考生类别____________

学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

密 封 线

第 35 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

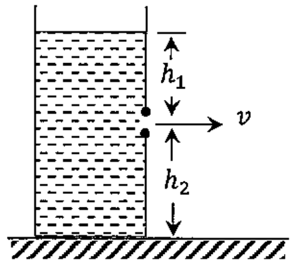
北京物理学会编印　　　　2018 年 12 月 9 日

题号	一	二			
	1～10	11	12	13	14
分数					
阅卷人					
题号	三			总分	
	15	16	17		
分数					
阅卷人					

答题说明：前 14 题是必做题，满分是 120 分；文管组和农林医组只做必做题；除必做题外，非物理 B 组限做 15 题，满分 140 分；非物理 A 组限做 15、16 题，满分 160 分；物理组限做 15、17 题，满分 160 分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理。请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

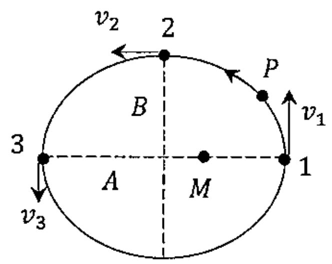
一、填空题（必做，共 10 题，每题 2 空，每空 3 分，共 60 分）

1.重力场中，理想流体定常流动的伯努利方程可表述为____________________。据此方程可知，右图中盛水容器侧面小孔流速 $v=$____________。



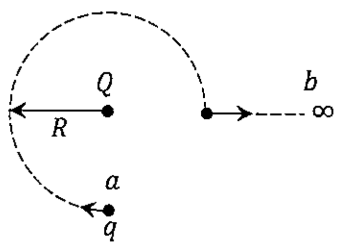
水平地面

2.设太阳固定在惯性系中不动，某行星 P 围绕太阳在一椭圆轨道运动，如图所示。其中位置 1 为近太阳点，3 为远太阳点，2 为椭圆短轴顶点。将太阳的质量记为 M，椭圆半长轴、半短轴分别记为 A、B。P 在位置 2 处速度 $v_2=$____________。已知椭圆面积为 πAB，则可导得 P 的轨道运动周期 $T=$____________。

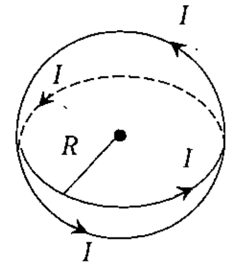


3.热力学系统处于某一宏观态时，将它的熵记为 S，该宏观态包含的微观态数记为 W，玻尔兹曼假设两者的关系为______________。一个系统从平衡态 A 绝热过程到达平衡态 B，状态 A 的熵 S_A 与状态 B 的熵 S_B 之间大小关系必为______________。

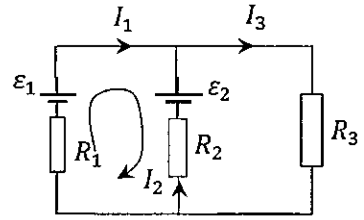
4.如图所示，电量为 q 的试验电荷在电量为 Q 的静止点电荷电场中，沿半径为 R 的四分之三圆弧轨道，由 a 点移动到 b 点的全过程中电场力做功量为______________。从 b 点再移动到无穷远的全过程中，电场力做功量为______________。



5. 据稳恒电流磁场的毕奥—沙伐尔定律 $d\vec{B}=$______________，可以求得图中两个互相垂直的圆环电流公共中心处的磁感应强度大小为 $B=$______________。



6.直流电路如图所示，各支路电流方向已在图中设定。据此，节点电流方程为______________，左侧小回路电压方程为______________。

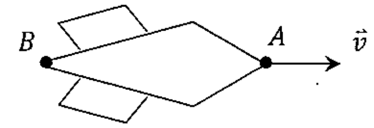


7.用钠黄光（$\lambda=589.3\ \mathrm{nm}$）观察迈克尔孙干涉仪的等倾圆条纹，开始时中心为亮斑。移动干涉仪一臂的平面镜，观察到共有 200 个亮环缩进中央，视场中心仍为亮斑，则平面镜移动的距离为______________ nm。若开始时中心亮斑的干涉级次为 K，则最后中心亮斑的干涉级次为______________。

8.两块理想的偏振片 P_1 和 P_2 平行放置，光强为 I_0 的自然光正入射到 P_1，出射光束的光强为______________。若此光束再经 P_2 后透光全消失，则 P_1 透光轴与 P_2 透光轴之间的夹角为______________。

9.设想将地球挤压成半径为 R_0 的小球体，光子在小球体的万有引力作用下，恰好能沿着球体表面作匀速圆周运动，地球便成为一个"黑洞"。已知地球真实半径 $R=6.4\times10^6\ \mathrm{m}$，地面重力加速度 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$，真空光速 $c=3.0\times10^8\ \mathrm{m/s}$。地球成为"黑洞"的半径 $R_0=$______________m，此时地球"表面"重力加速度 $g_0=$______________$\mathrm{m/s^2}$。（如上解答请保留两位有效数字，仅考虑经典引力的情形。）

