# 线性代数小班辅导讲义 (Old Version)

小班辅导讲师 何昊天

## 目录

# 1 向量与线性空间

## 1.1 向量的基本运算

线性代数从研究 $\mathbb{R}^n$ 中的向量出发，我们可以将其看作是 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中向量的推广，先借助低维的情形对问题进行形象的分析，再抽象至高维的情形是一个很有效的理解方法。

$\mathbb{R}^n$ 中向量加法和数乘运算律如下：

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha + 0 = 0 + \alpha$

(4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$

(5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, 1\alpha = \alpha$

(6) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, k, l \in \mathbb{R}, k(l\alpha) = (kl)\alpha$

(7) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, k, l \in \mathbb{R}, (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

(8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}, k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中向量的点积定义为 $\alpha \cdot \beta = |\alpha||\beta|cos\theta$，其中 $\theta$ 是两个向量之间的夹角，我们知道向量的点积等价于各分量分别相乘之后再相加，如此可以来定义 $\mathbb{R}^n$ 中的点积，夹角这个概念也很自然地推广到了高维。

$\mathbb{R}^n$ 中向量点积运算律如下：

(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n, (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

(3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}, (k\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (k\beta) = k(\alpha \cdot \beta)$

(4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \geq 0$

有了向量的点积之后，我们可以定义向量 $\alpha$ 的模长为 $|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$，连接点积和模长的最重要的不等式是 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$|\alpha \cdot \beta|^2 \leq |\alpha| \cdot |\beta|$$

**Problem 1.1.1** 证明 *Cauchy-Schwarz* 不等式 $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2)(\sum_{k=1}^n b_k^2)$。

*Solution:* $\forall x \in \mathbb{R}$，都有 $\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0$，令 $A = \sum_{k=1}^n a_k^2, B = \sum_{k=1}^n a_k b_k, C = \sum_{k=1}^n n_k^2$，则 $Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$。

不妨设 $A > 0$，令 $x = -\frac{B}{A}$，则有 $B^2 \leq AC$，此即 Cauchy-Schwarz 不等式。

**Problem 1.1.2** 证明 *Minkowski* 不等式 $[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2]^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{n}b_k^2)^{\frac{1}{2}}$。

*Solution:* $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$，由 Cauchy-Schwarz 不等式 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k \le (\sum_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)^{\frac{1}{2}}$，所以：

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 + 2(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)^{\frac{1}{2}} = [(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{n}b_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2$$

此即 Minkowski 不等式。

## 1.2 向量组

向量组就是一组向量，实际上很多地方能够自然地得到向量组，比如矩阵的所有行和所有列各自都是一个向量组，因此研究向量组的一些性质是必要的，在向量组的各种性质中，最重要的就是向量组的线性关系：

(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，若存在 $m$ 个不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使得 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m = 0$，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关。

(2) 反之，若不存在这样的数使上式成立，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

向量组有如下重点问题：

(1) 能否用一个向量组去表示一个向量，特别的，向量组之间能否相互表示。

(2) 如何得到向量组的极大线性无关组。

(3) 如何计算与利用极大线性无关组的向量数，即向量组的秩。

**Problem 1.2.1** 判定下列两组向量是线性相关还是线性无关：

*(1)* $\alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

*(2)* $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

*Solution:* 将向量拼成矩阵，并用初等行变换化为阶梯型矩阵，根据矩阵是否满秩即可判断。

(1) $\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性相关的。

(2) $\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&0\\-1&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&4&0\\0&11&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的。

**Problem 1.2.2** 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{bmatrix}$，计算：

*(1)* 当 $a,b$ 取何值时，$\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示。

*(2)* 当 $a,b$ 取何值时，$\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一线性表示。

*Solution:* 令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，讨论方程组 $Ax=\beta$ 是否有解。

$$\begin{bmatrix}A&\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{bmatrix}$$

当 $a=-1,b\neq 0$ 时，方程组无解，$\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，当 $a\neq -1$ 时，方程组有唯一解，$\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一线性表示。

**Problem 1.2.3** 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\\2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix},\beta_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}4\\4\\1\\3\end{bmatrix}$，证明 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 可由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示，但 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 不能由 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 线性表示。

*Solution:* 令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3],B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$。

$\begin{bmatrix}A&B\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&0&0&1&1&1\\0&4&0&2&2&2\\0&0&4&1&-3&5\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，故 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 可由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示。

