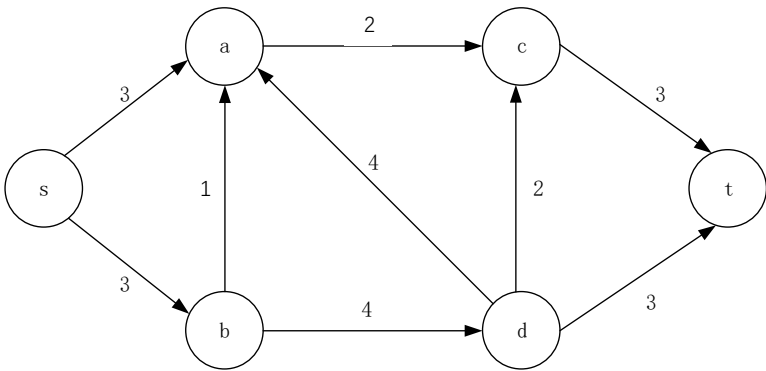


运筹学第十二次作业参考答案（20230524）

1. 求下图所示有向网络中从  $s$  到  $t$  的最大流。



解：

初始化每边流量为 0

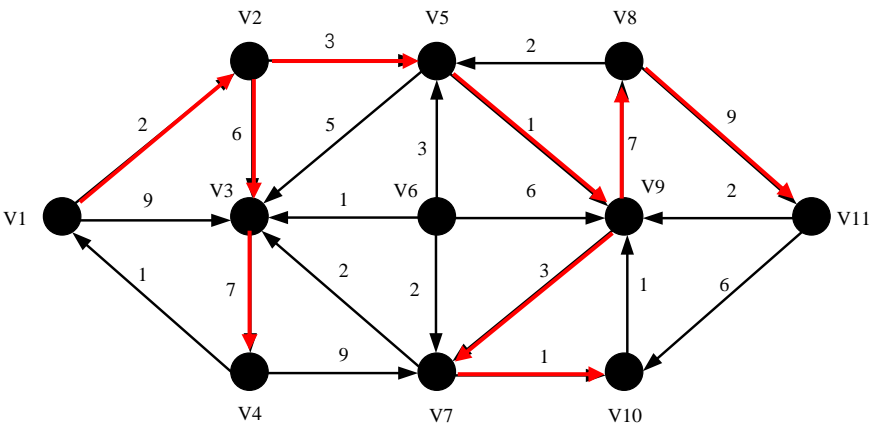
分别找到可增广链  $s \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow t$  以及  $s \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow t$

$S = \{s, a\}, \bar{S} = \{b, c, d, t\}$ , 割集容量为 5

最大流为 5

(图略)

2. 用 Bellman-Ford-Moore 算法和 Dijkstra 算法求图 2 中  $V_1$  至各点的最短距离和最短路径。



解：

Bellman-Ford-Moore 算法：

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$	$V_9$	$V_{10}$	$V_{11}$
1	0	2	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	0	2	8	16	5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
3	0	2	8	15	5	$\infty$	25	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$
4	0	2	8	15	5	$\infty$	9	13	6	26	$\infty$

5	0	2	8	15	5	$\infty$	9	13	6	10	22
6	0	2	8	15	5	$\infty$	9	13	6	10	22

迭代完成

Dijkstra 算法:

加入边的顺序:

	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
1	2, $v_1$	9, $v_1$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2		8, $v_2$	$\infty$	5, $v_2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
3		8, $v_2$	$\infty$		$\infty$	$\infty$	$\infty$	6, $v_5$	$\infty$	$\infty$
4		8, $v_2$	$\infty$		$\infty$	9, $v_9$	13, $v_9$		$\infty$	$\infty$
5			15, $v_3$		$\infty$	9, $v_9$	13, $v_9$		$\infty$	$\infty$
6			15, $v_3$		$\infty$		13, $v_9$		10, $v_7$	$\infty$
7			15, $v_3$		$\infty$		13, $v_9$			$\infty$
8			15, $v_3$		$\infty$					22, $v_8$
9					$\infty$					22, $v_8$

2 5 9 3 7 10 8 4 11

结论:

目标	最短路径	最短距离
$v_2$	$v_1 \rightarrow v_2$	2
$v_3$	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$	8
$v_4$	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$	15
$v_5$	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5$	5
$v_6$		$\infty$
$v_7$	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_9 \rightarrow v_7$	9
$v_8$	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_9 \rightarrow v_8$	13
$v_9$	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_9$	6
$v_{10}$	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_9 \rightarrow v_7 \rightarrow v_{10}$	10
$v_{11}$	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_9 \rightarrow v_8 \rightarrow v_{11}$	22

路径图在上图中用红色线表示。

**附加题:** 如何对于 Floyd 算法找到的最短路径值推导出任意两点的最短链路。或者改造一下 Floyd 算法的迭代过程, 使得我们最后能容易地输出任意两点的最短链路。

修改思路为: 另外创建矩阵 P, 初始时  $P[i,j]=j$ , 即 i 到 j 一定会经过 j。在课件 49 页代码三重循环内, 若 k 点可以使得 i,j 的路径缩短, 则  $P[i,j]=P[i,k]$ 。迭代完成后,  $P[i,j]$  即表示从 i 到 j 最短路径中 i 的下一个点。

注: 部分同学设计的方法中  $P[i,j]=k$ , 但此后仍要使用递归, 较为复杂