单选题 1分 设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

一般来说，灵敏度高则测量误差小。这句话是否正确?

A 正确

B 错误

提交

测量方程与解逆问题

- 被检测量X，观测量ϕ

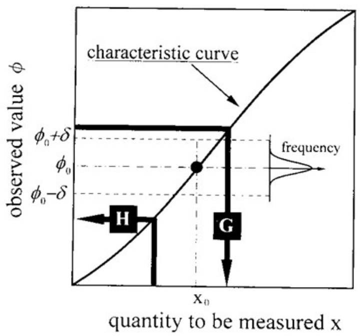
$$X \xrightarrow{H} \phi \xrightarrow{G} X'$$

- 物理法则变换H： $\phi = H(X)$
- 逆变换G ： $X' = G(\phi)$
- 设观测误差δ，测量误差ε，则 $X_0 + \varepsilon = G(\phi_0 + \delta)$
- 一次近似展开：

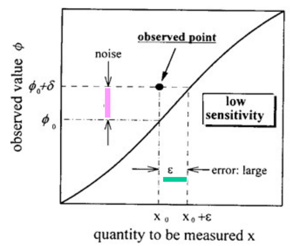
$$\varepsilon = \delta \cdot \left.\frac{\partial G(\phi)}{\partial \phi}\right|_{\phi=\phi_0}$$

$$\delta = \varepsilon \cdot \left.\frac{\partial H(X)}{\partial X}\right|_{X=X_0}$$

被测量与观测量的关系

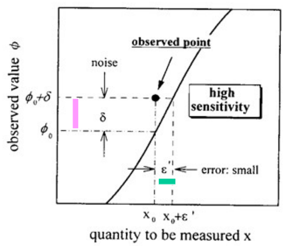


高灵敏度对降低测量不确定性的作用



(a) In case of low sensitivity.

(a) 低灵敏度



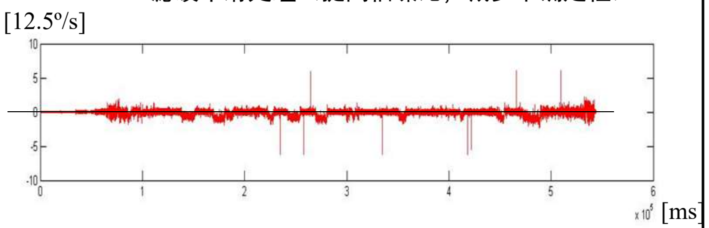
(b) In case of high sensitivity.

(b)高灵敏度

陀螺仪的输出信号

直升机的航向和姿态的测量

1. 剔除粗大干扰值
2. 滤波平滑处理（提高信噪比，减少不确定性）



误差传递和测量不确定度

- 误差的定义和分类
- 随机误差分析、正态分布特性
- 置信区间和置信概率
- 误差传递法则
- <u>平均值的标准偏差的估计</u>
- 测量不确定度的定义和表示方法
- 多传感器数据融合

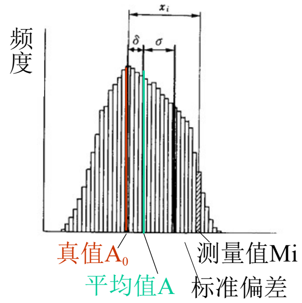
误差的定义

- 绝对误差：测量值与真值之差，有正负
- 相对误差：绝对误差与真值之比

- 引用误差：绝对误差与量程之比
- 最大允许误差：MPE　　红外耳温度计　±0.2℃(36.0-39.0)

- 真值、约定真值
- 示值、标称值

测量结果分布



相同条件下
对某一被测量
重复测量

误差=系统误差+随机误差

误差分类

- 误差
  - 系统误差（仪器方法本身）
    - 变化否
      - 恒定
        - 恒正
        - 恒负
      - 可变
        - 线性
        - 周期
        - 复杂
    - 掌握否
      - 已定
      - 未定
  - 随机误差（多种微小独立随机因素）
    - 统计相关
    - 统计无关

