第五章　根轨迹法

5.1 导论

5.1.1 时域法

—直接分析方法

- 适合性能的直接评估
- 计算过于复杂
- 难以预测性能随参数变化的影响
- 费时

5.1.2 对分析与设计方法的要求

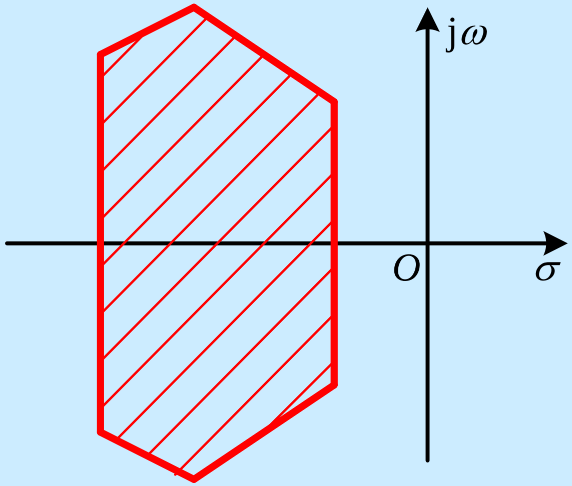
- 简单、容易实施
- 易于预测系统性能
- 有可能指明更佳的参数

5.1.3 主要的间接方法

(1) 代数稳定准则

♦ **Routh稳定性判据**

- 易于考察“绝对”稳定性
- 不合适评测相对稳定性
- 难以判断闭环极点是否在给定区域
- 对参数选择没有足够指导



s - **plane**

$s=\sigma+\mathrm{j}\,\omega$

$$0\le\zeta<1,\quad s_{1,2}=-\frac{\zeta}{T}\pm j\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}=-\omega_n\zeta\pm j\omega_d$$

(2) 频域响应法

- Nyquist plot, Bode diagrams, Nichols charts
- 易于预测闭环性能
- 可以评测相对稳定性
- 易于通过修改开环频域响应来改善闭环性能
- 难以直接根据开环参数预测闭环极点的位置

(3) 根轨迹法

♦ 什么是根轨迹root locus?

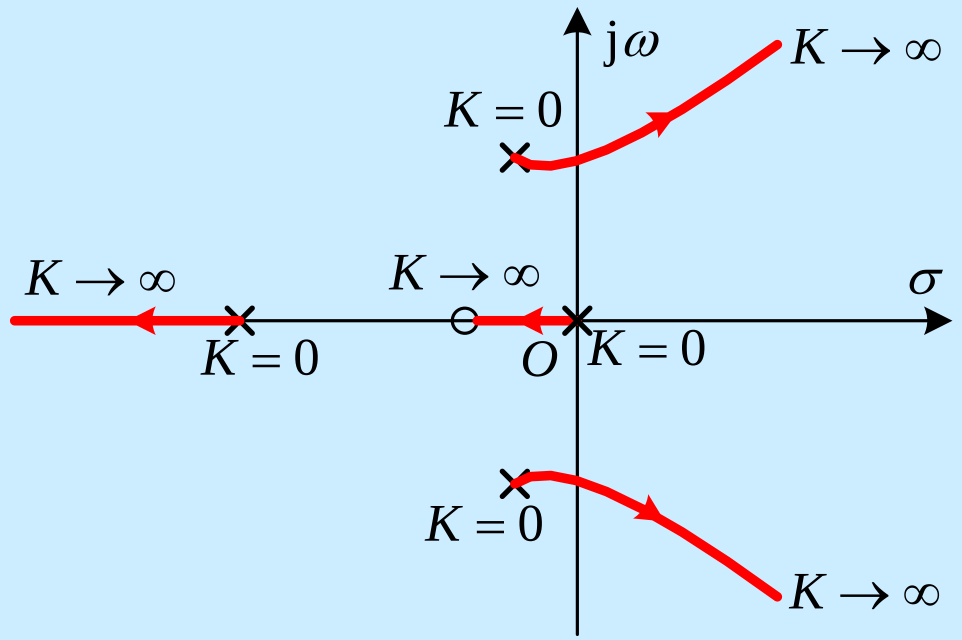
- 闭环特征方程的根，作为开环增益的函数而形成的图线

♦ 为什么要研究根轨迹?

- 易于预测闭环性能

♦ 可行性?

- Yes.
  W R Evans,
  1948, 1950

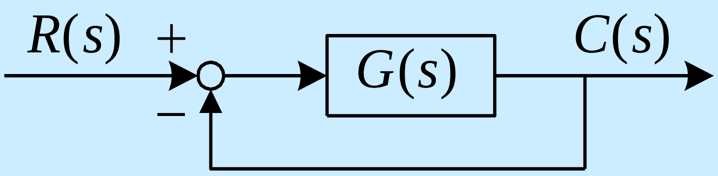


5.2 根轨迹作图

5.2.1 示例

例 5.2.1　给定如下开环传递函数，绘制闭环根轨迹

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$



Solution:

- **CL TF is** $G_{CL}(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{K}{s^2+s+K}$
- **CL 特征方程:** $s^2+s+K=0$
- K **变化 → CL 极点变化**
- **CL 极点:**

$$s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-4K}$$

$$s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4K}}{2}$$

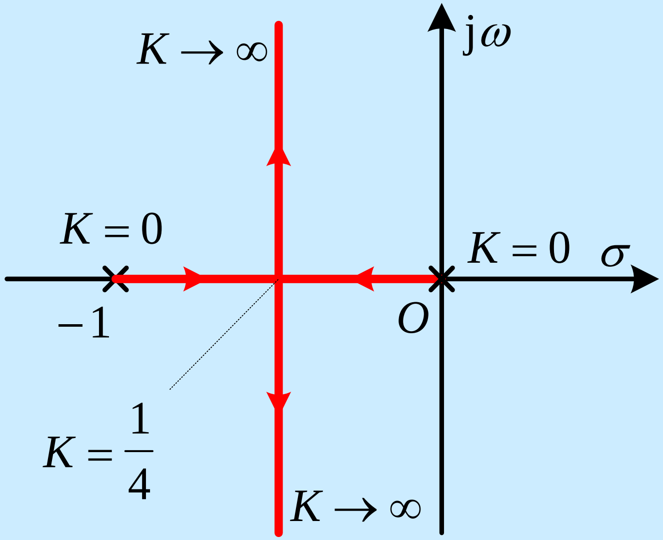
(i) $K\geq 0$

$K=0$ $\quad s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}=0,\ -1$ **(OL 极点)**

$K<\frac{1}{4}$ $\quad s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1-4K}}{2}$

$K=\frac{1}{4}$ $\quad s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm 0=-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$

$K>\frac{1}{4}$ $\quad s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{4K-1}}{2}$



- **CL系统的阻尼特性**

$K=0 \quad \to \quad 0.25 \quad \to \quad \infty$

过阻尼 **欠阻尼**

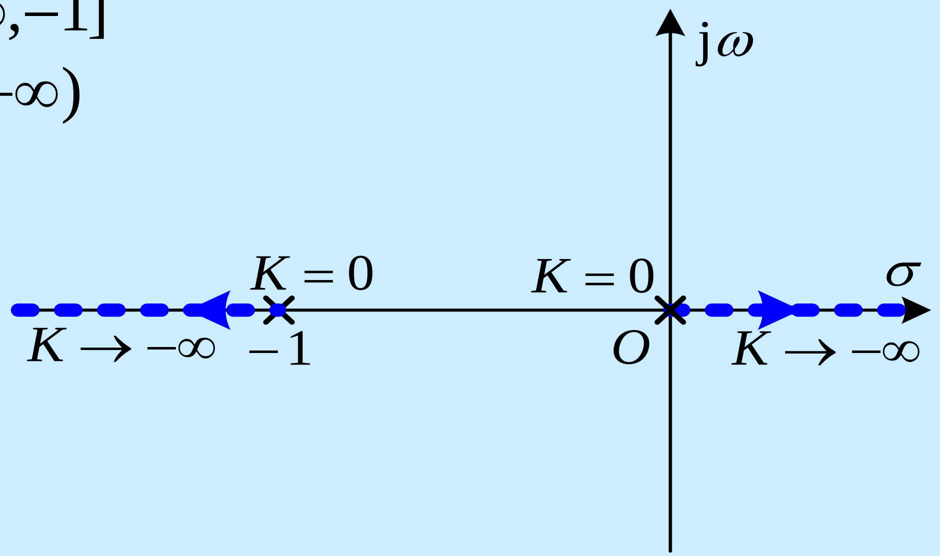
$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2}$$

(ii) $K \le 0$

$K = 0$ $\quad s_{1,2} = 0,\ -1$ **(OL 极点)**

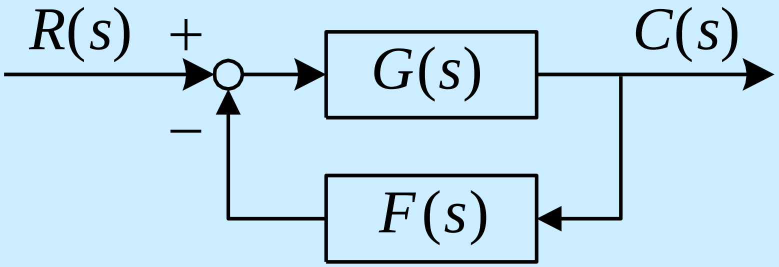
$K < 0$ $\quad s_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4|K|}}{2}$

$$s_1 \in (-\infty, -1]$$
$$s_2 \in [0, +\infty)$$



5.2.2 相角与幅值条件

♦ 约定:



- 系统结构
- $K \geq 0$

♦ 根轨迹条件

- 所有闭环极点满足 $G(s)F(s) = -1$

- 幅值条件:

$$|G(s)F(s)| = 1$$

- 相角条件:

$$\arg[G(s)F(s)] = \pm(2k+1)\pi \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

例 5.2.2　检验例5.2.1中根轨迹条件是否满足

Solution:

- 任取一点 $s_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,2$

(i) 相角条件检验

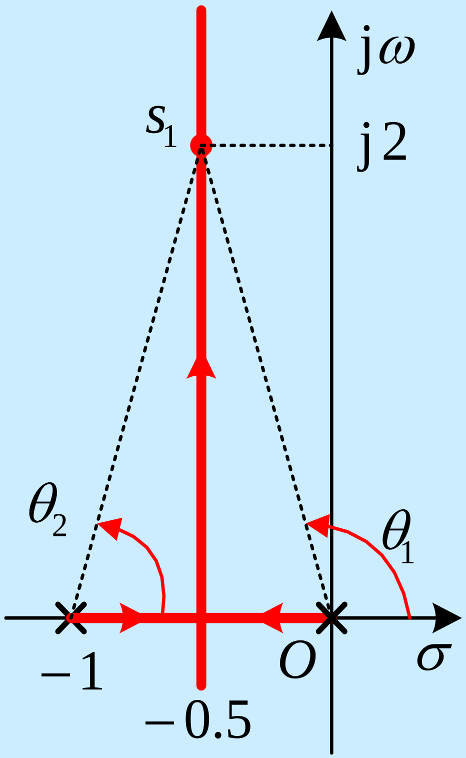
$$\arg G(s_1) = \arg \frac{1}{s_1(s_1+1)}$$

$$= -\arg(s_1) - \arg(s_1+1)$$

$$= -\theta_1 - \theta_2$$

$$= -\arctan\frac{2}{-0.5} - \arctan\frac{2}{0.5}$$

$$= -104.04^\circ - 75.96^\circ = -180^\circ$$



$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

(2) 幅值条件检验

$$\left|G(-0.5+\mathrm{j}\,2)\right|=\frac{K}{\left|-0.5+\mathrm{j}\,2\right|\left|-0.5+\mathrm{j}\,2+1\right|}=\frac{4K}{17}=1$$

i.e. $K=\frac{17}{4}$ $\Rightarrow$ **CL 极点** $s_1=-\frac{1}{2}\pm\mathrm{j}\,2$

Remarks:

- **所有闭环极点都满足相角条件，与K无关**

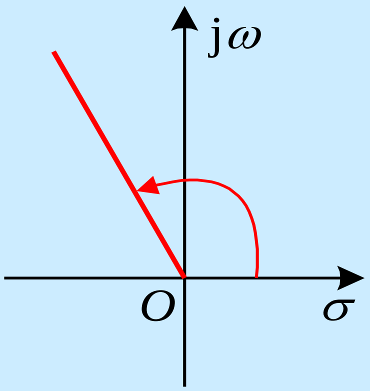
  $\Rightarrow$ **根轨迹可由相角条件唯一确定**

- **给定闭环极点，幅值条件可确定K**

5.3 根轨迹的特性及应用

♦ **约定:**

- **正实轴角度** — 0°
  逆时针 — **角度增加方向**



- **负反馈结构，** $K \geq 0$
- **仅计算上s半平面的闭环根轨迹**

♦ **闭环特征方程写成如下形式**

$$1+G(s)F(s) = 1+KW(s) = 1+K\frac{B(s)}{A(s)}$$

$$= 1+\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = 0$$

在s平面上标出开环零点和极点

5.3.1 根轨迹的特性

1. 出发 / 终止点，分支数

♦ **出发点:** $(K=0)$

$$|KW(s)|=1 \quad \Rightarrow \quad |W(s)|=\frac{1}{K} \qquad \lim_{K\to 0}\frac{1}{K}=\infty$$

$$\lim_{K\to 0}|W(s)|=\infty$$

- **等价于** $(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)=0$
- **所有开环极点都是出发点**

♦ **终止点:** $(K = \infty)$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} = 0 \qquad \lim_{K\to\infty} |W(s)| = 0$$

• **等价于**

$$\begin{cases} (s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m) = 0 \\ s \to \infty \qquad \text{if} \quad n > m \end{cases}$$

• **所有开环零点(有限)都是终止点**

• **如果 $n > m$, 存在$n-m$个无限终止点**

♦ **分支数**

• n **个分支** $\leftarrow n$ **个出发点**

其中， m **支趋于**m **个有限零点**

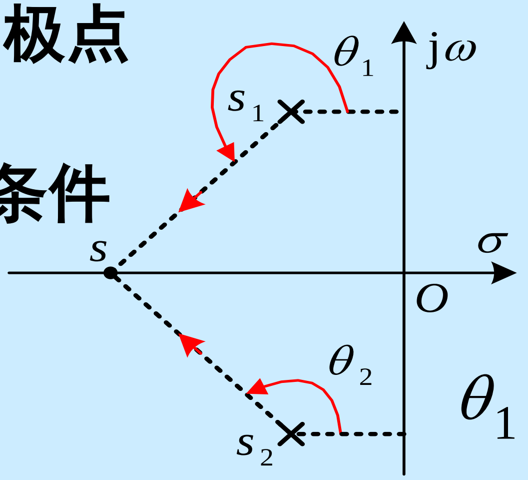
$n-m$ **支趋于无穷远**

Remarks: what if $n < m$?

2. 实轴上的根轨迹

♦ 仅仅取决于实轴上的开环零极点

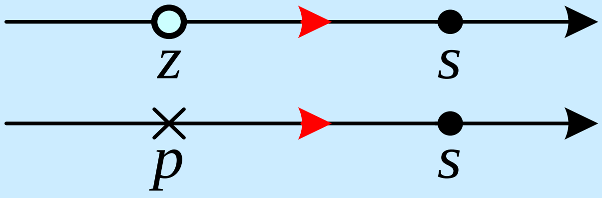
• 共轭开环零极点不影响相角条件



$$\theta_1 + \theta_2 = 360°$$

♦ 根轨迹右侧的实零极点总数必须是奇数

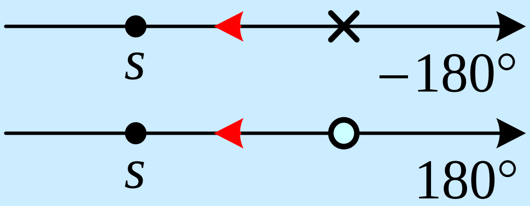
• 零极点位于测试点左侧



Angle = $0°$

测试点不满足相角条件

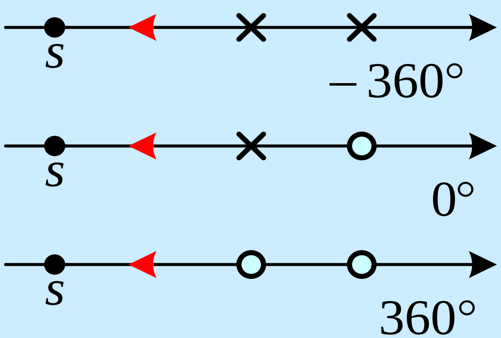
- 零极点位于测试点右侧



Angle = $180°$ **or** $-180°$

测试点满足相角条件

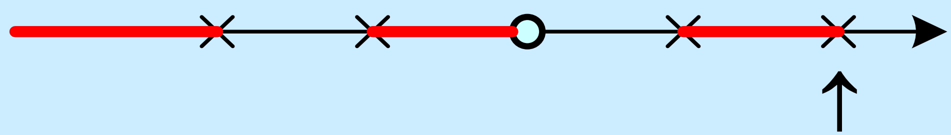
- 测试点右侧由2k个零极点



Angle = $\pm\, 180° \times 2k$

测试点不满足相角条件

♦ 绘制实轴上的根轨迹



最右侧的极点或零点

3. 根轨迹的渐近线 $s \to \infty$

♦ 相角的渐近线

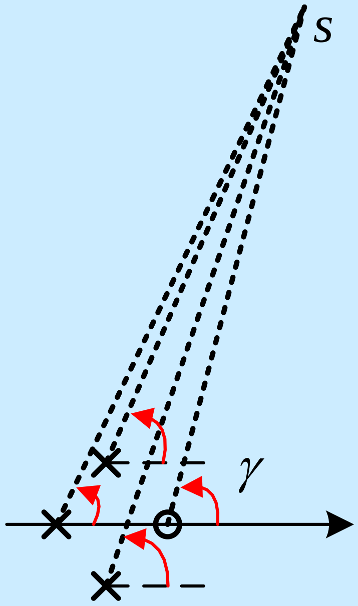
- 当$s \to \infty$, 所有相角相同，记作 γ

$$\arg[G(s)F(s)]\Big|_{s\to\infty} = (m-n)\gamma$$

- 由于 $\arg[G(s)F(s)] = \pm(2k+1)\pi$

  从而

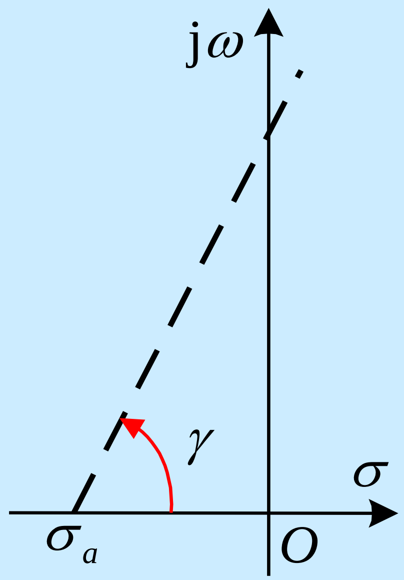
$$\gamma = \frac{\mp(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$



- $n-m$ 支不同的渐近线
- 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{-(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k = 0, 1, \cdots, n-m-1$$

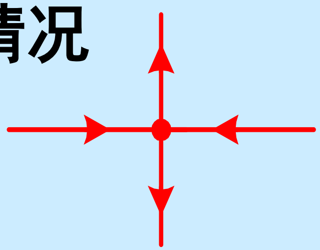
♦ 渐近线与实轴的交点



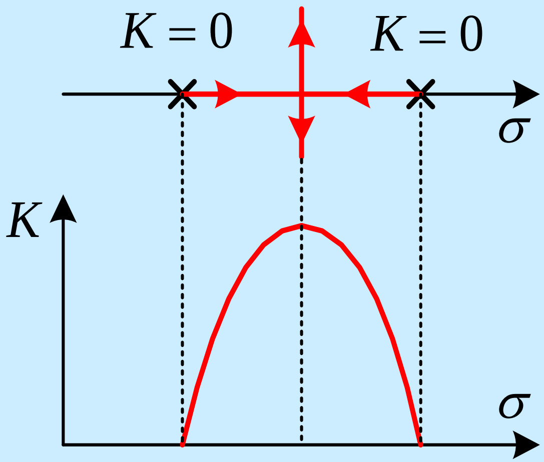
$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{n} z_i}{n-m}$$

