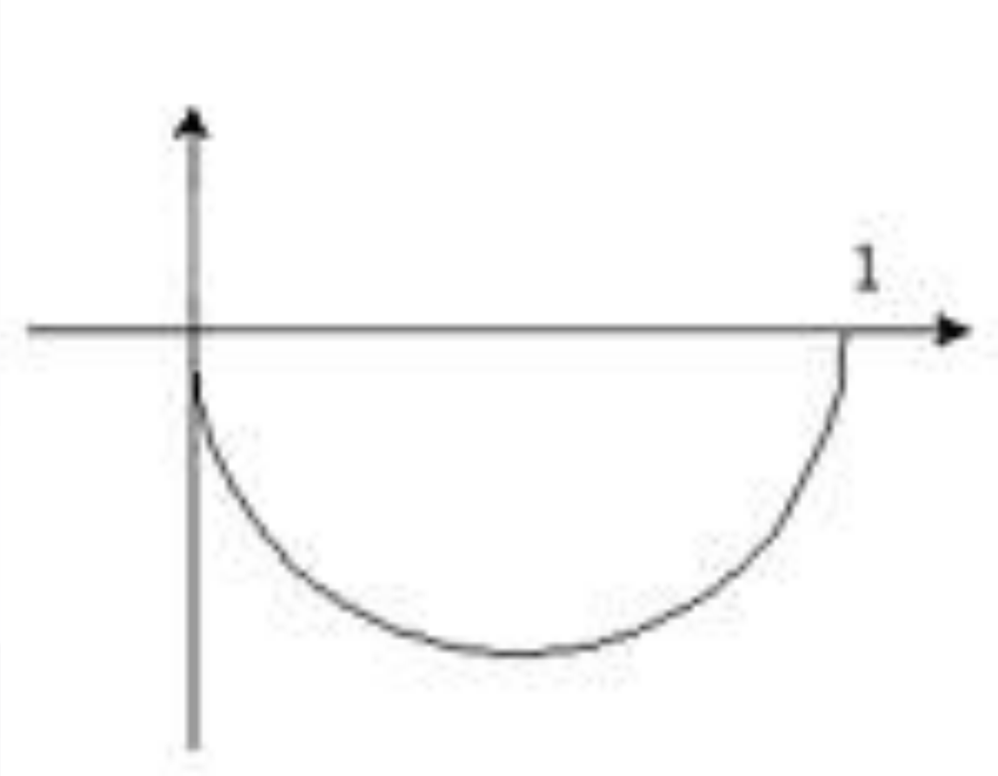
$$G(s)=\frac{k}{s}$$

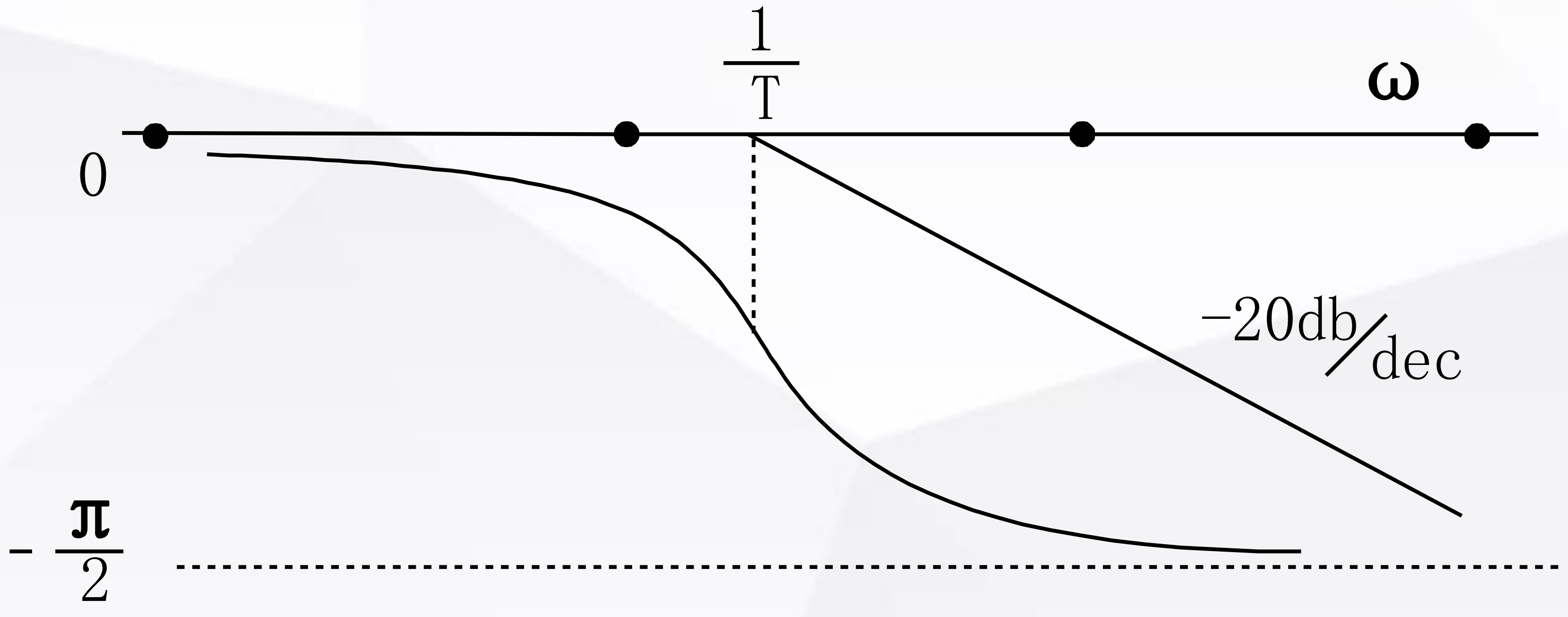
基本单元的频率特性

(3)惰性单元

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1},G(j\omega)=\frac{1}{Tj\omega+1},$$

$$|\,|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}},\angle=-\mathrm{argtg}\omega T$$



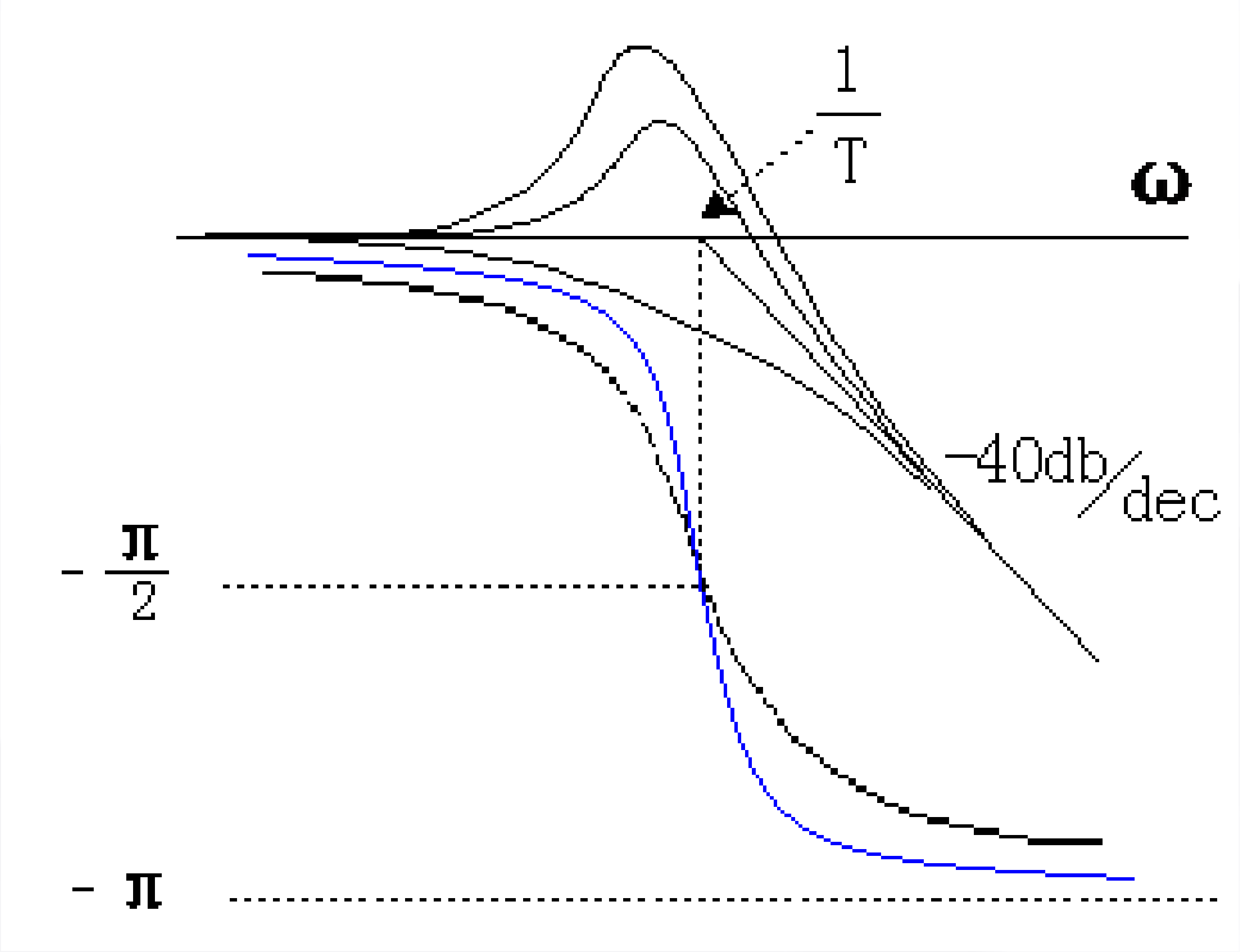


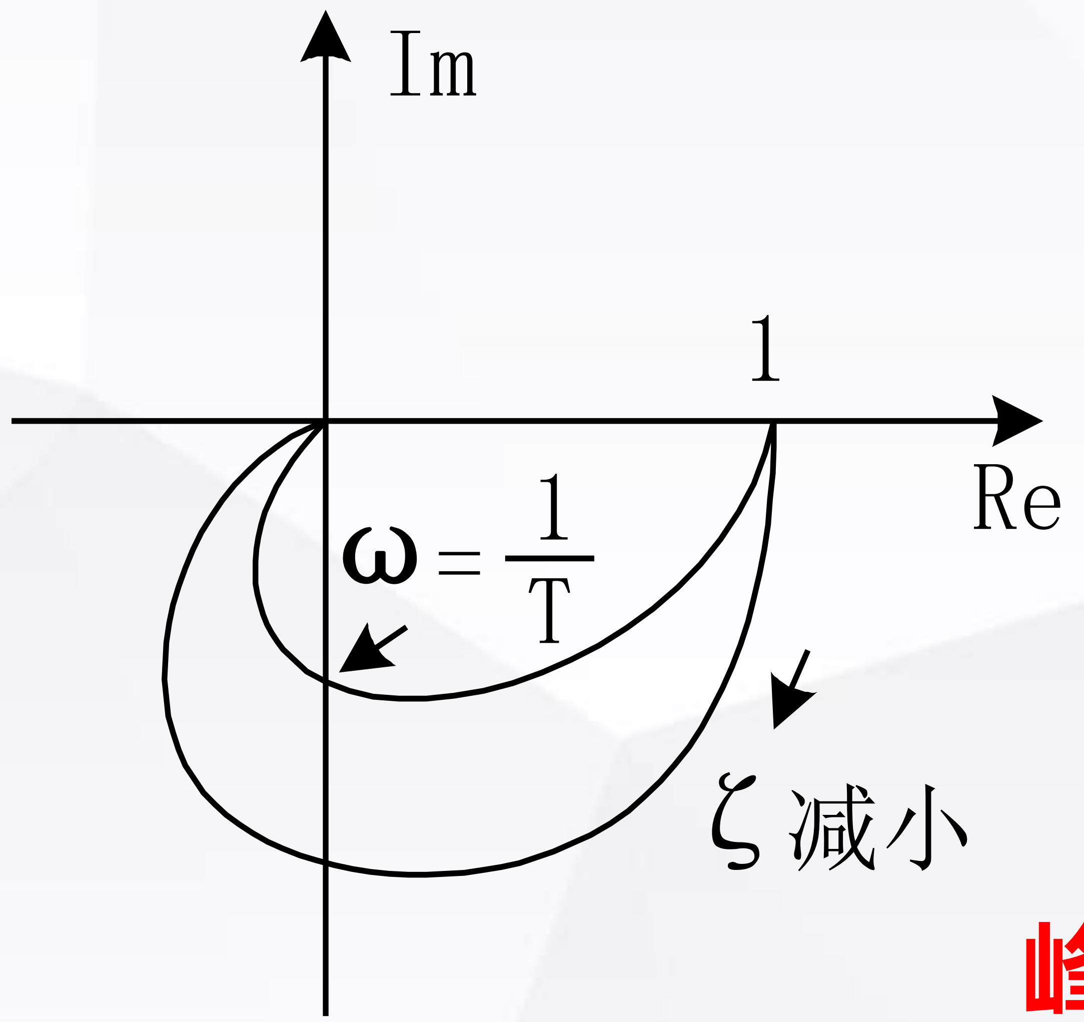
基本单元的频率特性

(4)二阶振荡单元 $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$

$$|\,|=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}},\ \angle=-argtg\frac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2}$$

幅相特性的形状与ζ有关





峰值随ζ变小而增大

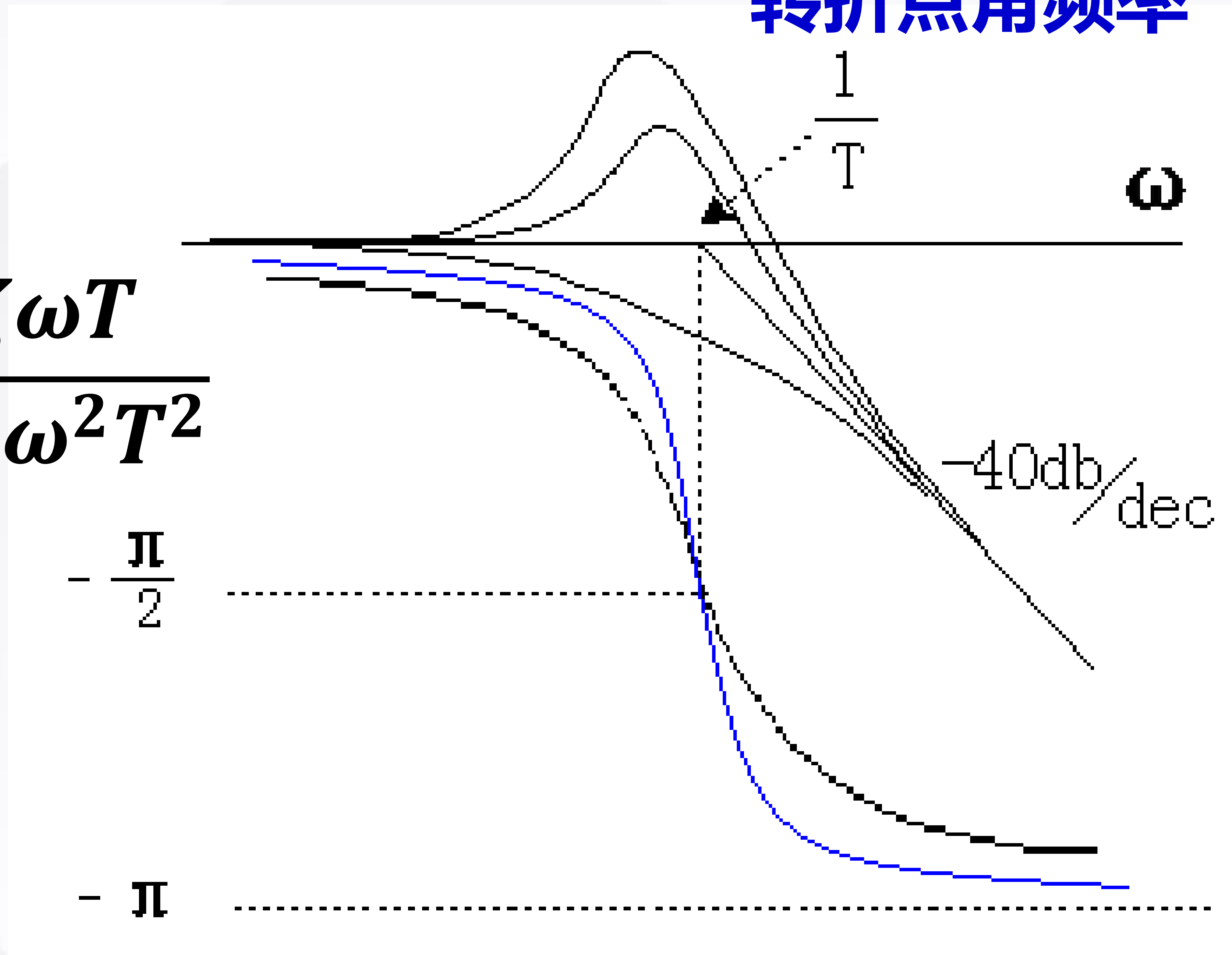
对模求导得：

当 $\zeta\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，峰值频率 $\omega_r=\dfrac{1}{T}\sqrt{1-2\zeta^2}$ 峰值 $M_r=\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

基本单元的频率特性

$$G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$$

$$|\,|=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}},\angle=-\mathrm{argtg}\frac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2}$$



$\omega=\frac{1}{T}$,相角$-90°$, $|\,|=\frac{1}{2\zeta}$

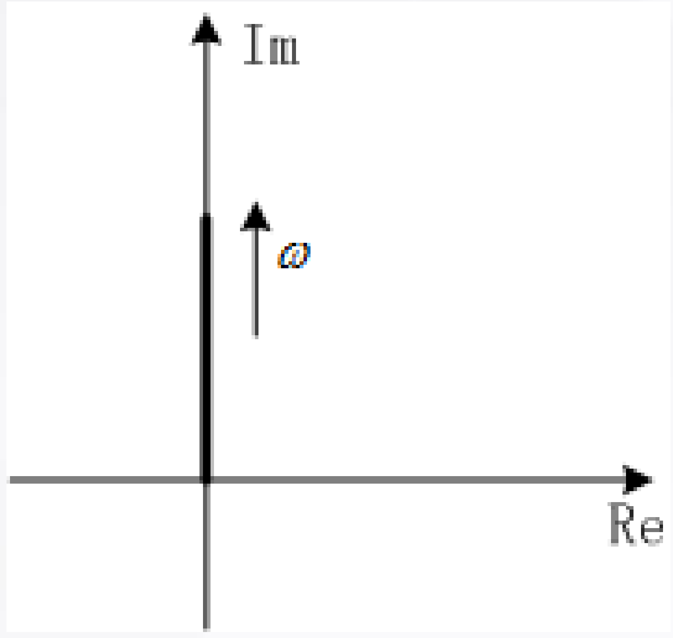
$\omega\ll\frac{1}{T}$,相角接近0°, $|\,|\approx 1, 20\lg|\,|=0$分贝

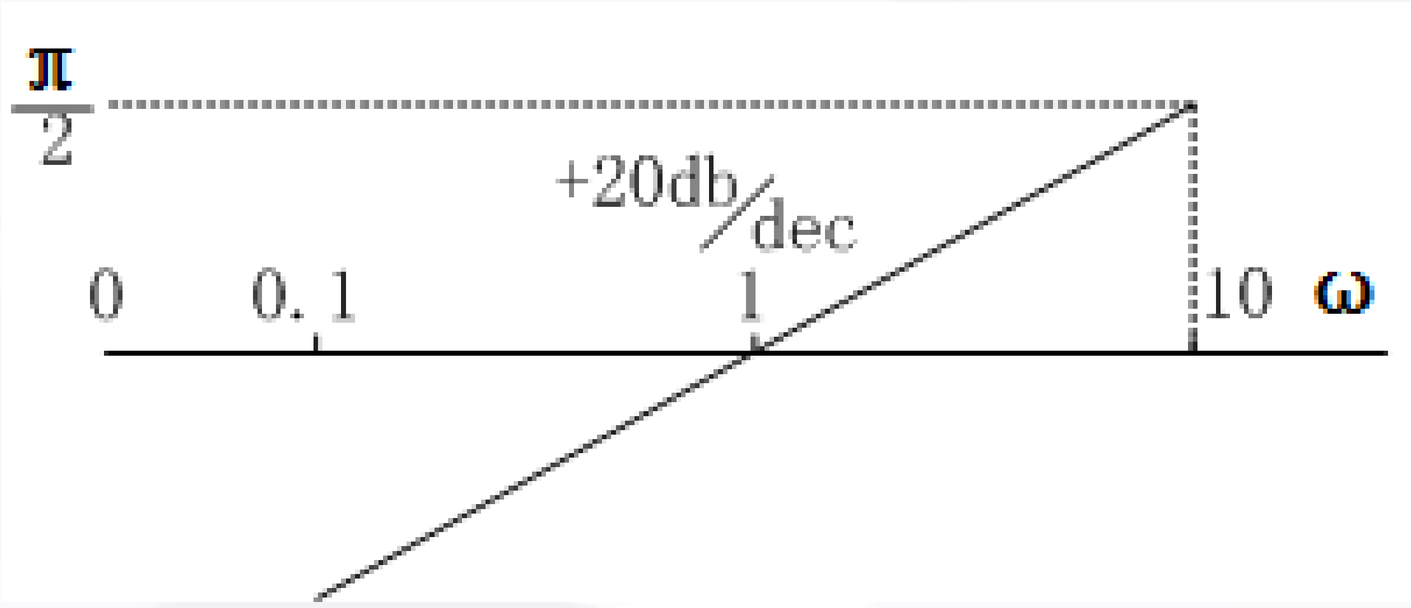
$\omega\gg\frac{1}{T}$,相角接近$-180°$, $|\,|\approx\frac{1}{\omega^2T^2}$,对数幅值下降$-40\mathrm{dB/dec}$

基本单元的频率特性

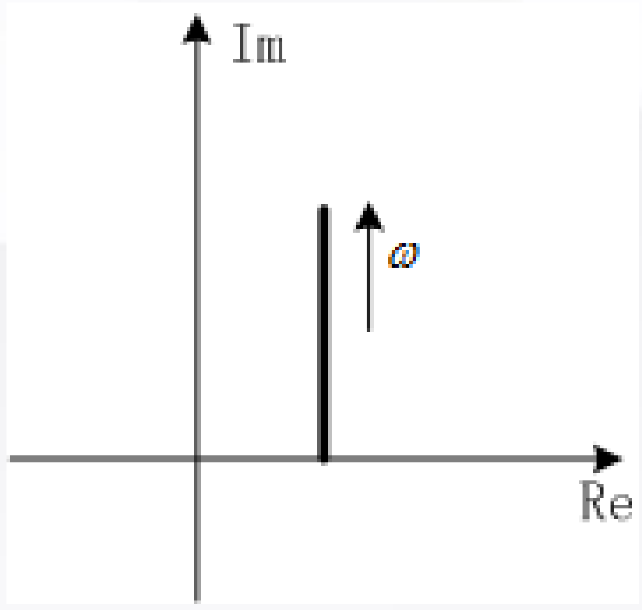
(5)微分单元（相对于基本环节2-3-4幅相反号，幅相频率特性图的对称性)

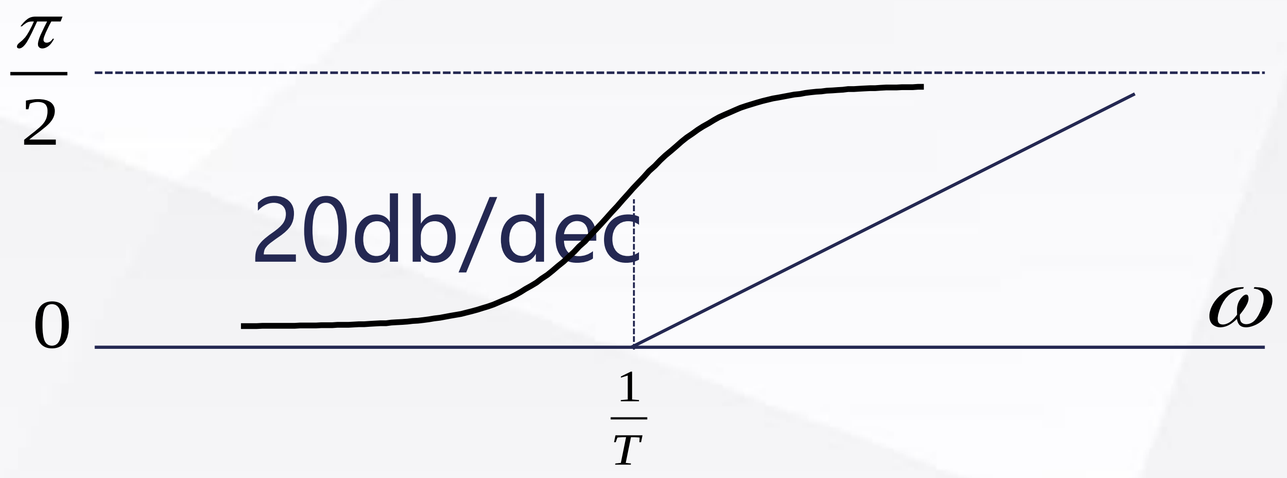
纯微分单元 $G(s) = s, G(j\omega) = j\omega, |\,| = \omega, \angle = +90^{\circ}$





一阶微分单元 $G(s) = Ts + 1, G(j\omega) = Tj\omega + 1, |\,| = \sqrt{1+\omega^2T^2}, \angle = \mathrm{argtg}\,\omega T$





基本单元的频率特性

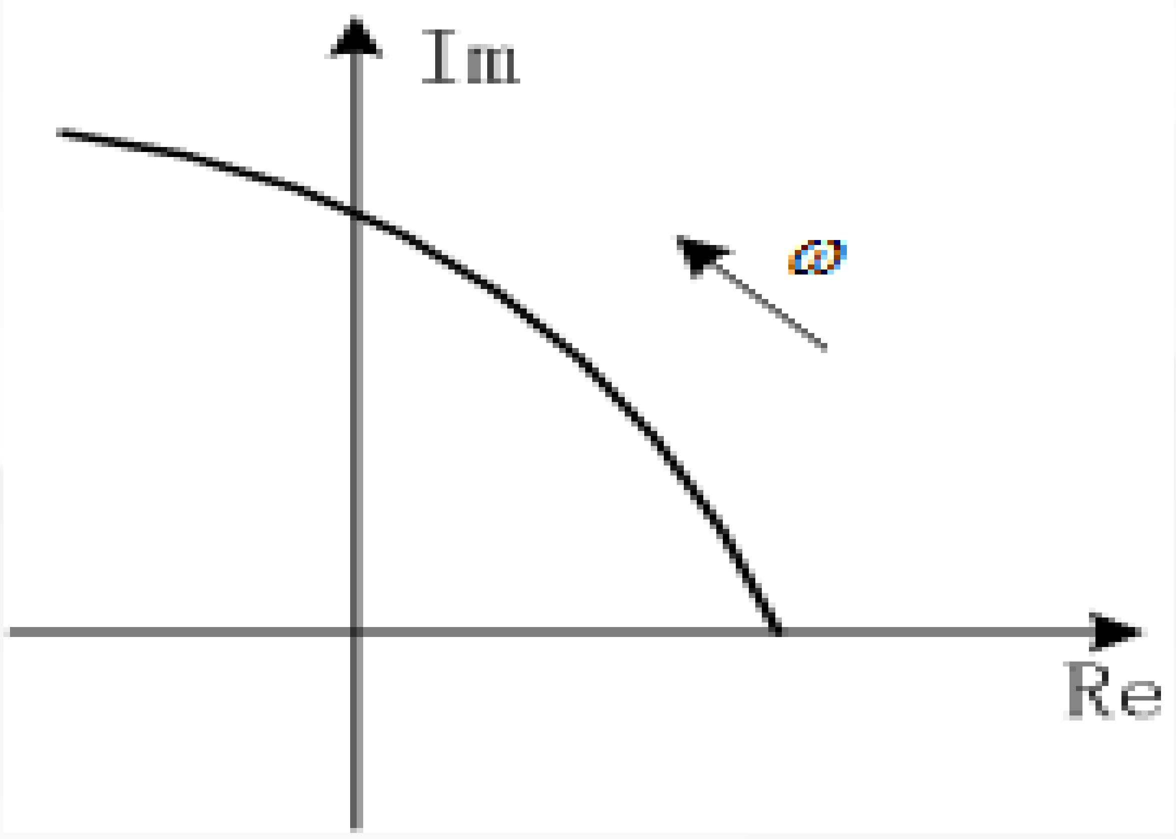
二阶微分单元 $G(s)=T^2s^2+2\varsigma Ts+1,(0<\varsigma<1)$

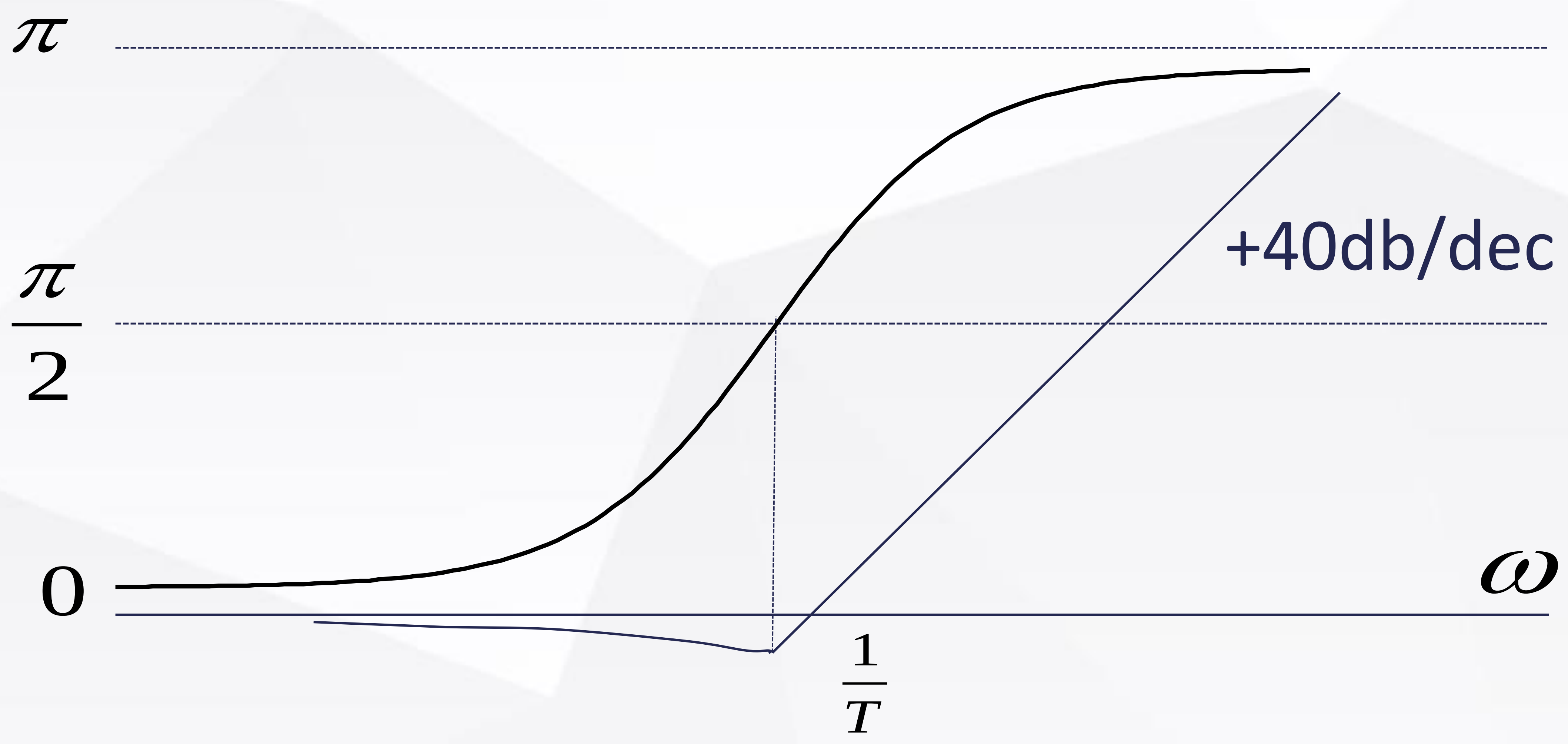
$$|\ |=\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2},\ \angle=\arg tg\frac{2\varsigma\omega T}{1-\omega^2T^2}$$

$$\omega=\frac{1}{T},\qquad |\ |=2\zeta$$

$$\omega<<\frac{1}{T},\qquad |\ |\approx 1\quad 20\lg|\ |=0\text{分贝}$$

$$\omega>>\frac{1}{T},\qquad |\ |\approx\omega^2T^2$$ 对数幅值增加 **40dB/dec**

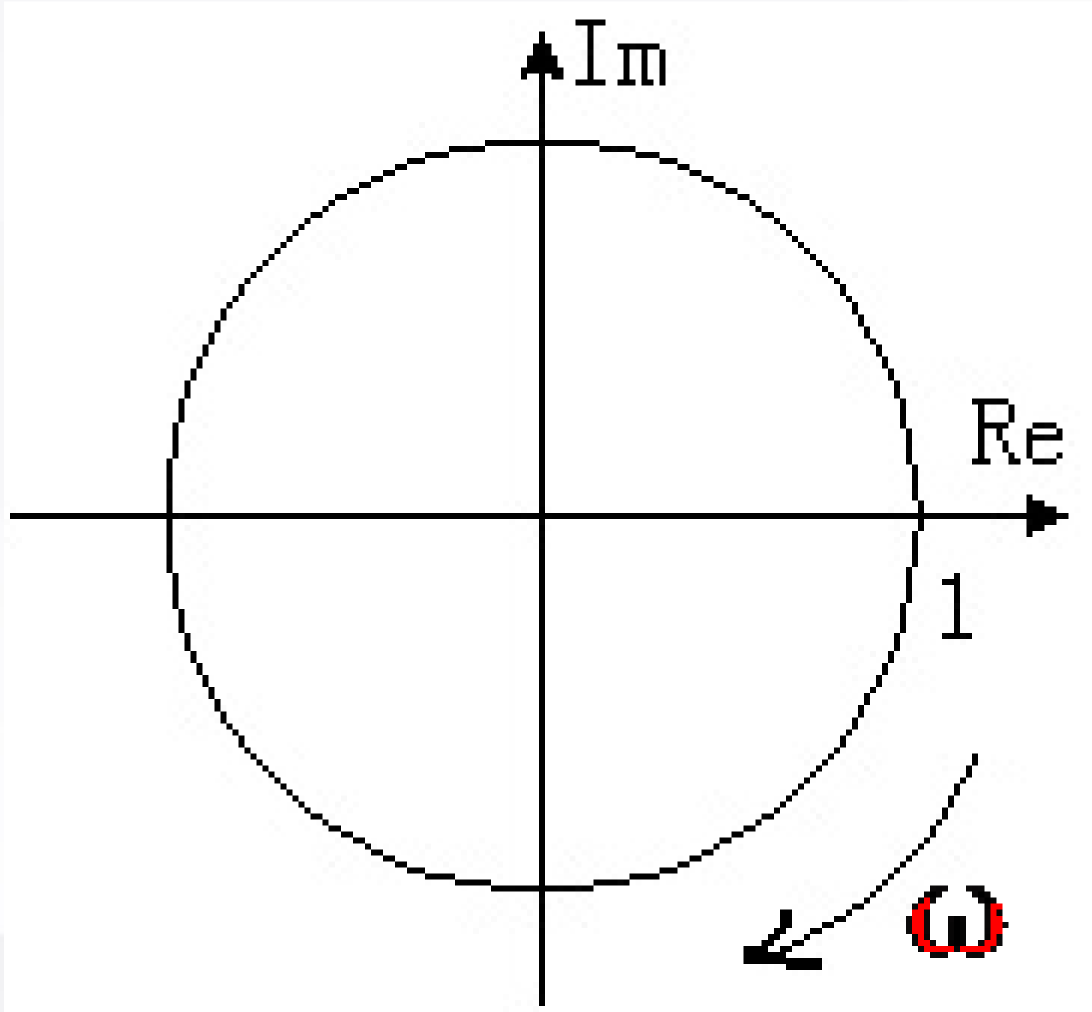


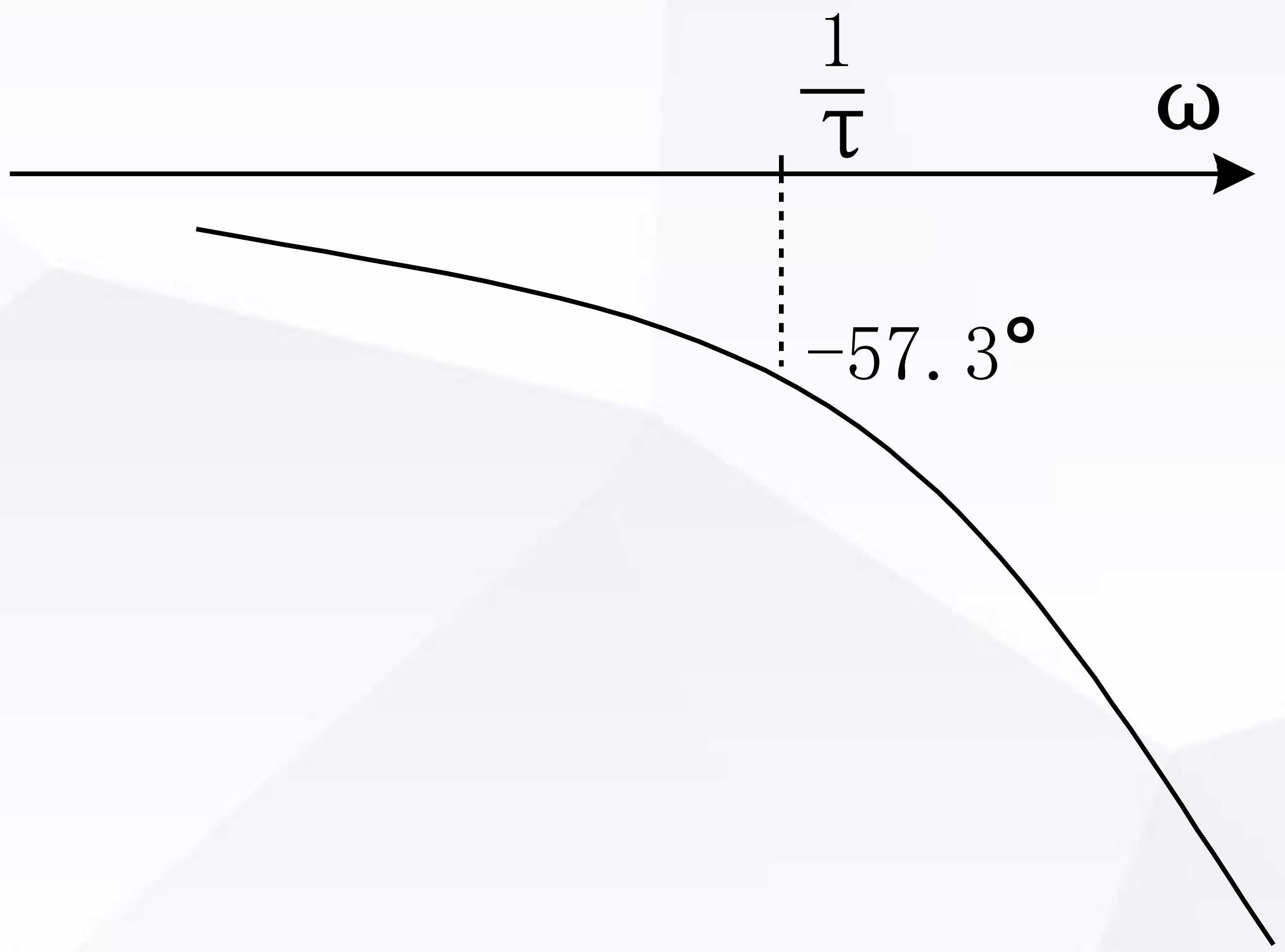


基本单元的频率特性

(6)延时单元 $G(s)=e^{-\tau s}, G(j\omega)=e^{-\tau j\omega}=\cos\omega\tau-j\sin\omega\tau$