    ← 误差分析、测量不确定度

    中心极限定理—正态分布
  - 粗大误差（故障或失误）

    从测量结果中剔除粗大误差，排除系统误差后

误差、平均值、真值、偏差、残差、方差、标准偏差

$$x = M - A_0$$

$$A = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i$$

$$A_0 = \lim_{n \to \infty} A$$

大数定理

$$\delta = A - A_0$$

$$v_i = M_i - A$$

$$\sum v_i = 0$$

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - A_0)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - A_0)^2}$$

方差、标准偏差、协方差、相关系数

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - A_0)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - A_0)^2}$$

$$\sigma_{XiXj}{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_{ik} - A_i)(X_{jk} - A_j)$$

$$r(X_i, X_j) = \frac{\sigma_{XiXj}{}^2}{\sigma_{Xi}\sigma_{Xj}} \quad , [-1, +1]$$

两组测量值Xik和Xjk：

$|r(X_i, X_j)| = 1$ 完全相关 直线回归 p=1

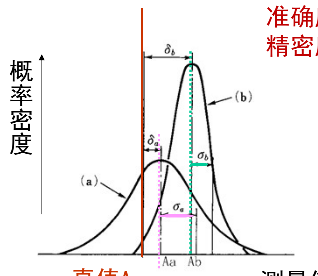
$|r(X_i, X_j)| = 0$ 完全不相关 没有直线关系 相互独立

测量的准确度与精密度

Accuracy and Precision

准确度：δ

精密度：σ

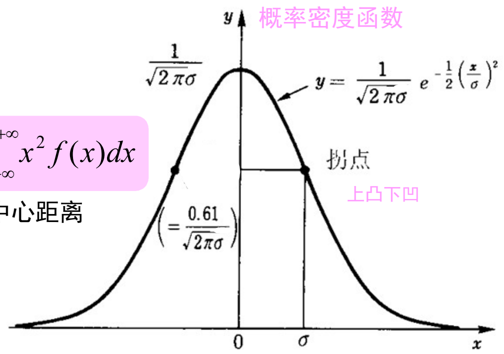


真值A_0　　测量值

准确度高 =》测量方法(a)

精密度高 =》测量方法(b)

随机误差的正态分布



$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx$$

二阶中心距离

随机误差的正态分布

$N(A,\sigma^2)$

$$y=f(M)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M-A}{\sigma}\right)^2}$$

归一化 $t=\frac{M-A}{\sigma}$

$N(0,1)$

$$y=f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

正态分布函数的特征值

$x=\pm\sigma$ ， $e^{-0.5}\approx 0.61$

$$P(-\infty<x<+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

$$p(x)=\int_{-\sigma}^{+\sigma}f(x)dx=0.6827$$

$$p(x)=\int_{-2\sigma}^{+2\sigma}f(x)dx=0.9545$$

$$p(x)=\int_{-3\sigma}^{+3\sigma}f(x)dx=0.9973$$

置信区间与置信概率

- 置信区间：随机变量取值的范围，用正态分布标准偏差的倍数即±zσ来表示，z为置信系数。
- 置信系数愈大，置信区间愈宽，置信概率愈大。
- 随机误差的分布范围愈大，测量精度愈低。
- 如有95%的置信概率时，其可靠性已经足够了，此时的置信区间是δ=±2σ，置信水平为5%。

$$p(x)=\int_{-2\sigma}^{+2\sigma}f(x)dx=0.9545$$

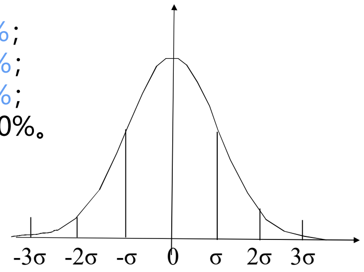
正态分布的置信概率的数值表

t or Z	0.00	0.50	**0.6745**	0.7979	**1.00**	1.96	**2.00**	**3.00**	∞
概率密度 f(t)	0.3989	0.3521	0.3177	0.2901	0.2420	0.0584	0.054	0.0044	0.00
置信概率 φ(z)	0.0000	0.3829	**0.5000**	0.5751	**0.6827**	0.9500	**0.9545**	**0.9973**	1.0000