4. 分离和会合点

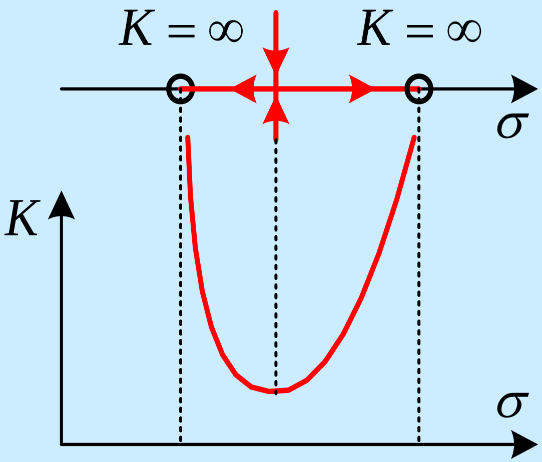
- 分离和会合点等价于多重闭环极点的情况



◆ 实轴上的分离和会合点



K 在会合点值最大



K 在分离点值最小

♦ **计算**

- **CL极点满足** $f(s)=A(s)+KB(s)=0$ **(1)**
- **多重CL极点(至少)满足**

$$\frac{\mathrm{d}f(s)}{\mathrm{d}s}=A'(s)+KB'(s)=0 \qquad K=-\frac{A'(s)}{B'(s)} \qquad \textbf{(2)}$$

- **将式(2)代入式(1)得**

$$A(s)-\frac{A'(s)}{B'(s)}B(s)=0$$

i.e $A(s)B'(s)-A'(s)B(s)=0$ **(3)**

- **由于** $K=-\dfrac{A(s)}{B(s)}$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=\frac{A(s)B'(s)-A'(s)B(s)}{B^2(s)} \qquad \textbf{(4)}$$

- 比较式(3)和(4)得到必要条件:

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=0 \qquad (5)$$

说明:

(i) 分离和会合点必须满足对应的$K>0$

(ii) 可能存在多个分离和会合点

(iii) 分离和会合点不一定在实轴上

例 5.3.1　给定 $G(s)F(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$

确定分离和会合点

Solution:

- **特征方程如下**

$$K=-s(s+1)(s+2)=-s^3-3s^2-2s$$

- $\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=-3s^2-6s-2=0$　　$s=-0.423\,,\,-1.577$
- **对于**$s=-0.423$

$$K=-s(s+1)(s+2)\big|_{s=-0.423}=0.385>0$$

- **对于**$s=-1.577$

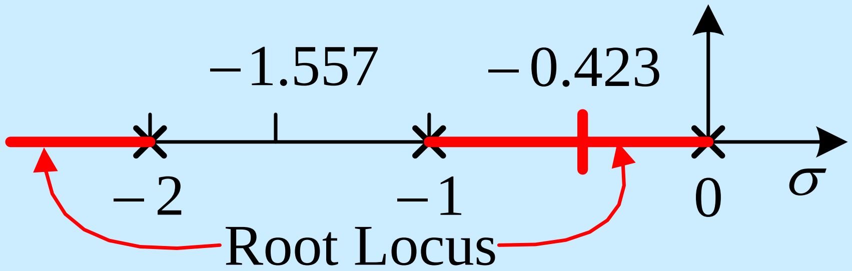
$$K=-s(s+1)(s+2)\big|_{s=-1.577}=-0.385<0$$

- **因此，**$s = -0.423$是会合点

说明:

(i) 很容易发现–1.557不在根轨迹上

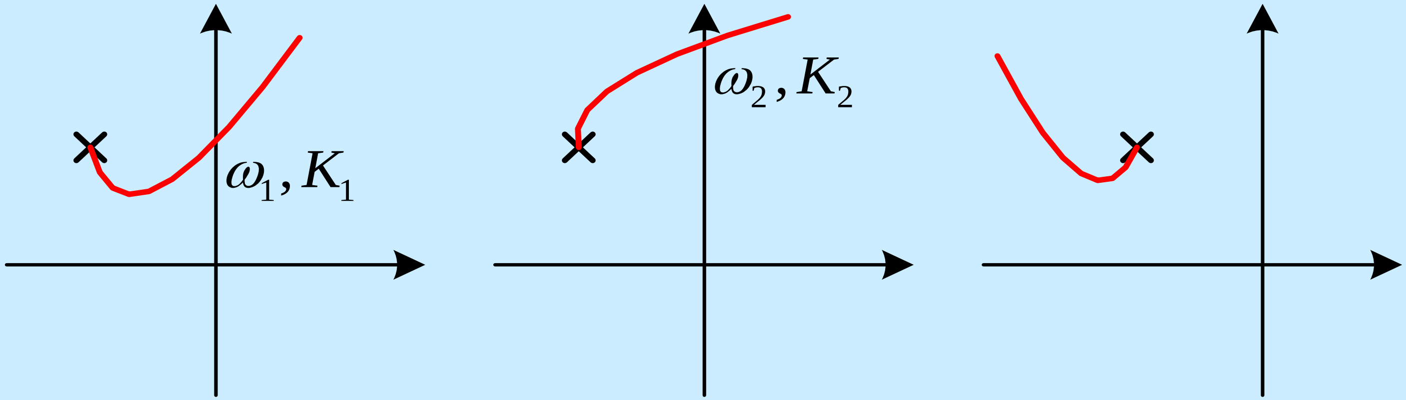
⇒ **不是分离或会合点**



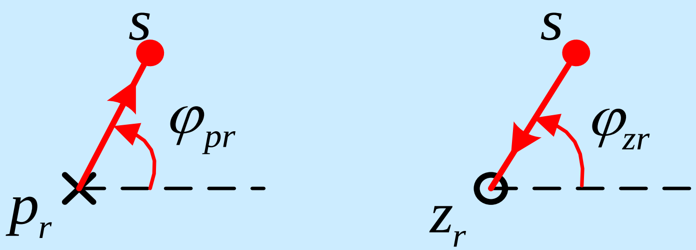
(ii) 当$B(s) = 1$**, 必要条件简化为** $A'(s) = 0$

5. 极点的出发角和零点的入射角

- 这些角度对绘制根轨迹很重要

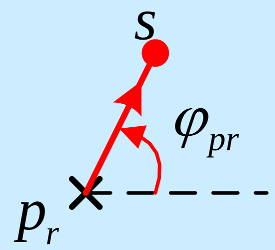


- 采用零点或极点附近的一个测试点计算相角条件



♦ **极点 p_r 的出发角**

- **测试点必须满足**



$$\arg G(s)F(s)=\sum_{i=1}^{m}\arg(p_r-z_i)-\varphi_{pr}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n}\arg(p_r-p_j)=\pm(2k+1)\pi$$

$$\varphi_{pr}=\pm(2k+1)\pi-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n}\arg(p_r-p_j)+\sum_{i=1}^{m}\arg(p_r-z_i)$$

例 5.3.2 确定极点的出发角

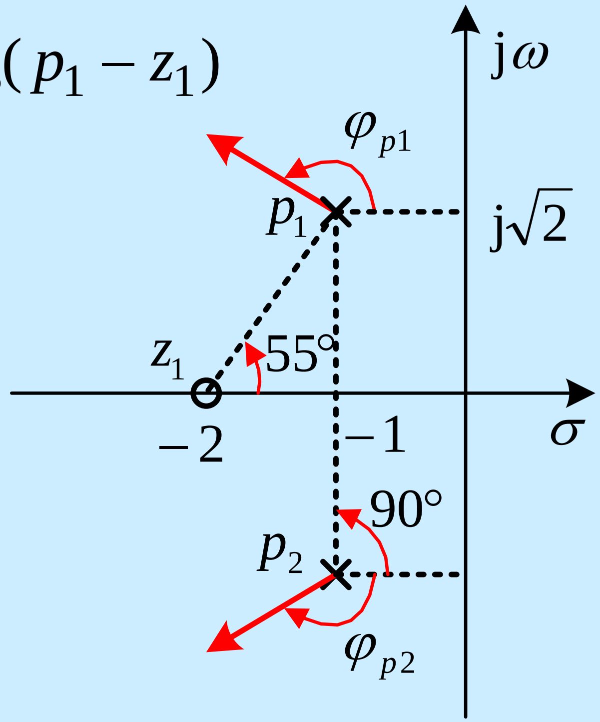
$$G(s)F(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$$

Solution: 开环极点 $p_{1,2}=-1\pm \mathrm{j}\sqrt{2}$

- **利用上页公式**

$$\varphi_{p1}=\pm180°(2k+1)-\arg(p_1-p_2)+\arg(p_1-z_1)$$
$$=\pm180°(2k+1)-90°+55°$$
$$=145°$$

$\varphi_{p2}=-145°$ **(对称性)**

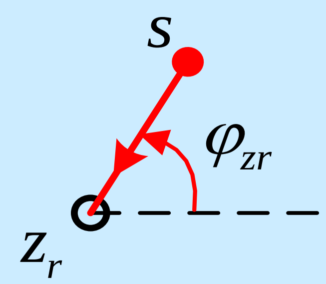


- **直接利用相角条件**

$$55°-\varphi_{p1}-90°=180°$$
$$\varphi_{p1}=-215°$$

♦ 零点 z_r 的入射角

- 测试点必须满足



$$\arg G(s)F(s) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} \arg(z_r - z_i) + \varphi_{zr} - \sum_{j=1}^{n} \arg(z_r - p_j)$$

$$= \pm(2k+1)\pi$$

$$\varphi_{zr} = \pm(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_r - p_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} \arg(z_r - z_i)$$

6. 与虚轴的交点

- 根轴迹穿越虚轴 $\Rightarrow$ 稳定性改变

- 交点给出临界K 和振荡频率

- 方法

(i) Routh稳定性判据

(ii) 令$s=\mathrm{j}\omega$. 求解获得K和ω

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left[1+G(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)\right]=0 \\ \mathrm{Im}\left[1+G(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)\right]=0 \end{cases}$$

例 5.3.3 确定与虚轴的交点

$$G(s)F(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Solution:

- **CL特征方程:** $f(s)=s^3+3s^2+2s+K=0$

(i) Routh判据

- **Routhian阵列**

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & (6-K)/3 & \\ s^0 & K & \end{array}$$

- **临界增益**

$6-K=0 \qquad K=6$

- **辅助方程**

$3s^2+K=3s^2+6=0$

$s=\pm \mathrm{j}\sqrt{2}$

(ii) $f(\mathrm{j}\omega)=(\mathrm{j}\omega)^3+3(\mathrm{j}\omega)^2+2(\mathrm{j}\omega)+K=0$

$$\begin{cases} K-3\omega^2=0 \\ 2\omega-\omega^3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega=\pm\sqrt{2} \\ K=3\omega^2=6 \end{cases}$$

5.3.2 系统极点之和的守恒条件

♦ **CL极点之和 = OL极点之和**
如果 $n-m\geq 2$

- $f(s)=A(s)+KB(s)$

$$=s^n-\sum_{i=1}^{n}p_i s^{n-1}+\cdots+K\left[s^m-\sum_{j=1}^{n}z_j s^{m-1}+\cdots\right]$$

- **当** $n-m\geq 2$ **i.e.** $m\leq n-2$**,**

$$f(s)=s^n-\sum_{i=1}^{n}p_i s^{n-1}$$

$$+\sum \text{terms of } (s^{n-2}, s^{n-3}, \cdots, s^m, s^{m-1}, \cdots)$$

- **记CL极点为** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

则

$$f(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i)$$

$$= s^n - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s^{n-1} + \cdots$$

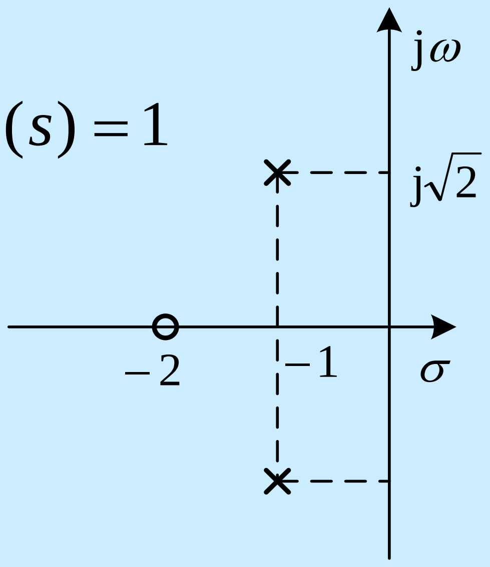
- **因此** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$

♦ **根据此性质，可计算部分闭环极点**

5.3.3 示例

例 5.3.4 绘制根轨迹

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3} \qquad F(s)=1$$



Solution:

(i) $G(s)F(s) = \dfrac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$

OL极点: $p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$

OL零点: $z_1 = -2$

特征方程: $f(s) = s^2+2s+3+K(s+2)$

$$= s^2+(2+K)s+(3+2K)=0$$

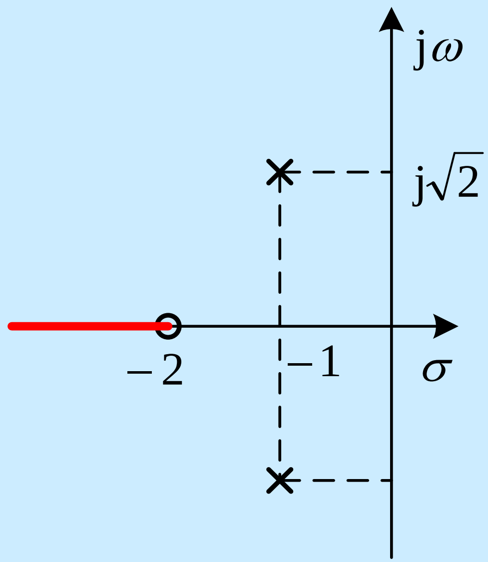
$$K = -\frac{A(s)}{B(s)} = -\frac{s^2+2s+3}{s+2}$$

(ii) 出发点: $-1\pm \mathrm{j}\sqrt{2}$

终止点: $-2,\ \infty$

分支数: 2

(iii) 实轴上根轨迹: $(-\infty, -2)$



(iv) 渐近线 $(n-m=1,\ k=0)$

$$\gamma = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{1} = -180^\circ$$

- **没有必要计算**σ_a

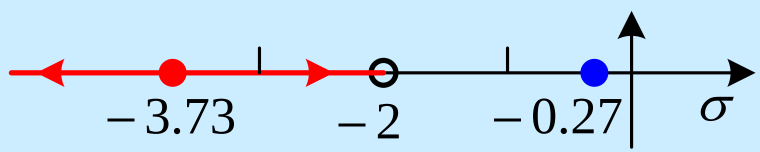
(v) 分离点

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=0 \qquad \frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B'(s)}{A'(s)} \qquad \frac{s+2}{s^2+2s+3}=\frac{1}{2s+2}$$

$$s^2+4s+1=0$$

$$s_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}=-3.732,\,-0.268$$

- -3.732 **在实根轨迹上，因此是分离点**



- **检验增益的符号**

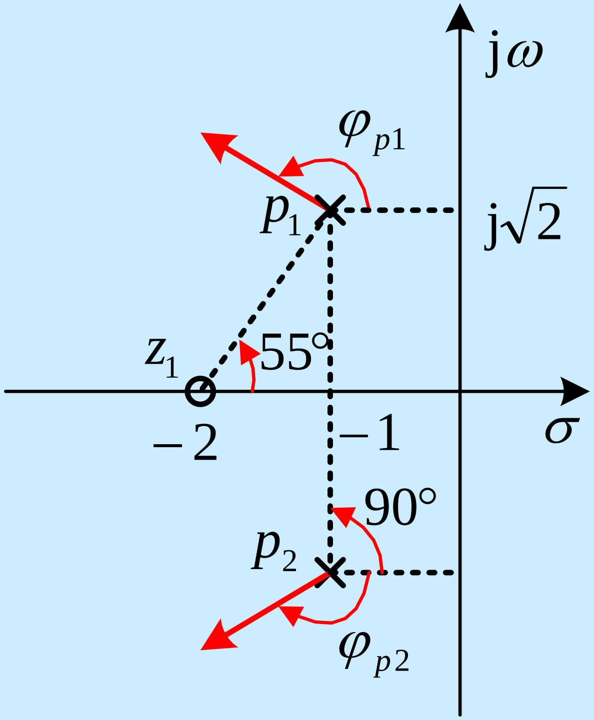
$$K=-\left.\frac{s^2+2s+3}{s+2}\right|_{s=-3.732}=5.4641>0$$

(vi) 出发角

$$\varphi_{p1} = \pm 180° - \arg(p_1 - p_2) + \arg(p_1 - z_1)$$

$$= 145° \ \textbf{or} \ -215°$$

$$\varphi_{p2} = -145°$$



(vii) 与虚轴的交点

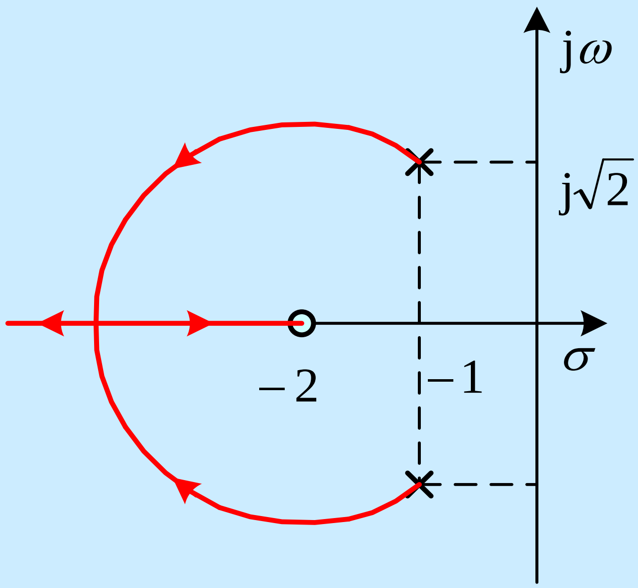
- 没有交点

* 从分离点和出发角可见

* 从闭环特征方程可见，所有系数均为正

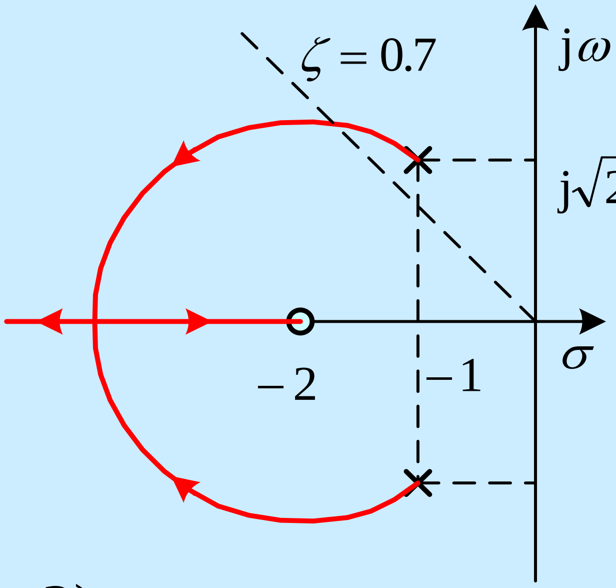
$$s^2 + (2+K)s + (3+2K) = 0$$

(viii) 根轨迹图形



- 圆的一部分，圆心$(-2,0)$，半径 $\sqrt{3}$

(ix) 简单应用: 确定$\zeta = 0.7$的闭环极点和相应的增益



- 令 $s = -\zeta\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

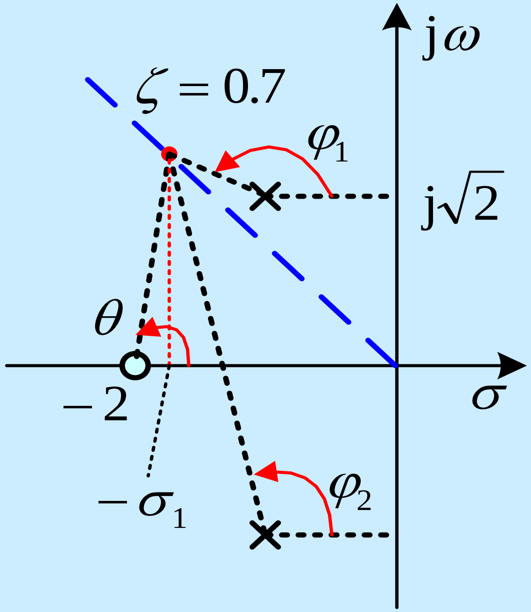
$$= -\sigma \pm \mathrm{j}\sigma\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$= -\sigma \pm \mathrm{j}1.0202\sigma$$

则 $G(s) =$

$$\frac{K(-\sigma + \mathrm{j}1.0202\sigma + 2)}{(-\sigma + \mathrm{j}1.0202\sigma + 1 - \mathrm{j}\sqrt{2})(-\sigma + \mathrm{j}1.0202\sigma + 1 + \mathrm{j}\sqrt{2})}$$

$$\arg G(s) = \arctan\frac{1.0202\sigma}{2-\sigma} - \arctan\frac{1.0202\sigma - \sqrt{2}}{1-\sigma} - \arctan\frac{1.0202\sigma + \sqrt{2}}{1-\sigma} = -180^\circ$$



$$\arg G(s) = \theta - \varphi_1 - \varphi_2 = -180°$$

- $\theta + 180° = \varphi_1 + \varphi_2$

$$\tan\theta = \frac{\tan\varphi_1 + \tan\varphi_2}{1 - \tan\varphi_1 \tan\varphi_2}$$