$\begin{bmatrix}B&A\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0&4&0&3&2\\0&2&-2&0&1&2\\0&0&0&2&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，故 $\alpha_1,\alpha_2$ 都不能由 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 线性表示。

**Problem 1.2.4** 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，证明 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 等价。

*Solution:* 令 $A = [\alpha_1, \alpha_2], B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$。

$$A^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由行等价矩阵行向量组等价性知，$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 等价。

**Problem 1.2.5** 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，满足 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 的秩为 2，计算 $a, b$ 的值。

*Solution:* 因为 $\alpha_3, \alpha_4$ 显然线性无关，故 $\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_1\}, \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_2\}$ 的秩均为 2。

$$\begin{bmatrix} \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 3-2a \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}\text{，所以 } a = 2\text{。}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_3, \alpha_4, \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & b-4 \\ 0 & 0 & b-5 \end{bmatrix}\text{，所以 } b = 5\text{。}$$

**Problem 1.2.6** 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 $V$ 中一组线性无关的向量，$\beta$ 是 $V$ 中的向量，证明：或者 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性无关，或者 $\beta$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合。

*Solution:* 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则存在不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_m, d$，使得 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m + d\beta = 0$。

如果 $d = 0$，则 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 不全为零且 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m = 0$，这与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关矛盾，所以 $d \neq 0$，从而 $\beta = -\frac{c_1}{d}\alpha_1 - \frac{c_2}{d}\alpha_2 - \cdots - \frac{c_m}{d}\alpha_m$，也即 $\beta$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合。

**Problem 1.2.7** 设向量 $\beta$ 可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示，但不能由其中任何一个真子向量组表示，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

*Solution:* 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则存在一个向量是其余向量的线性组合，不妨设 $\alpha_m$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 的线性组合，则 $\beta$ 也是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 的线性组合，与题设矛盾，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

**Problem 1.2.8** 设 $A$ 是 $n\times m$ 矩阵，$B$ 是 $m\times n$ 矩阵，若 $AB=I_n$，证明 $B$ 列向量线性无关。

*Solution:* 将 $B$ 按列分块：$B=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}$，则由 $AB=\begin{bmatrix}A\beta_1 & A\beta_2 & \cdots & A\beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & \cdots & e_n\end{bmatrix}=I_n$ 可得 $A\beta_i=e_i$。

设 $c_1\beta_1+c_2\beta_2+\cdots+c_n\beta_n=0$，等式两边左乘 $A$ 可得 $c_1A\beta_1+c_2A\beta_2+\cdots+c_nA\beta_n=c_1e_1+c_2e_2+\cdots+c_ne_n=0$，但 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 显然是线性无关的，所以只能 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，故 $B$ 的列向量是线性无关的。

**Problem 1.2.9** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 满足：

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3\\ \beta_2=3\alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3\\ \beta_3=\alpha_2+\alpha_3\end{cases}$$

判定 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 是否线性无关。

*Solution:* 计算可得矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 是满秩的，故 $A$ 可逆，所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关。

**Problem 1.2.10** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 满足：

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3\\ \beta_2=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3\\ \beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\end{cases}$$

判定 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 是否也是线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系。

*Solution:* 计算可得矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 的秩为 2，故 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关，线性相关的向量组必不可能是线性方程组的基础解系。

## 1.3 向量空间

线性空间由两个要素构成：向量的集合 $V$ 与数域 $\mathbb{F}$，其中向量之间可以定义“加法”，向量和数域中的数可以定义“数乘”，且这些运算要满足下面的公理：

(1) $\forall u,v\in V, u\oplus v=v\oplus u$

(2) $\forall u,v,w\in V,(u\oplus v)\oplus w=u\oplus(v\oplus w)$

(3) $\forall u\in V, u\oplus\hat{0}=\hat{0}\oplus u=u$

(4) $\forall u\in V, u\oplus\tilde{u}=\tilde{u}\oplus u=\hat{0}$

(5) $\forall u \in V, 1 \otimes u = u$

(6) $\forall u \in V, k, l \in \mathbb{F}, k \otimes (l \otimes u) = (kl) \otimes u$

(7) $\forall u \in V, k, l \in \mathbb{F}, (k+l) \otimes u = (k \otimes u) \oplus (l \otimes u)$

(8) $\forall u, v \in V, k \in \mathbb{F}, k \otimes (u \oplus v) = (k \otimes u) \oplus (k \otimes v)$

注意这里的 $\oplus$ 和 $\otimes$，未必是按常规理解的 $+$ 和 $\times$，而是可以随着我们的需求自己去定义的计算，同时 $\hat{0}$ 也未必是真正的 0，只要是能满足这些性质就足够了。