10.静长为 l_0 的火箭以恒定速度 $\vec{v}$ 相对某惯性系 S 运动，如图所示。从火箭头部 A 发出一个光讯号，火箭上观察者认为需要经时间 $t'=$________到达尾部 B。S 系观察者认为需经时间 $t=$________到达尾部 B。（速率 v 的大小可与真空光速 c 比拟。）



S系________________

二、计算题（必做，共4题，每题15分，共60分）

11.（15分）如图1所示，三条边长各为 l_1、l_2、l_3 的均匀长方体电阻块，电流从左侧表面 A 均匀流到右侧表面 B，已测得其电阻为 $R_{AB}=10\,\Omega$。若将其各边长都增大一倍，质材不变，试分析地判定相应的电阻 $R_{AB}^*=?$

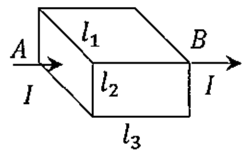


图1

如图2所示，每边长为 l 的均匀正方形电阻薄平板，已测得 A、B 两端间电阻 $R_{AB}=5\Omega$。若将每边长都增为 $2l$，质材不变，试分析地判定相应的电阻 $R_{AB}^*=?$

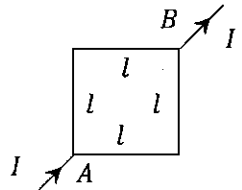
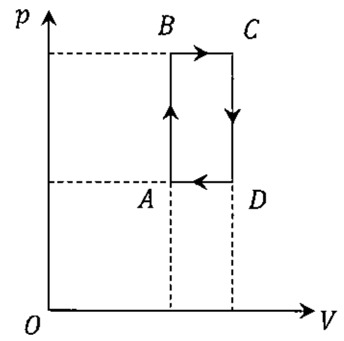


图2

12.（15分）某种双原子分子理想气体，其振动自由度在温度 $T<2T_0$ 时未被激发，在 $T=2T_0$ 时即被激发。ν 摩尔的此种气体经历的矩形循环过程 $ABCDA$ 如图所示，其中 A、B、C 处温度分别为 T_0、$2T_0$、$3T_0$。

（1）画出循环过程中气体内能 U 随温度 T 的变化曲线，其中 U 的单位取为 νRT_0。

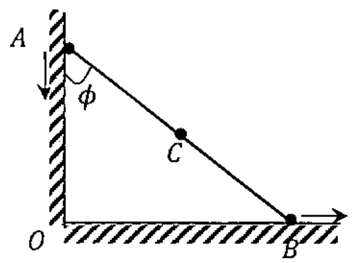
（2）计算循环效率 η。



学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

********密********封********线********

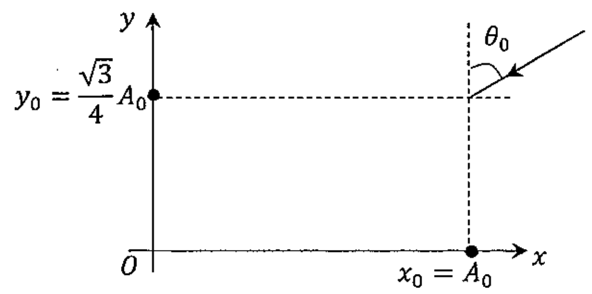
13.（15 分）如图所示，轻的细杆 ACB 的 A 端靠在竖直墙上，B 端落在水平地面上，A 端、B 端和杆的中点 C 处各有质量相同的固定小球。开始时图中角 $\phi=0$，细杆静止，后因微小扰动，细杆开始运动，设系统处处无摩擦。假设 B 端可以沿地面朝右滑动，但因受约束，不会离开地面；A 端可以沿着墙面朝下滑动，但不受相应的约束，故可以离开墙面。试问在 A 端未达墙的底端 O 之前，A 端会否离开墙面？若会，再问 ϕ 达何值时 A 端离开墙面？



14.（15 分）如图所示，在 $O-xy$ 平面内，光线从 $x_0=A_0>0$、$y_0=\frac{\sqrt{3}}{4}A_0$ 点右上方入射，入射方向与 y 轴夹角 $\theta_0=60°$。假设在讨论的区域内，平面上介质折射率 n 随 y 的分布函数为

$$n(y)=\alpha n_0\sqrt{\frac{A_0^2}{16y^2}+5}$$

其中 n_0 为 $y=y_0$ 处介质的折射率，试求 α 值和在 $y>0$ 区域内的光线方程 $y \sim x$。



考场____ 准考证号____ 姓名____ 学校____

三、限做题（根据考生类别选做）

15.（20 分）相对论中，质点在惯性系 S 中静止时，它的质量 m_0 称为静质量，质点内在的能量称为静能 E_0，且有

$$E_0 = m_0c^2$$

质点在 S 系中运动时，速度记为 $\vec{u}$，质点质量 m 和内含的能量 E 分别为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, E = mc^2$$

