第六章　校正与综合设计

6.1 导论

6.1.1 校正的必要性
6.1.2 性能指标
6.1.3 系统结构
6.1.4 设计方法

6.2 超前校正

6.2.1 相位超前网络
6.2.2 特性
6.2.3 根轨迹法设计超前校正
6.2.4 Bode图设计超前校正

6.3 滞后校正

6.3.1 相位滞后网络　　6.3.2 特性
6.3.3 根轨迹设计滞后校正
6.3.4 Bode图设计滞后

6.4 超前-滞后校正

6.4.1 超前-滞后网络
6.4.2 特性
6.4.3 根轨迹设计超前-滞后校正
6.4.4 Bode图设计超前-滞后校正

6.5 反馈校正

6.5.1 降低环境条件的影响
6.5.2 简单反馈取得满意结果

6.1 导论

6.1.1 校正的必要性

♦系统性能不理想

- 稳定性
- 响应速度
- 稳态误差

6.1.2 性能指标

♦ 常用性能指标

- 相对稳定性: γ, K_g (ζ， ω_n)
- 响应速度: ω_c (ζ, ω_n)
- 精度: K_p , K_v , K_a

♦ 工程指标

- 时域: t_r , σ, t_s
- 频域: ω_r , M_r , ω_B

♦ 理想值

$45° \le \gamma \le 60°$ $K_g \ge 10$ dB $1.0 < M_r < 1.4$

$0.4 < \zeta < 0.7$ $\sigma < 25\%$

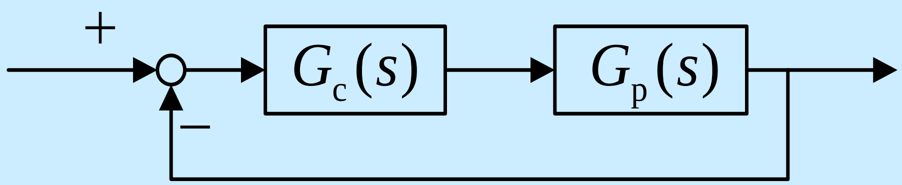
- 二阶系统

ζ	γ	σ	M_r
0.4	44°	25.4%	1.364
0.7	60°	4.6%	1.002

注: • 高性能意味着高代价
• 多个性能指标相互冲突

6.1.3 系统结构

1. 串联校正



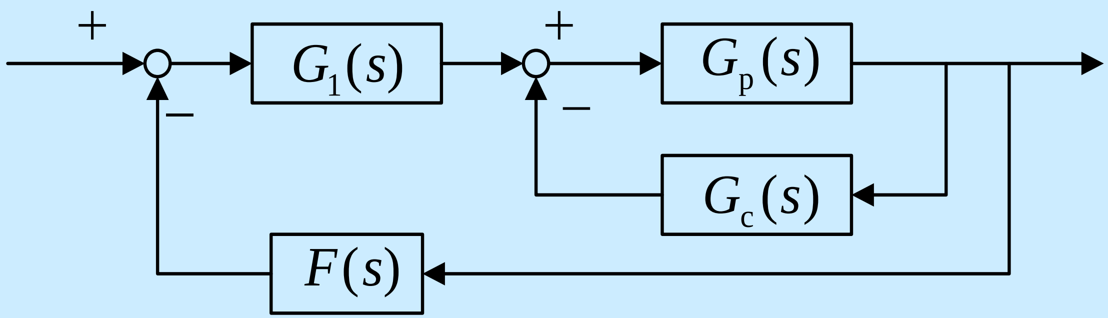
♦ 特点:

- 分析和设计简单
- 需要额外放大器

♦ 校正类型:

- 滞后校正: 改善稳态精度
- 超前校正: 改善响应速度
- 超前-滞后校正: 改善稳态精度和响应速度
- Bridged-T带阻滤波(Notch filter):防止谐振

2. 反馈校正



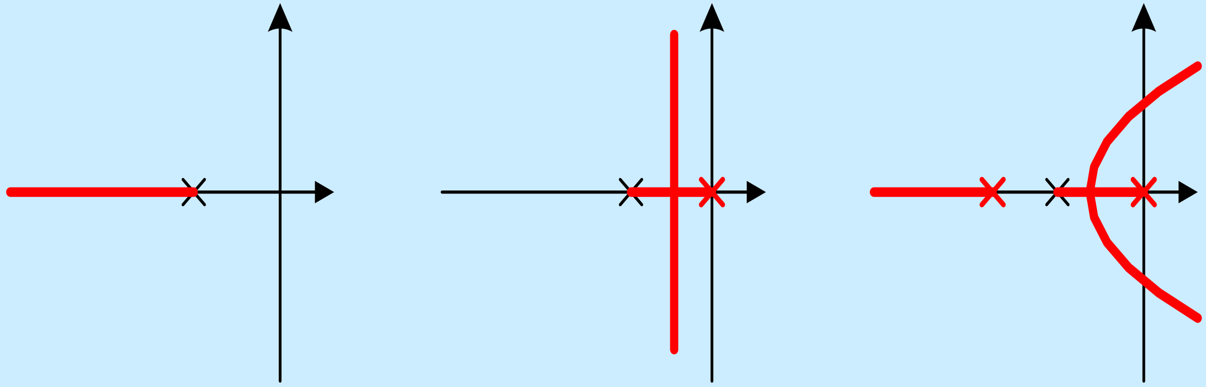
♦ **特点:**

- **多回路机制**
- **分析和设计复杂**
- **简单控制器可能实现复杂控制任务**

6.1.4 设计方法

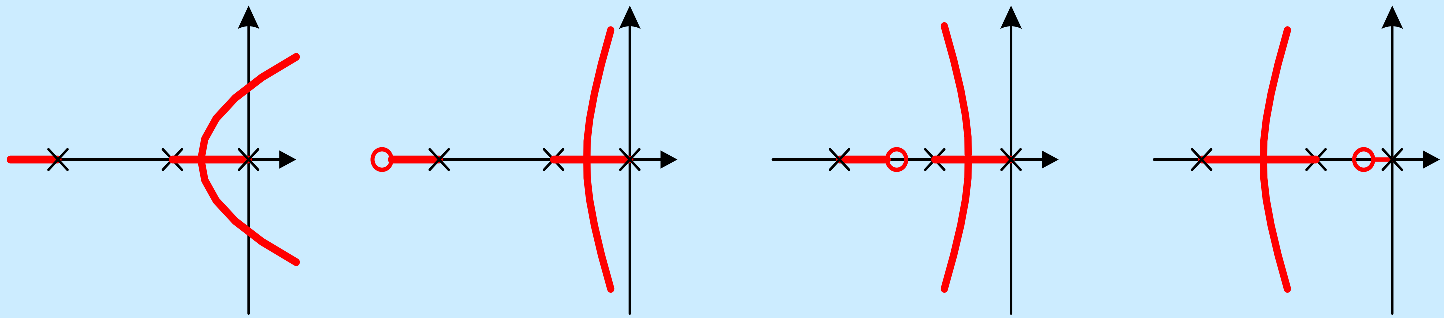
1. 根轨迹法

(1) 添加极点导致根轨迹右移



- 导致系统稳定变慢、稳定性变差
- 可提高系统稳态精度

(2) 添加零点导致根轨迹左移



- 改善稳定性和响应速度

(3) 增益调整原则：使主导极点对应较高增益，从而 e_{ss} 下降

(4) 常用指标: ζ, ω_n, K_v

2. 频率响应法

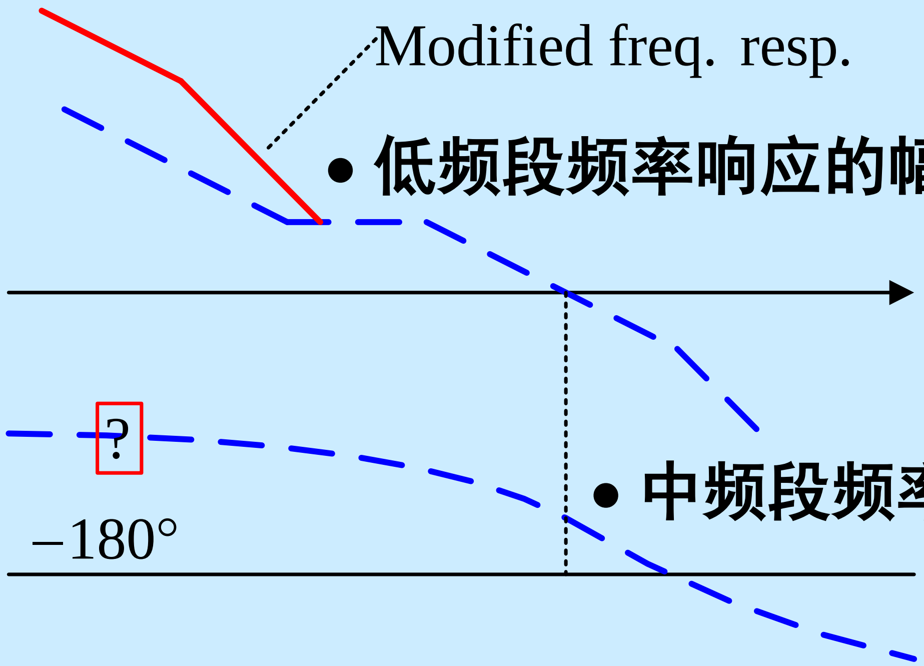
(1) 常用指标: γ, K_g 和稳态误差

(2) 系统性能与频率响应之间的关系:

