学校______ 姓名______ 准考证号______ 考场______

**********密**********封**********线**********

考生类别____________

第 34 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

北京物理学会编印　　　　2017 年 12 月 10 日

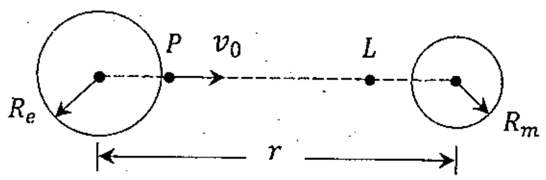
题号	一	二			
	1～10	11	12	13	14
分数					
阅卷人					

题号	三			总分
	15	16	17	
分数				
阅卷人				

答题说明：前 14 题是必做题，满分是 120 分；文管组和农林医组只做必做题；除必做题外，非物理 B 组限做 15 题，满分 140 分；非物理 A 组限做 15、16 题，满分 160 分；物理组限做 15、17 题，满分 160 分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理。请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

一、填空题（必做，共 10 题，每题 2 空，每空 3 分，共 60 分）

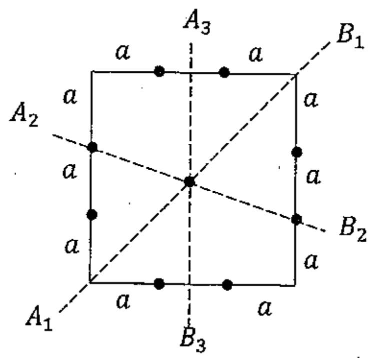
1. 地球、月球的半径分别记为 R_e、R_m，质量分别记为 M_e、M_m，地心、月心的间距记为 r。地心、月心连线上有一个称为拉格朗日点的几何位置 L，如图所示。放在 L 处的物体，所受地球、月球万有引力之和为零，则 L 点与地心的间距 $r_L=$______________。（答案可用参量 M_e、M_m 和 r 表述。）



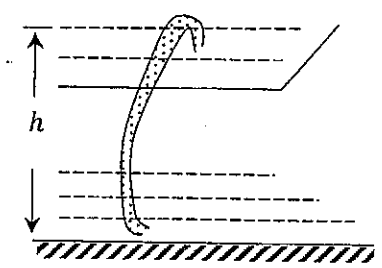
将内部无动力装置的太空探测器 P，从地球表面沿地心、月心连线以 v_0 初速度射出。略去地球大气阻力，为使 P 能到达月球表面，v_0 可取的最小值 $v_{0\min}=$______________________________。（答案可用 M_e、M_m、R_e、r 和直接写出的 r_L 等参量来表述。）

2. 地球、月球的半径分别记为 R_e、R_m，质量分别记为 M_e、M_m，地心、月心的间距记为 r，月心绕地球的公转角速度记为 ω，月球自转的角速度也为 ω。在地心参考系中，月球的动能 $E_K=$______________；在月心参考系中，月球的动能 $E_K=$____________。（地心、月心参考系分别指随地心、月心一起相对于背景惯性系平动的参考系。）

3. 如图所示，在每边长为 $3a$，质量为 m 的均匀正方形薄板上，过板的中心点 C 设置三条转轴 A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3。它们各自对应的转动惯量记为 I_1、I_2、I_3，其大小排列关系（用 >、=、< 号表示）为______________；且有 $I_1+I_2=$________I_3。



4. 为了避免火车停下来，可在铁轨旁设置内盛静止水的长水槽，从火车上垂挂一根弯水管于水槽中，使水沿管上升流入火车的水箱，如图所示。如果水箱距水槽的高度为 h，将火车的速度记为 v，则在________（填地面或列车）参考系中，应用伯努利方程可知，为使水能流入水箱中，v 可取的最小值 $v_{\min}=$____________。



5. 氢原子的基态能量为 −13.6eV。某氢原子的电子已处于第二激发态，为使该原子成为正离子，需要提供的激发能（即为电离能）至少应为________eV。丢失一个价电子的氦原子成为一个类氢离子。设该离子的电子已处于第二激发态，则为使该离子继而能成为二价正离子，需输入的能量至少为_______eV。

6. 图 1 中自由长度相同、劲度系数分别为 k_1、k_2 的两根轻弹簧，平行地联结在两块平行板之间。图 2 中劲度系数也分别为 k_1、k_2 的两根轻弹簧串接在两块平行板之间。分别用大小同为 F 的一对如图所示方向的拉力作用，达平衡时，图 1 中的两根轻弹簧弹性势能之和 $E_{P1}=$______________，图 2 中两根轻弹簧弹性势能之和 $E_{P2}=$______________。

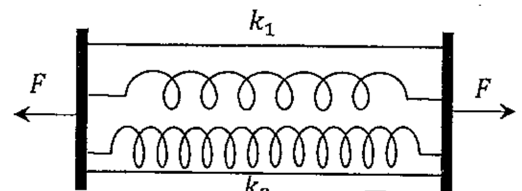


图 1

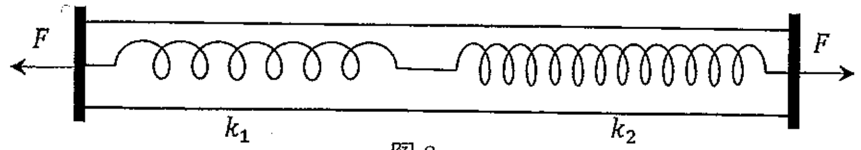


图 2

7. 如图 1 所示，高 $3h_0$ 的上、下封口，且不漏气的圆柱形气缸，竖直放在水平桌面上。气缸上部 h_0 高度的空间区域内，贮存有若干氧气。气缸中部有一段两端封口、高为 h_0 的小圆桶，桶的侧壁与气缸内侧面紧密接触，可滑动且无摩擦，桶内装满水银。气缸下部 h_0 高度的空间区域内，贮存有若干氮气。设温度处处为不变的 T。平衡时氧气处的压强为 p_0，氮气处的压强为 $2p_0$。

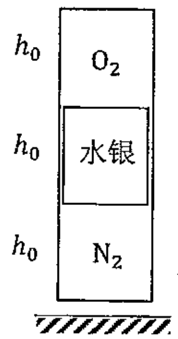


图 1

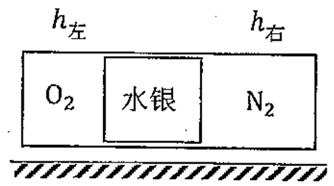


图 2

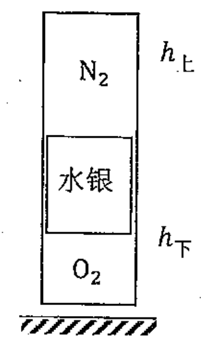
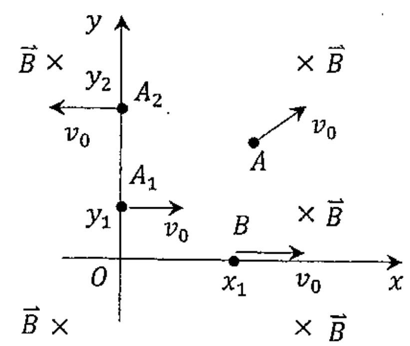


图 3

今如图 2 所示，将气缸平放在水平桌面上，温度仍处处为不变的 T。平衡时氧气在左，其水平长度记为 $h_左$，氮气在右，其水平长度记为 $h_右$，则 $h_右=$____________h_0。

