问题一

问题 1：答案：牌型分布为 4-3-3-3，4-4-3-2 和 5-4-2-2 的可能性别为$\dfrac{4C_{13}^4(C_{13}^3)^3}{C_{52}^{13}}$；

$\dfrac{4\times3\times C_{13}^3C_{13}^2(C_{13}^4)^2}{C_{52}^{13}}$最大；$\dfrac{4\times3\times C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^2C_{13}^2}{C_{52}^{13}}$最小.

问题 2：答案：$1-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}C_k^i\dfrac{(k-i)^N}{k^N}$.

问题 3：答案：可分辨：$1-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i\dfrac{(n-i)^m}{n^m}$

不可分辨：$\dfrac{C_{m-1}^{m-n}}{C_{n+m-1}^{m}}$

问题 4：一条绳子被任意割成两段，求较长的一段不小于较短的一段的 n 倍的概率。

答案：$\dfrac{2}{n+1}$

问题 5：将一段长棍随机地分成三段，问这三段能搭成一个三角形的概率。

答案：$\dfrac{1}{4}$

问题 6：证明较简单，自己补。

问题 7：设 $A_n=\begin{cases}B, & 若 n=even;\\ C, & 若 n=odd.\end{cases}$ 求集列$\{A_n\}$的上极限和下极限。

答案：$B\bigcup C$ 和 BC

问题 8：设 $A_{2n-1}=(0,\dfrac{1}{n}),A_{2n}=(0,n),n=1,2,\cdots,$ 试求集列$\{A_n\}$的上极限和下极限.

答案：$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(0,\infty)$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\phi$

问题 9：

n 个质点落入 N 个盒子中（$n<N$），在以下三种假设下求

（1） 在某指定的 n 个盒子中各落入一个质点的概率 p;

（2） 在某 n 个盒子中各落入一个质点的概率 q.

假设 A：（Bolzman 模型）盒子和盒子看成是有区别的，质点和质点也看成是有区别的；

答案：$p=\dfrac{n!}{N^n};q=\dfrac{C_N^n n!}{N^n}$

假设 B:（Bose-Einstein 模型）盒子之间看成是有区别的，质点之间看成是没有区别的，即不同的落法之间的区别仅在于落入各盒子中质点的数目，而不论落入那几个质点；

答案： $p=\dfrac{1}{C_{N+n-1}^{N-1}};q=\dfrac{C_N^n}{C_{N+n-1}^{N-1}}$

假设 C:（Fermi-Dirac 模型）盒子之间看成是有区别的，质点之间看成是没有区别，但每个盒子不得落入多于一个质点。

答案： $p=\dfrac{1}{C_N^n};q=1$

概率的连续性问题

问题 10：试证明以下结论。

结论： 设 P 为定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的满足 $P(\Omega)=1$ 且具有有限可加性的非负实值集合函数，则下列条件等价：

（1） P 具有可数可加性（即 P 为概率测度）；

（2） P 具有上连续性（见教材）；

（3） P 具有下连续性（见教材）；

（4） P 在 ϕ 处连续，即若 $A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，$A_n\supset A_{n+1}$ 且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\phi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=0$；

（5） P 具有连续性，即若 $A_n\in\mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)$.

证明：只证 $(3)\Leftrightarrow(5)$，其余的类似，留作大家思考。

$(3)\Rightarrow(5)$：（3）成立知（2）也成立，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，

记 $B_n=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$， $C_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$， 显然， $B_n\uparrow,C_n\downarrow$， 故由（2）、（3）得

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)，\quad P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n)=\lim_{n\to\infty}P(C_n)$$

由于 $B_n=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k\subset A_n$， 所以 $\underline{\lim}_{n\to\infty}P(A_n)\ge\underline{\lim}_{n\to\infty}P(B_n)=\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)=P(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)$；

同样 $C_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k\supset A_n$， 故 $\overline{\lim}_{n\to\infty}P(A_n)\le\overline{\lim}_{n\to\infty}P(C_n)=\lim\limits_{n\to\infty}P(C_n)=P(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)$.

从而

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)\le\underline{\lim}_{n\to\infty}P(A_n)\le\overline{\lim}_{n\to\infty}P(A_n)\le P(\lim_{n\to\infty}A_n)，\text{ 即 }\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)$$

$(5)\Rightarrow(3)$，由条件知$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$存在，故由（5）得

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)$$

证毕。

问题 11：证明如下结论

（1）$A\subset B\Leftrightarrow I_A(x)\le I_B(x),\ \forall x\in\Omega$；

（2）$I_{\bigcup\limits_i A_i}(x)=\max\limits_i I_{A_i}(x),\ \forall x\in\Omega$； $I_{\bigcap\limits_i A_i}(x)=\min\limits_i I_{A_i}(x),\ \forall x\in\Omega$；

（3）$I_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}I_{A_n}(x)$， $I_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}I_{A_n}(x)$.

证明：只证$I_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}I_{A_n}(x)$，其余简单。

$$I_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=I_{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k}(x)=\min_{n\ge1}I_{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k}(x)=\min_{n\ge1}\max_{k\ge n}I_{A_k}(x)(i.e.=\inf_{n\ge1}\sup_{k\ge n}I_{A_k}(x))$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}I_{A_n}(x)$$