- **低频 — 稳态误差**
- **中频 — 相对稳定性、响应速度**
- **高频 — 响应速度、干扰抑制**

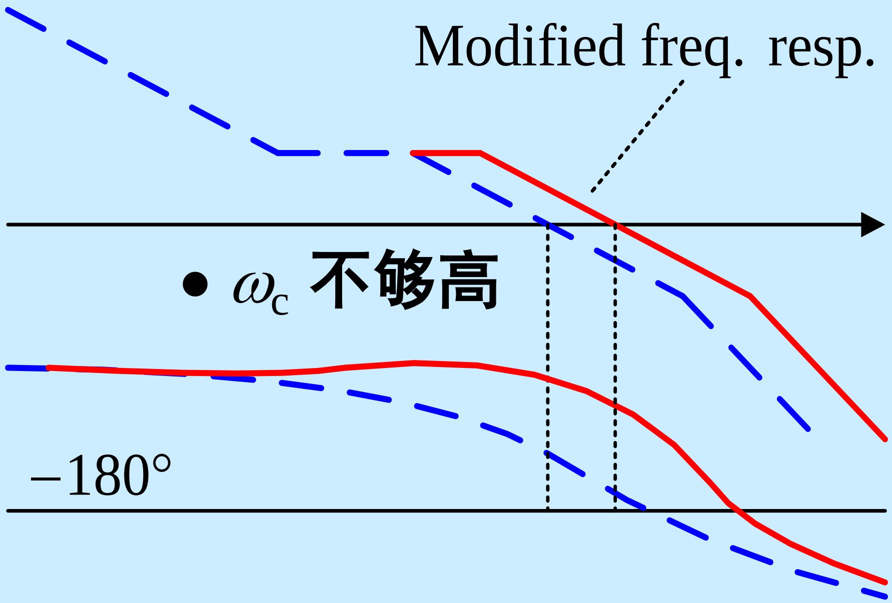
(3) 性能不理想的改进

(i) 稳定, 但 e_{ss} 太大



- 低频段频率响应的幅值太低
- 中频段频率响应保证稳定性

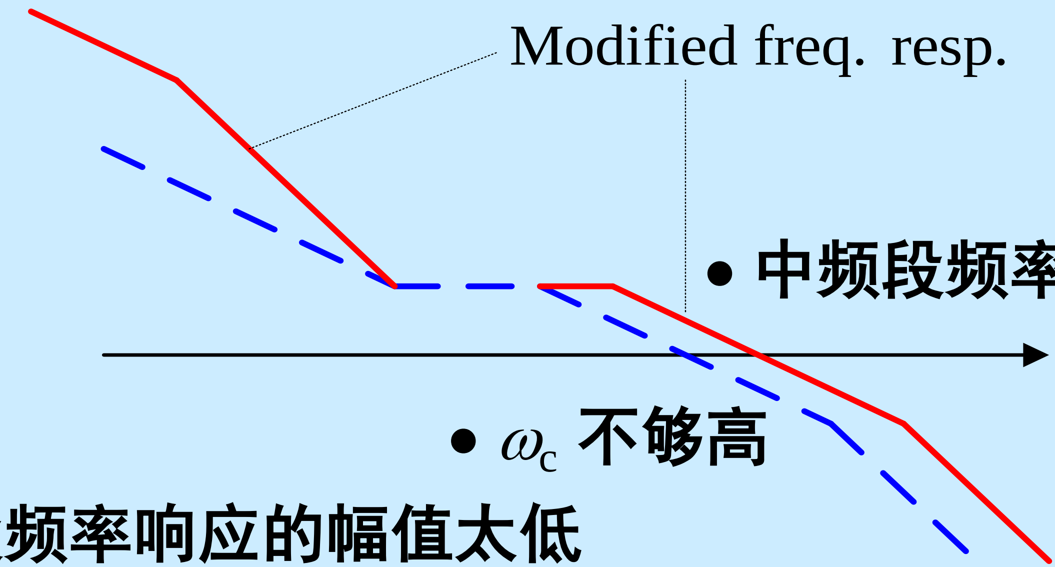
(ii) 稳定, 但时间响应太慢



- ω_c 不够高

- 中频段频率响应保证稳定性

(iii) 稳定, 但 e_{ss} 太大且时间响应太慢



- 中频段频率响应保证稳定性
- ω_c 不够高
- 低频段频率响应的幅值太低

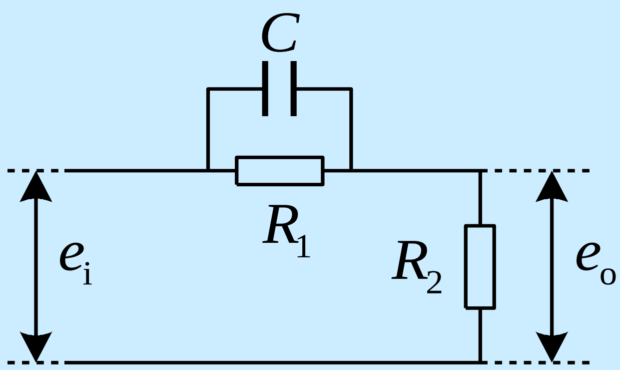
(iv) 对任意开环增益K闭环均不稳定

- 开环频率响应不合适
- 多个频段的频率响应需要调整

类型	方法
超前	频率响应
滞后	
超前–滞后	根轨迹

6.2 超前校正

6.2.1 相位超前网络



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{R_2}{R_2+\dfrac{R_1\dfrac{1}{Cs}}{R_1+\dfrac{1}{Cs}}}$$

$$=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_1Cs+1}{\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs+1}$$

令 $\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C=T$ $\qquad \dfrac{R_1+R_2}{R_2}=\alpha>1$

则 $\dfrac{E_o(s)}{E_i(s)}=\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=\dfrac{s+\dfrac{1}{\alpha T}}{s+\dfrac{1}{T}}$

- 存在其他表达方式

- 说明：存在其他实现方式，有源电路，见实验指示书比例微分

6.2.2 特性

$$G_c(s)=\frac{s+\frac{1}{\alpha T}}{s+\frac{1}{T}}\quad(\alpha>1)$$

1. 零–极点分布

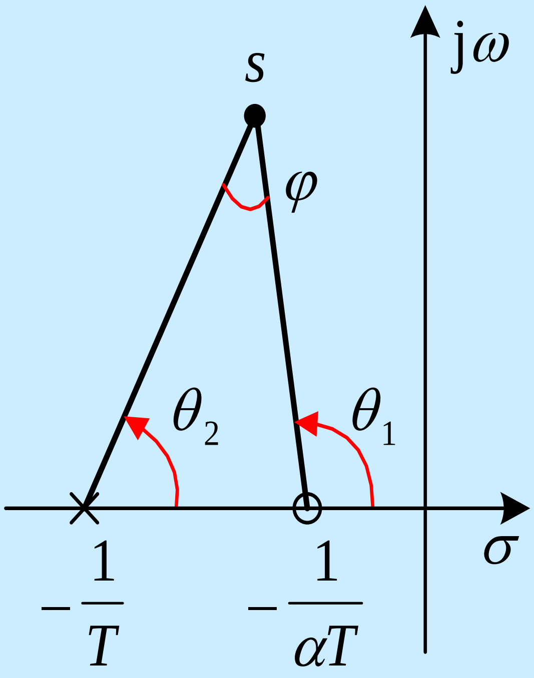
- 考虑任一测试点

  $s=\sigma+\mathrm{j}\,\omega$ （$\omega>0$），

  $G_c(s)$ 提供超前角

  $\varphi=\theta_1-\theta_2$ （$\varphi>0$）

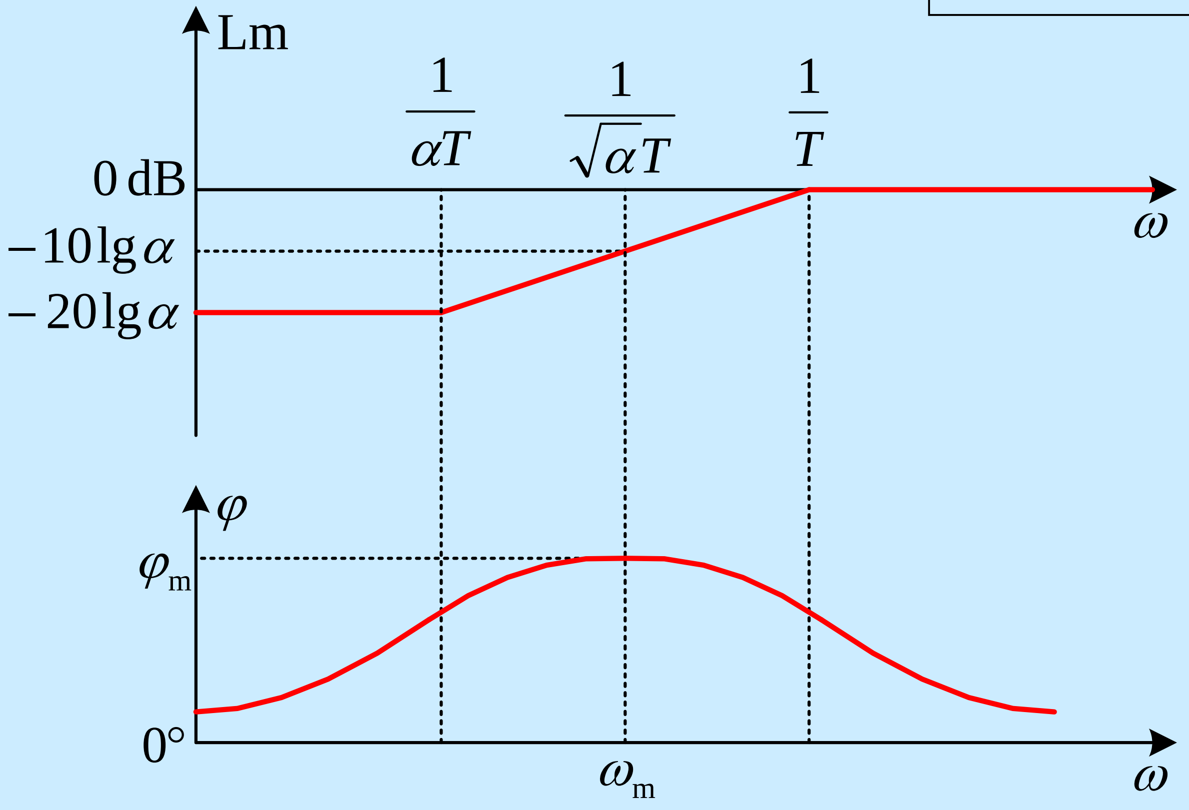
- $G_c(s)$ 使根轨迹左移



2. Bode图

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \quad (\alpha > 1)$$

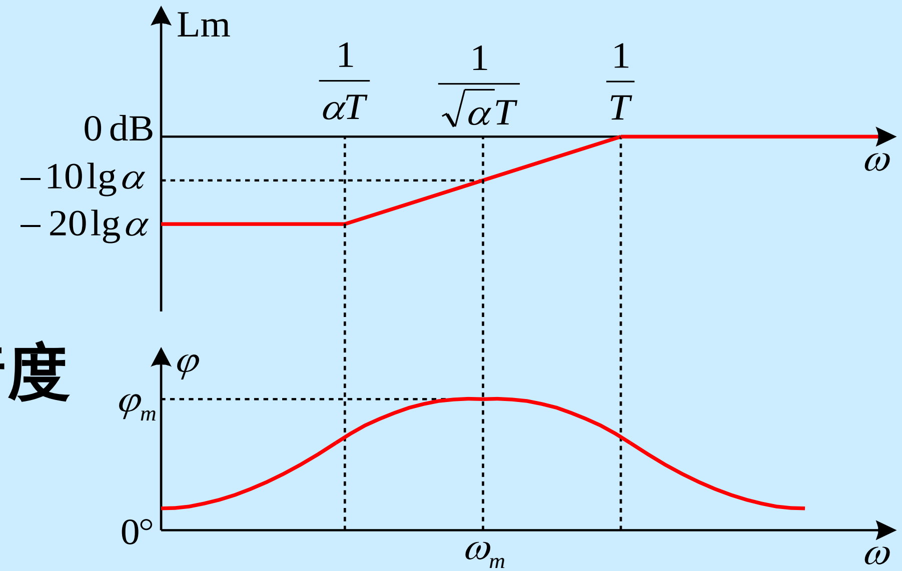
$$G(j\omega) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1+j\alpha\omega T}{1+j\omega T}$$