再将气缸倒立在水平桌面上，温度仍为处处不变的 T。平衡时如图 3 所示，氮气在上，氧气在下，各自高度分别记为 $h_上$、$h_下$，则 $h_上=$____________h_0。

8. 如图所示，光滑绝缘水平大桌面取为 $O-xy$ 坐标面。空间有竖直朝下（图中朝里）的匀强磁场 $\vec{B}$。$O-xy$ 平面上距 O 稍远处的小球 A，质量 m，电量 $q>0$，初速度大小为 v_0，而后 A 将作匀速圆周运动，其圆半径记为 R，周期记为 T。如下，仅考虑磁



学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

密 封 线

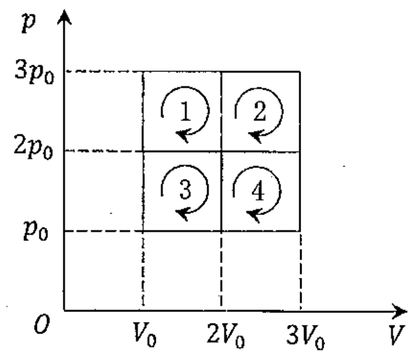
场 $\vec{B}$ 对带电小球的作用，而忽略带电小球间的斥力（碰撞除外）。

（1）、图中小球 A_1 、A_2 质量也同为 m，电量也同为 q，开始时分别位于轴上的 y_1 、$y_2(>y_1)$ 位置，初速度方向如图所示，大小也同为 v_0 。设 A_1 、A_2 间可能发生的碰撞都是弹性正碰撞，且不会相互转移电荷（下同）。已知而后 A_1 能到达 y_2 处，则 y_2-y_1的可取值为________ R。

（2）、图中小球 B 的质量也为 m， 电量也为 q， $t=0$ 时位于 x 轴上距 O 稍远的 x_1 位置，初速度方向沿 x 轴，大小也为 v_0 。现在给你一个质量为 m 、电量为 $-q$，初速度大小也为 v_0 的小球 B^*（图中未画出）。$t=0$ 时，B^* 的初始位置和初始速度方向由你选定，但要求在 $t=\frac{K}{2}T\ (K=1,2,\cdots)$ 时刻，B 球可到达 x 轴上与 x_1 相距尽可能远的 $x_2(x_2>x_1)$ 位置，则你可得的 $x_2-x_1=$_______ R。（若 B^* 与 B 发生碰撞，也是弹性正碰撞，且不相互转移电荷。）

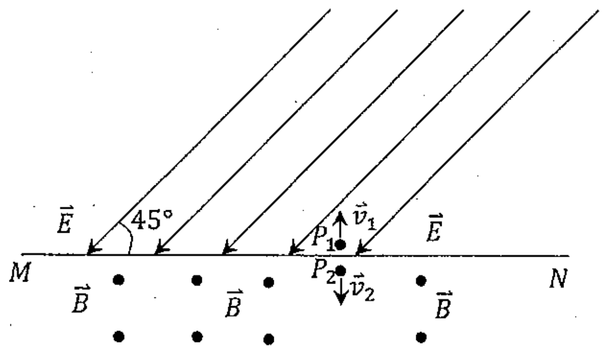
9. 单色光的圆孔衍射知识，已导得成像的光学仪器（例如大口径天文望远镜和小孔径电子显微镜）的最小分辨角为 $\phi_{\min}=1.22\frac{\lambda}{d}$ 。其中 λ 、d 各自代表的是______________________________。为减小 $\phi_{\min}$ 值，显微镜和天文望远镜各自采用的方法是____。

10. 某单原子分子理想气体，其若干等体线和等压线构成的热循环网络如图所示，特征点的压强和体积量也均在图中示出。将图中 4 个小正方形对应的 4 个小循环过程，分别标记为 1、2、3、4。各自的循环过程效率依次记为 η_1 、η_2 、η_3 、η_4，则它们从小到大的排序为________________。再将图中最大正方形对应的循环过程效率记为 $\eta_{大}$，将 η_1 、η_2 、η_3 、η_4 中的最大者记为 $\eta_{\max}$，则比值 $\alpha=\frac{\eta_{大}}{\eta_{\max}}=$____________________。

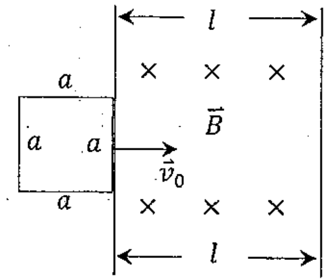


二、计算题（必做，共 4 题，每题 15 分，共 60 分）

11.（15 分）如图所示，光滑绝缘水平面上有水平匀强静电场，电场线方向已在图中示出，其大小为已知量 E 。图中几何直线 MN 为电场区域的边界线，图中 MN 下方为恒定匀强磁场 $\vec{B}$ 的区域，$\vec{B}$ 的方向也已在图中示出。在 MN 线上有两个质量同为 m，电量同为 $q>0$ 的小球 P_1 、P_2 。$t=0$ 时，P_1 、P_2 紧挨在一起，分别具有图示的平动初速度 $\vec{v}_1$ 、$\vec{v}_2$，两者都垂直于直线 MN 。$\vec{v}_1$ 的大小为已知量 v_0，$\vec{v}_2$ 的大小为未知量。略去 P_1 、P_2 间的斥力，各自第一次返回直线 MN 时，两者恰好能发生碰撞。试求：两者碰撞的时刻 t，$\vec{B}$ 的大小值 B，$\vec{v}_2$ 的大小 v_2 。



12.（15 分）如图所示，在水平桌面上有宽度为 l 的匀强磁场 $\vec{B}$ 区域，其方向垂直于桌面朝下。磁场左侧边界直线外，有一个与边界线平行且紧挨着的由四根相同的均匀导体棒连接而成的正方形框架。每根导体棒长为 $a=\frac{l}{2}$，质量为 m，电阻为 R 。开始时框架有图示方向的速度 $\vec{v}_0$，框架与桌面处处无摩擦。



（1）设框架右行 l 路程时速度为 $\frac{v_0}{2}$，试求 v_0；

（2）再设框架处处受到桌面的阻力，阻力 $\vec{f}$ 与框架速度 $\vec{v}$ 的关系为

$$\vec{f}=-\gamma\vec{v},\quad \gamma>0，处处相同$$

若框架右行 $\frac{l}{2}$ 路程时即停住，试求 γ 。（v_0 取（1）问中所求值）

学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

********************密********************封********************线********************

13. （15 分）在焦距为 15 cm 的会聚透镜左方 30 cm 处放一小物体，在透镜右侧放一垂直于主光轴的平面镜。试求平面镜的位置如何才能使物体通过此系统所成的像（即通过两次透射及一次反射所成的像）与透镜相距 30cm？

14.（15 分）静质量为 m_0 的质点，开始时静止在某惯性系的坐标原点 $x=0$ 处，$t=0$ 时刻起，质点在力 F_x 作用下沿 x 轴作加速度为常量 a 的匀加速直线运动。

（1）某时刻质点动能恰好等于其静能，试求此时刻该点的所在位置 x 、动量 P_1 以及所受力 $F_x(1)$；

（2）再求该质点动量 $P_2=2P_1$时，所受力 $F_x(2)$ 。

学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

******密******封******线******

三、限做题（根据考生类别选做）

15.（20分）匀质细杆 AB 静止地直立在光滑水平地面上，如图 1 所示。后因轻微扰动而滑行地倾倒，倒地前细杆下端 B 一直未离地。某时刻细杆倾斜位形如图 2 所示，其中 C 点为细杆中央点。