线性子空间：线性空间的封闭子集就是原空间的子空间，验证是子空间不需要验证所有公理，只需要验证封闭性即可，值得一提的是子空间一定是包含 $\hat{0}$ 元素的。

生成子空间：由一个向量组的所有线性组合构成的空间，其维数等于向量组的秩。

与矩阵 $A_{m\times n}$ 相关的有四个重要空间：

(1) 列空间：$\{y \in \mathbb{R}^m | y = Ax, \exists x \in \mathbb{R}^n\}$

(2) 行空间：$\left\{y \in \mathbb{R}^n | y = A^T x, \exists x \in \mathbb{R}^m\right\}$

(3) 零空间：$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$

(4) 左零空间：$\left\{x \in \mathbb{R}^m | A^T x = 0\right\}$

**Problem 1.3.1** 给定正整数 $n$，证明次数不超过 $n$ 的实系数多项式构成数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

*Solution:* 设 $f, g, h \in \mathbb{R}[x]_n, k, l \in \mathbb{R}$，依次验证八条公理：

(1) $f + g = g + f$

(2) $(f+g) + h = f + (g+h)$

(3) $f + 0 = 0 + f = f$

(4) $f + (-f) = (-f) + f = 0$

(5) $1 \cdot f = f$

(6) $(kl) \cdot f = k \cdot (l \cdot f)$

(7) $(k+l) \cdot f = k \cdot f + l \cdot f$

(8) $k \cdot (f+g) = k \cdot f + k \cdot g$

综上所述，次数不超过 $n$ 的实系数多项式构成数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

**Problem 1.3.2** 给定正实数集 $\mathbb{R}_+$，定义 $a, b \in \mathbb{R}_+$ 的加法结果为 $a \cdot b$，$a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}$ 的纯量乘法结果为 $a^b$，证明 $\mathbb{R}_+$ 构成数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

*Solution:* 设 $a, b, c \in \mathbb{R}_+, k, l \in \mathbb{R}$，依次验证八条公理：

(1) $ab = ba$

(2) $(ab)c = a(bc)$

(3) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(4) $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

(5) $a^1 = a$

(6) $a^{kl} = (a^l)^k$

(7) $a^{(k+l)} = a^k a^l$

(8) $(ab)^k = a^k b^k$

综上所述，$\mathbb{R}_+$ 构成数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

**Problem 1.3.3** 判断以下哪些是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间：

*(1)* 次数等于 $n$ 的实系数多项式全体，加法和数乘就是多项式的加法和数乘。

*(2)* 所有 $n$ 阶方阵，加法定义为 $A \oplus B = AB - BA$，数乘就是矩阵的数乘。

*(3)* 所有 $n$ 阶方阵，加法定义为 $A \oplus B = AB + BA$，数乘就是矩阵的数乘。

*(4)* 所有以 0 为极限的数列全体（即 $V = \{\{a_n\} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$），加法定义为数列对应项相加，数乘定义为数列每项乘上相应系数。

*(5)* 所有实数对 $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$，加法定义为 $(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2)$，数乘定义为 $k \otimes (a, b) = (ka, kb + \frac{k(k-1)}{2} a^2)$。

*Solution:*

(1) 不是线性空间，因为加法是不封闭的。

(2) 不是线性空间，因为加法不满足交换律。

(3) 不是线性空间，因为加法不满足结合律

(4) 可以验证是一个线性空间。

(5) 可以验证是一个线性空间。

# 2 矩阵

## 2.1 矩阵的基本运算

矩阵乘法的计算规则应该掌握，但应该避免直接计算矩阵乘法，事实上很少有必须计算 3 阶及以上矩阵乘法的题目。

矩阵的代数运算律：

(1) 结合律：$A(BC) = (AB)C$

(2) 分配律：$A(B+C) = AB + AC, (A+B)C = AC + BC$

(3) 交换律：一般来说 $AB \neq BA$，与所有矩阵相乘的交换的矩阵是纯量矩阵 $cI_n$

考察常用的代数公式：

(1) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

(2) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$

矩阵的转置相当于交换矩阵的行列，其满足下列运算法则：

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(kA)^T = kA^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