$|\ |=1, \angle=-\omega\tau$





基本单元的频率特性

(7)一阶不稳定单元

$$\frac{1}{-Ts+1},\frac{1}{Ts-1} \text{与} \frac{-1}{Ts+1}$$

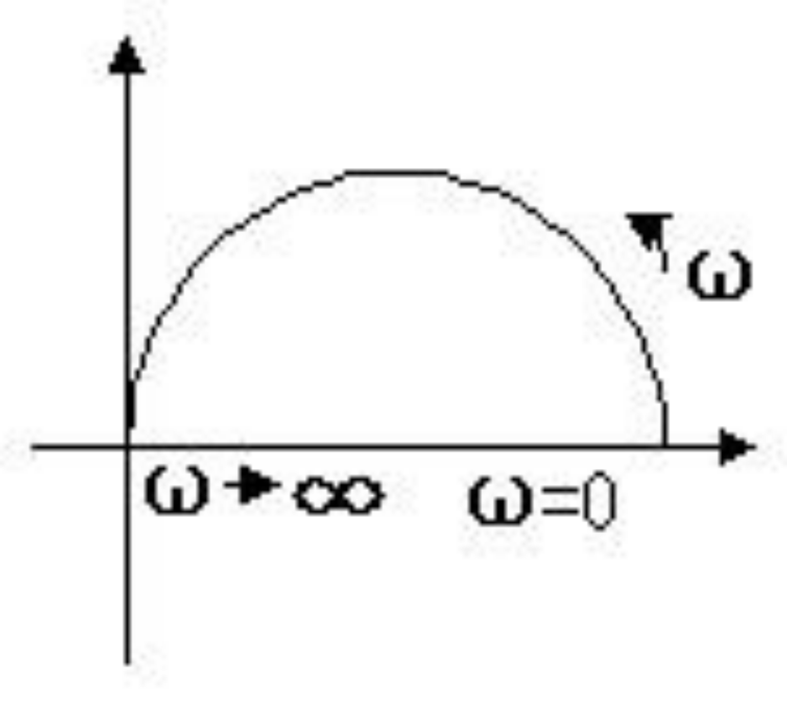
三者的模都是半圆

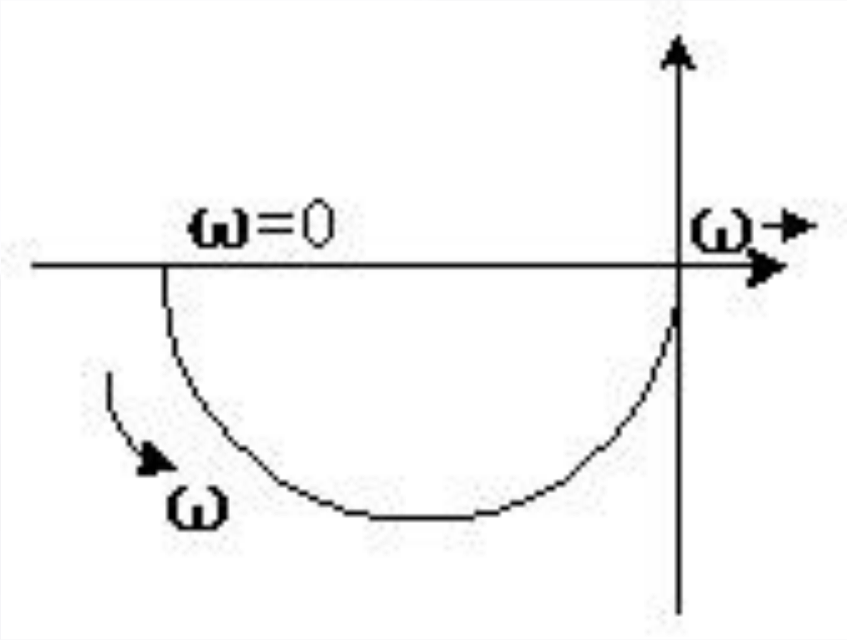
$$\angle = -\mathrm{arg}tg\frac{-\omega T}{1} = -(0 \to -90^\circ) = (0 \to 90^\circ)$$

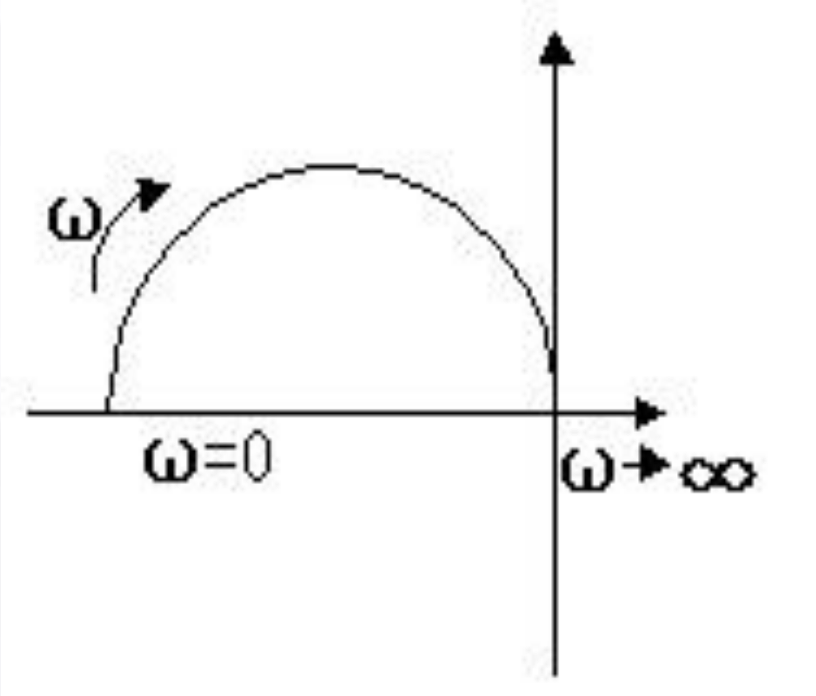
$$\angle = 180^\circ - \mathrm{arg}tg\frac{-\omega T}{1} = 180^\circ - (0^\circ \to -90^\circ) = 180^\circ \to 270^\circ$$

$$\angle = -180^\circ - \mathrm{arg}tg\omega T = -180^\circ - (0 \to 90^\circ) = -180^\circ \to -270^\circ = 180^\circ \to 90^\circ$$

图像分别为：







复杂系统频率特性的绘制

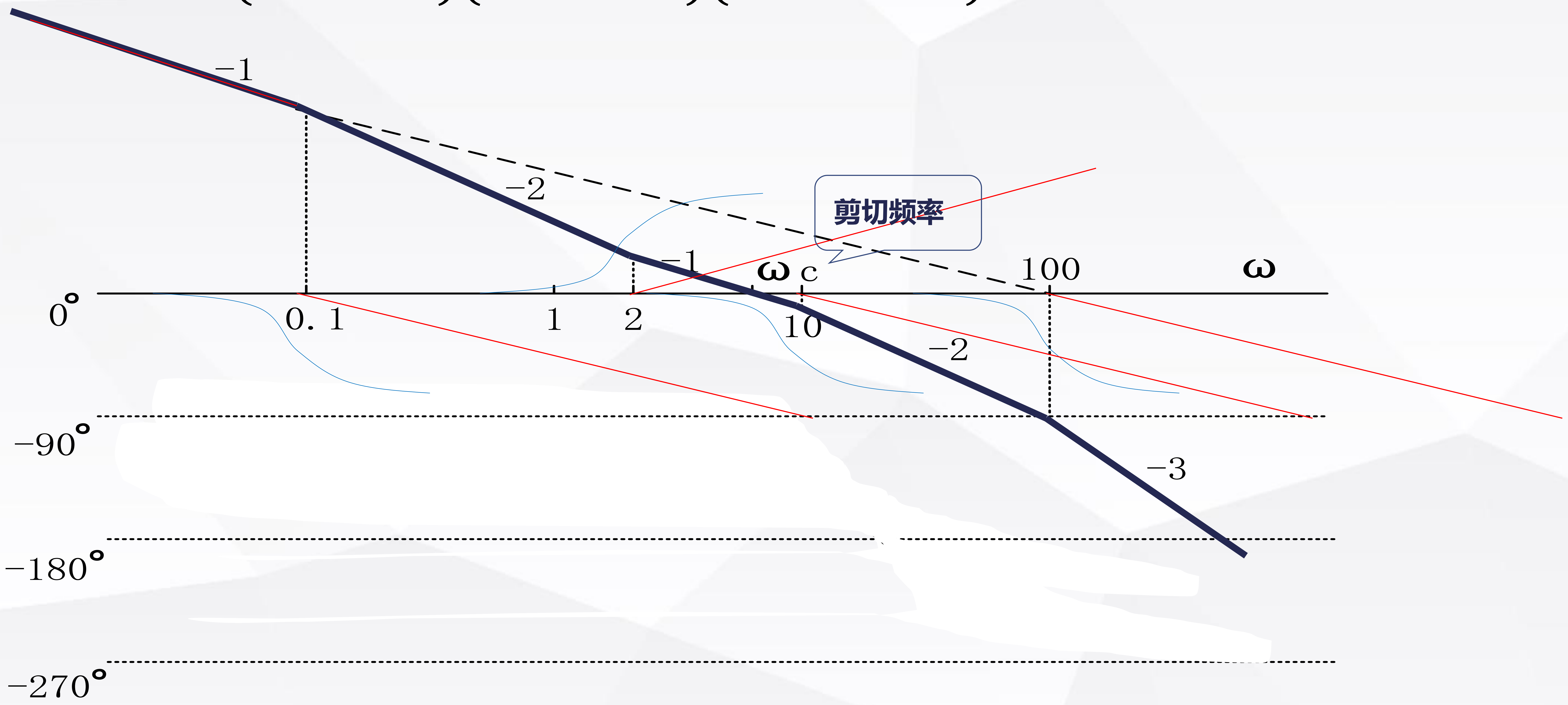
复杂系统近似对数频率特性的绘制原则：

- 确定复杂系统的传递函数，转化为标准型
- 分解为若干基本单元相乘的形式
- 将各基本单元按照转折点频率的大小排序
- 分别绘制各单元的近似幅频特性和相频特性
- 将幅频特性和相频特性逐个相加

根据对数频率特性可以画出极坐标图

复杂系统频率特性的绘制

例1： $G(s)=\dfrac{100(0.5s+1)}{s(10s+1)(0.1s+1)(0.01s+1)}$



相频特性： $\theta(\omega)=-90°-\mathrm{argtg}10\omega-\mathrm{argtg}0.1\omega-\mathrm{argtg}0.01\omega+\mathrm{argtg}0.5\omega$

复杂系统频率特性的绘制

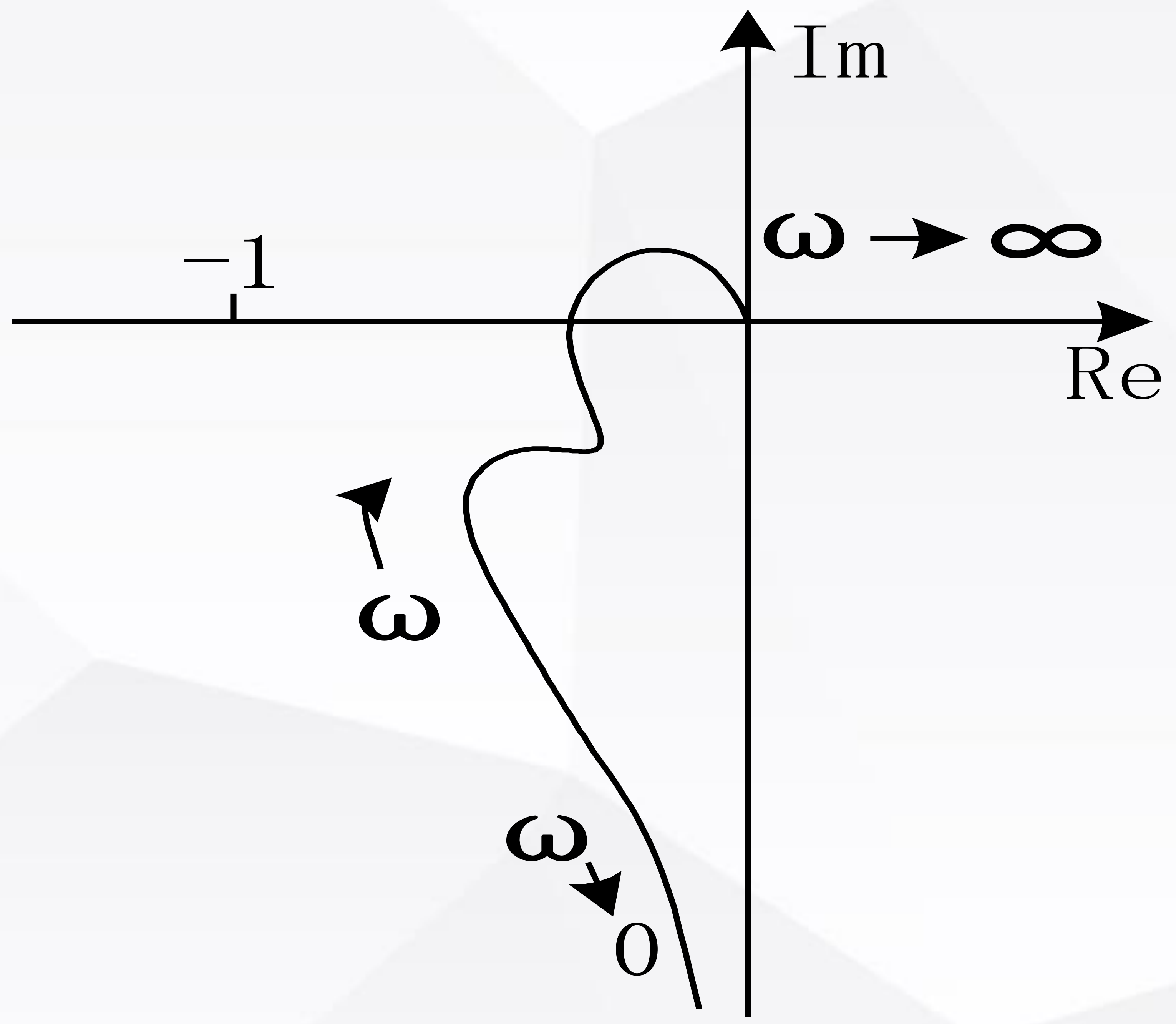
极坐标图大致形状：

模：从很大$\rightarrow 0$

角：从$-\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$

-1点位置如图所示

当角$= -180°$时，模小于1



复杂系统频率特性的绘制

剪切频率的计算：近似求解

（1）确定剪切频率的大概区间：

介于（2-10）

$$G(s)=\frac{100(0.5s+1)}{s(10s+1)(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

（2）依照**近似原则**，转折频率**在剪切频率左边的项**，$Tj\omega_c+1\approx Tj\omega_c$，

在右边的项，$Tj\omega_c+1\approx 1$

分子单元模：$0.5\omega_c$*100

分母单元模：ω_c *10 ω_c

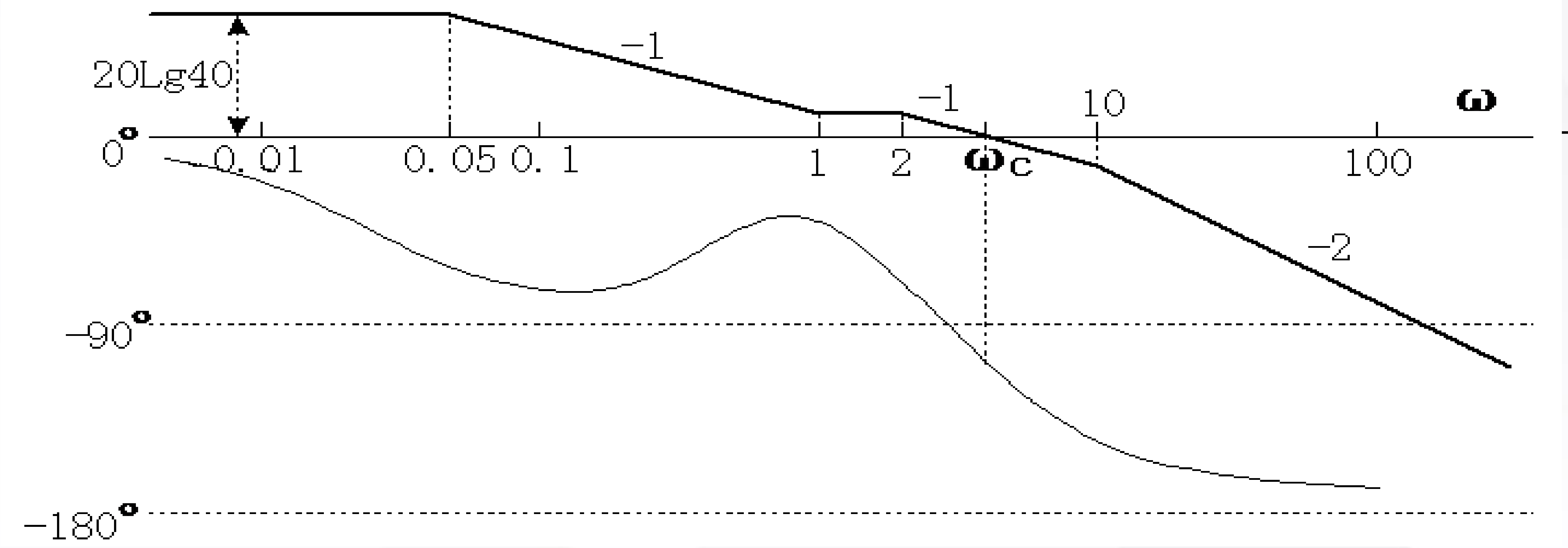
（3）**在剪切频率处，幅值特性为1**，即分子模等于分母模

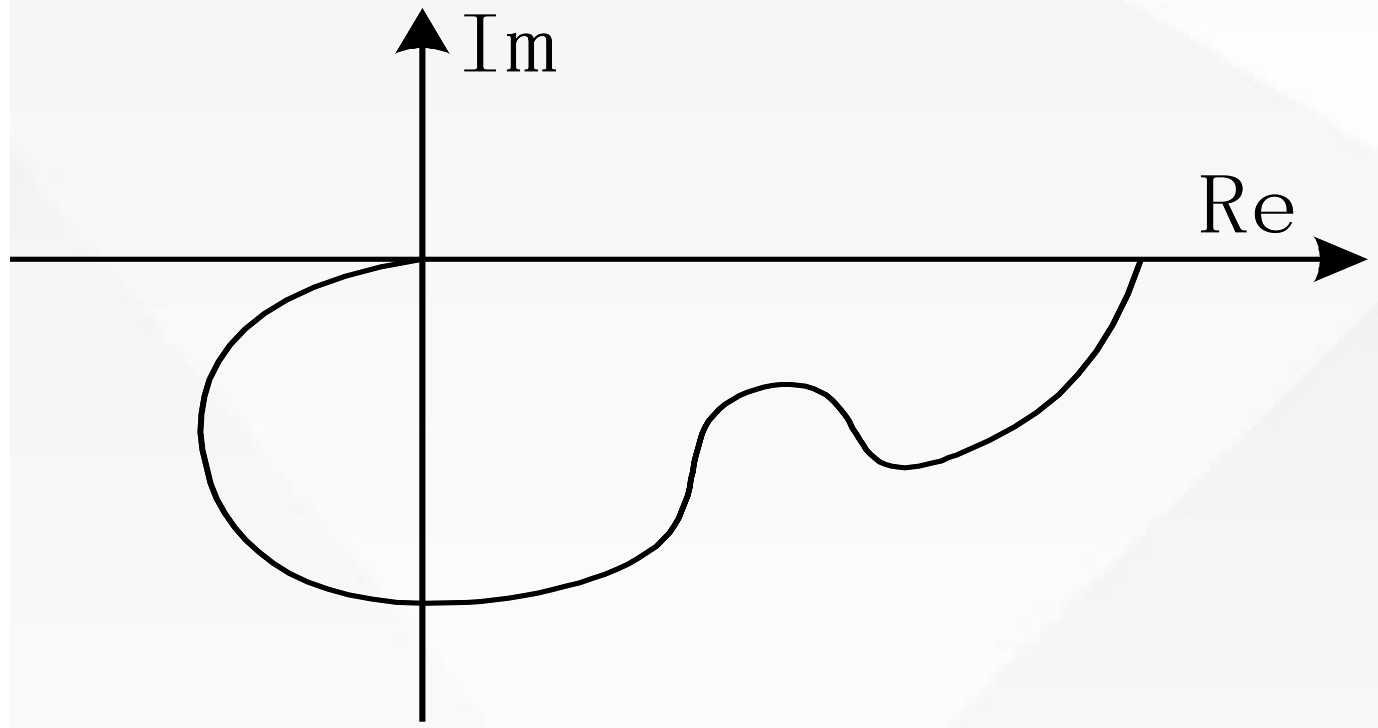
所以：100*0.5 ω_c = ω_c*10ω_c

得 ω_c =5

复杂系统频率特性的绘制

例2： $G(s)=\dfrac{40(s+1)}{(20s+1)(0.5s+1)(0.1s+1)}$





近似求解法： $40*\omega_c=20\omega_c*0.5\omega_c$

解得 $\omega_c=4$ $\theta(\omega_c)=-98.5°$

复杂系统频率特性的绘制

例3：带有二阶系统的频率特性

$$G(s)=\frac{2000(0.2s+1)^2}{s(s+1)(s^2+4s+100)}$$

$$\Downarrow$$

$$G(s)=\frac{20(0.2s+1)^2}{s(s+1)((0.1s)^2+0.04s+1)}$$

复杂频率特性的绘制

$$G(s)=\frac{20(0.2s+1)^2}{s(s+1)((0.1s)^2+0.04s+1)}$$

低频段： 斜率：-20，与ω轴交于$\omega=20$

$$\frac{20}{s}$$

转折频率：

$\omega=1$，斜率：-40

$$\frac{20}{s(s+1)}$$

$\omega=5$，斜率：0

$$\frac{20(0.2s+1)^2}{s(s+1)}$$

$\omega=10$，斜率：-40

$$\frac{20(0.2s+1)^2}{s(s+1)((0.1s)^2+0.04s+1)}$$

二阶系统修正： $\zeta=0.2,\quad T=0.1$

$$\omega_r=\frac{1}{T}\sqrt{1-2\zeta^2}=9.59,$$

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=8.14dB$$

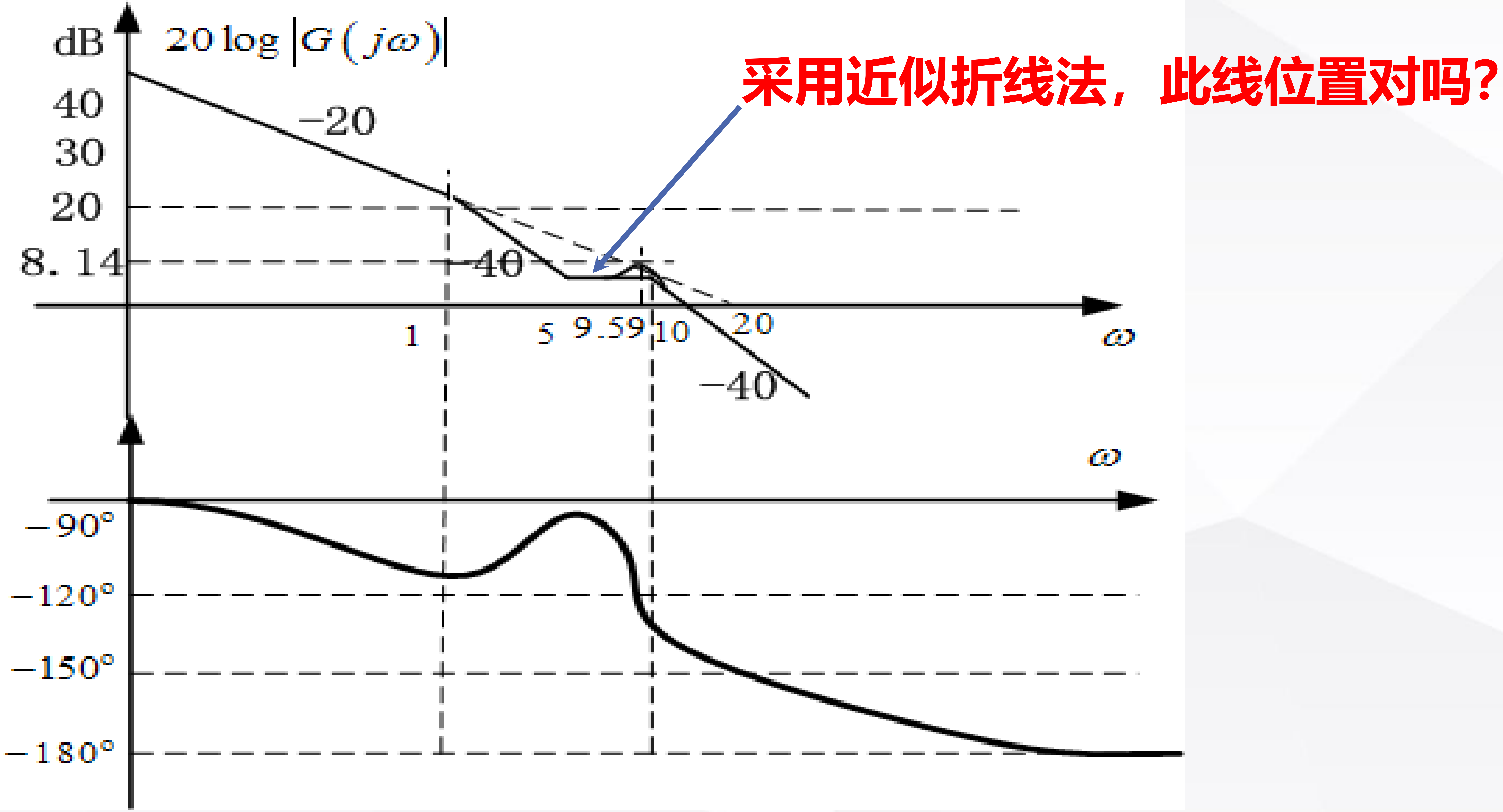
复杂频率特性的绘制

相频特性的画法：起点，终点，转折点

各环节角度	$\omega=0$	$\omega=1$	$\omega=5$	$\omega=10$	$\omega=\infty$
S^{-1}	−90	−90	−90	−90	−90
$-tg^{-1}\omega$	0	−45	−78.7	−84.3	−90
$2tg^{-1}0.2\omega$	0	22.6	90	126.8	180
$-tg^{-1}\dfrac{4\omega}{100-\omega^2}$	0	−2.3	−15	−90	−180
总和	−90	−114.7	−93.7	−137.5	−180

$$\theta(\omega) = -90^0 - \text{argtg}\omega + 2\text{argtg}0.2\omega - \text{argtg}\frac{4\omega}{100-\omega^2}$$

复杂频率特性的绘制


dB
$20\log|G(j\omega)|$
40
30
20
8.14
−20
−40
−40
1
5
9.59
10
20
ω
ω
−90°
−120°
−150°
−180°
采用近似折线法，此线位置对吗？

复杂频率特性的绘制

最小相位系统：系统的所有零极点都在左半平面，幅频特性与相频特性存在严格确定的关系。

在相当宽的频率段：

如果对数幅频特性的斜率趋于0，则相频特性趋于0°；

如果对数幅频特性的斜率趋于-1，则相频特性趋于 -90°；

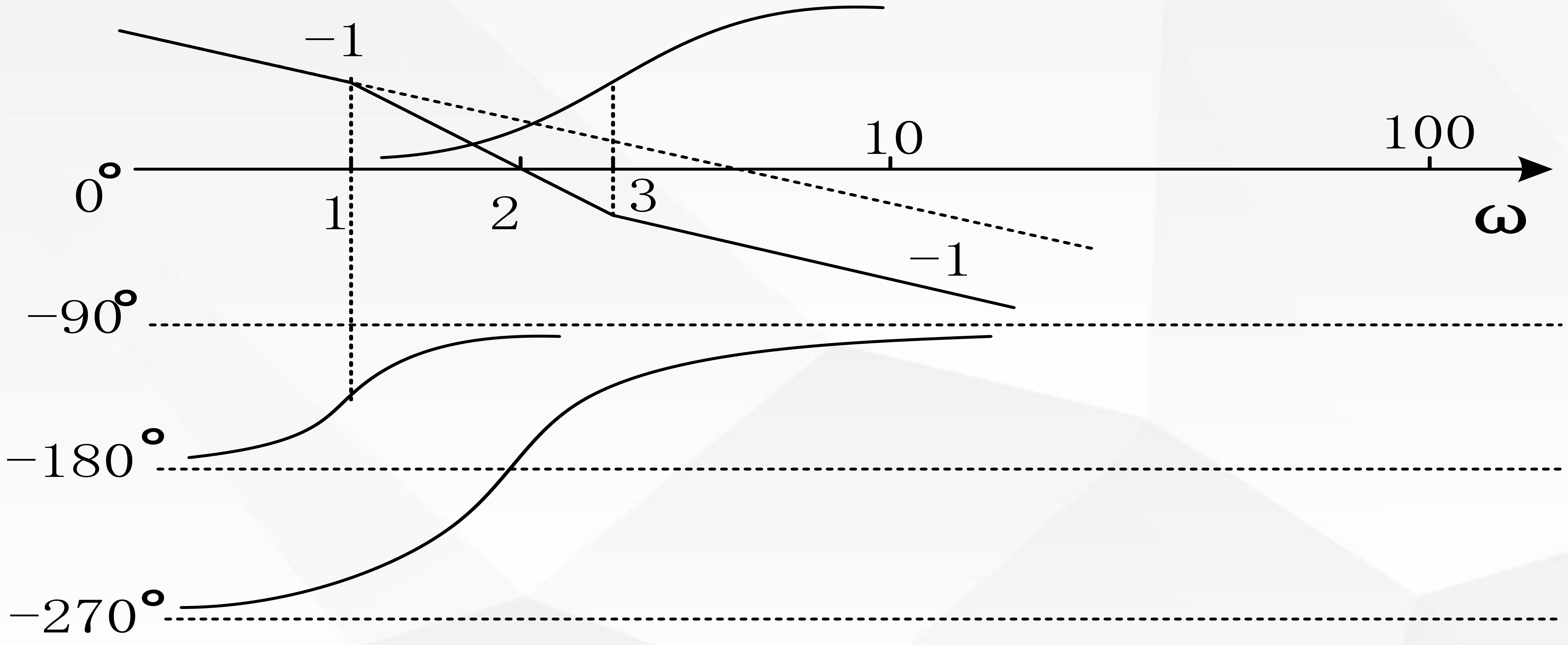
如果对数幅频特性的斜率趋于-k，则相频特性趋于-k*90°；

根据幅频特性函数计算相频特性函数，式4.7.5，p280。

复杂频率特性的绘制

例4：非最小相位系统

$$G_o(s)=\frac{6(0.33s+1)}{s(s-1)}$$



$\frac{6}{s}$： -90

$\frac{1}{s-1}$： -180~-90

$0.33s+1$： 0~90

G： -270~-90

非最小相位系统的幅相之间没有严格确定的关系，必须根据具体对象具体分析 （试画出极坐标图）

复杂频率特性的绘制

例5：含参系统的频率特性 $G_o(s)=\dfrac{K(T_as+1)(T_bs+1)}{s^2(T_1s+1)}$

绘制以下三种情况的对数图和极坐标图。

(1) $T_a > T_b > T_1 > 0$

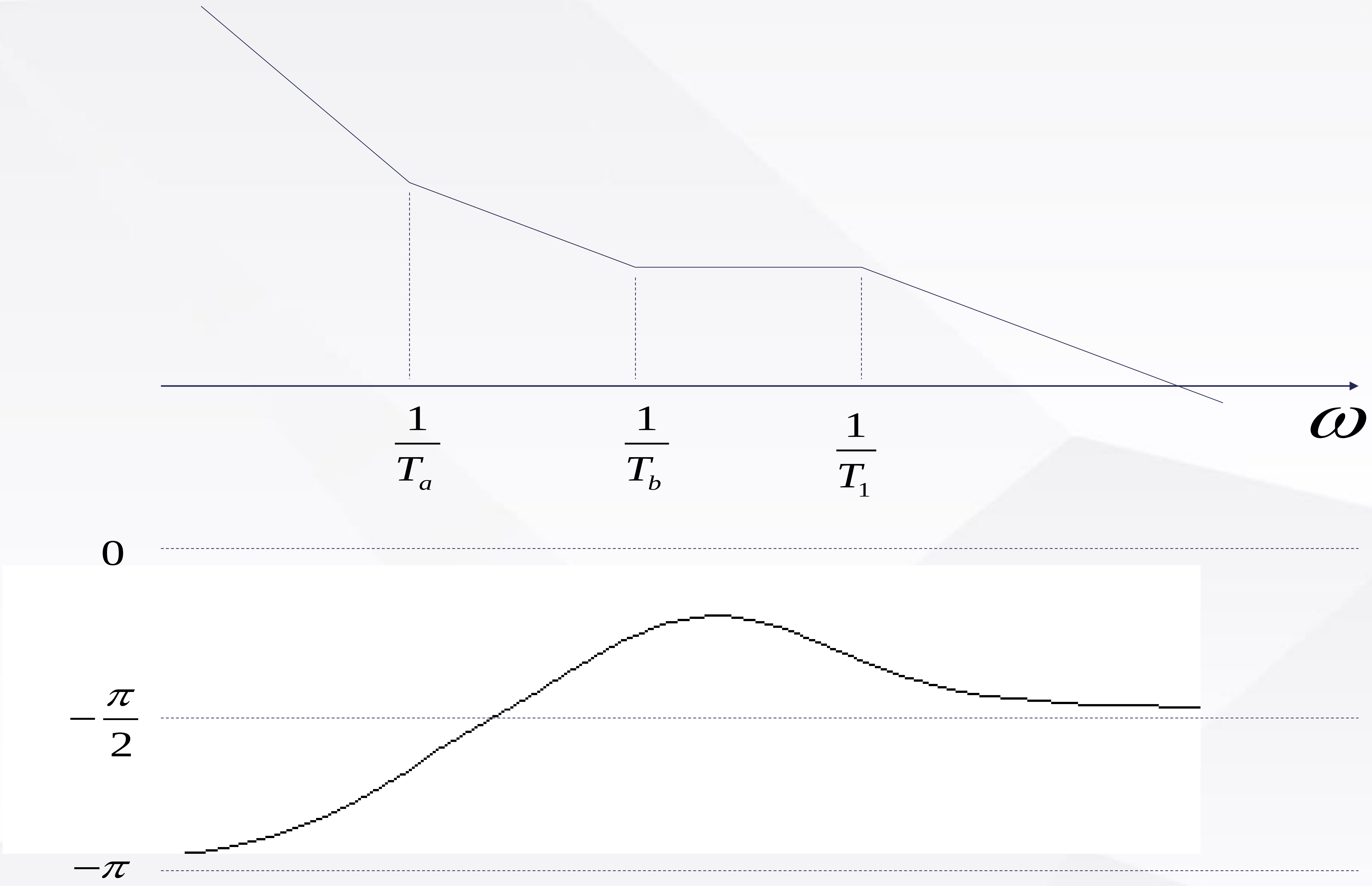
(2) $T_a > T_1 > T_b > 0$

(3) $T_1 > T_a > T_b > 0$

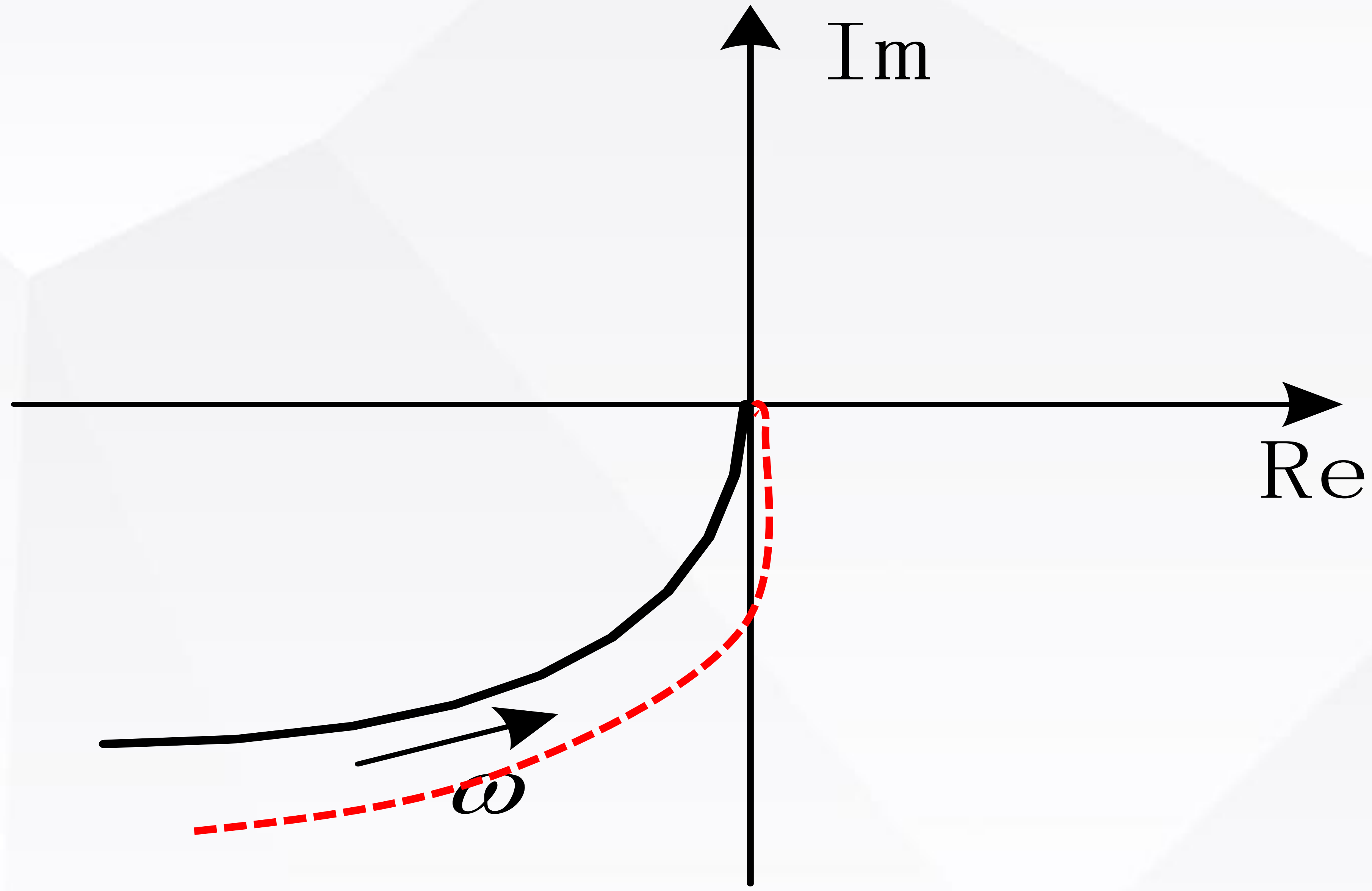
复杂频率特性的绘制

$$G_o(s)=\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)}{s^2(T_1 s+1)}$$

