运筹第九次作业

杨小诺 2018011495 自83

In [156]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sympy import symbols, diff
```

1、t的求解过程—牛顿迭代法进行精确搜索

$$t_{k+1} = t_k - \frac{\dot{f}(t_k)}{\ddot{f}(t_k)}$$

注意：
1、此处设定误差限：10^{-4}

In [157]:

```
def newtonMethod(x, y, D):
    t_cur = 0
    t = symbols('t', real = True)
    while True:
        # 分子
        num = float( diff((1 - (x + t * D[0]))**2 + 2 * (((x + t * D[0])**2 - (y + t * D[1]))**2),
        # 分母
        den = float( diff((1 - (x + t * D[0]))**2 + 2 * (((x + t * D[0])**2 - (y + t * D[1]))**2),
        t_new = t_cur - num / den
        if abs(t_new - t_cur) < 1e-10:
            break
        t_cur = t_new
    return t_cur
```

2、D的求解过程—共使用五种方法

共使用五种方法求解，具体公式见下方↓

若使用l_1，D为:

$$\begin{cases} sgn(-\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}) & |\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}| = ||\nabla f(X)||_\infty \\ 0 & else \end{cases}$$

若使用l_2，D为:

$$D = -\nabla f(X)$$

若使用l_∞，D为:

$$D = -sgn(\nabla f(X))$$

In [158]:

```
# 本题中，所有x_d都表示，对x求一阶导
# 本题中，所有y_d都表示，对y求一阶导
def find_D_L1(x_d, y_d):
    max_xy = max(abs(x_d), abs(y_d))
    if abs(x_d) == max_xy:
        D = [-np.sign(x_d), 0]
    else:
        D = [0, -np.sign(y_d)]
    return D

def find_D_L2(x_d, y_d):
    return [-x_d, -y_d]

def find_D_Li(x_d, y_d):
    D = [-np.sign(x_d), -np.sign(y_d)]
    return D
```

若使用$F-R$，D为:

$$\begin{aligned} D_k &= -\nabla f(X_k) + \alpha_{k-1} D_{k-1} \\ \alpha_k &= \frac{||\nabla f(X_{k+1})||^2}{||\nabla f(X_k)||^2} \\ D_1 &= -\nabla f(X_0) \end{aligned}$$

若使用$P-R$法，D为:

$$\begin{aligned} D_k &= -\nabla f(X_k) + \alpha_{k-1} D_{k-1} \\ \alpha_k &= \frac{\nabla f(X_k)^T \left(\nabla f(X_{k+1}) - \nabla f(X_k)\right)}{||\nabla f(X_k)||^2} \\ D_1 &= -\nabla f(X_0) \end{aligned}$$

注：以上两方法的区别主要在α的计算上，并且，k%2==0时，直接返回：

$$-\nabla f(X_k)$$

In [159]:

```
# 本题中，所有x_d都表示，对x求一阶导
# 本题中，所有y_d都表示，对y求一阶导
def find_D_FR(x_d, y_d, x_d_old, y_d_old, k):
    if k % 2 == 0:
        return [-x_d, -y_d]
    a = (x_d**2 + y_d**2) / (x_d_old**2 + y_d_old**2)
    D = [0, 0]
    D[0] = -x_d + a * (-x_d_old)
    D[1] = -y_d + a * (-y_d_old)#mdmdmdmdmdmdmdmdmdmdmdmdmdmdmdmd
    return D

def find_D_PR(x_d, y_d, x_d_old, y_d_old, k):
    if k % 2 == 0:
        return [-x_d, -y_d]
    a = (x_d * ( x_d - x_d_old) + y_d * (y_d - y_d_old)) / (y_d_old**2 + x_d_old**2)  # 替换a即可
    D = [0, 0]
    D[0] = -x_d + a * (-x_d_old)
    D[1] = -y_d + a * (-y_d_old)
    return D
```

3、绘图函数

共绘制两种图片：1、等高线图；2、函数值变化图

In [160]:

```
def plot_contour(x_list, y_list, func):
    x = np.arange(-0.1, 1.1, 0.01)
    y = np.arange(-0.1, 1.1, 0.01)
    X, Y = np.meshgrid(x, y)
    my_contour = plt.contour(X, Y, func(X, Y), 25)
    plt.plot(x_list, y_list, c = 'red')
    plt.clabel(my_contour, fontsize = 5)
    plt.show()

def plot_f(f_list):
    x = [i for i in range(len(f_list))]
    plt.title("函数值随迭代次数增加的变化曲线",fontproperties='SimHei')
    plt.xlabel('ep')
    plt.ylabel('f')
    plt.plot(x, f_list)
    plt.show()
```

4、算法实现

算法实现流程如下：

1、取初始点x=y=0，迭代次数cnt=0

2、如果误差满足要求$||\nabla f(X_k)||_2 < 10^{-4}$，停止计算，否则

3、由上方函数，搜索D

4、由上方函数，搜索t
5、由t和D，计算$X_{k+1} = X_k + t_k D_k$
6、返回2

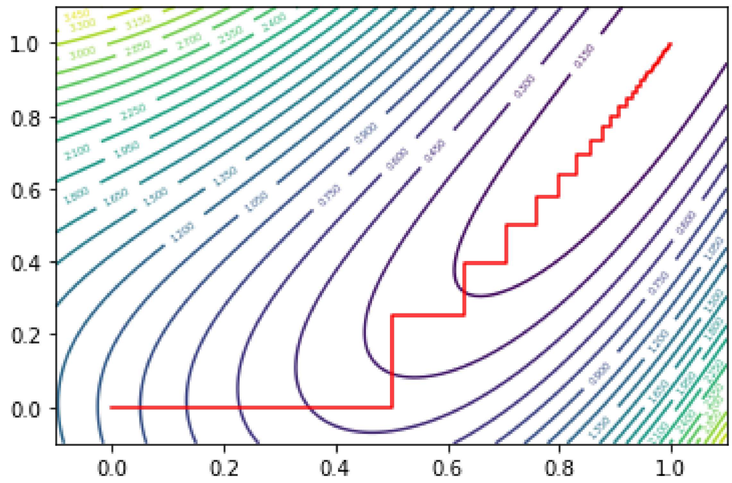
其他细节：
1、在函数中调用f(x,y)用以求某点处的函数值
2、算法实现过程中，需要保留上一轮迭代的一阶导数
3、调用上方函数画图，输出结果见下方

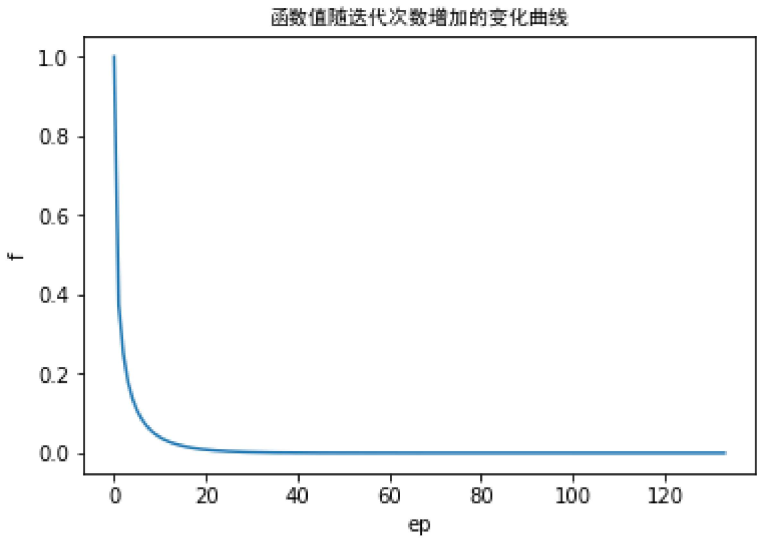
In [162]:

```
# 初始值
x0,y0 = 0,0

# 解决问题的函数
def my_func(method):
    # 求解f(x,y)
    def f(x, y):
        return (1-x)**2 + 2*(x**2-y)**2
    # 初值
    xx = x0
    yy = y0
    # 用来求导
    x, y = symbols('x y', real=True)
    xx_d = float((2 * (x - 1) + 8 * x * (x ** 2 - y)).subs({x:xx, y: yy}))
    yy_d = float((4 * (y - x ** 2)).subs({x:xx, y: yy}))
    # 用来保留一次数值，FR和PR要用
    xx_d_old = 0
    yy_d_old = 0

    # 列表存过程中的值
    x_list = []
    y_list = []
    f_list = []
    # 存初值
    x_list.append(xx)
    y_list.append(yy)
    f_list.append(f(xx,yy))
    # 用来计数
    cnt = 0
    while True:
        # 求D-----------------------------------------------------------------------------------
        if (method == 'L1'):
            D = find_D_L1(xx_d, yy_d)
        elif (method == 'L2'):
            D = find_D_L2(xx_d, yy_d)
        elif (method == 'Li'):
            D = find_D_Li(xx_d, yy_d)
        elif (method == 'FR'):
            D = find_D_FR(xx_d, yy_d, xx_d_old, yy_d_old, cnt)
        elif (method == 'PR'):
            D = find_D_PR(xx_d, yy_d, xx_d_old, yy_d_old, cnt)