称

$$E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

为质点动能。引入质点动量

$$\vec{P} = m\vec{u} \ \ \Rightarrow \ \ \vec{u} = 0 \text{ 时} \vec{P} = 0$$

质点动能关系、动能定理：

相对论中牛顿第二定律被修正为

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt}$$

据此，可从数学上导得

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = d(mc^2) = dE$：质点功能关系的微分式

$W = \Delta E$：质点功能关系的积分式

因

$$dE = d(E_K + E_0) = dE_K + dE_0 = dE_K$$

又可得

$dW = dE_K$：质点动能定理的微分式

$W = \Delta E_K$：质点动能定理的积分式

质量动量定理：

$d\vec{I} = \vec{F}\cdot dt = d\vec{P} = d(m\vec{u})$ 微分式

$\vec{I} = \int d\vec{I} = \int d(m\vec{u}) = \Delta(m\vec{u})$ 积分式

实例：

静质量为 m_0 的质点静止于 $x = 0$ 点，$t = 0$ 开始在一个沿 x 轴正方向的恒力 $\vec{F}$ 作用下运动。在某个 $t > 0$ 时刻，质点所在位置记为 x，速度大小为 u，则由质点动能定理（动能关系）和质点动量定理可得

$$Fx = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m_0c^2 \quad (A), \qquad Ft = \frac{m_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (B)$$

待解问题：

（1）（6 分）引入

简化常量 $\alpha = \frac{F}{m_0c^2}$

试解出下述三个小问，答案中不可出现参量 m_0、F，但可出现 α。

（1.1）导出实例中质点速度 u 随位置 x 的变化关系；

（1.2）导出实例中质点速度 u 随时间 t 的变化关系；

（1.3）导出实例中质点位置 x 随时间 t 的变化关系。

（2）（14 分）无重力的惯性系 S 中有一个半径为 R 的固定圆环。一个静质量为 m_0 的小球，开始时静止在环内某一点 P，然后在大小为 F 常量，方向始终沿着轨道切线方向的力作用下，贴着环的内壁无摩擦地平动。运动过程中，环壁的弹力大小记为 N，仍记 $\alpha = \frac{F}{m_0c^2}$，试求小球绕过一周回到 P 点的过程中 N 的时间平均值 $\bar{N}$。

再设

$$\alpha = \frac{1}{\pi R}$$

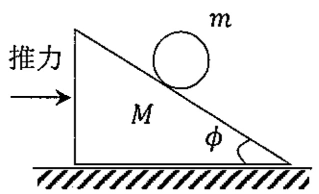
给出对应的 $\bar{N}$ 与 F 的比值：$\sigma = \bar{N}/F$。

供参考的积分公式：$\int\sqrt{\gamma^2-1}d\gamma = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\gamma^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}\right) + C$

学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

**********密**********封**********线**********

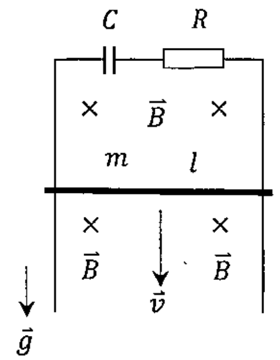
16.（20 分）如图所示，光滑水平面上有一个质量为 M 、倾角为 ϕ 的斜木块，木块的斜面上有一个质量为 m 、半径不可忽略的均匀小球。初始时系统处于静止状态，并开始在木块的左侧面上施加一个水平朝右的恒力，使木块朝右平动，小球则可以相对静止在斜面上或沿斜面滚动。假设小球与木块斜面间的摩擦因数较大，使小球与斜面间不会发生相对滑动。



（1）若小球相对斜面恰好静止，试求木块朝右的平动加速度 $a_M(1)$；

（2）将（1）问对应的推力大小记为 F_0，改取推力为 $2F_0$，再求木块朝右的平动加速度 $a_M(2)$，进而判定小球沿斜面向下还是向上滚动。答案中不可包含参量 F_0。

17.（20 分）涉及动生感应的系统及相关参量如图所示，除电阻器外，其它部位电阻均可略，且整个电路自感可略。一开始电容不带电，导体棒静止。$t=0$ 时刻，将导体棒自由释放，棒可沿两侧固定的金属导轨无摩擦地竖直向下滑动。取 $B=\sqrt{\frac{m}{Cl^2}}$，试求 $t\geq 0$ 时刻电容器极板电量 q 和导体棒向下速度 v。（结果中不得出现 B 、l 参量。）



第 35 届全国部分地区大学生物理竞赛

参考解答

2018.12

一、填空题（共 10 题，每题 2 空，每空 3 分，共 60 分）

1. $p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh=$ 常量，$\sqrt{2gh_1}$。

2. $\sqrt{GM/A}$，$2\pi A\sqrt{A/GM}$。

3. $S=k\ln W$，$S_B\geq S_A$。

4. 0，$^{qQ}/_{4\pi\varepsilon_0 R}$。

5. $\mu_0 I d\vec{l}\times{}^{\vec{r}}/_{4\pi r^3}$，$^{\sqrt{2}\mu_0 I}/_{2R}$。

6. $I_1+I_2=I_3$，$I_1R_1-I_2R_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2$。