满足 $A^T = A$ 的矩阵称为对称矩阵，满足 $A^T = -A$ 的矩阵称为反对称矩阵。

**Problem 2.1.1** 计算 $\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}^n$。

*Solution:* 考虑这个矩阵的几何意义，直接得出答案即可。

$\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$ 和一个向量相乘等价于将这个向量逆时针旋转 $\alpha$，故乘上 $n$ 个该矩阵等价于将向量逆时针旋转 $n\alpha$，所以答案为 $\begin{bmatrix} cosn\alpha & sinn\alpha \\ -sinn\alpha & cosn\alpha \end{bmatrix}$。

**Problem 2.1.2** 若矩阵 $A, B$ 满足 $AB = BA$，证明 $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$。

*Solution:* 已知 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} A^i B^{2-i}$

假设 $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$ 成立，考虑 $(A+B)^{n+1}$。$(A+B)^{n+1} = (A+B)(A+B)^n = (A+B)\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i} = A\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i} + B\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^{i+1} B^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} A^i B^{n-i+1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i+1} = \sum_{i=0}^{n+1} (\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}) A^i B^{n-i+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} A^i B^{n+1-i}$。

由归纳法原理知，$(A+B)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}A^iB^{n-i}$。

**Problem 2.1.3** 计算下列矩阵的 $k$ 次幂：

(1) $\begin{bmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}1&2&4\\2&4&8\\3&6&12\end{bmatrix}$

*Solution:*

(1) 设 $J=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $A=I_3+aJ$，注意到 $J^3=0$ 且 $I_3,J$ 乘法可交换，由二项式定理得

$$A^k=(I_3+aJ)^k=I_3^k+C_k^1I_3^{k-1}(aJ)+C_k^2I_3^{k-2}(aJ)^2=I_3+kaJ+\frac{k(k-1)a^2}{2}J^2=\begin{bmatrix}1&ka&\frac{k(k-1)a^2}{2}\\0&1&ka\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(2) $A$ 的列向量成比例，设 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，则 $A=\alpha\beta^T$，所以 $A^k=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\cdots(\alpha\beta^T)=$

$$(\beta^T\alpha)^{k-1}\alpha\beta^T=17^{k-1}A=\begin{bmatrix}17^{k-1}&2\cdot17^{k-1}&4\cdot17^{k-1}\\2\cdot17^{k-1}&4\cdot17^{k-1}&8\cdot17^{k-1}\\3\cdot17^{k-1}&6\cdot17^{k-1}&12\cdot17^{k-1}\end{bmatrix}$$

**Problem 2.1.4** 设 $A$ 是 $n$ 阶上三角矩阵且主对角线上元素全为 0，证明 $A^n=0$。

*Solution:* 令 $E_{ij}$ 表示第 $i$ 行第 $j$ 列为 1、其余元素为 0 的矩阵，则 $A$ 可以写作 $\sum_{i<j}a_{ij}E_{ij}$。

当 $j\neq k$ 时，显然有 $E_{ij}E_{kl}=0$，所以在 $A^n$ 的展开式中非零项必须形如 $E_{ij_1}E_{j_1j_2}\cdots E_{j_{n-1}j_n}$，其中 $1\leq i<j_1<j_2<\cdots<j_{n-1}<j_n\leq n$，但显然这样的项不可能存在，所以 $A^n=0$。

**Problem 2.1.5** 设 $A,B$ 都是由非负实数构成的矩阵且 $AB$ 有一行全为零，证明或者 $A$ 有一行全为零，或者 $B$ 有一行全为零。

*Solution:* 设 $A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{n\times s}$，设 $C=AB=(c_{ij})_{m\times s}$ 的第 $i$ 行全为零，则对任意的 $j$ 有 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=0$。

设 $A$ 的第 $i$ 行不全为零，不妨设 $a_{ik}\neq0$，则 $b_{kj}=0$ 对所有的 $j$ 成立，即 $B$ 的第 $k$ 行为零。

**Problem 2.1.6** 证明 $n$ 阶对称矩阵 $A$ 是零矩阵的充要条件是对任意 $n$ 维向量 $\alpha$ 有 $\alpha^T A\alpha = 0$。

*Solution:* 必要性是显然的，只需证明充分性。设 $A = (a_{ij})$，令 $\alpha = e_i$，则 $\alpha^T A\alpha = a_{ii} = 0$，再令 $\alpha = e_i + e_j (i \neq j)$，则 $\alpha^T A\alpha = a_{ii} + a_{jj} + a_{ij} + a_{ji}$，已经证明了 $a_{ii} = a_{jj} = 0$，再由对称性知 $a_{ij} = a_{ji} = 0$，所以 $A$ 的所有元素都为 0，即 $A$ 是零矩阵。

