清华大学本科生考试试题专用纸

期末考试课程　随机数学与统计（A 卷）　2022 年 6 月 24 日

学号：__________　姓名：__________　班级：__________

一.（15 分）设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，均服从均匀分布 $U(0,1)$，

（1）试求 $P(X_1+X_2=1)$ 及 $P(X_1+X_2\le\frac{1}{2})$；

（2）令 $Y=-\ln X_1$，试问 Y 服从什么分布，并求 $P(Y>5|Y>3)$；

（3）令 $Z_n=(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\frac{2}{n}}$，试问 Z_n 是否依概率收敛？若是，试求出其依概率收敛的极限。

二.（20 分）设 X 服从参数为 1 的指数分布，随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且均与 X 同分布，

（1）试求 $P(X_2>X_1)$ 与 $P(X_2>2X_1)$；

（2）设 η 与 X_1,X_2 独立且满足 $P(\eta=1)=P(\eta=2)=\frac{1}{2}$，试求 $P(X_2>\eta X_1)$；

（3）试求 $E(\min\limits_{1\le i\le n}X_i)$ 与 $D(\min\limits_{1\le i\le n}X_i)$；

（4）令 $U=\frac{X_1-X_2}{X_1+X_2},V=X_1+X_2$，试问 U,V 分别服从什么分布，是否独立，为什么？

三.（20 分）已知随机向量 (X,Y) 在三角形区域 $D:0<y<x<1$ 内服从均匀分布，

（1）试问 X 与 Y 是否独立？说明你的理由；

（2）试分别求出 $E(Y\mid X)$ 和 $D(Y\mid X)$；

（3）试求 $Cov(X,Y)$；

（4）试求 $E(X\mid X+Y\le 1)$。

四．（15 分） 设$\{B_t : t \ge 0\}$（$B_0 = 0$）为标准 Brown 运动，记$U \triangleq 2B_1 + B_2 - B_3$，

（1）试求随机变量U的期望与方差，并求出U的特征函数$\varphi_U(\theta)$；

（2）设$V \triangleq B_1 + cB_2$，试问常数c取何值时，U与V相互独立，为什么？

（3）试求条件期望$E(U \mid B_2 = 2)$。

五．（15分）设$X_1,\cdots,X_n$是正态总体$X \sim N(\mu,1)$的一个样本，$\bar{X}$为其样本均值，

（1）试问μ的矩估计量是否为其充分统计量，为什么？

（2）若考虑检验问题：$H_0 : \mu = 1 \leftrightarrow H_1 : \mu \ne 1$，取检验的拒绝域为$W = \{(x_1,\cdots,x_n) : |\bar{x} - 1| \ge c\}$，试求该检验的势函数$g(\mu)$；

（3）若参数μ的先验分布为$N(0,1)$，试求出μ的Bayes后验期望估计$\hat{\mu}_B$。

六．（15分）设$X_1,\cdots,X_n$是总体X的一个样本，X的密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$,其中$\theta > 0$为未知参数。

（1） 试证明：$\dfrac{2X^2}{\theta} \sim \chi^2(1)$；

（2） 试求参数θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_{MLE}$，$\hat{\theta}_{MLE}$是否为θ的UMVUE？为什么？

（3） 基于$\hat{\theta}_{MLE}$构造枢轴量，并求出参数θ的置信水平为$1-\alpha$的双侧等尾区间估计。