（1）在图 2 中标出此时细杆瞬心 M 的位置，并用简单的语言说出 M 所在位置。

（2）设细杆长度 l 和图 2 中的 ϕ 角均为已知量，试确定此时瞬心 M 加速度 $\vec{a}_M$ 的方向和大小。

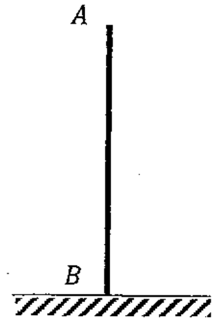


图 1

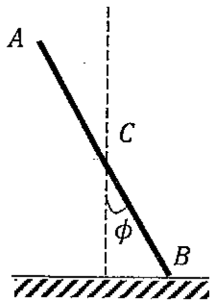


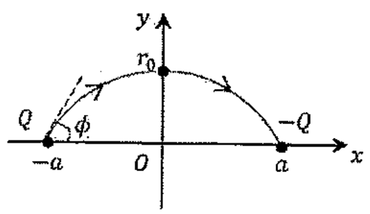
图 2

16.（20分）在温度为 T 的恒温热源中有一导热容器，它被一块带有面积为 A 的小孔的隔板分成体积同为 V 的左、右两部分。开始时（$t=0$）左侧部分内有摩尔质量为 μ_1 的 ν 摩尔理想气体，右侧部分内有另一种摩尔质量为 μ_2 的 ν 摩尔理想气体。两侧气体通过小孔交换分子的过程中，任一时刻都可认为各自处于热平衡状态，且均维持恒定温度 T。

（1）试求左、右两侧气体密度 ρ_L、ρ_R 各自随时间 t（$t \geq 0$）的变化关系；

（2）计算从开始直到最后 $\rho_L = \rho_R$ 状态的过程中，整个气体系统的熵增量。

17.（20 分）在真实三维空间的 $O-xy$ 坐标平面上，电量为 $Q>0$ 的点电荷固定在 $x=-a$、$y=0$ 处，电量为 $-Q$ 的点电荷固定在 $x=a$、$y=0$ 处。如图所示，从点电荷 Q 发出的一条位于 $O-xy$ 平面上的电场线，其初始切线与 x 轴夹角为 $\phi(\pi\geq\phi\geq0)$，设此电场线必定能过 y 轴并终止于点电荷 $-Q$。假设在此三维空间中无任何其它点电荷，试解答下述各小问。



（1）设点电荷之间存在着真实的距离二次方反比库仑力，即点电荷 Q 单独存在时的场强公式为

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

（1.1）简述 $\phi=90°$ 的电场线可以通过 y 轴并终止于点电荷 $-Q$ 的理由，进而求出该电场线与 y 轴交点的 y 坐标量 r_0；

（1.2）导出图中所示电场线对应的 ϕ 取值范围，导出 $r_0\sim\phi$ 关系式，再取 $\phi=\frac{\pi}{3}$、$\phi=\frac{\pi}{2}$、$\phi=\frac{2}{3}\pi$，计算各自分别对应的三个 r_0 值，最后定性画出 $O-xy$ 平面上电场线的分布。

（2）假设点电荷之间存在着假想的距离一次方反比库仑力，即点电荷 Q 单独存在时的场强公式为

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{Q\vec{r}}{2\pi\varepsilon_2 r^2}$$

再设存在 $\phi=90°$ 对应的图中类型电场线，试求此电场线与 y 轴交点的 y 坐标量 r_0。

（3）假设点电荷之间存在着假想的距离三次方反比库仑力，即点电荷 Q 单独存在时的场强公式为

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{Q\vec{r}}{2\pi^2\varepsilon_4 r^4}$$

再设存在 $\phi=90°$ 对应的图中类型电场线，试给出可求解此电场线与 y 轴交点的 y 坐标量 r_0 的方程（可以为含三角函数或反三角函数的超越方程）。

第 34 届全国部分地区大学生物理竞赛

参考答案

2017.12

1. $\frac{\sqrt{M_e}}{\sqrt{M_e}+\sqrt{M_m}}r$；$\left\{2G\left[M_e\left(\frac{1}{R_e}-\frac{1}{r_L}\right)+M_m\left(\frac{1}{r-R_e}-\frac{1}{r-r_L}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$。
2. $\frac{1}{2}M_m(\omega r)^2+\frac{1}{5}M_mR_m^2\omega^2$；$\frac{1}{5}M_mR_m^2\omega^2$。
3. $I_1=I_2=I_3$；2。
4. 列车；$\sqrt{2gh}$。
5. 3.4；13.6。
6. $\frac{1}{2}\frac{F^2}{k_1+k_2}$；$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)F^2$。
7. $\frac{4}{3}$；$\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)\approx 1.56$。

解：将气缸的横截面积记为 S，缸中的中间圆桶和桶内的水银的质量之和记为 m。对图 1 的状态，有

$$mg/S=p_0$$

氧气：$p_0h_0S=\nu_ORT$　　ν_O：氧气摩尔数

氮气：$2p_0h_0S=\nu_NRT$　$\Rightarrow \nu_N=2\nu_O$　　ν_N：氮气摩尔数

对图 2 的状态，有

$$p_{左}=p_{右}\overset{记为}{=}p(1)$$

$$氧气：p(1)h_{左}S=\nu_ORT$$

$$氮气：p(1)h_{右}S=\nu_NRT=2\nu_ORT$$

$$\therefore h_{右}=2h_{左}\quad 而\quad h_{右}+h_{左}=2h_0$$

即得 $h_{左}=\frac{2}{3}h_0$，$h_{右}=\frac{4}{3}h_0$

对图 3 的状态，有

$$p_{下}=p_{上}+\frac{mg}{S}=p_{上}+p_0,\quad h_{下}=2h_0-h_{上}$$

氮气：$p_{上}h_{上}S=\nu_NRT=2\nu_ORT\quad\Rightarrow\quad p_{上}=2\nu_ORT/h_{上}S$，$h_{下}=2h_0-h_{上}$

氧气：$p_{下}h_{下}S=\nu_ORT\quad\Rightarrow\quad\left(p_{上}+p_0\right)h_{下}S=\nu_ORT$，$p_0=\nu_ORT/h_0S$

$$\Rightarrow\left(\frac{2\nu_ORT}{h_{上}S}+\frac{\nu_ORT}{h_0S}\right)\left(2h_0-h_{上}\right)S=\nu_ORT$$

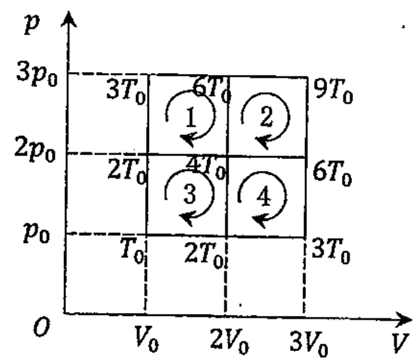
$$\Rightarrow\left(2+\frac{h_{上}}{h_0}\right)\left(2h_0-h_{上}\right)=h_{上}$$

解得

$$h_{上}=\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)h_0\approx 1.56h_0$$