**Problem 2.1.7** 证明 $n$ 阶矩阵 $A$ 是反对称矩阵的充要条件是对任意 $n$ 维向量 $\alpha$ 有 $\alpha^T A\alpha = 0$。

*Solution:* 如果 $A$ 是反对称矩阵，则 $(\alpha^T A\alpha)^T = \alpha^T A^T\alpha = -\alpha^T A\alpha$，但显然 $(\alpha^T A\alpha)^T = \alpha^T A\alpha$，所以 $\alpha^T A\alpha = 0$。

反之如果 $\alpha^T A\alpha = 0$ 对任意向量 $\alpha$ 成立，则也有 $\alpha^T A^T\alpha = 0$，故 $\alpha^T(A + A^T)\alpha = 0$，$A + A^T$ 总是对称矩阵，由上题结论即得 $A + A^T = 0$，所以 $A$ 是反对称矩阵。

**Problem 2.1.8** 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，求证 $A^k = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} (k = 1, 2, \cdots, n)$。

*Solution:* 将 $A$ 按列分块：$A = \begin{bmatrix} e_n & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} \end{bmatrix}$，注意到 $Ae_i$ 就是 $A$ 的第 $i$ 列，因此 $A^2 = \begin{bmatrix} Ae_n & Ae_1 & Ae_2 & \cdots & Ae_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{n-1} & e_n & e_1 & \cdots & e_{n-2} \end{bmatrix}$，依此类推即可得结论。

**Problem 2.1.9** 形如 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$ 的矩阵称为循环矩阵，证明同阶循环矩阵的乘积仍是循环矩阵。

*Solution:* 设 $J = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $J$ 也是循环矩阵，且题述循环矩阵可以表示为 $A = a_1 I_n + a_2 J + a_3 J^2 + \cdots + a_n J^{n-1}$，反之若一个矩阵可以表示成 $J$ 的多项式的形式，则该矩阵也是循环矩阵。

显然两个循环矩阵的乘积也是 $J$ 的多项式且 $J^n = I_n$，所以循环矩阵的乘积仍是循环矩阵。

## 2.2 矩阵的逆

矩阵的逆有多种等价定义形式，我们现在已经知道的有线性方程组是否有唯一解和是否存在一个矩阵与之相乘等于单位阵这两种判定可逆的方法，矩阵的逆满足下列运算法则：

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

矩阵求逆的方法：

(1) 二阶矩阵求逆公式：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$（需要记忆）

(2) 一般矩阵的求逆：Gauss-Jordan 消元法，事实上很少有必须计算 3 阶及以上矩阵的逆的题目。

矩阵的逆有如下两个性质：

(1) 可逆矩阵的乘积还是可逆矩阵。

(2) 任意矩阵和不可逆矩阵的乘积还是不可逆矩阵。

**Problem 2.2.1** 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$，且 $B = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A)$，计算 $(I_3 + B)^{-1}$。

*Solution:* $I_3+B = I_3+(I_3+A)^{-1}(I_3-A) = (I_3+A)^{-1}(I_3+A)+(I_3+A)^{-1}(I_3-A) = 2(I_3+A)^{-1}$，所以 $(I_3 + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I_3 + A)$。

**Problem 2.2.2** 证明矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{bmatrix} (n \geq 3)$ 不可逆。

*Solution:* 做如下观察：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

根据两个矩阵的形态，易知 $A$ 不可逆。

**Problem 2.2.3** 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2 - 3A + 2I_n = 0$，证明 $A, A + I_n$ 都是可逆矩阵，且若 $A \neq I_n$，则 $A - 2I_n$ 不是可逆矩阵。

*Solution:* 由题意知 $A(A - 3I_n) = -2I_n$，所以 $A$ 是可逆矩阵，又 $(A + I_n)(A - 4I_n) = -6I_n$，所以 $A + I_n$ 也是可逆矩阵。

另一方面，由题意知 $(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$，若 $A - 2I_n$ 可逆，则 $A - I_n = 0$，与题设矛盾，故 $A - 2I_n$ 不可逆。

**Problem 2.2.4** 设 $n$ 阶矩阵 $A, B$ 满足 $A+B=AB$，证明 $I_n-A$ 可逆且 $AB=BA$。

*Solution:* 因为 $(I_n-A)(I_n-B)=I_n-A-B+AB=I_n$，所以 $I_n-A$ 可逆。另一方面，$I_n-B$ 是 $I_n-A$ 的逆矩阵，所以 $(I_n-B)(I_n-A)=I_n-A-B-BA=I_n$，所以 $AB=A+B=BA$。