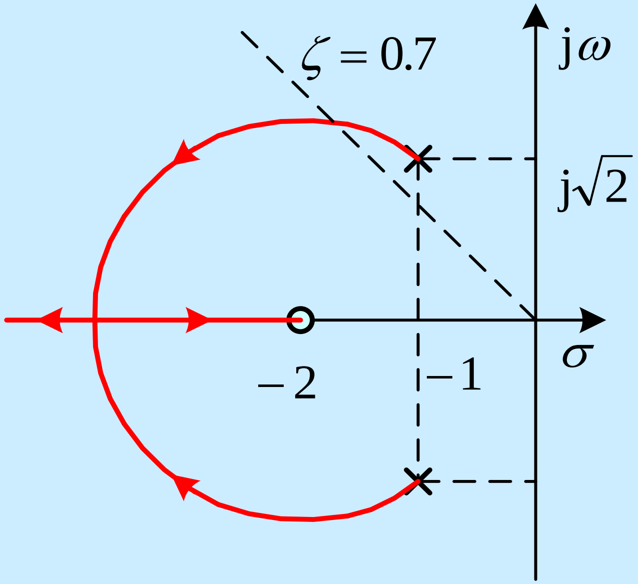
$$2.0408\sigma^2 - 4\sigma + 1 = 0$$

$$\sigma_1 = 1.666 \qquad \sigma_2 = 0.294$$

$\boxed{\sigma_1 = 1.666}$ $\boxed{\sigma_2 = 0.294}$

- 取 $\sigma_1 = 1.666$，

  则 $s = -1.67 \pm \mathrm{j}\,1.70$



- 根据幅值条件

$$K = \left| \frac{(s+1)^2 + 2}{s+2} \right|_{s=-1.67\pm\mathrm{j}1.70} = 1.34$$

- 结论:

$$s = -1.67 \pm \mathrm{j}1.70 \qquad K = 1.34$$

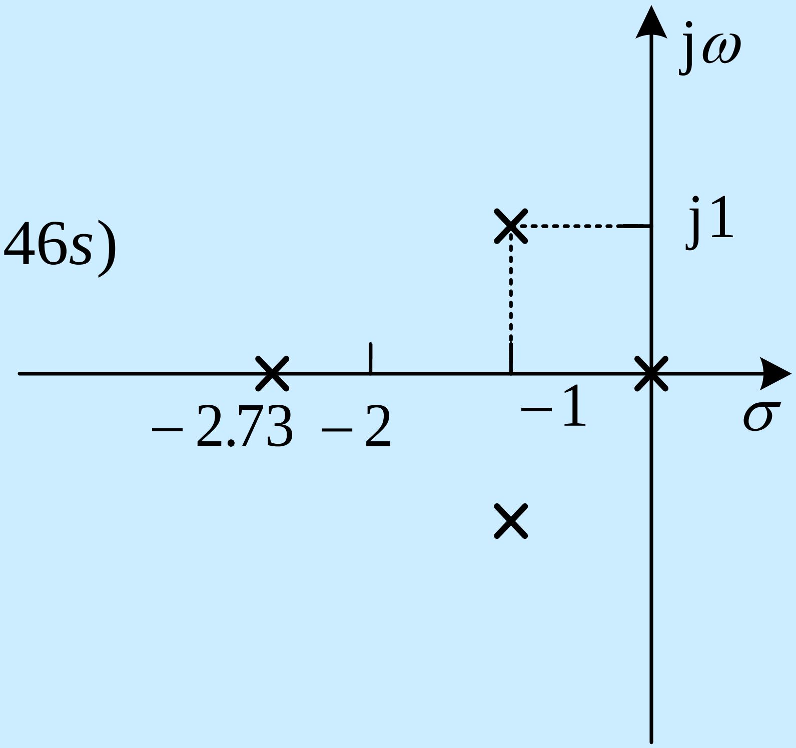
例 5.3.5 绘制根轨迹 $G(s)F(s)=\dfrac{K}{s(s+2.73)(s^2+2s+2)}$

Solution:

(i) OL极点: 0, –2.73, –1 ± j 1

CL特征方程:

$$K=-s(s+2.73)(s^2+2s+2)$$
$$=-(s^4+4.73s^3+7.46s^2+5.46s)$$



(ii) 出发点:

0, –2.73, –1 ± j 1

终止点: ∞

分支数: 4

(iii) 实轴上根轨迹: $(-2.73,\ 0)$

(iv) 渐近线

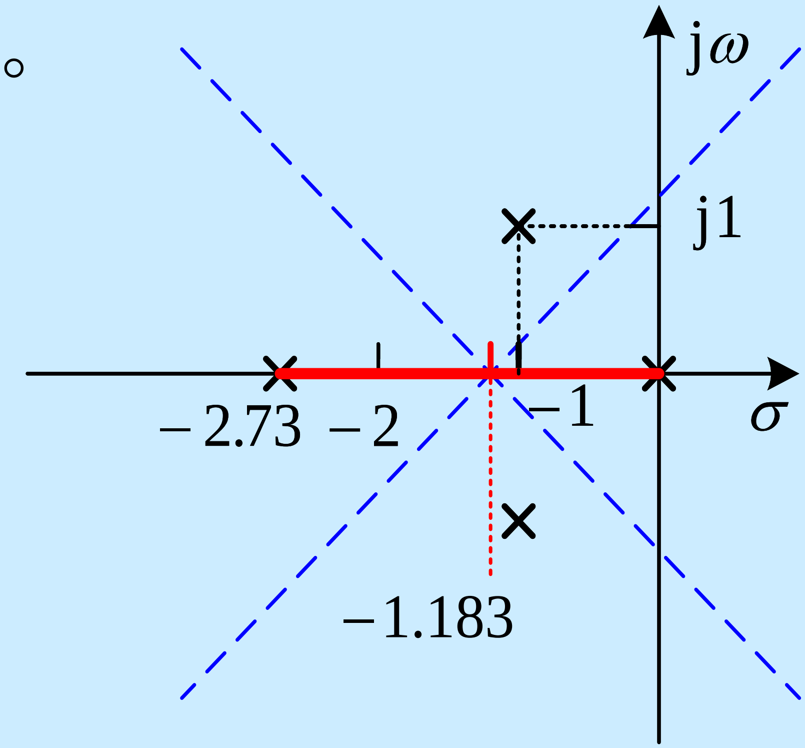
$$\gamma=\frac{\pm180^\circ(2k+1)}{n-m}$$

$$=\frac{\pm180^\circ(2k+1)}{4}=\pm45^\circ,\ \ \pm135^\circ$$

$$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}$$

$$=\frac{0-2.73-1+\mathrm{j}1-1-\mathrm{j}1}{4}$$

$$=-1.183$$

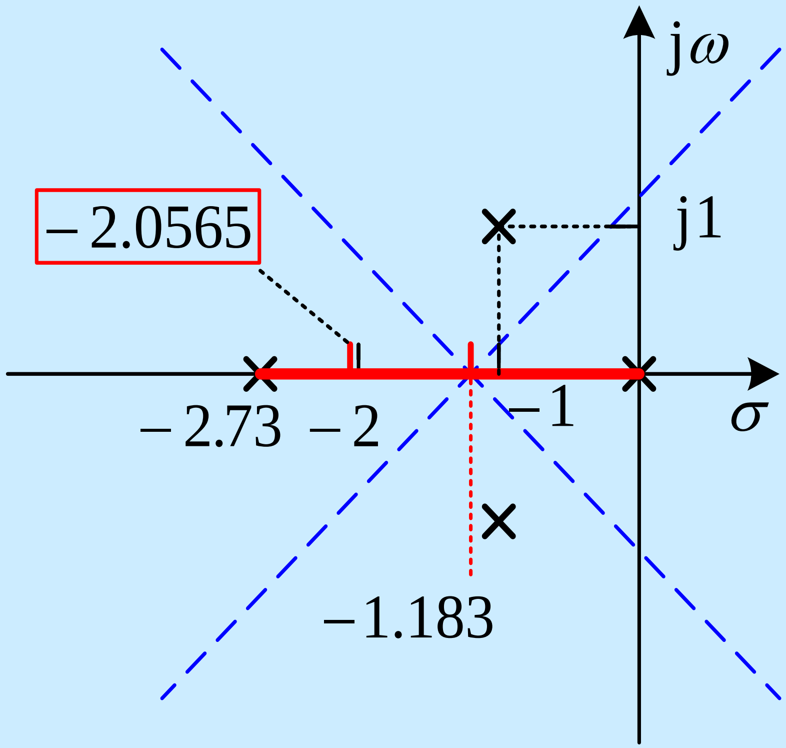


(v) 会合点

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=0 \qquad 4s^3+14.19s^2+14.92s+5.46=0$$

一个实根 $s=-2.0565$

$$K=-A(s)\Big|_{s=-2.0565}=2.931>0$$



(vi) 出发角

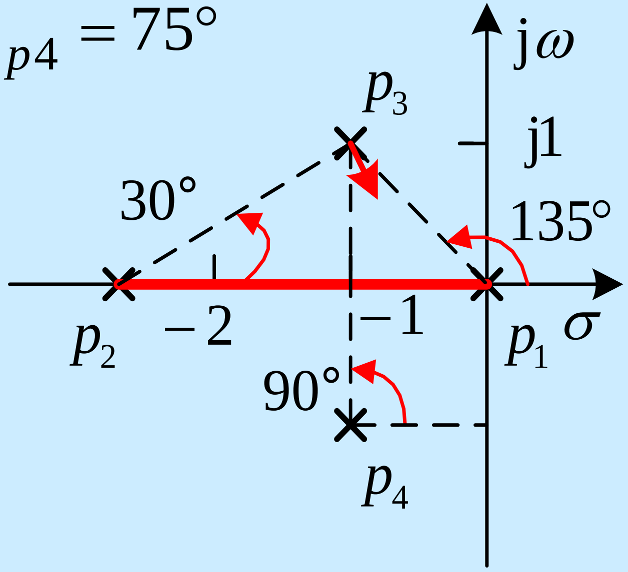
$$-\arg(p_3-p_1)-\arg(p_3-p_2)-\varphi_{p3}-\arg(p_3-p_4)$$

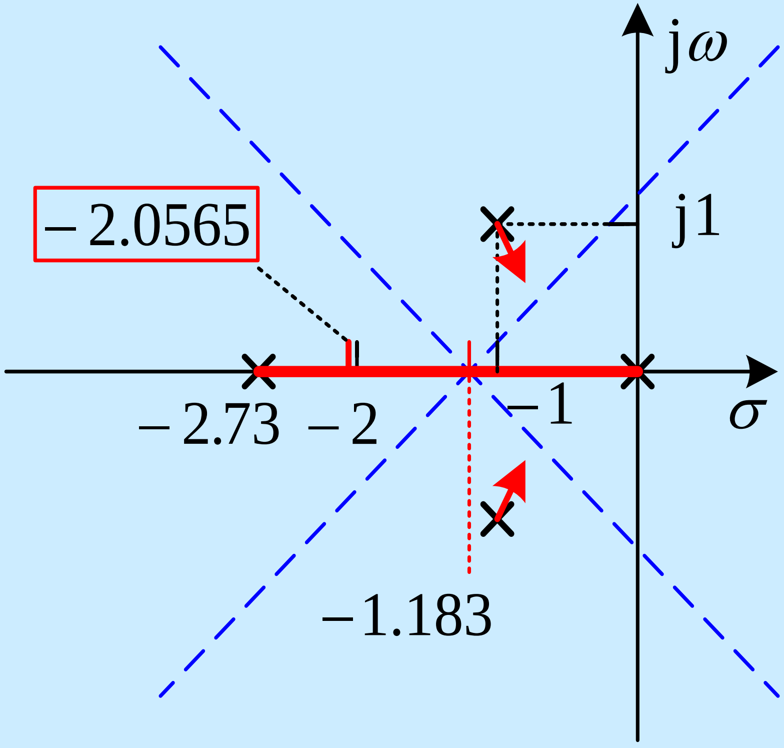
$$=-135^\circ-30^\circ-\varphi_{p3}-90^\circ=-180^\circ$$

$$\varphi_{p3}=180^\circ-135^\circ-30^\circ-90^\circ$$

$$=-75^\circ$$

$$\varphi_{p4}=75^\circ$$





(vii) 与虚轴的交点

$$f(s) = s^4 + 4.73s^3 + 7.46s^2 + 5.46s + K = 0$$

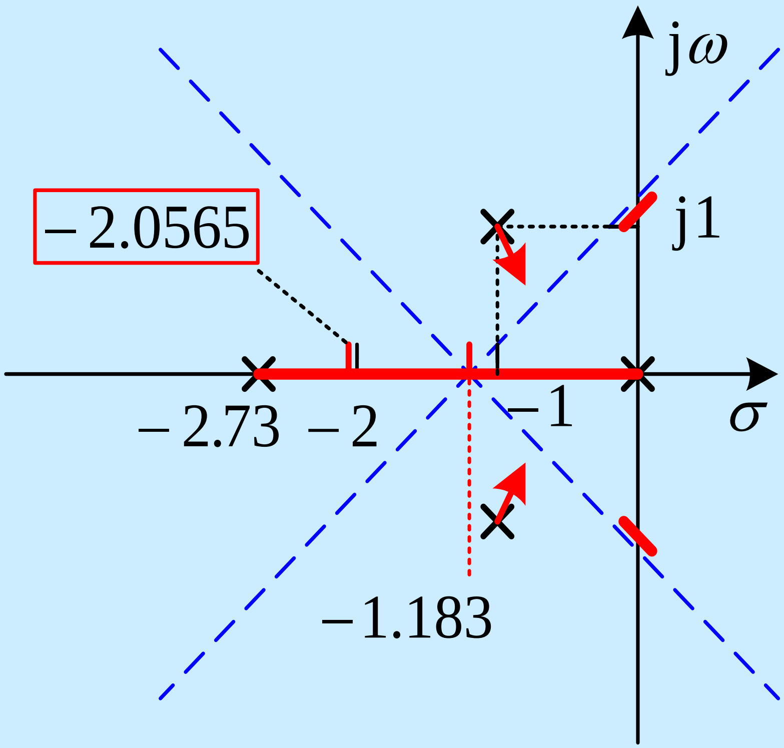
令 $s = \mathrm{j}\omega$ ，则

$$\omega^4 - \mathrm{j}4.73\omega^3 - 7.46\omega^2 + \mathrm{j}5.46\omega + K = 0$$

$$\begin{cases} K + \omega^4 - 7.46\omega^2 = 0 \\ 5.46\omega - 4.73\omega^3 = 0 \end{cases}$$