8. 2 或 4；$2K$。
9. 单色光的波长、圆孔直径（或光学仪器孔径）；显微镜：用波长远小于可见光的电子波取代可见光波；天文望远镜：增大圆孔直径。

10. η_2、η_1、η_4、η_3；$\frac{13}{9}(\approx 1.44)$。



解：每一个小循环对外作功相同，记为 W。

引入：$T_0=p_0V_0/\nu R$，取 $\nu=1$，则有

$$Q_{吸1}=\frac{3}{2}R(3T_0-2T_0)+\frac{5}{2}R(6T_0-3T_0)=9RT_0$$

$$\Rightarrow\eta_1=\frac{W}{9RT_0}\sim\frac{1}{9}\sim 0.11$$

$$Q_{吸2}=\frac{3}{2}R(6T_0-4T_0)+\frac{5}{2}R(9T_0-6T_0)=\frac{21}{2}RT_0$$

$$\Rightarrow\eta_2=\frac{W}{\frac{21}{2}RT_0}\sim\frac{2}{21}\sim 0.095$$

$$Q_{吸3}=\frac{3}{2}R(2T_0-T_0)+\frac{5}{2}R(4T_0-2T_0)=\frac{13}{2}RT_0\quad\Rightarrow\quad\eta_3=\frac{W}{\frac{13}{2}RT_0}\sim\frac{2}{13}\sim 0.154$$

$$Q_{吸4}=\frac{3}{2}R(4T_0-2T_0)+\frac{5}{2}R(6T_0-4T_0)=8RT_0\quad\Rightarrow\quad\eta_4=\frac{W}{8RT_0}\sim\frac{1}{8}\sim 0.125$$

$$Q_{吸大}=\frac{3}{2}R(3T_0-T_0)+\frac{5}{2}R(9T_0-3T_0)=18RT_0\quad\Rightarrow\quad\eta_{大}=\frac{4W}{18RT_0}\sim\frac{2}{9}\sim 0.222$$

11.（15 分）

解：$\vec{E}$ 平行于直线 MN 的分量记为 $E_{\parallel}$，垂直于直线 MN 的分量记为 $E_{\perp}$，则有

$$E_{\parallel}=E/\sqrt{2},E_{\perp}=E/\sqrt{2}$$

在垂直于 MN 方向上，P_1 经 t_0 时间速度从 v_0 降为零，又经 t_0 时间返回到直线 MN，即有

$$t_0=v_0/\frac{qE_{\perp}}{m}=\sqrt{2}mv_0/qE$$

在平行于 MN 方向上，P_1 经 $2t_0$ 时间经过的路程为

$$l_{\parallel}=\frac{1}{2}\left(\frac{qE_{\parallel}}{m}\right)\cdot(2t_0)^2=2\sqrt{2}mv_0^2/qE$$

t 的求解：

$$t=2t_0=2\sqrt{2}mv_0/qE\qquad(7\text{ 分})$$

B 与 v_2 的求解：

经 $2t_0$ 时间 P_2 需返回 MN 直线与 P_1 相碰，要求 P_2 磁场中半圆周运动，且有圆半径

$$R=mv_2/qB,\quad 2R=l_{\parallel}\quad\Rightarrow\quad\frac{2mv_2}{qB}=\frac{2\sqrt{2}mv_0^2}{qE}$$

又要求 P_2 在磁场中经过 πR 路径，即有

$$\pi R=v_2\cdot 2t_0\quad\Rightarrow\quad\frac{\pi mv_2}{qB}=v_2\cdot\frac{2\sqrt{2}mv_0}{qE}$$

解得

$$B=\frac{\pi E}{2\sqrt{2}v_0},\qquad v_2=\frac{\pi v_0}{2}\qquad(8\text{ 分})$$

12. （15分）

解：（1）桌面无摩擦，框架速度为 v 时，右侧导体棒中产生的动生感应电动势

$$\varepsilon = Bav$$

框架内有回路电流

$$I = \frac{\varepsilon}{4R} = \frac{Bav}{4R}$$

右侧导体棒得到朝左方向的安培力

$$F = IBa = \frac{B^2a^2}{4R}v$$

应用动量定理，经无穷短时间 dt，应有

$$Fdt = 4m(-dv) \implies \frac{B^2a^2}{4R}vdt = -4mdv$$

因 vdt 为 dt 时间段内框架右行路程 dl，即得

$$-dv = \frac{B^2a^2}{16mR}dl \implies \int_{v_0}^{v^*} -dv = \frac{B^2a^2}{16mR}\int_0^{l^*} dl$$

$$\implies v_0 - v^* = \frac{B^2a^2}{16mR}l^* \qquad l^*\text{：右行路程，}\quad v^*\text{：}l^*\text{ 对应的 }v$$

当 $\frac{l}{2} > l^* > 0$ 时，朝左方向的安培力始终存在。当 $l^* = \frac{l}{2}$ 时，回路电动势为零，$F = 0$，速度记为 v^*。而后即为匀速运动，直到 $l^* = l$ 为止。故 $l^* = l$ 时的速度 $\frac{v_0}{2}$，即为 $l^* = \frac{l}{2}$ 时对应的 v^*。据此有

$$v_0 - v^*\big|_{v^*=\frac{v_0}{2}} = \frac{B^2a^2}{16mR}l^*\Big|_{l^*=\frac{l}{2}} \implies \frac{v_0}{2} = \frac{B^2a^2}{16mR}\frac{l}{2}$$

解得

$$v_0 = \frac{B^2a^2l}{16mR}\Big|_{l=2a} = \frac{B^2a^3}{8mR} \qquad (8\text{分})$$

（2）桌面有阻力是，上式 $F = IBa$ 改为

$$F = IBa + \gamma v = \left(\frac{B^2a^2}{4R} + \gamma\right)v$$

对应地有

$$Fdt = 4m(-dv) \implies \left(\frac{B^2a^2}{4R} + \gamma\right)vdt = -4mdv \text{ ,} vdt = dl$$

$$\implies -dv = \frac{1}{4m}\left(\frac{B^2a^2}{4R} + \gamma\right)dl$$

$$\implies v_0 - v^* = \left(\frac{B^2a^2}{16mR} + \frac{\gamma}{4m}\right)\int_0^{l^*} dl$$

$l^* = \frac{l}{2}$ 时，$v^* = 0$，据此有

$$v_0 = \left(\frac{B^2a^2}{16mR} + \frac{\gamma}{4m}\right)\cdot\frac{l}{2} \text{ ,} v_0 = \frac{B^2a^2}{16mR}l$$

解得

$$\gamma = B^2a^2/4R \qquad (7\text{分})$$

13. （15分）

解：先讨论会聚透镜的第一次成像：

$$f = 15\text{cm}，u_1 = 30\text{cm}，v_1 = \frac{u_1 f}{u_1 - f} = 30\text{cm} \qquad (3\text{分})$$

像是倒立的实像。

第二步是平面镜成像：

$$u_2 = d - v_1 \text{ ，} v_2 = -u_2 = v_1 - d \qquad d\text{ ：平面镜与透镜的间距} \quad (2\text{分})$$

所成的像，相对第一次成像为正立的。

再看会聚透镜的第二次成像：

$$u_3 = d - v_2 = d - (v_1 - d) = 2d - v_1$$

$$v_3 = \frac{u_3 f}{u_3 - f} = \frac{(2d - v_1)\cdot f}{2d - v_1 - f} = \frac{(2d-30)\times 15}{2d - 30 - 15} = \frac{(d-15)\times 30}{2d - 45} \qquad (4\text{分})$$