**Problem 2.2.5** 设 $n$ 阶矩阵 $A, B$ 满足 $I_n+AB$ 可逆，证明 $I_n+BA$ 也可逆。

*Solution:* 由 $A(I_n+BA)=(I_n+AB)A$ 得 $B(I_n+AB)^{-1}A(I_n+BA)=BA$，所以 $I_n=I_n+BA-BA=(I_n+BA)-B(I_n+AB)^{-1}A(I_n+BA)=(I_n+BA)(I_n-B(I_n+AB)^{-1}A)$，从而 $I_n+BA$ 可逆。

**Problem 2.2.6** 设 $n$ 阶可逆矩阵 $A, B$ 满足 $AB-I_n$ 可逆，证明 $A-B^{-1}, (A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆。

*Solution:* 由 $A-B^{-1}=(AB-I_n)B^{-1}$ 知 $A-B^{-1}$ 可逆。

$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}=B(AB-I_n)^{-1}-A^{-1}=A^{-1}(AB(AB-I_n)^{-1}-I_n)=A^{-1}(AB-(AB-I_n))(AB-I_n)^{-1}=A^{-1}(AB-I_n)^{-1}$，所以 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆。

**Problem 2.2.7** 设 $n$ 阶可逆矩阵 $A, B$ 满足 $A-B$ 可逆，证明 $B^{-1}-A^{-1}$ 可逆。

*Solution:* $I_n=A(A-B)^{-1}(A-B)A^{-1}=A(A-B)^{-1}-A(A-B)^{-1}BA^{-1}=(A-B+B)(A-B)^{-1}-(A-B+B)(A-B)^{-1}BA^{-1}=I_n+B(A-B)^{-1}-BA^{-1}-B(A-B)^{-1}BA^{-1}=(B+B(A-B)^{-1}B)(B^{-1}-A^{-1})$，所以 $B^{-1}-A^{-1}$ 可逆。

**Problem 2.2.8** 设 $A$ 是 $n$ 阶可逆矩阵,$\alpha, \beta$ 是 $n$ 维向量,满足 $1+\beta^TA^{-1}\alpha\neq 0$,证明 $(A+\alpha\beta^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}$。

*Solution:* 直接验证 $(A+\alpha\beta^T)(A^{-1}-\frac{1}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1})=I_n+\alpha\beta^TA^{-1}-\frac{1}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}\alpha\beta^TA^{-1}-\frac{1}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}\alpha(\beta^TA^{-1}\alpha)\beta^TA^{-1}=I_n+\alpha\beta^TA^{-1}-\alpha\beta^TA^{-1}=I_n$。

这个公式称作 Sherman-Morrison-Woodbury 公式。

**Problem 2.2.9** 设 $A$ 是 $n$ 阶可逆矩阵且 $A$ 的每行元素之和等于 $c$，求证 $c\neq 0$ 且 $A^{-1}$ 的每行元素之和等于 $\frac{1}{c}$。

*Solution:* 设 $\alpha=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T$，则 $A\alpha$ 的每个分量就表示 $A$ 对应行的行和，由题意知 $A\alpha=c\alpha$，若 $c=0$，由 $A$ 可逆得 $\alpha=0$，矛盾，故 $c\neq 0$。

在 $A\alpha=c\alpha$ 两边左乘 $\frac{1}{c}A^{-1}$ 得 $A^{-1}\alpha=\frac{1}{c}\alpha$，故 $A^{-1}$ 的每行元素之和等于 $\frac{1}{c}$。

## 2.3 矩阵的初等变换

以分块矩阵为例说明三类矩阵的初等变换：

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ QA+C & QB+D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$$

注意矩阵的左乘与右乘是不同的，同时要区分好行变换和列变换的意义，分块矩阵初等变换常用于证明题中帮助我们构造矩阵。

**Problem 2.3.1** 证明 $n$ 阶矩阵 $A$ 不可逆的充要条件是存在不为零的 $n$ 阶矩阵 $B$ 使得 $AB=0$。

*Solution:* 如果 $A$ 可逆，则由 $AB=0$ 知 $B=0$，故充分性得证。

设 $A$ 不可逆，则存在可逆矩阵 $P,Q$，使得 $PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，其中 $r<n$。取 $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$，则显然 $PAQC=0$，令 $B=QC$ 即可得证。

