习题课 2 解答

1. 解：

问题一：

根据“父母”代的不同基因型用全概率公式分别计算：

P(子一代 AA 型)= $(u+v)^2$；P(子一代 aa 型)= $(w+v)^2$（可用对称性）；

P(子一代 Aa 型)= $2(u+v)(w+v)$。

若记 $\alpha=u+v;\beta=w+v$，则子一代中，这三种基因型式的比例为$\alpha^2:2\alpha\beta:\beta^2$。

重复上面的过程计算：可得子二代中，这三种基因型式的比例也为$\alpha^2:2\alpha\beta:\beta^2$。即从第二代开始，三种基因型式的比例不变。这就是著名的 Hardy-Weinberg 平衡原理。

问题二：

（a） P(带菌者|成人)= $\dfrac{P(Aa)}{P(AA\bigcup Aa)}=\dfrac{2}{3}$；

（b） $P(子AA)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{p}{3}$；$P(子Aa)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{p}{6}$；$P(子aa)=\dfrac{p}{6}$。

2. 解：记

U_i ＝{随机选取得一只盒子为第 i 号盒},

R_m ＝{取到的前 m 只球均为白球},

R ＝{取到的第 $m+1$ 只球是白球}，问题要求的概率为 $P(R\,|\,R_m)$。

由于 R_m 和 R 关于 U_i 是条件独立的，即选定第 i 号盒 U_i 的条件下，R_m 和 R 是相互独立的，故

$$P(R\,|\,R_mU_i)=P(R\,|\,U_i)=\frac{i}{n},$$

于是由全概率公式得

$$P(R\,|\,R_m)=\sum_{i=0}^{n}P(R\,|\,R_mU_i)P(U_i\,|\,R_m)$$

而 $P(U_i\,|\,R_m)$ 可以由 Bayes 公式获得，即

$$P(U_i \mid R_m) = \frac{P(R_m \mid U_i) P(U_i)}{\sum_{j=0}^{n} P(R_m \mid U_j) P(U_j)} = \frac{(\frac{i}{n})^m \frac{1}{n+1}}{\sum_{j=0}^{n} (\frac{j}{n})^m \frac{1}{n+1}} = \frac{(\frac{i}{n})^m}{\sum_{j=0}^{n} (\frac{j}{n})^m}$$

因此，

$$P(R \mid R_m) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \frac{(\frac{i}{n})^m}{\sum_{j=1}^{n} (\frac{j}{n})^m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^{m+1}}{\sum_{j=1}^{n} (\frac{j}{n})^m}$$

注：$P(R \mid R_m) = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^{m+1}}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (\frac{j}{n})^m} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{\int_0^1 x^{m+1} dx}{\int_0^1 x^m dx} = \dfrac{m+1}{m+2}$

3.

解法一（利用二项分布）：

在ｍ次失败之前取得ｎ次成功当且仅当前 m+n-1 次试验中至少成功 n 次。

因为如果在前 m+n-1 次试验中至少成功 n 次，则在前 m+n-1 次试验中至多失败ｍ－１次，于是ｎ次成功发生在ｍ次失败之前；

另一方面，如果在前 m+n-1 次试验中成功的次数少于 n 次，则在前 m+n-1 次试验中失败次数至少为ｍ次，这样就不可能在ｍ次失败之前取得ｎ次成功。

所以，$p = P(X \ge n) = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{k} p^k q^{n+m-1-k}$

解法二（利用负二项分布（Pascal 分布））：

（直到第 r 次试验成功时，试验所需要的次数 Y 的分布是

$P(Y = n) = C_{n-1}^{r-1} p^r q^{n-r}, n = r, r+1, \cdots$）

在ｍ次失败之前取得ｎ次成功，试验最多进行 m+n-1 次；ｎ次成功发生在ｍ次失败之前，进行试验的次数可能是ｎ，ｎ＋１，...，ｎ＋ｍ－１。故所求概率为

$$p = P(Y \le n+m-1) = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}$$

4.

解：不放回情形：直接用古典概型（多元超几何分布）

$$P(X_m = M) = \frac{C_{M-1}^{m-1} C_1^1 C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

放回情形：

$$P(X_m = M) = P(X_m \le M) - P(X_m \le M-1)$$

由于

$$P(X_m \le M) = \sum_{k=m}^{n} C_n^k \frac{M^k (N-M)^{n-k}}{N^n}$$

所以

$$P(X_m = M) = P(X_m \le M) - P(X_m \le M-1)$$

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k \frac{M^k (N-M)^{n-k}}{N^n} - \sum_{k=m}^{n} C_n^k \frac{(M-1)^k (N-M+1)^{n-k}}{N^n}$$

5.

（1）$\forall m \ge 2$，有

$$P(X_1 + X_2 = m) = \sum_{k=1}^{m-1} P(X_1 = k) P(X_2 = m-k) = (m-1) p^2 q^{m-2}$$

（2）$M_{X_k}(u) = E(e^{uX}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{uk} p q^{k-1} = \frac{pe^u}{1-qe^u}$

$$EX_k = M'_{X_k}(0) = \frac{1}{p}, \quad EX_k^2 = M''_{X_k}(0) = \frac{2-p}{p^2}$$

$$E[(X_1 + X_2 + X_3)^2] = \sum_{k=1}^{3} EX_k^2 + 2 \sum_{1 \le k < l \le 3} E(X_k X_l)$$

$$= \frac{6-3p}{p^2} + \frac{6}{p^2}$$

$$= \frac{12-3p}{p^2}$$

6.解

$$p_{i,j}(s, s+t) - p_{i,j}(s,s) = P(N_{s+t} = j \mid N_s = i) - \delta_{i,j}$$

$$= \frac{P(N_{s+t} - N_s = j-i, N_s = i)}{P(N_s = i)} - \delta_{i,j}$$

$$= P(N_{s+t} - N_s = j-i) - \delta_{i,j}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{j-i} e^{-\lambda t}}{(j-i)!} - \delta_{i,j} & j \ge i \\ 0 & j < i \end{cases}$$

当 $i=j$，$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{i,j}(s,s+t)-p_{i,j}(s,s)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-\lambda t}-1}{t}=-\lambda$

当 $j\ge i+1$ 时，$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{i,j}(s,s+t)-p_{i,j}(s,s)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}t^{j-i-1}=\begin{cases}\lambda & j=i+1\\ 0 & j>i+1\end{cases}$；

故

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{i,j}(s,s+t)-p_{i,j}(s,s)}{t}=\begin{cases}-\lambda & j=i\\ \lambda & j=i+1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$