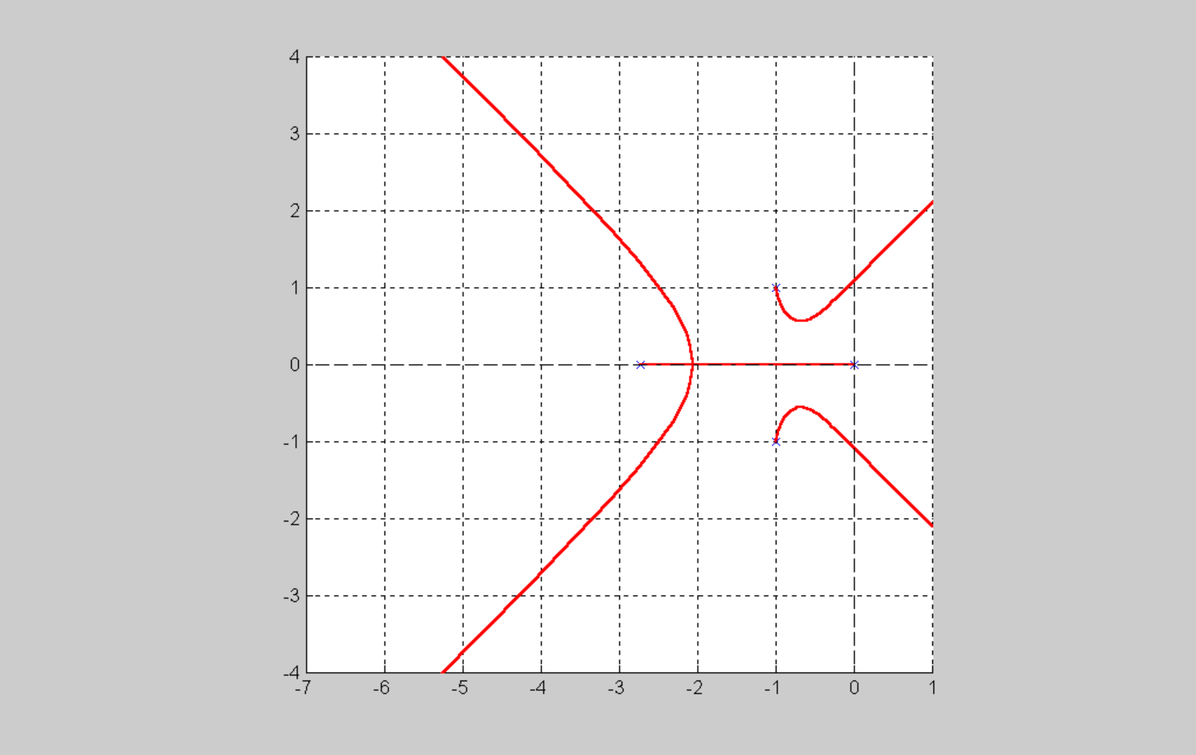
$\omega = \pm 1.0744 \qquad K = 7.28$

(viii) 手工绘制根轨迹

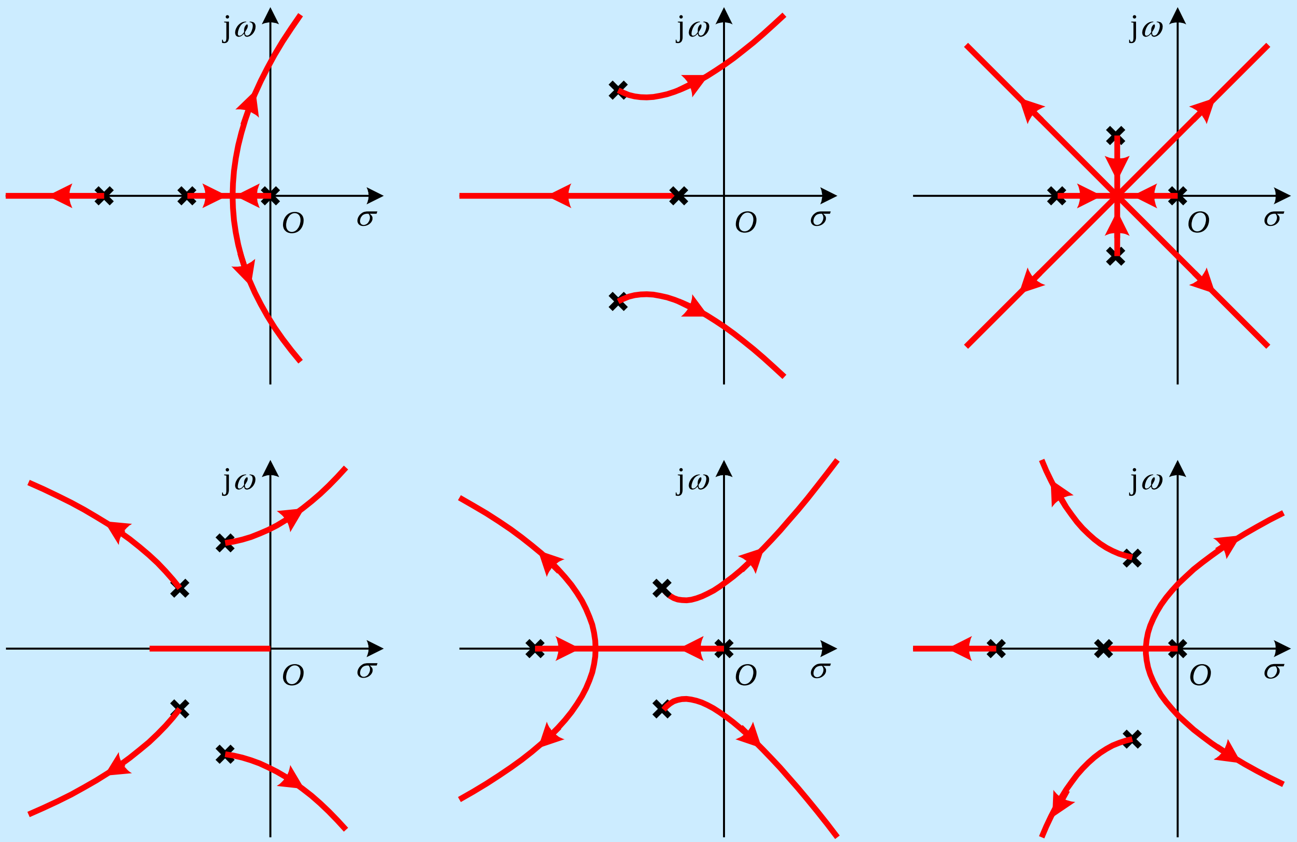


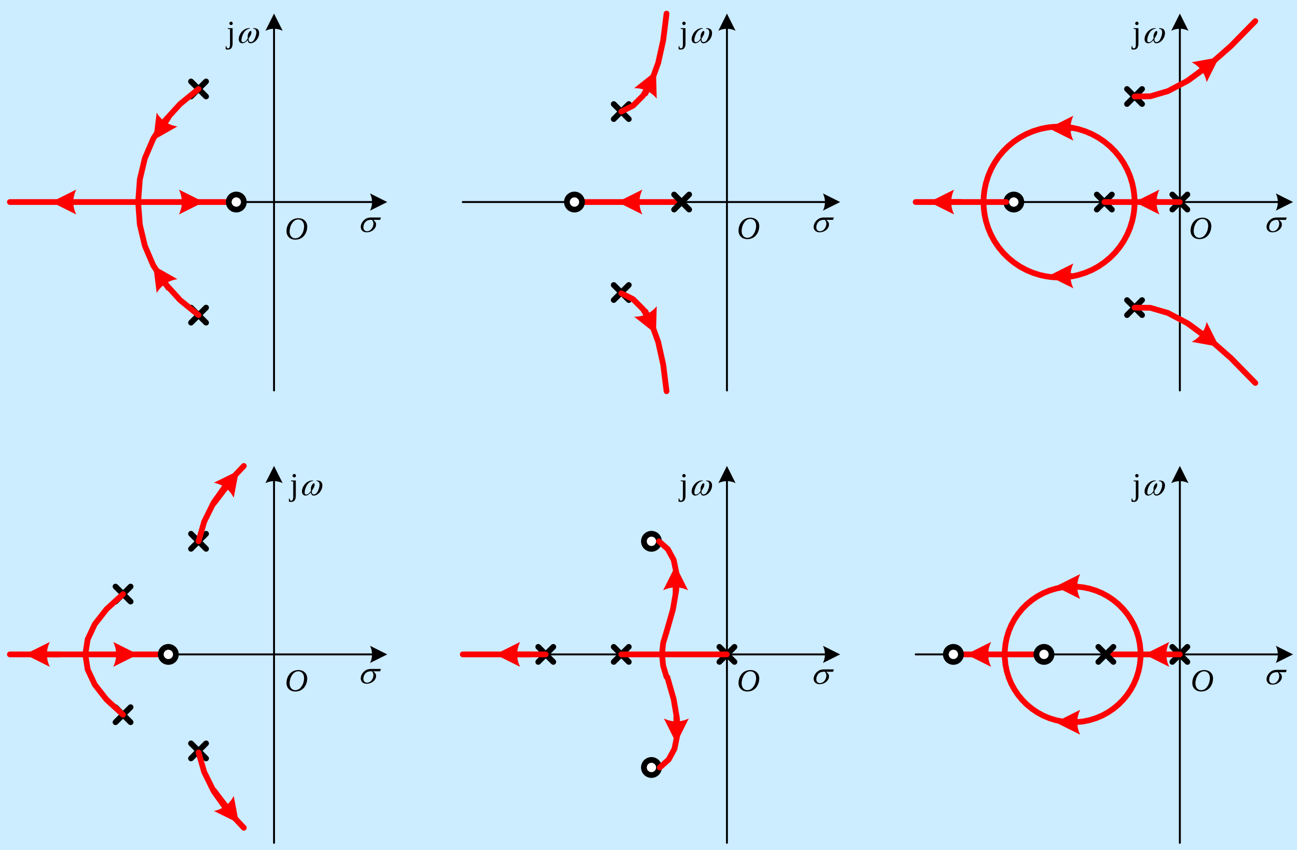
(ix) 利用MATLAB绘制根轨迹

```
num=[1];
den=[1 4.73 7.56 5.46 0];
rlocus(num,den)
```



♦ 典型根轨迹




jω
O
σ
jω
O
σ
jω
O
σ
jω
O
σ
jω
O
σ
jω
O
σ

5.4 控制系统的根轨迹分析

5.4.1 条件稳定系统

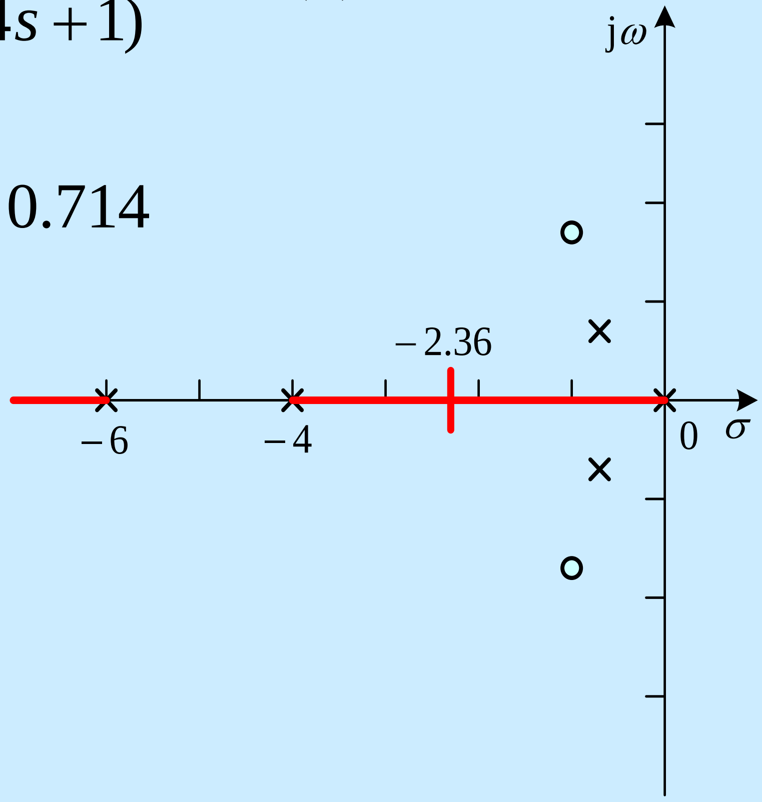
例 5.4.1 给定开环传递函数，确定闭环稳定对应K的范围

$$G(s)=\frac{K(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)} \qquad F(s)=1$$

Solution:

(i) OL极点: $0,\ -4,\ -6,\ -0.7\pm j0.714$

OL零点: $-1\pm j1.7321$



会合点: -2.3557

(ii) 与虚轴的交点:

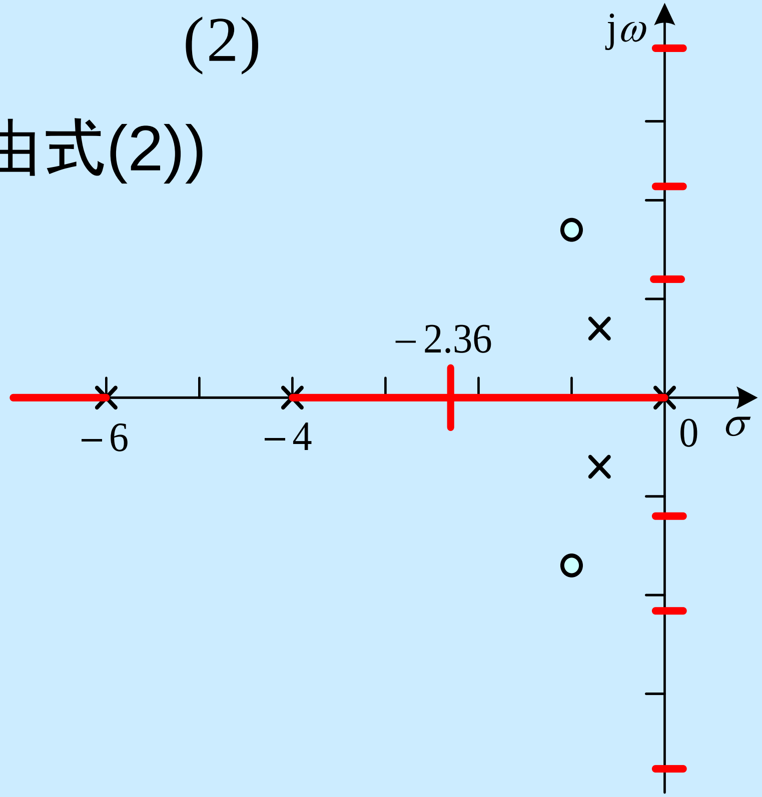
$$f(s)=s^5+11.4s^4+39s^3+(43.6+k)s^2$$
$$+(24+2K)s+4K=0$$

$$\begin{cases}11.4\omega^4-(43.6+K)\omega^2+4K=0 & (1)\\ \omega[\omega^4-39\omega^2+(24+2K)]=0 & (2)\end{cases}$$

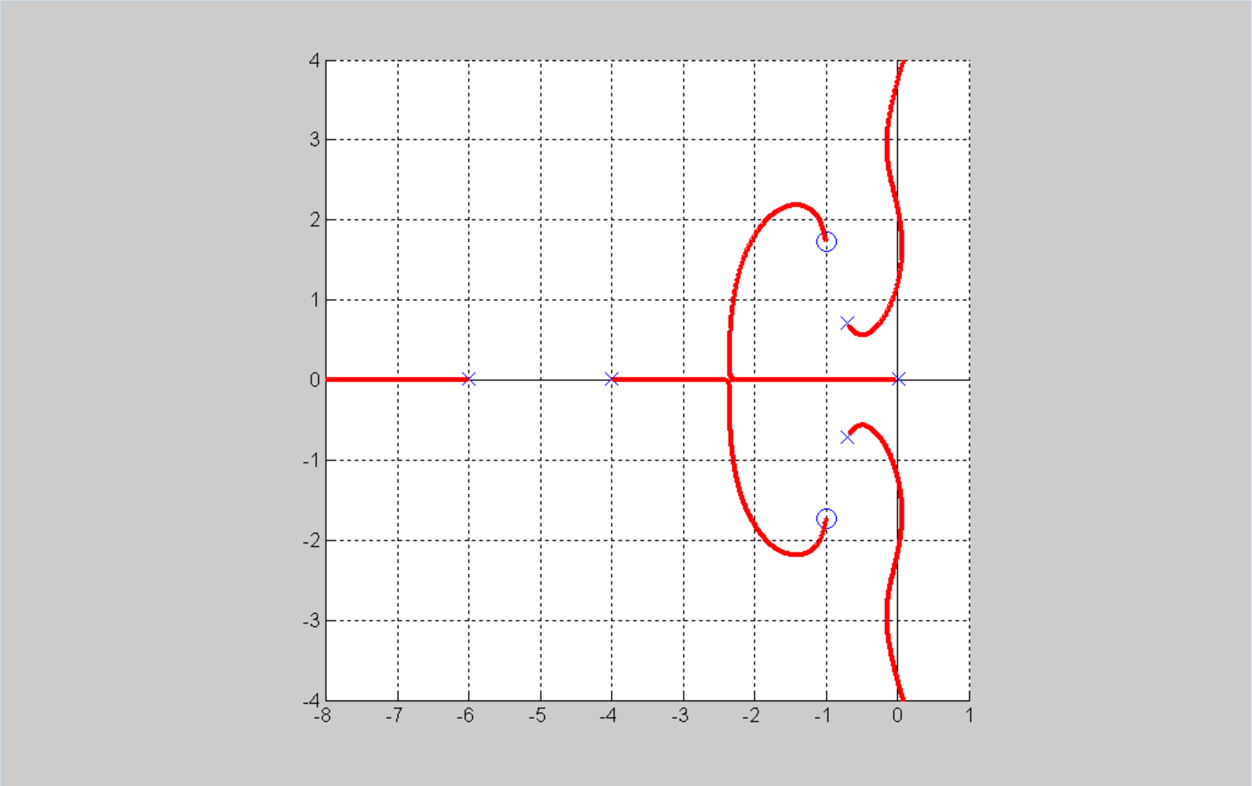
$$K=-0.5\omega^4+19.5\omega^2-12 \qquad (由式(2))$$

$$\omega^6-20.2\omega^4+92.9\omega^2-96=0$$

$$\omega_1=1.2115 \quad K_1=15.54$$
$$\omega_2=2.1545 \quad K_2=64.74$$
$$\omega_3=3.7538 \quad K_3=163.51$$



(iii) 根轨迹



(iii) 稳定范围

$$0 < K < 15.54 \qquad 64.74 < K < 163.51$$

5.4.2 不同控制器的比较

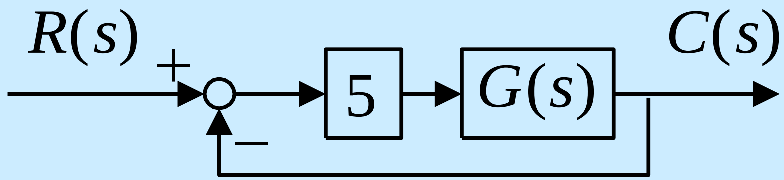
例 5.4.2 对开环传递函数如下的位置伺服系统，比较微分控制和速度反馈控制的影响

$$G(s)=\frac{1}{s(5s+1)}$$

Solution:

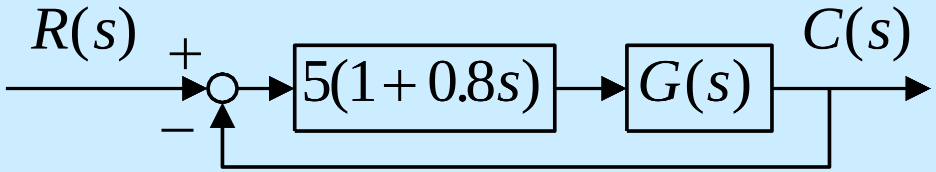
(1) 三种回路结构

- **P-控制**



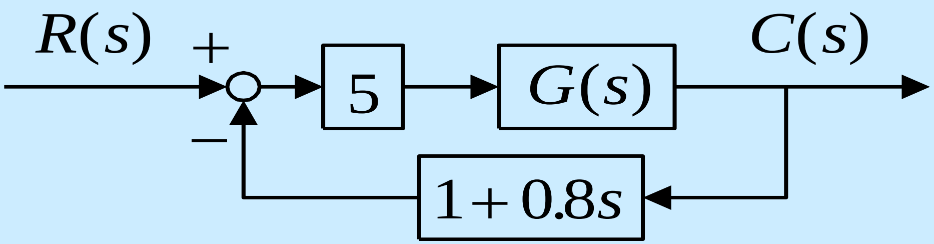
$$G_{\mathrm{I}}(s)F_{\mathrm{I}}(s)=\frac{5}{s(5s+1)}=\frac{1}{s(s+0.2)}$$

- **PD-控制**



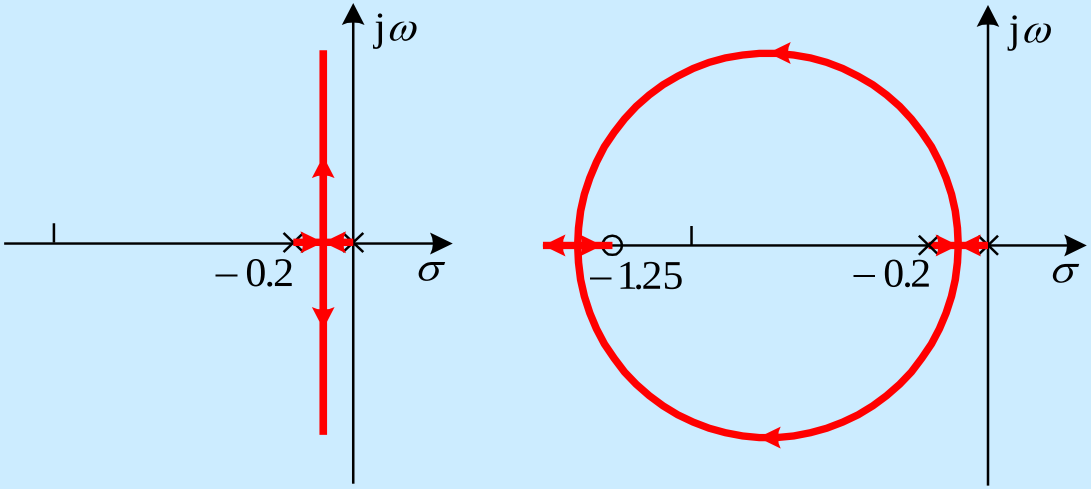
$$G_{\mathrm{II}}(s)F_{\mathrm{II}}(s)=\frac{5(1+0.8s)}{s(5s+1)}=\frac{0.8(s+1.25)}{s(s+0.2)}$$

- **速度反馈控制**



$$G_{\mathrm{III}}(s)F_{\mathrm{III}}(s)=\frac{5(1+0.8s)}{s(5s+1)}=\frac{0.8(s+1.25)}{s(s+0.2)}$$

(2) 根轨迹



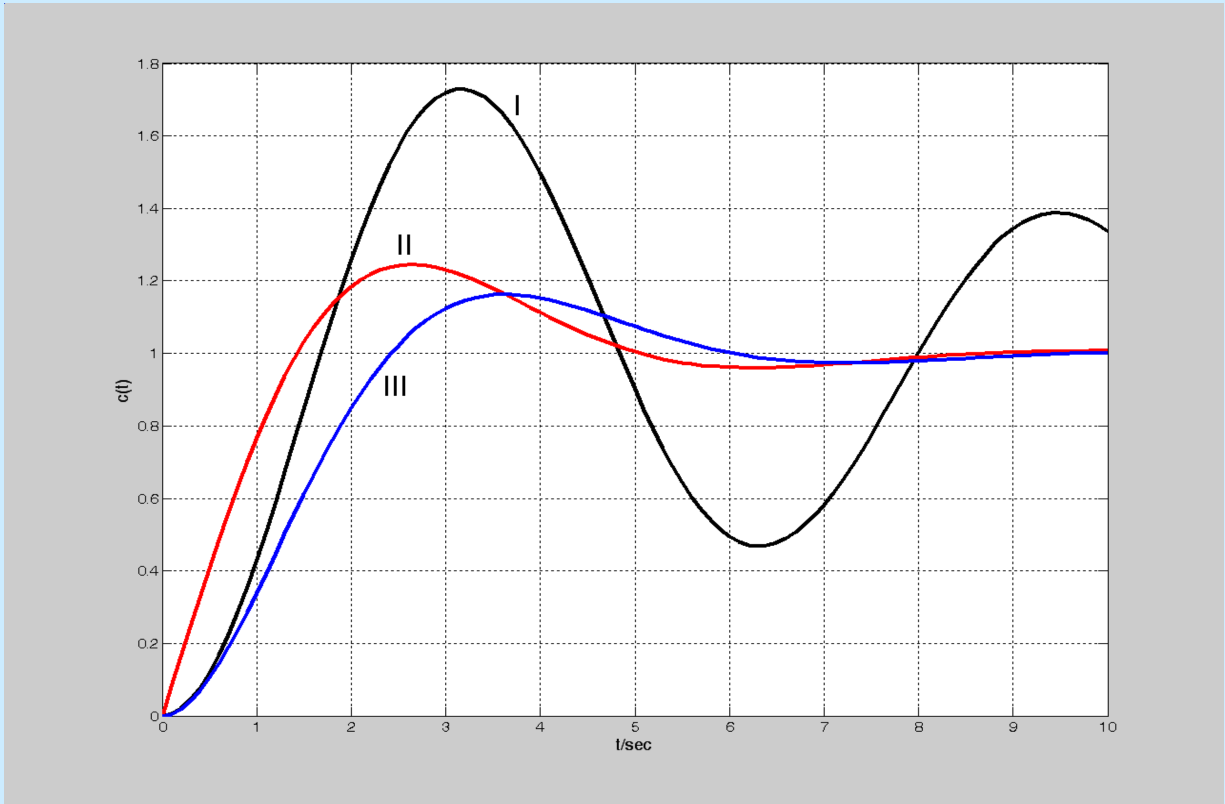
Remarks:

- **系统I** $s_{1,2} = -0.1 \pm j0.995$ $\zeta = 0.1$ **强振荡，衰减慢**
- **系统II,III** $s_{1,2} = -0.5 \pm j0.866$ $\zeta = 0.5$