**Problem 2.3.2** 已知 $n$ 阶矩阵 $A$ 和 $m$ 阶矩阵 $D$ 都是可逆矩阵，求分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

*Solution:* 对下列分块矩阵进行初等变换消元：

$$\begin{bmatrix} A & B & I_m & 0 \\ 0 & D & 0 & I_n \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} A & 0 & I_m & -BD^{-1} \\ 0 & D & 0 & I_n \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} I_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_n & 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

所以原矩阵的逆为 $\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$。

## 2.4 矩阵的秩

我们将一个矩阵 $A$ 的列向量组或行向量组的秩定义为 $A$ 的秩，矩阵的秩在初等变换或分块初等变换下是不变的，$n$ 阶方阵 $A$ 可逆的充要条件是 $A$ 的秩等于 $n$。

由于初等变换不改变矩阵的秩，这是我们用来处理秩相关问题的首要方法，配合一些常用公式可以证明一系列的结论。

**Problem 2.4.1** 证明 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$。

*Solution:* 因为矩阵 $AB$ 的列向量可以看作是 $A$ 的列向量的线性组合，因此 $A$ 的列向量组可以线性表出 $AB$ 的列向量组，故 $r(AB)\le r(A)$，同理 $B$ 的行向量组可以线性表出 $AB$ 的行向量组，故 $r(AB)\le r(B)$，即 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$。

**Problem 2.4.2** 证明 $r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}) = r(A) + r(B)$。

*Solution:* 设 $A, B$ 的秩分别为 $r_A, r_B$，根据秩的定义，存在可逆矩阵 $P_A, Q_A, P_B, Q_B$，使得 $P_A A Q_A = \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_B B Q_B = \begin{bmatrix} I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

考虑分块初等变换 $\begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & P_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，显然等式右侧的矩阵秩为 $r(A) + r(B)$，因此有 $r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}) = r(A) + r(B)$。

**Problem 2.4.3** 证明 $r(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}) \geq r(A) + r(B), r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ D & B \end{bmatrix}) \geq r(A) + r(B)$。

*Solution:* 设 $A, B$ 的秩分别为 $r_A, r_B$，根据秩的定义，存在可逆矩阵 $P_A, Q_A, P_B, Q_B$，使得 $P_A A Q_A = \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_B B Q_B = \begin{bmatrix} I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

易知 $\begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & P_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \\ 0 & 0 & I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} \\ 0 & 0 & I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，显然等式右侧的矩阵秩不小于 $r(A) + r(B)$，因此有 $r(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}) \geq r(A) + r(B)$，同理有 $r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ D & B \end{bmatrix}) \geq r(A) + r(B)$。

**Problem 2.4.4** 证明 $r(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}) \leq r(A) + r(B)$。

*Solution:* 设 $A, B$ 的行数分别为 $n, m$，注意到 $\begin{bmatrix} I_n & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$，结合已有结论 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ 与 $r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}) = r(A) + r(B)$ 即可得 $r(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}) \leq r(A) + r(B)$。

**Problem 2.4.5** 证明 $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$。

*Solution:* 设 $A, B$ 的列数分别为 $n, m$，注意到 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ I_m \end{bmatrix} = A + B$，结合已有结论 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ 与 $r(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}) \leq r(A) + r(B)$ 即可得 $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$。

**Problem 2.4.6** 设 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵，$B$ 是 $n \times t$ 矩阵，证明 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$。

*Solution:* 考虑初等变换 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & AB \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_n & -B \\ A & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} B & I_n \\ A & 0 \end{bmatrix}$，结合已有结论有 $r(AB) + r(I_n) = r(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} B & I_n \\ A & 0 \end{bmatrix}) \geq r(A) + r(B)$，所以 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$。

**Problem 2.4.7** 证明 $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$。

*Solution:* 考虑初等变换 $\begin{bmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}$，结合已有结论有 $r(ABC) + r(B) = r(\begin{bmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}) \geq r(AB) + r(BC)$，所以 $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$。

**Problem 2.4.8** 设 $A^2 = 2A$，求证 $r(A) + r(A - 2I) = n$。

*Solution:* 由 $A^2 = 2A$ 得 $A(A - 2I) = 0$，则 $C(A - 2I) \subseteq N(A)$，所以 $r(A) + r(A - 2I) \leq n$。