(1) $T_a > T_b > T_1 > 0$



$$\theta(\omega)=-180^0-\mathrm{argtg}\,\omega T_1+\mathrm{argtg}\,\omega T_a+\mathrm{argtg}\,\omega T_b>-180°$$



$$\pi/2+\mathrm{argtg}\,\omega T_1=\mathrm{argtg}\,\omega T_a+\mathrm{argtg}\,\omega T_b$$

$$\Downarrow$$

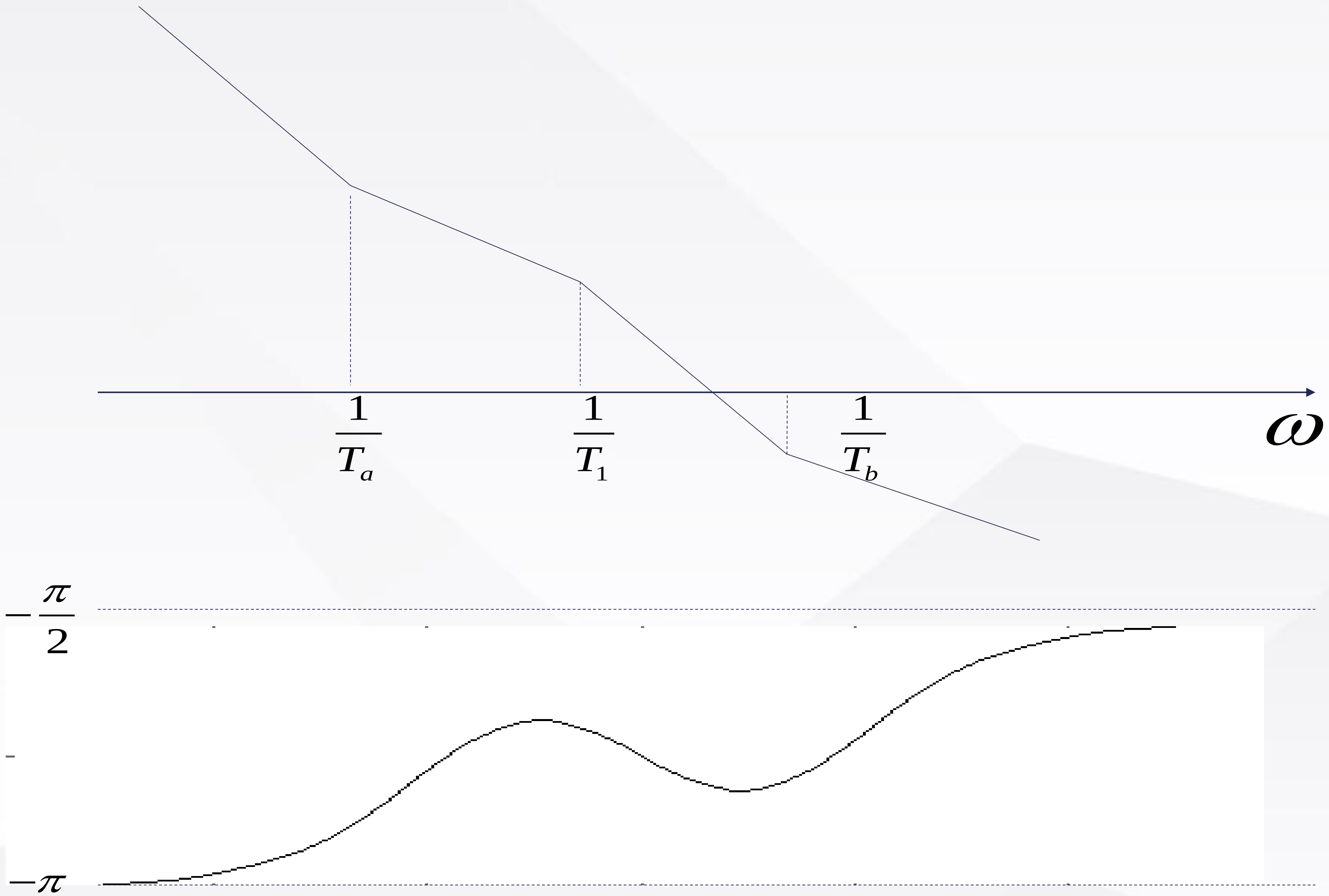
$$\omega^2=\frac{1}{T_aT_b-TaT_1-TbT_1}$$

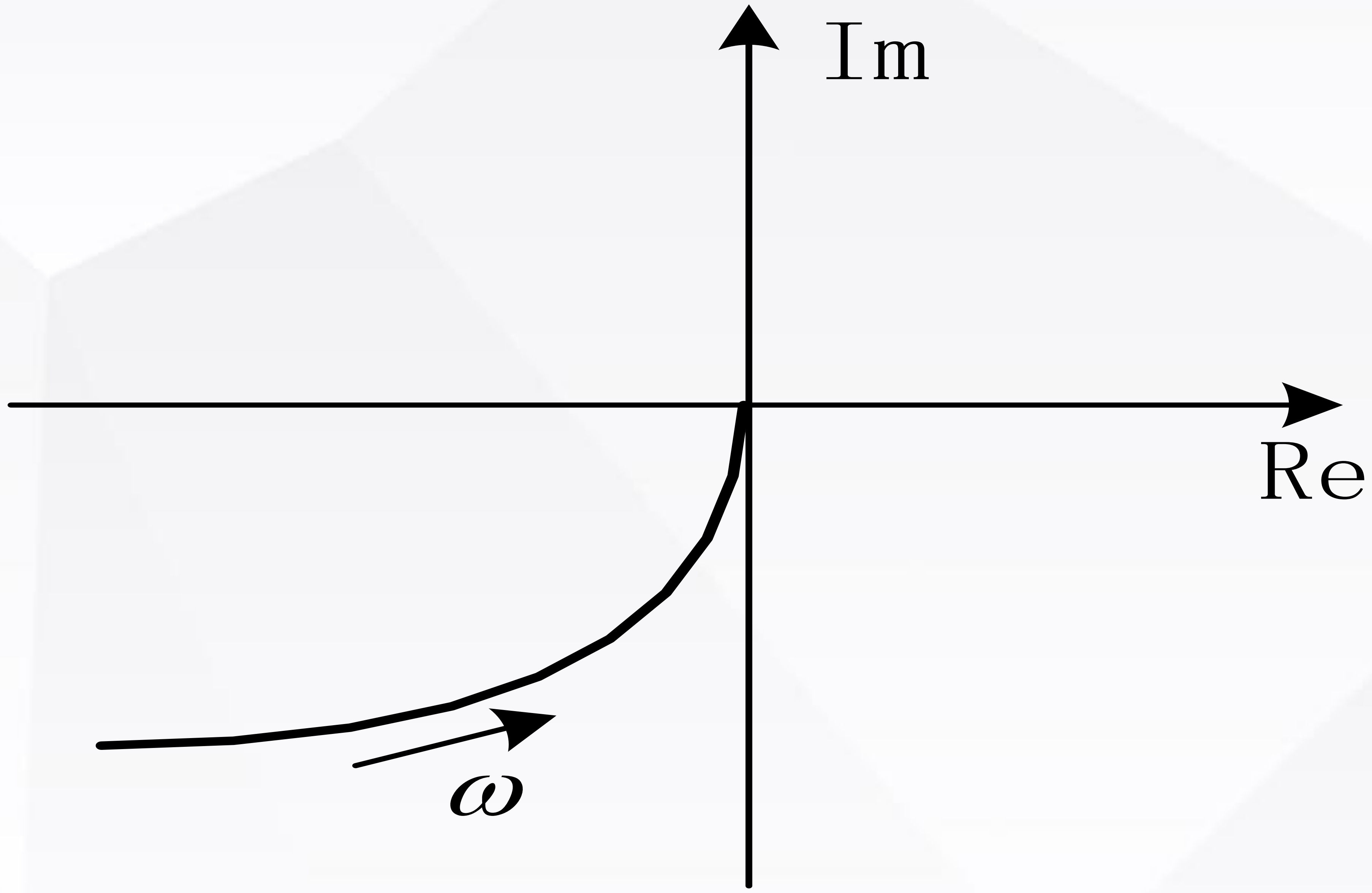
如果存在ω，则穿越-π/2

复杂频率特性的绘制

$$G_o(s)=\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)}{s^2(T_1 s+1)}$$

(2) $T_a > T_1 > T_b > 0$





$$\omega^2=\frac{1}{T_aT_b-TaT_1-TbT_1}$$

不存在ω穿越-π/2！

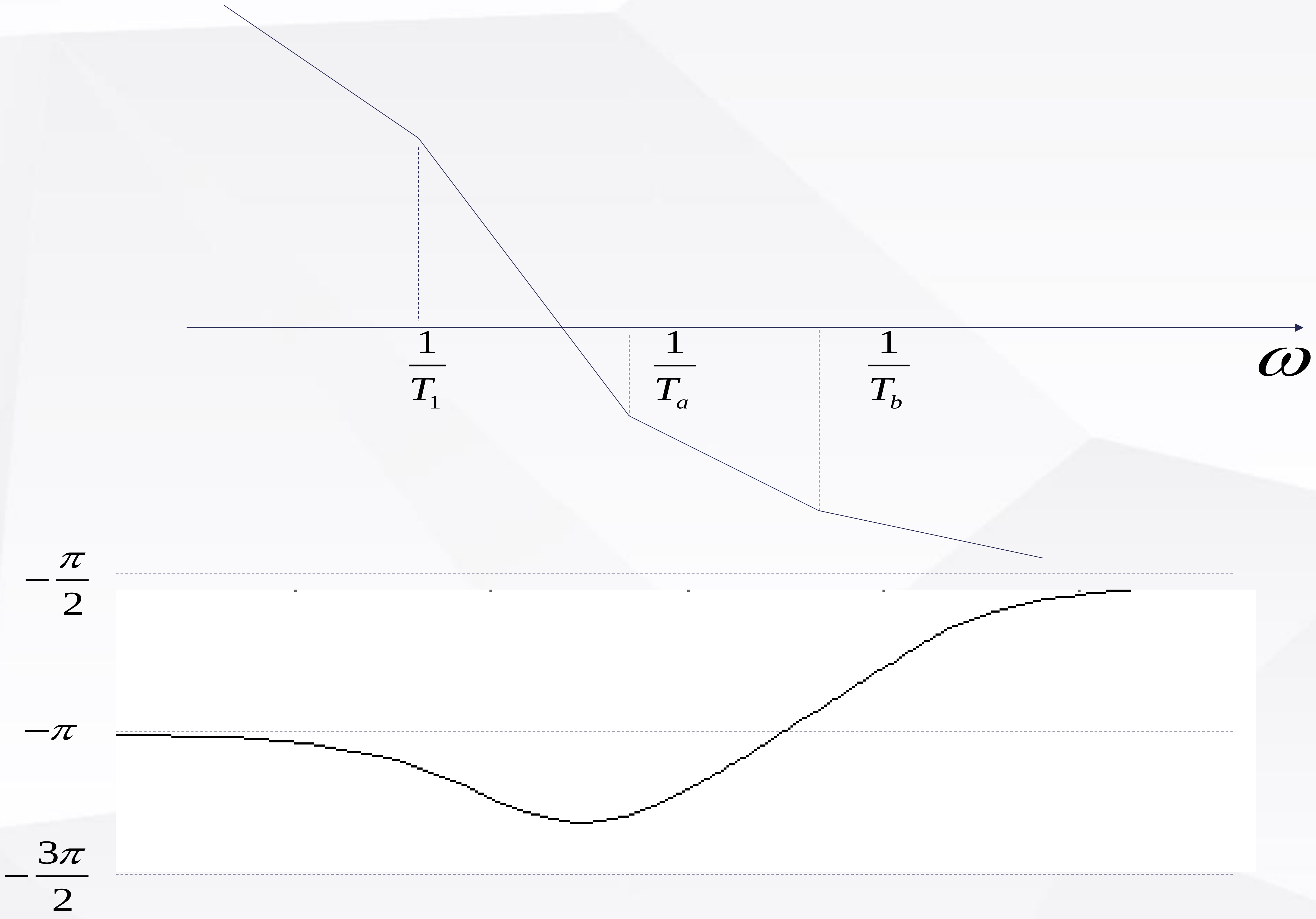
$$\theta(\omega)=-180^0-\text{argtg}\omega T_1+\text{argtg}\omega T_a+\text{argtg}\omega T_b>-180°$$

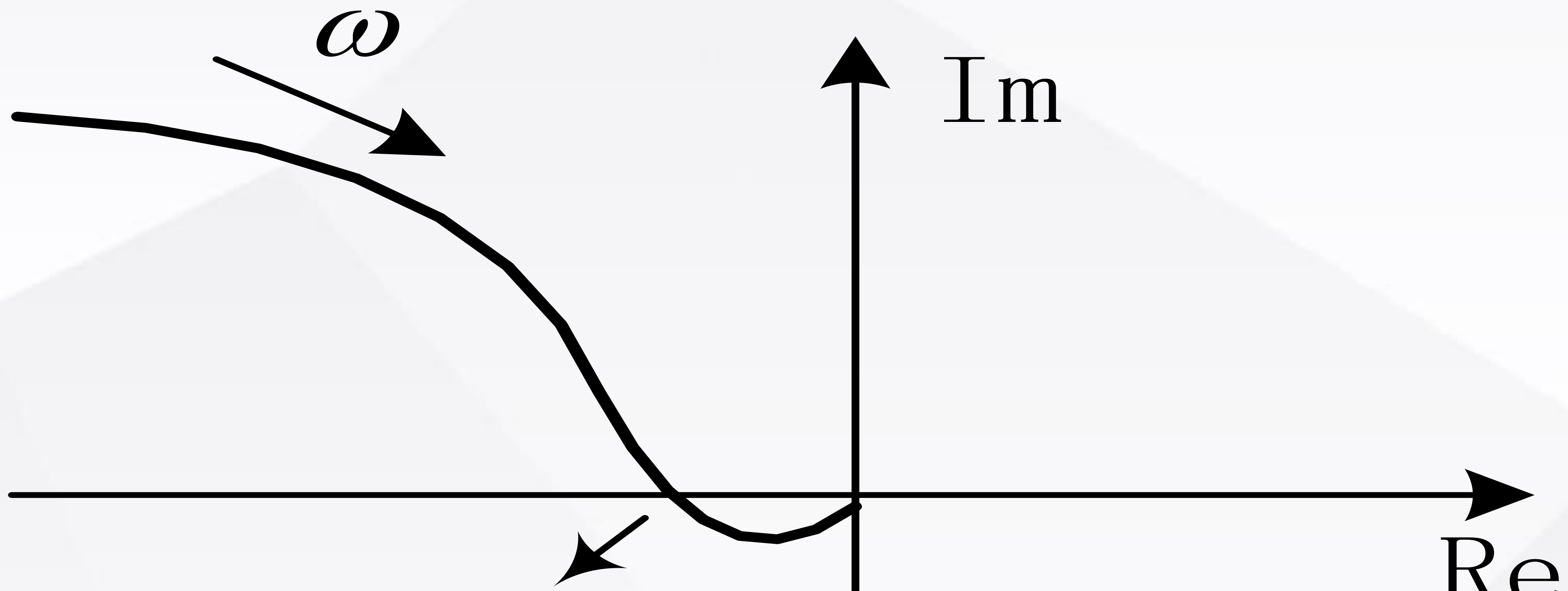
始终小于-90°

复杂频率特性的绘制

$$G_o(s)=\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)}{s^2(T_1 s+1)}$$

(3) $T_1>T_a>T_b>0$





$$\omega=\sqrt{\frac{T_1-T_a-T_b}{T_1T_aT_b}}$$

$$\mathrm{argtg}\,\omega T_1=\mathrm{argtg}\,\omega T_a+\mathrm{argtg}\,\omega T_b$$

$$\omega^2=\frac{T_1-Ta-T_b}{T_1T_aT_b}$$

条件不满足又怎样?

$$\theta(\omega)=-180^0-\mathrm{argtg}\,\omega T_1+\mathrm{argtg}\,\omega T_a+\mathrm{argtg}\,\omega T_b$$

如果$T_1>Ta+Tb$，则刚开始小于$-180°$；中间穿越-180°；最终趋于但小于-90°

复杂频率特性的绘制

6：绘制如下传递函数的极坐标图（练习）

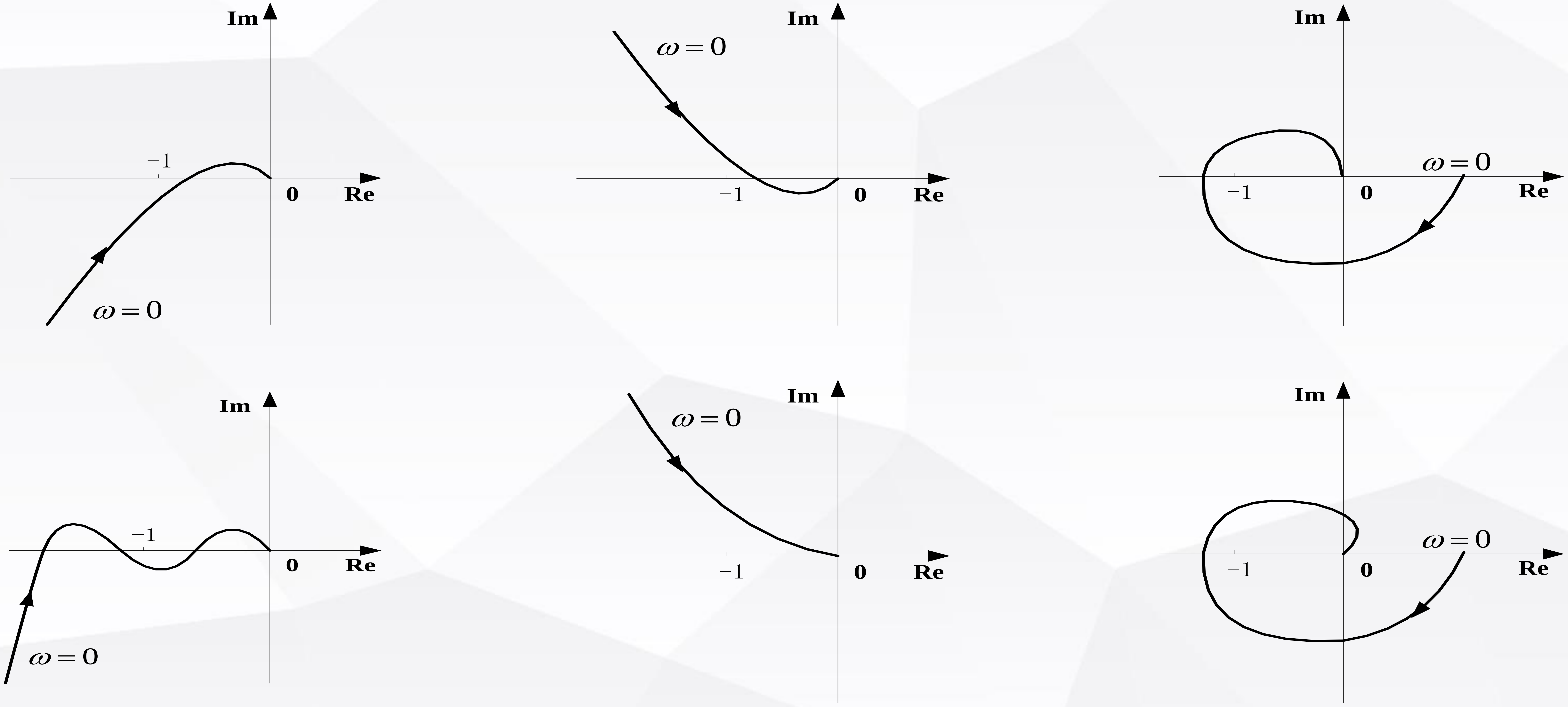
1）$G_o(s)=\dfrac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$

2）$G_o(s)=\dfrac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$

3）$G_o(s)=\dfrac{K(T_0s+1)}{(T_1s+1)\cdots\cdots(T_5s+1)}$

4）$G_o(s)=\dfrac{K(T_as+1)(T_bs+1)}{s(T_1s+1)\cdots\cdots(T_4s+1)}$

典型幅相频率特性图



思考题

对于上述系统4，绘制以下几种情况的Nyquist曲线

a. $T_1 > T_2 > T_a > T_b > T_3 > T_4$

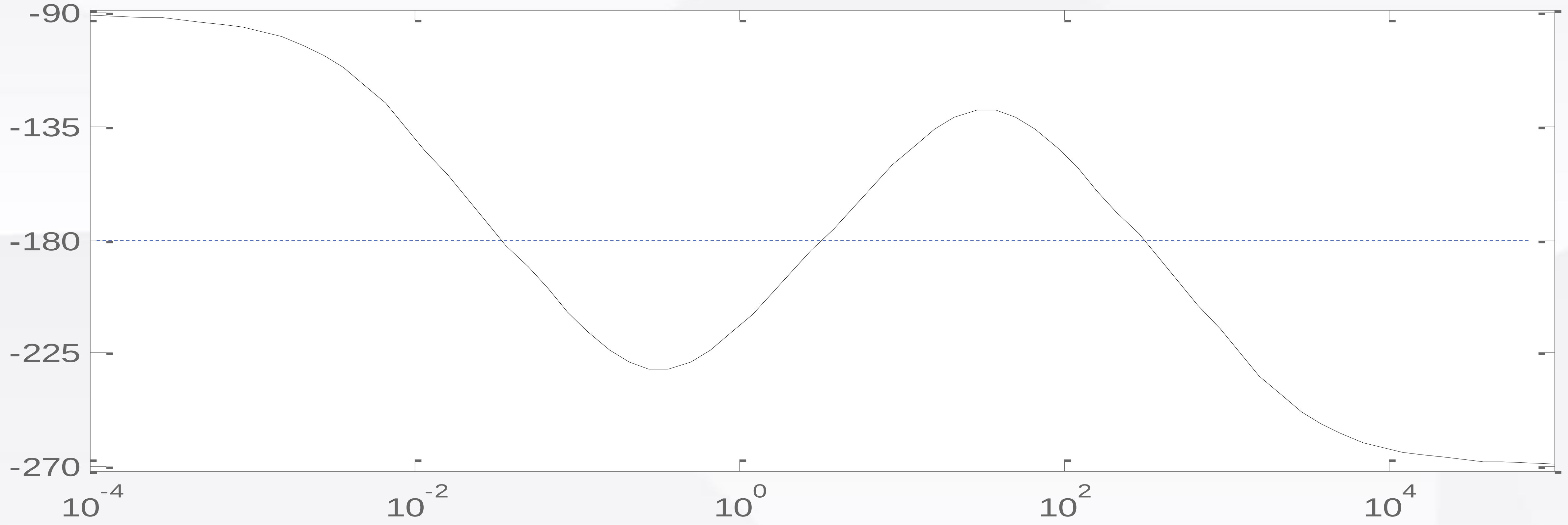
b. $T_1 > T_2 > T_3 > T_a > T_b > T_4$

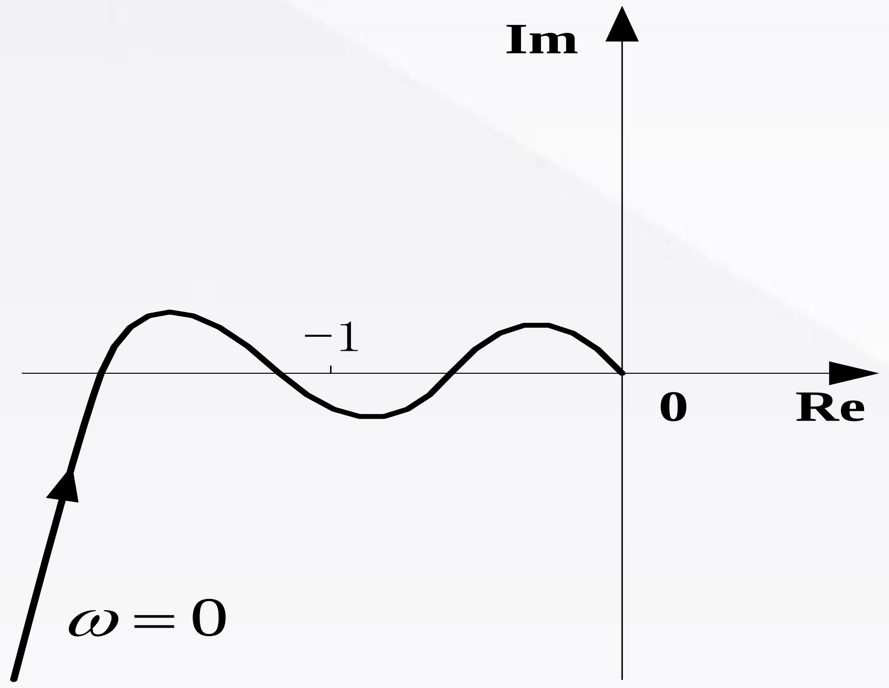
c. $T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > T_a > T_b$

$$G_o(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s(T_1 s + 1)\cdots\cdots(T_4 s + 1)}$$

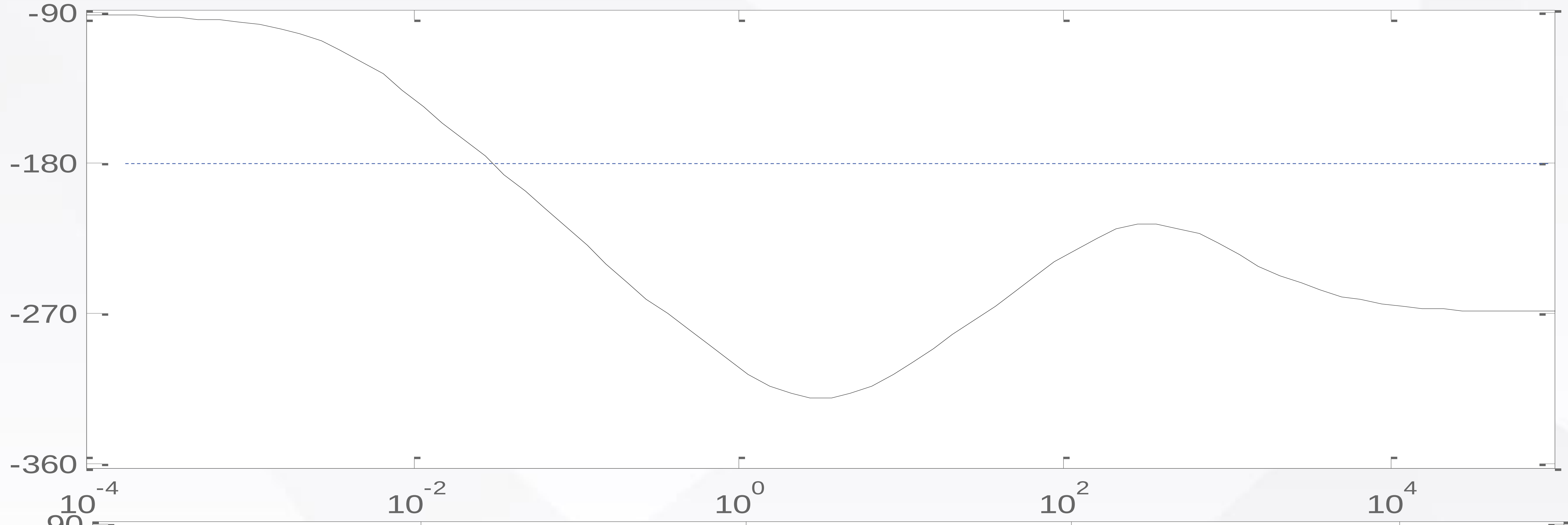
根据对数相频图画极坐标图，幅值由K决定

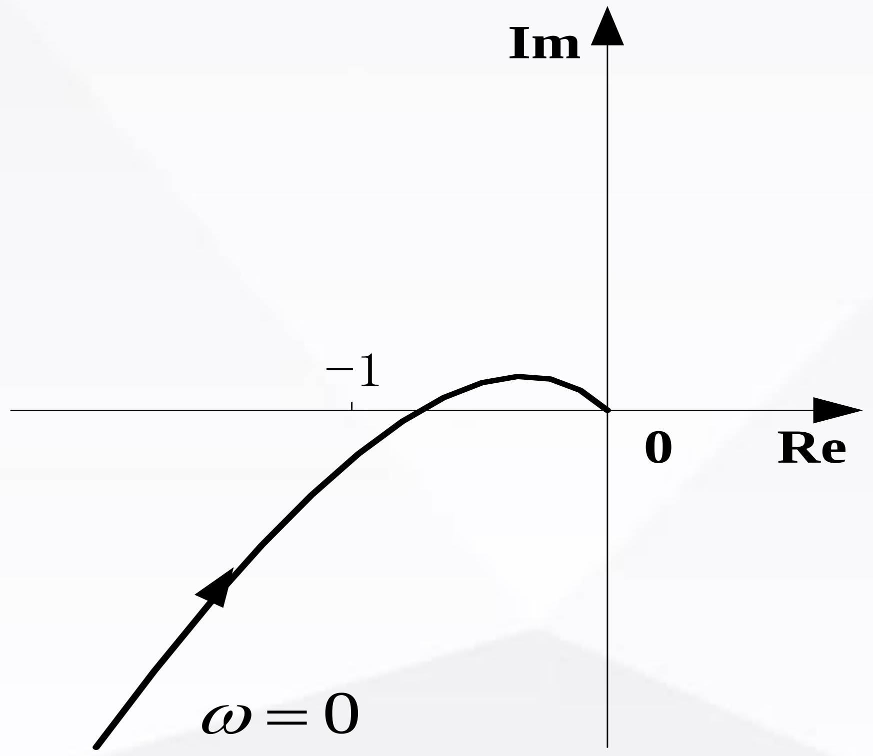
a



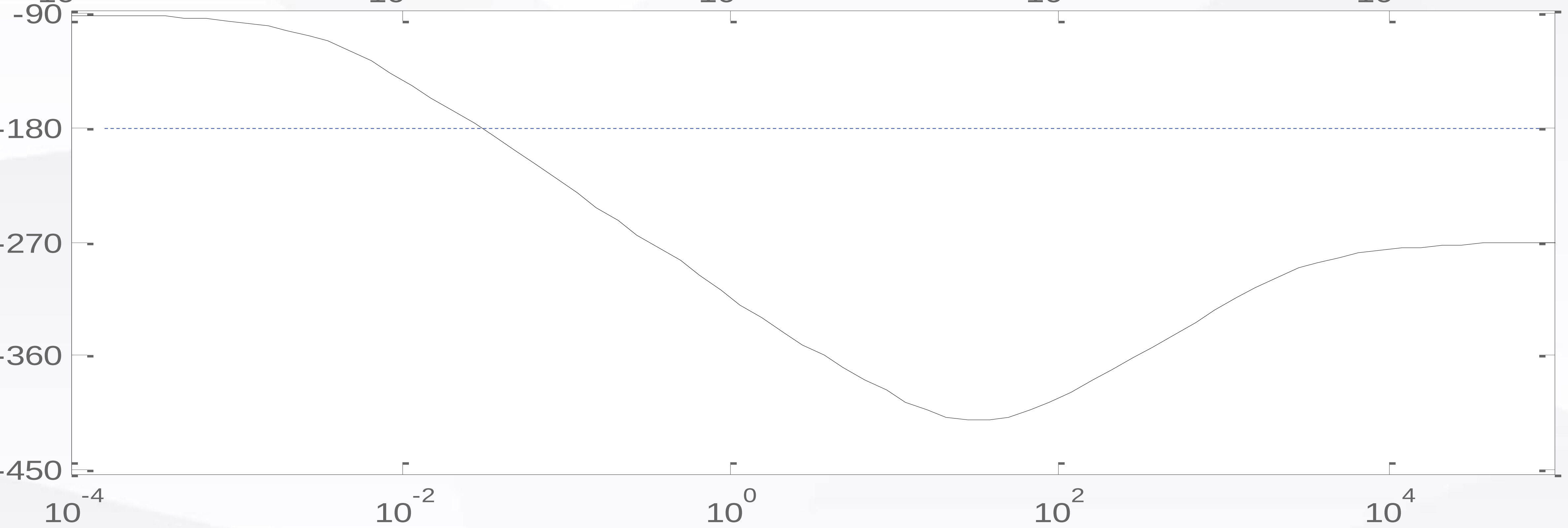


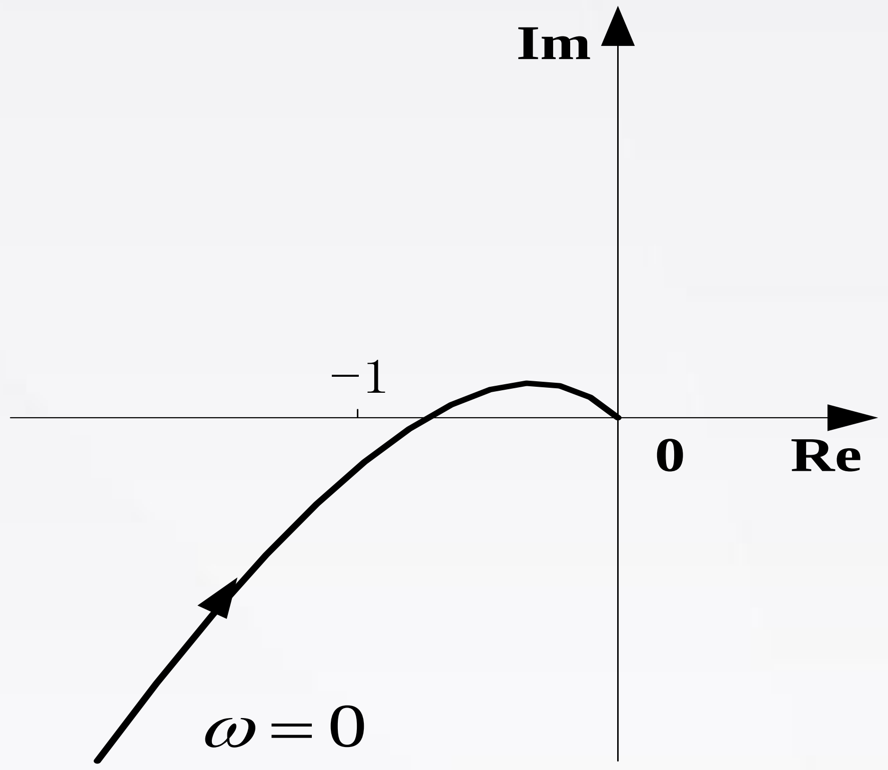
b





c





闭环频率特性

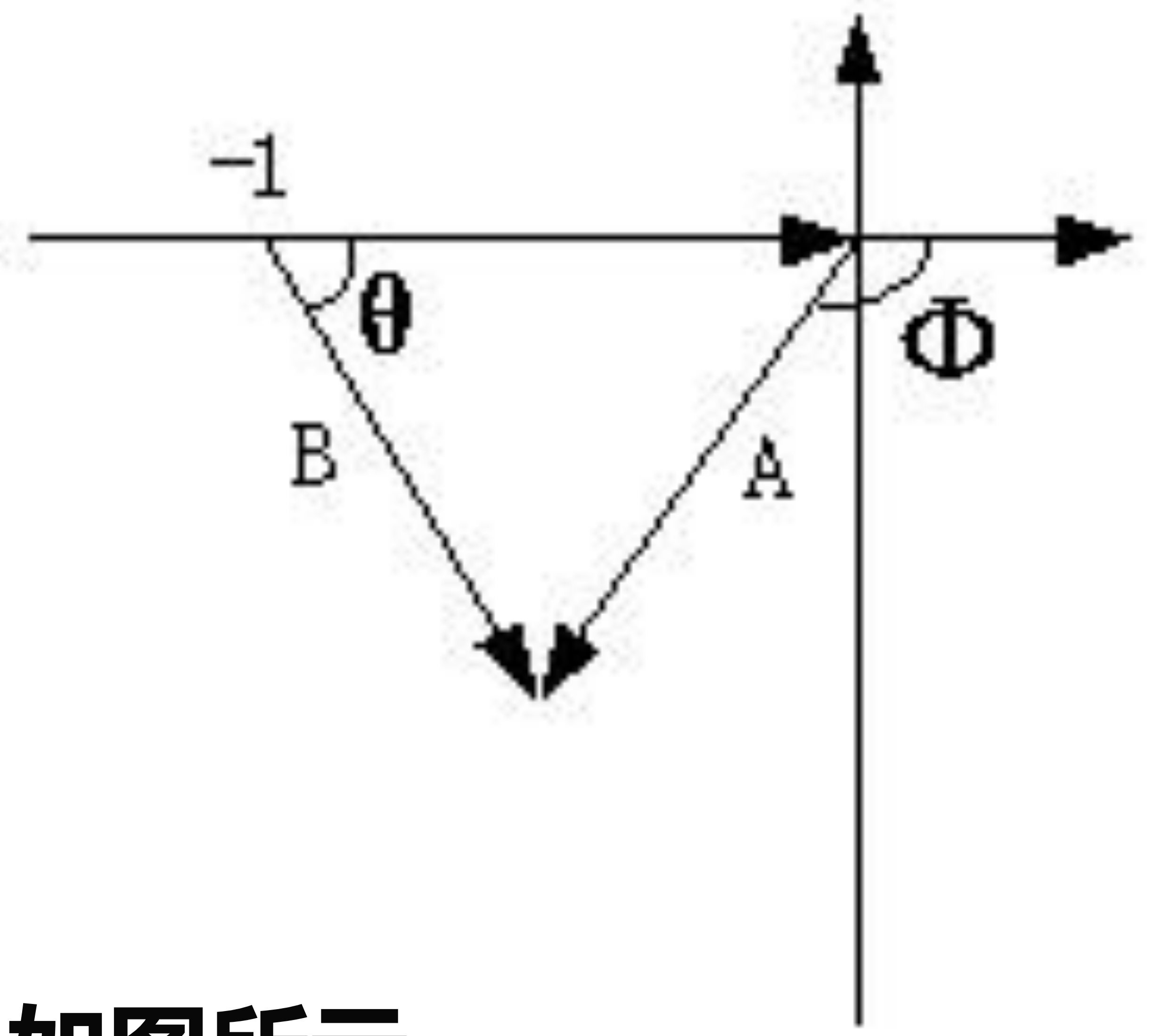
从开环频率特性求闭环频率特性

$$G_c(j\omega) = \frac{G_o(j\omega)}{1+G_o(j\omega)}$$ (假设单位负反馈)

极坐标图：

在任一ω下，开环频率特性的模角可表示为 $A\angle\phi$

则，闭环 $G_c(j\omega_1) = \dfrac{A\angle\phi}{1+A\angle\phi} = \dfrac{A\angle\phi}{B\angle\theta} = \dfrac{A}{B}\angle\phi-\theta$



如图所示

根据开环极坐标图可大致画出闭环系统频率特性，但不方便。

闭环频率特性

对数频率特性：

(1) 在低频段 $|G_o(j\omega)| \gg 1 \ \therefore G_c(j\omega) \approx 1, |\ | \approx 1, \angle \approx 0^\circ$