  能取得更好的性能

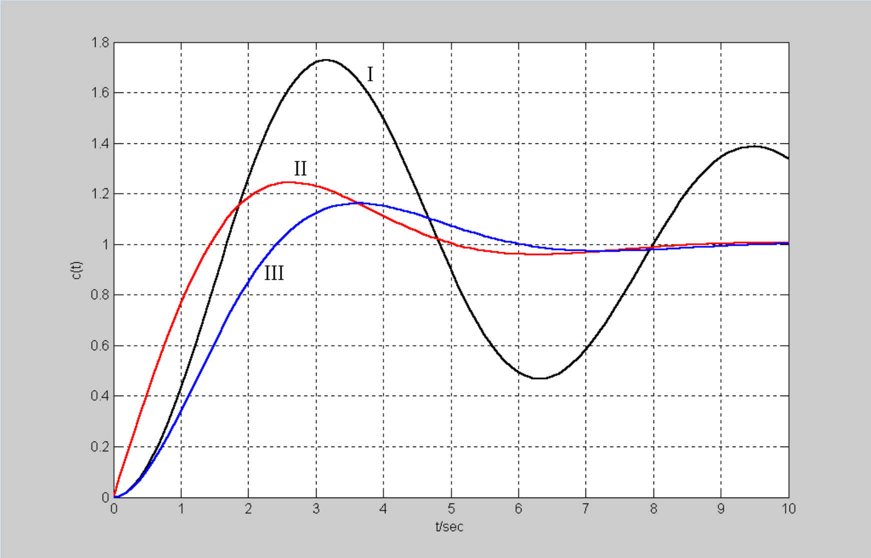
3. 时间响应

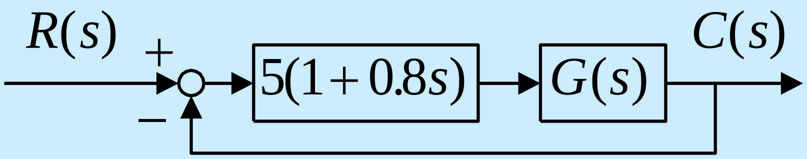
- 单位阶跃响应

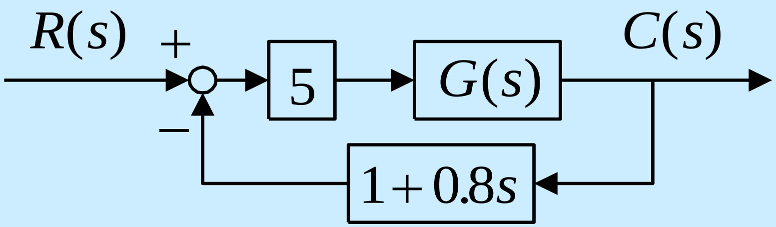


- 系统II：利用了位置误差的微分，导致更快的响应
- 系统III：利用速度反馈, 在误差发生之前进行纠正， 导致更小的超调

* 零点导致系统II和III的差异







$$G(s)_{\mathrm{CL\ \ II}} = \frac{5(1+0.8s)}{5s^2+5s+5} = \frac{1+0.8s}{s^2+s+1}$$

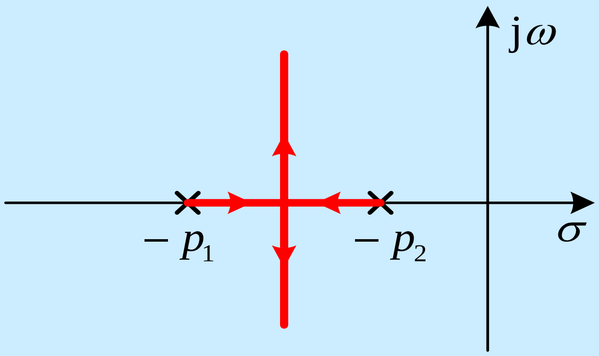
$$G(s)_{\mathrm{CL\ \ III}} = \frac{5}{5s^2+5s+5} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

5.4.3 零极点对根轨迹的影响

1. 增加零点

例 5.4.3 增加零点

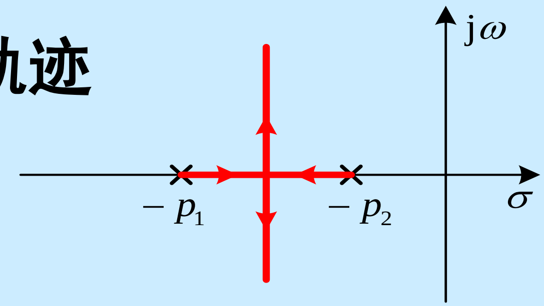
- 原先的开环传递函数和根轨迹



$$G(s)F(s)=\frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

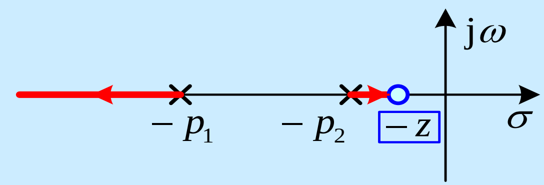
$$p_1>p_2>0$$

- **增加零点之后的开环传递函数和根轨迹**

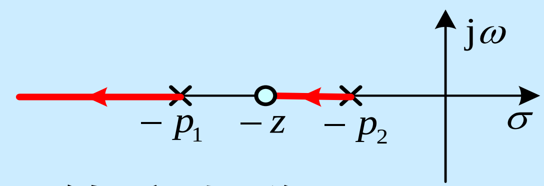


$$G(s)F(s)=\frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$p_1>p_2>z$

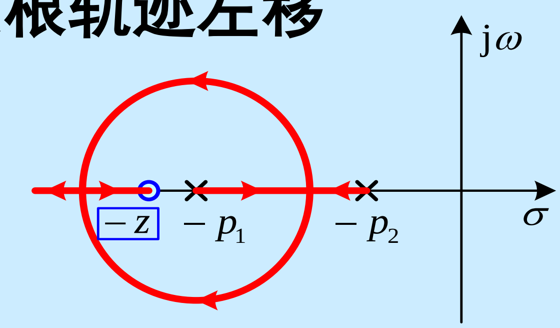


$p_1>z>p_2$



- **如果增加的零点位置合适，可导致根轨迹左移**

$z>p_1>p_2$



- **增加不同零点后的系统阶跃响应**

$$\frac{7(s+0.5)}{0.5(s+1)(s+3)}$$

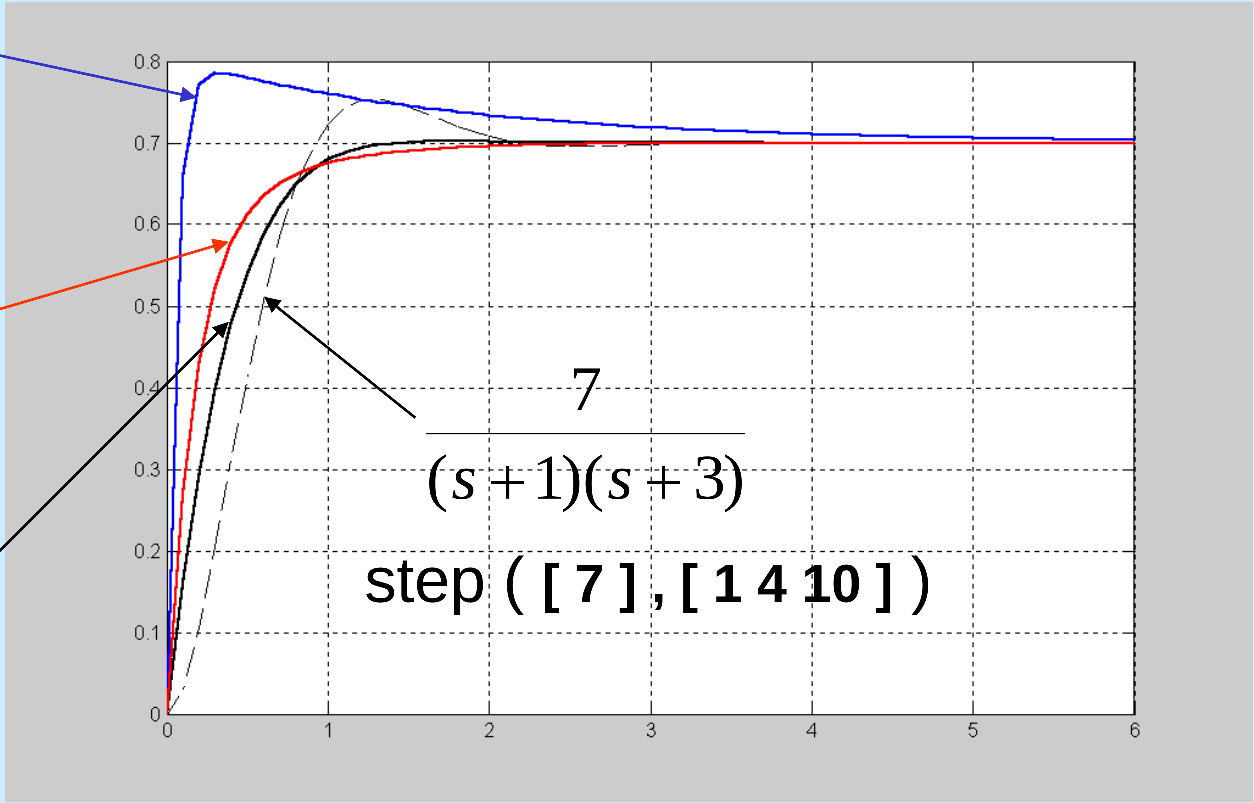
(blue)

$$\frac{7(s+2)}{2(s+1)(s+3)}$$

(red)

$$\frac{7(s+4)}{4(s+1)(s+3)}$$

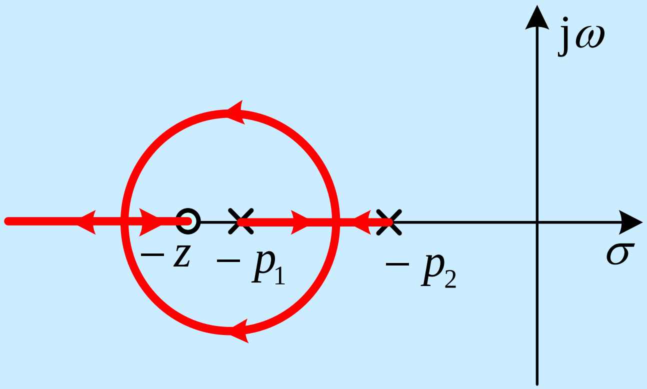
(Black)



2. 增加极点

例 5.4.4 增加极点

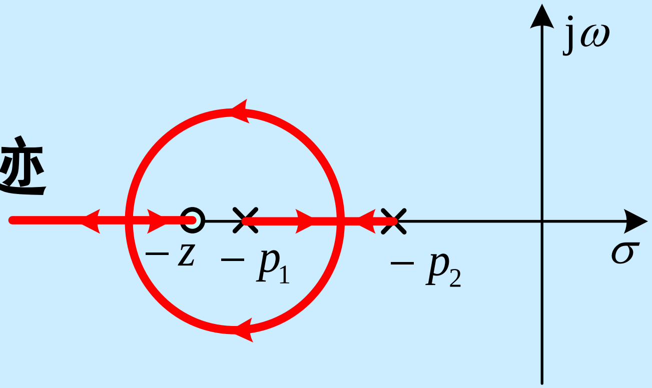
- 原先的开环传递函数和根轨迹



$$G(s)F(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

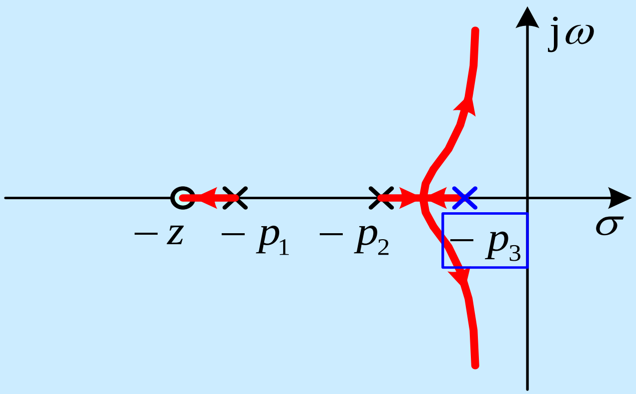
$$z > p_1 > p_2$$

- **增加极点后的开环传递函数和根轨迹**



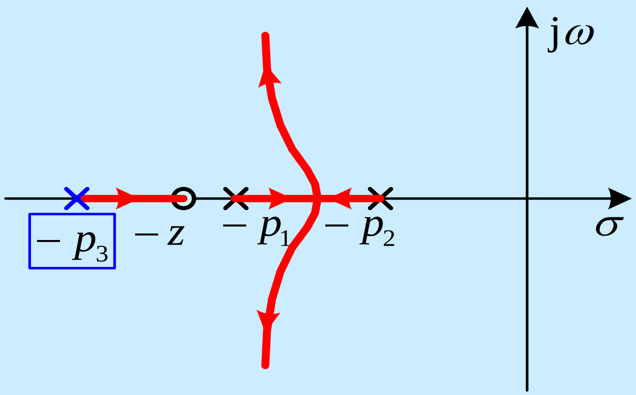
$$G(s)F(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

$$p_2 > p_3$$



- **增加极点导致根轨迹右移**

$$p_3 > z$$



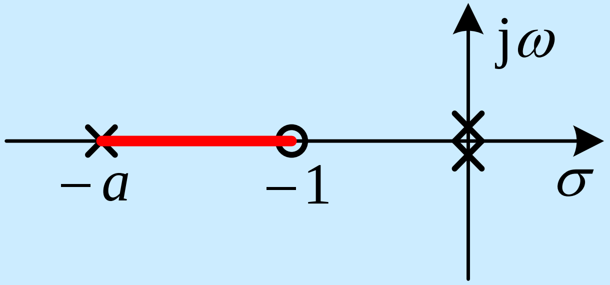
3. 零点或极点移动对根轨迹的影响

例 5.4.5 绘制系统在不同a时的根轨迹

$$G(s)F(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+a)} \qquad a>0$$

Solution:

- **实轴上的根轨迹**



- **检验**$(-a, -1)$上是否有分离会合点很重要

$$K = -\frac{A(s)}{B(s)} = -\frac{s^2(s+a)}{s+1}$$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s} = 0 \quad \Rightarrow \quad A(s)B'(s) = A'(s)B(s)$$

$$s^2(s+a) = (3s^2 + 2as)(s+1)$$

$$2s^2 + (a+3)s + 2a = 0$$

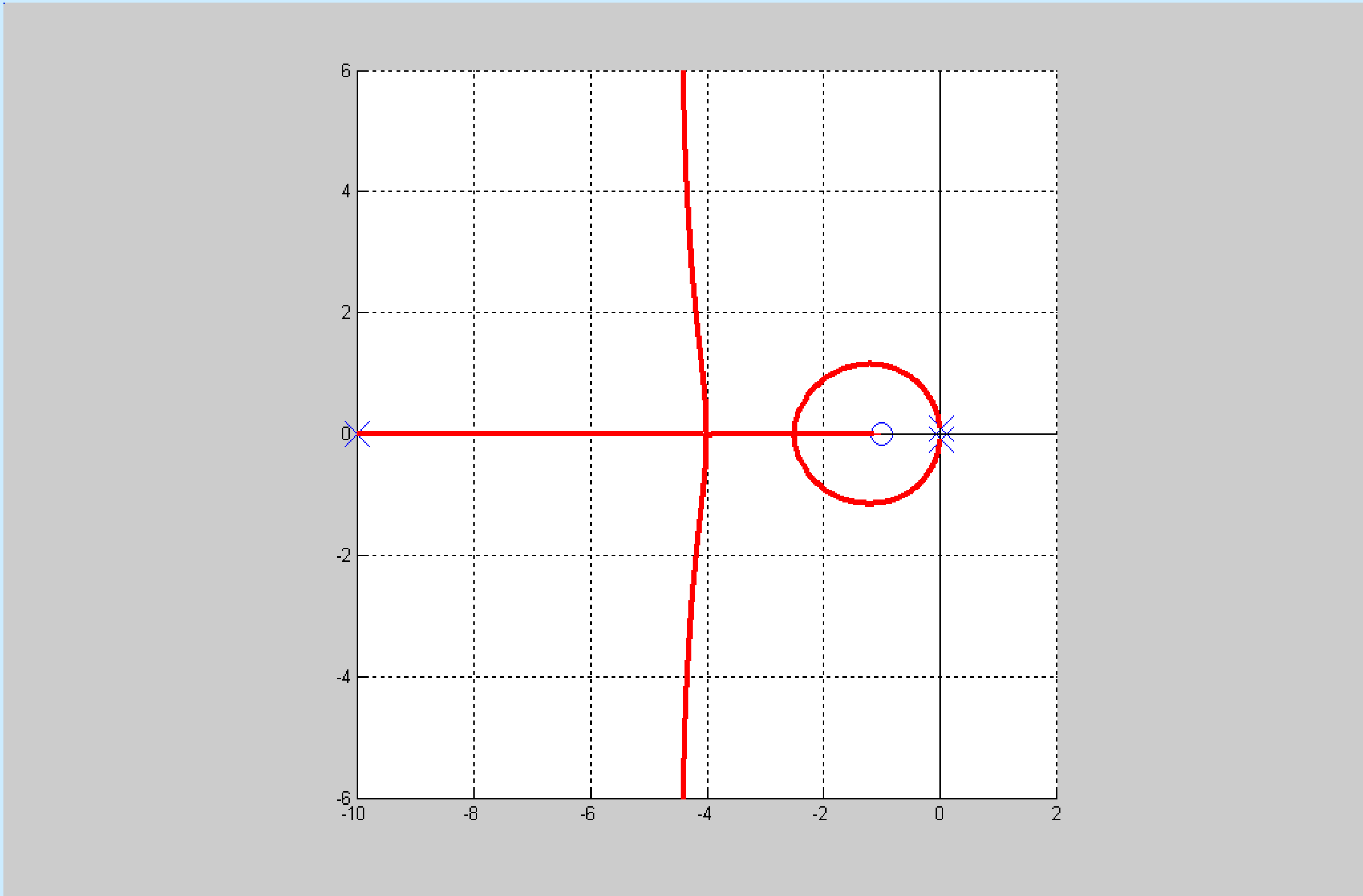
$$s = \frac{-(a+3) \pm \sqrt{a^2 - 10a + 9}}{4}$$