凸透镜的这次成像，有两种情形都会符合题文要求，即像可在镜的两侧。

（1）若为实像，$v_3 = 30\text{cm}$，代入上式得

$$d = 30\text{cm} \qquad (3\text{分})$$

（2）若为虚像，$v_3 = -30\text{cm}$，代入上式得

$$d = 20\text{cm} \qquad (3\text{分})$$

14. （15分）

解：（1）$E_K = E_0$ 时，有

$$2m_0c^2 = E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}c^2 \text{ ,} \qquad u = at$$

得

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}c \text{ ,} t = \sqrt{3}c/2a$$

$$\therefore\ P_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\cdot u = \sqrt{3}m_0c$$

此时质点所在位置是

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{3c^2}{8a}$$

又由

$$F_x = \frac{d(mu)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right) = m_0\frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}a\Bigg|_{u=\frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

得

$$F_x(1) = 8m_0a \qquad (8\text{分})$$

（2）引入 u^*，使

$$mu^* = P_2 = \frac{m_0u^*}{\sqrt{1 - \frac{u^{*2}}{c^2}}} = 2P_1 = 2\sqrt{3}m_0c$$

解得

$$u^* = \sqrt{\frac{12}{13}}c$$

代入

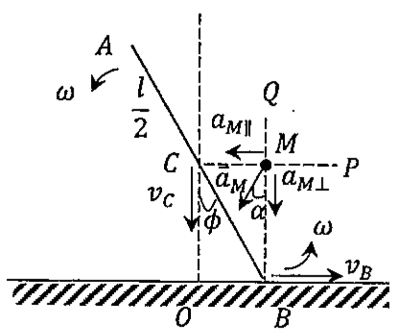
$$F_x = m_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{u^{*2}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} a \Bigg|_{u^* = \sqrt{\frac{12}{13}}c}$$

得

$$F_x(2) = 13\sqrt{13}m_0 a \qquad (7\text{ 分})$$

15. （20 分）

解:（1）参看题解图，过 C 点作一水平方位线 CP，过 B 点作一竖直方位线 BQ，这两条方位线的交点即为 M 所在位置。　(3 分)



题解图

（2）细杆无水平方向外力作用，质心 C 只能沿竖直方向朝下运动。C 位于题解图所在位置时，因能量守恒，可得

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = mg\frac{l}{2}(1-\cos\phi) \ ,$$

$I_C = \frac{1}{12}ml^2$，m：细杆质量

$$v_C = \omega \cdot \frac{l}{2}\sin\phi \ \Rightarrow \ \omega = \frac{2v_C}{l\sin\phi}$$

解得

$$v_C^2 = 3gl\frac{(1-\cos\phi)\sin^2\phi}{1+3\sin^2\phi} \qquad (1) \qquad (4\text{ 分})$$

题解图中的 v_B 应为

$$v_B = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}v_C \ \Rightarrow \ v_B^2 = \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi}v_C^2 \qquad (2\text{ 分})$$

如图示，将 $\vec{a}_M$ 分解为

水平朝左方向分量 $a_{M\parallel}$ 和竖直朝下分量 $a_{M\perp}$

又：

质心 C 的加速度 $\vec{a}_C$ 竖直方向，其水平朝左分量 $a_{C\parallel} = 0$

B 端的加速度 $\vec{a}_B$ 水平方向，其竖直朝下分量 $a_{B\perp} = 0$

引入：

M 相对 C 点的水平朝左加速度 $a_{MC\parallel}$，和相对 B 端的竖直朝下加速度 $a_{MB\perp}$

据相对运动关系可得

$$a_{M\parallel} = a_{MC\parallel} + a_{C\parallel} = a_{MC\parallel} = \frac{v_C^2}{\frac{l}{2}\sin\phi}$$

$$a_{M\perp} = a_{MB\perp} + a_{B\perp} = a_{MB\perp} = \frac{v_B^2}{\frac{l}{2}\cos\phi}$$

对图中的 α 角，应有

$$\tan\alpha = \frac{a_{M\parallel}}{a_{M\perp}} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \cdot \frac{v_C^2}{v_B^2} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \cdot \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \tan\phi$$

即得

$$\alpha = \phi \ \Rightarrow \ \vec{a}_M \text{ 方向指向图中 } O \text{ 点} \qquad (2) \qquad (7\text{ 分})$$

由 $a_{M\parallel} = a_M\sin\alpha = a_M\sin\phi$，得

$$a_M = \frac{a_{M\parallel}}{\sin\phi} = \frac{v_C^2}{\frac{l}{2}\sin^2\phi} = 3gl\frac{(1-\cos\phi)\sin^2\phi}{1+3\sin^2\phi} \Big/ \frac{l}{2}\sin^2\phi$$

$$\Rightarrow a_M = \frac{1-\cos\phi}{1+3\sin^2\phi}6g \qquad (3) \qquad (4\text{ 分})$$

16. （20 分）

解：（1）$t=0$ 时，第 1 种分子在左侧的数密度与第 2 种分子在右侧的数密度同为

$$n_0 = \nu N_A/V \qquad (1)$$

先考虑第 1 种分子，t 时刻左侧和右侧的数密度分别记为 $n_{1,L}(t)$ 和 $n_{1,R}(t)$，则有

$$n_{1,L}(t) + n_{1,R}(t) = n_0 \qquad (2)$$

经 dt，此种分子通过小孔两侧互相交换，而使 $n_{1,L}(t)$ 有一减少量

$$-Vdn_{1,L}(t) = \left[\frac{1}{4}n_{1,L}(t)\overline{v_1}\right]Adt - \left[\frac{1}{4}n_{1,R}(t)\overline{v_1}\right]Adt \qquad (3)$$

$$\overline{v_1} = \sqrt{8RT/\pi\mu_1} \qquad (4)$$

利用（2）式，可将（3）式写成

$$-Vdn_{1,L}(t) = \frac{\overline{v_1}}{4}Adt\left[2n_{1,L}(t) - n_0\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dn_{1,L}(t)}{2n_{1,L}(t) - n_0} = -\frac{\overline{v_1}}{4V}Adt$$

积分后可得

$$\ln\frac{2n_{1,L}(t) - n_0}{n_0} = -\frac{\overline{v_1}}{2V}At$$

$$\Rightarrow n_{1,L}(t) = \frac{1}{2}n_0\left[1 + e^{-\frac{\overline{v_1}At}{2V}}\right],\ n_{1,R}(t) = \frac{1}{2}n_0\left[1 - e^{-\frac{\overline{v_1}At}{2V}}\right] \qquad (5)$$

对第 2 种分子，引入 t 时刻左侧和右侧的数密度 $n_{2,L}(t)$ 和 $n_{2,R}(t)$ 后，同样可导得

$$n_{2,L}(t) = \frac{1}{2}n_0\left[1 - e^{-\frac{\overline{v_2}At}{2V}}\right],\ n_{2,R}(t) = \frac{1}{2}n_0\left[1 + e^{-\frac{\overline{v_2}At}{2V}}\right] \qquad (6)$$

$$\overline{v_2} = \sqrt{8RT/\pi\mu_2} \qquad (7) \qquad (10\text{ 分})$$

这样，t 时刻左、右两侧气体密度便分别为

$$\rho_L(t) = m_1n_{1,L}(t) + m_2n_{2,L}(t), \qquad \rho_R(t) = m_1n_{1,R}(t) + m_2n_{2,R}(t)$$

m_1、m_2 分别是两种分子的质量。将（5）式、（6）式代入后便得

$$\rho_L(t) = \frac{1}{2}m_1n_0\left[1 + e^{-\frac{\overline{v_1}At}{2V}}\right] + \frac{1}{2}m_2n_0\left[1 - e^{-\frac{\overline{v_2}At}{2V}}\right]$$

$$\rho_R(t) = \frac{1}{2}m_1n_0\left[1 - e^{-\frac{\overline{v_1}At}{2V}}\right] + \frac{1}{2}m_2n_0\left[1 + e^{-\frac{\overline{v_2}At}{2V}}\right]$$