7. 5.893×10^4，$K-200$。

8. $I_0/2$，$90°$。

9. 4.5×10^{-3}，2.0×10^{19}。

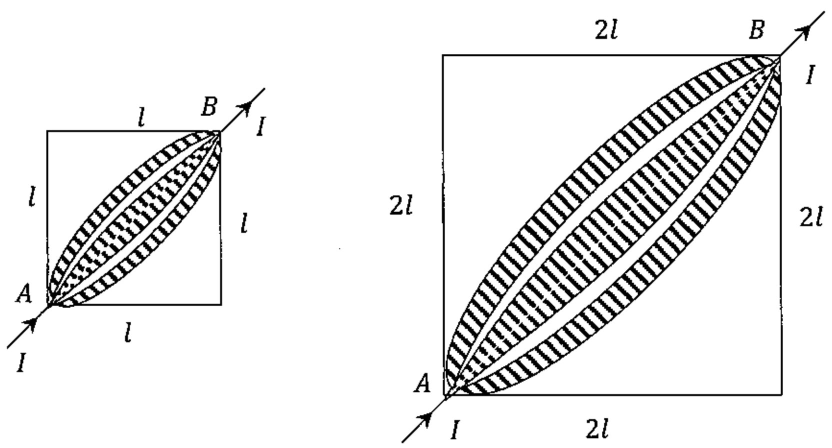
10. l_0/c，$\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\frac{l_0}{c}$。

二、计算题（共 4 题，每题 15 分，共 60 分）

11.（15 分）

解：图 1：$R_{AB}=\rho l_3/l_1l_2$，$R^*_{AB}=\frac{\rho\cdot 2l_3}{2l_1\cdot 2l_2}=\frac{1}{2}R_{AB}\quad\Rightarrow R^*_{AB}=5\Omega$（5 分）

图 2：

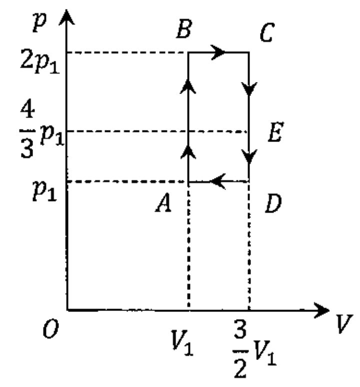


右图每一个小流管电阻，会因流管长度加倍而加倍，又会因横向线度也加倍而会降半，故 $R^*_{AB}=R_{AB}=5\Omega$。（10 分）

12. （15 分）

解：（1）由 $T_A=T_0$、$T_B=2T_0$、$T_C=3T_0$，可将 A、B、C、D 四处 p、V 参量标记为题解图 1 所示，可得 D 处温度和 $C-D$ 过程中存在状态 E，其状态量分别为

$$T_D=\frac{3}{2}T_0,\qquad \begin{cases} p_E=\frac{4}{3}p_1 \\ T_E=2T_0 \end{cases}$$



题解图 1

据 $U=\nu C_{mV}T$，$C_{mV}=\begin{cases}\frac{5}{2}R, T<2T_0\\ \frac{7}{2}R, T\geq 2T_0\end{cases}$

得 $U-T$ 曲线如题解图 2 所示。　　（6 分）

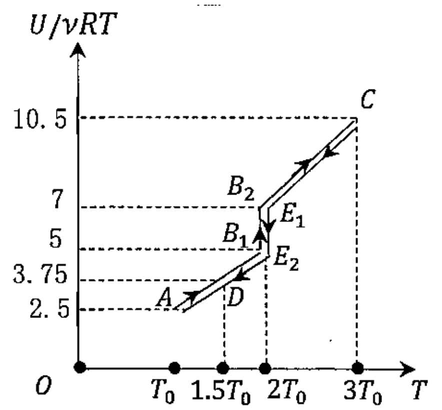
（2）

$$Q_{AB吸}=U_B-U_A=\frac{7}{2}\nu RT_B-\frac{5}{2}\nu RT_A$$

$$=\frac{9}{2}\nu RT_0$$

$$Q_{BC吸}=\nu C_{mp}^{(1)}(T_C-T_B)=\frac{9}{2}\nu RT_0$$

$$Q_{吸}=Q_{AB吸}+Q_{BC吸}=9\nu RT_0$$



题解图 2

$$Q_{CD放}=U_C-U_D=\frac{7}{2}\nu RT_C-\frac{5}{2}\nu RT_D=\frac{27}{4}\nu RT_0$$

$$Q_{DA放}=\nu C_{mp}^{(2)}(T_D-T_A)=\frac{7}{4}\nu RT_0$$

$$Q_{放}=Q_{CD放}+Q_{DA放}=\frac{34}{4}\nu RT_0$$

得　$\eta=1-\frac{Q_{放}}{Q_{吸}}=\frac{1}{18}=5.6\%$　　（9 分）

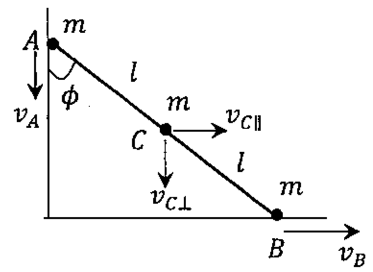
附注：$C_{mp}^{(1)}=\frac{9}{2}R$，$C_{mp}^{(2)}=\frac{7}{2}R$