        # 求t-----------------------------------------------------------------------------------
        t = newtonMethod(xx, yy, D)

        # 更新x,y-------------------------------------------------------------------------------
        xx = xx +t * D[0]
        yy = yy +  t * D[1]
        x_list.append(xx)
        y_list.append(yy)
        f_list.append(f(xx,yy))

        # 迭代一下导数值，主要是PR和FR需要使用
        xx_d_old = xx_d
        yy_d_old = yy_d
        xx_d = float((2 * (x - 1) + 8 * x * (x ** 2 - y)).subs({x:xx, y: yy}))
        yy_d = float((4 * (y - x ** 2)).subs({x:xx, y: yy}))

        cnt+=1
```

```
        if np.linalg.norm(np.array([xx_d, yy_d]))<1e-4:
            break

    print('最优解 x = %.4f, y = %.4f' % (xx, yy))
    print('最优函数值:' , f(xx,yy))
    print('迭代次数:  ',cnt)
    plot_contour(x_list, y_list, f)
    plot_f(f_list)

print("--------------------L1---------------------")
my_func('L1')
print("--------------------L2---------------------")
my_func('L2')
print("--------------------Li---------------------")
my_func('Li')
print("--------------------FR---------------------")
my_func('FR')
print("--------------------PR---------------------")
my_func('PR')
```

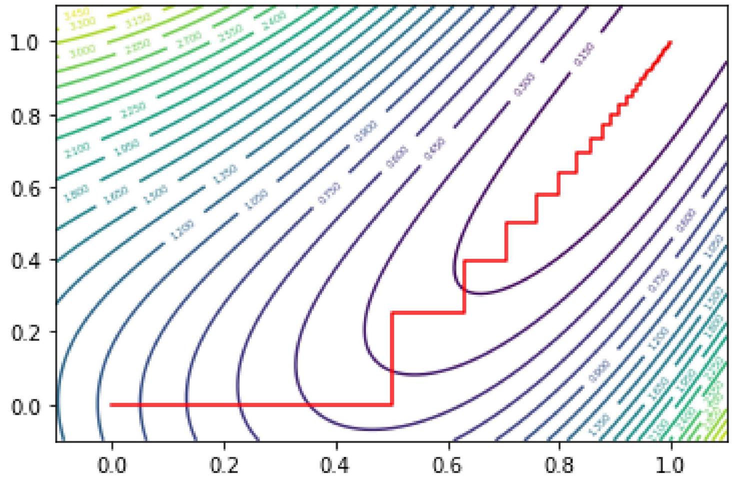
```
--------------------L1---------------------
最优解 x = 0.9999, y = 0.9998
最优函数值: 1.0161802119091436e-08
迭代次数:   133
```

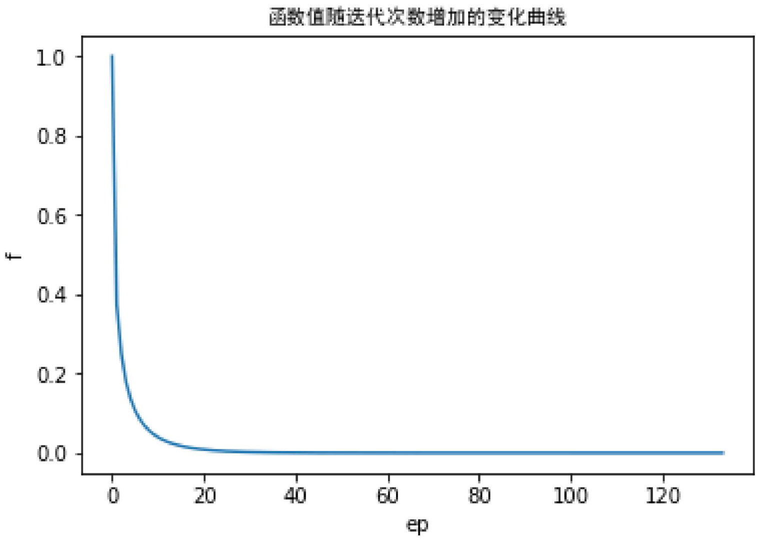