因（1）式，有

$$mn_0 = m\nu N_A/V = \mu\nu/V$$

故得

$$\rho_L(t) = \frac{\nu}{2V}\left[(\mu_1+\mu_2) + \mu_1e^{-\frac{\overline{v_1}At}{2V}} - \mu_2e^{-\frac{\overline{v_2}At}{2V}}\right]$$

$$\rho_R(t) = \frac{\nu}{2V}\left[(\mu_1+\mu_2) - \mu_1e^{-\frac{\overline{v_1}At}{2V}} + \mu_2e^{-\frac{\overline{v_2}At}{2V}}\right] \qquad (5\text{ 分})$$

其中 $\overline{v_1}$、$\overline{v_2}$ 已由（4）、（7）式给出。

（2）当 $\rho_L=\rho_R$ 时，$t\to\infty$，$n_{1,L}=n_{1,R}$ ，$n_{2,L}=n_{2,R}$ ，即两种气体各自均匀分布在 $2V$ 空间内。由理想气体熵表达式：

$$S=C_V\ln T+\nu R\ln V+S_0$$

可知第 1 种气体从 V 到 $2V$ 的“扩散”熵增为

$$\Delta S_1=\nu R\ln 2V-\nu R\ln V=\nu R\ln 2$$

同样，第 2 种气体从 V 到 $2V$ 的“扩散”熵增为

$$\Delta S_2=\nu R\ln 2$$

整个气体系统熵增便为

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=2\nu R\ln 2 \qquad (5\text{ 分})$$

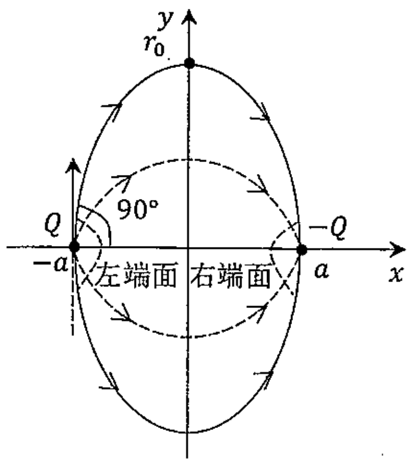
17. （20 分）

解：

（1.1）题图所示电场线对应的 ϕ 为锐角，无限靠近 Q 处，总场强 $\vec{E}$ 几乎完全由 Q 单独存在时的场强确定，其方向即为锐角 ϕ 方向。而后 $-Q$ 对 $\vec{E}$ 的贡献不可略，使场强 $\vec{E}$ 更朝右偏转，电场线进一步引向右方，并接近 $-Q$ ，最后终止于 $-Q$ 。

ϕ 为直角时，无限靠近 Q 处，$\vec{E}$ 几乎完全由 Q 单独贡献而成，其方向即为 ϕ 方向，即电场线尚未朝右偏转。而后 $-Q$ 的作用不可略，$\vec{E}$ 中朝右的分量开始起作用，使 $\vec{E}$ 得方向朝右偏转，电场线被引向右方，最后终止于 $-Q$ 。

结论：$\phi=90°$ 的电场线必定能过 y 轴并终止于 $-Q$ 。



题解图 1

可在真实的三维空间中取题解图 1 所示的电场线管，其侧面由 $\phi=90°$ 的电场线绕 x 轴旋转 360° 而成，左端面为无限靠近 Q 、且以 Q 为球心的半球面，对称地取右端面。点电荷 $-Q$ 对左端面场强贡献相对点电荷 Q 的贡献可略，电场线表征的总场强在左端面的高斯通量，等同于点电荷 Q 单独存在时左端面的高斯通量，即有

$$\iint_{左端面}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{左端面}\vec{E}(Q)\cdot d\vec{S}$$

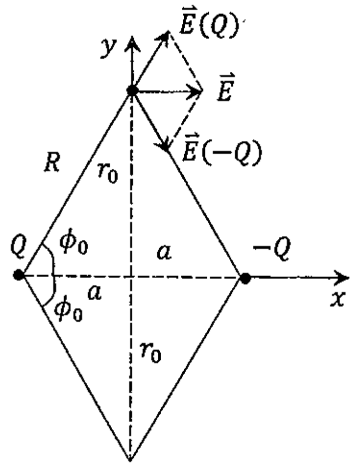
（$\vec{E}$：总场强）（$\vec{E}(Q)$：Q 场强）

$$=\frac{1}{2}\oiint_{全球面}\vec{E}(Q)\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{2\varepsilon_0}$$

由端面、侧面和管内不含电荷的电场线管任一截面电通量守恒性，可知以 r_0 为半径旋转而成的圆截面 S_{r_0} 上的高斯通量为

$$\iint_{S_{r_0}}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{左端面}\vec{E}\cdot d\vec{S}=Q/2\varepsilon_0 \quad (1)$$

参考题解图 2，图中已引入了参量 R 和角参量 ϕ_0 ，r_0 截面即 S_{r_0} 上各处场 $\vec{E}$ 强由 $\vec{E}(Q)$ 和 $\vec{E}(-Q)$ 叠加而成。因对称，有



题解图 2

$$\iint_{S_{r_0}}\vec{E}\cdot d\vec{S}=2\iint_{S_{r_0}}E_x(Q)dS=2\iint_{S_{r_0}}\vec{E}(Q)\cdot d\vec{S} \qquad (2)$$

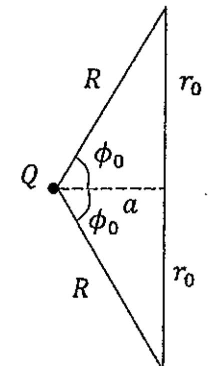
（$E_x(Q)$ 为 $\vec{E}(Q)$ 的 x 分量）

$\iint_{S_{r_0}}\vec{E}(Q)\cdot d\vec{S}$（$Q$ 单独存在时截面 S_{r_0} 上的电通量）的计算：

Q 单独存在时，电场线球对称均匀分布。参考题解图 3，S_{r_0} 相对 Q 的三维空间角，即为以 ϕ_0 为半顶角的锥面空间角，记为 $\Omega_3(\phi_0)$ ，便有

$$\iint_{S_{r_0}}\vec{E}(Q)\cdot d\vec{S}=\frac{\Omega_3(\phi_0)}{4\pi}\oiint_{S_R}\vec{E}(Q)\cdot d\vec{S}=\frac{\Omega_3(\phi_0)}{4\pi}\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

（S_R：R 全球面）



题解图 3

数学上可得

$$\Omega_3(\phi_0)=2\pi(1-\cos\phi_0) \qquad (4)$$

联立（1）、（2）、（3）、（4）式，得

$$\frac{Q}{2\varepsilon_0}=\iint_{S_{r_0}}\vec{E}\cdot d\vec{S}=2\iint_{S_{r_0}}\vec{E}(Q)\cdot d\vec{S}=2\times\frac{\Omega_3(\phi_0)}{4\pi}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