- 高通滤波特性

- $\mathrm{Lm}G(\mathrm{j}0) = -20\lg\alpha < 0\ \mathrm{dB}$

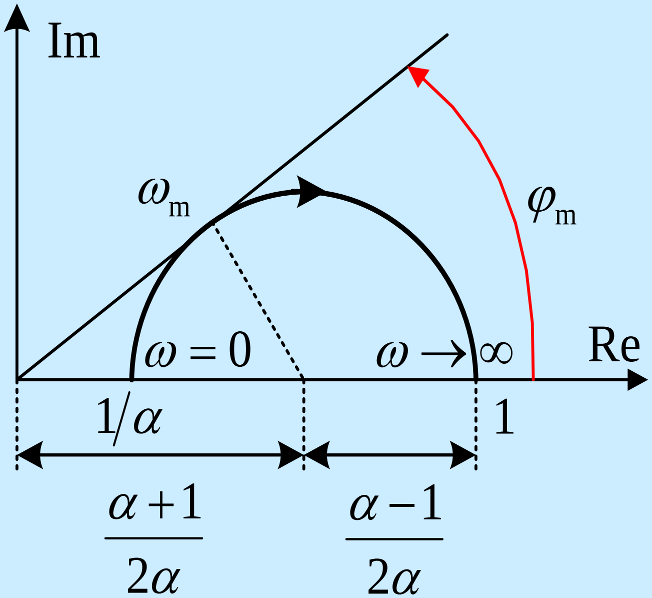
  $\Rightarrow$ 需加大增益保证稳态精度



- $\omega_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}T}$ 是 $\dfrac{1}{T}$ 和 $\dfrac{1}{\alpha T}$ 的几何中心

$$G_c(j\omega)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1+j\alpha\omega T}{1+j\omega T}$$
$$(\alpha>1)$$

3. Nyquist 图



$$\sin\varphi_m=\frac{\dfrac{\alpha-1}{2\alpha}}{\dfrac{\alpha+1}{2\alpha}}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

$$\varphi_m=\arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=\arctan\frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}$$

- $\alpha=\dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$

- 若　$\alpha=10$

  则　$\varphi_m=54.9°$

♦ 用于设计的表达形式

$$G_c(s)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}=\frac{s+\frac{1}{\alpha T}}{s+\frac{1}{T}}$$

$$G_c(s)=\frac{K_c}{\alpha}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}=K_c\frac{s+\frac{1}{\alpha T}}{s+\frac{1}{T}}$$

令 $-1/\alpha T = z_c$

$-1/T = p_c$

令 $K_c/\alpha = K_c$

$$\Downarrow$$

$$G_c(s)=K_c\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

$$\Downarrow$$

$$G_c(s)=K_c\frac{s-z_c}{s-p_c}$$

$$p_c/z_c=\alpha$$

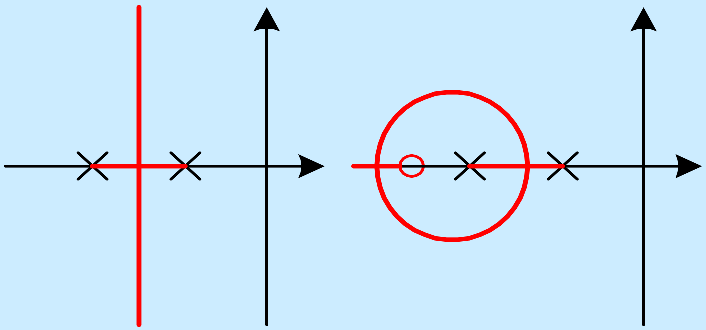
6.2.3 基于根轨迹法的超前校正

1. 理想微分校正

- 响应慢(不稳定)意味着闭环极点太靠近虚轴(在右半平面)

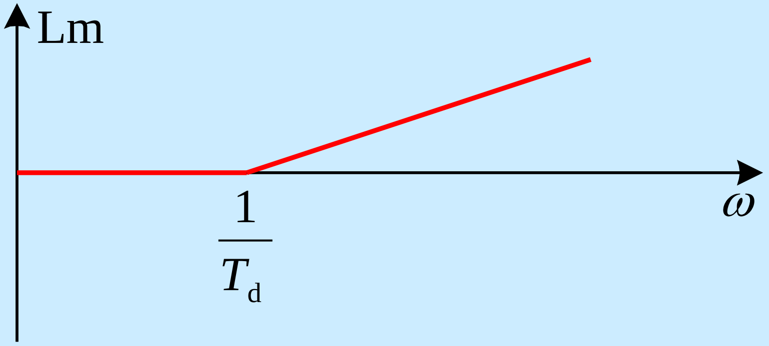
♦ 修正：添加一个零点

（ $G_c(s)=1+T_d s = T_d(s+1/T_d)$ ）



- 根轨迹左移
- 取得更高的稳定性

♦ 缺点:



- 难以实现

$$G_c(s)=1+T_d s$$

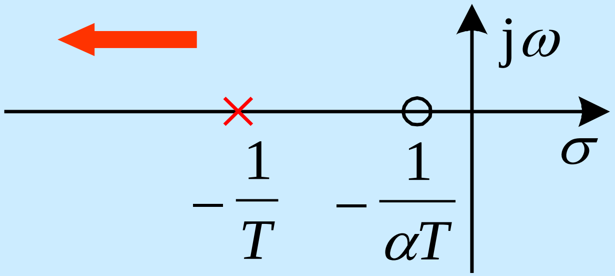
- 噪声放大，尤其高频噪声

2. 相位超前校正

$$G_c(s)=K_c\frac{s+\dfrac{1}{\alpha T}}{s+\dfrac{1}{T}}=K_c\frac{s-z_c}{s-p_c},\quad \alpha>1$$

- K_c 补偿低频增益

♦ 理论上希望 $1/T$ 较大



- 校正装置的极点对根轨迹的影响可忽略

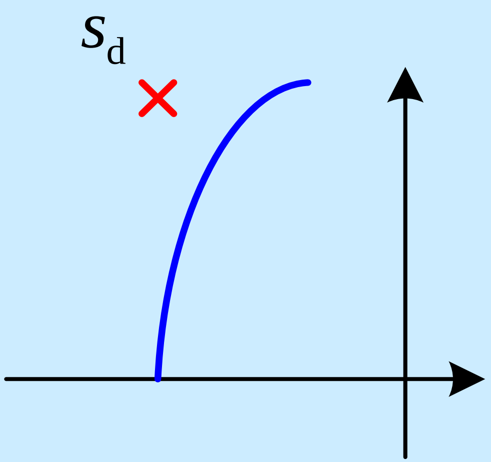
♦ 较左的极点导致较大的α，物理实现困难

3. 根据主导极点确定超前角

- 观察对象的根轨迹
- 令期望的主导极点如下

$$s_{\mathrm{d}} = -\zeta\omega_{\mathrm{n}} + \mathrm{j}\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^2}$$

(不在原先的根轨迹上)



- 校正后系统必须满足的相角条件

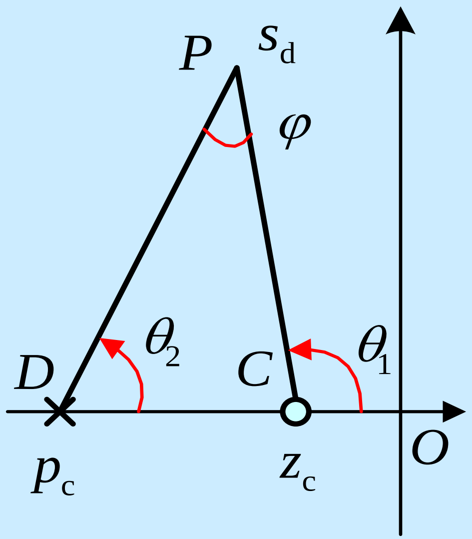
$$\arg\left[G_{\mathrm{p}}(s_{\mathrm{d}})G_{\mathrm{c}}(s_{\mathrm{d}})\right] = \arg\left[G_{\mathrm{p}}(s_{\mathrm{d}})\right] + \arg\left[G_{\mathrm{c}}(s_{\mathrm{d}})\right] = \pm(2k+1)\pi$$

- 校正装置需提供如下超前角

$$\varphi = \arg\left[G_{\mathrm{c}}(s_{\mathrm{d}})\right] = \pm(2k+1)\pi - \arg\left[G_{\mathrm{p}}(s_{\mathrm{d}})\right]$$

- **超前装置产生的超前角由其零极点决定**

$$\arg[G_c(s_d)] = \arg(s_d - z_c) - \arg(s_d - p_c) = \theta_1 - \theta_2$$

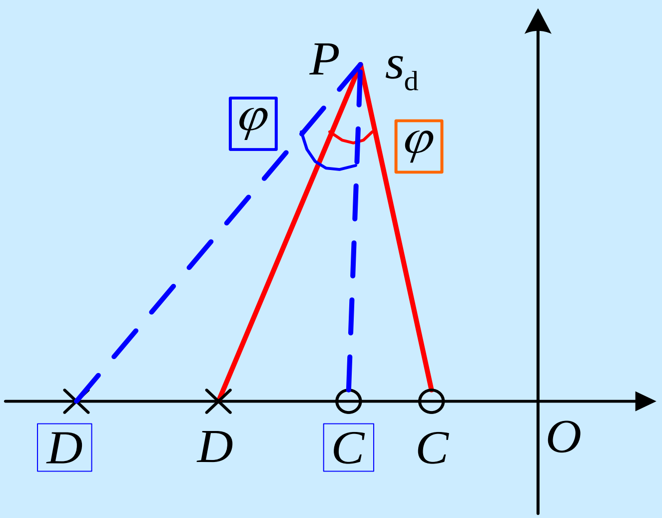


- **合适选择 p_c 和 z_c 就有可能产生所需的超前角**

$$\theta_1 - \theta_2 = \varphi = \pm(2k+1)\pi - \arg\left[G_p(s_d)\right]$$

4. 零极点的选择

(1) 满足超前角的零极点可能有无数对



- 不同的零极对 (z_c / p_c) 导致不同的 α 和不同的开环增益
- 不同的零极对 (z_c / p_c) 导致不同的物理实现和不同的稳态误差

$$G_c(s)=K_c\frac{s-z_c}{s-p_c}$$

(2) 零极点与稳态误差系数之间的关系

- **校正之前**

$$\lim_{s\to 0} s\,G_p(s)=K'_v$$

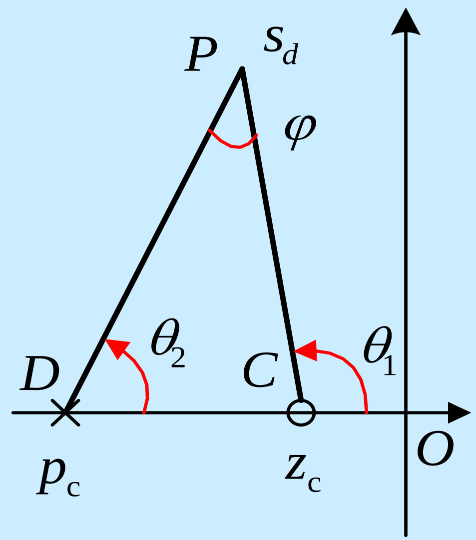
- **校正之后**

$$K_v=\lim_{s\to 0} s\,G_p(s)G_c(s)=K'_v\,K_c\frac{z_c}{p_c}=K'_v\,\frac{K_c}{\alpha}$$