13.（15 分）

解：将细杆长记为 $2l$，每个小球质量记为 m，C 点速度分解已在图中标出。速度间关系如下：

$$v_A\cos\phi = v_B\sin\phi\ ,v_{C\perp}=\frac{1}{2}v_A\ ,v_{C\parallel}=\frac{1}{2}v_B$$

$$v_C^2=\frac{1}{4}(v_A^2+v_B^2)$$



由能量守恒，得

$$mg\cdot 2l(1-\cos\phi)+mgl(1-\cos\phi)$$
$$=\frac{1}{2}m(v_A^2+v_B^2+v_C^2)$$

与上式联立可得

$$v_A^2+v_B^2=\frac{24}{5}gl(1-\cos\phi)$$

再将 $v_A=\frac{\sin\phi}{\cos\phi}v_B$ 代入，得

$$v_B^2=\frac{24}{5}gl(1-\cos\phi)\cos^2\phi$$

系统水平朝右动量

$$P_\parallel=mv_B+mv_{C\parallel}=\frac{3}{2}mv_B=\frac{3}{2}m\sqrt{\frac{24}{5}gl(1-\cos\phi)}\cos\phi$$

ϕ 从 0 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 过程中，函数 $(1-\cos\phi)\cos^2\phi$ 乃至 $P_\parallel$ 都从 0 增大，但中间存在极大值。

$P_\parallel$ 的增大需由墙面给 A 端的水平朝右支持力 N 提供的冲量来实现。当 $P_\parallel$ 增到极大值时 $N=0$，A 端需离开墙面。可得结论：

A 端未达墙的底端 O 之前，A 端已离开墙面。　（9 分）

由

$$(1-\cos\phi)\cos^2\phi=4(1-\cos\phi)\left(\frac{1}{2}\cos\phi\right)\left(\frac{1}{2}\cos\phi\right)$$

和代数不等式

$ABC\le\frac{1}{3^3}(A+B+C)^3$，$A$、$B$、$C$ 均为正，等号在 $A=B=C$时取得

可知，当

$$1-\cos\phi=\frac{1}{2}\cos\phi=\frac{1}{2}\cos\phi\text{，即}\cos\phi=\frac{2}{3}$$

时，$(1-\cos\phi)\cos^2\phi$ 取得极大值，即 $P_\parallel$ 取得极大值。据此，

$$\phi=\arccos\frac{2}{3}=48.2^\circ$$

时，A 端离开墙面。（6 分）

14.（15 分）

解：（1）求 α：

$$n(y_0)=\alpha n_0\sqrt{\frac{A_0^2}{16\cdot\frac{3}{16}A_0^2}+5}=\alpha n_0\sqrt{\frac{1}{3}+5}=\alpha n_0\frac{4}{\sqrt{3}}$$

将 $n(y_0)=n_0$ 代入，即得

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}\qquad（3 分）$$

（2）求光线方程：

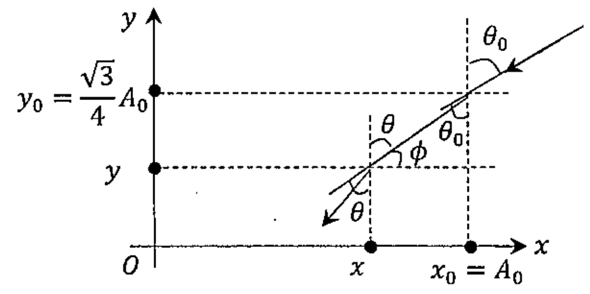
参考题解图，有

$$\cos\phi=\sin\theta=\frac{n_0}{n(y)}\sin\theta_0$$

$$=\frac{n_0}{\alpha n_0\sqrt{\frac{A_0^2}{16y^2}+5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{A_0^2}{16y^2}+5}}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{A_0^2}{y^2}+80}}=\frac{8}{\sqrt{\frac{A_0^2}{y^2}+80}}$$



题解图

$$\Rightarrow\cos^2\phi=\frac{64}{\frac{A_0^2}{y^2}+80}$$

又有

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(\tan\phi)^2=\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}=\frac{1-\cos^2\phi}{\cos^2\phi}=\frac{1}{\cos^2\phi}-1$$

$$=\frac{\frac{A_0^2}{y^2}+80}{64}-1=\left(\frac{A_0^2}{64y^2}+\frac{64}{64}+\frac{16}{64}\right)-1=\frac{A_0^2}{64y^2}+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{A_0^2}{16y^2}+1\right)=\frac{1}{4}\frac{A_0^2+16y^2}{16y^2}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{A_0^2+16y^2}}{8y}$$

$$\Rightarrow dx=\frac{8y}{\sqrt{A_0^2+16y^2}}dy$$

引入参量 u，使得

$$u^2=A_0^2+16y^2\quad\Rightarrow\quad 2udu=32ydy\quad\Rightarrow\quad 8ydy=\frac{1}{2}udu$$