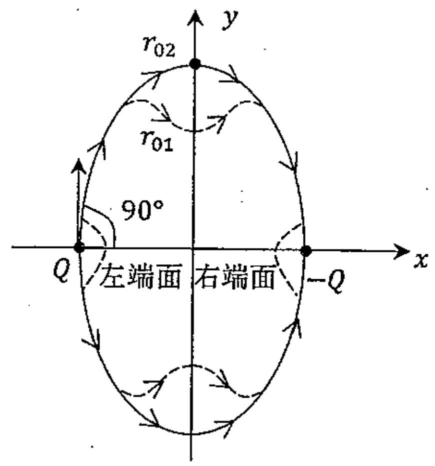
$$=(1-\cos\phi_0)\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow(1-\cos\phi_0)=\frac{1}{2}\Rightarrow\phi_0=60°$$

即可解得

$$r_0=a\tan\phi_0=\sqrt{3}a=1.732a \qquad (5\text{ 分})$$

注解：电场线不能相交，但能否相切？对此不作一般讨论。就本题而言，若 $\phi_0=90°$ 电场线因相切而延展出两条或多条电场线，接着会使 r_0 的解不唯一。最基本的情况如题解图 4 所示，在 y 轴上出现两个交点 r_{01} 和 r_{02} ，r_0 的解便不是唯一。很容易证明这是不可能的，因为 $S_{r_{01}}$ 和 $S_{r_{02}}$ 两个正截面上的电通量均应与右端面电通量相等，这使得 r_{01} 到 r_{02} 间隔可形成的圆环面上电通量必须为零，但又因对称，此圆环面面上的场强一致地沿 x 轴向右，电通量应大于零，两者发生矛盾。这就说明，题解图 4 代表的情况是不会出现的。



题解图 4

（1.2）将题解图 1 中的 90° 取消，改为符合题意要求范围内的 ϕ 角，电场线管结构仍如前所述，左端面相对 Q 所张空间角便为

$$\Omega_3(\phi)=2\pi(1-\cos\phi)$$

与（1.1）问解答中用同样的分析，可得

$$\iint_{左端面}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{左端面}\vec{E}(Q)\cdot d\vec{S}=\frac{\Omega_3(\phi)}{4\pi}\oiint_{全球面}\vec{E}(Q)\cdot d\vec{S}=\frac{1}{2}(1-\cos\phi)\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ϕ 角对应的电场线与 y 轴交点的坐标仍记为 r_0 ，以 r_0 为半径旋转而成的圆截面 S_{r_0} 上的高

斯通量与左端面上的相等，可得与（1）式相似的公式：

$$\iint_{S_{r_0}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{左端面} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}(1-\cos\phi)\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (1)'$$

同样，仿照题解图 2，可得

$$\iint_{S_{r_0}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\iint_{S_{r_0}} E_x(Q)dS = 2\iint_{S_{r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S} \qquad (2)'$$

继续，参考题解图 3，S_{r_0} 相对 Q 的空间角记为 $\Omega_3(\phi_0)$，则有

$$\iint_{S_{r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S} = \frac{\Omega_3(\phi_0)}{4\pi}\oiint_{S_R} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S} = \frac{\Omega_3(\phi_0)}{4\pi}\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (3)'$$

将

$$\Omega_3(\phi_0) = 2\pi(1-\cos\phi_0) \qquad (4)'$$

与 (1)′、(2)′、(3)′ 联立，得

$$\frac{1}{2}(1-\cos\phi)\frac{Q}{\varepsilon_0} = \iint_{S_{r_0}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\iint_{S_{r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S} = 2\times\frac{\Omega_3(\phi_0)}{4\pi}\frac{Q}{\varepsilon_0} = (1-\cos\phi_0)\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow (1-\cos\phi_0) = \frac{1}{2}(1-\cos\phi)$$

$$\Rightarrow \cos\phi_0 = \frac{1}{2}(1+\cos\phi)$$

因

$$r_0 = a\tan\phi_0\text{，过 } y \text{ 轴电场线对应 } \infty > r_0 \ge 0$$

要求

$$\frac{\pi}{2} > \phi_0 \ge 0 \Rightarrow 0 < \cos\phi_0 \le 1 \Rightarrow -1 < \cos\phi \le 1$$

即得 ϕ 可取范围为

$$\pi > \phi \ge 0$$

这也就意味着 $\{Q、-Q\}$ 系统电场中全部由 Q 发出的电场线中，除了在 $\phi\to\pi$ 邻域之内，其它所有电场线都通过 yz 平面终止于 $-Q$。

$r_0\sim\phi$ 关系的推导：

$$r_0 = a\tan\phi_0 = a\frac{\sin\phi_0}{\cos\phi_0} = a\frac{\sqrt{(1-\cos\phi_0)(1+\cos\phi_0)}}{\cos\phi_0}$$

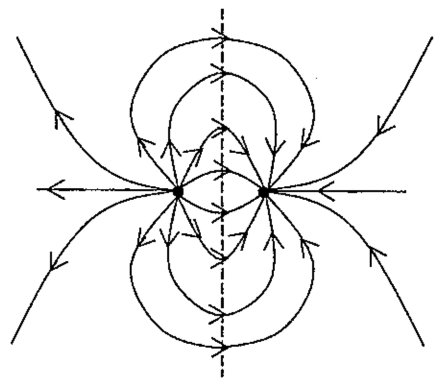
$$\Rightarrow r_0 = a\frac{\sqrt{(1-\cos\phi)(3+\cos\phi)}}{1+\cos\phi}$$

三个 ϕ 值对应的三个 r_0 值：

$\phi = \frac{\pi}{3}$ 　　$\phi = \frac{\pi}{2}$ 　　$\phi = \frac{2}{3}\pi$

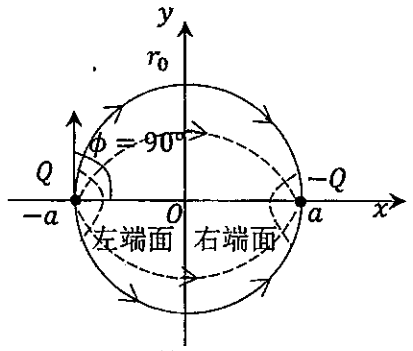
$r_0 = \frac{\sqrt{7}}{3}a$ 　　$r_0 = \sqrt{3}a = 1.73a$ 　　$r_0 = \sqrt{15}a$

$O-xy$ 平面上电场线分布，见题解图 5。　（4 分）



题解图 5

（2）此时在真实的三维空间中，静电场高斯定理不成立。将真实三维空间中 $O-xy$ 坐标系所在平面单独取出，局限于该平面的静电场对应的二维空间高斯定理成立。$O-xy$ 平面上的电场结构属于真实三维空间中的电场结构，题图中的那条电场线既属于真实三维空间静电场，也属于 $O-xy$ 平面的二维电场。



题解图 6

$O-xy$ 平面上的 $\phi=90°$ 二维电场线管如题解图 6 所示，电场线管“侧面”（实为侧边）由上、下两条边界电场线构成，左端面为无限靠近 Q，且以 Q 为“球心”（圆心）的“半球面”（半圆周）。点电荷$-Q$ 对左端面场强贡献相对点电荷 Q 的贡献可略，可得

$$\int_{左端面} \vec{E}\cdot d\vec{S_2} = \int_{左端面} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S_2} = \frac{1}{2}\oint_{全球面} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S_2} = \frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon_2}$$