- **幅值条件**

$$\left|G_p(s_d)G_c(s_d)\right|=\left|G_p(s_d)\right|K_c\left|\frac{s_d-z_c}{s_d-p_c}\right|=1$$

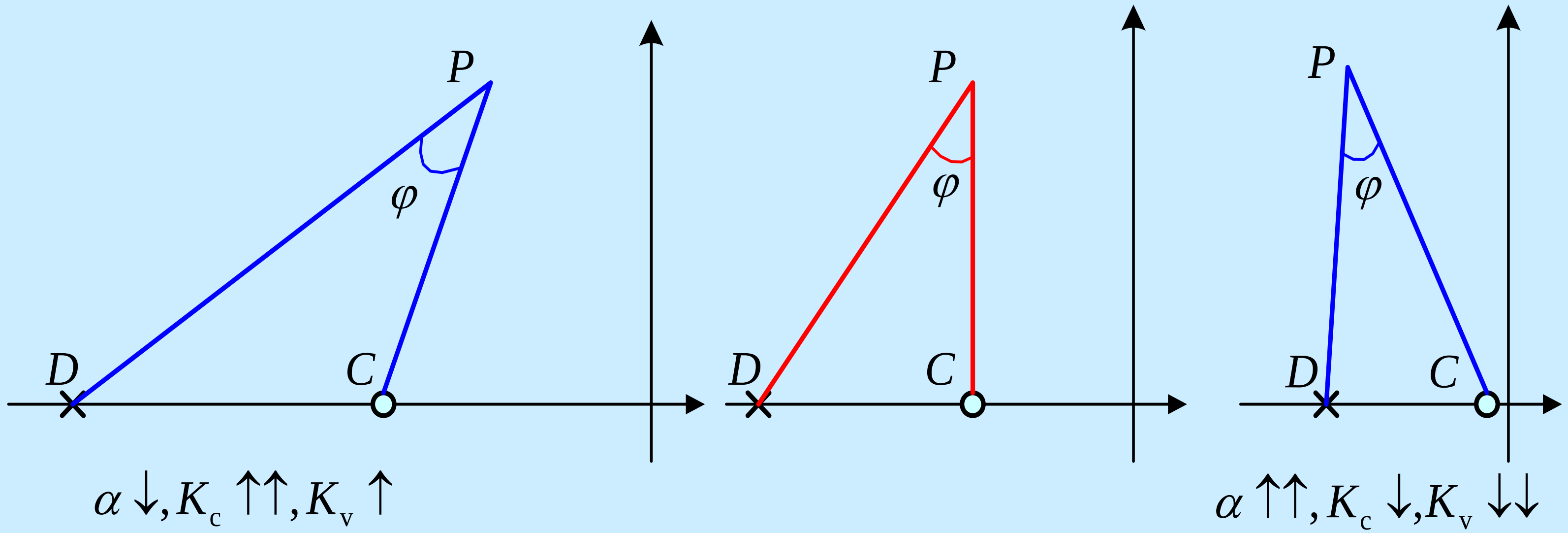
$$K_c=\left|\frac{1}{G_p(s_d)}\right|\cdot\left|\frac{s_d-p_c}{s_d-z_c}\right|=\left|\frac{1}{G_p(s_d)}\right|\cdot\left|\frac{\overline{DP}}{\overline{CP}}\right|$$



- $\alpha=\left|\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OC}}\right|$

$$K_v = K_v' \frac{K_c}{\alpha}$$ $$\alpha = \left|\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}\right|$$ $$K_c \propto \left|\frac{\overline{DP}}{\overline{CP}}\right|$$

- **不同情况:**



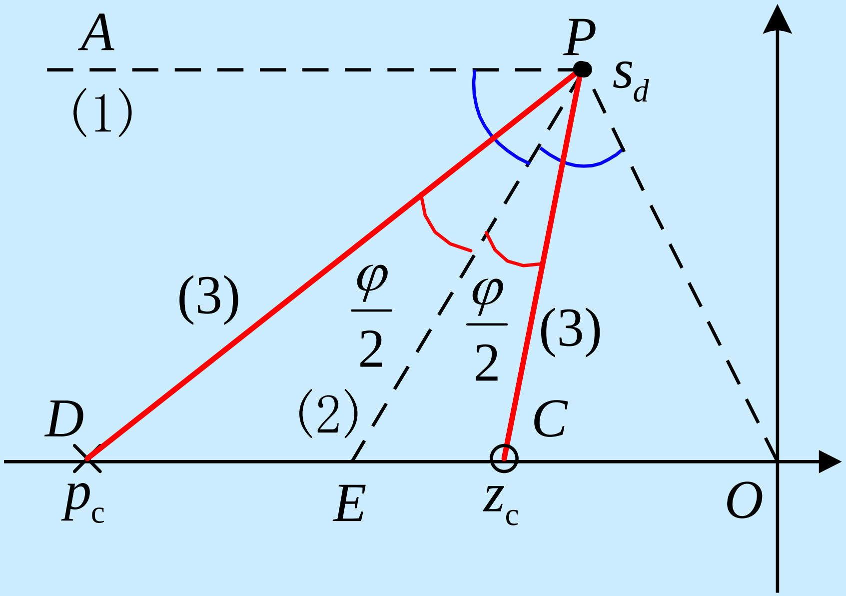
*** 偏好情况是 p_c (z_c) 一定程度上左移，从而 $K_c\uparrow$, $K_v\uparrow$**

$\alpha\downarrow$ ，物理实现相对容易

- **思考: 零点能无限制左移吗?**

(3) α 最小时的零极点

- 角平分线法



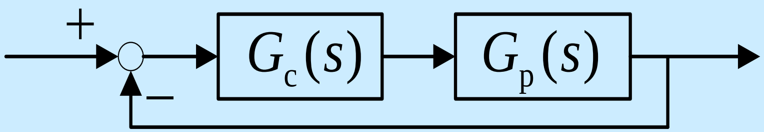
- 静态速度误差系数计算如下

$$\alpha = \frac{p_c}{z_c} \qquad K_c = \left| \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \right| \cdot \frac{1}{|G_p(s_d)|}$$

$$K_v = K_v' \frac{K_c}{\alpha}$$

5. 示例

例 6.2.1 给定如下系统

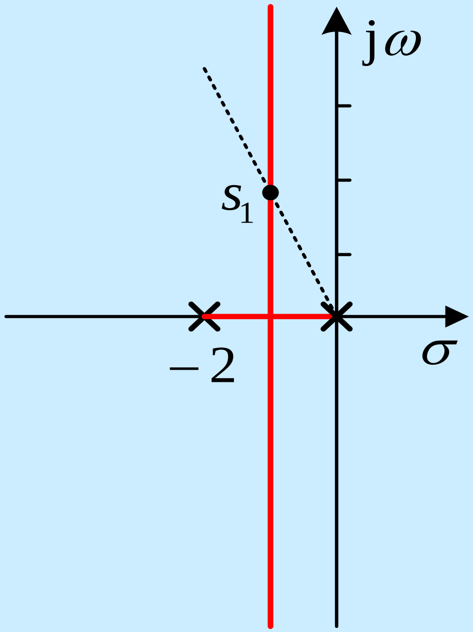


$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

试设计超前校正使得闭环极点满足 $\omega_n = 4$ rad/s, $\zeta = 0.5$

Solution:

(i) 校正前的系统分析



$$G_{CL}(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$$

$$\omega_n = 2 \ \text{rad/s} \qquad \zeta = 0.5$$

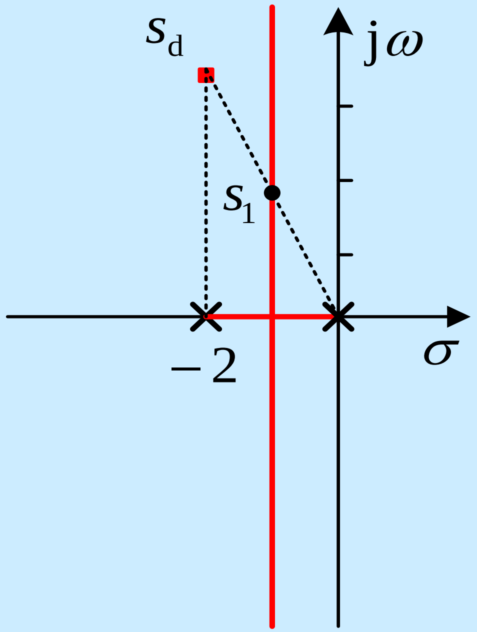
$$K'_v = 2\,\text{s}^{-1}$$

(ii) 期望的闭环极点

$$s_{\mathrm{d}} = -\zeta\omega_{\mathrm{n}} \pm \mathrm{j}\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1-\zeta^2} = -2 \pm \mathrm{j}2\sqrt{3}$$