代入上式，得

$$dx=\frac{\frac{1}{2}udu}{u}=\frac{1}{2}du$$

$$x_0=A_0\text{ 对应 }y_0=\frac{\sqrt{3}}{4}A_0\text{，}\Rightarrow\ u_0^2=A_0^2+16y_0^2=A_0^2+3A_0^2=4A_0^2\ \Rightarrow\ u_0=2A_0$$

与积分式

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{2} du$$

联立，得

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(u - u_0) \quad \Rightarrow \quad x - A_0 = \frac{1}{2}(u - 2A_0) = \frac{1}{2}u - A_0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sqrt{A_0^2 + 16y^2} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = A_0^2 + 16y^2$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 16y^2 = A_0^2$$

所求光线方程为

$$\frac{x^2}{\left(\frac{A_0}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{A_0}{4}\right)^2} = 1$$

即为双曲线。（12 分）

15.（20 分）

解：（1）

据(A)式可得（1.1）问解答：

$$u^2 = \left[1 - \frac{1}{(1+\alpha x)^2}\right]c^2 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\sqrt{\alpha x(2+\alpha x)}}{1+\alpha x}c \quad (1) \qquad (2\text{ 分})$$

据(B)式可得（1.2）问解答：

$$u^2 = \frac{\alpha^2 c^4 t^2}{(1+\alpha^2 c^2 t^2)} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\alpha c^2 t}{\sqrt{1+\alpha^2 c^2 t^2}} \quad (2) \qquad (2\text{ 分})$$

联立(1)、(2)式或联立左侧两式，可得（1.3）问解答：（2 分）

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{1+\alpha^2 c^2 t^2} - 1\right) \quad (3)$$

也可写出逆向关系式：$t = \sqrt{\frac{(2+\alpha x)x}{\alpha c^2}}$ (3)′

（2）

质点在切向恒力作用下沿圆周切线方向运动的过程中，功能关系、冲量—动量关系，类似于在 x 轴方向恒力作用下沿 x 轴方向运动的过程中，功能关系、冲量—动量关系。故有

$$\bar{N} = \frac{\int_0^T N dt}{T} = \frac{\int_0^T m\frac{u^2}{R}dt}{T} = \frac{\int_0^T mu\frac{udt}{R}}{T}, \quad T\text{：运动总时间}$$

方案 I：$Fx = mc^2 - m_0c^2 \Rightarrow m = \frac{Fx}{c^2} + m_0, udt = dx$

$$\Rightarrow \bar{N} = \frac{1}{RT}\int_0^{2\pi R}\left(\frac{Fx}{c^2} + m_0\right)udx \qquad u = \frac{\sqrt{\alpha x(2+\alpha x)}}{1+\alpha x}c$$

方案 II：

$$Ft = mu, \qquad u = \frac{\alpha c^2 t}{\sqrt{1+\alpha^2 c^2 t^2}}$$

$$\Rightarrow \bar{N} = \frac{\int_0^T mu\frac{udt}{R}}{T} = \frac{F}{RT}\int_0^T \frac{t\alpha c^2 t}{\sqrt{1+\alpha^2 c^2 t^2}}dt$$

$$= \frac{F}{\alpha RT}\int_0^T \frac{\alpha^2 c^2 t^2 dt}{\sqrt{1+\alpha^2 c^2 t^2}} \qquad (2\text{ 分})$$

引入辅助量

$$\beta = 1 + \alpha^2 c^2 t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{\beta - 1}{\alpha^2 c^2}, \qquad t = \frac{\sqrt{\beta - 1}}{\alpha c}, \qquad d\beta = 2c^2\alpha^2 t dt$$

$$\Rightarrow d\beta = 2\alpha^2 c^2 \frac{\sqrt{\beta - 1}}{\alpha c}dt = 2\alpha c\sqrt{\beta - 1}dt$$

$$\Rightarrow dt = \frac{d\beta}{2\alpha c\sqrt{\beta - 1}}$$

得

$$\bar{N} = \frac{F}{\alpha RT}\int_0^T \frac{\beta - 1}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{d\beta}{2\alpha c\sqrt{\beta - 1}} = \frac{F}{2\alpha^2 cRT}\int_0^T \frac{\sqrt{\beta - 1}d\beta}{\sqrt{\beta}}$$

$$\Rightarrow \bar{N} = \frac{F}{2\alpha^2 cRT}\int_0^T \sqrt{1 - \frac{1}{\beta}}d\beta \quad (C)$$

引入

$$\gamma = \sqrt{\beta} \quad \Rightarrow \quad d\gamma = \frac{1}{2}\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} \quad \Rightarrow \quad d\beta = 2\sqrt{\beta}d\gamma = 2\gamma d\gamma$$

$$\Rightarrow \int_0^T \sqrt{1 - \frac{1}{\beta}}d\beta = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}2\gamma d\gamma = 2\int_0^T \sqrt{\gamma^2 - 1}\,d\gamma$$