填空题 4分 设置

测量值落在正态分布的±kσ之间的概率分别是：

k=1时， 概率为[填空1]%；
K=2时， 概率为[填空2]%；
K=3时， 概率为[填空3]%；
K= [填空4] 时，概率为50%。



正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

误差传递法则

间接检测量Y与互相独立的直接检测量 $X_1, X_2, \cdots$ 有关系式

$$Y = \phi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$X_1, X_2 \cdots$ 的标准偏差为 $\sigma_1, \sigma_2 \cdots$，求Y的标准偏差 σ_Y

$$\sigma_Y = \sqrt{(\frac{d\varphi}{dx_1})_0^2 \sigma_1^2 + (\frac{d\varphi}{dx_2})_0^2 \sigma_2^2 + \cdots + (\frac{d\varphi}{dx_n})_0^2 \sigma_n^2}$$

泰勒级数展开 $Y = Y_0 + (\frac{d\phi}{dx_1})_0 x_1 + (\frac{d\phi}{dx_2})_0 x_2 + \cdots + (\frac{d\phi}{dx_n})_0 x_n$

当 $Y = a_1 X_1 \pm a_2 X_2 \pm \cdots \pm a_n X_n + k$ 时，则有

$$\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + a_n^2 \sigma_n^2$$

单选题 1分 设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

启停秒表的标准偏差为0. 04秒。用此秒表测量时间时，由于启停原因引起的测量标准偏差约为：

- A 0.08秒
- B 0.06秒
- C 0.04秒
- D 0.02秒

提交

单选题 1分 设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

单次测量的标准偏差为σ，则n次测量平均值的标准偏差为：

A σ/n

B $n\sigma$

C $\sigma/(n-1)$

D $\sigma/\sqrt{n}$

提交

1. 测量平均值的正态分布

每个测量结果 M_i按正态分布 $N(A_0,\sigma^2)$ 时

误差传递法则

测量数据平均值 A 的正态分布则为 $N(A_0,\sigma^2/n)$

2. 测量真值与测量标准偏差的估计

真值A_0的无偏估计就是平均值A；

测量方差的无偏估计是 $\hat{\sigma}^2$；

实验标准偏差也称贝塞尔公式： $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(M_i-A)^2}$

测量数据平均值的实验标准偏差为 $\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

标准偏差的分析比较

总体标准偏差：偏离真值的程度 $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_0)^2}$

实验标准偏差：偏离平均值的程度 $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

测量结果平均值的标准偏差： $\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

↓

A类标准不确定度

测量不确定度的定义

- 1993年国际标准化组织，发布GUM
  “Guide to the expression of Uncertainty in Measurement”
- 国家计量技术规范JJF1059-1999
  《测量不确定度评定与表示》
- 表示测量结果的不可信程度（分散程度）、是与测量结果相关联的参数。
- 用测量平均值的标准偏差来表示，也可以用标准偏差的倍数或置信区间的半宽度
- 测量不确定度不反映测量结果与真值是否接近的程度。

测量不确定度的分类

1)**标准不确定度**（standard uncertainty ）

A类：由一系列的测量结果根据概率统计得到，U_A
B类：根据资料或假定的概率分布得到，U_B

2)**合成标准不确定度**(combined standard uncertainty)

$$u_C^2(Y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial X_i}\right)^2u^2(X_i)+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial X_j}\right)u(X_i)u(X_j)r(X_i,X_j)$$

3)**扩展不确定度**(expanded uncertainty)

$$U=ku_C \qquad X=x\pm U \quad (x-U\le X\le x+U)$$

置信概率为P的扩展不确定度 P=95%(k=2)或99%(k=3)，k为包含因子
相对标准不确定度 $X=x(1\pm U_r)$

测量不确定度的评定方法

相同条件下，对被测量X进行n次重复测量，得测量值Xi，求其平均值

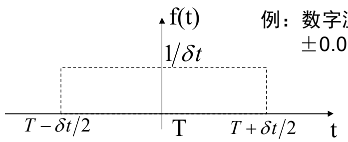
$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