- 不在原先的根轨迹上
- 仅仅调整 K 不能获得期望的闭环极点
- s_{d} 在原先根轨迹的左侧
- 需要超前校正
- 令超前校正的传递函数如下

$$G_{\mathrm{c}}(s) = K_{\mathrm{c}}\frac{s-z_{\mathrm{c}}}{s-p_{\mathrm{c}}}$$



$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

(iii) 所需超前角的计算

$$\arg\left[G_p(-2+\mathrm{j}\,2\sqrt{3})\right] = \arg\left[\frac{4}{(-2+\mathrm{j}\,2\sqrt{3})(\mathrm{j}\,2\sqrt{3})}\right] = -210^\circ$$

$$\varphi = -180^\circ - (-210^\circ) = 30^\circ$$

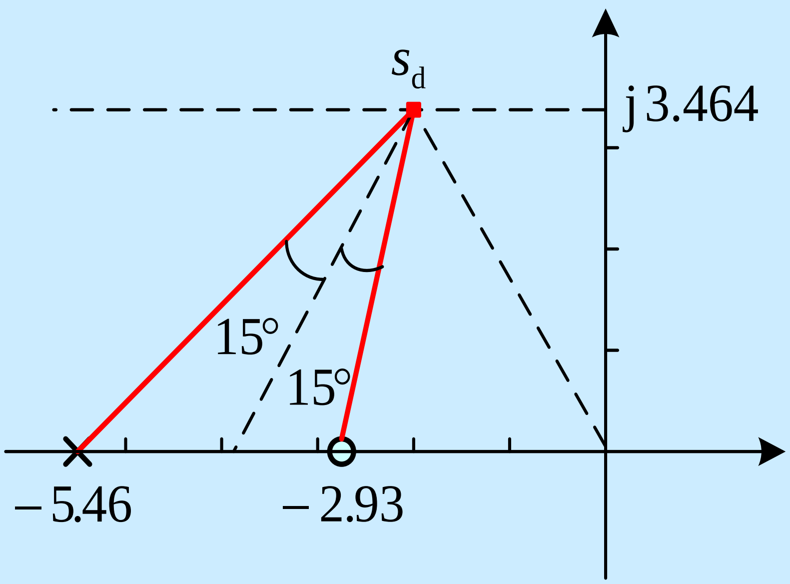
(iv) 确定零极点

- 角平分线法

$$p_c = -5.46 \qquad z_c = -2.93$$

$$\alpha = 1.863$$

$$G_c(s) = K_c \frac{s+2.93}{s+5.46}$$



(v) 确定开环增益

$$G_{\mathrm{p}}(s)G_{\mathrm{c}}(s)=\frac{4K_{\mathrm{c}}(s+2.93)}{s(s+2)(s+5.46)}$$

$$\left|G_{\mathrm{p}}(s_{\mathrm{d}})G_{\mathrm{c}}(s_{\mathrm{d}})\right|=\left|\frac{4K_{\mathrm{c}}(s+2.93)}{s(s+2)(s+5.46)}\right|_{s_{\mathrm{d}}=-2+\mathrm{j}\,2\sqrt{3}}$$

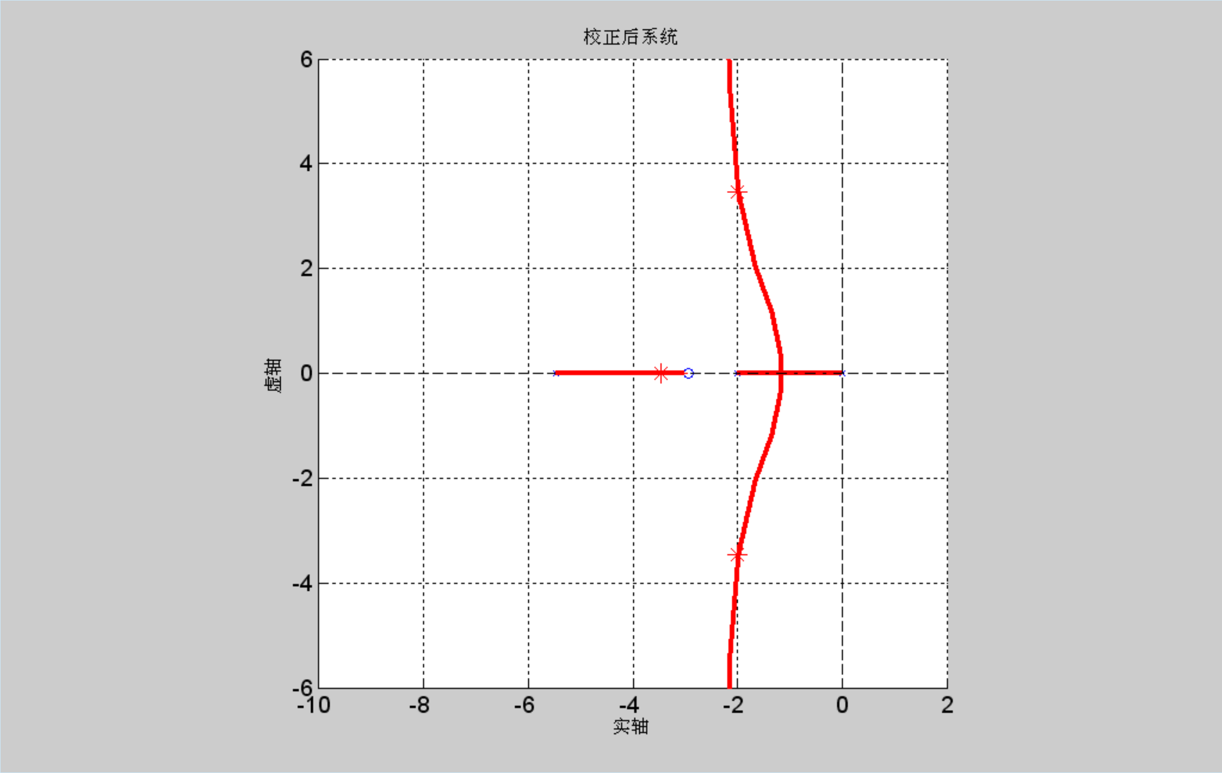
$$=\frac{4K_{\mathrm{c}}}{18.91}=1$$

$$K_{\mathrm{c}}=\frac{18.91}{4}=4.728$$

$$G_p(s)G_c(s)=\frac{4K_c(s+2.93)}{s(s+2)(s+5.46)}$$

(vi) 校正后系统的检验

- **根轨迹**



- **CL极点:**

$$s_{1,2}=-2\pm j2\sqrt{3}$$

$$s_3=-3.46$$

挨近

$$z_c=-2.93$$

$$G_{\mathrm{p}}(s)G_{\mathrm{c}}(s)=\frac{18.91(s+2.93)}{s(s+2)(s+5.46)}$$

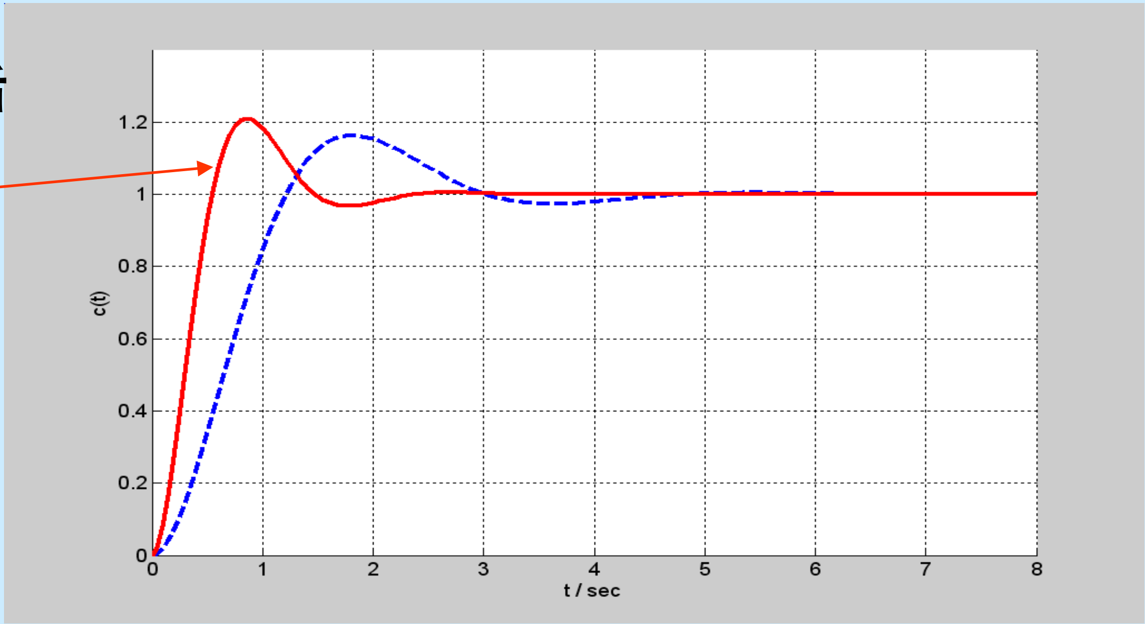
- **静态速度误差系数**

$$K_{\mathrm{v}}=\lim_{s\to 0} sG_{\mathrm{p}}(s)G_{\mathrm{c}}(s)=\frac{18.91\times 2.93}{2\times 5.46}=5.074\ \mathrm{s}^{-1}$$