- **分离会合点存在的条件**

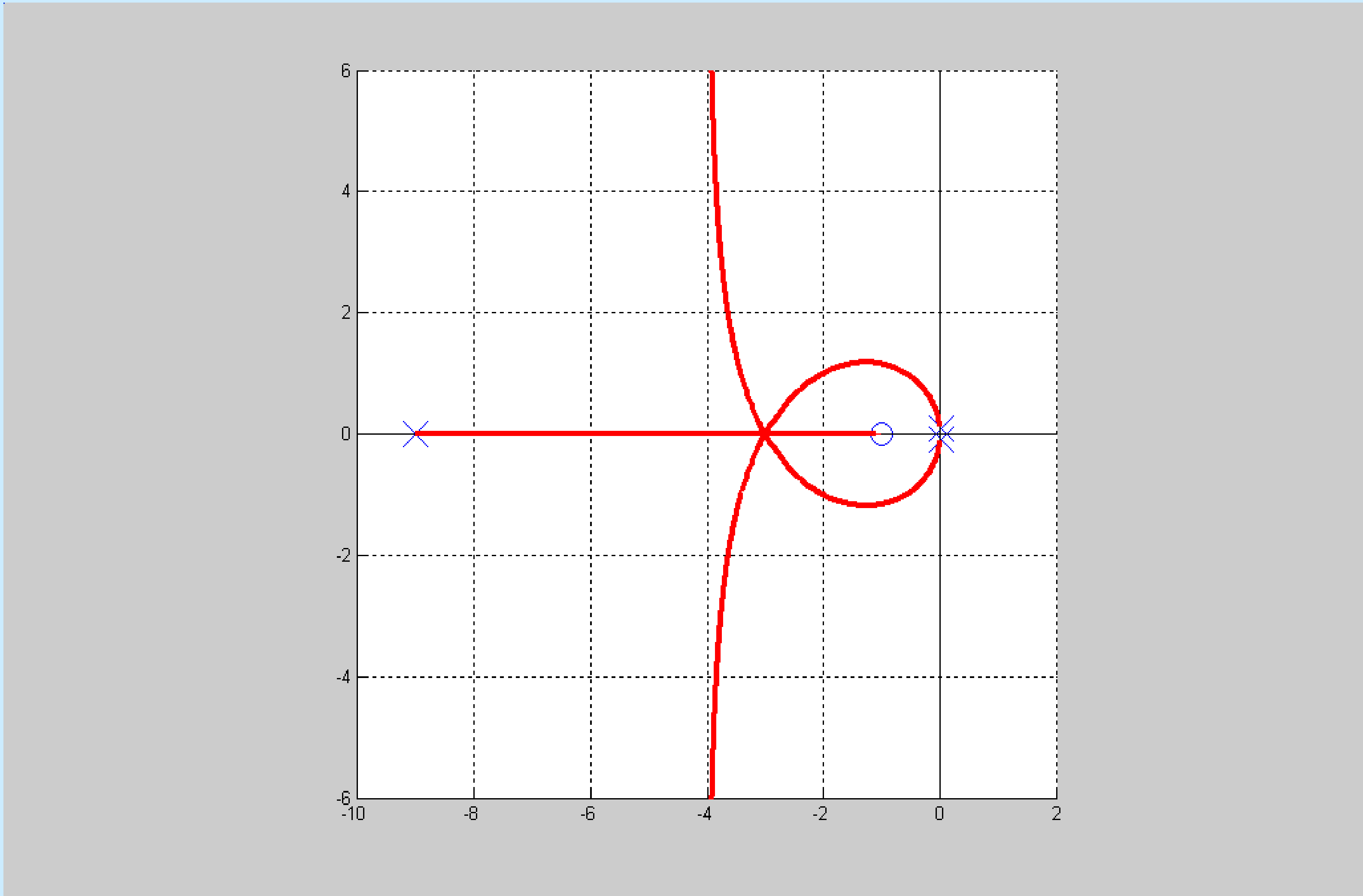
$$a^2 - 10a + 9 \geq 0$$

i.e. $a \leq 1 \qquad a \geq 9$

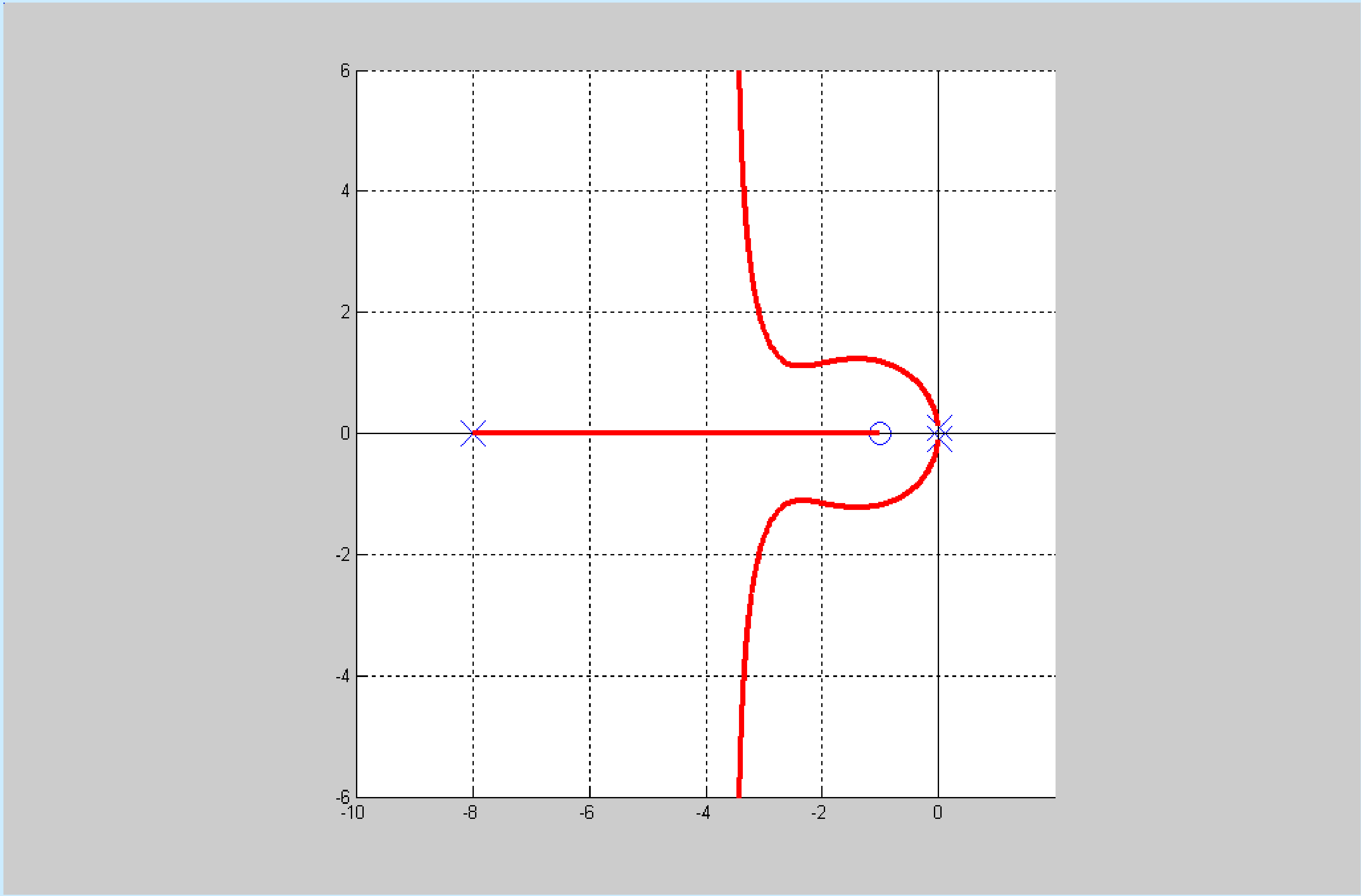
(i) $a = 10 \geq 9 \qquad s_{1,2} = -4,\ -2.5$



(ii) $a = 9$**:** $s_{1,2} = -3, -3$

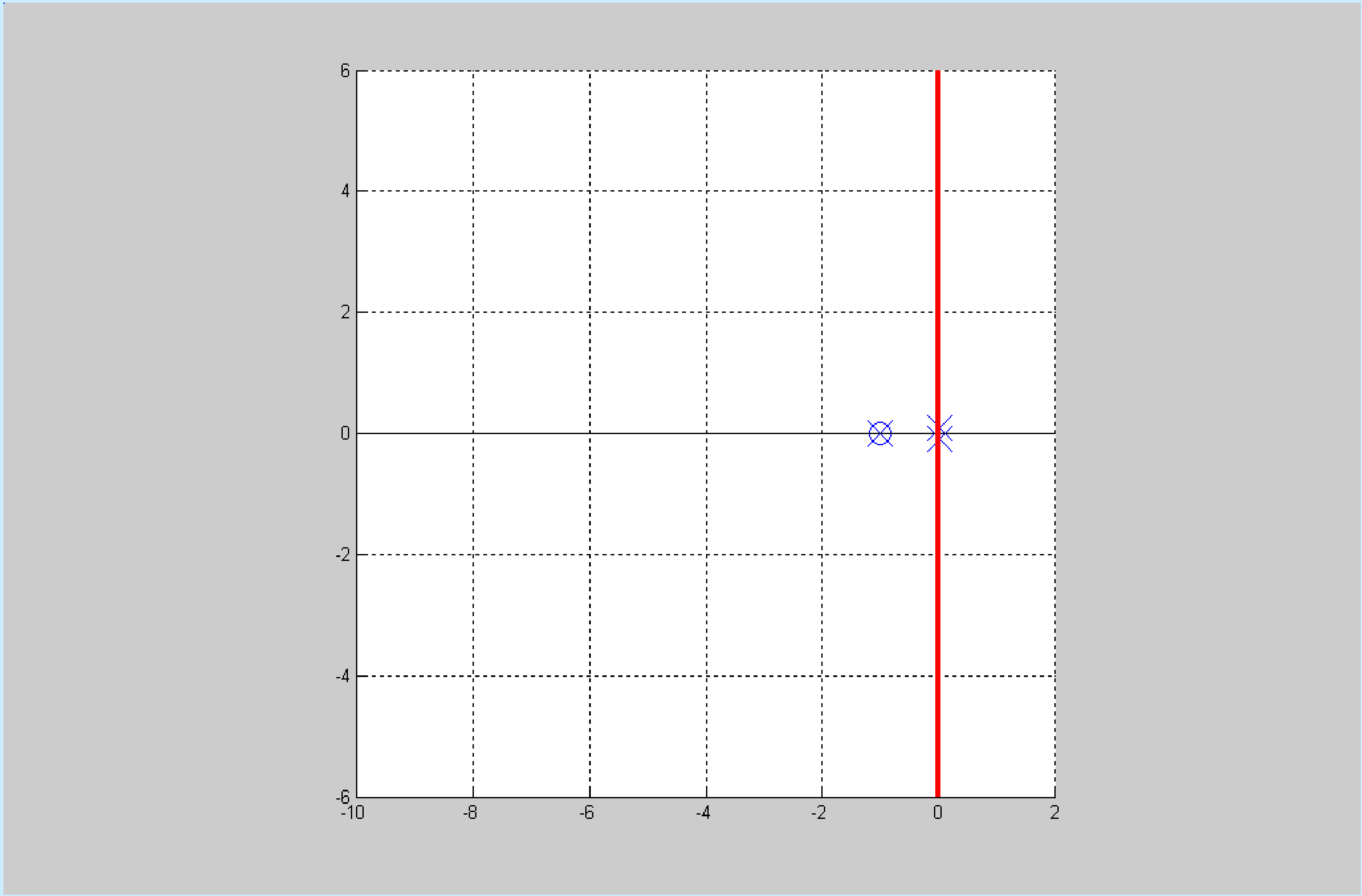


(iii) $a = 8$: 没有分离会合点

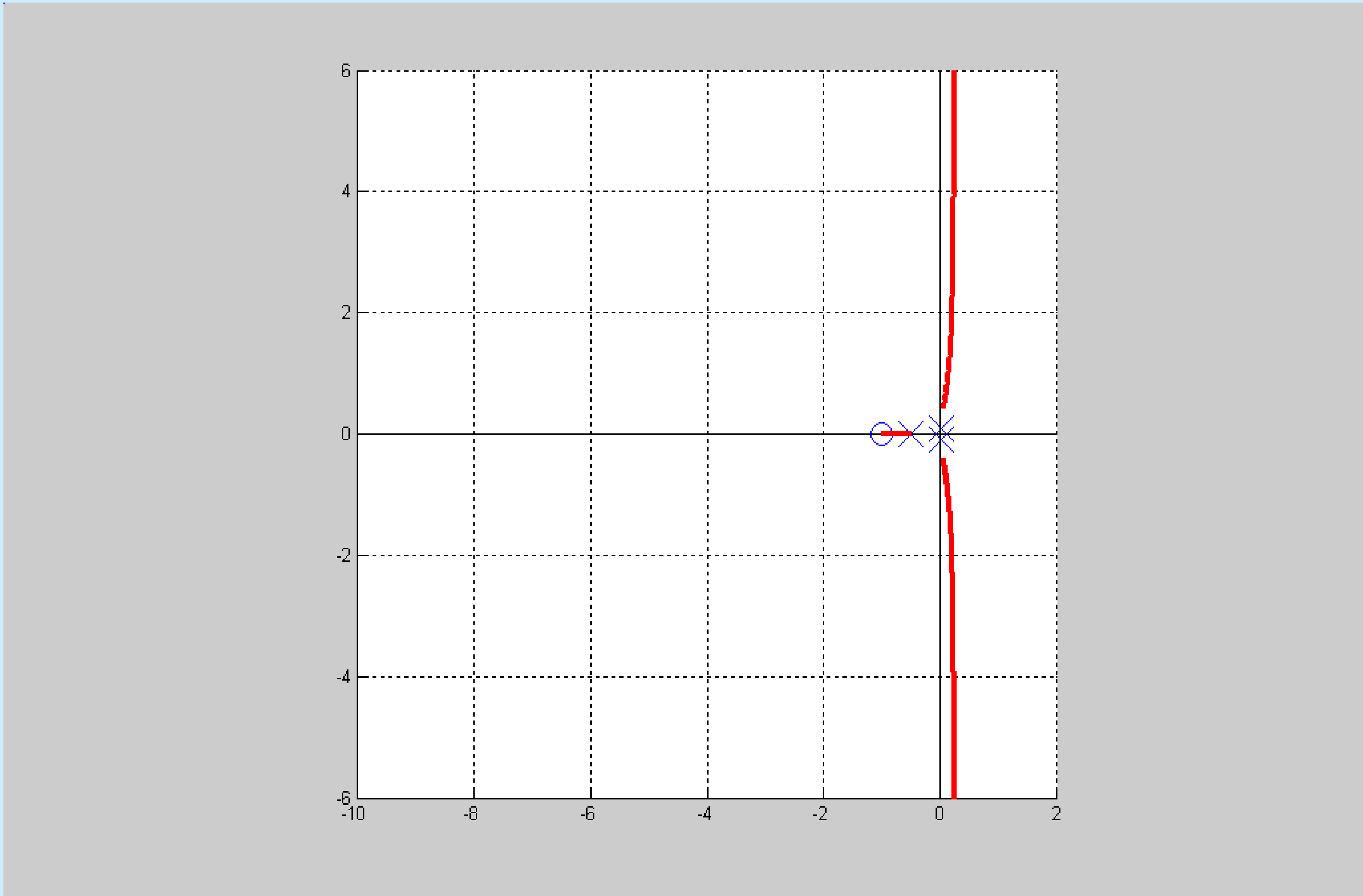


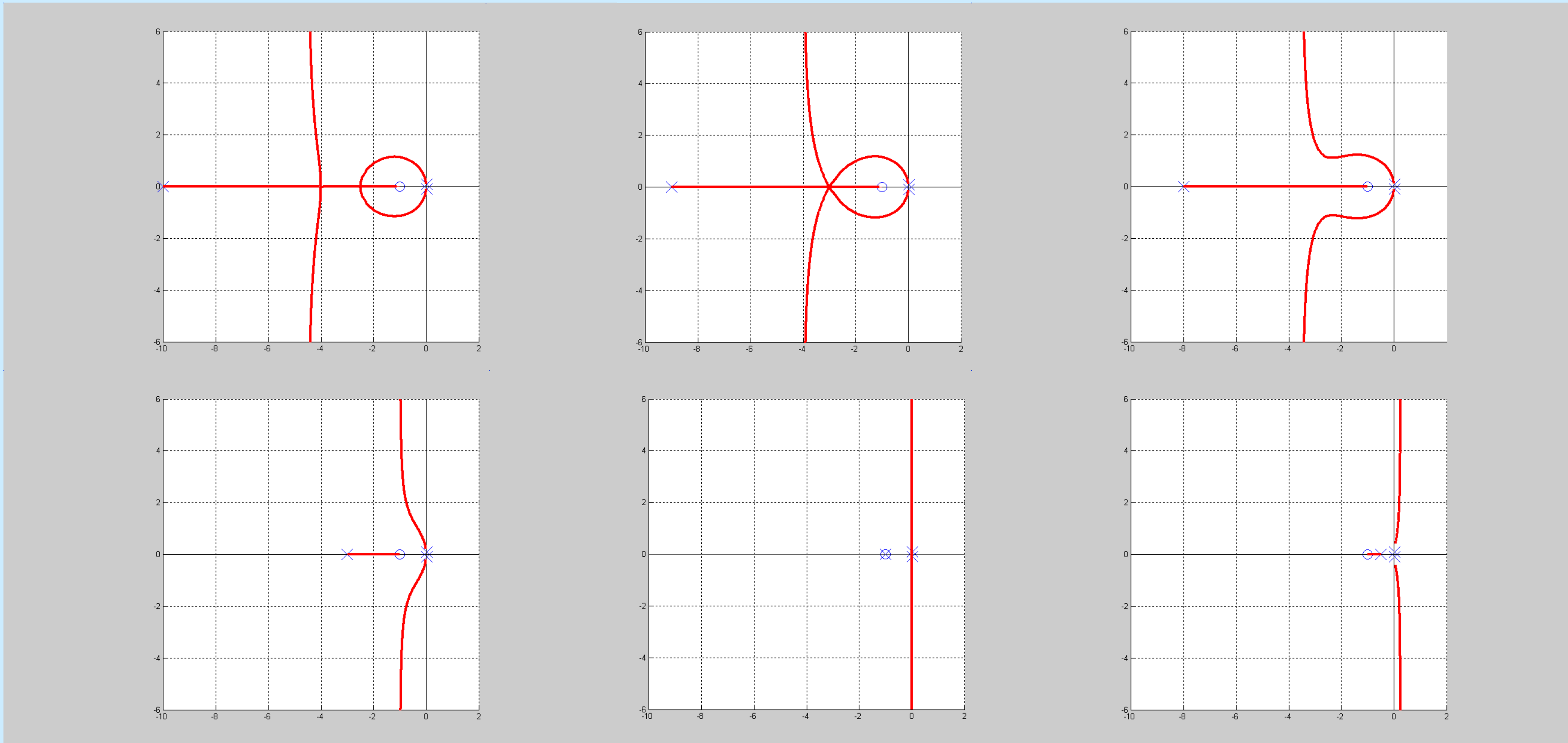
(iv) $a = 3$

(v) $a = 1$ **:** $G(s)F(s) = \dfrac{K}{s^2}$



(vi) $a = 0.5$





- **开环极点的微小变化可能导致闭环根轨迹的巨大变化**

5.4.4 参数根轨迹和根轨迹簇

- 如何研究增益以外的参数的变化对闭环极点的影响?
- 如何研究多个参数的变化对闭环极点的影响?

1. 参数根轨迹

- 指闭环极点相对特定参数的函数
- 令闭环特征方程为：$A(s, K_1)+KB(s, K_1) = 0$
- 将其重新整理如下

$$P(s)+K_1Q_1(s)=0$$

其中 $P(s)$, $Q_1(s)$ 为多项式, K_1可以不是开环增益

- **闭环特征方程等价为**

$$1+\frac{K_1Q_1(s)}{P(s)}=1+G_1(s)=0$$

- **参数根轨迹可以利用等价开环传递函数随着K_1的变化来绘制**

$$G_1(s)=\frac{K_1Q_1(s)}{P(s)}$$

例 5.4.6 已知负反馈系统的开环传递函数如下，研究随*a*变化的闭环稳定性

$$G(s)=\frac{2(s+1)}{s^2(s+a)} \quad a>0$$

Solution：

- **闭环特征方程为**

$$\varphi(s)=s^3+as^2+2s+2=0$$

- **闭环特征方程重写如下**

$$1+\frac{as^2}{s^3+2s+2}=0$$

- 等价开环传递函数

$$G_1(s)=\frac{as^2}{s^3+2s+2}$$

- 参数根轨迹

OL极点: $0.386 \pm j\ 1.564$, -0.771

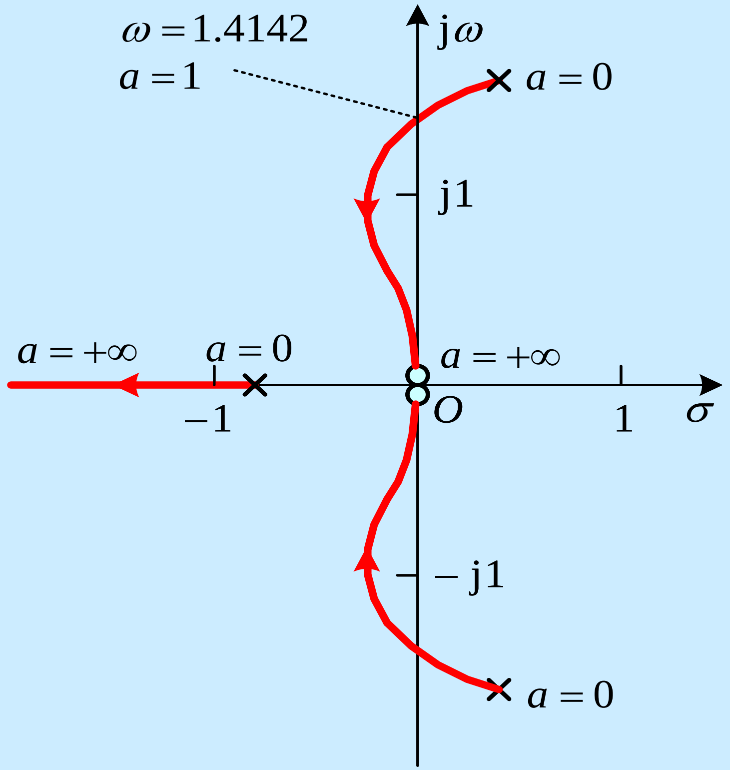
OL零点: 0, 0

- 与虚轴的交点

$$\omega = 1.4142 \qquad a = 1$$

- 闭环稳定的条件

$$a > 1$$



2. 根轨迹簇

- **指闭环极点为两个特定参数的函数**

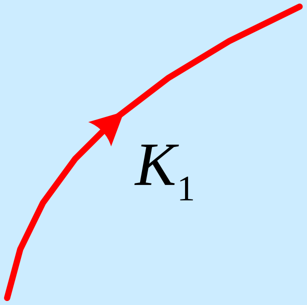
- **令闭环特征方程如下**

$$P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)=0$$

其中 $P(s)$ **,** $Q_1(s)$ **,** $Q_2(s)$ **为多项式**

(1) 令$K_2=0$ **, 则** $P(s)+K_1Q_1(s)=0$

$$1+\frac{K_1Q_1(s)}{P(s)}=0$$



- **相应的等价开环传递函数为**

$$G_1(s)F_1(s)=\frac{K_1Q_1(s)}{P(s)}$$

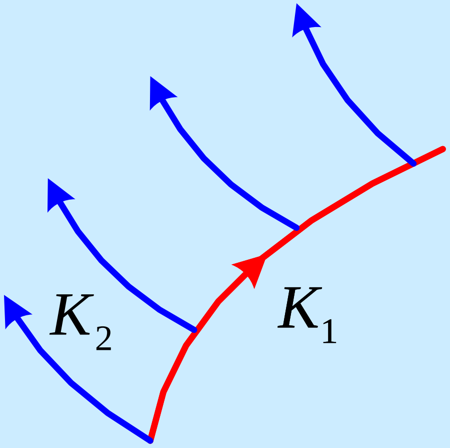
- $K_1=0\rightarrow\infty$ 对应的根轨迹代表了$P(s)+K_1Q_1(s)=0$的根