因 $\int \sqrt{\gamma^2 - 1}d\gamma = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\gamma^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right) + C$

$$\Rightarrow \int_0^T \sqrt{1 - \frac{1}{\beta}}d\beta = \left[\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1} - \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)\right]\Big|_0^T, \quad \gamma = \sqrt{\beta}$$

$$= \left[\sqrt{\beta}\sqrt{\beta - 1} - \ln\left(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta - 1}\right)\right]\Big|_0^T, \quad \beta = 1 + \alpha^2 c^2 t^2$$

$$\Rightarrow \int_0^T \sqrt{1 - \frac{1}{\beta}}d\beta = \left[\sqrt{1 + \alpha^2 c^2 t^2}\sqrt{\alpha^2 c^2 t^2} - \ln\left(\sqrt{1 + \alpha^2 c^2 t^2} + \sqrt{\alpha^2 c^2 t^2}\right)\right]\Big|_0^T$$

$$= \left[\sqrt{1 + \alpha^2 c^2 T^2} \cdot \alpha cT - \ln\left(\sqrt{1 + \alpha^2 c^2 T^2} + \alpha cT\right)\right]$$

代入(C)式，得

$$\bar{N} = \frac{F}{2\alpha^2 cRT}\left[\sqrt{1 + \alpha^2 c^2 T^2} \cdot \alpha cT - \ln\left(\sqrt{1 + \alpha^2 c^2 T^2} + \alpha cT\right)\right]$$

其中，由(3)′式得

$$T = \sqrt{\frac{(2 + \alpha x)x}{\alpha c^2}}\Bigg|_{x=2\pi R} = \sqrt{\frac{(2 + 2\pi R\alpha)2\pi R}{\alpha c^2}}$$

代入

$$\alpha = \frac{1}{\pi R}$$

得

$$\bar{N}=\frac{F}{2\alpha^2cRT}\left[\sqrt{1+\alpha^2c^2T^2}\cdot\alpha cT-\ln\left(\sqrt{1+\alpha^2c^2T^2}+\alpha cT\right)\right]$$

$$2\alpha^2cRT=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\ ,\qquad \sqrt{1+\alpha^2c^2T^2}=3\ ,\qquad \alpha cT=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \bar{N}=\frac{\pi F}{4\sqrt{2}}\left[3\cdot2\sqrt{2}-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ \sigma\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[3\cdot2\sqrt{2}-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]=3.73 \qquad （12 分）$$

16.

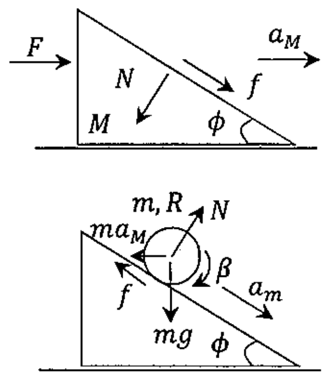
解：基本方程组（参考题解图）

地面系：M 运动：$F+f\cos\phi-N\sin\phi=Ma_M$　(1)

M 系：m 运动：$mg\sin\phi-f-ma_M\cos\phi=ma_m$　(2)

$$N=mg\cos\phi+ma_M\sin\phi \quad (3) \qquad （3 分）$$

$$\left.\begin{matrix} fR=I\beta=\frac{2}{5}mR^2\beta \\ \beta R=a_m \end{matrix}\right\}\ f=\frac{2}{5}ma_m\ \ (4) \qquad （2 分）$$



题解图

（1）$a_m=0$ 时，必有 $f=0$，由(2)式即得

$$a_M(1)=g\tan\phi \qquad （2 分）$$

（2）m 相对 M 不动时，m 与 M 一起朝右运动，故（1）问对应 F_0 的为

$$F_0=(M+m)a_M(1)=(M+m)g\tan\phi \quad （1 分）$$

（附注：由基本方程组(3)得

$$N=mg\cos\phi+ma_M(1)\sin\phi=mg\cos\phi+mg\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\sin\phi$$

$$\Rightarrow N\sin\phi=mg\cos\phi\sin\phi+mg\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\cdot\sin^2\phi$$

$$=mg\frac{\sin\phi}{\cos\phi}(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=mg\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=ma_M(1)$$

代入基本方程组式(1)，也可得

$$F=N\sin\phi+Ma_M(1)=ma_M(1)+Ma_M(1)=(M+m)a_M(1)$$　）

将基本方程组(3)、(4)式代入(1)、(2)式，得

$$\begin{cases} F+\frac{2}{5}m\cos\phi\, a_m-mg\sin\phi\cos\phi-m\sin^2\phi\, a_M=Ma_M \\ mg\sin\phi-\frac{2}{5}ma_m-ma_M\cos\phi=ma_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \frac{2}{5}m\cos\phi\, a_m=-F+mg\sin\phi\cos\phi+m\sin^2\phi\, a_M+Ma_M \\ \frac{7}{5}ma_m=mg\sin\phi-m\cos\phi\cdot a_M \qquad (5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2\cos\phi}{7}=\frac{-F+mg\sin\phi\cos\phi+(M+m\sin^2\phi)a_M}{mg\sin\phi-m\cos\phi\cdot a_M}$$

$$\Rightarrow 2mg\sin\phi\cos\phi-2m\cos^2\phi\cdot a_M=-7F+7mg\sin\phi\cos\phi+7(M+m\sin^2\phi)a_M$$

$$\Rightarrow(7M+5m\sin^2\phi+2m)a_M=7F-5mg\sin\phi\cos\phi$$

$$\Rightarrow a_M=\frac{7F-5mg\sin\phi\cos\phi}{7M+5m\sin^2\phi+2m} \qquad （6 分）$$