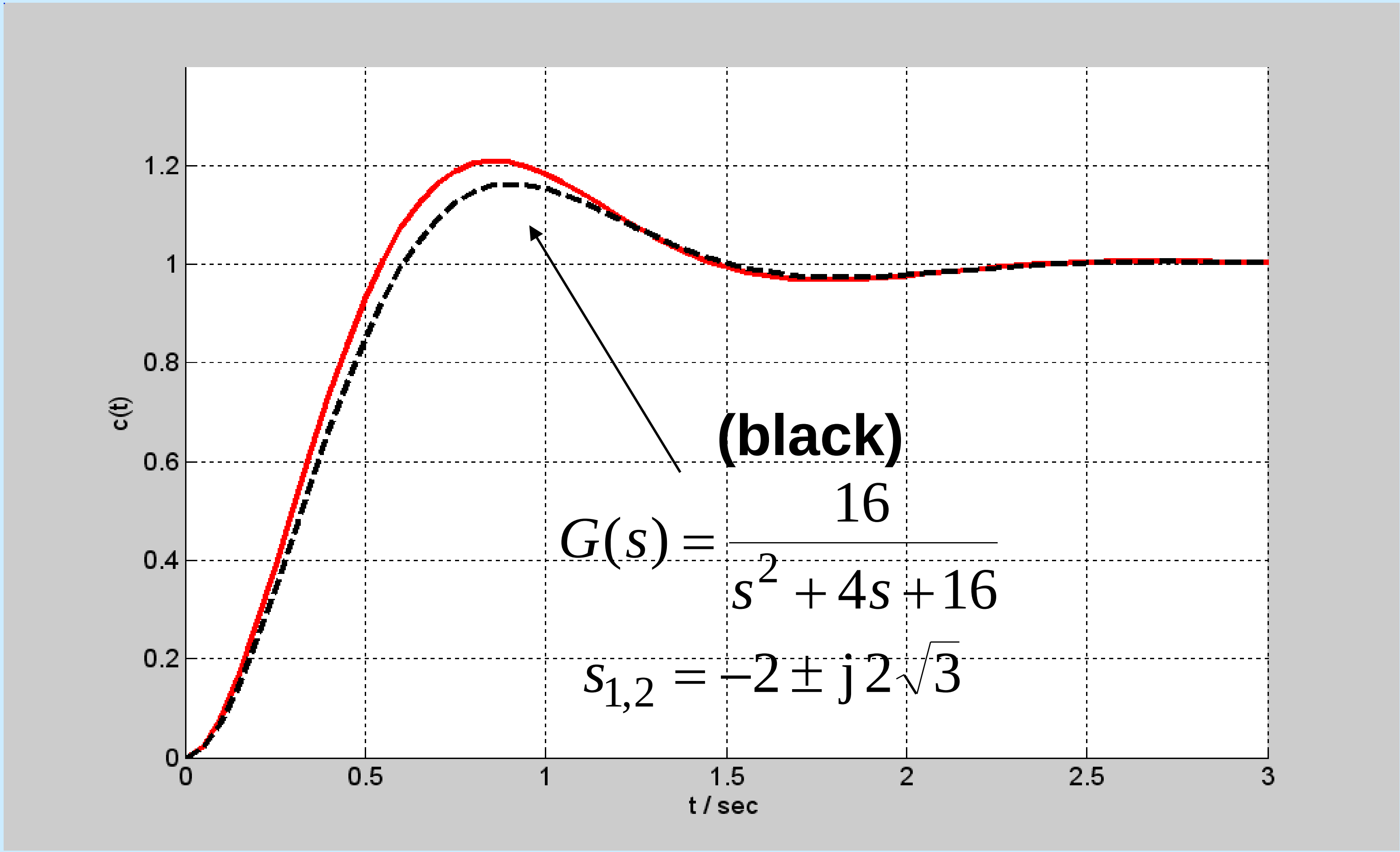
- **闭环系统满足设计要求**

(vii) 时间响应

校正后
(red)



- **校正后系统与近似的典型二阶系统的对比**



6. 设计步骤小结（仅供参考）

(i) 根据 ζ 和 ω_n 确定期望主导极点

(ii) 根据主导极点计算所需超前角 φ

(iii) 根据 φ 和要求的 K_v 计算 p_c / z_c

$s_d(\varphi)$ $\Rightarrow$ 无穷多个解

$s_d(\varphi)$ e_{ss} $\Rightarrow$ 唯一解、无解

(iv) 确定开环增益

(v) 系统性能检验与调整

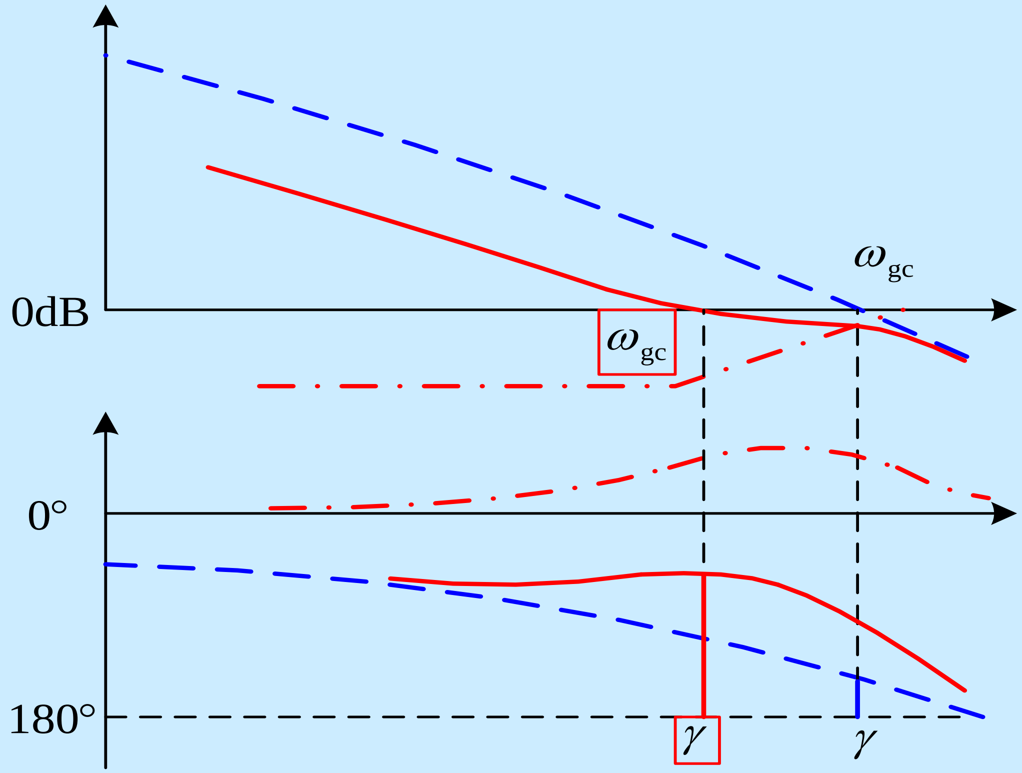
6.2.4 基于Bode图的超前校正

1. 从Bode图上观察性能的变化

$$G_c(s) = \frac{K_c}{\alpha} \cdot \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

$$\alpha > 1$$

(1) 对相对稳定性的影响



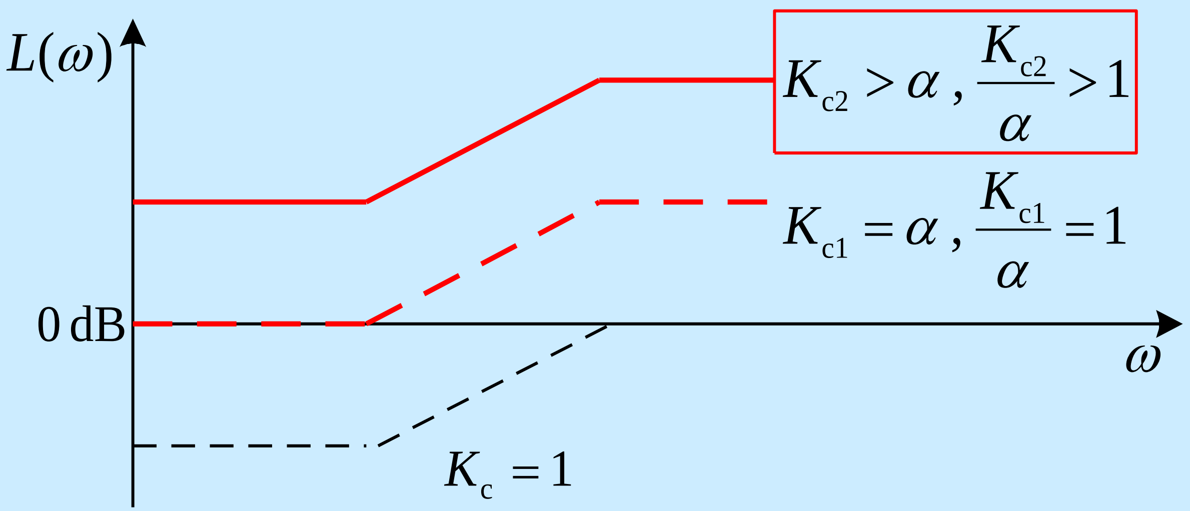
- **超前校正** $K_c = 1$

$\Rightarrow \omega_{gc}\downarrow, \gamma\uparrow$

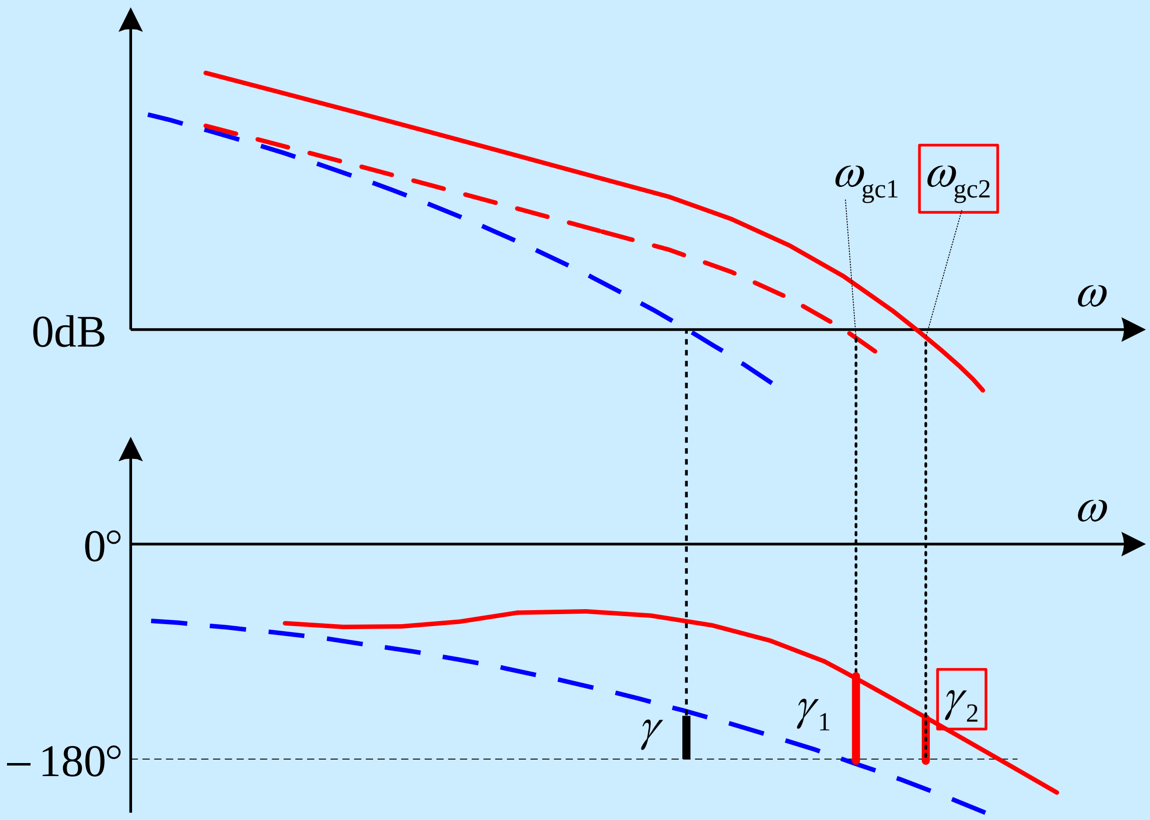
(2) 对稳态误差和响应速度的影响

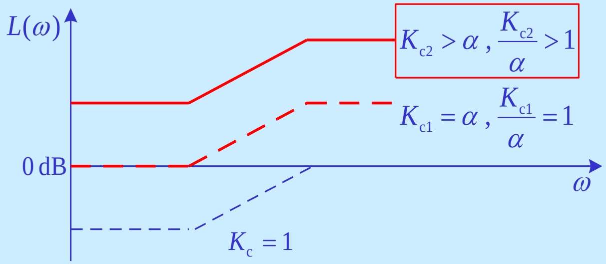
- 对具有一定 γ 的对象考虑如下两种情况

$$G_c(s)=\frac{K_c}{\alpha}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \qquad K_{c1}=\alpha \qquad K_{c2}>\alpha$$