(2) 闭环特征方程改写如下

$$1+\frac{K_2Q_2(s)}{P(s)+K_1Q_1(s)}=0$$

- **相应的开环传递函数为**

$$G_2(s)F_2(s)=\frac{K_2Q_2(s)}{P(s)+K_1Q_1(s)}$$



- $G_2(s)F_2(s)$的开环极点 **：**
  位于$G_1(s)F_1(s)$的根轨迹上

- $G_2(s)F_2(s)$的根轨迹始于$G_1(s)F_1(s)$给定K_1时的根

- **随着**K_1**的变化形成了根轨迹的集合**

例 5.4.7 给定如下开环传递函数，绘制K和a变化的根轨迹簇

$$G(s)=\frac{K}{s(s+a)} \quad F(s)=1 \quad K>0 \quad a>0$$

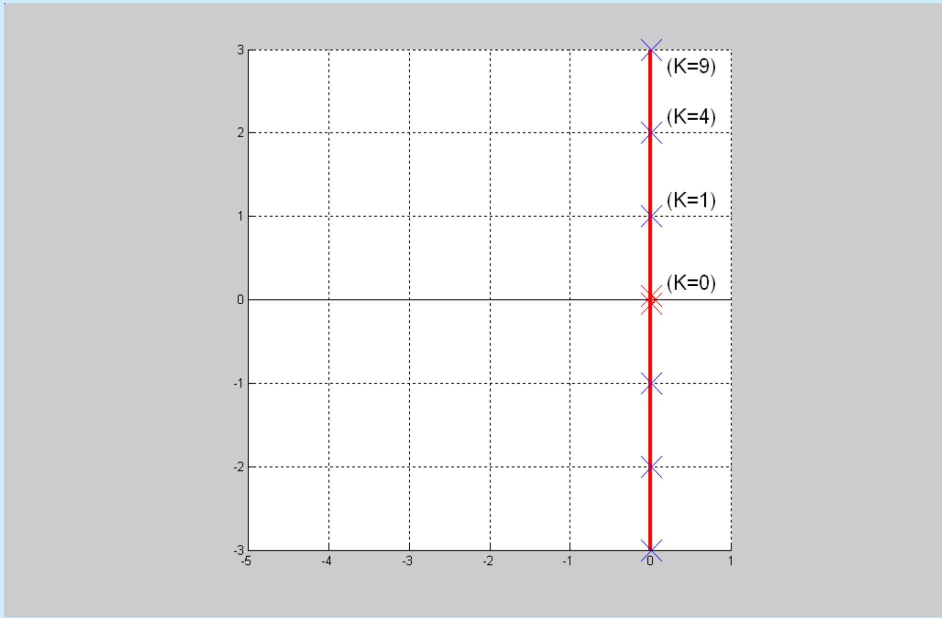
Solution:

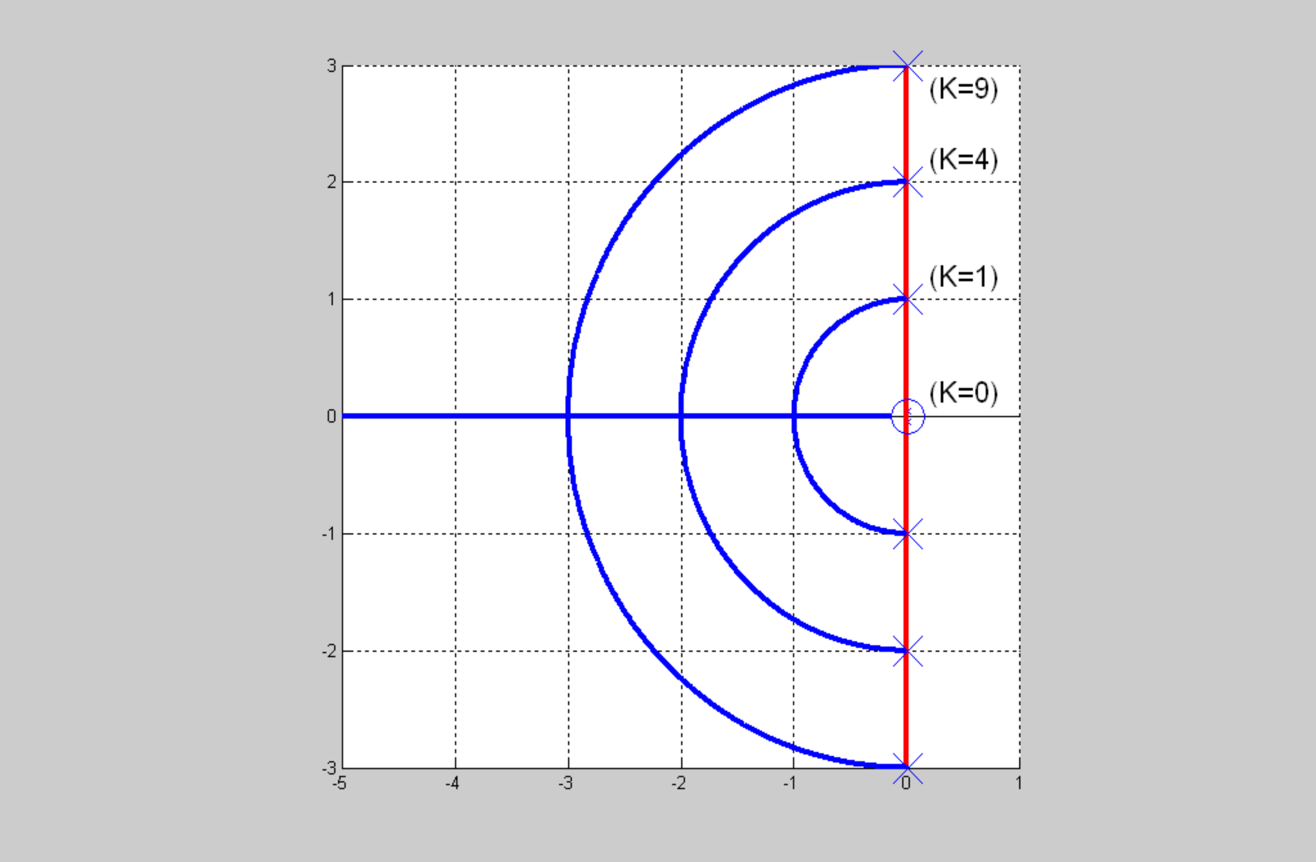
CL特征方程: $s^2+as+K=0$

(i) 令$a=0$**, 则** $s^2+K=0$

$$G_1(s)F_1(s)=\frac{K}{s^2}$$

- **根轨迹恰好是虚轴**





(ii) 令K为常数，则

$$1+\frac{as}{s^2+K}=0$$

- **绘制** $G(s)F(s)=\dfrac{as}{s^2+K}$ **的根轨迹**

OL极点: $\pm \mathrm{j}\sqrt{K}$ **OL零点: 0**

5.4.5 纯时滞系统，$W(s)$是有理分式

$$G(s)F(s)=KW(s)\mathrm{e}^{-Ts} \qquad K>0$$

1. 根轨迹条件

- 令 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ ，则 $\mathrm{e}^{-Ts}=\mathrm{e}^{-T\sigma-\mathrm{j}T\omega}$
- **CL特征方程:** $1+KW(s)\,\mathrm{e}^{-Ts}=0$

$$KW(s)\,\mathrm{e}^{-T\sigma-\mathrm{j}T\omega}=-1$$

- 由于

$$\left.\begin{cases}\left|G(s)F(s)\right|=\left|KW(s)\right|\mathrm{e}^{-T\sigma} & =1\\ \arg\left[G(s)F(s)\right]=\arg W(s)-T\omega & =-(2k+1)\pi\end{cases}\right\}$$

- 从而

$$\begin{cases}\left|KW(s)\right|\mathrm{e}^{-T\sigma}=1\\ \arg W(s)=\pm(2k+1)\pi+\omega T \qquad k=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

2. 性质

(1) 出发点 $(K=0)$

$$\lim_{K\to 0}\frac{1}{K}=\infty \qquad \lim_{K\to 0}\left|W(s)\right|\mathrm{e}^{-T\sigma}=\infty$$

- $W(s)$的所有极点和$\sigma\to-\infty$的点

(2) 终止点 $(K\to\infty)$

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K}=0 \qquad \lim_{K\to\infty}\left|W(s)\right|\mathrm{e}^{-T\sigma}=0$$

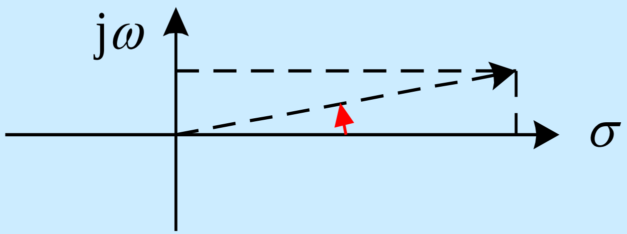
- $W(s)$的所有零点和$\sigma\to+\infty$的点

(3) 渐近线

- **当** $K \to 0$ **和** $K \to \infty$ **时，** $s \to \infty$ **, 则**

$$\arg W(s)\big|_{s\to\infty} = \arg\frac{1}{s^{n-m}} = -(n-m)\arctan\frac{\omega}{\sigma}$$

♦ $\sigma \to +\infty$



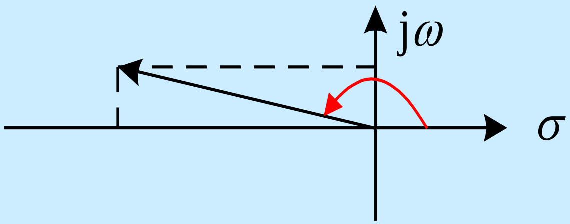
$$\arctan\frac{\omega}{\sigma} \to 0$$

$$\arg W(s) = 0$$

$$\arg W(s) = \pm(2k+1)\pi + \omega T = 0$$

$$\omega = \frac{\pm(2k+1)\pi}{T} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

◆ $\sigma \to -\infty$



$$\arctan\frac{\omega}{\sigma} \to \pi$$

$$\arg W(s) = -(n-m)\pi$$

$$\arg W(s) = \pm(2k+1)\pi + \omega T = -(n-m)\pi$$

$$\omega = -\frac{(n-m)\pm(2k+1)}{T}\cdot\pi$$

- **如果 $n-m$ 为奇数**

$$\omega = \frac{2k\pi}{T} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

- **如果 $n-m$ 为偶数**

$$\omega = \frac{(2k+1)\pi}{T} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

- **所有渐近线平行于实轴**

(4) 分支数：无穷多

(5) 实轴上的根轨迹

- **与** $G(s)F(s)=KW(s)$**相同**

  因为 $\omega=0$

(6) 分离点

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[-\frac{\mathrm{e}^{Ts}}{W(s)}\right]=0$$

例 5.4.8 系统开环传递函数如下，绘制根轨迹

$$G(s)=\frac{Ke^{-Ts}}{s+1} \qquad F(s)=1 \qquad T=1$$

Solution:

(i) $W(s) = \dfrac{1}{s+1}$

$$K = -(s+1)\mathrm{e}^{Ts}$$

(ii) 渐近线:

$\sigma \to +\infty$

$$\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \cdots$$

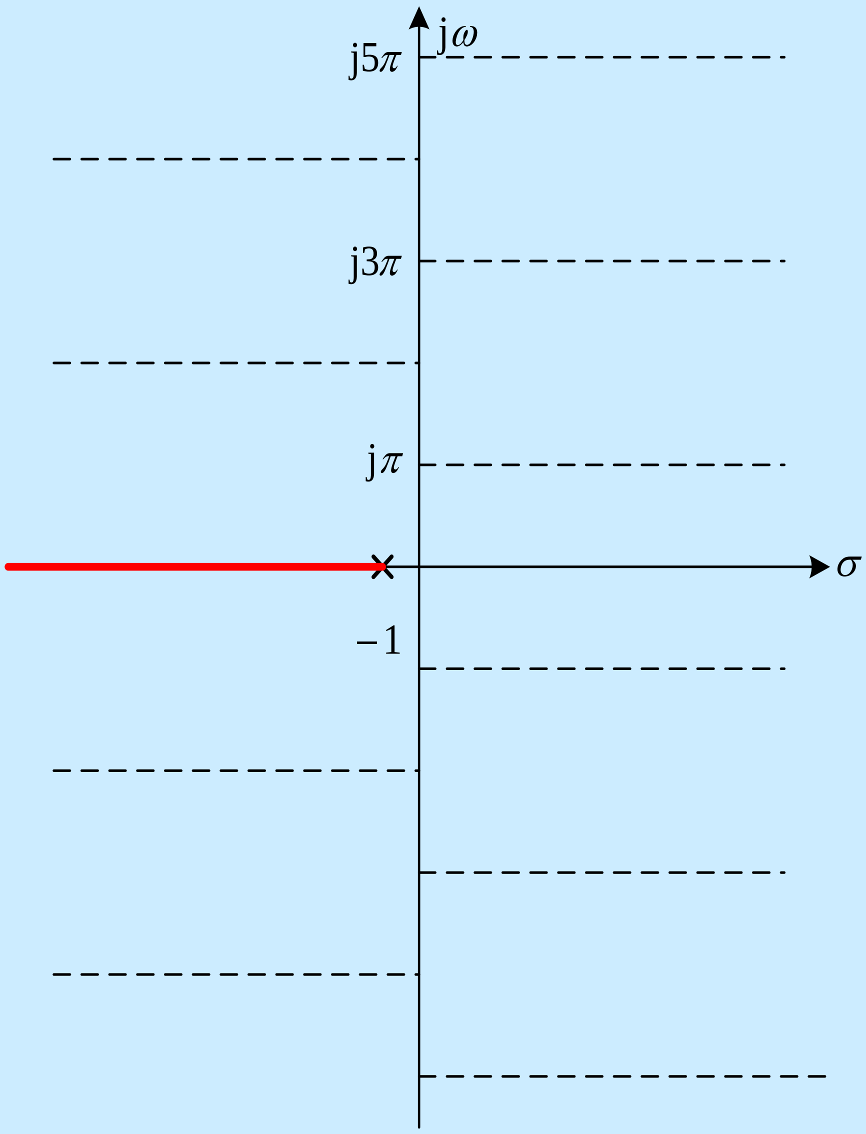
$\sigma \to -\infty$

($n - m = 1$: 奇数)

$$\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$$

(iii) 实轴上根轨迹:

$$(-\infty,\ -1)$$



(iv) 分离点

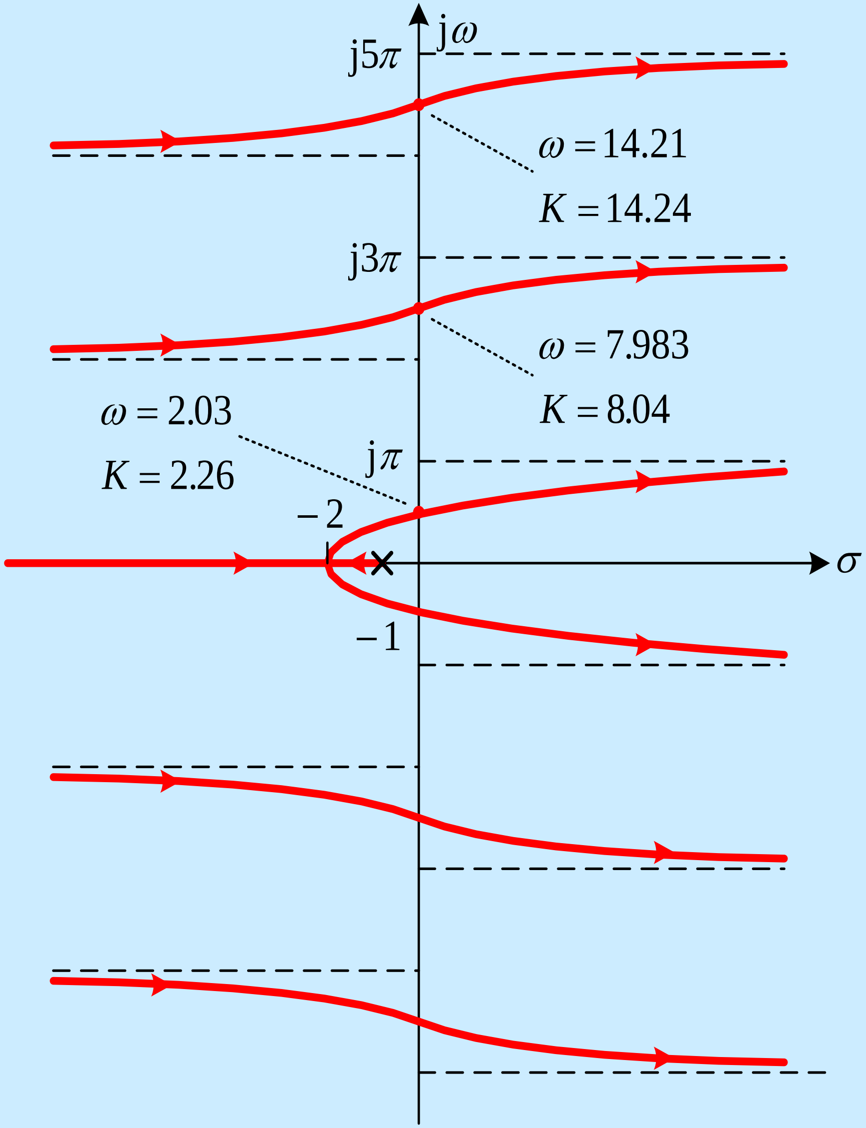
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[-(s+1)\mathrm{e}^{Ts}\right]$$