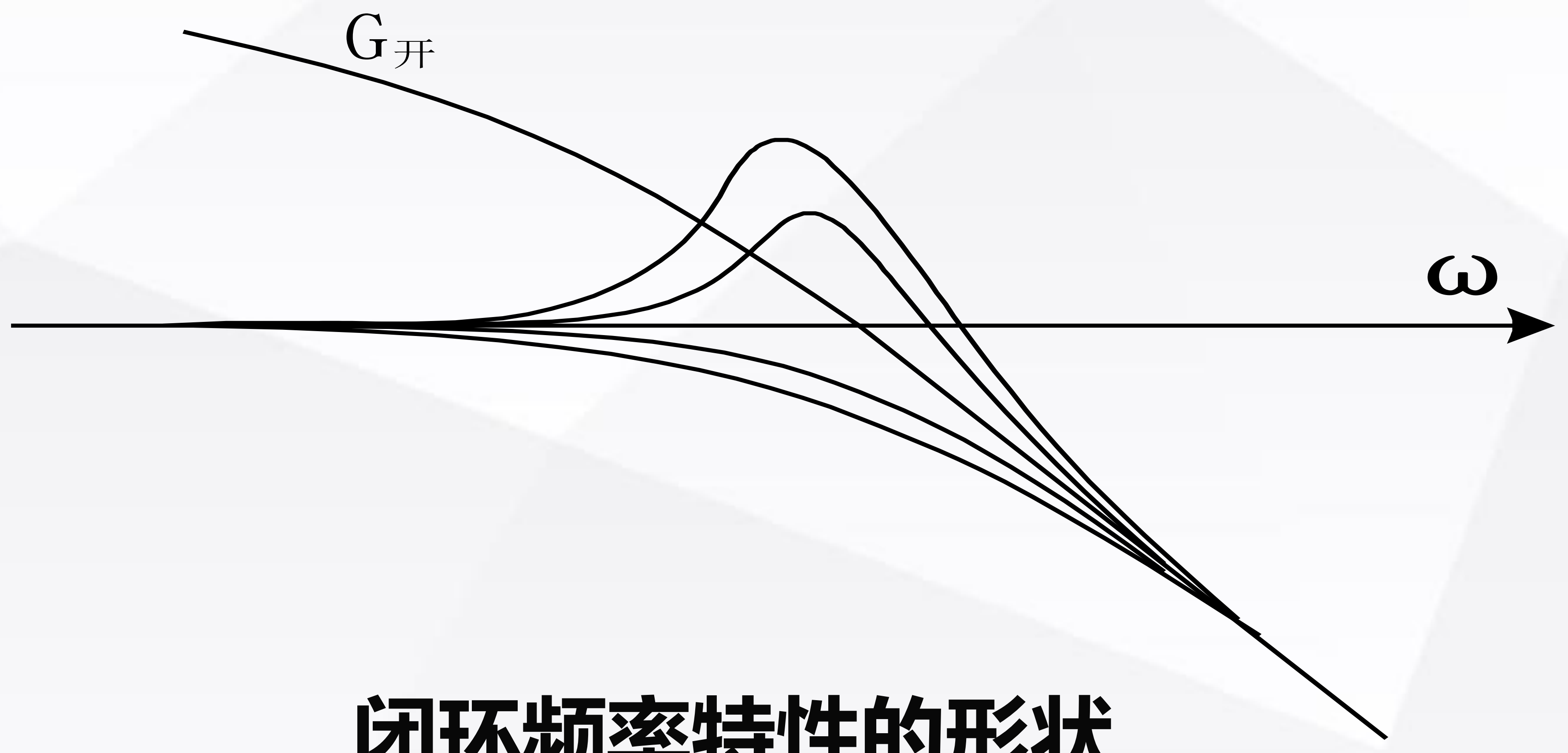
(2) 在高频段 $|G_o(j\omega)| \ll 1 \ \therefore G_c(j\omega) \approx G_o(j\omega)$

$$G_c(j\omega) = \frac{G_o(j\omega)}{1 + G_o(j\omega)}$$

(3) 在中频段 （指在剪切频率附近）

如果出现$G_o(j\omega) \approx -1$ （模为1且角 $\approx -180^\circ$）这时 $|G_c(j\omega)| \gg 1$

为了避免剧烈震荡，就得避免谐振峰，因此必须避免上述情况出现！



闭环频率特性的形状

闭环频率特性

开环频率特性不同频段的情况和闭环系统静动态性能关系：

(1) 低频段斜率越大，对应积分环节数目越多，开环增益越大。在闭环系统稳定的条件下，其稳态误差越小，稳态精度越高。

(2) **中频段特性反映了闭环系统动态响应的稳定性和动态性能。**

(3) 高频段特性反映系统对输入端高频信号的抑制能力，高频段的增益越低，系统对高频信号的衰减作用越大，即系统的抗高频干扰能力越强。

从开环频率特性可获得闭环系统频率特性的一些性质，但是否存在更为方便判断闭环系统性能的方法呢？

Nyquist稳定判据

幅角定理

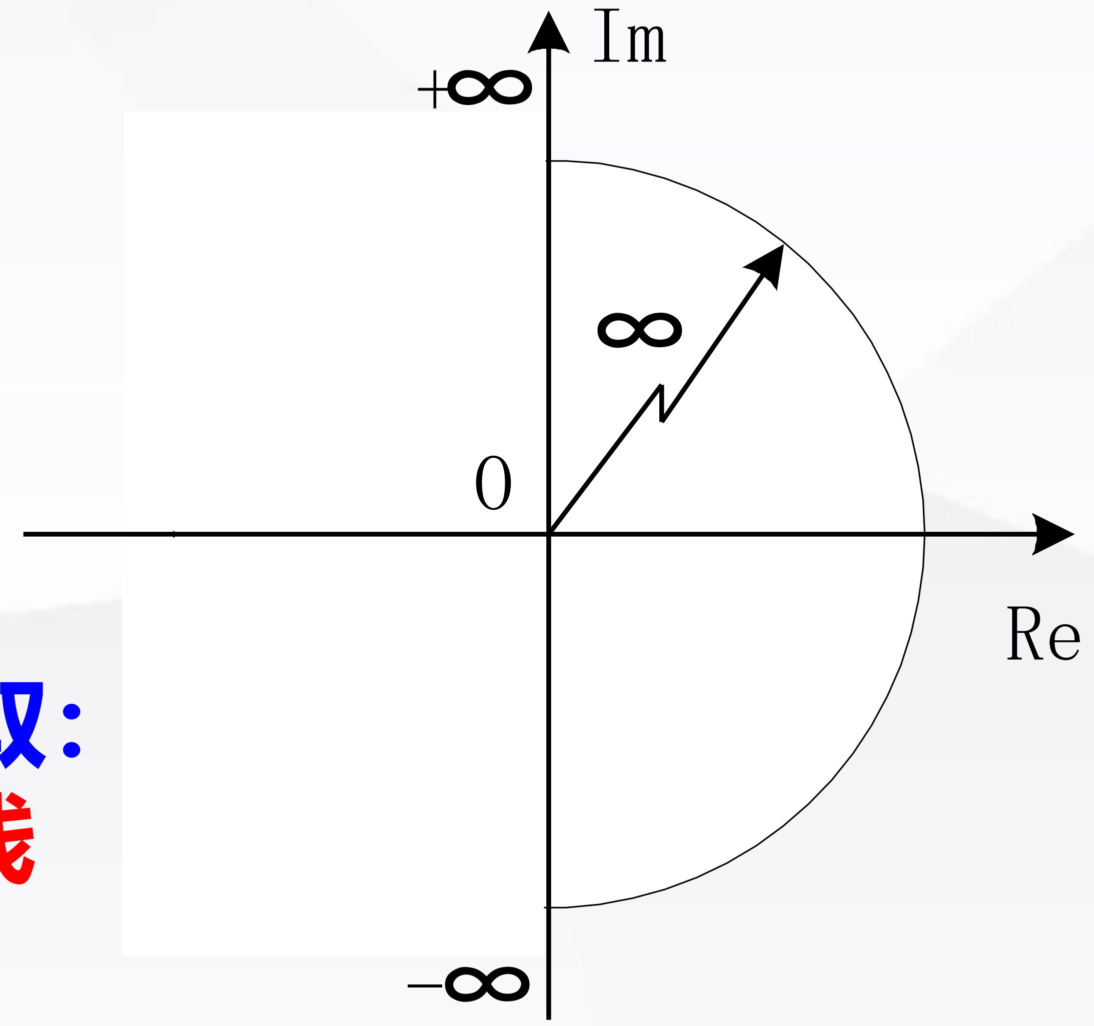
设W(s)在复平面一个**封闭曲线内具有P个极点和Z个零点**，

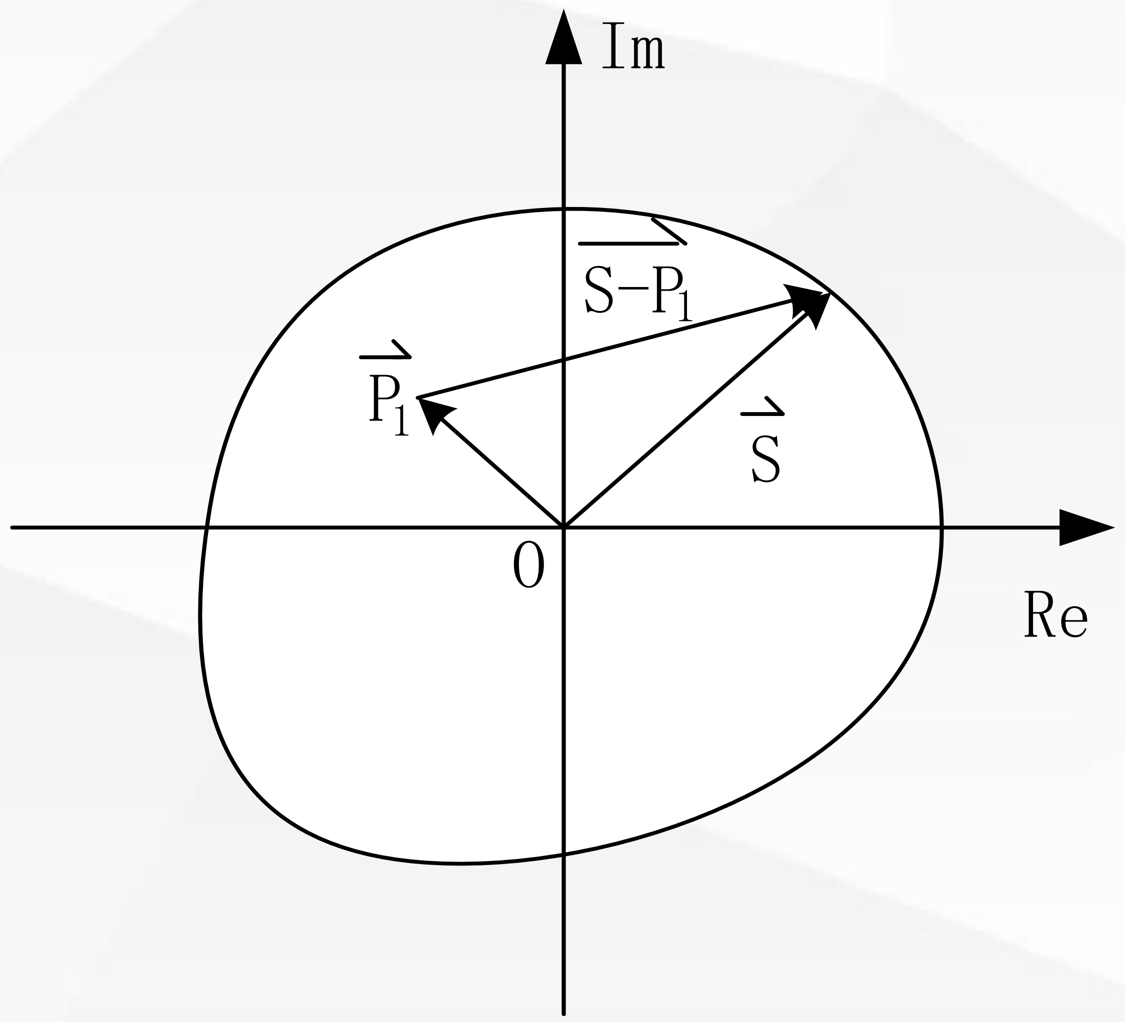
当**s向量沿封闭曲线顺钟向旋转一圈**，所有向量 $\overrightarrow{s-z_j}, \overrightarrow{s-p_j}$ 都顺钟向旋转一周。

包围原点一周

⇒ **W(s)顺钟向旋转的圈数*N=Z-P***

封闭曲线选取：
D形围线

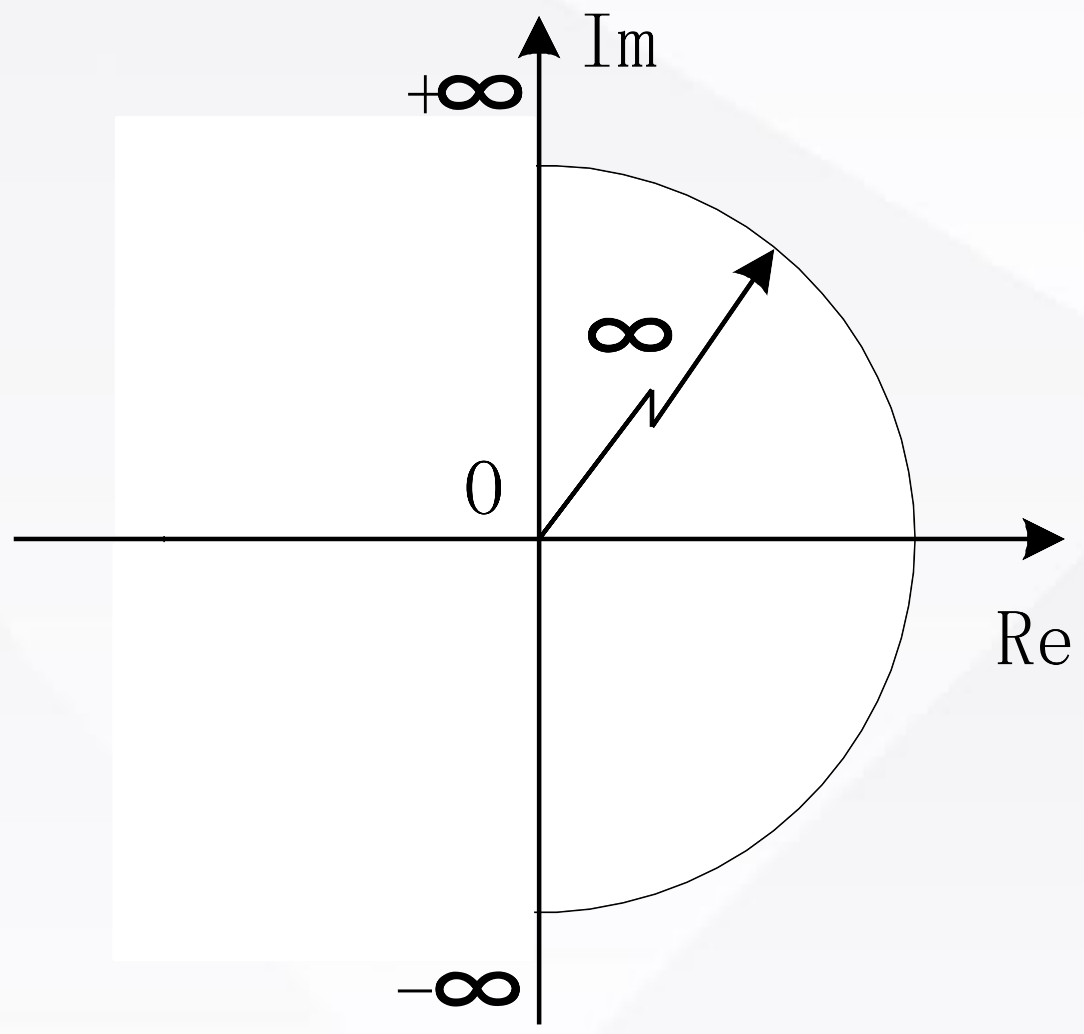




$$W(s) = \frac{\prod_{j=1}^{z}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{p}(s-p_i)}$$

Nyquist稳定判据

假设系统开环传递函数： $Q(s)=\dfrac{N(s)}{P(s)}=k\cdot\dfrac{\prod_{j=1}^{z}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{p}(s-p_i)}$



D形围线

构造一个函数

$$W(s)=1+Q(s)=\frac{P(s)+N(s)}{P(s)}\begin{array}{l}\longrightarrow \text{闭环分母}\\ \longrightarrow \text{开环分母}\end{array}$$

作一条封闭曲线D包围整个右半平面，其中包含p个开环极点。

系统是否有闭环极点？或者说$W(s)$是否有零点？

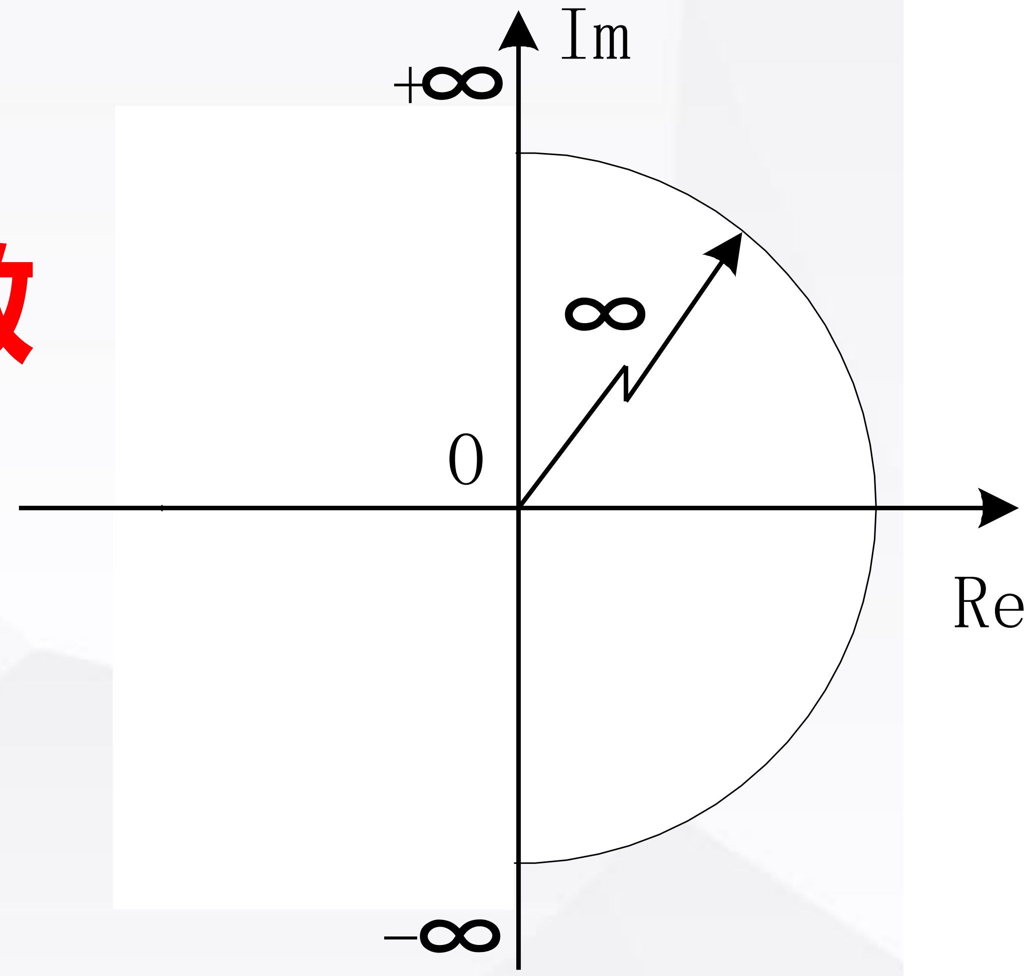
Nyquist稳定判据

按幅角定理，当s沿广义D形围线顺钟向旋转一圈：

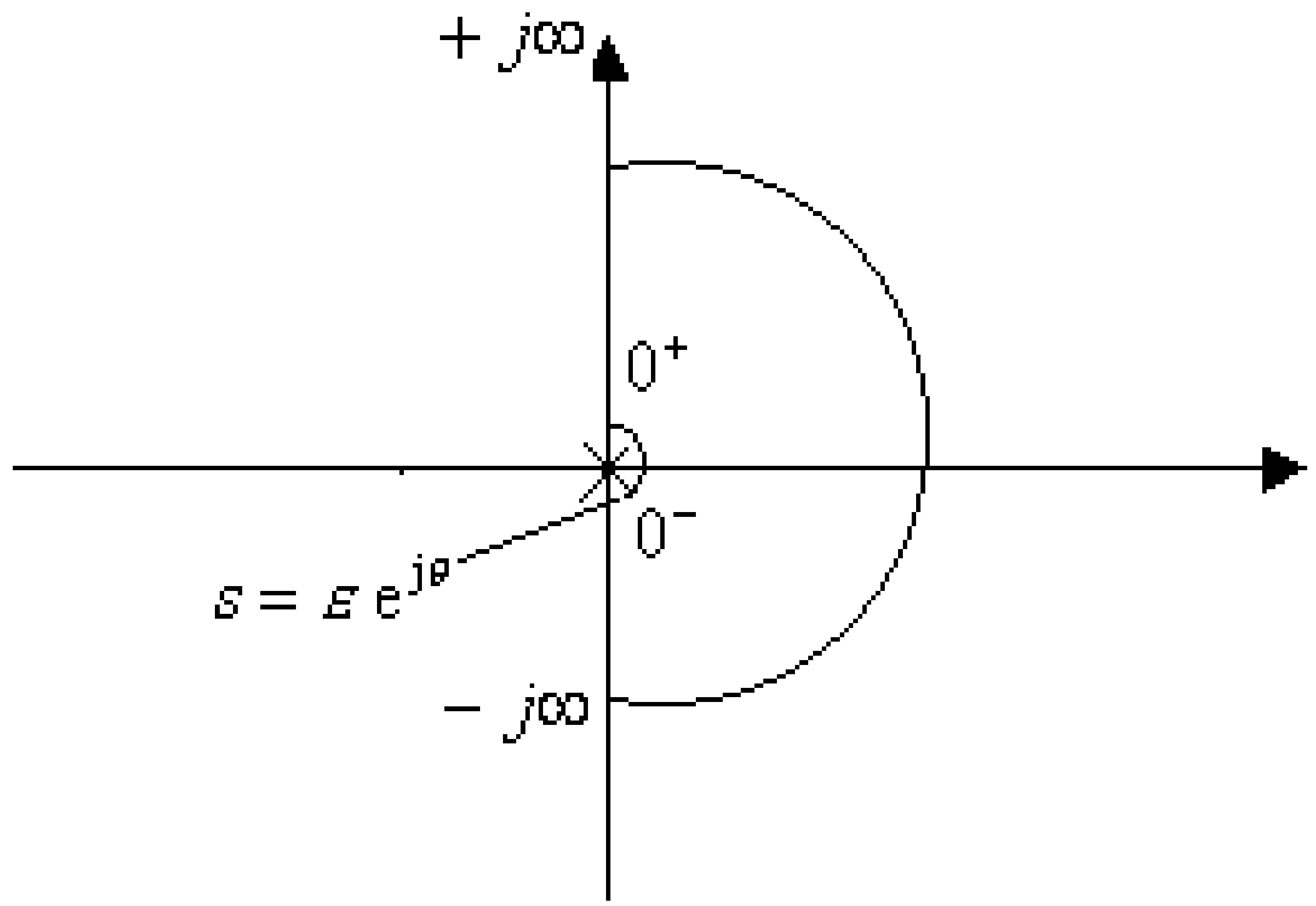
$1 + Q(s)$顺钟向包围原点的圈数

= 闭环在右半平面的极点数Z

- 开环在右半平面的极点数P



D形围线



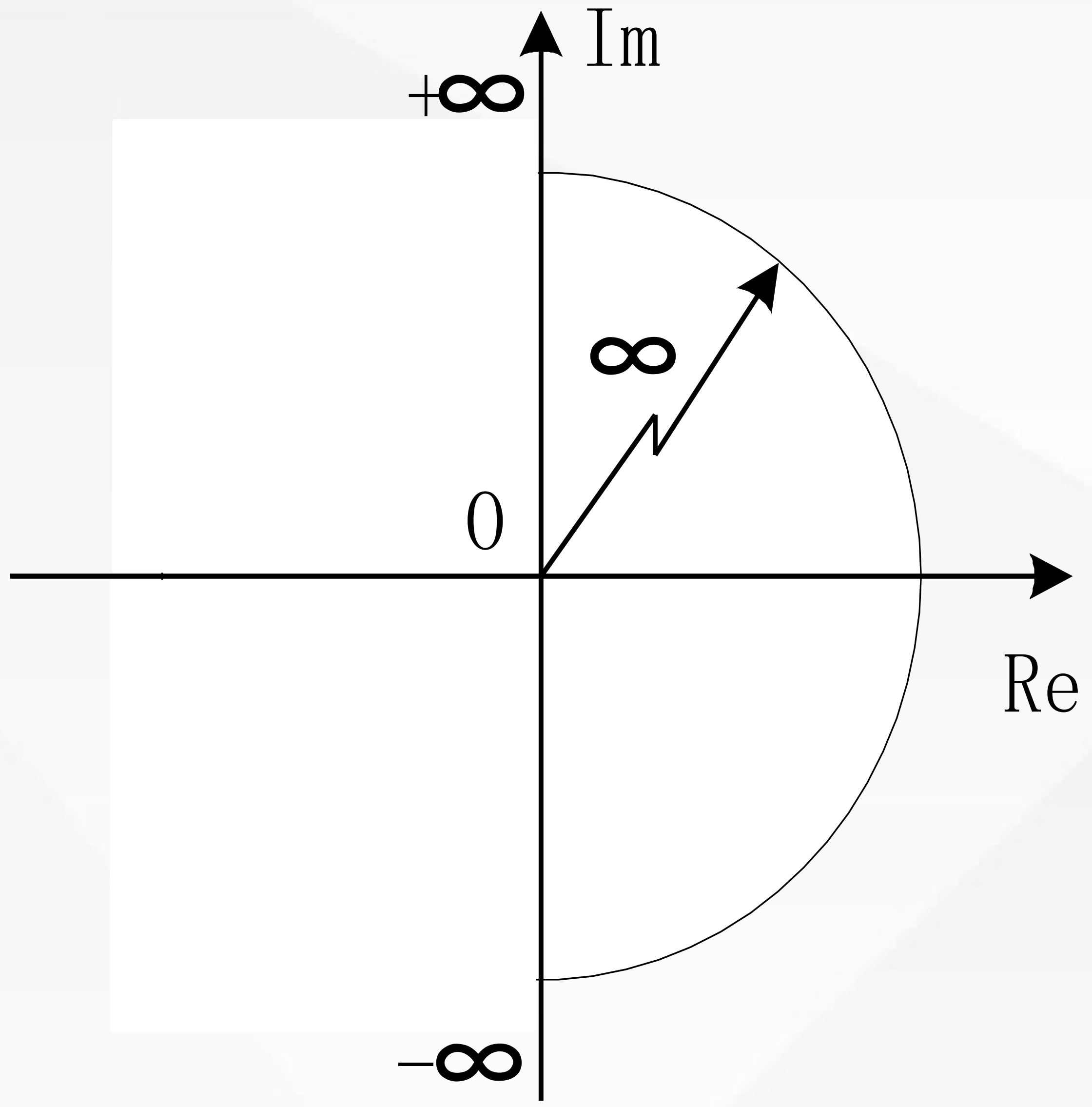
广义D形围线

D形围线不通过Q(s)的任一零点或极点

D形围线包围复数平面的整个右半面

$$Q(s)=\frac{N(s)}{P(s)}$$

Nyquist稳定判据



s沿广义D形围线顺钟向旋转一圈如何对应$1+Q(s)$的变化?

当s沿D形围线顺旋一圈:

$Q(s)$的分母次数大于分子次数 ➡ $s\to\infty,(Q(s)\to 0)$

即，当 s 沿无穷大半圆旋转时，$Q(s)$ 在原点处蠕动。

因此，只需考虑s沿虚轴变化的部分就够。

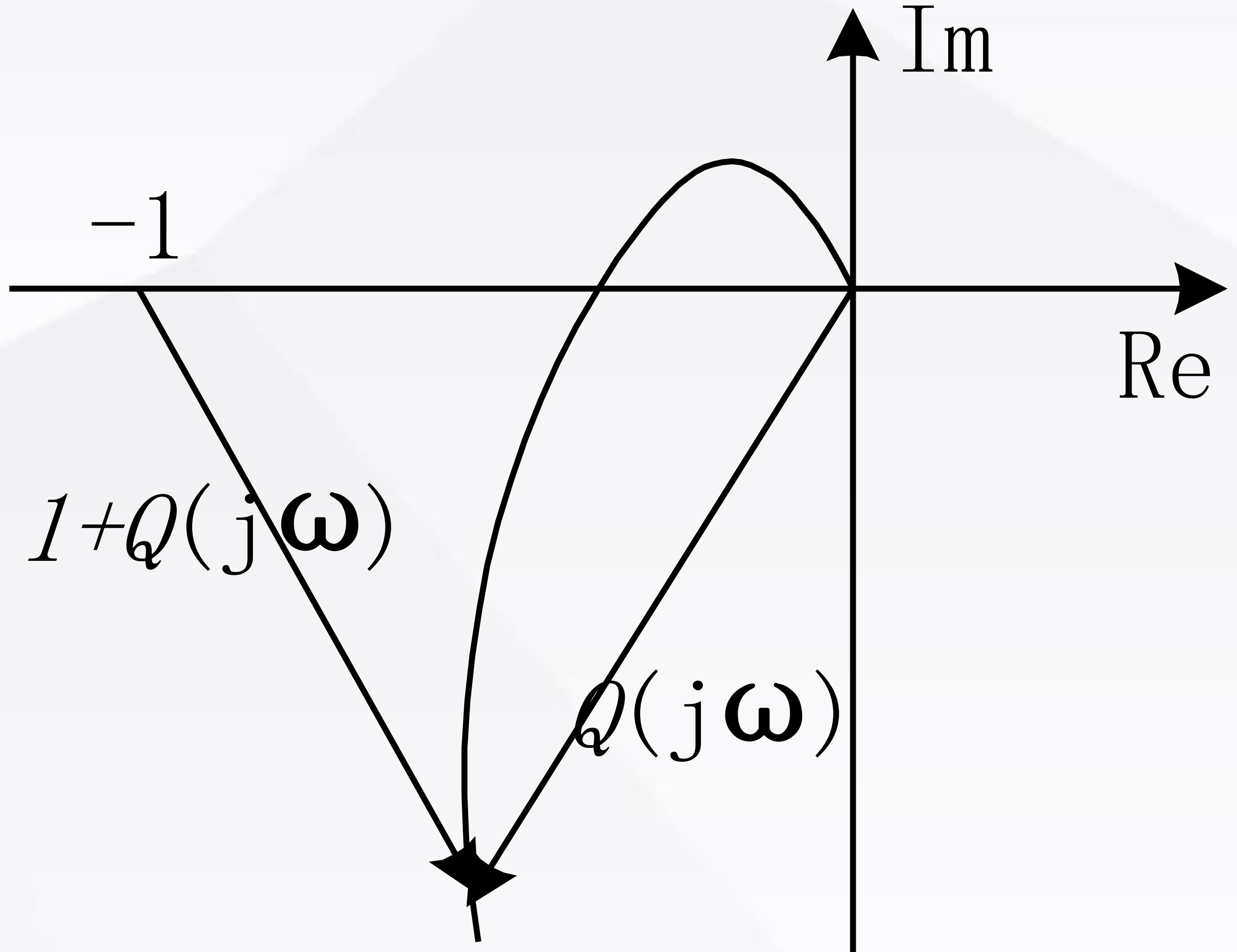
即，只需看ω从$-\infty\to+\infty$ $(s=j\omega),1+Q(j\omega)$时包围原点的圈数。

ω从$-\infty\to 0$ 和 $0\to+\infty$，$Q(j\omega)$共轭，图像关于实轴对称。

ω：$0\to+\infty,Q(j\omega)$恰好是开环频率特性！频率特性与传递函数互通。

Nyquist稳定判据

什么是$1+Q(j\omega)$？



从-1点指向 $Q(j\omega)$ 的向量

设 $1+Q(j\omega)$ 旋转的圈数为*N*，闭环在右半平面的极点数为*Z*，开环在右半平面的极点数为*P*。按幅角定理，应满足*N*=*Z*-*P*。

若闭环系统稳定，即在右半平面有0个极点，已知开环在右半平面有P个极点，则闭环稳定的充要条件是：

$1+Q(j\omega)$ 应顺钟向转-P圈，即逆钟向转P圈

Nyquist稳定判据

前提：s沿广义D形围线顺钟向连续旋转一周

设系统开环传递函数 $Q(s)$ 有 P 个极点在右半 s 平面，闭环系统稳定的充分必要条件是当 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$, $1+\mathrm{Q}(j\omega)$ 应逆钟向包围原点 P 圈。

计算 $1+\mathrm{Q}(j\omega)$ 很费事

$1+\mathrm{Q}(j\omega)$ 逆钟向包围原点圈数 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Q}(j\omega)$ 逆钟向包围 -1+j0点圈数

设系统开环传递函数 $Q(s)$ 有 P 个极点在右半 s 平面，闭环系统稳定的充分必要条件是当 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$, $\mathrm{Q}(j\omega)$ 应逆钟向包围 -1+j0点 P 圈。

Nyquist稳定判据

例1. $G_o(s)=\dfrac{K}{(10s+1)(2s+1)(0.2s+1)}$，　　$K=20$

由 $G_o(s)$ **可知，** $P=0$ **，其极坐标图如例1所示。** $(\omega$ **从** $-\infty\to 0\to+\infty)$

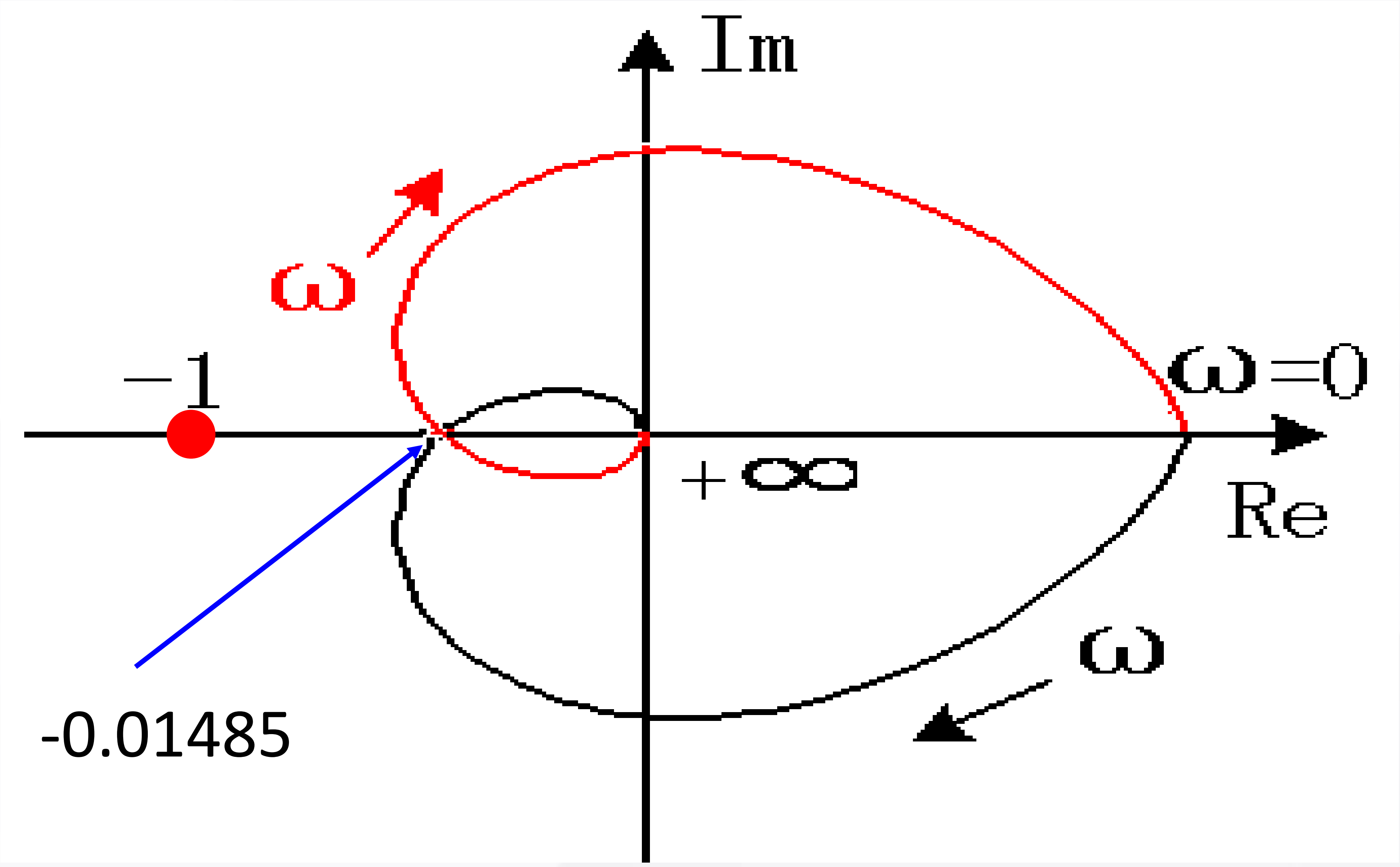
当 ω **从** $-\infty\to+\infty$

$G_o(j\omega)$ **围绕-1+j0点旋转0圈，**

即 $N=0$**。**

由于 $P=0$**，**

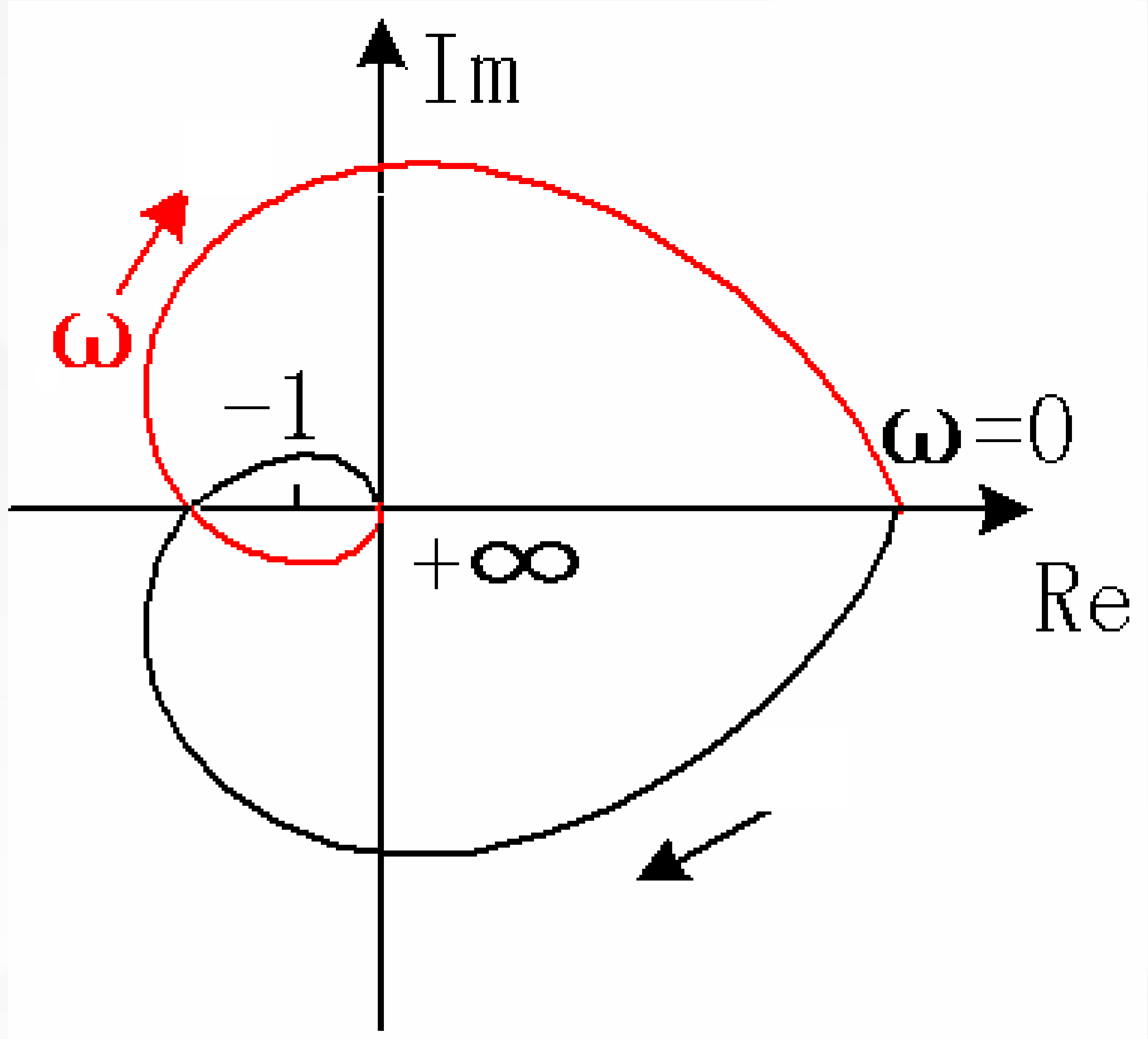
从而 $Z=0$**。**　　**因此，闭环稳定。**



$\theta(\omega)=-\mathrm{argtg}10\omega-\mathrm{argtg}2\omega-\mathrm{argtg}0.2\omega=-180°$ ➡ $\omega=1.746$　　$|G_0(j\omega)|=1$ ➡ $K=67.32$

