运筹学第十次作业参考答案（20230510）

1. 请利用 KT 条件求解以下优化问题：

$$\begin{cases} \max & f = \ln(x_1 + x_2 + 1) + x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：转化为

$$\begin{cases} \min & -f = -(\ln(x_1 + x_2 + 1) + x_1 + 2x_2) \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 - 4 \le 0 \\ & -x_1 \le 0, -x_2 \le 0 \end{cases}$$

LaGrange 函数为

$$L = -\ln(x_1 + x_2 + 1) - x_1 - 2x_2 + v_1(x_1 + 2x_2 - 4) - v_2 x_1 - v_3 x_2$$

$$v_i \ge 0, i = 1,2,3$$

梯度条件

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{x_1 + x_2 + 1} - 1 + v_1 - v_2 \\ -\dfrac{1}{x_1 + x_2 + 1} - 2 + 2v_1 - v_3 \end{bmatrix} = 0$$

互补松弛条件

$$v_1(x_1 + 2x_2 - 4) = 0, v_2 x_1 = 0, v_3 x_2 = 0$$

① $v_1 = 0$，则$-\frac{1}{x_1+x_2} - 1 + v_1 - v_2 < 0$，矛盾舍去；

② $v_1 > 0, v_2 > 0$，则解得$x_1 = 0, x_2 = 2, v_1 = \frac{7}{6}, v_2 = -\frac{1}{6}$，矛盾舍去；

③ $v_1 > 0, v_2 = 0, v_3 > 0$，则解得$x_1 = 4, x_2 = 0, v_1 = 1.2, v_3 = 0.2$，符合 KT 条件；

④ $v_1 > 0, v_2 = 0, v_3 = 0$，则解得$v_1 = 1, -\frac{1}{x_1+x_2} = 0$，矛盾舍去。

仅$x_1 = 4, x_2 = 0$符合 KT 条件。由于本题都是线性约束，LCQ 条件成立，最优解一定是 KT 解，所以综上可以得到最优值为$\ln 5 + 4$

2. 对如下优化问题：

$$\begin{cases} \min & f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 3)^2 \\ \text{s.t.} & x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \ge 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 \le 4 \end{cases}$$

求该问题的 KT 解，并判断其是否满足 KT 定理的条件。

解：

LaGrange 函数为

$$L = x_1^2 + (x_2 + 3)^2 - v_1(x_1^2 + (x_2 + 1)^2 - 1) + v_2(x_1^2 + x_2^2 - 4)$$

$$v_i \geq 0, i = 1,2$$

梯度条件

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2\begin{bmatrix} (1 - v_1 + v_2)x_1 \\ (1 - v_1 + v_2)x_2 - v_1 + 3 \end{bmatrix} = 0$$

互补松弛条件

$$v_1(x_1^2 + (x_2 + 1)^2 - 1) = 0, v_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0$$

① $v_1 = 0, v_2 = 0$，则$x_1 = 0, x_2 = -3$，不满足约束条件$x_1^2 + x_2^2 \leq 4$；

② $v_1 > 0, v_2 = 0$，则$x_1 = x_2 = 0, v_1 = 3$，满足 KT 条件，此时起作用的不等式约束只有一个，故线性无关，满足 KT 定理的条件；

③ $v_1 = 0, v_2 > 0$，则$x_1 = 0, x_2 = -2, v_2 = 0.5$，满足 KT 条件，但起作用的不等式约束梯度线性相关

$$\nabla g_1 = [0,2]^T, \nabla g_2 = [0,-4]^T$$

故不满足 KT 定理的条件。

④ $v_1 > 0, v_2 > 0$，则$x_1 = 0, x_2 = -2, v_1 - 2v_2 + 1 = 0$，满足 KT 条件。但起作用的不等式约束梯度线性相关，同上。

KT 解为$(0,0)$和$(0,-2)$，其中$(0,0)$满足 KT 定理，不是最优解；$(0,-2)$不满足 KT 定理，是最优解。

备注：KT 定理只能保证最优解满足 KT 条件，而即使 KT 定理不满足时最优解仍然可能是 KT 解。例如本题中两个 KT 解：(0,0)满足 LICQ 条件但不是最优解，(0,-2)不满足 LICQ 条件却是最优解。

3. 用简约梯度法求解以下问题：

$$\begin{cases} \min & f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

给出前两步迭代的计算过程即可。

解：

不同初始点对应不同的计算过程，这里给出几种：

1）第一轮初始点$[0,0,2,5]^T, D = [4,6,-10,-34]^T, \alpha = \frac{5}{34}, X = \left[\frac{10}{17}, \frac{15}{17}, \frac{9}{17}, 0\right]^T$

第二轮 $x_B = \left[\frac{10}{17}, \frac{15}{17}\right]^T, \nabla f(x) = \left[-\frac{88}{17}, -\frac{82}{17}, 0, 0\right]^T, r_N' = \left[\frac{179}{34}, -\frac{3}{34}\right]^T, D = \left[\frac{4053}{1156}, -\frac{831}{1156}, -\frac{1611}{578}, \frac{3}{34}\right]^T, \alpha = \frac{34}{179}, X = \left[\frac{449}{358}, \frac{267}{358}, 0, \frac{3}{179}\right]^T$

2）第一轮初始点$[0,0,2,5]^T, D = [4,6,-10,-34]^T, \alpha = \frac{5}{34}, X = \left[\frac{10}{17}, \frac{15}{17}, \frac{9}{17}, 0\right]^T$

第二轮 $x_B = \left[\frac{15}{17}, \frac{9}{17}\right]^T, \nabla f(x) = \left[-\frac{88}{17}, -\frac{82}{17}, 0, 0\right]^T, r_N' = \left[-\frac{348}{85}, \frac{82}{85}\right]^T, D = \left[\frac{348}{85}, -\frac{358}{425}, -\frac{1432}{425}, 0\right]^T, \alpha = \frac{225}{1432}, X = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0\right]^T$

3）第一轮初始点$[1,0,1,4]^T$，$D=[1,0,1,4]^T, \alpha=\frac{2}{25}, X=\left[1,\frac{4}{5},\frac{1}{5},0\right]^T$

第二轮$x_B=\left[1,\frac{4}{5}\right]^T, D=[0.575,-0.115,-0.46,0]^T, \alpha=0.435, X=\left[\frac{5}{4},\frac{3}{4},0,0\right]^T$