1 解（1）采用数学归纳法。

首先计算当 n=2 时，X_1+X_2 的分布函数

$$\begin{aligned}F_{X_1+X_2}(t) &= P(X_1+X_2\le t)\\ &= \int_0^t P(X_1\le t-s)\lambda e^{-\lambda t}ds \quad \text{(更正：e 的指数上是-lambda s)}\\ &= 1-e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

求导得，相应的密度函数

$$f_{X_1+X_2}(t)=\lambda^2 t e^{-\lambda t}, t\ge 0$$

即：X_1+X_2 服从参数为(λ, 2)的伽马分布。

假设 $\sum_{i=1}^{n-1} X_i$ 服从参数为（λ, n-1）的伽马分布，于是，其密度函数为

$$f_{\sum_{i=1}^{n-1}X_i}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}$$

所以，

$$\begin{aligned}F_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t) &= P(\sum_{i=1}^{n}X_i\le t)\\ &= \int_0^t P(X_n\le t-s) f_{\sum_{i=1}^{n-1}X_i}(s)ds\\ &= \int_0^t [1-e^{-\lambda(t-s)}]\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-2}}{(n-2)!}ds\\ &= F_{\sum_{i=1}^{n-1}X_i}(t)-e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

求导，得

$$f_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

（2）

$$\begin{aligned}P(X_1<X_2) &= \int_0^\infty P(X_1<X_2\mid X_2=x)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx\\ &= \int_0^\infty P(X_1<x)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx\\ &= \int_0^\infty (1-e^{-\lambda_1 x})\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx\\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\end{aligned}$$

2 解 我们首先注意到

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

所以，X_1 服从参数 λ 的指数分布。因为

$$P(X_2 > t) = E(P(X_2 > t \mid X_1)) \quad \text{和}$$

$$\begin{aligned} & P(X_2 > t \mid X_1 = s) \\ & = P(\text{在(s, s+t]没有事件发生} \mid X_1 = s) \\ & = P(\text{在(s, s+t]没有事件发生}) \\ & = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

我们推得 X_2 同样是服从参数 λ 的指数分布，且与 X_1 相互独立，重复上面的过程，我们不难得到：

$X_n, n = 1, 2, \cdots$ 是相互独立的随机变量，且都服从参数 λ 的指数分布。

由第 1 题，知道 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从服从参数为（λ, n）的伽马分布。

注：解法详见林元烈老师《应用随机过程》定理 2.2.1，pp39。

3 解

$$\begin{aligned} & P(X_1 \le s \mid N(t) = 1) \\ & = \frac{P(X_1 \le s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} \\ & = \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\ & = \frac{(\lambda s) e^{-\lambda s} e^{-\lambda (t-s)}}{(\lambda t) e^{-\lambda t}} \\ & = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

推广的结论：

设{N（t），t≥0}为 poisson 过程，则在给定 N（t）=n 时事件相继发生时刻 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的条件密度函数为

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le t \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

证明：对 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = t$，取充分小的 h_i，使 $t_i + h_i < t_{i+1}, 1 \le i \le n$，则

$$P(t_i < S_i \le t_i + h_i, 1 \le i \le n \mid N(t) = n)$$

$$=\frac{P(N(t_i+h_i)-N(t_i)=1,1\le i\le n,N(t_{j+1})-N(t_j+h_j)=0,1\le j\le n)}{P(N(t)=n)}$$

$$=\frac{(\lambda h_1)e^{-\lambda h_1}\cdots(\lambda h_n)e^{-\lambda h_n}e^{-\lambda(t-h_1-h_2-\cdots-h_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}=\frac{n!}{t^n}h_1h_2\cdots h_n,$$

因此

$$\frac{P(t_i<S_i\le t_i+h_i,1\le i\le n\mid N(t)=n)}{h_1h_2\cdots h_n}=\frac{n!}{t^n}$$

总之

$$f(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\begin{cases}\frac{n!}{t^n},0<t_1<t_2<\ldots<t_n\le t\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

4 解

$$\begin{aligned}&P(N_1(t)=n,N_2(t)=m)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N_1(t)=n,N_2(t)=m\mid N(t)=k\}P(N(t)=k)\\&=P\{N_1(t)=n,N_2(t)=m\mid N(t)=n+m\}P(N(t)=n+m)\\&=P\{N_1(t)=n,N_2(t)=m\mid N(t)=n+m\}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}\end{aligned}$$

当给定 n+m 个事件发生时，由已知条件可知，$P\{N_1(t)=n,N_2(t)=m\mid N(t)=n+m\}$就是

$\binom{n+m}{n}p^n(1-p)^m$，所以

$$\begin{aligned}&P(N_1(t)=n,N_2(t)=m)\\&=\binom{n+m}{n}p^n(1-p)^me^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}\\&=e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}&P(N_1(t)=n)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N_1(t)=n,N_2(t)=m\}\\&=e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^k}{k!}(\text{利用刚证明的结论})\\&=e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}.\end{aligned}$$

相似地，得到

$$
\begin{aligned}
&P(N_2(t)=m)\\
&=e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}
\end{aligned}
$$

独立性得证。

5 解

利用第 1 题结论，不难看出

$$P(S_1^1<S_1^2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

接着，如果我们求 $P(S_2^1<S_1^2)$ 时，可以如此推理：为了 $S_2^1<S_1^2$，必须有 $S_1^1<S_1^2$，其概率是 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，再在此条件（即 $S_1^1<S_1^2$）下，S_2^1又小于S_1^2，利用 poisson 过程（指数分布）的无记忆性，这个条件概率也是 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，所以

$$P(S_2^1<S_1^2)=(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^2$$

事实上，我们会发现此题可以归结到第 4 题，每个事件以概率 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ 属于类型 1，以概率 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$，且事件间相互独立。

事件 $\{S_n^1<S_m^2\}$ 等价于前 n+m-1 个事件至少有 n 个属于类型 1，所以

$$P(S_n^1<S_m^2)=\sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n+m-1-k}$$

6 解

$$
\begin{aligned}
&E(X\mid\Lambda=\lambda)=\frac{1}{\lambda}\\
&EX=E(E(X\mid\Lambda))=\int_0^\infty E(X\mid\Lambda=\lambda)\,f_\Lambda(\lambda)d\lambda\\
&=\int_0^\infty\frac{1}{\lambda^3}e^{-\frac{\beta}{\lambda}}d\lambda\\
&=\frac{1}{\beta^2}
\end{aligned}
$$

7 解

$$Z = h(X,Y) = (3X+1) + (6Y-3X-1)\cdot I_{(X<Y)}$$

于是，

$$EZ = E(h(X,Y)) = \iint_{\mathrm{R}^2} h(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \frac{27}{4\lambda} + \frac{1}{2}$$

8 解

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\max(X_1,\ldots,X_n) \le y) \\ &= P(X_1 \le y,\ldots,X_n \le y) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_i(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(\min(X_1,\ldots,X_n) \le z) \\ &= 1 - P(\min(X_1,\ldots,X_n) > z) \\ &= 1 - P(X_1 > z,\ldots,X_n > z) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(z)) \end{aligned}$$