1.(10) 设 z_1、z_2、z_3 是复平面上三个相异的点且不共线。用 z_1、z_2、z_3 表示出 $\Delta_{z_1z_2z_3}$ 的外接圆圆心 z_0，并证明：当 $z_0=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$ 时，$\Delta_{z_1z_2z_3}$ 是正 Δ 且求出外接圆半径 r。

2.(10) 用不同于（充分、必要均不同）习题 1 答案的方法证明：$f(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ 构成圆内接正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件是 $f_n(z)=z^n+c_n$，这里 $|z_k|=r>0,k=1,2,\cdots,n$

3.(20) 设 z_1,z_2,z_3,z_4 是复平面上四个相异的点，定义其交比 $<z_1,z_2,z_3,z_4>$ 为：

$$<z_1,z_2,z_3,z_4>=\frac{\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}}{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

利用直线 $l:z=z_0+t\alpha,\alpha\neq 0,t\in R$，圆周 $C_r:z=z_0+re^{i\theta},\theta\in[0,2\pi],r>0$ 的参数方程以及第一章练习 23、24 的坐标方程方法证明：z_1,z_2,z_3,z_4 共线或共圆的充要条件是 $<z_1,z_2,z_3,z_4>\in R$，并具体给出共线或共圆的条件。由此得到 n 个 $(n\geq 4)$ 相异的点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$（其中任意三个点不共线）共圆的充要条件。

4.(20)$D_n=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$ 是复平面上 n 个相异点构成的点集，并满足 $|z_k|=r>0,k=1,2,\cdots,n$。令 $f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n+\sigma_1z^{n-1}+\sigma_2z^{n-2}+\cdots+\sigma_{n-1}z+\sigma_n$，证明：当 $n\geq 3$ 时，D_n 构成正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件是 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_m=0$（$m=\frac{n-1}{2}$，$n$ 为奇数，$m=\frac{n}{2}$，n 为偶数）。并证明：m 不能被更小的正整数所代替（sharp）。

5.(10)$f(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n(n\geq 3)$，给出 D_n 构成某一个正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件并给出证明，同时求出外接圆圆心及半径 r。

6.(30) 利用

$$\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}),\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{2n}}{(2n)!}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-\frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2})$$

证明：

(1)

$$\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}-\frac{\zeta(2n-2)}{3!\pi^{2n-2}}+\frac{\zeta(2n-4)}{5!\pi^{2n-4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2)}{(2n-1)!\pi^2}+\frac{(-1)^nn}{(2n+1)!}=0,n\geq 2$$

$(\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$，$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z})$

(2)

$$\frac{2^{2n}-1}{\pi^{2n}}\zeta(2n)-\frac{2^{2n-2}-1}{2!\pi^{2n-2}}\zeta(2n-2)+\frac{2^{2n-4}-1}{4!\pi^{2n-4}}\zeta(2n-4)+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2^2-1)}{(2n-2)!\pi^2}\zeta(2)+\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0$$

$n=1,2,3,\cdots$

(3) 令 $a_n=\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}},n=1,2,\cdots$。证明：$(n+\frac{1}{2})a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}a_k,n\geq 2(a_1=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6})$，并求出 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 的分数表达式。

7.(10) 证明：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)}=\ln\frac{2\pi}{e},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)2^{2n}}=\ln\frac{\pi}{e}$$

8.(10) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内处处可导，在 $|z|\leq 1$ 内连续。若 $f(e^{i\theta})\in R,\theta\in[0,2\pi]$，证明：$f(z)\equiv f(0)\in R,\forall z:|z|\leq 1$

9.(10) 设 $f(z)$ 在 $|z|\leq 1$ 内处处可导，且 $f(z)$ 不是常数，若 $|f(z_0)|=max|f(z)|$，证明:
(1)$|z_0|=1$
(2)$f'(z_0)\neq 0$

10.(10)（利用 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z),|z|<1$）
令 $f_k(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos n\theta}{n^k},g_k(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin n\theta}{n^k}$，这里 $r\in(0,1],\theta\in[0,2\pi]$，给出 $k=1,2,3$ 时 $f_k(r,\theta),g_k(r,\theta)$ 的积分或有限形式。
再令 $r\to 1^-$，求出 $f_k(1,\theta),g_k(1,\theta)$ 的积分及有限形式的最简形式。

11.(10)

$$I_{r,m,n}=\oint\frac{z^m e^{\frac{1}{z}}}{(r+z)^n}dz$$

这里 $r\neq 0,\quad m,n\in N$（正整数）

12.(10)
设 $\Delta_{z_1z_2z_3}$ 的面积为 S，$|z|=R>|r|$
证明 $S=\frac{1}{2}|Im(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3)|$，这里 $Im(z)=y$，若 $z=x+iy,\quad x,y\in R$

13.(10) 证明 $\Delta_{z_1z_2z_3}$ 构成正 Δ 的充要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$

14.(10)

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+r^{2n}}dx$$

这里 $r>0,m$ 是非负整数,$n\in N,m\leq n-1$

15.(10)

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+r^2)^n} dx$$

这里 $r > 0, m$ 是非负整数,$n \in N, m \le n-1$

16.(10)

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-1}\sin kx}{(x^2+r_1^2)^n(x^2+r_2^2)^n} dx$$

这里 $r_1 > 0, r_2 > 0, k > 0, \quad m, n \in N, m \le 2n$

17.(10)

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}\cos kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)} dx$$

这里 $a > 0, b > 0, c > 0, k > 0$,$m$ 是非负整数，$(m = 0, 1, 2)$

18.(10)

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(ax^2+bx+c)^n} dx$$

这里 $n \in N, a > 0, \quad b, c \in R, ac - b^2 > 0, m \le n-1$,$m$ 是非负整数

19.(10)

$$I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n(x^2+b^2)^n} dx$$

这里 $a > 0, b > 0, n \in N, m \le 2n-1$,$m$ 是非负整数

20.(20)

求出一个将异心圆环域 $D: z, |z-z_1| > r_1, |z-z_2| > r_2$（这里 $0 < |z_2 - z_1| < r_2 - r_1$）映成同心圆环域 $D': z, 0 < r < |z| < 1$ 的一个分式线性映射 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathrm{C}, ad - bc \neq 0$，并求出 $r > 0$。