• 校正之后



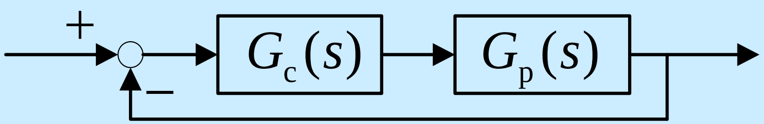


* K_{c1} : ω_{gc1} ↑,
  γ_1 ↑↑,
  K_v 不变
* K_{c2} : ω_{gc2} ↑↑,
  $\gamma_2 \approx \gamma$ or γ_2 ↑,
  K_v ↑

2. 示例

例 6.2.2 给定对象的传递函数如下

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{5}{s(1+0.5s)}$$



超前校正控制器如下

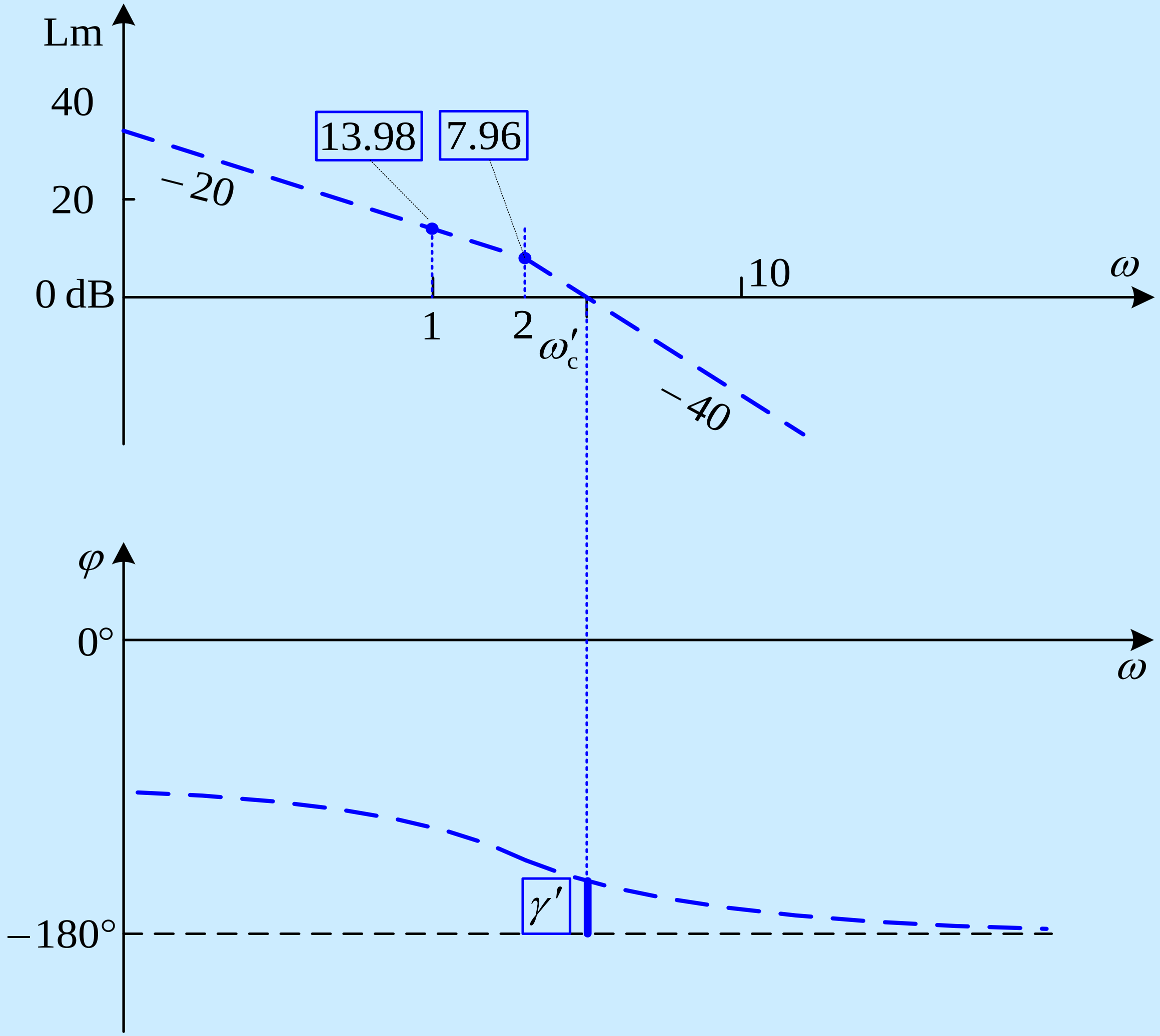
$$G_{\mathrm{c1}}(s)=\frac{(1+0.5s)}{(1+0.05s)} \qquad G_{\mathrm{c2}}(s)=\frac{2(1+0.5s)}{(1+0.05s)}$$

请验证对相对稳定性和稳态误差的改善。

Solution:

$$G_p(s) = \frac{5}{s(1+0.5s)}$$

(i) 校正前系统的分析



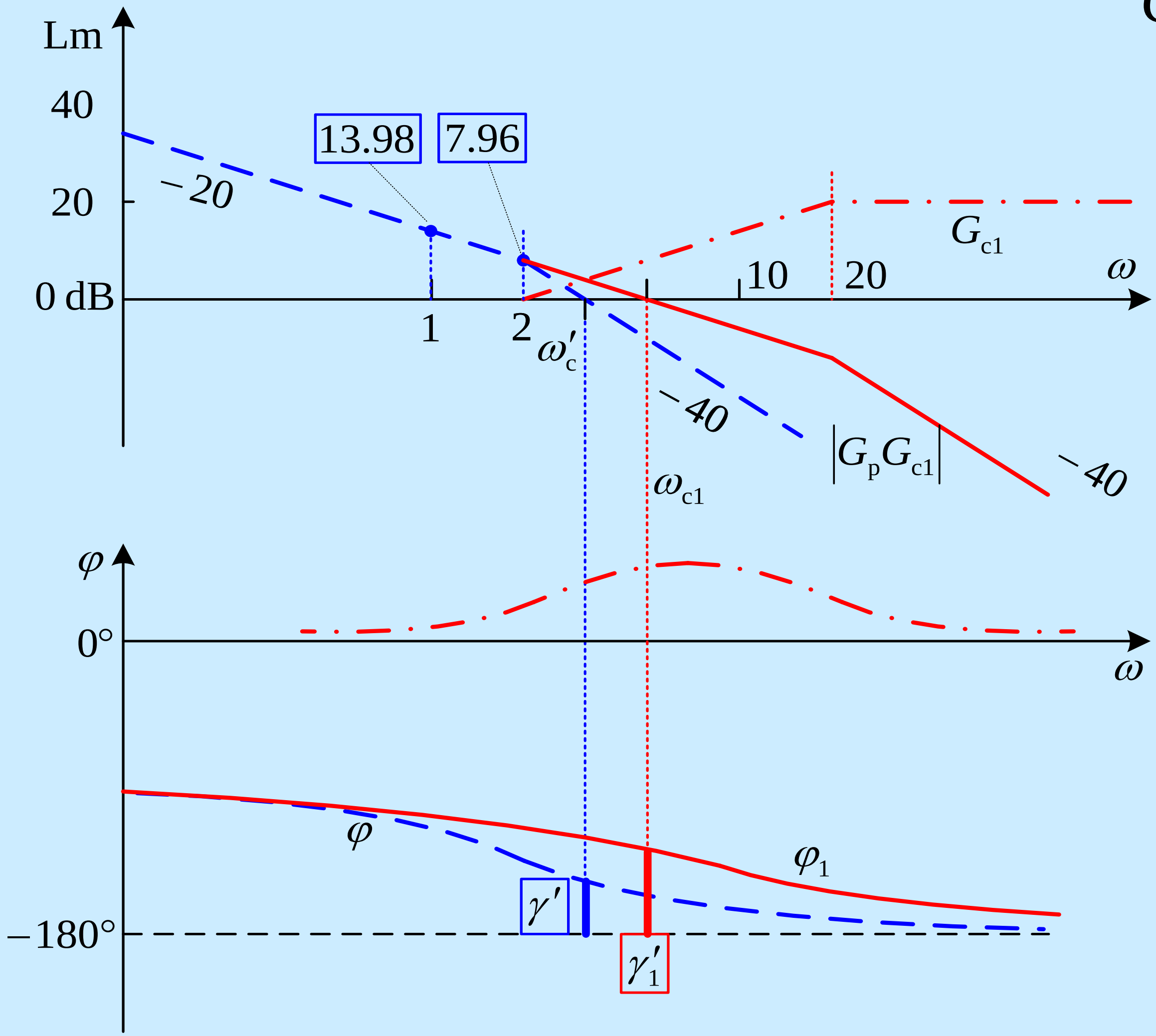
$$\omega_c' = 3.16\,\text{rad/s}$$

$$\arg G_p(\omega_c') = -90^\circ - \arctan(0.5\times 3.16) = -147.7^\circ$$

$$\gamma' = 32.3^\circ$$

$$K_v' = 5\,\text{s}^{-1}$$

(ii) 采用第一个超前校正控制器



$$G_p(s)G_{c1}(s) = \frac{5}{s(1+0.5s)} \times \frac{1+0.5s}{1+0.05s} = \frac{5}{s(1+0.05s)}$$