$$=-T(s+1)\mathrm{e}^{Ts}-\mathrm{e}^{Ts}$$

$$=\mathrm{e}^{Ts}(-Ts-T-1)=0$$

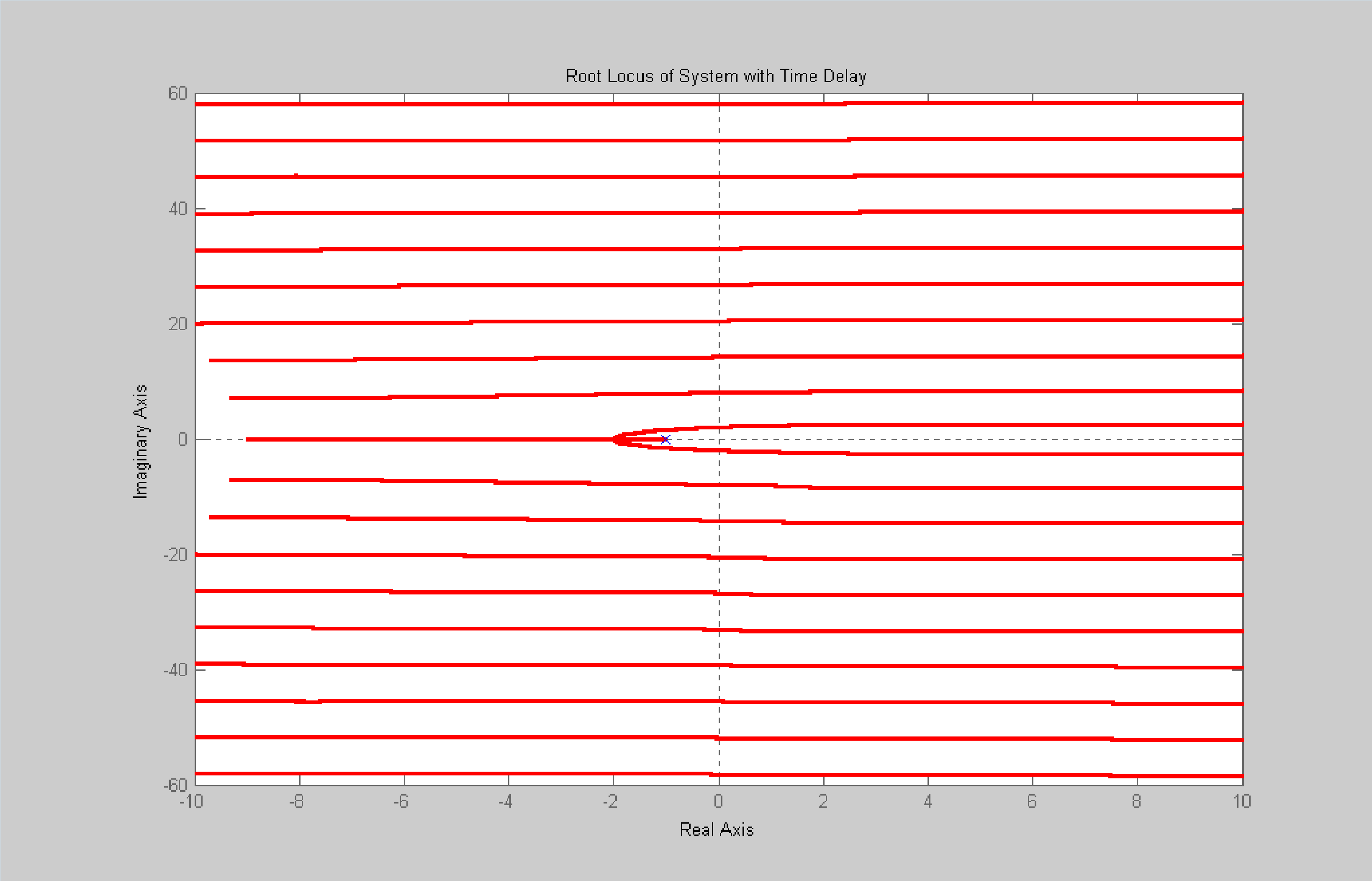
$$s=-\frac{T+1}{T}=-2$$

(v) 根轨迹



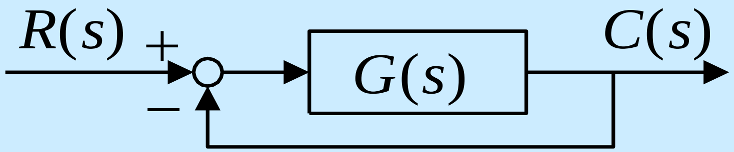
*** 时滞导致不稳定性**

(vi) 较大范围内的根轨迹



5.5 补根轨迹

1. 一些非最小相位系统的根轨迹条件



$$G(s)=\frac{K(1-T_1 s)}{s(1+Ts)} \qquad T_1>0 \quad K>0 \quad T>0$$

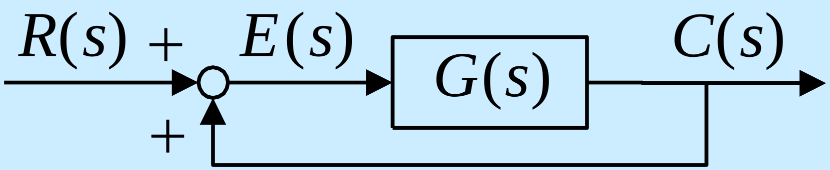
- **相角条件**

$$\arg G(s)=\arg\frac{K(1-T_1 s)}{s(1+Ts)}=\arg\left[-\frac{K(T_1 s-1)}{s(Ts+1)}\right]$$

$$=\pi+\arg\left[\frac{K(T_1 s-1)}{s(Ts+1)}\right] =\pm(2k+1)\pi$$

$$\arg\frac{K(T_1 s-1)}{s(Ts+1)}=\pm 2k\pi \qquad k=0,\,1,\,2,\,\cdots$$

2. 正反馈结构系统的根轨迹条件



$$C(s)=G(s)E(s)=G(s)\left[R(s)+C(s)\right]$$
$$=G(s)R(s)+G(s)C(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1-G(s)}$$

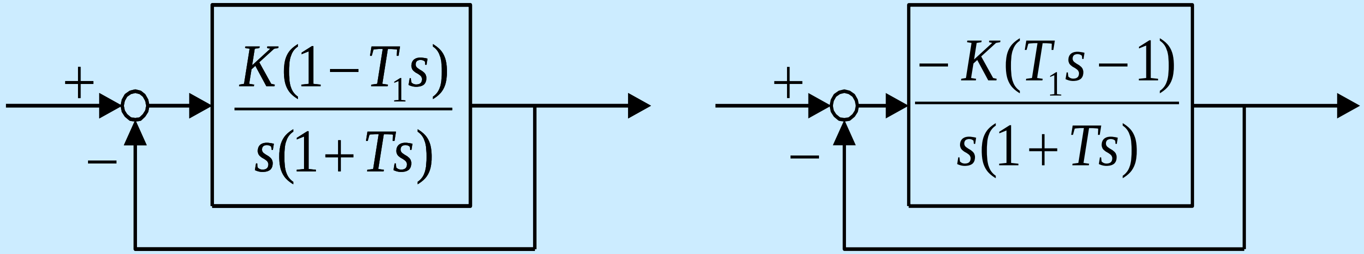
- **CL系统的特征方程** $1-G(s)=0$ $\quad G(s)=1$

- **相角条件:** $\arg G(s)=\pm 2k\pi \quad k=0,1,2,\cdots$

♦ **注:** arg $G(s)$ = – $(2k+1)\pi$ 不再是绘制根轨迹的充分条件

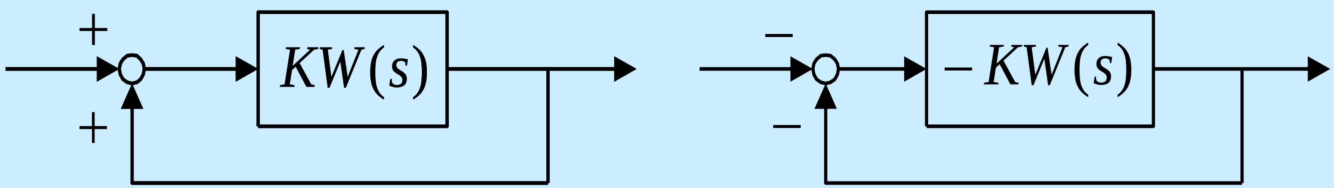
3. 补根轨迹和全根轨迹

- 非最小相位系统



$K > 0$ $\qquad$ $K_1 = -K < 0$

- 正反馈系统



$K > 0$ $\qquad$ $K_2 = -K < 0$

♦ 系统分析需要讨论负增益时的根轨迹

负反馈系统的开环传递函数如下：

$$G(s)F(s) = \frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$0 < K < \infty$	**根轨迹**
$-\infty < K < 0$	**补根轨迹**
$-\infty < K < \infty$	**全根轨迹**

4. 绘制负反馈系统在$K<0$时的根轨迹

♦ $K<0$时根轨迹的条件

- **CL特征方程** $G(s)F(s)=KW(s)=-1 \qquad K<0$
- **令** $K'=-K$**，则**

$$K'W(s)=1 \qquad K'>0$$

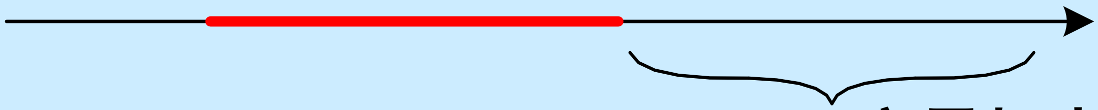
- **根轨迹条件:**

$$\begin{cases} \left|K'W(s)\right|=1 \\ \arg W(s)=\pm 2k\pi, \quad k=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

- **所有与相角条件相关的性质需要修改**

♦ 性质修改

- **实轴上的根轨迹**



实零极点总数为偶数

- **渐近线**

$$\gamma = \frac{\pm 2k\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-m-1$$

- **出发角和入射角**

$$\varphi_{pr} = \pm 2k\pi + \sum_{i=1}^{m} \arg(p_r - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} \arg(p_r - p_j)$$

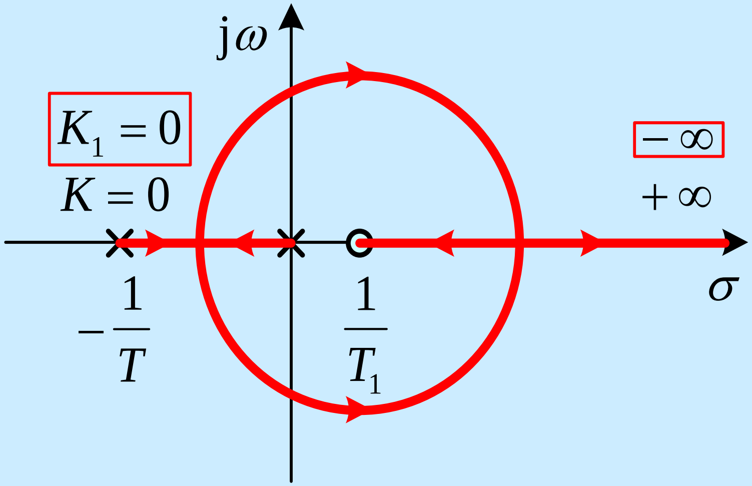
$$\varphi_{zr} = \pm 2k\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} \arg(z_r - z_i) + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_r - p_j)$$

例 5.5.1 绘制根轨迹

$$G(s)F(s)=\frac{K(1-T_1 s)}{s(Ts+1)},\quad K>0,\ T_1>0,\ T>0$$

Solution: • 重写开环传递函数

$$G(s)F(s)=\frac{-K(T_1 s-1)}{s(Ts+1)}=\frac{K_1\left(s-\frac{1}{T_1}\right)}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)}$$



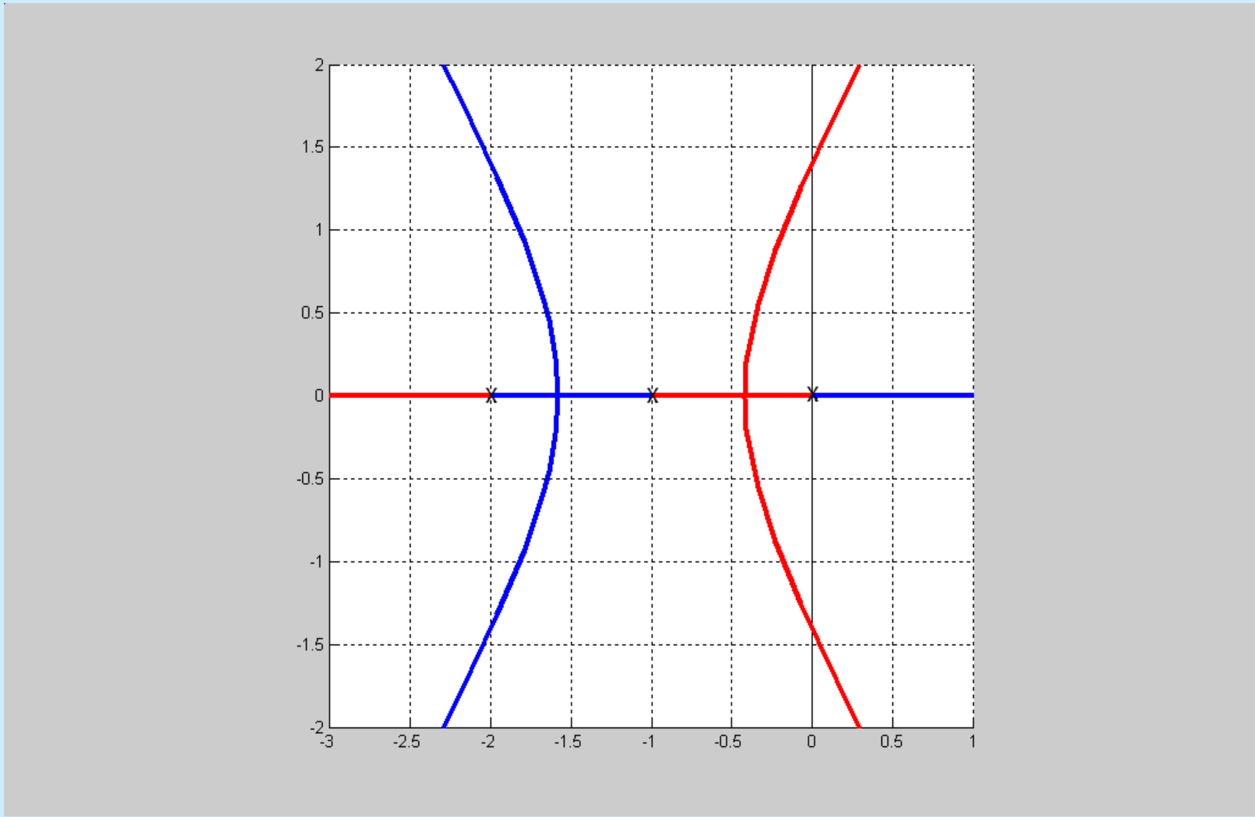
其中 $K_1=\frac{-KT_1}{T}<0$

• $0<K<\infty$ 时的根轨迹就是 $-\infty<K_1<0$ 时的补根轨迹

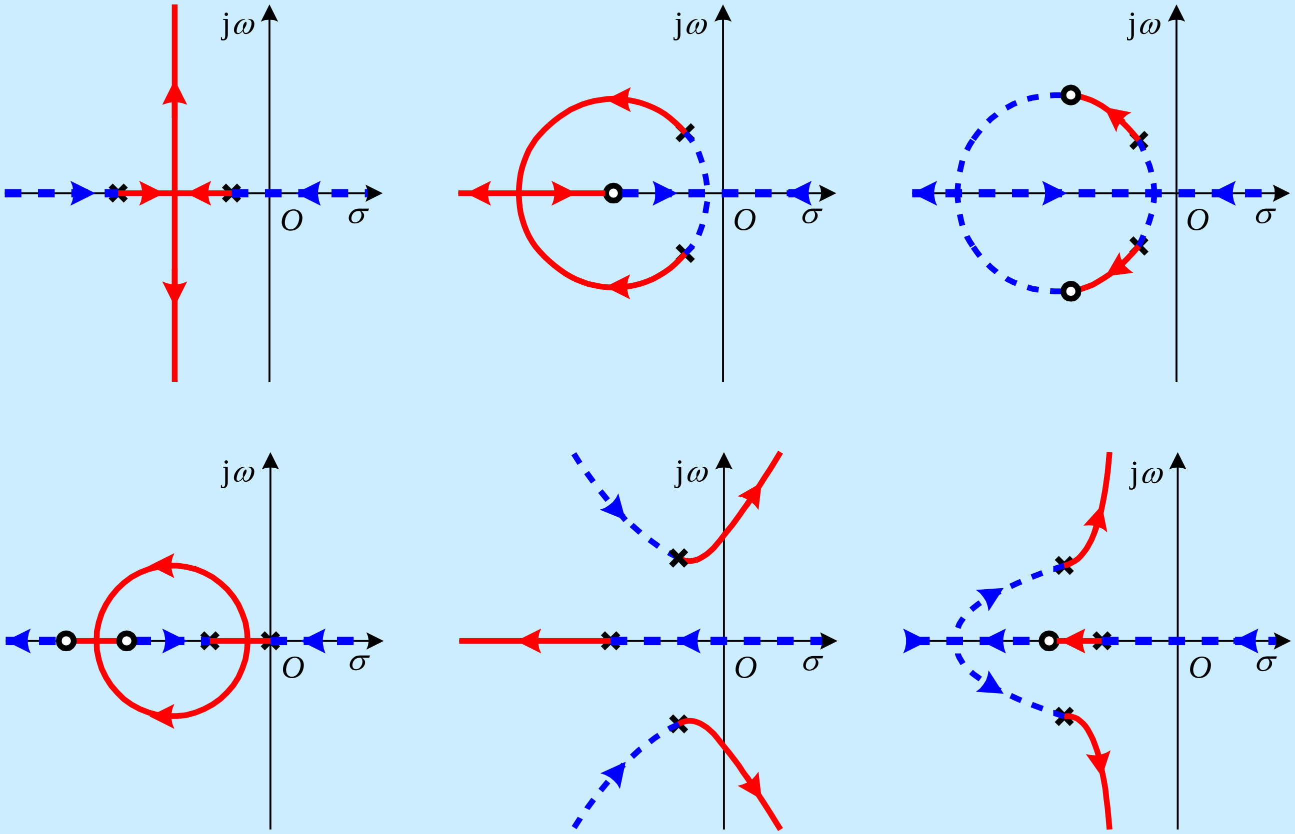
例 5.5.2 绘制系统的全根轨迹

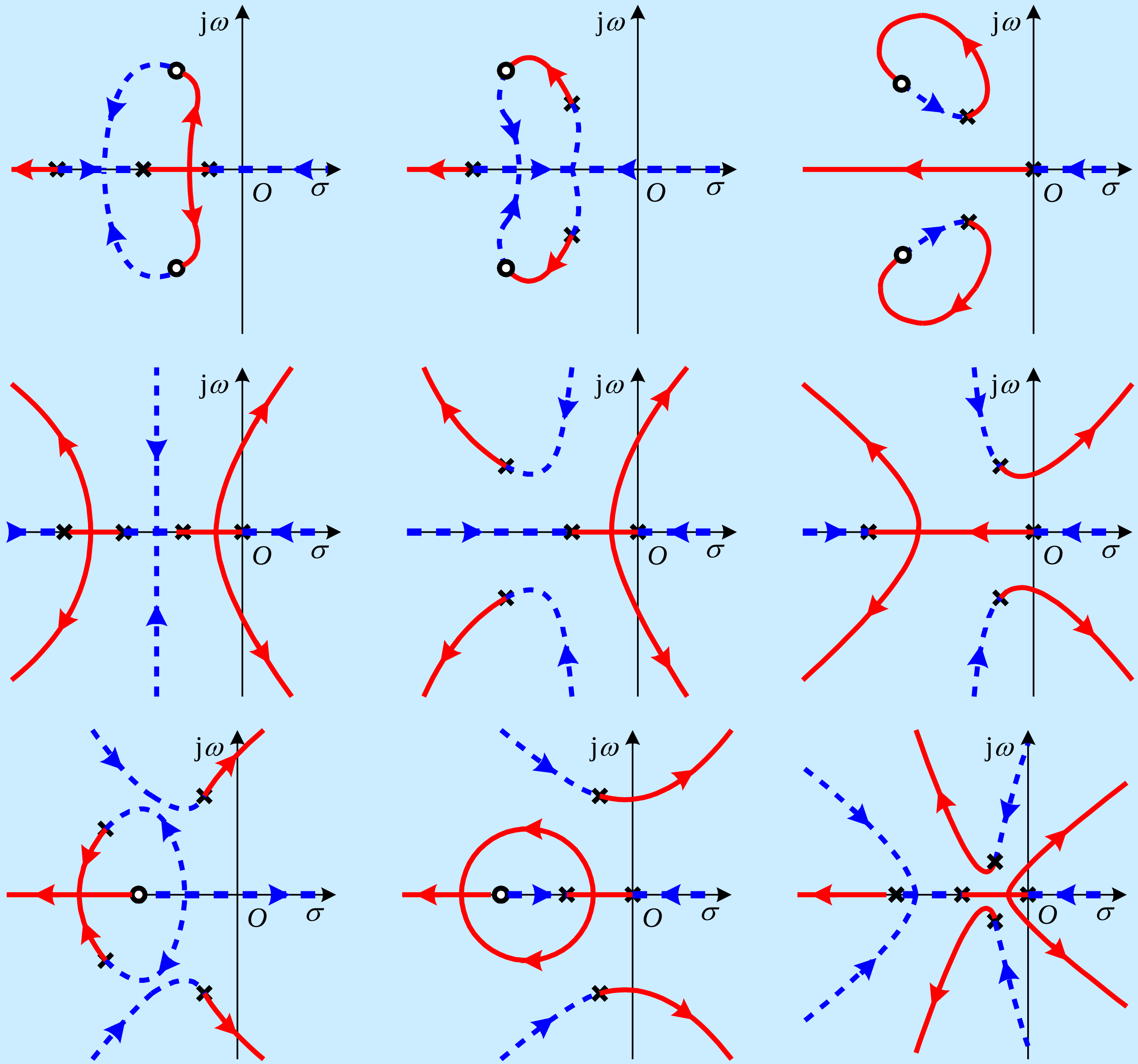
$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)},\qquad F(s)=1$$

Solution:



♦ 典型全根轨迹




jω
O
σ

End of Chapter 5