将 $F=2F_0=2(M+m)g\tan\phi$ 代入，即得

$$a_M(2)=\frac{14(M+m)g\tan\phi-5mg\sin\phi\cos\phi}{7M+5m\sin^2\phi+2m}$$

由(5)式，得

$$\frac{7}{5}ma_m=mg\sin\phi-m\cos\phi\frac{14(M+m)g\tan\phi-5mg\sin\phi\cos\phi}{7M+5m\sin^2\phi+2m}$$

$$=\frac{7Mmg\sin\phi+5m^2g\sin^3\phi+2m^2g\sin\phi-14(M+m)mg\sin\phi+5m^2g\sin\phi\cos^2\phi}{7M+5m\sin^2\phi+2m}$$

$$\frac{\frac{7}{5}m(7M+5m\sin^2\phi+2m)}{mg\sin\phi}a_m=7M+5m\sin^2\phi+2m+5m\cos^2\phi-14(M+m)$$

$$=-7(M+m)<0$$

$$\Rightarrow a_m<0$$

故小球沿斜面向上滚动。　　　（6 分）

（附注：　$a_m=-\frac{5(M+m)\sin\phi}{7M+5m\sin^2\phi+2m}g$　）

17.（20 分）

解：t 时刻感应电动势记为 ε，有

$$Blv=\varepsilon=\frac{q}{C}+iR=\frac{q}{C}+R\frac{dq}{dt} \quad (1)$$

$$\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{R}{Bl}\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{dq/dt}{BlC} \quad (2)$$

棒的运动方程为

$$m\frac{dv}{dt}=mg-iBl=mg-Bl\frac{dq}{dt}$$

将(2)式代入，得

$$\frac{mR}{Bl}\frac{d^2q}{dt^2}=mg-Bl\frac{dq}{dt}-\frac{m}{BlC}\frac{dq}{dt}=mg-\left(Bl+\frac{m}{BlC}\right)\frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{Blg}{R}-\left(\frac{B^2l^2}{mR}+\frac{1}{RC}\right)\frac{dq}{dt}=\frac{Blg}{R}-\frac{2}{RC}\frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{2}{RC}\frac{dq}{dt}=\frac{Blg}{R}$$

$$\Rightarrow\frac{dq}{dt}=e^{\int-\frac{2}{RC}dt}\left(\int\frac{Blg}{R}\cdot e^{\int\frac{2}{RC}dt}dt+A\right)$$

$$=e^{-\frac{2}{RC}t}\left(\int\frac{Blg}{R}\cdot e^{\frac{2}{RC}t}dt+A\right)$$

$$=e^{-\frac{2}{RC}t}\left(\frac{RC}{2}\frac{Blg}{R}e^{\frac{2}{RC}t}+A\right)$$

$$=\frac{\sqrt{mC}g}{2}+Ae^{-\frac{2}{RC}t}$$

由 $t=0$ 时，$dq/dt=i=0$，得

$$A=-\frac{\sqrt{mC}g}{2}\Longrightarrow\frac{dq}{dt}=\frac{\sqrt{mC}g}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{RC}t}\right)$$

$$\Longrightarrow\int_0^q dq=\frac{\sqrt{mC}g}{2}\int_0^t\left(1-e^{-\frac{2}{RC}t}\right)dt$$

$$=\frac{\sqrt{mC}g}{2}\left(t+\frac{RC}{2}e^{-\frac{2}{RC}t}\Big|_0^t\right)=\frac{\sqrt{mC}g}{2}\left(t+\frac{RC}{2}e^{-\frac{2}{RC}t}-\frac{RC}{2}\right)$$

得 $q\sim t$ 关系：

$$q=\frac{\sqrt{mC}g}{2}\left[t-\frac{RC}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{RC}t}\right)\right]\qquad（15分）$$

代入(1)式，得 $v\sim t$ 关系：

$$v=\frac{q}{BlC}+\frac{R}{Bl}\frac{dq}{dt}=\frac{g}{2}\left[t-\frac{RC}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{RC}t}\right)\right]+\frac{RCg}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{RC}t}\right)$$

$$=\frac{gt}{2}+\frac{RCg}{4}\left(1-e^{-\frac{2}{RC}t}\right)$$

有

$t=0$ 时，$v=0$；$t\to\infty$，$v\to\infty$　　（5分）