Nyquist稳定判据

例2. $G_o(s)$ **同例1，但** $K = 100$**，其极坐标图如下。**



可见： $N = 2$ **,又** $P = 0$**, 所以** $Z = 2$**。**

因此，闭环有两个根在右半平面。

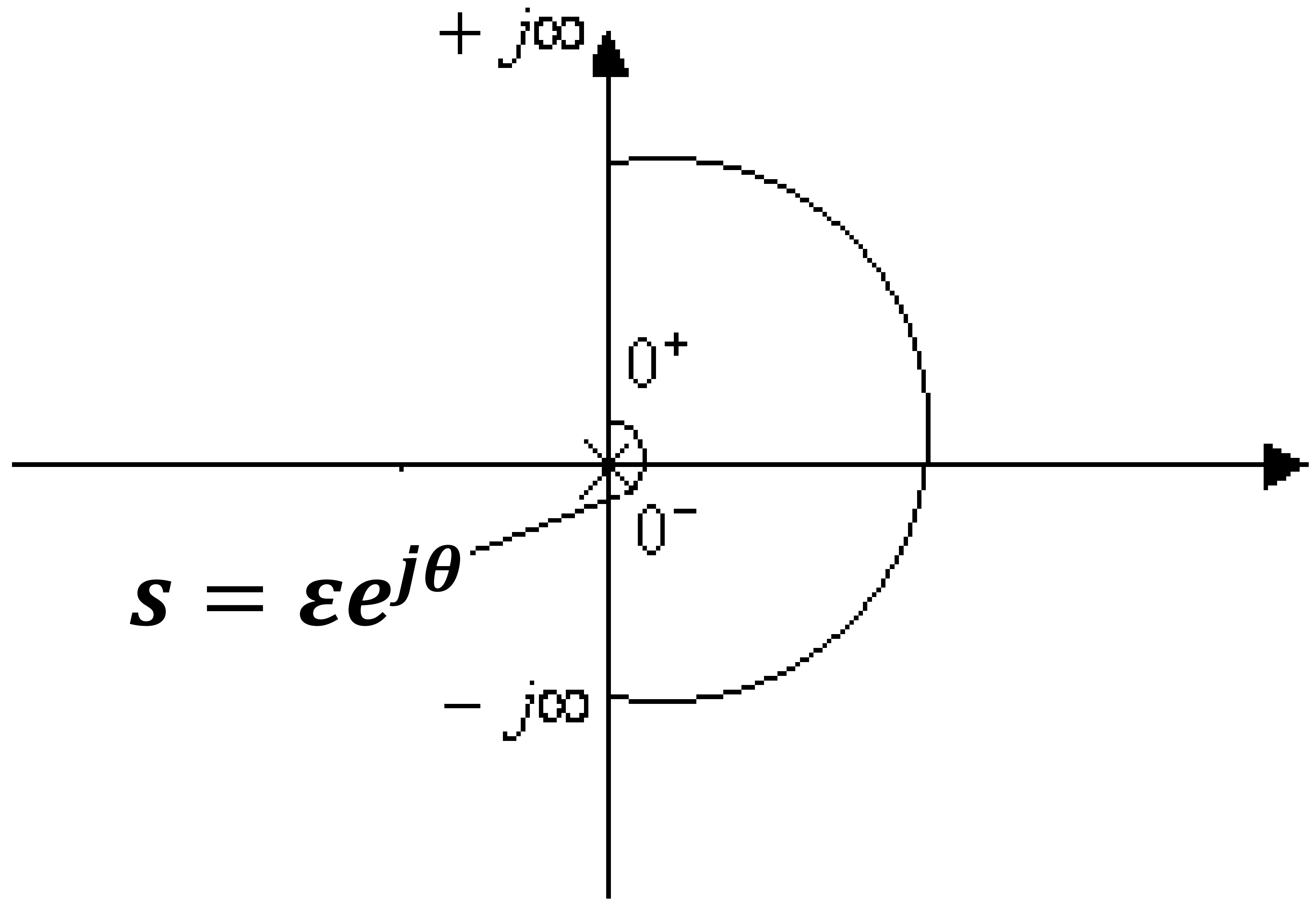
Nyquist稳定判据

例3． $G_o(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(0.1s+1)}$，　　$K = 2$

D形围线不能通过 $W(s)$ 的零点，现在已知开环有一个极点在虚轴上，即在D形围线上，因此要采用广义D形围线，如图。

如此就不通过和包含 $s = 0$ 的极点，

因此，仍认为 $P = 0$。

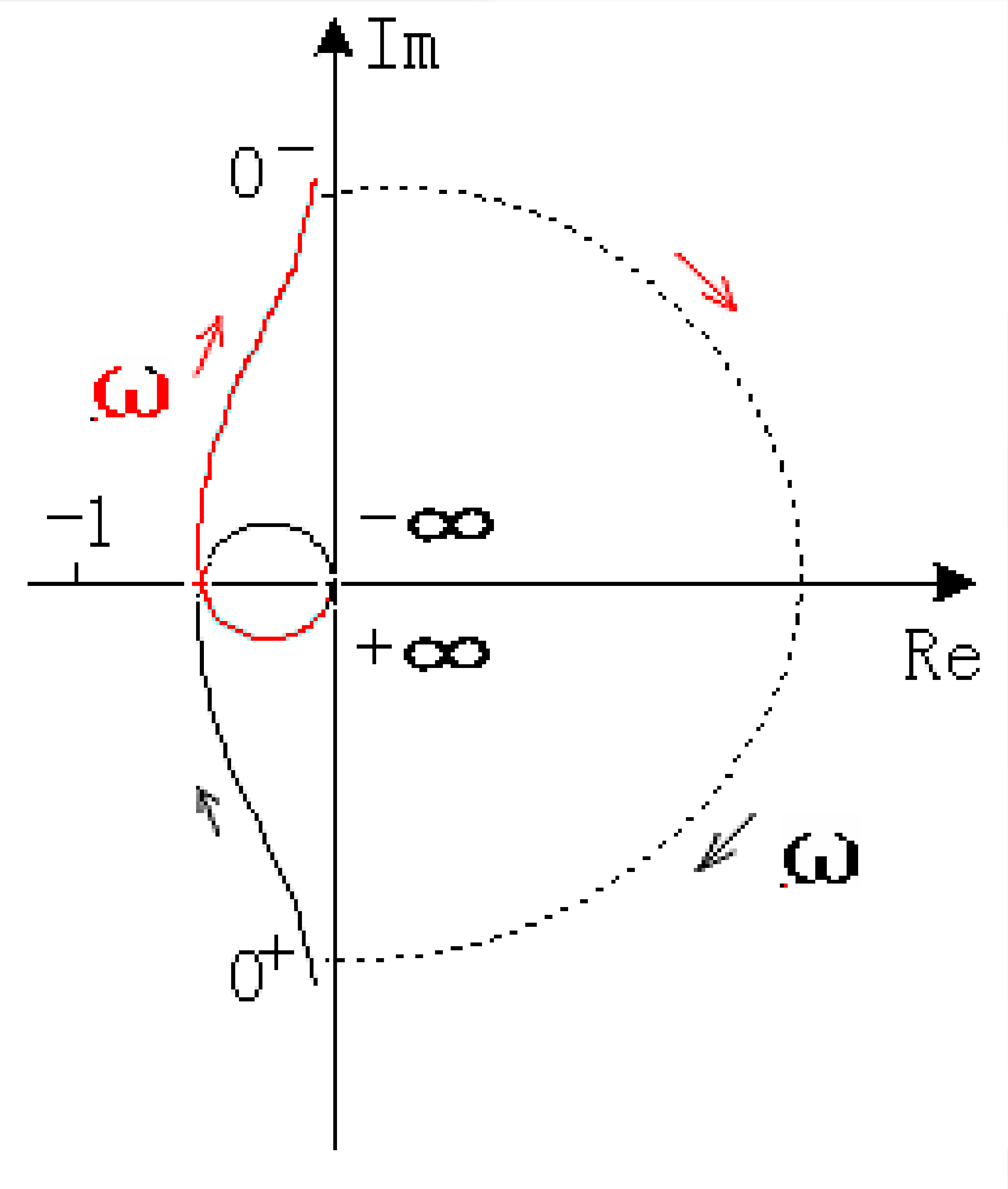


Nyquist稳定判据

$\omega = 0^- \ \rightarrow \omega = 0^+$

-10.21
-0.3937+j1.343
-0.3937-j1.343

$s = \varepsilon e^{j\theta}$ θ从 $-\dfrac{\pi}{2} \rightarrow \dfrac{\pi}{2}$



映射到 $G_o(j\omega)$ **平面：** $G_0(s) = G_0(\varepsilon e^{j\theta}) = e^{-j\theta} * 2/\varepsilon$

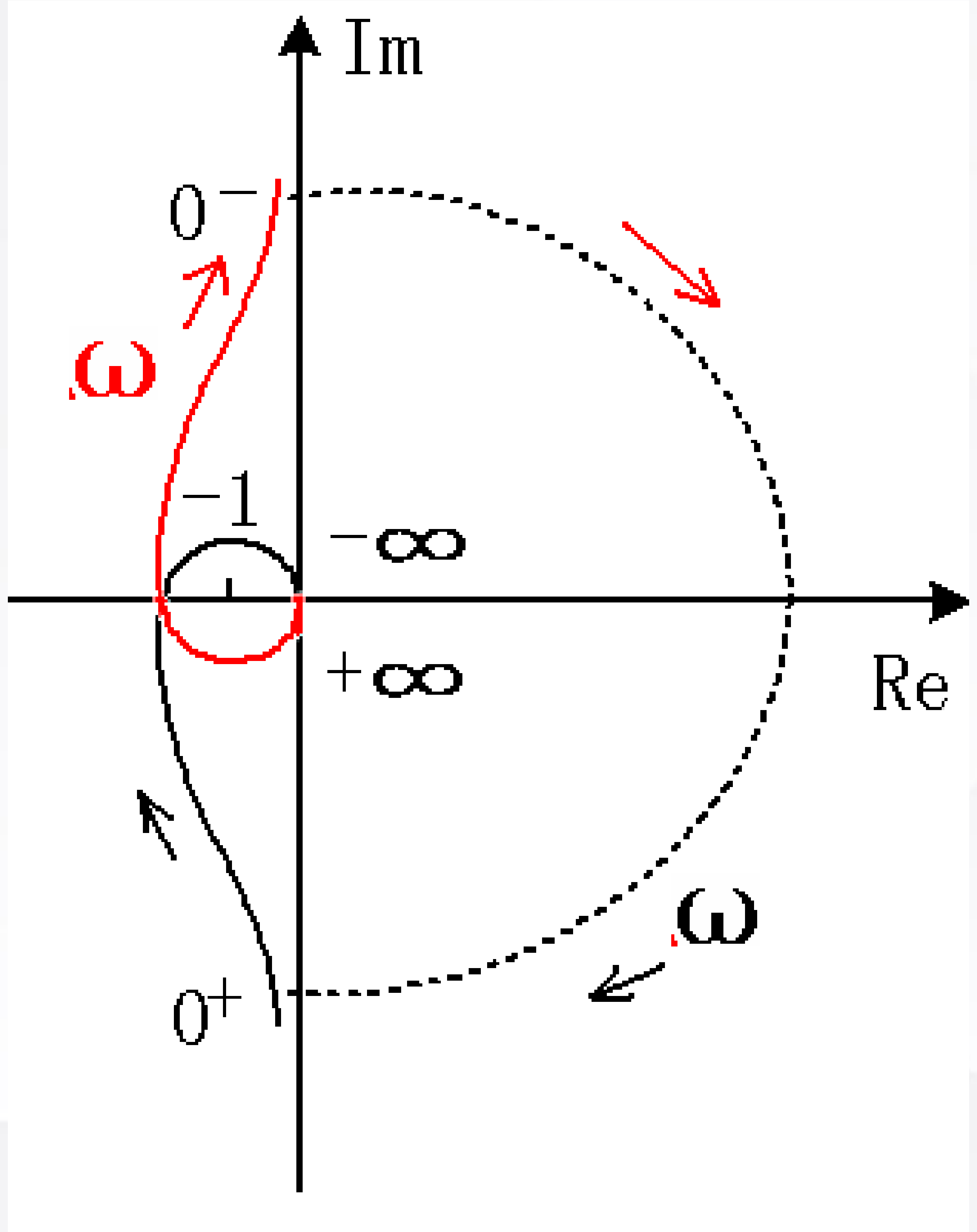
$G_o(j\omega)$ **沿无穷大半径从** $\dfrac{\pi}{2} \rightarrow -\dfrac{\pi}{2}$

可以判断 $N = 0$， $\therefore Z = 0$。

$\theta(\omega) = -\text{argtg}\omega - \text{argtg}0.1\omega = -90°$ ➡ $\omega^2 = 10$ $|G_0(j\omega)| = 1$ ➡ $K = 11$

Nyquist稳定判据

例4．$G_o(s)$同例3，但 $K=20$。其极坐标图如下。



$$N=2$$

$$Z=2$$

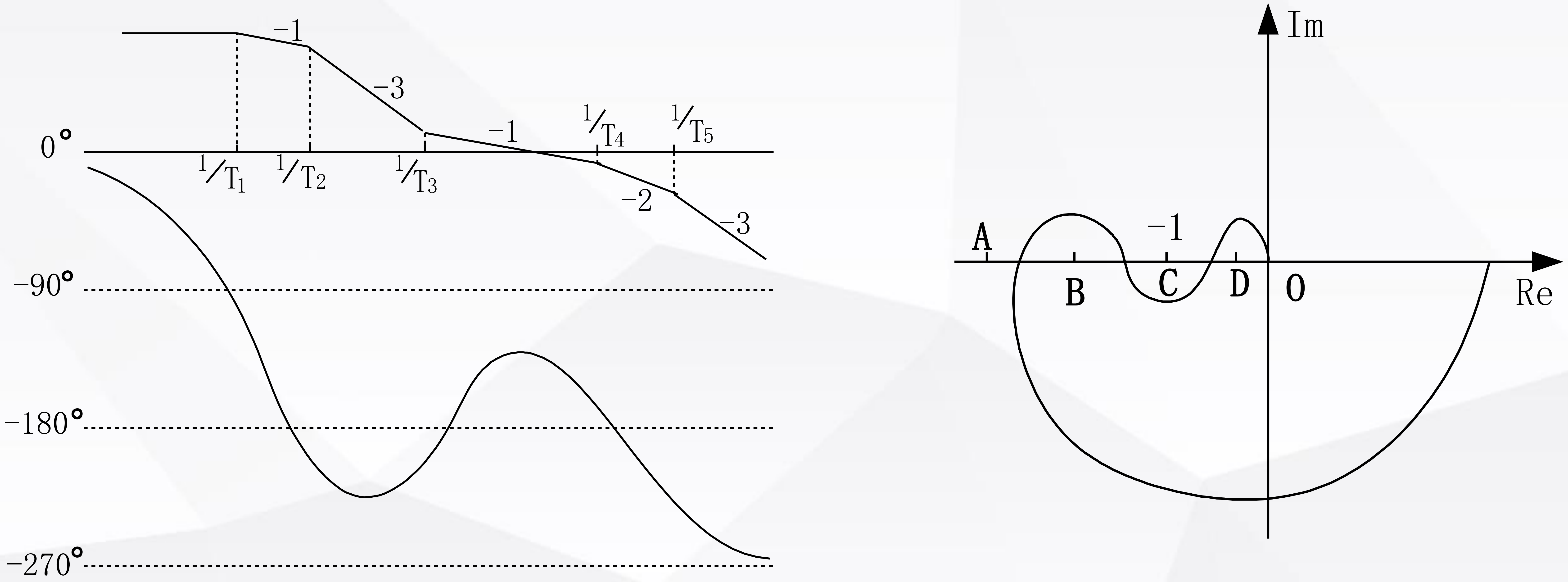
-11.621
0.3103+j4.137
0.3103-j4.137

因此，闭环有两个根在右半平面。

Nyquist稳定判据

例5. $G_o(s)=\dfrac{K(T_3s+1)^2}{(T_1s+1)(T_2s+1)^2(T_4s+1)(T_5s+1)}$

假设对数频率特性图和极坐标图如下。 **K变，极坐标相应伸缩**



A：0圈

B：2圈

C：0圈

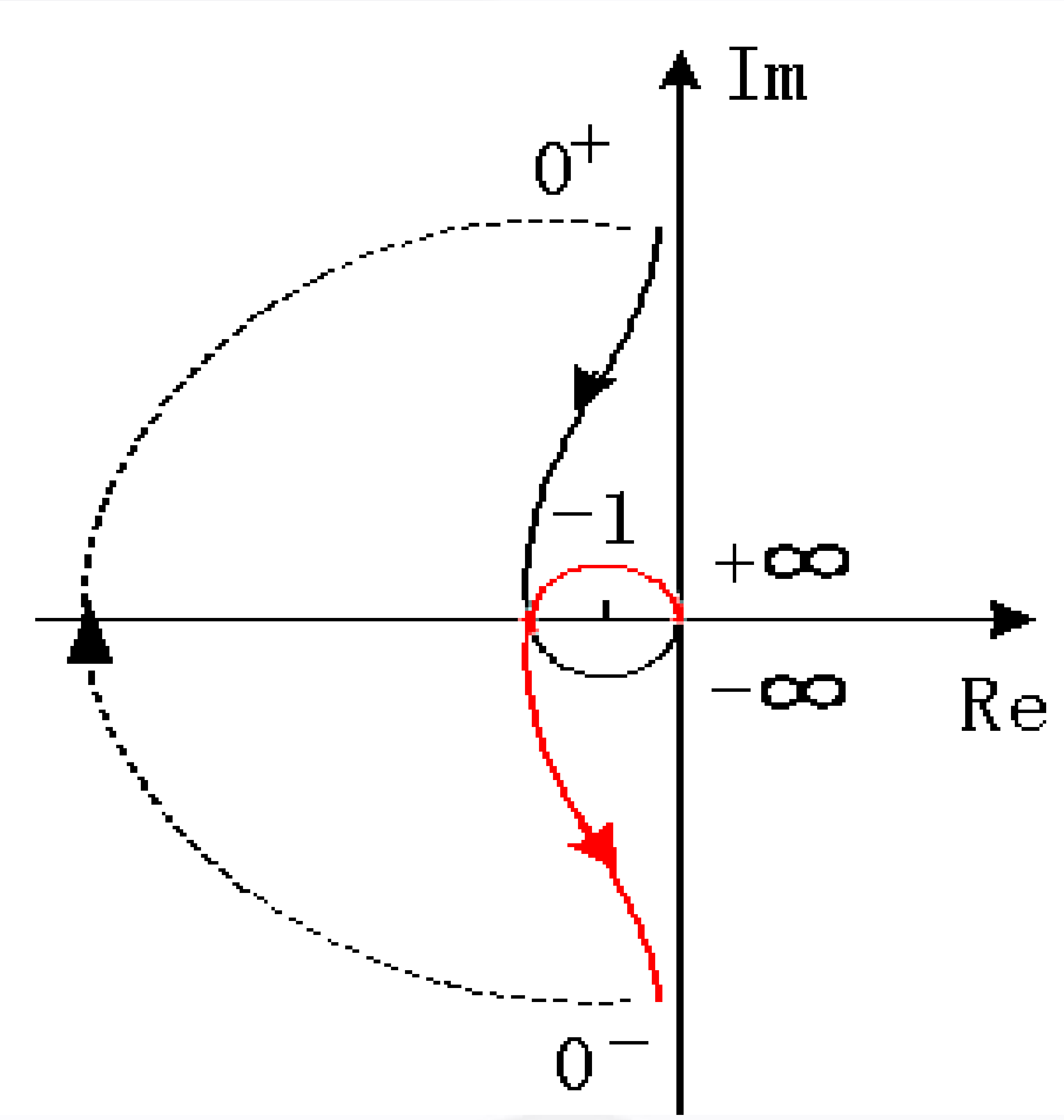
D：2圈

-1点位置可能有四种情况（即-1点处于A，B，C，D四处）。

试判断闭环稳定性（-1点位于A，C处闭环稳定，位于B，D处闭环不稳定）

Nyquist稳定判据

例6．非最小相位对象 $G_o(s)=\dfrac{6(0.33s+1)}{s(s-1)}$　　$P=1$



$s=\varepsilon e^{j\theta}$　θ从 $-\dfrac{\pi}{2}\rightarrow\dfrac{\pi}{2}$

映射到 $G_o(j\omega)$ **平面：**　　$G_o(j\omega)$: $\dfrac{3\pi}{2}\rightarrow\dfrac{\pi}{2}$

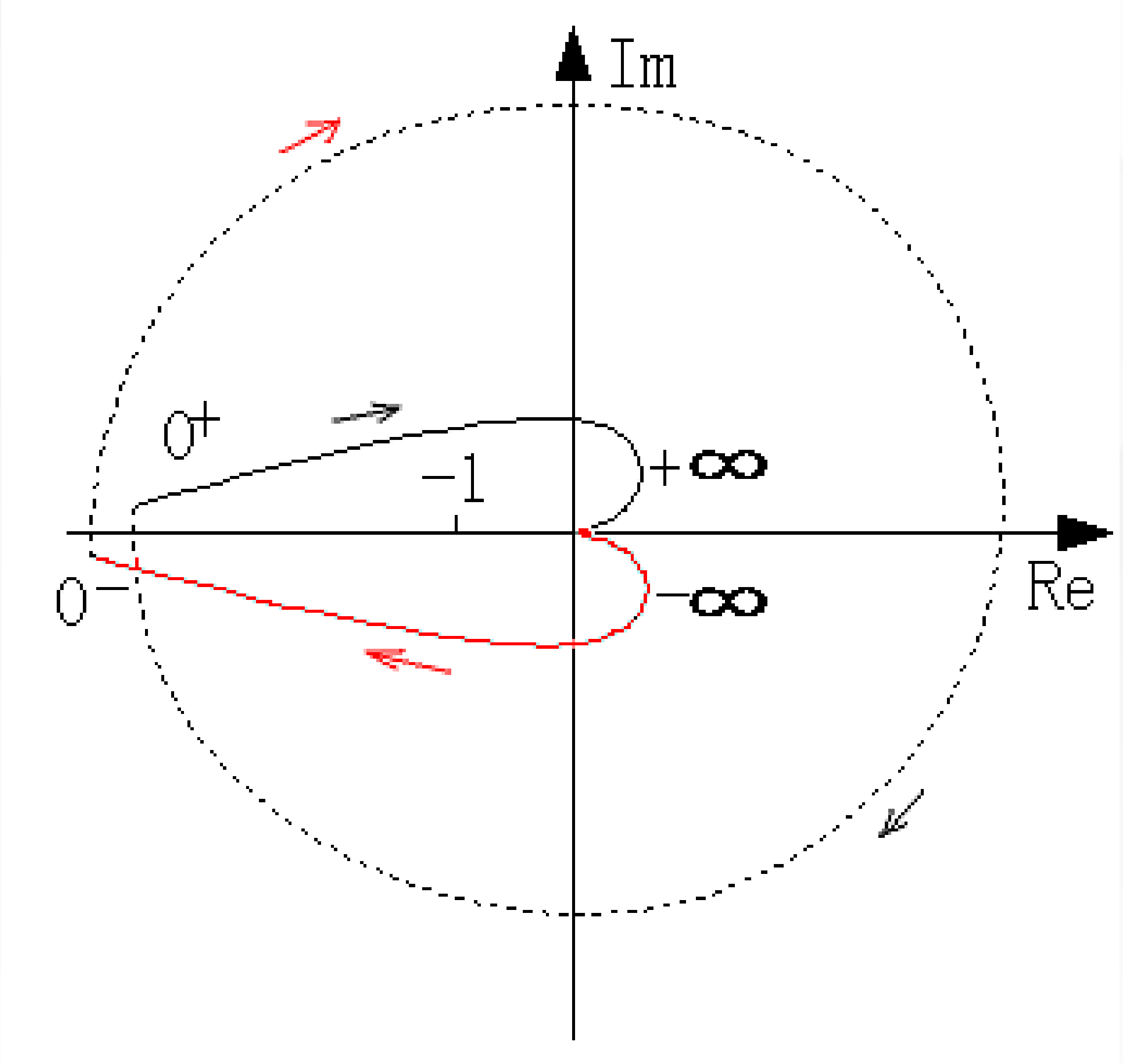
$G_0(s)=G_0\left(\varepsilon e^{j\theta}\right)=e^{j(\pi-\theta)}*6/\varepsilon$

$\theta(\omega)=\mathrm{argtg}\omega+\mathrm{argtg}0.33\omega=90^\circ$ ➡ $\omega^2=1/0.33$ ➡ $|G_0(j\omega)|=2$

由图可判断： $N=-1$　　$\because N=Z-P$　　$\therefore Z=0$ **闭环系统稳定。**

Nyquist稳定判据　结构不稳定例子

$$G_o(s)=\frac{K}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}\qquad P=0$$



$s=\varepsilon e^{j\theta}$　θ从 $-\frac{\pi}{2}\rightarrow\frac{\pi}{2}$

映射到 $G_o(j\omega)$ 平面：　　$G_o(j\omega)$:　$\pi\rightarrow-\pi$

$$G_0(s)=G_0\left(\varepsilon e^{j\theta}\right)=e^{-j2\theta}*K/\varepsilon^2$$

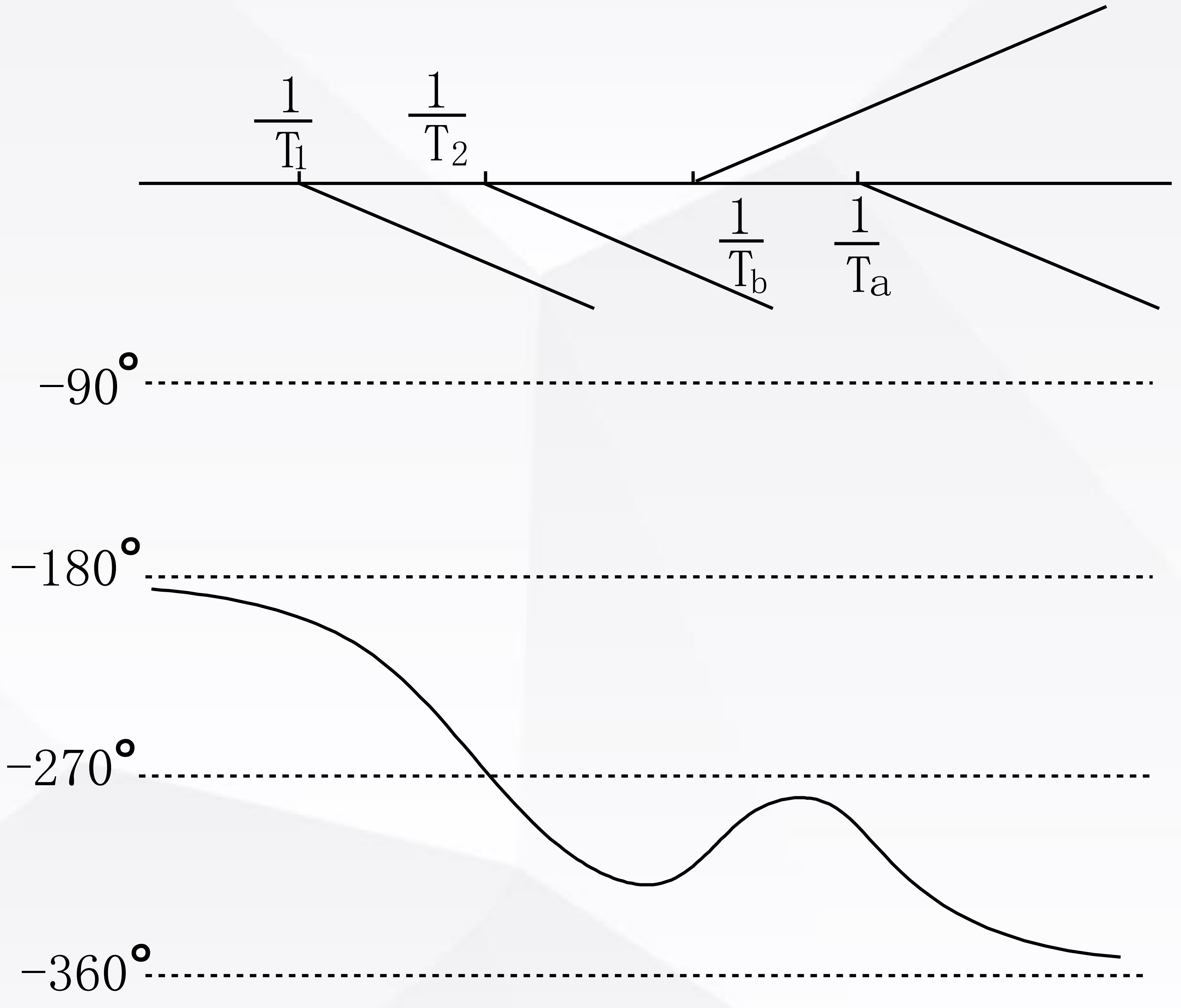
可确定 $N=2$，由 $Z=N+P$ 得 $Z=2$，闭环系统不稳定。

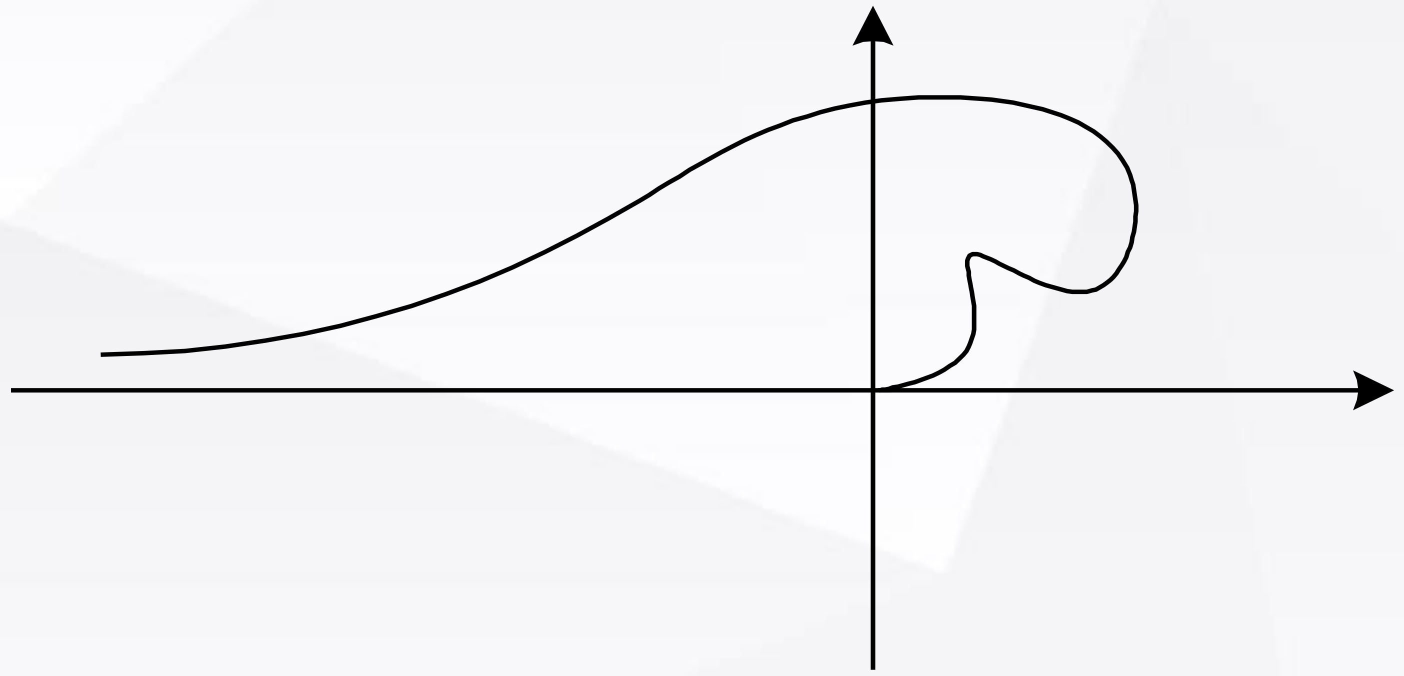
怎样使闭环稳定呢？加 $\frac{T_bs+1}{T_as+1}$　显然应该：$T_b>T_a$