```
--------------------L2---------------------
最优解 x = 0.9999, y = 0.9998
```

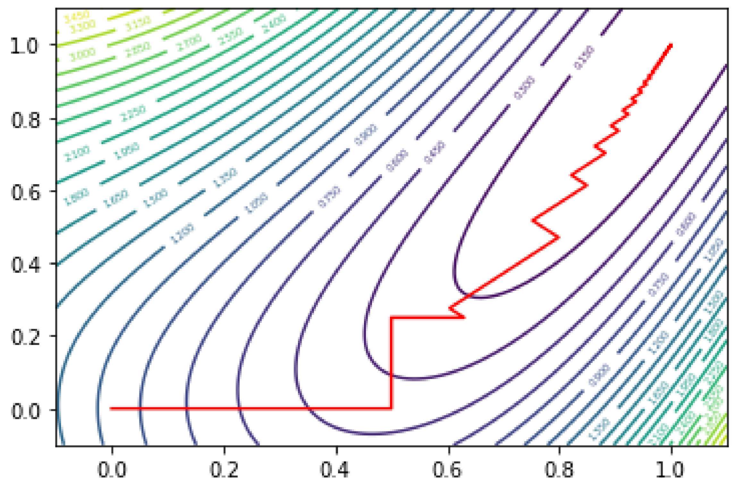
最优函数值: 1.0161806815684785e-08
迭代次数:　 133

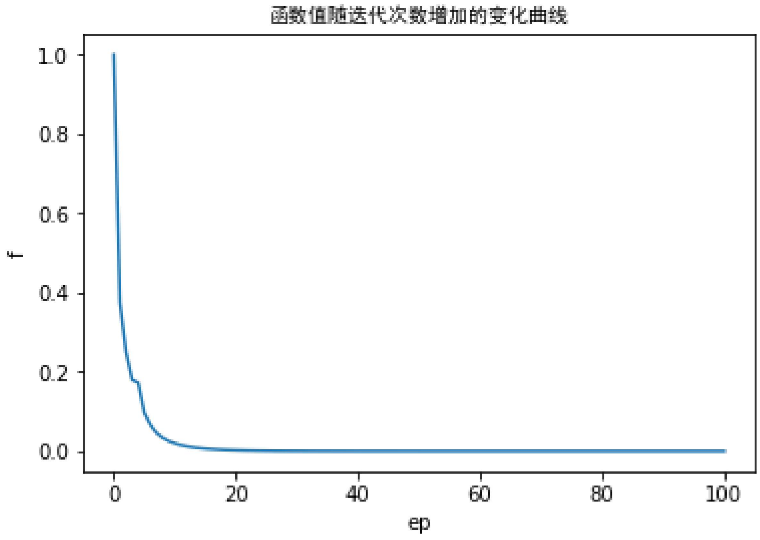




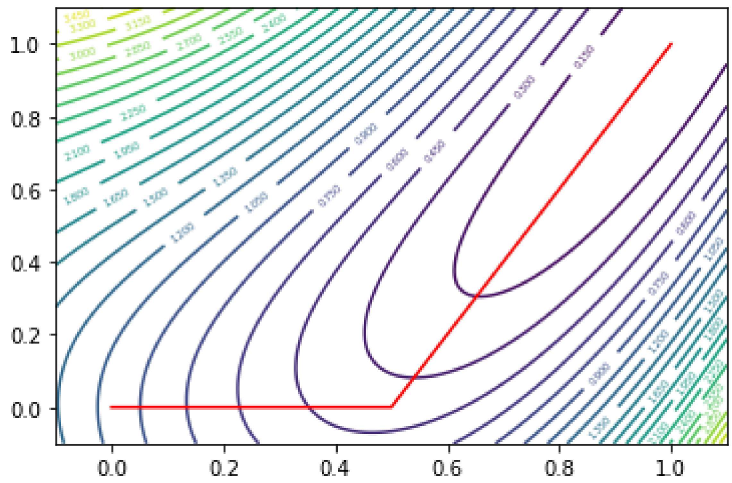
-------------------Li--------------------
最优解 x = 0.9999, y = 0.9998
最优函数值: 9.798738888334973e-09
迭代次数:　 100

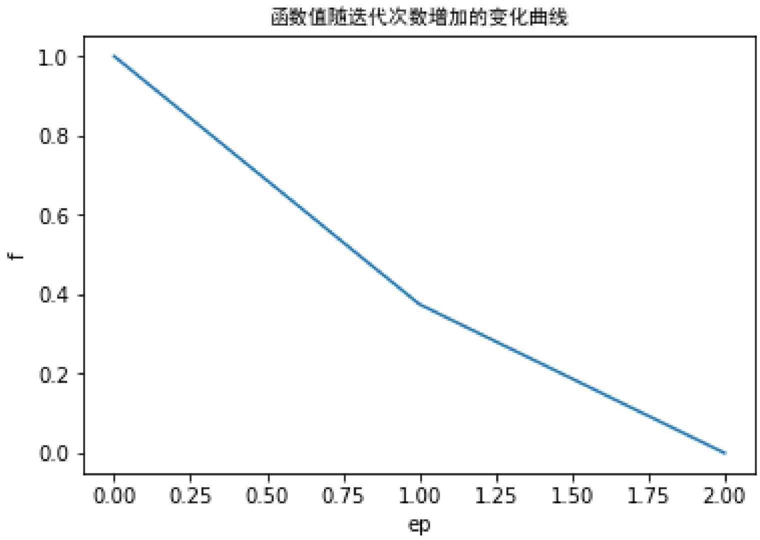
这是无穷范数下的结果←



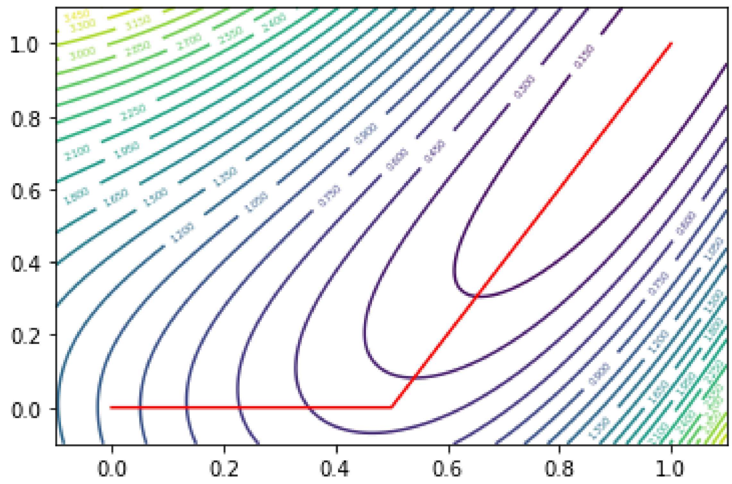