A类标准不确定度

$$U_A=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

A类标准不确定度的自由度 n-1
（自由度是标准不确定度的不确定度）

均匀分布--测量结果的区间分布



例：数字温度计的分辨率 δt 为0.1℃，±0.05℃内均匀分布。

$$f(t)=\begin{cases}1/\delta t, & (T-\delta t/2\le t\le T+\delta t/2)\\ 0, & t<T-\delta t/2 \quad or \quad t>T+\delta t/2\end{cases}$$

$$\sigma^2=\int_{-a}^{+a}x^2\frac{1}{2a}dx=\frac{a^2}{3}$$

均匀分布的期望值和标准偏差，分别为T和 $\delta t/2\sqrt{3}$，

置信概率为100%时的包含因子则为 $\sqrt{3}$（k为1.73）。

结论是B类标准不确定度为 $\delta t/2\sqrt{3}=0.29\delta t$ 。

测量不确定度评定步骤

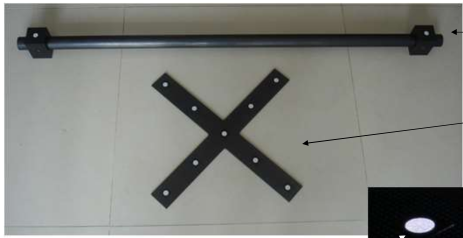
- 测量结果的不确定度一般包含若干分量，这些分量可按其数值的评定方法归并成Ａ、Ｂ两类，Ａ类是指对多次重复测量结果用统计方法计算的标准偏差，Ｂ类是指用其他方法估计的相当于标准偏差的近似值；
- 如果各分量是独立的，测量结果的合成标准不确定度是各分量平方和的正平方根；
- 根据需要可将合成标准不确定度乘以一个包含因子ｋ（取值范围2～3），作为扩展不确定度，使结果给出的范围能以高概率（95%以上）包含被测真值。

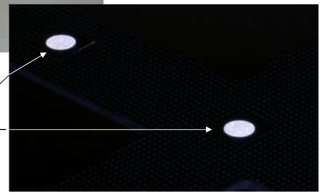
测量不确定度评定（案例）

- 标杆长度校准结果
  - 标记点中心距离实测值：1000.982mm
  - 测量结果测量扩展不确定度：U＝0.010mm，k=2

- 不确定度分量包括
  - 三坐标测量机的不确定度（ U＝0.004mm，k=2 ）
  - 标记点中心位置的不确定度（印刷、对准等）

带反光标记点的标尺





标准不确定度的自由度

$$\nu = n - 1$$

自由度是标准不确定度的不确定度

实验标准偏差：$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

$$\nu \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^{-2}$$

资料上给出的B类标准不确定度，

不可信度为25%时，意味着自由度相当于8；

不可信度为10%时，相应地自由度相当于50。

均匀分布的标准不确定度 ：是完全确定的， ν ≈∞

标准不确定度的自由度

$$\nu = n - 1$$

自由度是标准不确定度的不确定度

实验标准偏差：$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

$$\nu \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^{-2}$$

资料上给出的B类标准不确定度，

不可信度为25%时，意味着自由度相当于8；

不可信度为10%时，相应地自由度相当于50。

均匀分布的标准不确定度 ：是完全确定的， ν ≈∞

合成标准不确定度的有效自由度

$$\nu_{eff} = \frac{u_C^4(Y)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i^4 u^4(X_i)}{\nu_i}} \qquad C_i = \frac{\partial \varphi}{\partial X_i}$$

如果 ν eff很小，利用t分布，查表求包含因子k；

$$(y-\overline{Y})/U_C(y)$$

$\nu_{eff} > 10$ 时，采用选择k值的简便方法：
即取k=2，$U_{95} = 2U_C$

多选题 1分

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

休息5分钟
判断下列说法的对错：

A 测量不确定是测量数据平均值的标准偏差

B 测量准确度是平均值与真值之差

C 测量不确定度包含测量准确度

D 高精度测量是测量不确定度相对小的测量

提交

多传感器的数据融合-加权平均

- 用两个不同种类的传感器同时测量某一物理量x，例如激光测距和超声测距传感器，已知两种传感器给出的测量数据x_1和x_2分别服从方差为σ_1^2和σ_2^2的正态分布，如何综合考虑两个测量数据给出最终的测距结果？
- 提示：设加权平均的权重分别为w和1-w，求解使加权平均结果的不确定性最小的w。

$$\hat{x} = wx_1 + (1-w)x_2$$

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}x_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}x_2 \quad \left(= \frac{1/\sigma_1^2}{1/\sigma_1^2+1/\sigma_2^2}x_1 + \frac{1/\sigma_2^2}{1/\sigma_1^2+1/\sigma_2^2}x_2\right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

