清华大学本科生考试试题专用纸 ☆A☆卷

考试课程：**复变函数引论**（闭卷，满分70分） 考试时间：2011年1月5日下午2：30-4:30

系别__________班号_______ 学号______________ 姓名_____________考试教室______/_____教

注意：选择题、填空题直接答于试卷，其余题目答在专用答题纸上，且注明题号。

得分[_________] **一、选择题**（每小题3分，共21分。每小题只有一个正确答案，把每小题正确答案对应的字母填入**该小题前**[ ]内；**多填、填错位置或者直接打**$\surd$**或**$\times$**视为无效。**）

[______] 1、设C为复平面$\mathbb{C}$内一条不经过i及$-i$的$Jordan$闭曲线，则下面值中，$\oint_C \frac{z}{(z+i)(z-i)^2}dz$ **不可能**取到的是:

A. $\frac{-\pi}{2}$; B. $\frac{\pi}{2}$; C. $\frac{i\pi}{2}$; D. 0.

[______] 2、设C为正向圆周: $x^2+y^2=4$, 则$\oint_C z d\bar{z}$的值是:

A. $8\pi i$; B. $-8\pi i$; C. $4\pi i$; D. $-4\pi i$.

[______] 3、下列复变函数中,在复平面上处处不可导的是:

A. $|z|^2$; B. $Re(z)\sqrt{|Im(z)|}$; C. $\sqrt{|Re(z)Im(z)|}$; D. $(z-1)^2\arg z$.

[______] 4、设$f(z)$为单位圆盘D内的解析函数,且在闭单位圆盘$\overline{D}$上连续,若$(f(z))^2$在D内恒不取0且在单位圆周∂D上恒等于4,则下列表达式中**错误**的是:

A. $Im(f(z))\equiv 0,\ \forall\, z\in D$; B. $f(0)=2$; C. $f'(0)=0$; D. $f''(0)=0$.

[______] 5、设c为任意实常数，则由$v(x,y)=3yx^2-y^3\ (z=x+iy)$确定的解析函数$f(z)=u+iv$是：

A. z^3+ic; B. z^3-c; C. iz^3+c; D. $-iz^3+c$.

[______] 6、设复变函数$f(z)$ 满足$\lim_{z\to 0}(f(z))^2=-9$,则$\lim_{z\to 0}Re(f(z))$为:

A. 0; B. 3; C. -3; D. 不能确定。

[______] 7、设$a>1$, 则实积分$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$的值为：

A. $\frac{2\pi}{1-a^2}$; B. $\frac{2\pi}{a^2+1}$; C. $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; D. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

得分[_________] **二、填空题**（5小题7个空，每个空3分，共21分）

1、$z=0$是$f(z)$的2级零点，则$z=0$是$\frac{\sin^2 z}{(f(z))^3}$之______________________________（要求填何种奇点）。

2、设$f(z)=\frac{z^n+1}{(z+1)(z^n-1)}$，其中$n$为正整数,则$Res[f(z),\infty]=$ ______________。

3、实积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}=$ ______________，$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4}dx=$ ______________。

4、$\oint_{|z|=2}(z+\bar{z})\cosh^2 z\,dz=$ ______________，$\oint_{|z|=2}(z+\bar{z})\cos^2 z\,dz=$ ______________。

5、$\sin\frac{1}{1-z-z^2}$在$z_0=0$的Taylor展开式是$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 则此幂级数收敛半径为______________。

三、分析与计算题（3小题，共23分，注意：每题要有必要的分析与计算过程，**只写答案没有过程不给分**）

1、(7分) 设$f(z)$为整函数，若$f(0)=A$及$f'(0)=B$,计算积分$I=\int_0^{2\pi}f(4e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta.$

2、(7分)设$f(z)=z\sinh\frac{z}{z-1}$，计算积分

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}f(z)dz,$$

并说明∞是函数$f(z)$的何种奇点。

3、(9分) 判断幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{2n}$的收敛半径$R$, 并求出其在$|z|<R$内和函数$f(z)$及和函数的导数函数$f'(z)$.

四、分析证明题（5分）

设$f(z)$在$z=0$的某个空心邻域$B=\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z|<R\}$ $(R>0)$内解析且以$z=0$为奇点，已知存在复数列$\{z_n\}_{n=0}^{\infty}\subset B$满足下列条件(1)(2)(3)：

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}z_n=0,\quad (2)\quad \lim_{n\to\infty}f'(z_n)=1,\quad \text{及}\quad (3)\quad f(z_n)\equiv 2, \text{对}\ \forall\, n\in\mathbb{N},$$

试判断$z=0$为$f(z)$的何种孤立奇点，并证明你的结论。

❀❀

温☆馨☆提☆示

1. **请在交卷前仔细检查试卷和专用答题纸上自己的**姓名、学号**以及**考试教室**等信息是否已经完整填写;**

2. **考试结束时，请将本试卷**正面朝外沿竖中线**折叠，然后同**稿纸**一道夹在专用答题纸里一并上交。**