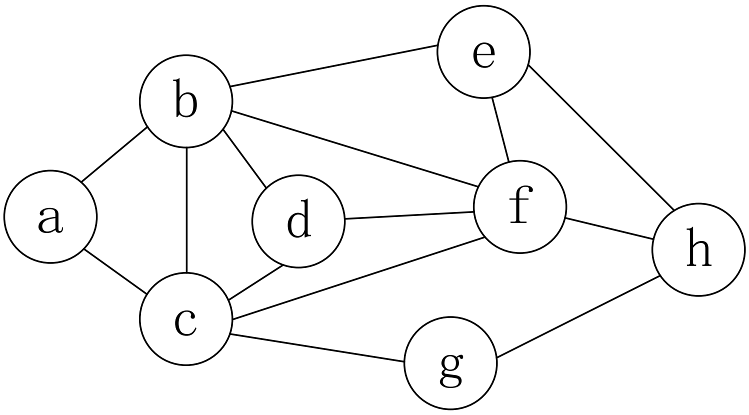
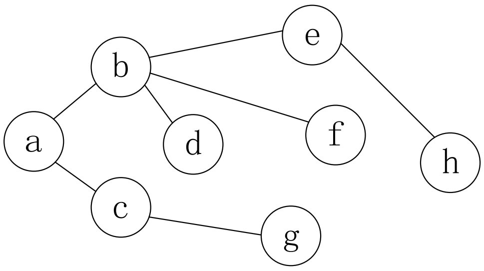
运筹学第十一次作业参考答案（20230517）

1. 以 a 为起点，分别用课件中的深探法和广探法求下图的支撑树。

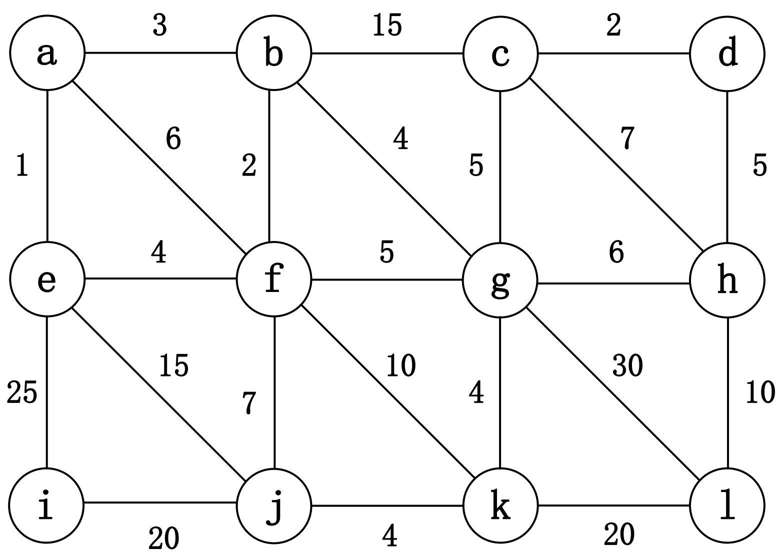


解：
深探法： a – b – e – h - g – c – d – f
广探法：



（b c 的 child 应分别有 1 个和 3 个）

2. 分别用 Kruskal 算法和 Dijkstra 算法求下图的最小支撑树。



解：

（简略过程）

Kruskal 算法：

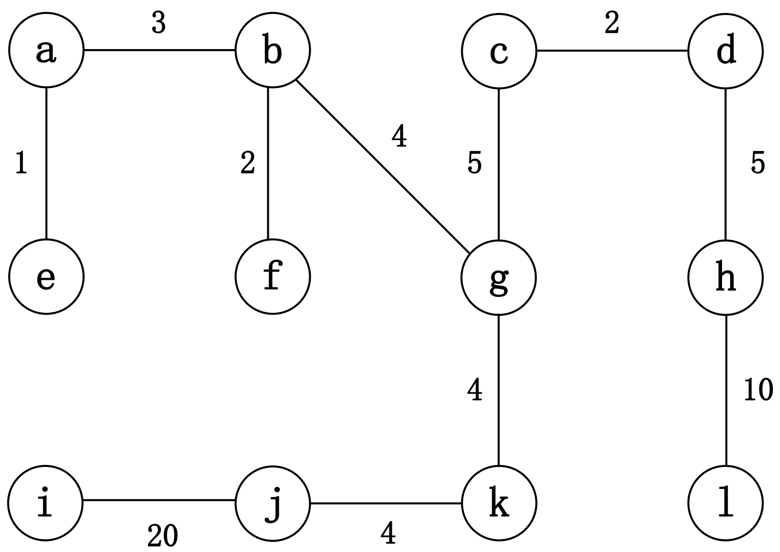
(a, e) = 1, (c, d) = 2, (b, f) = 2, (a, b) = 3, (e, f) = 4, (b, g) = 4 (j, k) = 4, (g, k) = 4, (f, g) = 5, (c, g) = 5, (d, h) = 5, (a, f) = 6, (g, h) = 6, (c, h) = 7, (f, j) = 7, (f, k) = 10, (h, l) = 10, (b, c) = 15, (e, j) = 15, (i, j) = 20, (k, l) = 20 (e, i) = 25, (g, l) = 30

从小到大顺序选择不构成回路的边形成支撑树

Dijkstra 算法：

加入边的顺序为：ae, ab, bf, bg, gk, kj, gc, cd, dh, hl, ij

最小支撑树为



3. 请判断如下命题的正确性，并说明理由：对于不等式约束优化问题，可行集的内点不可能是 KT 解。

解：

错误。

反例：

$$\min f(x) = x^2$$
$$s.t. x - 1 \leq 0$$

拉格朗日函数为

$$L = x^2 + v(x-1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + v = 0, v(x-1) = 0$$

$v = 0, x = 0$为 KT 解，且$x = 0$是内点，故原命题有误。

实际上，当不考虑约束条件的函数本身的最优解为可行集的内点时，约束不起作用，最优解为 KT 解。

4. 令$f(X)=X^TAX+b^TX$，$A\in R^{n\times n}$正定，$\vec{p}_i\in R^n, 1\le i\le m$互为$A$共轭向量，从任意$X_0\in R^n$出发，依次沿$\vec{p}_1,\vec{p}_2,\dots,\vec{p}_m$进行精确直线搜索，先后得到$X_1,X_2,\dots,X_m$。请问对哪些$i\in\{1,2,\dots,m\}$成立$f(X_i)\le f\left(\vec{p}_i+\sum_{0\le j\le i-1}(-1)^jX_j\right)$？

解：

共轭梯度法有如下性质：

$$f(X_i)=\min\{f(X)|X=X_0+(p_1,\dots,p_i)y, y\in R^k\}, \forall i\ge 1$$

当i为奇数时，取$y=(0,t_2,0,t_4,\dots,0,t_{i-1},1)^T$，即可得$f(X_i)\le f(X_0-X_1+\cdots+X_{i-1}+\vec{p}_i)=f\left(\vec{p}_i+\sum_{0\le j\le i-1}(-1)^jX_j\right)$，成立；

当i为偶数时，$f\left(\vec{p}_i+\sum_{0\le j\le i-1}(-1)^jX_j\right)=f(-t_1p_1-\cdots-t_{i-1}p_{i-1}+p_i)$，$X_0$被消去，不一定成立。