- 另外，加权平均的结果满足 $\hat{x} = \arg\min_x \left[\left(\frac{x_1-x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-x}{\sigma_2}\right)^2\right]$ 该距离最小式可以推广到任意n个传感器。

填空题 2分

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

上述加权平均的过程实际上是用 [填空1] 做权重，即方差小（精度高）的权重大，方差大（精度低）的权重小，并且加权平均后的方差比任何一次测量的方差都 [填空2] 。因此，通过加权平均，对被测量的估计的精度可以得到改善，不确定度降低。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

多传感器的数据融合-递推平均

- 用同一传感器对某一物理量X进行多次测量，依次地每增加一个测量数据更新一次整体测量结果Y，设传感器测量数据服从方差为σ^2的正态分布。如何用前一次更新后的结果和新增数据表达最新的测量结果？

$$\hat{Y}_1 = X_1, \quad \hat{\sigma}_1^2 = \sigma^2$$

$$\hat{Y}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2} = \hat{Y}_1 + \frac{1}{2}(X_2 - \hat{Y}_1), \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_1{}^2$$

$$\hat{Y}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \hat{Y}_2 + \frac{1}{3}(X_3 - \hat{Y}_2), \quad \hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{3}\sigma^2 = \frac{2}{3}\hat{\sigma}_2{}^2$$

$$\cdots$$

$$\hat{Y}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \underbrace{\hat{Y}_{n-1}}_{\text{上一步的估计}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{增益K}}\underbrace{(X_n - \hat{Y}_{n-1})}_{\text{新增信息}}, \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 = \underbrace{(1 - \frac{1}{n})}_{\text{1-K}}\hat{\sigma}_{n-1}{}^2$$

多传感器的数据融合-递推平均

接上页

$$\hat{Y}_n = \hat{Y}_{n-1} + \frac{1}{n}(X_n - \hat{Y}_{n-1}) \longleftarrow \text{递推平均}$$

$$= \frac{1}{n}X_n + (1 - \frac{1}{n})\hat{Y}_{n-1}$$

$$= \frac{1}{n}X_n + \frac{n-1}{n}\hat{Y}_{n-1} \longleftarrow \text{加权平均}$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 = (1 - \frac{1}{n})\hat{\sigma}_{n-1}{}^2 = \frac{n-1}{n}\hat{\sigma}_{n-1}{}^2 = \frac{n-1}{n}(\frac{1}{n-1}\sigma^2)$$

结论：上述递推平均的过程实际上是用 [填空1] 做权重，即测量次数多的权重大，测量次数少的权重小。递推过程中的Y的方差逐渐变小，可表示为 [填空2] 。

填空题 2分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

上述递推平均的过程实际上是用 [填空1] 做权重，即测量次数多的权重大，测量次数少的权重小。递推过程中的Y的方差逐渐变小，可表示为 [填空2] 。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

多传感器的数据融合-加权与递推

- 前述两个传感器的加权融合问题也可以用递推的方式来表达

$$\hat{x}_1 = x_1, \hat{\sigma}_1^2 = \sigma_1^2,$$

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_1^2 + \sigma_2^2}(x_2 - \hat{x}_1), \hat{\sigma}_2^2 = (1 - \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_1^2 + \sigma_2^2})\hat{\sigma}_1^2$$

$$= (1 - K)\hat{x}_1 + Kx_2$$

- K大则表示对新数据的依赖增大，对先前的估计依赖减小；K小则表示对新数据的依赖减小，对先前的估计依赖增大。
- K是使新估计的方差最小而得到的。
- Kalman滤波就是不断调整K，快速达到最佳估计的方差。简易的Kalman滤波即为一阶互补滤波。