否则产生滞后角，0⁺对应的起始点仍在实轴上面

Nyquist稳定判据

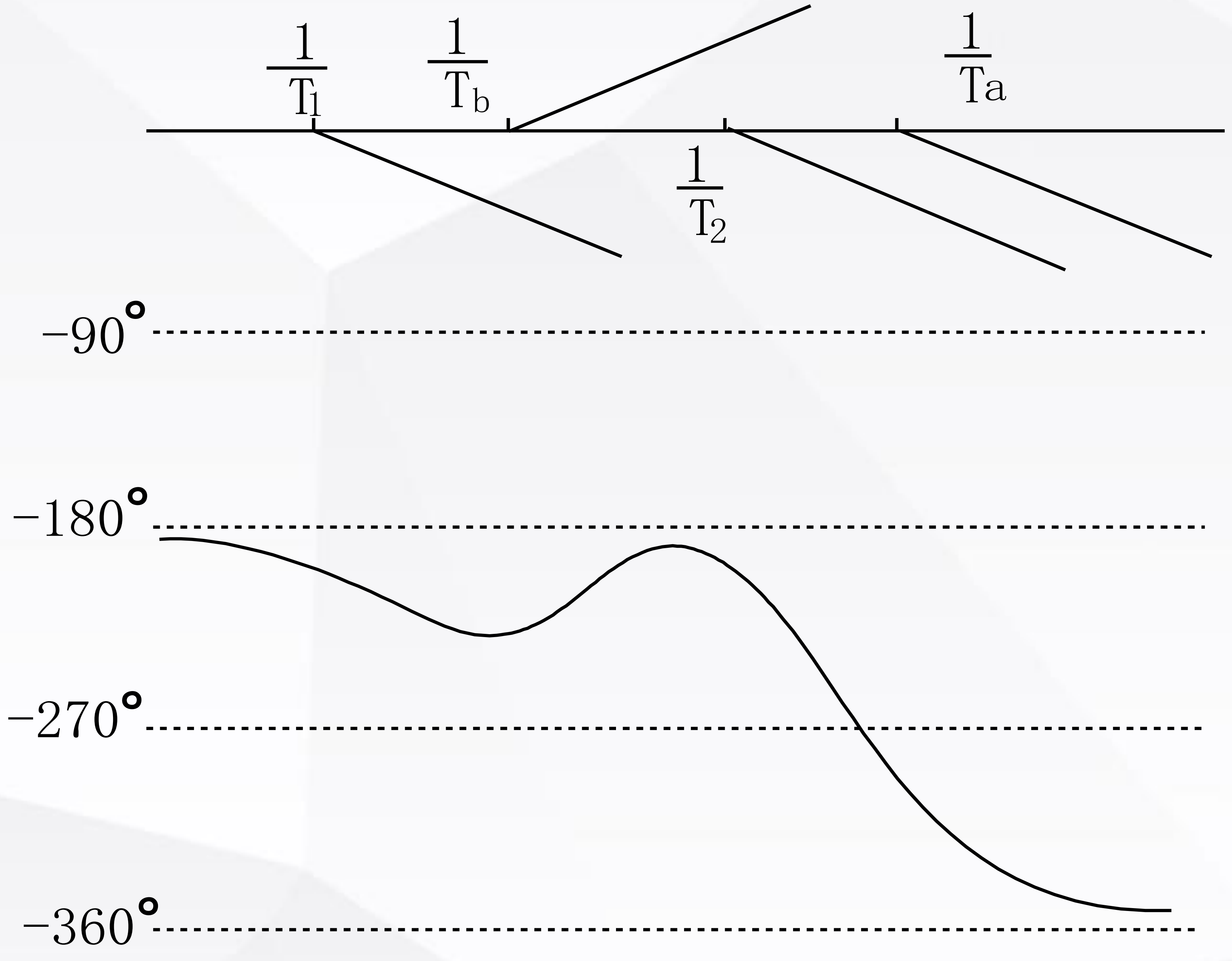
[1] $T_b > T_a$ 但 $T_b < T_2 < T_1$

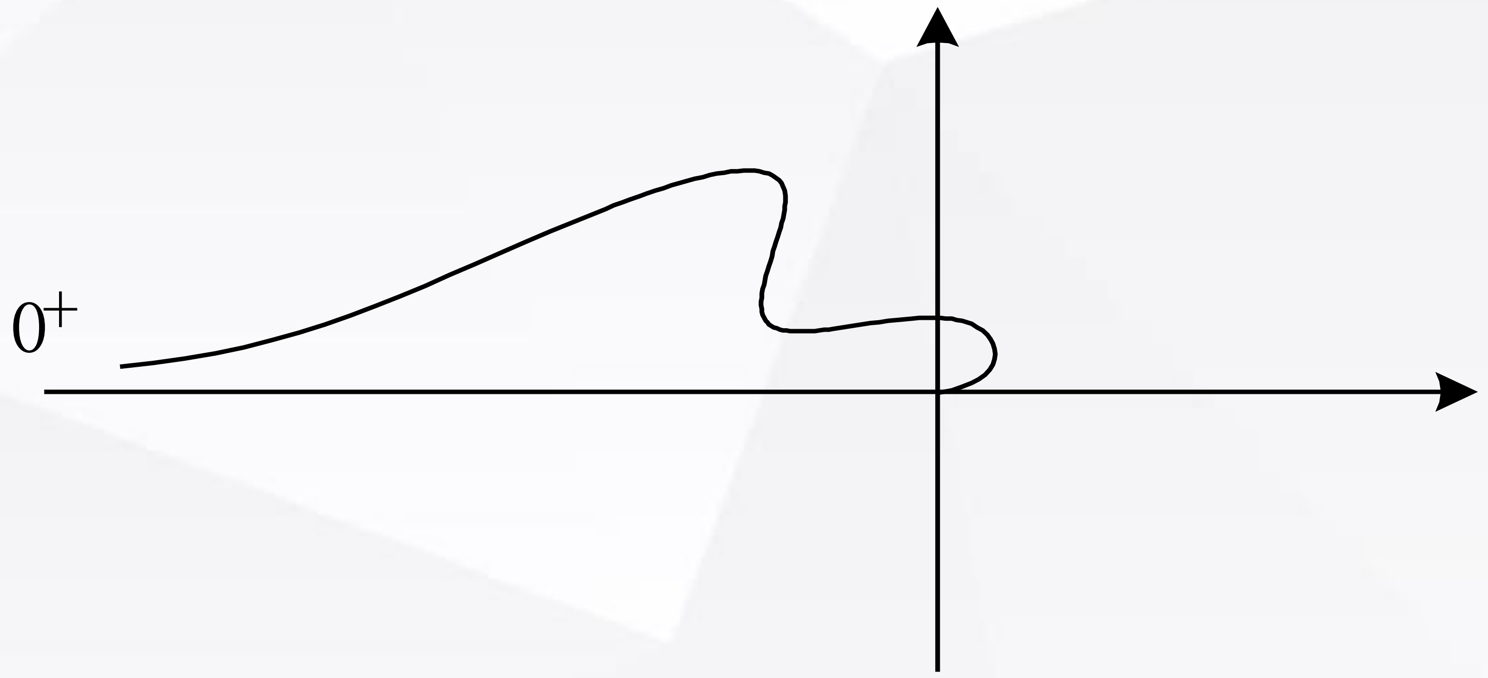




Nyquist稳定判据

[2] $T_b > T_a$ 但 $T_2 < T_b < T_1$

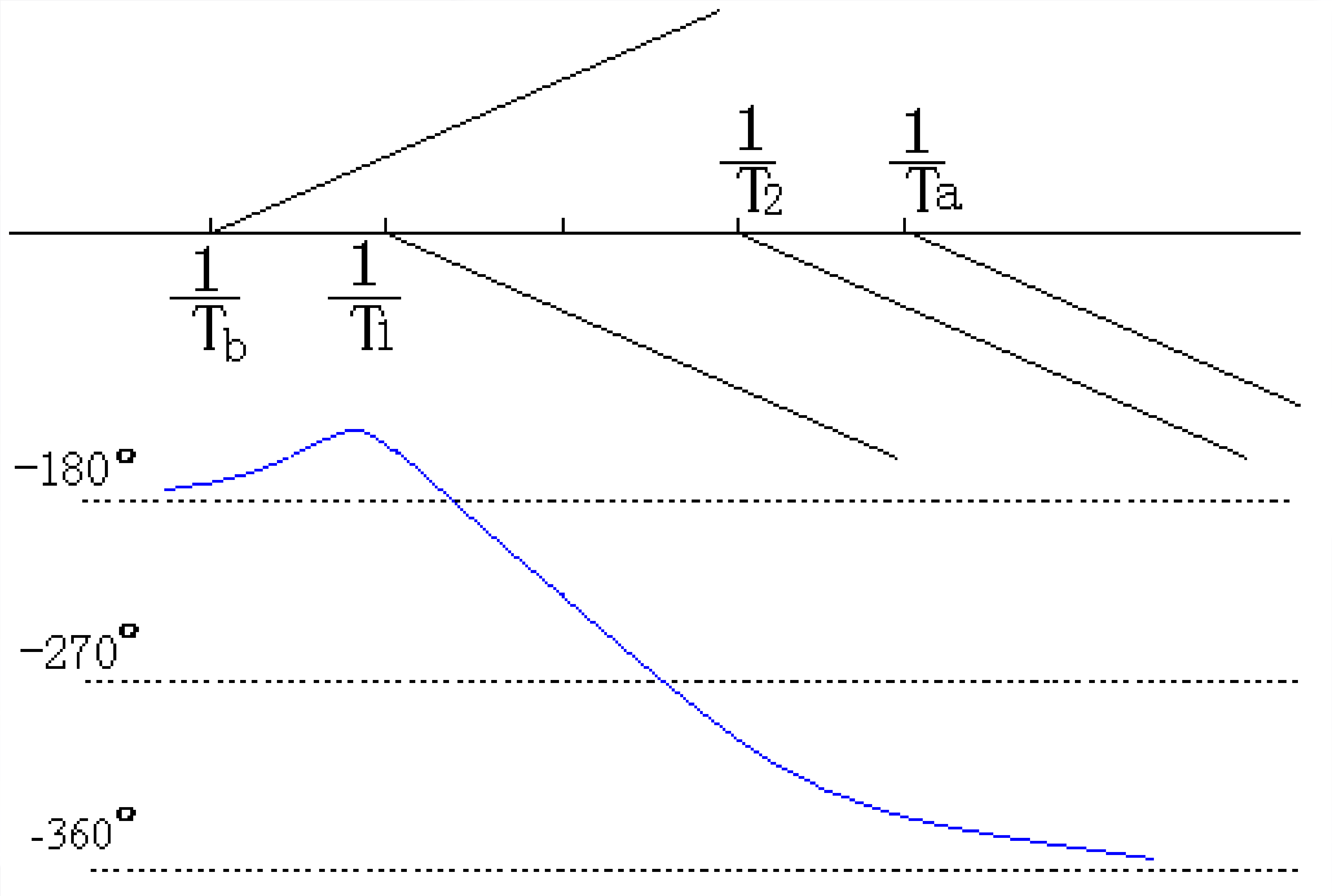


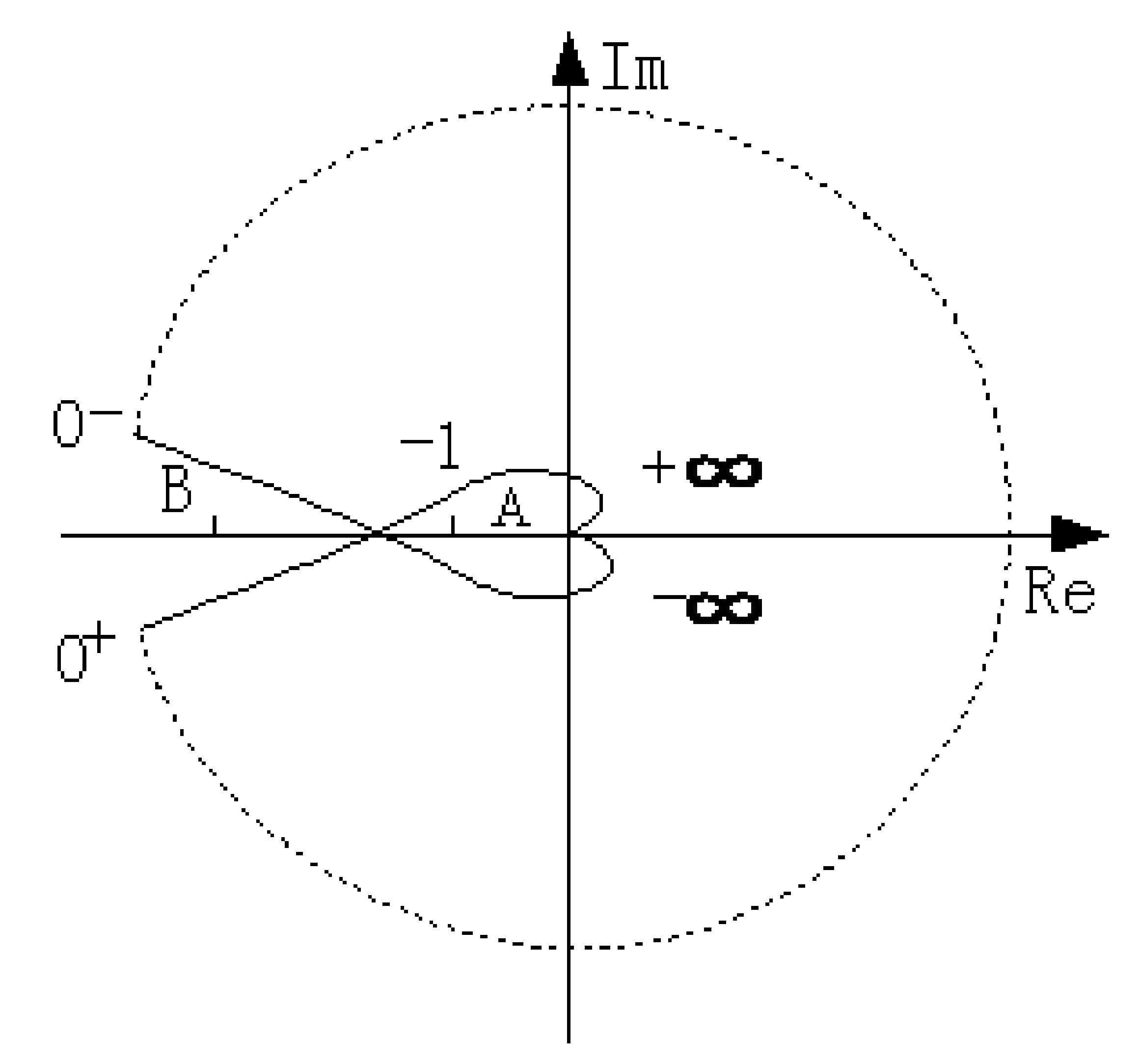


可见，[1]-[2]的校正无济于事。

Nyquist稳定判据

[3] $T_b > T_1 > T_2 > T_a$

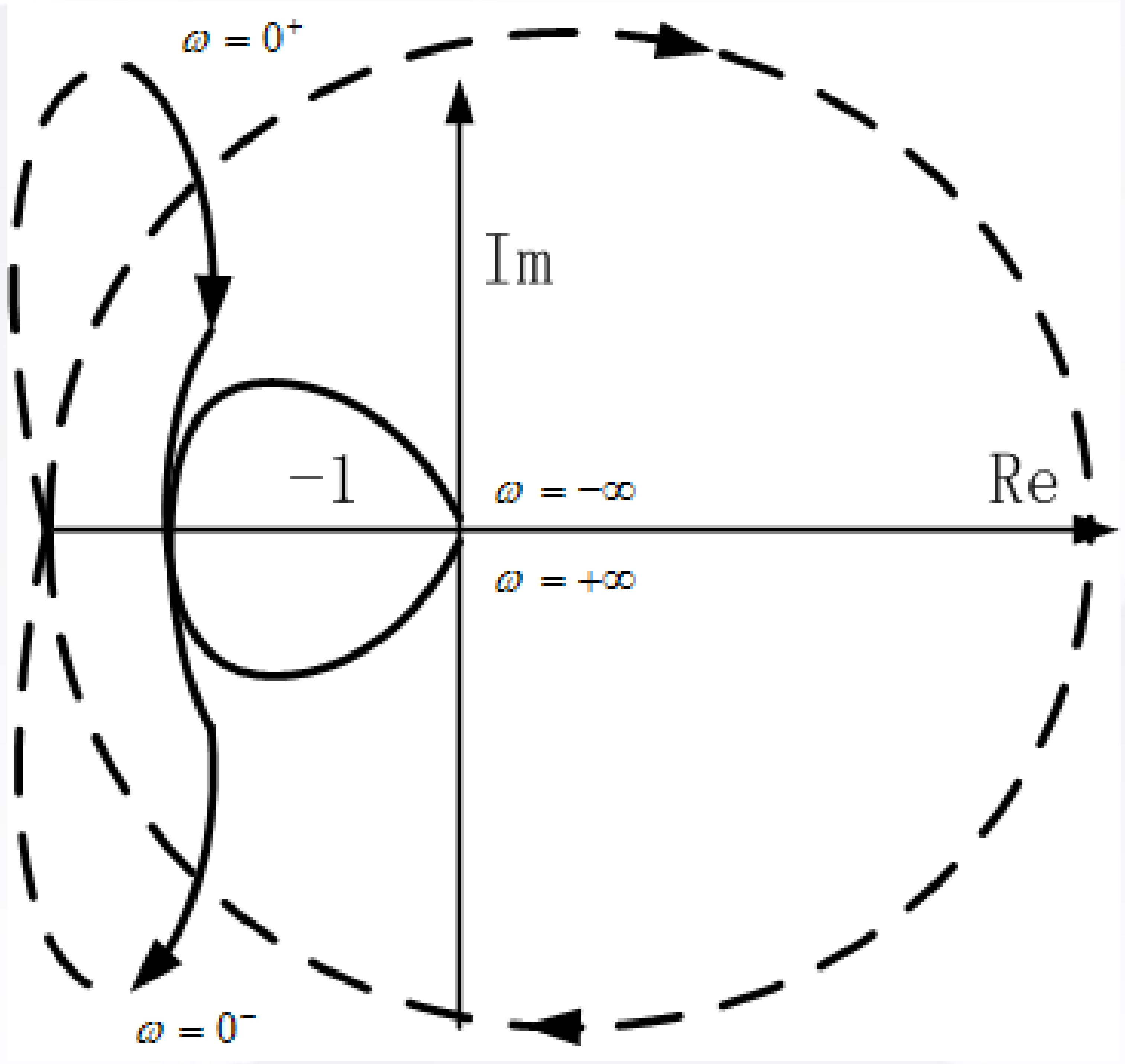


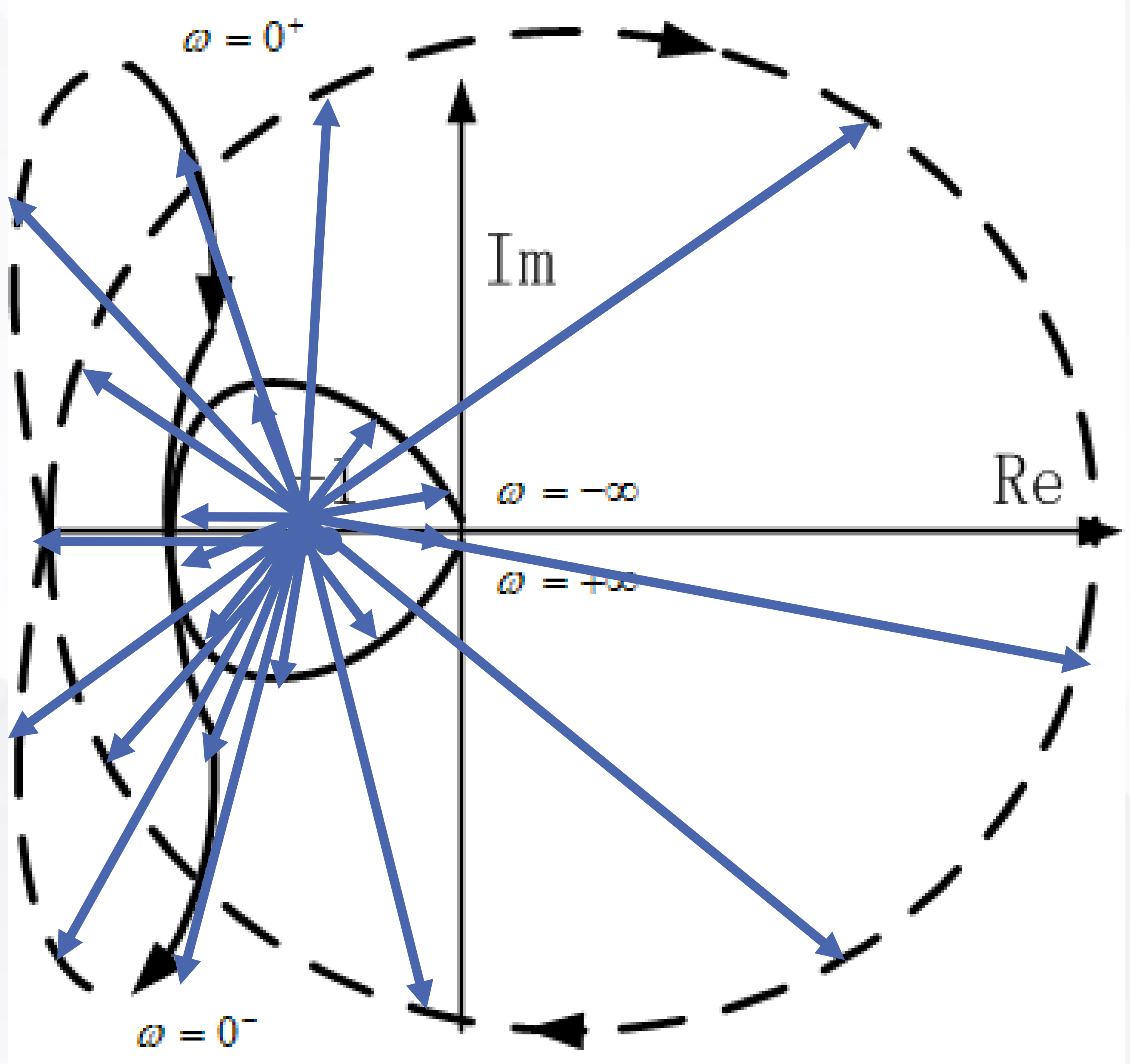


如果再通过调整K 使-1点处在B，则闭环系统稳定。

Nyquist稳定判据 三次积分例子

$$G(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{s^3}$$





围绕(-1,j0)点的总圈数为0 从(-1,j0)点指向矢量总旋转圈数为0

闭环系统稳定。

Nyquist稳定判据　带振荡环节例子

系统开环传递函数：

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)\left(\frac{s^2}{4}+1\right)}$$

绘制系统的粗略开环幅相曲线。

特点：

出现一对纯虚极点；

等幅振荡环节对应的转折频率处，幅值增益为无穷大，相角突变180度；

幅相曲线在转折频率处呈现不连续现象。

Nyquist稳定判据

开环幅频特性： $A(\omega)=\dfrac{40}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\left(4-\omega^2\right)},\omega\neq 0,\pm 2$

开环相频特性： $\omega=0$时，$A(\omega)\to\infty$，$\varphi(\omega)=-90^{\circ}$

$\omega=\infty$时，$A(\omega)\to 0$，$\varphi(\omega)=-360^{\circ}$

系统幅相曲线以-90度起于无穷远，以-360度终于原点。

$$\varphi(\omega)=-90^{\circ}-\arctan\omega,\omega\leq 2^{-}$$

$$\varphi(\omega)=-270^{\circ}-\arctan\omega,\omega\leq 2^{+}$$

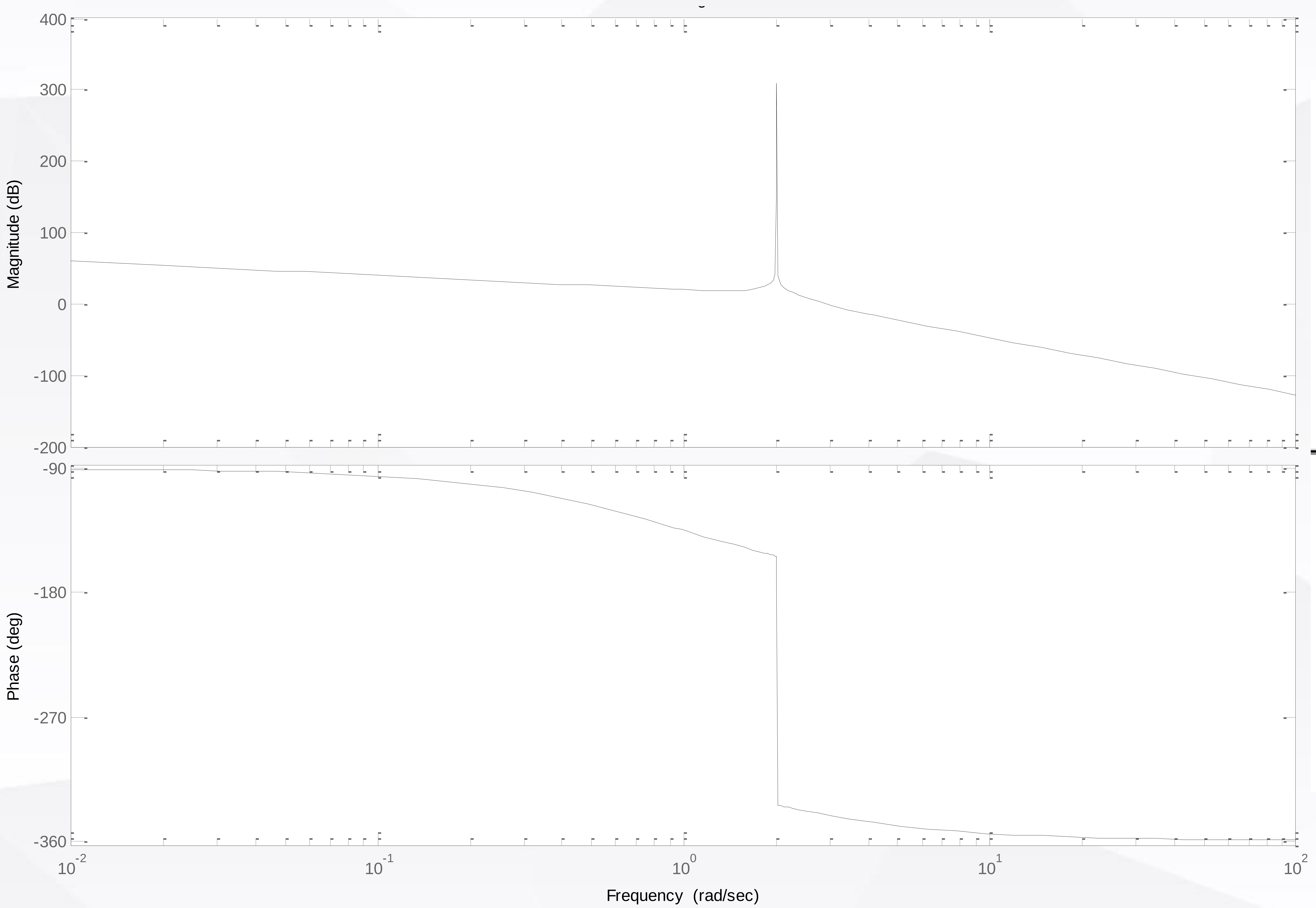
确定$\pm 2j$处渐近线的方向：

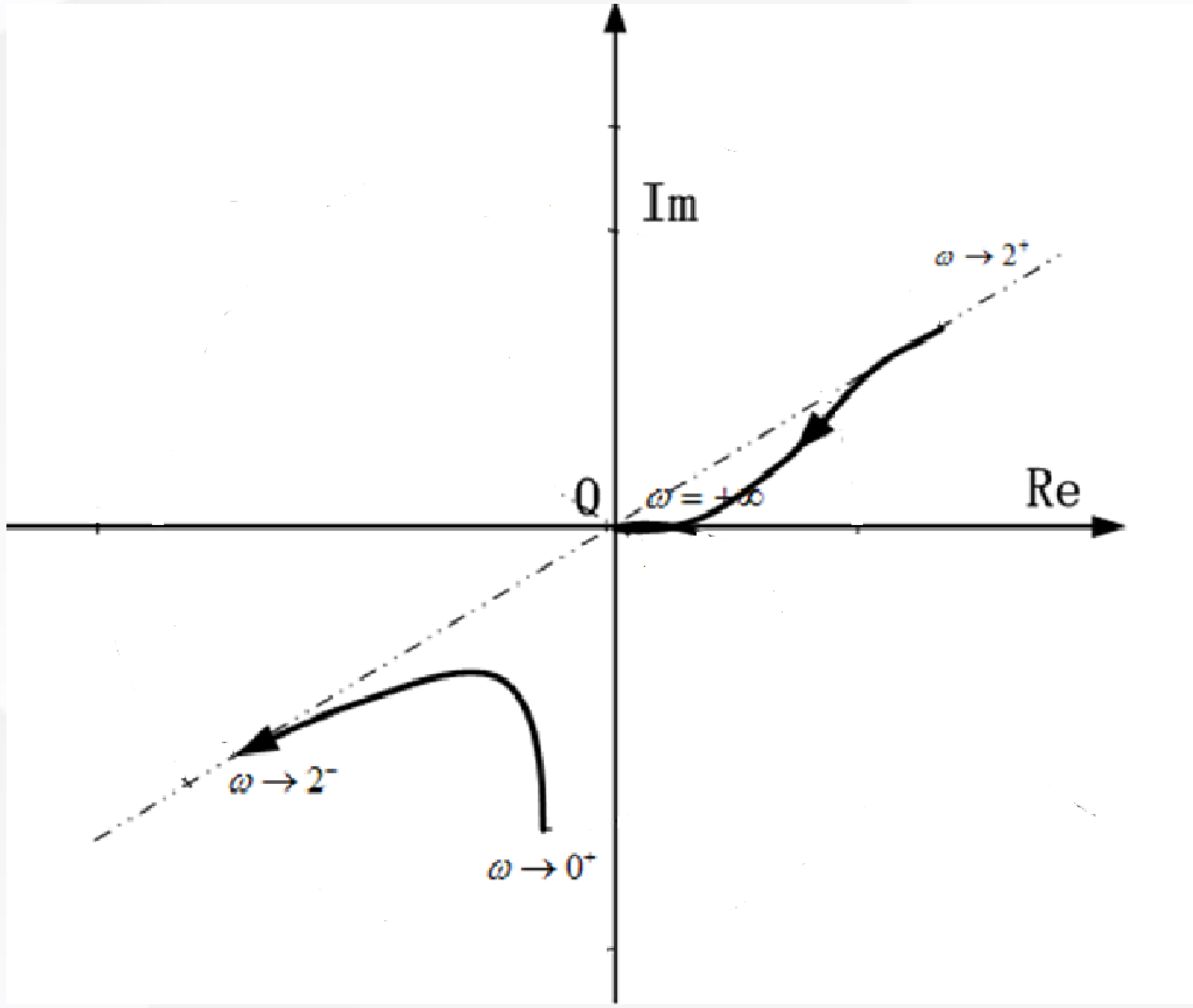
$\omega\to 2^{-}$时，$A\left(\omega\to 2^{-}\right)\to\infty$，$\varphi(\omega)=-153.4^{\circ}$

$\omega\to 2^{+}$时，$A\left(\omega\to 2^{+}\right)\to\infty$，$\varphi(\omega)=-333.4^{\circ}$

符号由正变负，产生-180°的突变

Nyquist稳定判据





Nyquist稳定判据

对于虚轴上的极点(0,2j)：(类似零极点处理) $\varepsilon \to 0 \quad \theta$ 从 $-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

以虚轴上点(0,2j)为圆心，半径无穷小的右半圆方程为 $s = j2 + \varepsilon e^{j\theta}$

$$G\left(2j+\varepsilon e^{j\theta}\right) = \frac{40}{\left[\left(2j+\varepsilon e^{j\theta}\right)\left(1+2j+\varepsilon e^{j\theta}\right)\left(4j\varepsilon e^{j\theta}+\varepsilon^2 e^{j2\theta}\right)\right]}$$

$$\approx \frac{40}{\left[(2j)(1+2j)\left(4j\varepsilon e^{j\theta}\right)\right]}$$

-135.4°-90°+90° ➡ -135.4°-90°-90°

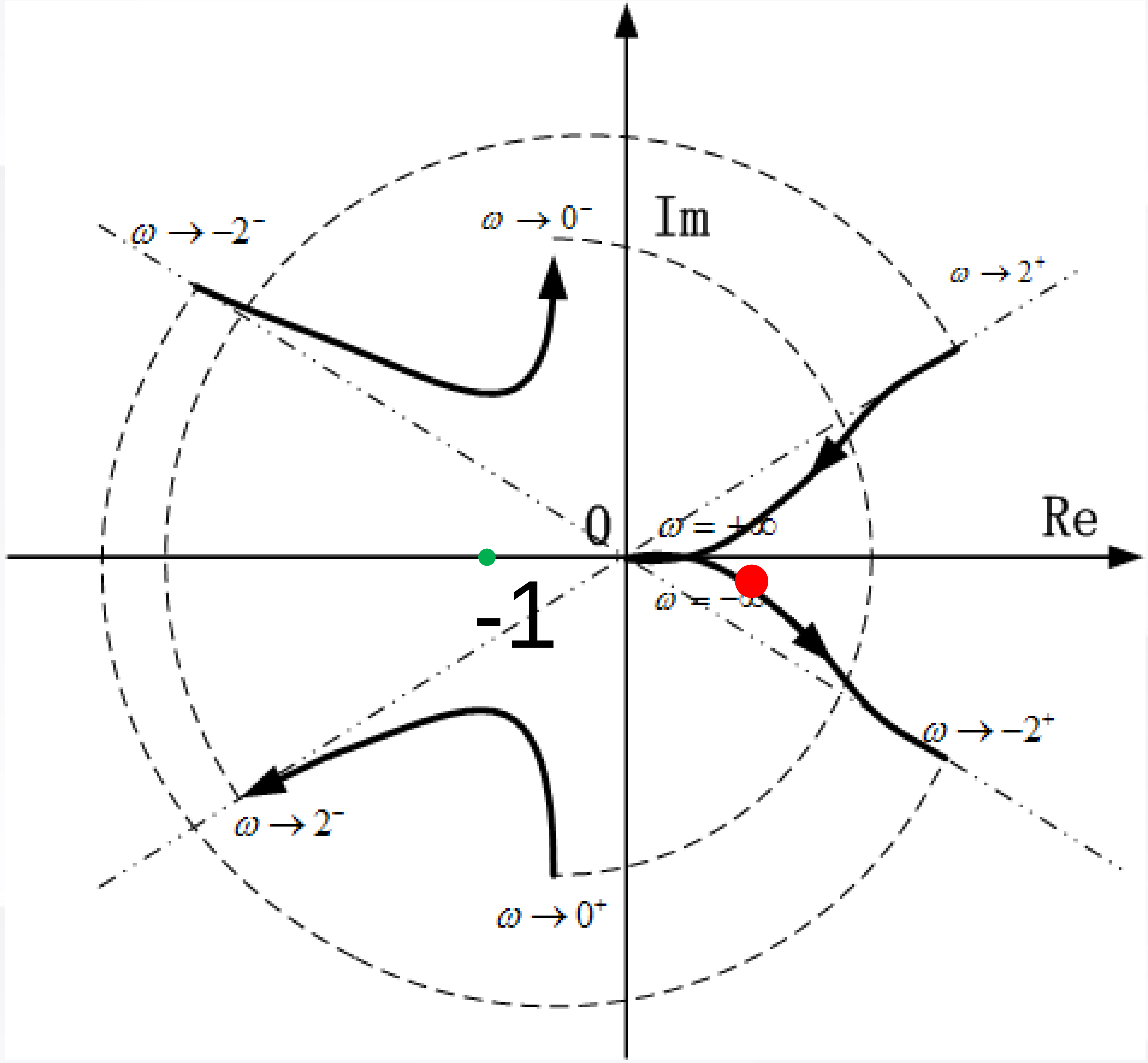
半径为无穷大，相角从-153.4°顺针向转到-333.4°的圆弧，即从2^-到2^+顺针半圈。

对于零极点：

$$G\left(\varepsilon e^{j\theta}\right) = \frac{40}{\left[\left(\varepsilon e^{j\theta}\right)\left(1+\varepsilon e^{j\theta}\right)\left(4+\varepsilon^2 e^{j2\theta}\right)\right]} \approx \frac{10}{\varepsilon e^{j\theta}}$$

+90° ➡ -90°

Nyquist稳定判据



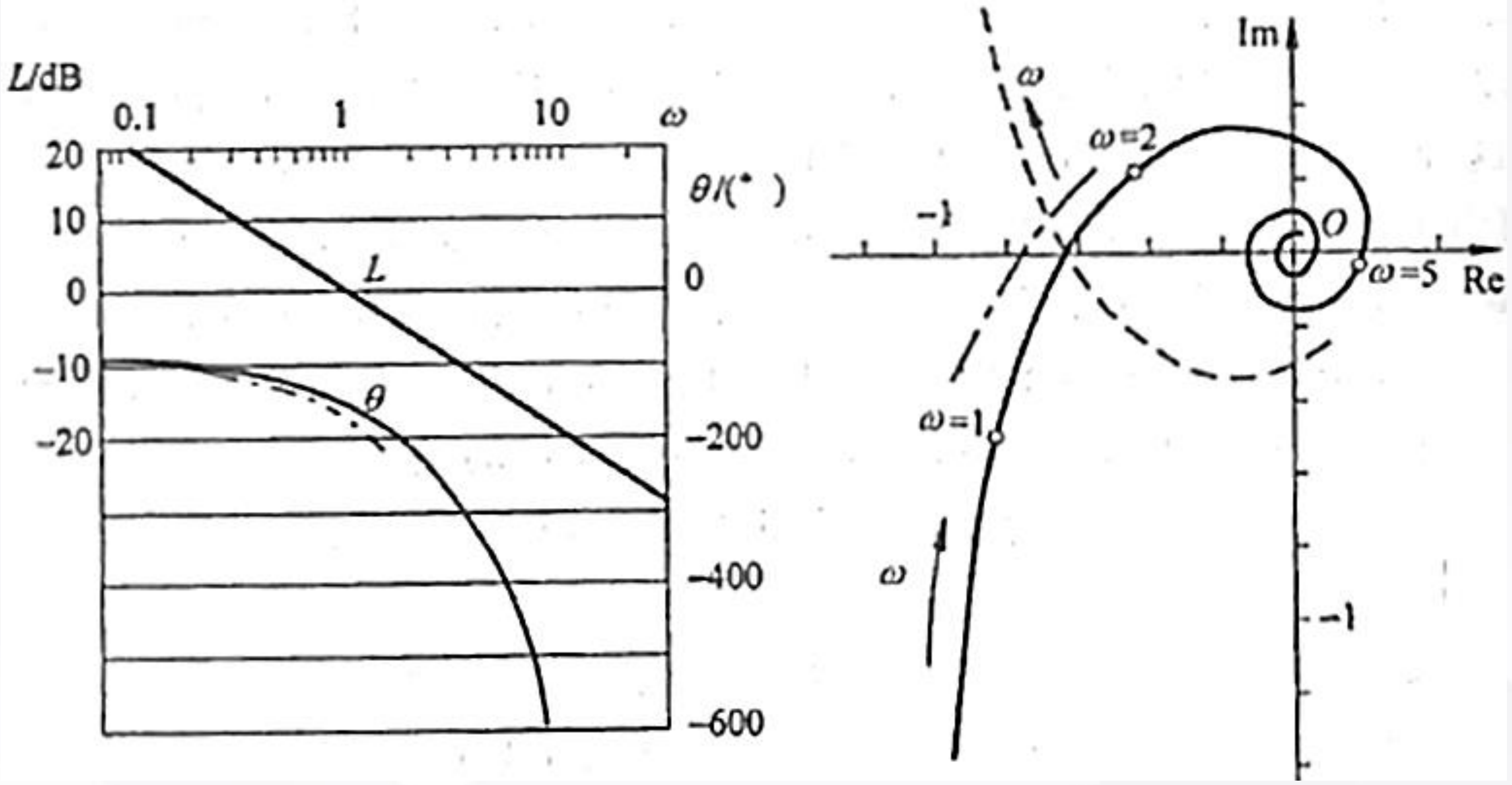
围绕(-1,j0)点的总圈数为2

闭环系统不稳定。

Nyquist稳定判据　带延迟环节例子

系统的开环传递函数： $Q(s)=\dfrac{K}{s}e^{-\tau s}$　$K>0,\ \tau>0$

判断能使闭环系统稳定的参数范围。



$$Q(jw)=\frac{K}{w}e^{j(-\tau\omega-\pi/2)}$$

特点：

当K增大到某值时Q(s)必会包围$-1+j0$点使闭环系统失去稳定；

当τ增大，相频特性曲线左移，极坐标图中各点相角更趋负，使闭环系统失去稳定。

总之，**K增大或者τ增大都不利于系统稳定。**

Nyquist稳定判据

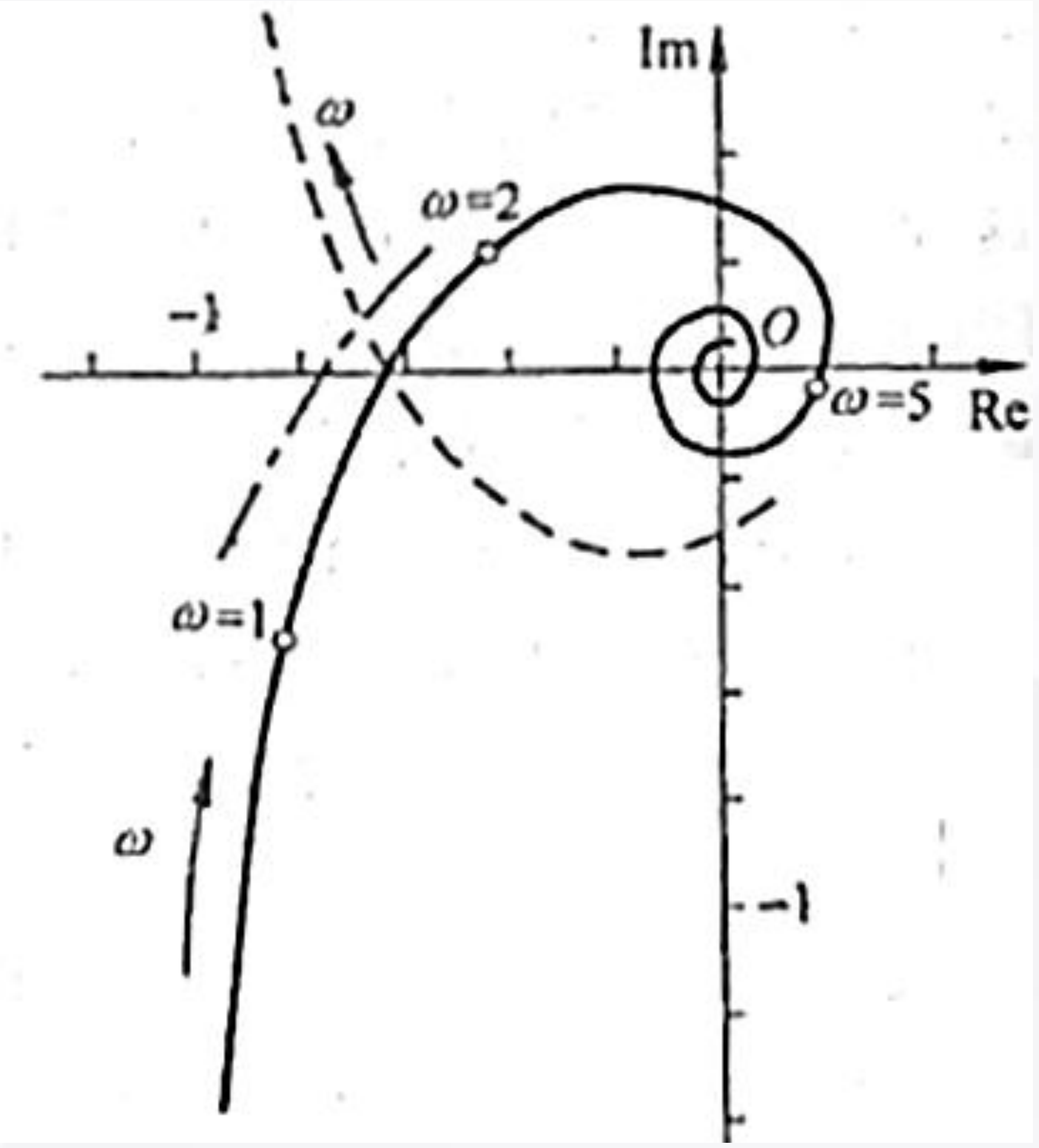
$$Q(jw) = \frac{K}{w} e^{j(-\tau\omega - \pi/2)}$$