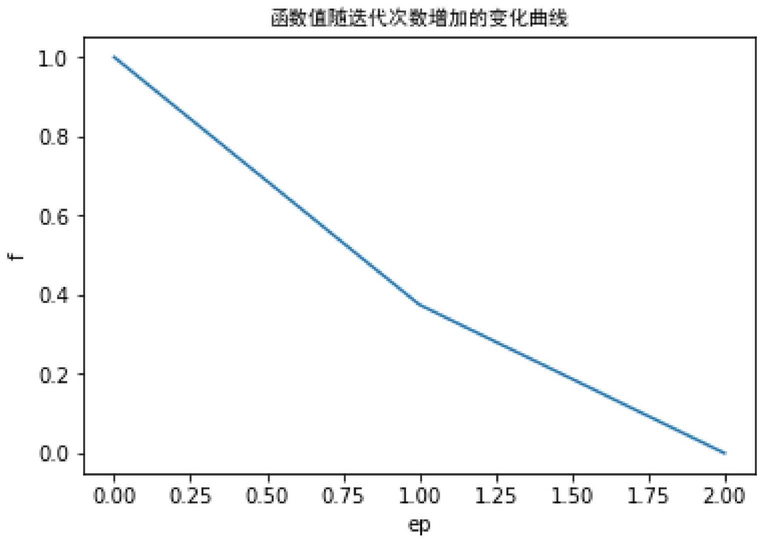

```
--------------------FR--------------------
最优解 x = 1.0000, y = 1.0000
最优函数值: 2.3882987916449888e-18
迭代次数:   2
```






```
--------------------PR--------------------
最优解 x = 1.0000, y = 1.0000
最优函数值: 8.59787564992196e-19
迭代次数:   2
```





5、结果比较与分析

结果说明:

1、上方结果包含：最优解、最优值、迭代次数、两幅图片

2、FR和PR的结果中，最优函数值已经小于10^{-15}，可与看做0，也就是这两种方法下求出的最优值为0

比较与分析： 从结果来看，FR和PR法明显更为准确，而且这两种方法的收敛速度更快。最速下降方法结果略差一些，未达到最优解，而且需要迭代的次数更多。
可见，本问题更适合 用共轭梯度法求解，省时省力结果更好。