思考题

2-1 准确度和测量不确定度的定义是什么？两者关系如何？ 提示$M \in A_0+b \pm U$

2-2 启停秒表的标准不确定度为0.04sec，问用此秒表测量时间时，由于启停原因引起的标准不确定度为多少？

2-3 正态分布变量以50%的概率落在区间 a 至 b 中，求该量的最佳估计值。设$\Delta=(b-a)/2$是区间的半宽，求标准不确定度U与Δ的关系。

2-4 某一测试报告给出L=(2.323±0.041)mm，置信概率为0.9545≈95%。求B类标准不确定度以及B类相对标准不确定度。

2-5 已知最大允许误差为Δ，并且测量值在M±Δ 范围内可视为均匀分布，如何计算B类标准不确定度？(含计算过程)

2-6 输出量为标称值150mm的杆的长度，所用测长仪在所使用的这一段长度所给出的系统偏差是-0.06mm，输入量系统偏差的不确定度可以忽略不计，该杆经过了n=20次独立重复测量，结果如下所示，求输出量的最佳估计值及其测量不确定度U(y)。（写出计算式及计算结果）

150.14，150.04，149.97，150.08，149.93，149.99，150.13，150.09，149.89，150.01

149.99，150.04，150.02，149.94，150.19，149.93，150.09，149.83，150.03，150.07mm

思考题

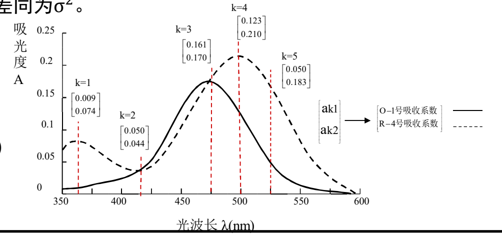
2-7 对同一被测物理量用不同种方法测量得到m组测量数据$(x_{1i},x_{2i},\cdots,x_{mi})$。已知其平均值和方差分别为$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_m^2)$时，求综合这m组数据的最佳方法。

2-8 上述2-7题中，如果各种检测方法的方差相同，但测量数据的个数不同，即已知测量平均值和测量数据个数分别为$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$(n_1,n_2,\cdots,n_m)$时，又该如何综合这些数据？

2-9 如图所示有两种物质的标准溶液的吸收光谱曲线，为测量这两种成分混合溶液的成分浓度x_1,x_2，需要至少采集两个波长点下的吸光度测量值y_1,y_2，问图中所示的五个波长点选择哪两个最合适？提示：吸光度测量方差同为σ^2。

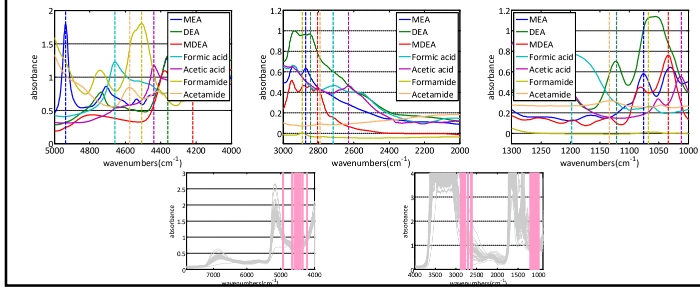
$$y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2$$

$$A = \log\left(\frac{I_{in}}{I_{out}}\right)$$

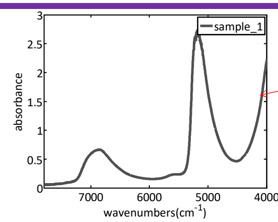


成分浓度定量分析方法（案例）

- PLS concentration analysis method for 7 organic solution components using NIR and IR spectra is proposed.
- Appropriate wavelength selection improves the performance of the calibration model.
- The accuracy of concentration estimation is 0.4%wt.



浓度和光谱的关系模型



光谱矩阵X

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{s1} & x_{s2} & \cdots & x_{sn} \end{bmatrix}$$

浓度矩阵Y

$$Y=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{s1} & y_{s1} & y_{s1} \end{bmatrix}$$

	A浓度	B浓度	C浓度
样本1 …	1.00%	1.08%	0.93%

建模： calibration model $\hat{B}$

建立X和Y之间的测量模型 $Y_{s\times m} = X_{s\times n}\hat{B}_{n\times m} + E$

当有新样本光谱出现时 $y_{new} = x_{new}\hat{B} + E$

44