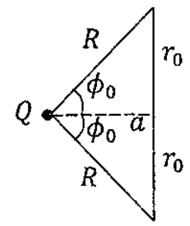
（$d\vec{S_2}$ 为“法向”线元矢量）　　　（全球面即为全圆周）

由不内含电荷电场线管内任一截面电通量相同，可知在 y 轴上长为 $2r_0$ 的正截“面” S_{2r_0} 的通量为

$$\int_{S_{2r_0}} \vec{E}\cdot d\vec{S_2} = \int_{左端面} \vec{E}\cdot d\vec{S_2} = \frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon_2} \qquad (5)$$

仿照（1.1）问解答中的讨论，同样可得

$$\int_{S_{2r_0}} \vec{E}\cdot d\vec{S_2} = 2\int_{S_{2r_0}} E_x(Q)dS_2 = 2\int_{S_{2r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S_2} \qquad (6)$$



题解图 7

$\int_{S_{2r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S_2}$（$Q$ 单独存在时截面 S_{2r_0} 上的电通量）的计算：

仿照题解图 3 的是题解图 7，S_{2r_0} 相对 Q 所张的二维空间角，即为以待定的 ϕ_0 为半顶角的二维锥面空间角，记 $\Omega_2(\phi_0)$。因 Q 单独存在时，二维空间中电场线也是对称均匀分布，故有

$$\int_{S_{2r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S_2} = \frac{\Omega_2(\phi_0)}{2\pi}\oint_{S_R} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S_2} = \frac{\Omega_2(\phi_0)}{2\pi}\frac{Q}{\varepsilon_2} \qquad (7)$$

（S_R：R 全球面，即二维 R 圆周）

数学上可得

$$\Omega_2(\phi_0) = 2\phi_0 \qquad (8)$$

联立（5）、（6）、（7）、（8）式，得

$$\frac{Q}{2\varepsilon_2} = \int_{S_{2r_0}} \vec{E}\cdot d\vec{S_2} = 2\int_{S_{2r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\vec{S_2} = 2\cdot\frac{\Omega_2(\phi_0)}{2\pi}\frac{Q}{\varepsilon_2} = \frac{2\phi_0}{\pi}\frac{Q}{\varepsilon_2}$$

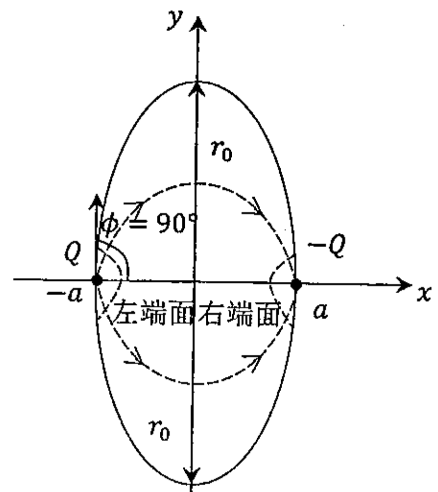
$$\Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{4} = 45°$$

即可解得

$$r_0 = a\tan\phi_0 = a \qquad （5 分）$$

（3）此时在真实的三维空间中，静电场高斯定理不成立。将真实的三维空间处理为抽象的四维空间中的三维子空间，在抽象的四维空间中静电场高斯定理仍成立。真实空间电场结构属于抽象的四维空间电场结构，题图中那条电场线既属于真实三维空间电场，也属于抽象四维空间电场。

抽象四维空间电场线管，被真实三维空间内 $O-xy$ 平面所截图象如题解图 8 所示。上、下两条电场线既属于 $O-xy$ 平面上的电场也属于抽象四维空间电场线管三维界面上的电场。图中两条 r_0 方向线代表的是四维电场线管的三维中截面，它是一个以 r_0 为半径的三维球体，其四维截面积（即三维体积）即为



题解图 8

$$\frac{4}{3}\pi r_0^3$$

四维电场线管中无限靠近 Q，且以 Q 为中心的左端面（实为三维体）上的电通量，因 $-Q$ 的场强贡献可略，结合四维空间高斯定理可得

$$\iiint_{\text{左端面}} \vec{E}\cdot d\overrightarrow{S_4} = \iiint_{\text{左端面}} \vec{E}(Q)\cdot d\overrightarrow{S_4} = \frac{1}{2}\oiiint_{\text{全球面}} \vec{E}(Q)\cdot d\overrightarrow{S_4} = \frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon_4}$$

由不内含电荷的一段四维电场线管任一截面电通量守恒，可知以 r_0 为半径的三维中截面上的电通量

$$\iiint_{S_{r_0}} \vec{E}\cdot d\overrightarrow{S_4} = \iiint_{\text{左端面}} \vec{E}\cdot d\overrightarrow{S_4} = \frac{Q}{2\varepsilon_4} \qquad (9)$$

仿照题解图 2 对应的讨论，同样可得

$$\iiint_{S_{r_0}} \vec{E}\cdot d\overrightarrow{S_4} = 2\iiint_{S_{r_0}} E_x(Q)dS_4 = 2\iiint_{S_{r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\overrightarrow{S_4} \qquad (10)$$

$\iiint_{S_{r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\overrightarrow{S_4}$（$Q$ 单独存在时截面 S_{r_0} 上的电通量）的计算：

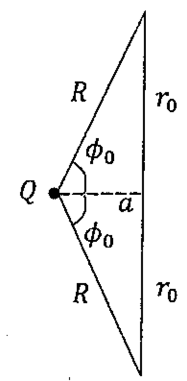
Q 单独存在时，电场线取四维球对称均匀分布。参考题解图 9，S_{r_0} 相对 Q 的四维空间角，即为以 ϕ_0 为半顶角的锥面空间角，记为 $\Omega_4(\phi_0)$，便有

$$\iiint_{S_{r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\overrightarrow{S_4} = \frac{\Omega_4(\phi_0)}{2\pi^2}\oiiint_{S_R} \vec{E}(Q)\cdot d\overrightarrow{S_4} = \frac{\Omega_4(\phi_0)}{2\pi^2}\frac{Q}{\varepsilon_4} \qquad (11)$$

（S_R：R 为半径的四维球面）

数学上可得

$$\Omega_4(\phi_0) = 2\pi\left(\phi_0 - \frac{1}{2}\sin 2\phi_0\right) \qquad (12)$$



题解图 9

联立（9）、（10）、（11）、（12）式，得

$$\frac{Q}{2\varepsilon_4} = \iiint_{S_{r_0}} \vec{E}\cdot d\overrightarrow{S_4} = 2\iiint_{S_{r_0}} \vec{E}(Q)\cdot d\overrightarrow{S_4} = 2\cdot\frac{\Omega_4(\phi_0)}{2\pi^2}\frac{Q}{\varepsilon_4}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\phi_0 - \frac{1}{2}\sin 2\phi_0\right)\frac{Q}{\varepsilon_4}$$

$$\Rightarrow \phi_0 - \frac{1}{2}\sin 2\phi_0 = \frac{\pi}{4}$$

如题解图 9，

$$\phi_0 = \tan^{-1}\frac{r_0}{a}, \qquad \frac{1}{2}\sin 2\phi_0 = \sin\phi_0\cdot\cos\phi_0 = \frac{r_0 a}{r_0^2 + a^2}$$

因此，

$$\tan^{-1}\frac{r_0}{a} - \frac{r_0 a}{r_0^2 + a^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{或} \quad \frac{r_0}{a} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{r_0 a}{r_0^2 + a^2}\right) \qquad \text{（6 分）}$$

即为所求方程。

附注：数值计算，得

$$\phi_0 = 66.6°$$

即有

$$r_0 = a\tan\phi_0 = 2.31a$$