如果闭环系统稳定，曲线$Q(jw)$应在-1+j0点右方通过负实轴，即相角为$-\pi$时模小于1。正w值需同时满足：

相角： $-\tau w - \frac{\pi}{2} = -\pi$

幅值： $\frac{K}{w} < 1$

因此，闭环系统稳定的条件： $K < \frac{\pi}{2\tau}$



结论：增益越大、延时越大，对稳定性越不利。

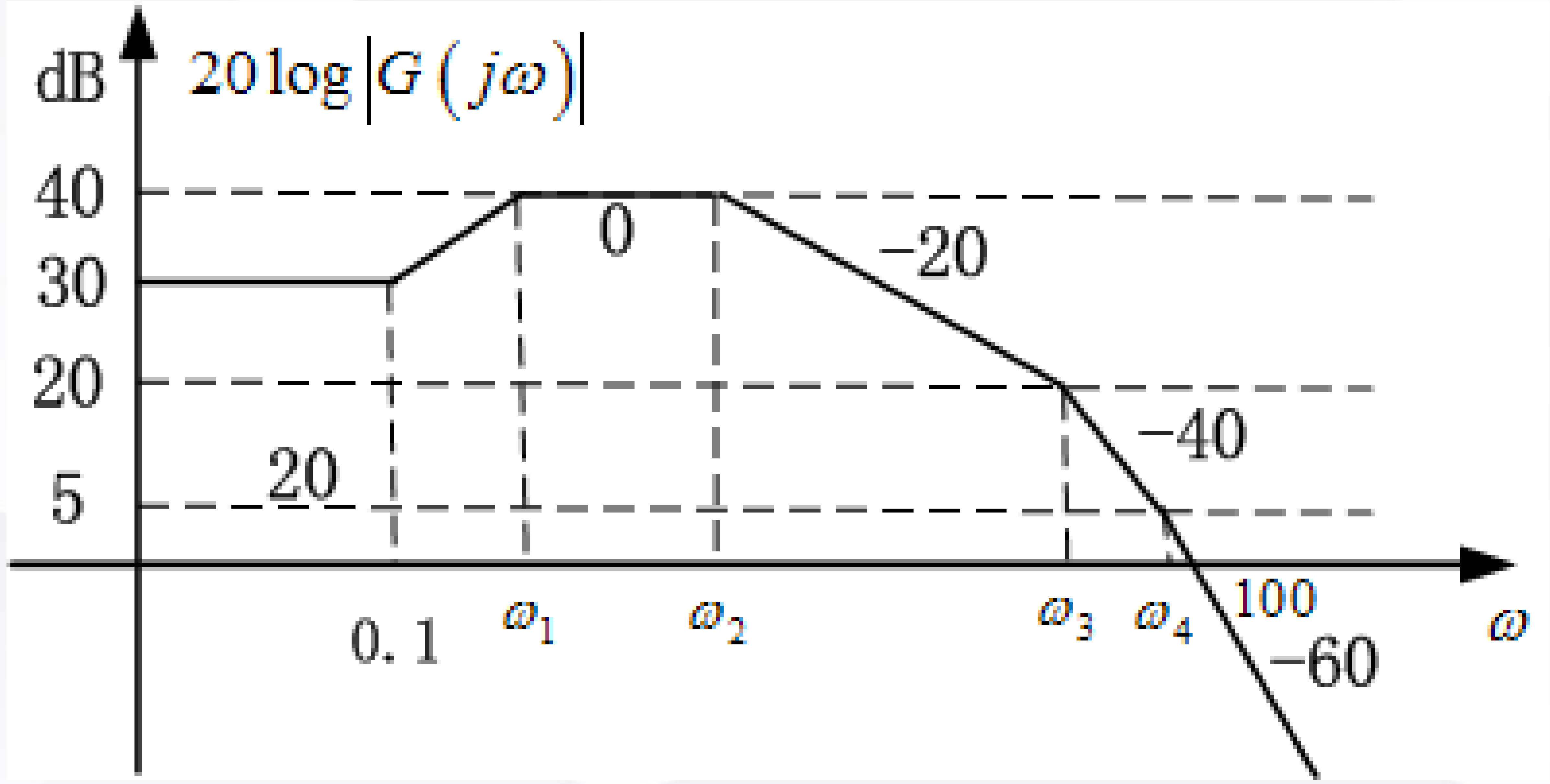
思考：如果延时单元换成惰性单元？ ➡ **闭环系统无条件稳定**

由频率响应求取传递函数

对于最小相位系统，由开环系统的对数图容易求得对应的开环传递函数。

解：最小转折频率前的低频段：

斜率为0，为0型系统



$\omega=0.1$,斜率变化20，属一阶微分环节

$\omega=\omega_1$,斜率变化-20，属惯性环节

$\omega=\omega_2$,斜率变化-20，属惯性环节

$\omega=\omega_3$,斜率变化-20，属惯性环节

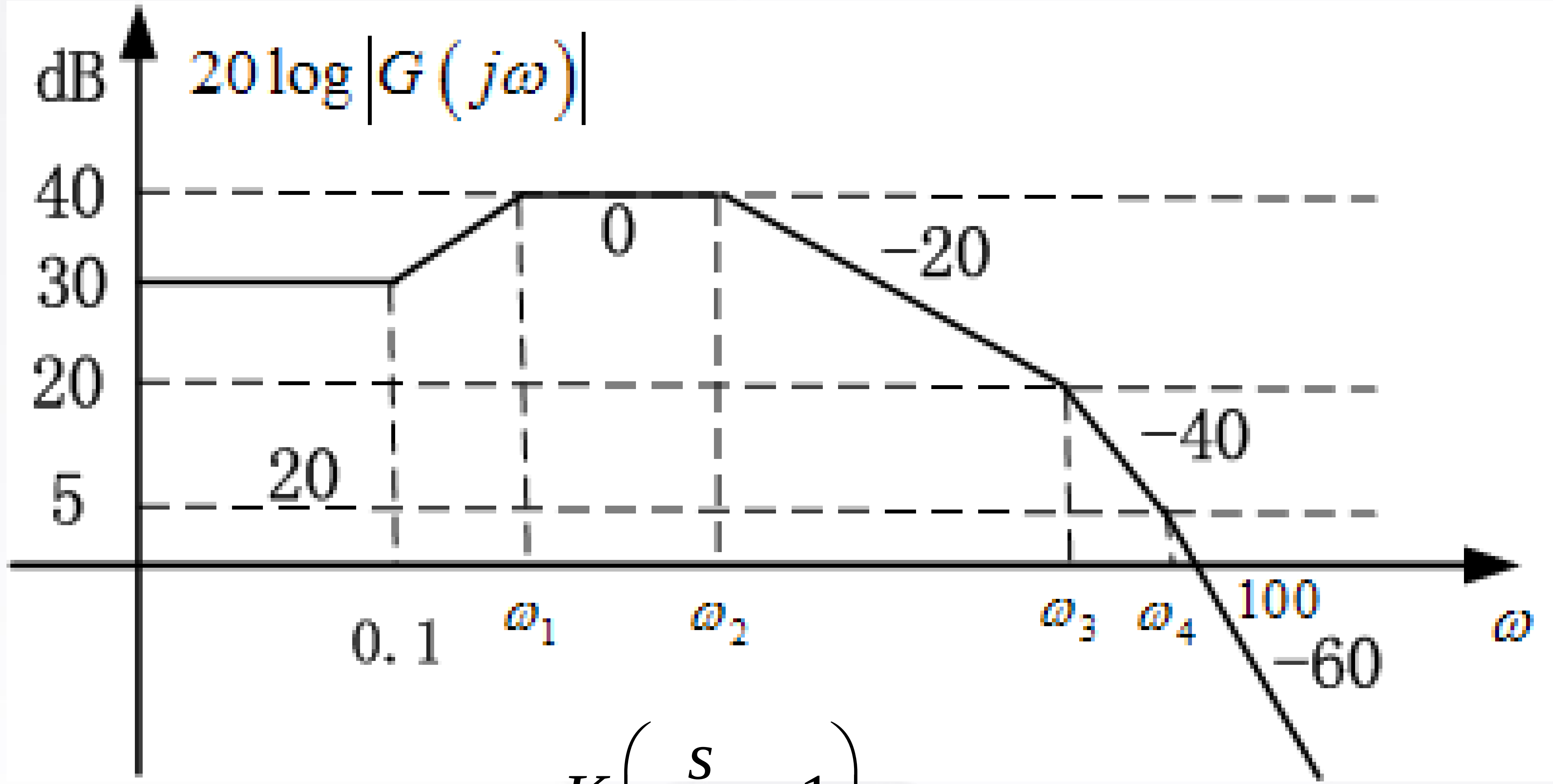
$\omega=\omega_4$,斜率变化-20，属惯性环节

因此，传递函数形式是：

$$G(s)=\frac{K\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_4}+1\right)}$$

由频率响应求取传递函数

确定 $K,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$



$$G(s)=\frac{K\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_4}+1\right)}$$

$$20\log K=30 \Rightarrow K=10\sqrt{10}$$

$$L(w_1)=40 \qquad L(0.1)=30$$

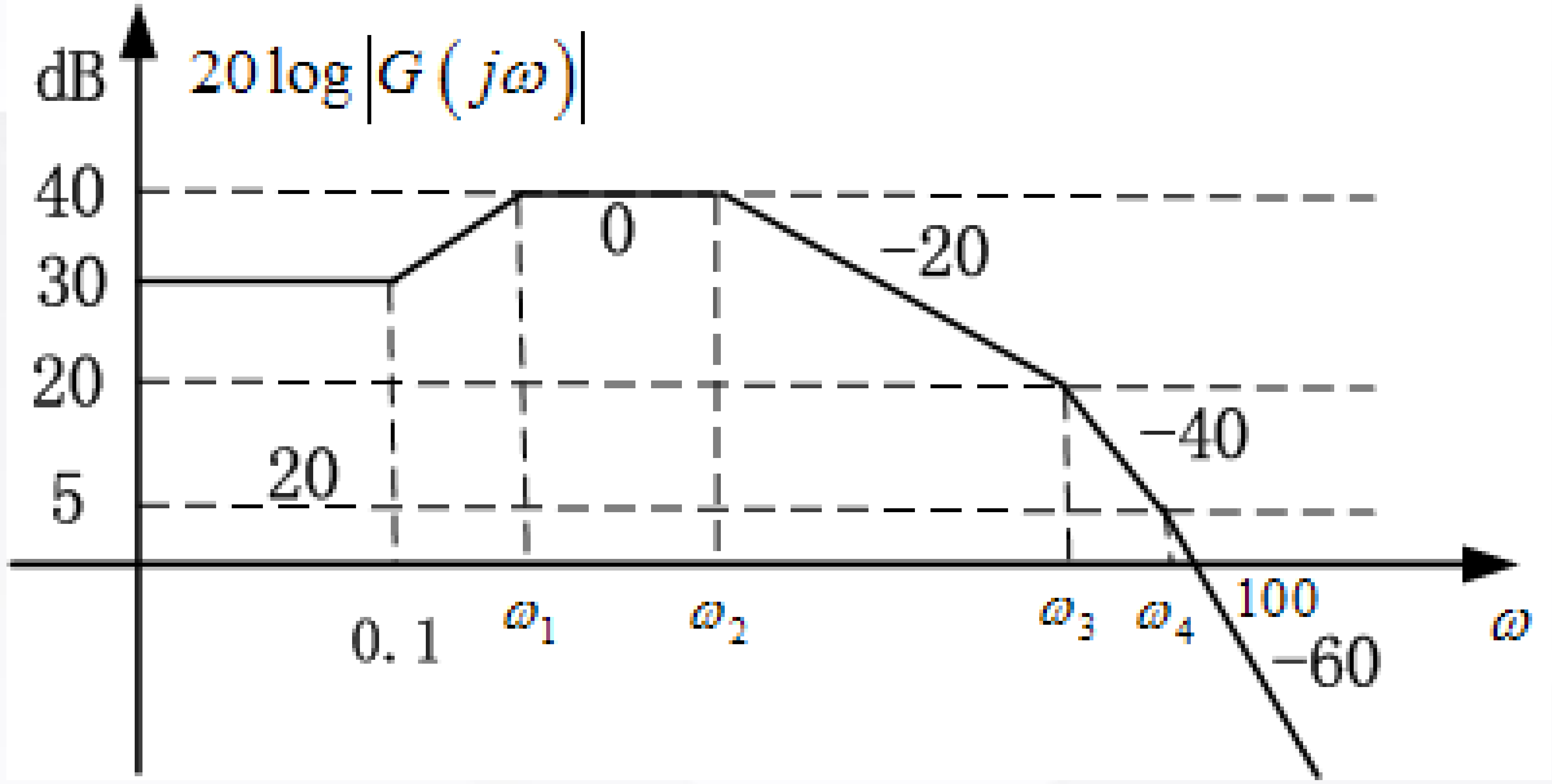
$$\frac{40-30}{\log w_1-\log 0.1}=20 \Rightarrow w_1=\sqrt{10}/10$$

或者 $20\log\left[\frac{K\frac{w_1}{0.1}}{1\times1\times1\times1}\right]=40$

$$L(w_4)=5 \qquad L(100)=0$$

$$\frac{5-0}{\log w_4-\log 100}=-60 \Rightarrow w_4=82.54$$

由频率响应求取传递函数



$$L(w_3) = 20 \qquad L(w_4) = 5$$

$$\frac{20-5}{\log w_3 - \log w_4} = -40 \Rightarrow w_3 = 34.81$$

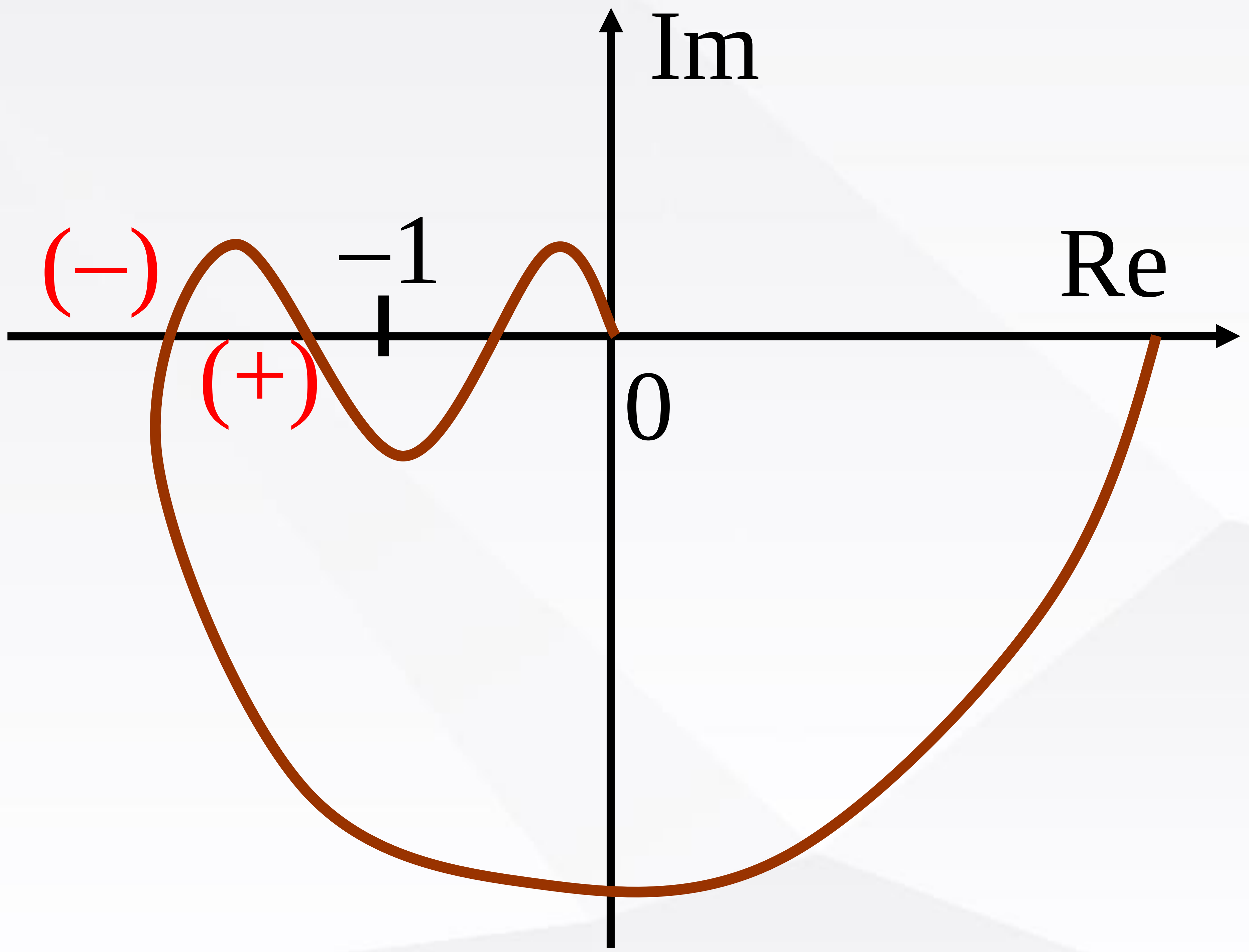
$$L(w_2) = 40 \qquad L(w_3) = 20$$

$$\frac{40-20}{\log w_2 - \log w_3} = -20 \Rightarrow w_2 = 3.48$$

$$G(s) = \frac{K\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_4}+1\right)}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{10\sqrt{10}\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{\left(\sqrt{10}s+1\right)\left(\frac{s}{3.48}+1\right)\left(\frac{s}{34.81}+1\right)\left(\frac{s}{82.54}+1\right)}}$$

基于伯德图的Nyquist稳定判据（补充知识）



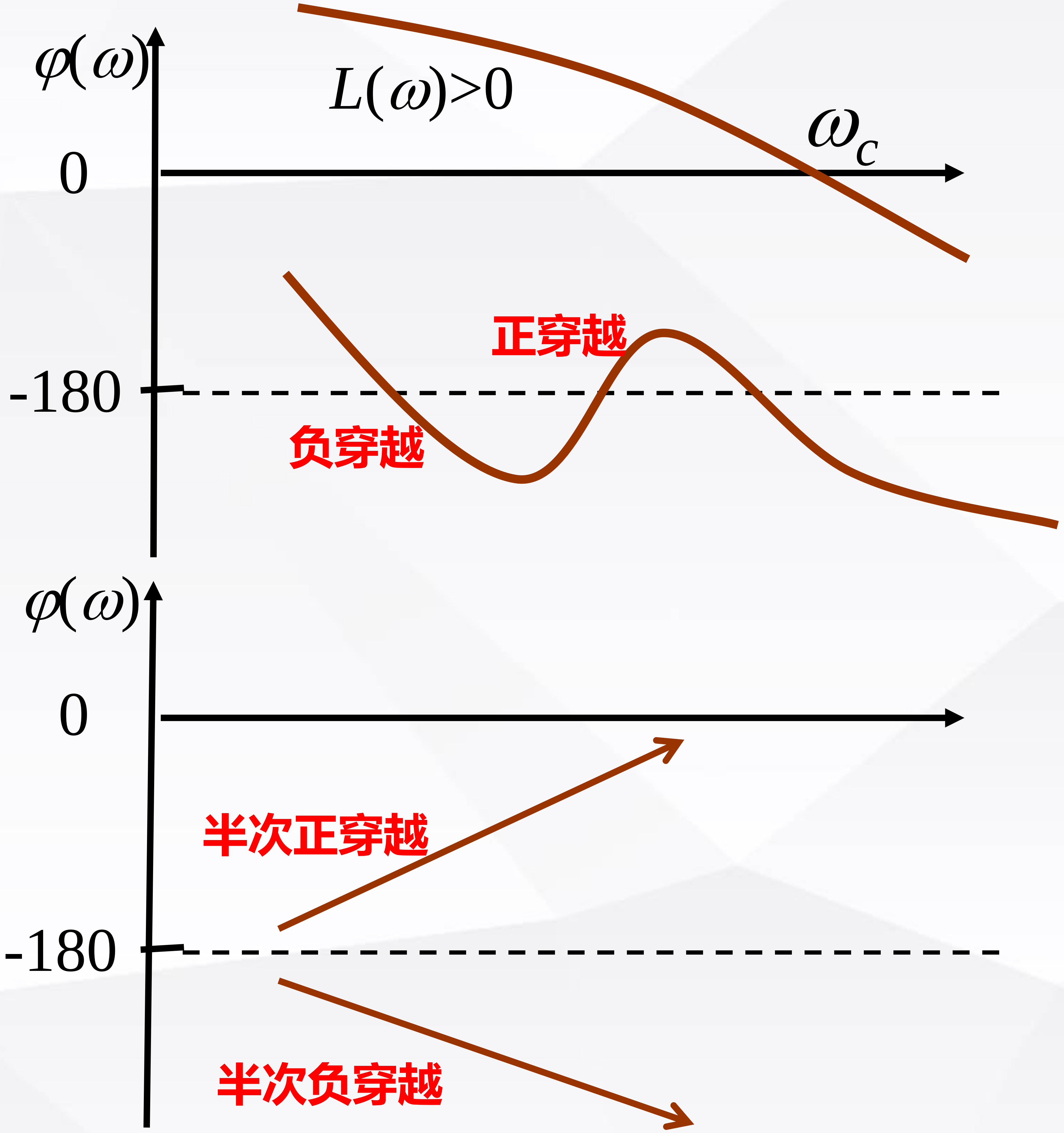
实轴区间（$-\infty$，-1）：

向下的穿越称为**正穿越**。

向上的穿越为**负穿越**。

从实轴开始和终止于实轴称为**半次穿越**。

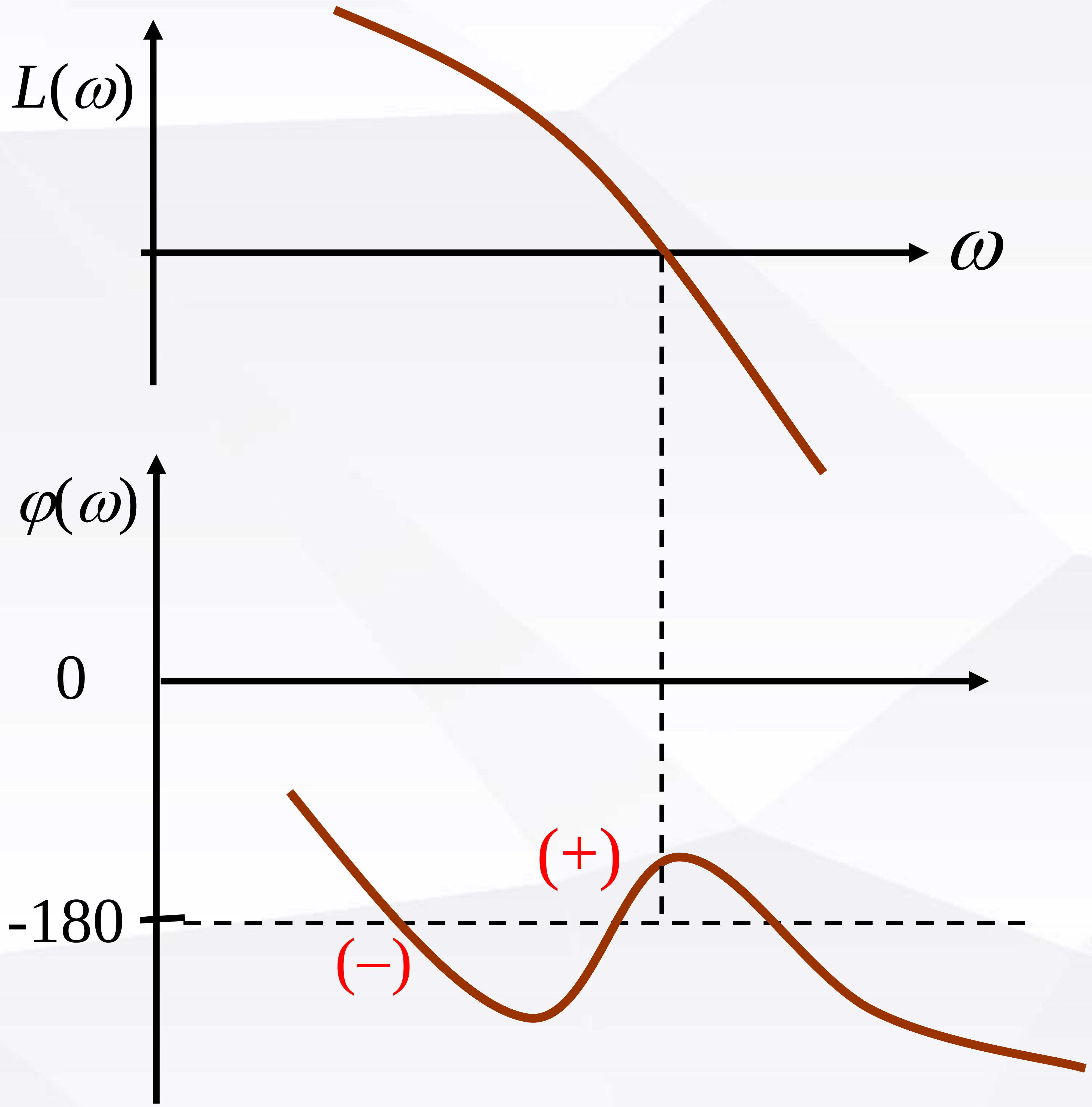
基于伯德图的Nyquist稳定判据（补充知识）



在开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 为正的频率范围内：

- 沿ω增加的方向，对数相频特性曲线**自下而上穿过-180°线**为**正穿越**；
- 沿ω增加的方向，对数相频特性曲线**自上而下穿过-180°线**为**负穿越**。
- 若对数相频特性曲线**自-180°线开始向上**，为**半次正穿越**；
- 若对数相频特性曲线**自-180°线开始向下**，为**半次负穿越**。
- **积分环节做法：添加$N\times 90°$辅助线，负穿越**。

基于伯德图的Nyquist稳定判据（补充知识）



反馈控制系统的闭环特征方程正实部根个数Z

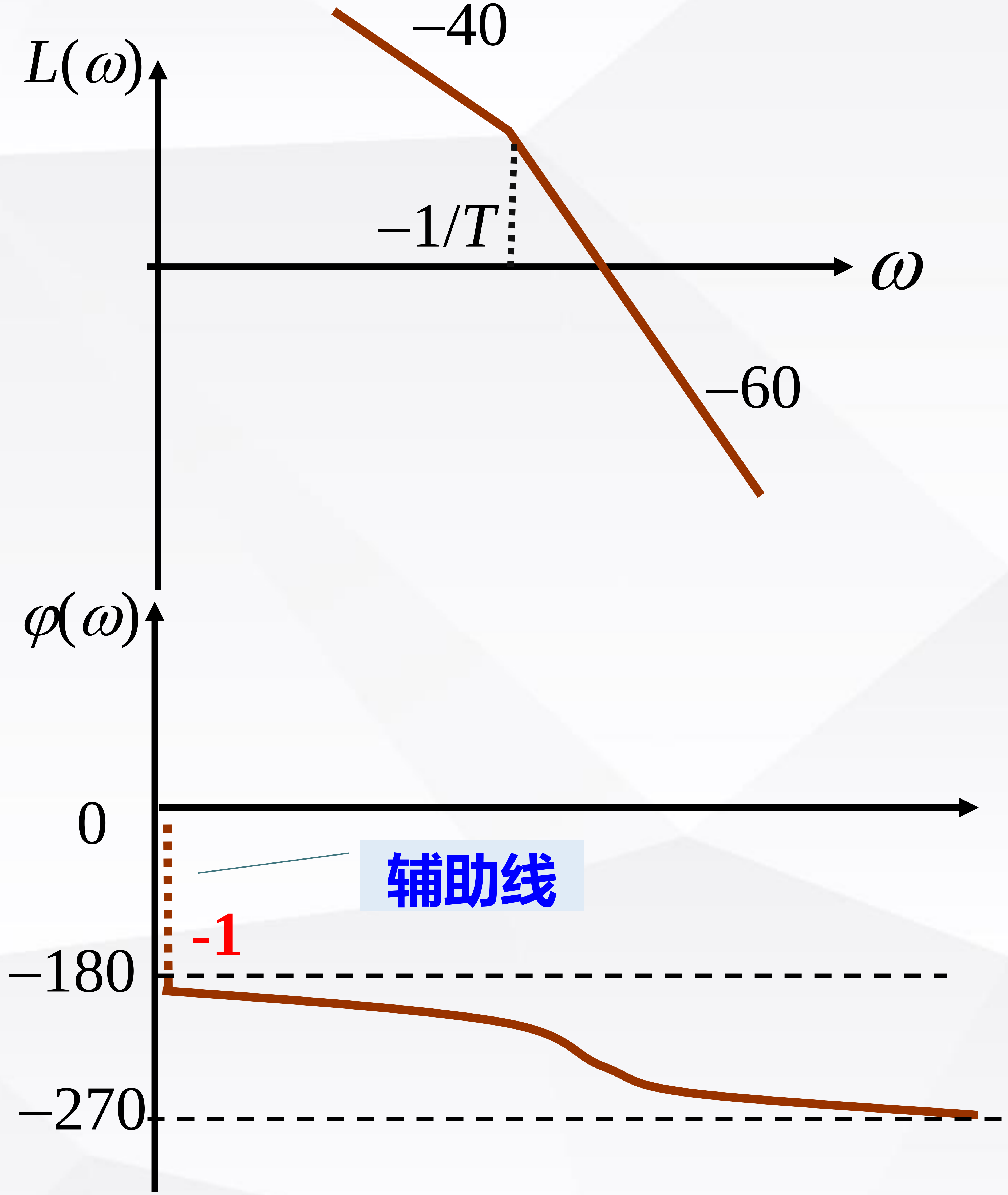
开环传递函数 s 右半平面极点数P

开环对数幅频特性为正值的所有频率范围内对数相频特性曲线与$-180°\pm2k\pi$ 线的正负穿越次数之差$R = N_+ - N_-$

则，$Z = P - 2R$

若Z为零，闭环系统稳定；否则，不稳定。

基于伯德图的Nyquist稳定判据 (补充知识)



$$G(s)H(s)=\frac{k}{s^2(Ts+1)}$$

P = 0

G(s)H(s)有两个积分环节，即 $N=2$

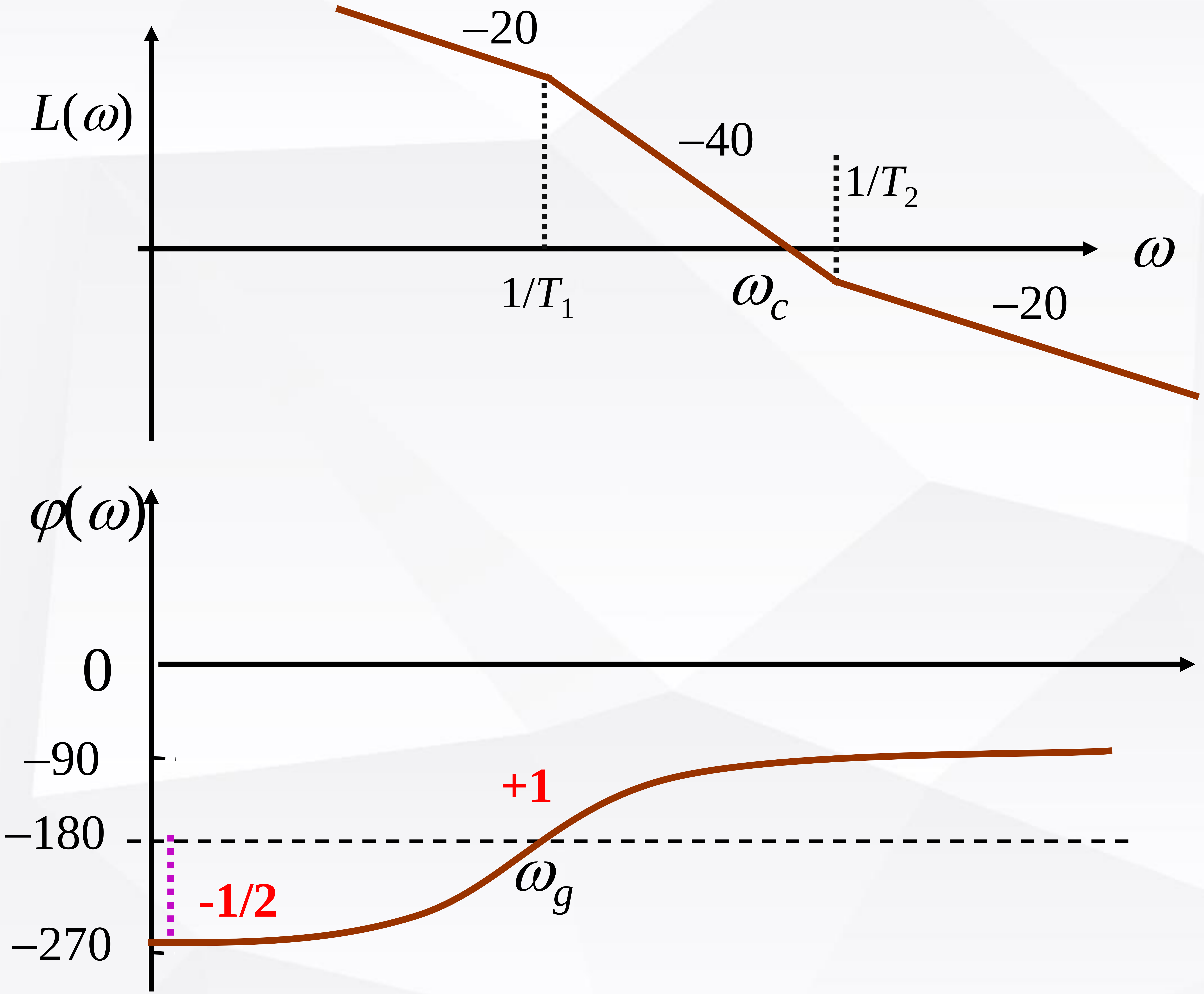
补画0°到–180°的辅助线

可见： $N_+=0$，$N_-=1$

$R=N_+-N_-=-1$

因此，$Z=P-2R=2$，故系统不稳定。

基于伯德图的Nyquist稳定判据 (补充知识)