又 $r(A) + r(A - 2I) \geq r(A - 2I - A) = r(-2I) = n$，所以 $r(A) + r(A - 2I) = n$。

**Problem 2.4.9** 设 $A$ 为对阵矩阵且 $A^T = A^{-1}$，求证 $r(A - I) + r(A + I) = n$。

*Solution:* 由 $A$ 为对阵矩阵且 $A^T = A^{-1}$ 得 $A^2 = I$，即 $(A+I)(A-I) = 0$，则 $C(A-I) \subseteq N(A+I)$，所以 $r(A + I) + r(A - I) \leq n$。

又 $r(A + I) + r(A - I) \geq r(A + I - (A - I)) = r(2I) = n$，所以 $r(A - I) + r(A + I) = n$。

# 3 线性方程组

设有 $n$ 个未知数 $m$ 个方程组成的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_1 \end{cases}$$

记方程组的系数矩阵为 $A$，增广矩阵为 $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$，则有如下结论：

(1) 若 $A$ 和 $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ 的秩都为 $n$，则方程组有且只有一组解。

(2) 若 $A$ 和 $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ 的秩相等但小于 $n$，则方程组有无穷多组解。

(3) 若 $A$ 和 $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ 的秩不相等，则方程组无解。

## 3.1 齐次线性方程组

设 $Ax = 0$ 是 $n$ 个未知数 $m$ 个方程组成的齐次线性方程组，设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是它的一组解向量，若这组解向量线性无关且方程的任意一个解向量都可以表示为它们的线性组合，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 称为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系。

若系数矩阵 $A$ 的秩为 $r < n$，则方程组有非零解且每个基础解系均由 $n - r$ 个向量组成。

**Problem 3.1.1** 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的两个不同基础解系并写出通解。

*Solution:* 记系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$。

分别取 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，可得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$，则基础解系为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，通解即为两向量的线性组合。

分别取 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，可得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，则基础解系为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，通解即为两向量的线性组合。

**Problem 3.1.2** 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

*Solution:* 设所求方程组为 $Ax=0$，记 $B=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}$，则 $AB=0 \Rightarrow B^TA^T=0$。

考虑方程组 $B^Tx=0$，求得基础解系为 $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix}$，即 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$，故所求方程组为 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\2x_1-3x_2+x_4=0\end{cases}$。

## 3.2 非齐次线性方程组

设 $Ax=b$ 是 $n$ 个未知数 $m$ 个方程组成的非齐次线性方程组，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，$A$ 和 $\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}$ 的秩相等且 $\eta$ 是非齐次线性方程组的一个特解，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的所有解可以表示为 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_{n-r}\alpha_{n-r}+\eta$。

**Problem 3.2.1** 求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$ 的一个解以及对应齐次线性方程组的基础解系。

*Solution:* $\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 5\\2 & 1 & 1 & 2 & 1\\5 & 3 & 2 & 2 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & -8\\0 & 1 & -1 & 0 & 13\\0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$，令 $x_3=0$ 得到方程一个特解 $\begin{bmatrix}-8\\13\\0\\2\end{bmatrix}$，令 $x_3=1$ 得基础解系 $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$。

**Problem 3.2.2** 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 $s$ 个解向量，令 $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s, k1,k2,\cdots,k_s\in\mathbb{R}$，证明：

*(i)* $\eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解的充要条件为 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。

*(ii)* $\eta$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解的充要条件为 $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$。

*Solution:*

(1) $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 是 $Ax=b$ 的解 $\Leftrightarrow A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s,k1,k2,\cdots,k_s)=b\Leftrightarrow(k_1+k_2+\cdots+k_s)b=b\Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_s=1$。

(2) $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 是 $Ax=0$ 的解 $\Leftrightarrow A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s,k1,k2,\cdots,k_s)=0\Leftrightarrow(k_1+k_2+\cdots+k_s)b=0\Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_s=0$。

**Problem 3.2.3** 设 $rank(A_{m\times 4}) = 3$，$\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解向量，且 $\eta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \eta_2 + \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$，求 $Ax = b$ 的通解。

*Solution:* 由 $r(A) = 3$ 得 $Ax = 0$ 的基础解系只含一个向量，令 $\xi = 2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$，则 $\xi$ 为方程 $Ax = 0$ 的基础解系，所以 $Ax = b$ 的通解为 $\{\eta_1 + k\xi | k \in \mathbb{R}\}$。

**Problem 3.2.4** 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$，其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$，求线性方程组 $Ax = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ 的通解。

*Solution:* 由题意知 $r(A) = 3$，故 $Ax = 0$ 的基础解系只有一个向量。由 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 得 $\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$，所以 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

显然 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是方程组 $Ax = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ 特解，所以通解为：$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} | k \in \mathbb{R} \right\}$。