$$G(s)H(s)=\frac{k(T_2 s+1)}{s(T_1 s-1)} \quad (T_1>T_2)$$

G(s)H(s)有一个积分环节$N=1$

补画–180°到–270°的辅助线

如果当$\omega_g<\omega_c$时，即$A(\omega_g)>1$，

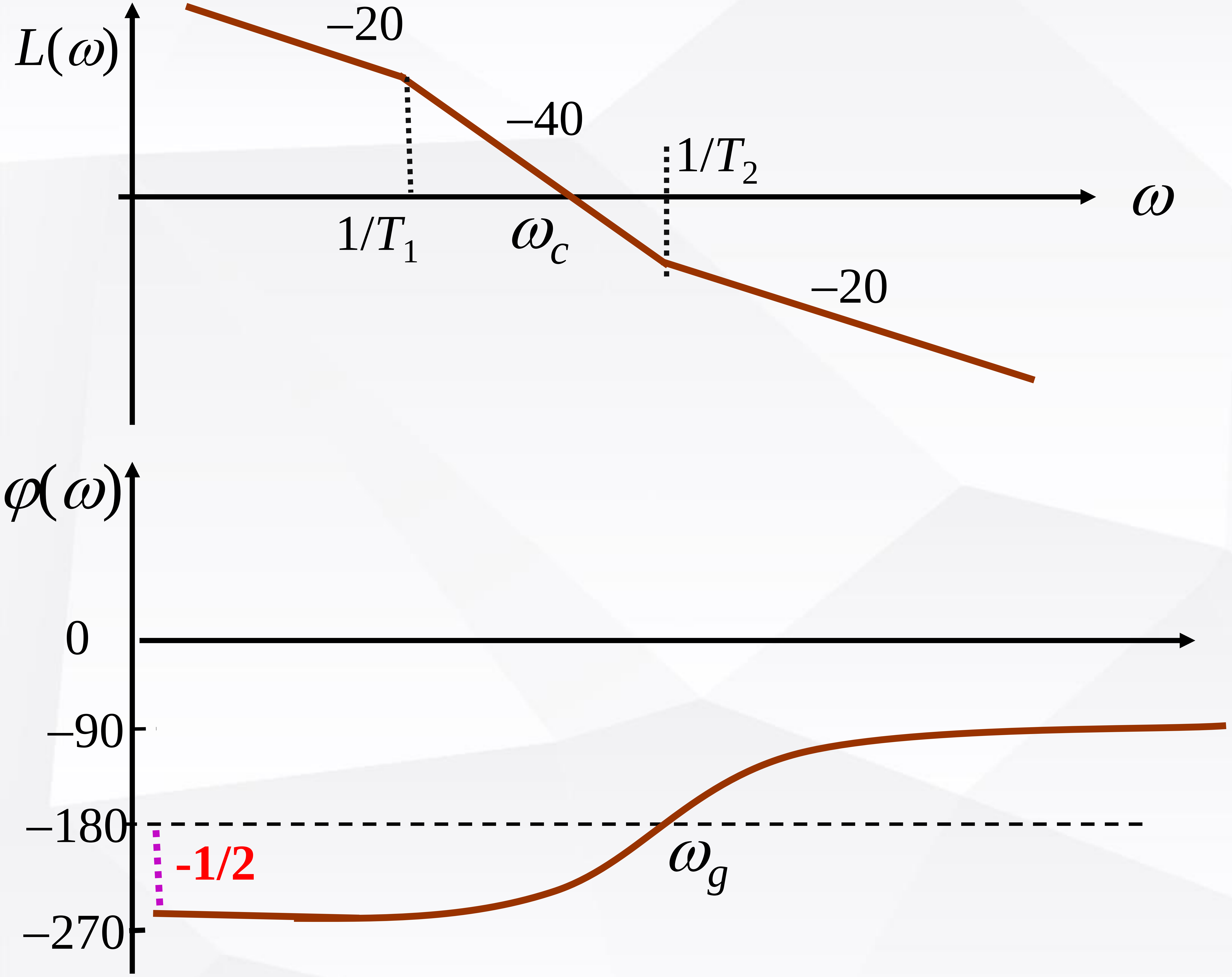
$N_+=1$，$N_-=1/2$

$R=N_+-N_-=1/2$

$Z=P-2R=1\text{-}1=0$

因此，闭环系统稳定。

基于伯德图的Nyquist稳定判据（补充知识）



$$G(s)H(s)=\frac{k(T_2s+1)}{s(T_1s-1)} \quad (T_1>T_2)$$

如果当$\omega_g > \omega_c$时，即$A(\omega_g) < 1$，

$N_+ = 0$，$N_- = 1/2$

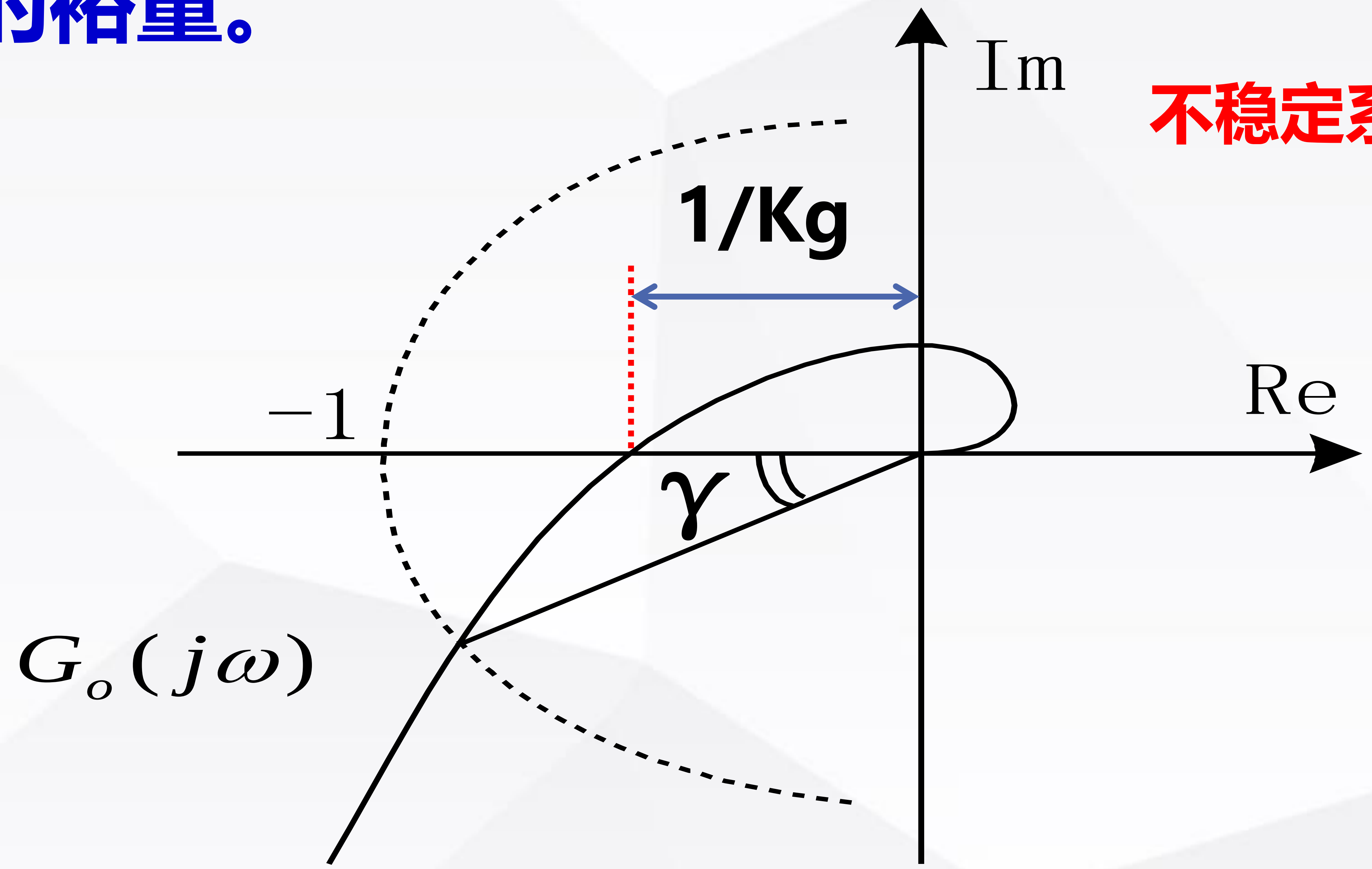
$R = N_+ - N_- = -1/2$

$Z = P - 2R = 1+1 = 2$

因此，闭环系统不稳定。

相对稳定性（稳定裕量）

Routh判据、Nyquist判据可判断系统的绝对稳定性，但工程上更关心稳定的程度，即离不稳定边缘的裕量。



不稳定系统谈不上稳定裕量。

相角裕量

$$\gamma = 180^{o} + \theta(\omega_c)$$

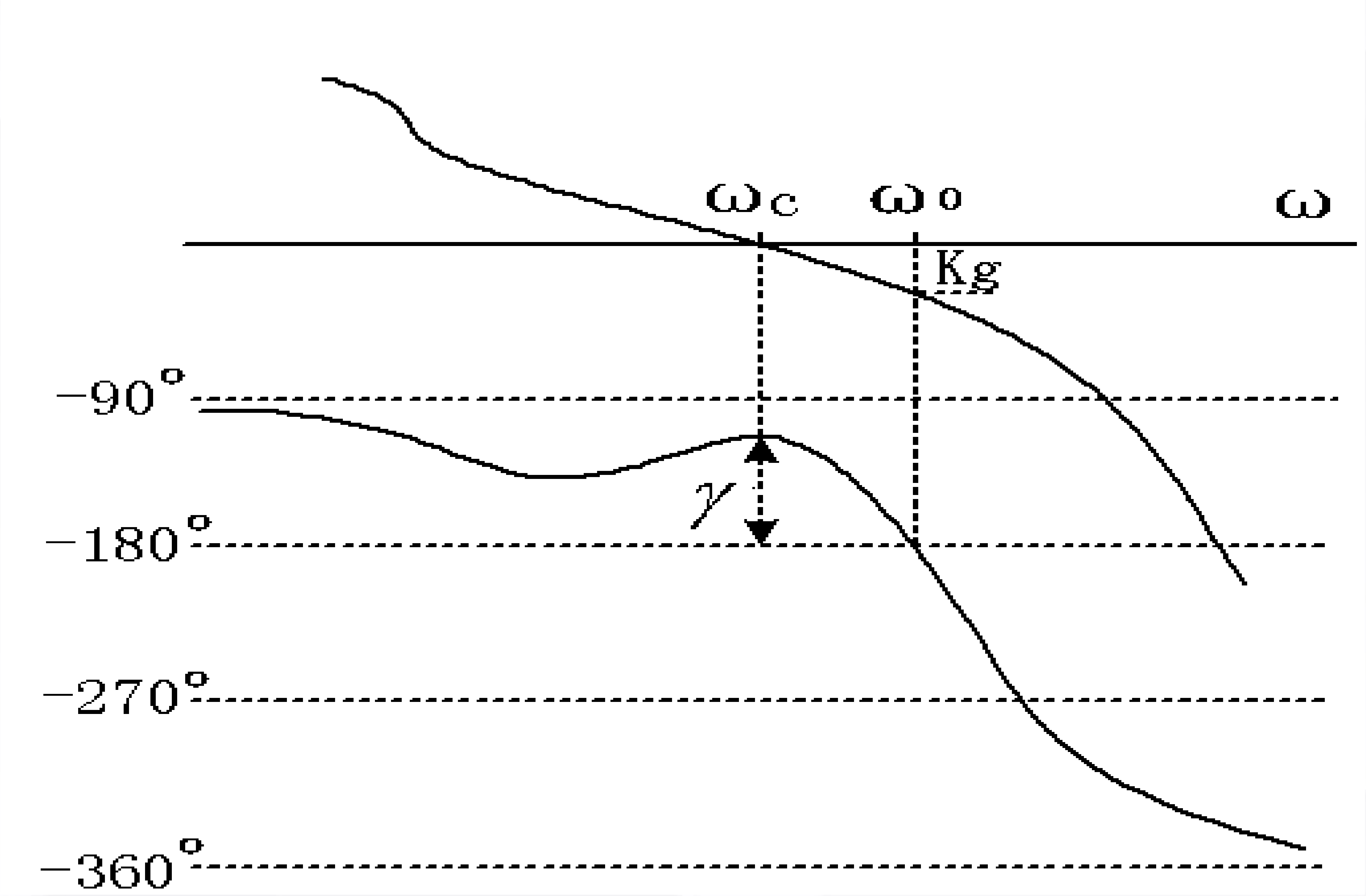
增益裕量Kg

当相角为-180^{o}时，开环模（<1）的倒数，用20logKg分贝表示。

裕量过小，振荡严重；
裕量过大，响应迟钝。

工程要求：相角裕量30°~60°；增益裕量不小于6dB。

相对稳定性（稳定裕量）



$20\log w_c=0$

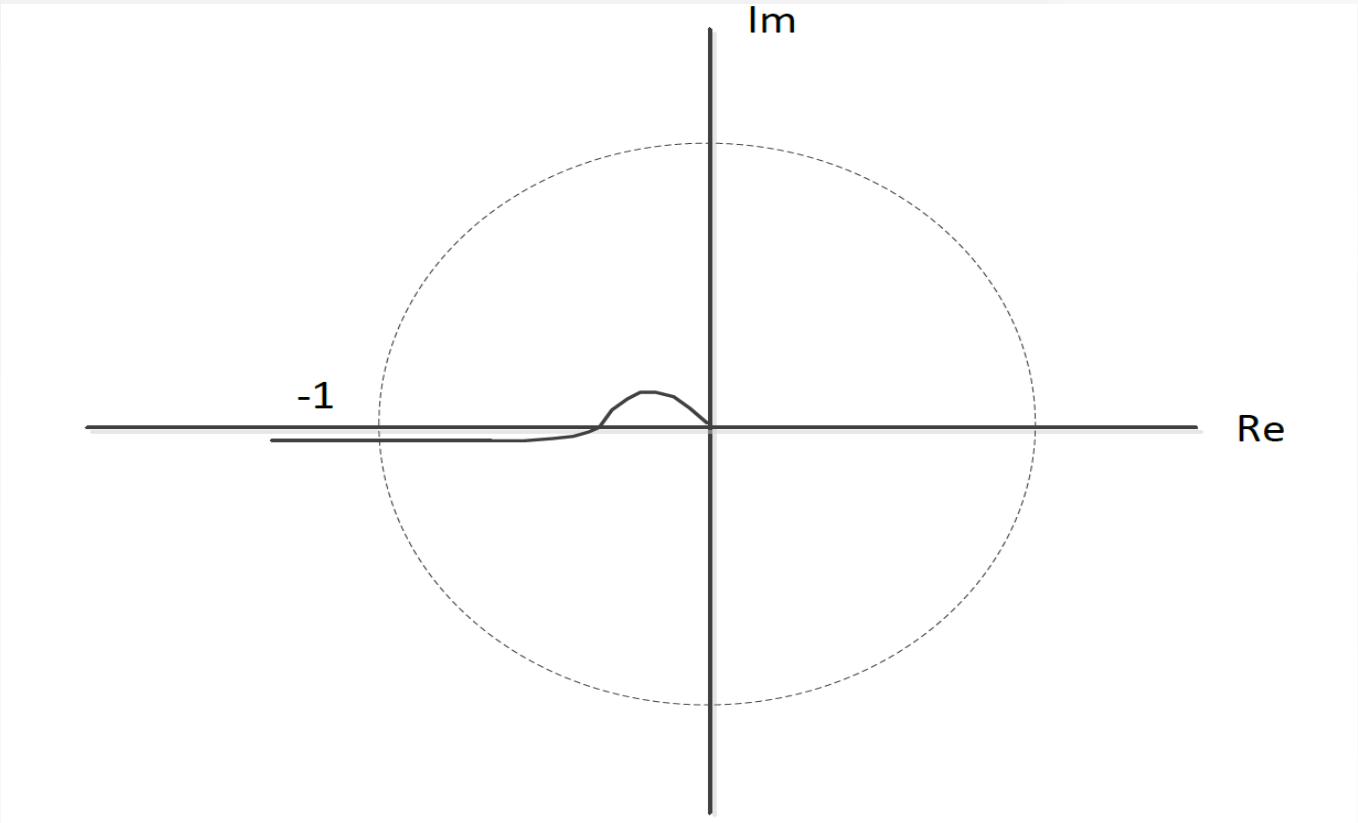
$$\theta(\omega_0) = -180^\circ$$

根据Bode图确定稳定裕量

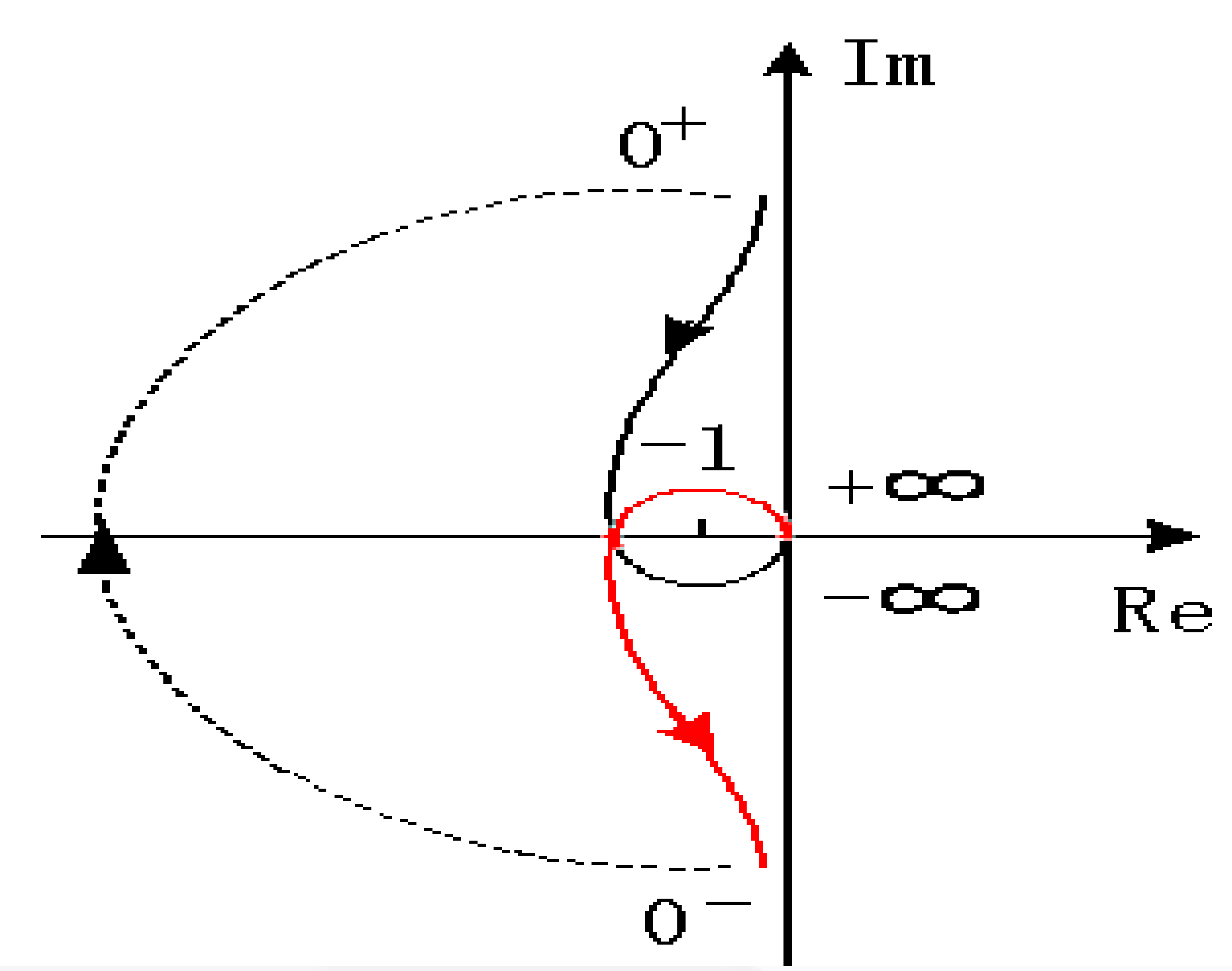
相对稳定性（稳定裕量）

说明：1. 两个稳定裕量需同时考虑。 2.上述定义针对最小相位系统(γ, K_g都正)

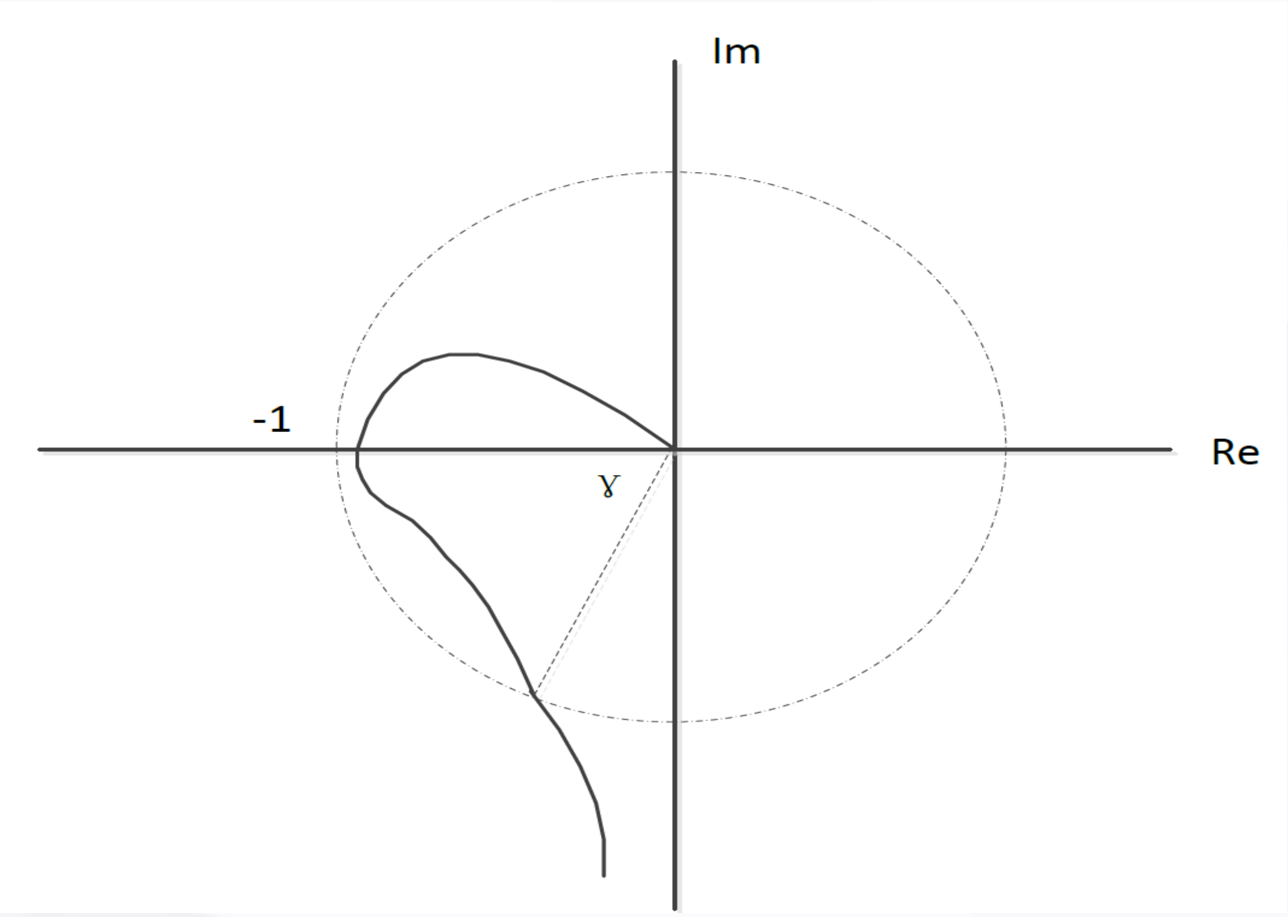
若这两个量一正一负，则是非最小相位系统的特征。



$$G_o(s) = \frac{6(0.33s+1)}{s(s-1)}$$



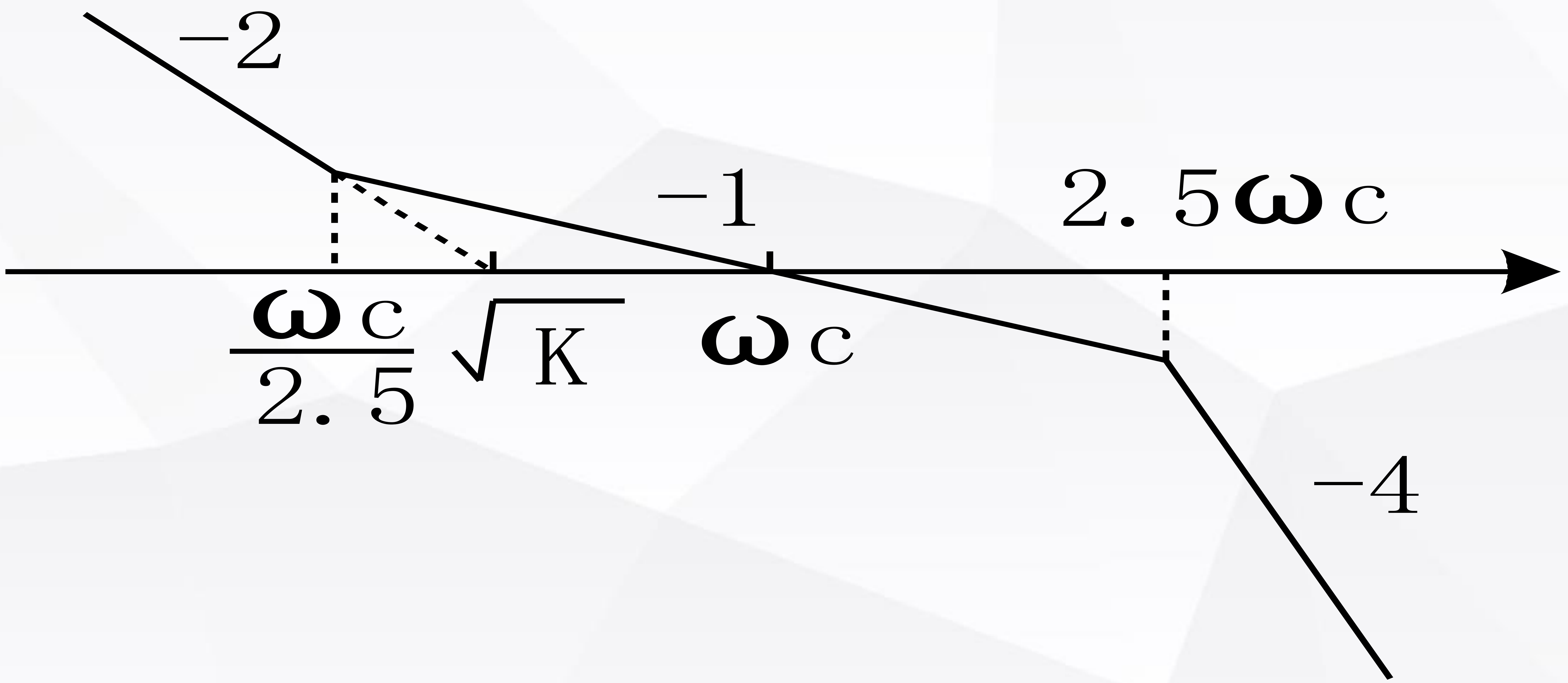
3. 工程上主要使用相角裕量。



从开环频率特性研究闭环系统性能(最小相位系统)

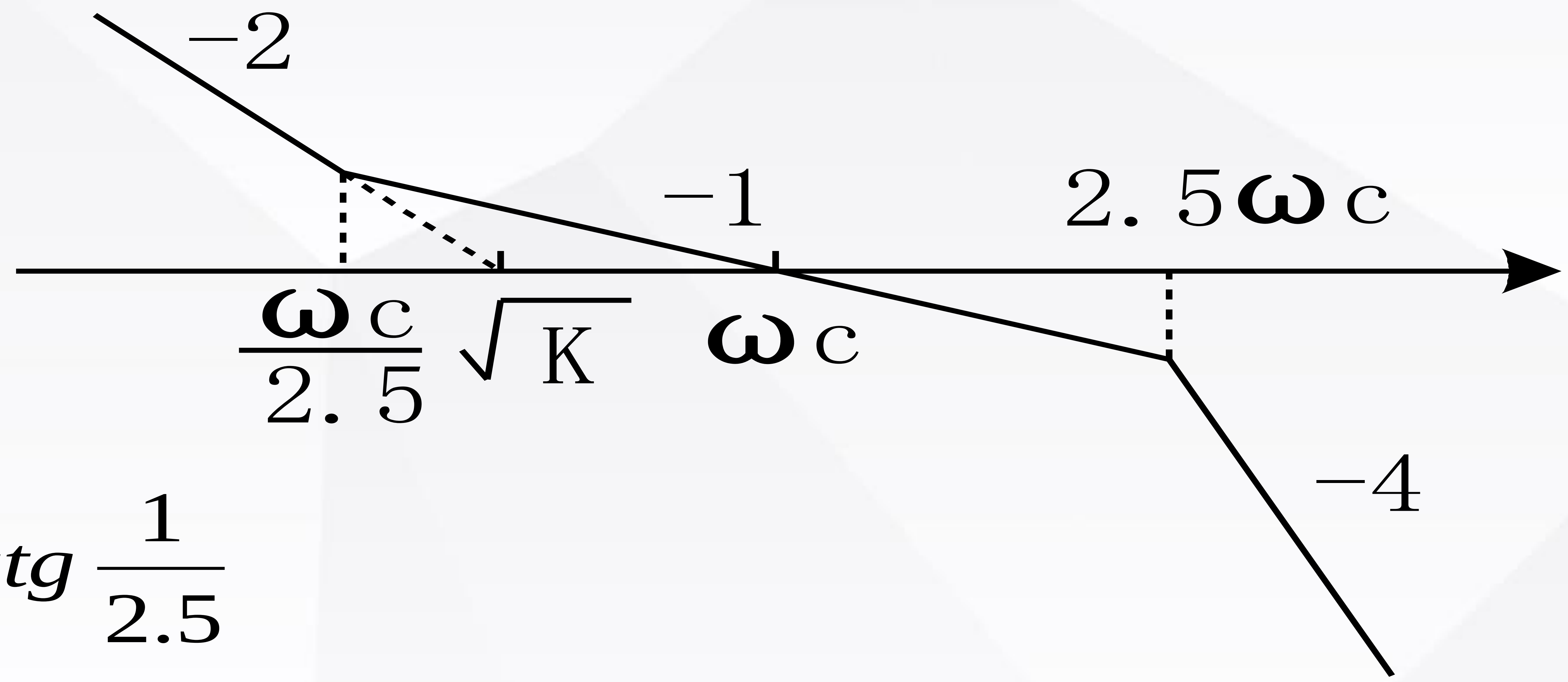
1. 从开环对数幅频特性判断闭环稳定性

如果开环对数频率特性穿越0分贝时的斜率为-1，且有一定宽度



从开环频率特性研究闭环系统性能(最小相位系统)

$$G_o(s)=\frac{K(\frac{2.5}{\omega_c}s+1)}{s^2(\frac{1}{2.5\omega_c}s+1)^3}$$



$$\theta(\omega_c)=-180^\circ+arctg2.5-3arctg\frac{1}{2.5}$$

$$=-177.2^\circ$$

-1段的宽度： $\dfrac{2.5\omega_c}{\frac{\omega_c}{2.5}}=6.25,$

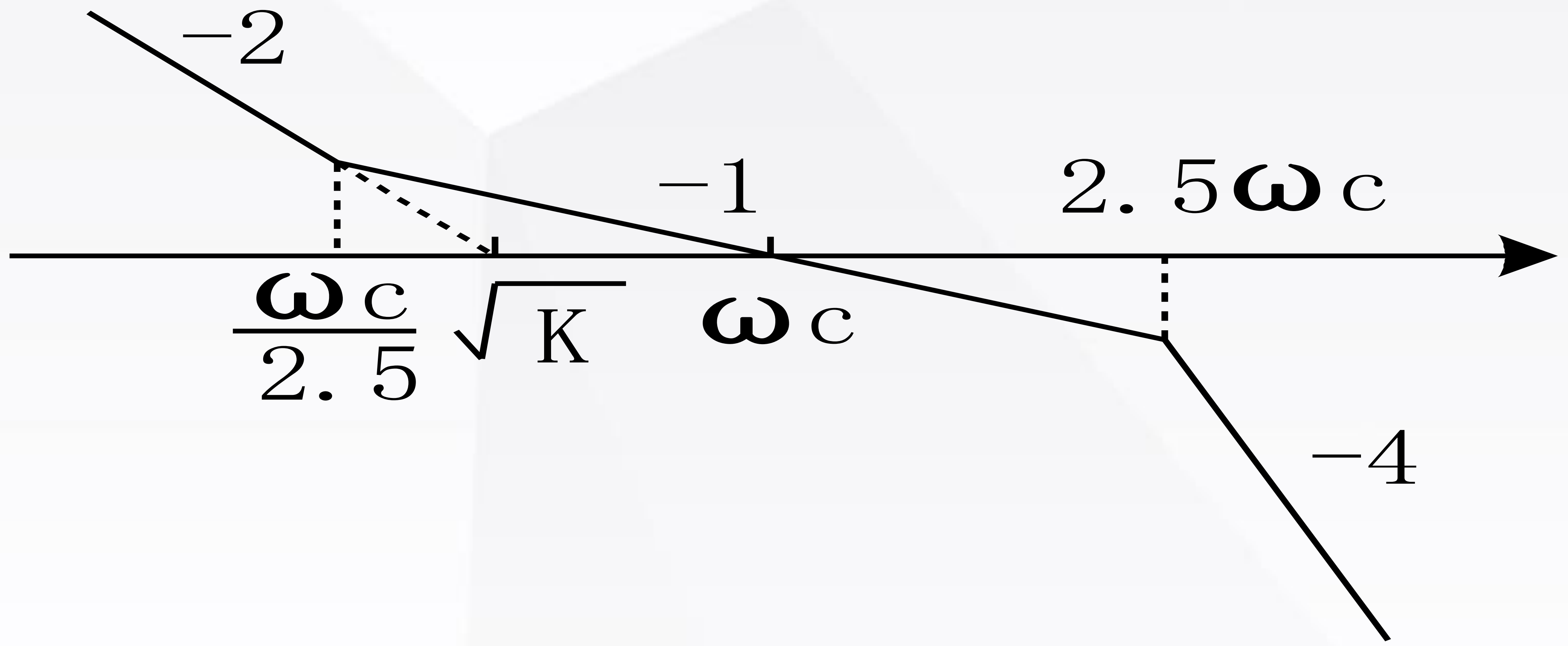
可见，此结构和参数对应的闭环系统几乎是临界情况。

因此，如果要求闭环系统稳定， $G_o(j\omega)$ **应以-1斜率穿越0分贝轴，且-1段的宽度为5-10倍。**

从开环频率特性研究闭环系统性能(最小相位系统)

2. 从开环对数幅频特性的低频段判断闭环系统的静态特性

$$G_o(s)=\frac{K(\frac{2.5}{\omega_c}s+1)}{s^2(\frac{1}{2.5\omega_c}s+1)^3}$$



该系统II型，*K*如何从图上求出？ **由*K*可确定系统静态特性。**

$$\frac{K(\frac{2.5}{\omega_c}\times\omega_c)}{(\omega_c)^2}=1 \quad\Rightarrow\quad K=(\omega_c)^2/2.5$$

低频段主要影响静态特性（系统型次和K）

思考：如何提高低频段增益，而不改变中频段的特性？

从开环频率特性研究闭环系统性能(最小相位系统)

3. 从开环对数幅频特性的中频段判断闭环系统的动态性能

稳定裕量与超调的关系

近似关系 M_r(闭环峰值) $\approx \dfrac{1}{\sin\gamma}$

$$\sigma\% \approx \begin{cases} 100(M_r - 1) & M_r \le 1.25 \\ 50\sqrt{M_r - 1} & M_r > 1.25 \end{cases}$$

$$\sigma\% \approx \frac{2000}{\gamma} - 20$$ **(有一定的适用范围)**

思考：如果稳定裕量不够应加入怎样的环节?

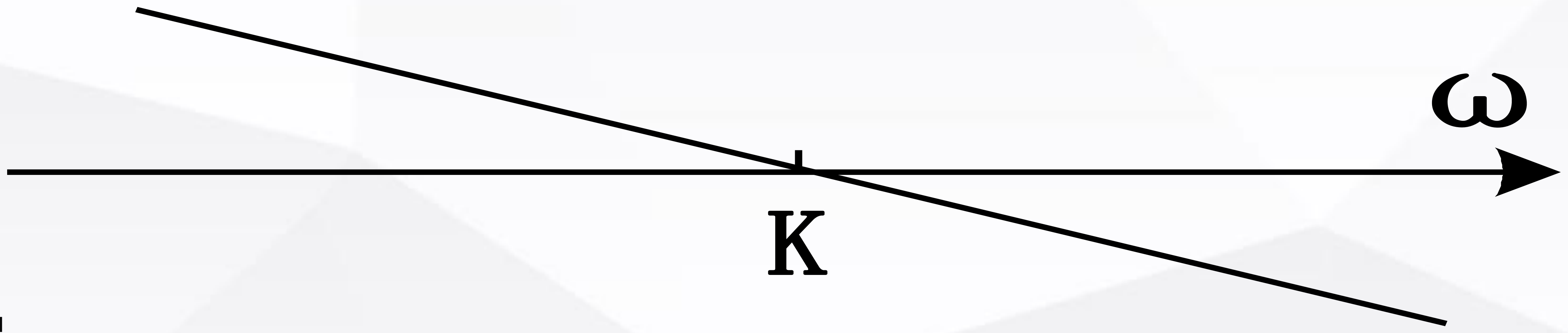
从开环频率特性研究闭环系统性能(最小相位系统)

剪切频率 ω_c 与过渡过程时间 t_s 的近似关系

试看 $G_o(s)=\dfrac{K}{s}$， 系统闭环后 $G_c(s)=\dfrac{K}{s+K}=\dfrac{1}{\frac{1}{K}s+1}$

(是一个时间常数为 $\frac{1}{K}$ 的惰性环节)

$$t_s=\frac{3}{K}=\frac{3}{\omega_c}$$



如果 $K\uparrow$， 则 $\omega_c\uparrow$ ，频带加宽；

t_s减小，**说明频率尺度与时间尺度成反比关系。**

对于复杂系统，阶跃响应时间 $t_s\approx\dfrac{4\sim9}{\omega_c}$

从开环频率特性研究闭环系统性能(最小相位系统)

4. 低频段特性与动态性能的关系

低频段增益越低，导致低频信号的复现速度越慢，系统的超调会变小，但是收敛时间加长，甚至出现爬行。

p330，图4.13.11.

5. 高频段特性与动态性能的关系

高频段要衰减得快，抑制高频噪声，阶跃响应上升部分亦快。

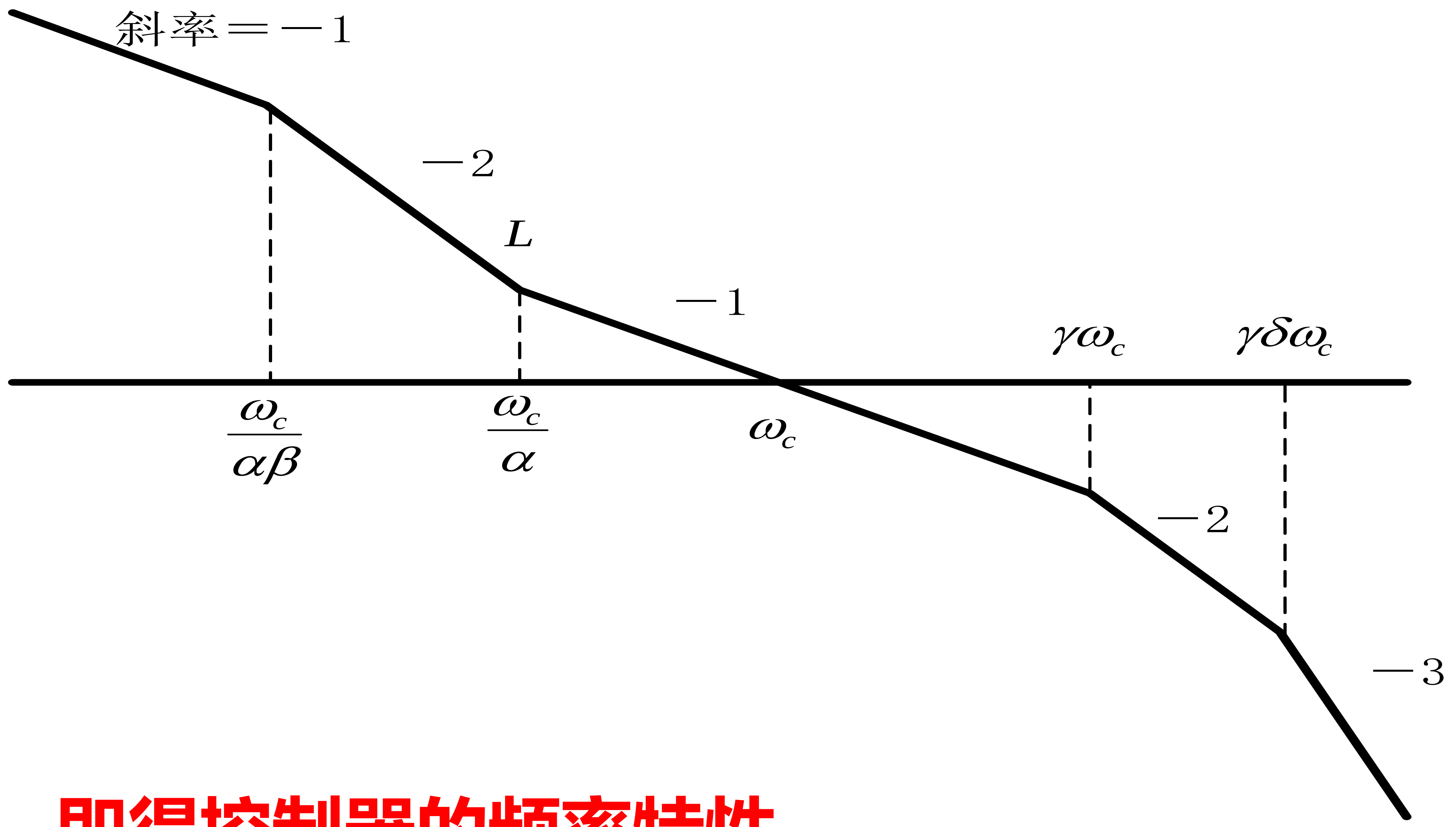
p332，图4.13.14.

结论：低频段影响阶跃响应的结尾部分，而高频段影响过渡过程的开始阶段。

基于频率特性的控制器设计思路（补充知识）

根据控制要求选择理想的开环特性

例如典型四阶开环特性：



减去对象的频率特性，即得控制器的频率特性。

基于频率特性的控制器设计思路（补充知识）

经验公式：

$$\begin{cases} t_s = \dfrac{1}{\omega_c}\left[8 - \dfrac{3.5}{\alpha} - \dfrac{4}{\beta} + \dfrac{100}{(\alpha\gamma\delta)^2}\right] \\ \sigma(\%) = \left(\dfrac{160}{\gamma^2\delta} + 6.5\dfrac{\beta^*}{\alpha} + 2\right) \end{cases} \qquad \beta^* = \min(\beta, 10)$$

其他经验公式：

$$\begin{cases} t_s \approx (4 \sim 9)/\omega_c \\ \sigma(\%) \approx \dfrac{64 + 16h}{h - 1} \end{cases}$$

h 是中频 - 1段的宽度

第四章要点

1. 频率特性的定义及物理意义；
2. 频率特性的图像：极坐标图和对数坐标图
   (注意非最小相位系统的特殊性）；
3. Nyquist判据及其应用；
4. 稳定裕量的概念及其计算（相角裕量和增益裕量）；
5. 从开环频率特性分析闭环系统的动、静态特性。