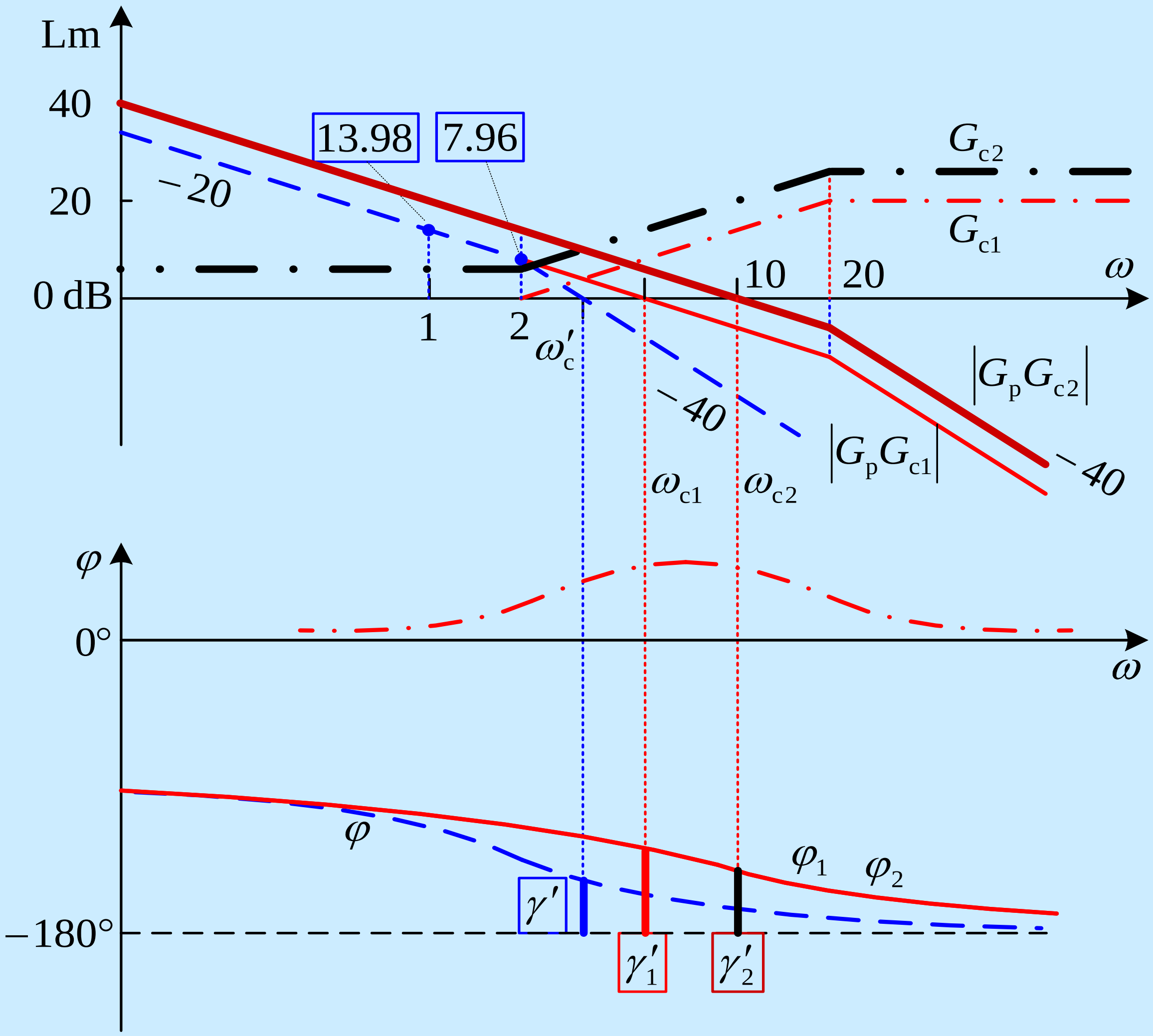
$$\omega_{c1} = 5\,\mathrm{rad/s}$$

$$\arg G_p(\omega_{c1}) = -90^\circ - \arctan(0.05\times 5) = -104.0^\circ$$

$$\gamma_1 = 76.0^\circ$$

$$K_{v1} = 5\,\mathrm{s}^{-1}$$

(iii) 采用第二个超前校正控制器



$$G_p(s)G_{c1}(s)=$$

$$\frac{5}{s(1+0.5s)}\times\frac{2(1+0.5s)}{1+0.05s}$$

$$=\frac{10}{s(1+0.05s)}$$

$$\omega_{c2}=10\ \text{rad/s}$$

$$\arg G_p(\omega_{c2})=-90^\circ$$

$$-\arctan(0.05\times10)$$

$$=-116.6^\circ$$

$$\gamma_2=63.43^\circ$$

$$K_{v2}=10\ \text{s}^{-1}$$

(iv) 结论

- 将超前校正的零点对消控制对象最靠近原点的极点，可改善系统的相角裕度

- 设置合适的超前校正增益，可改善稳态误差

- 固定超前零点，选择极点可改善相角裕量，但程度有限

- 如果超前校正的零点、极点、开环增益合理选择，则系统的相角裕度、稳态误差等指标有可能同时得到改善

例 6.2.3 给定如下对象(包含了控制器增益)

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

试设计串联校正，使得校正后系统满足如下指标

$$\gamma \geq 30^\circ \qquad \omega_{\mathrm{c}} \geq 45 \ \mathrm{rad/s} \qquad K_{\mathrm{v}} \geq 100 \ \mathrm{s}^{-1}$$

Solution:

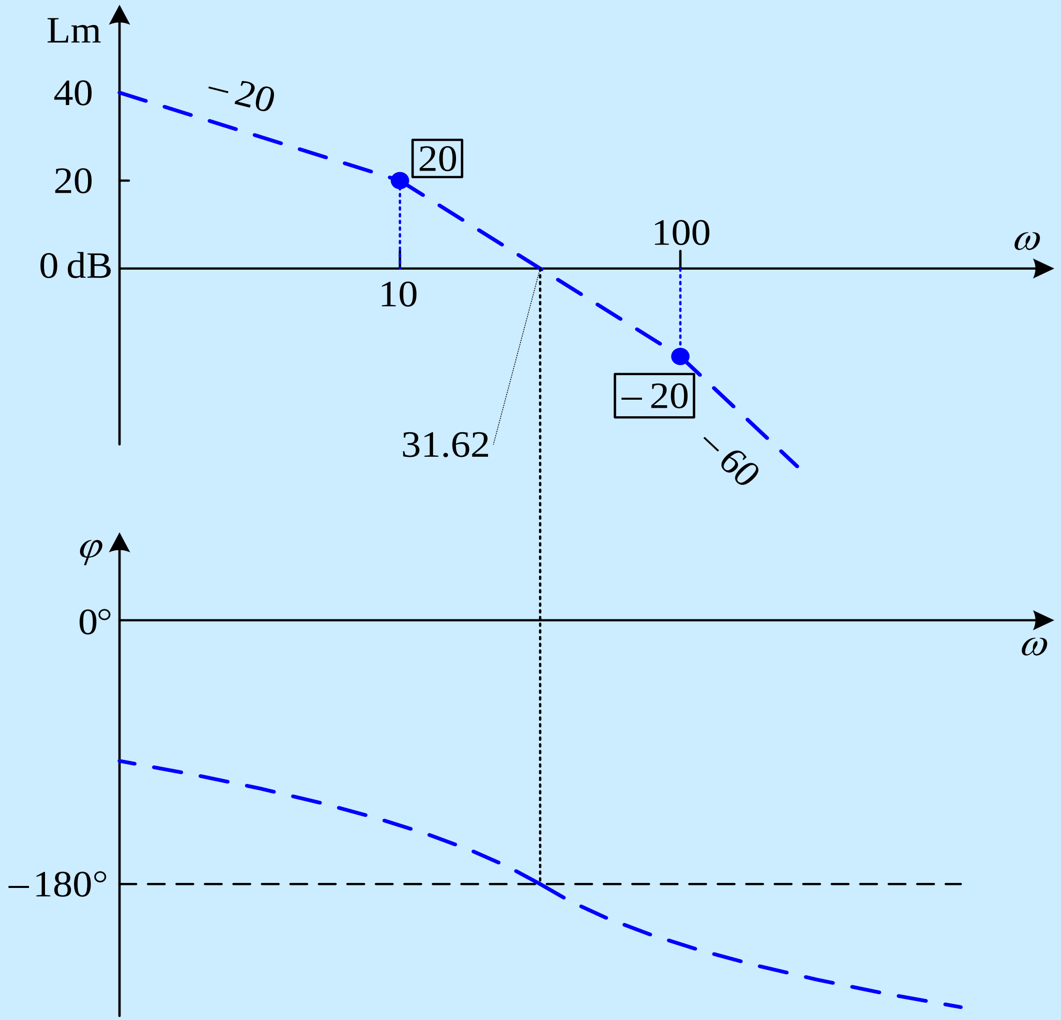
(i) 确定期望的开环增益

$$K_{\mathrm{v}} = \lim_{s\to 0} sG_{\mathrm{p}}(s) = K \qquad K = 100$$

注：$K = 100$ 包括了对象和控制器的增益

(ii) 增益校正后的系统分析

$$K_c G_p(s) = \frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$



$$\omega_{gc} = \sqrt{10 \times 100}$$

$$= 31.62 \text{ rad/s}$$

$$\gamma = 0°$$

- **精确计算**

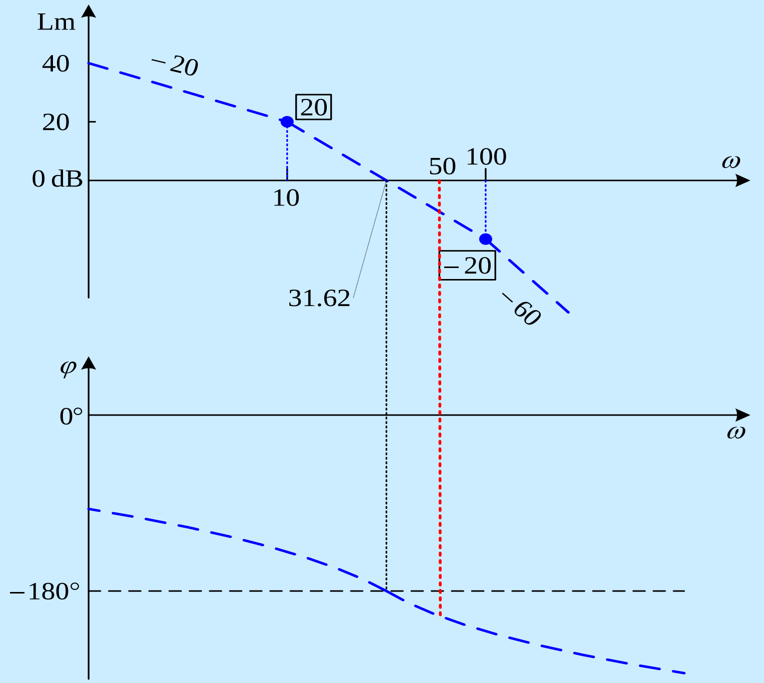
$$\omega_{pc} = 31.62 \text{ rad/s}$$

$$K_g = 0.8277 \text{ dB}$$

$$K_c G_p(s) = \frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

(iii) 所需超前角

- 令增益校正后的超前控制器如下



$$\frac{G_c(s)}{K_c} = \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

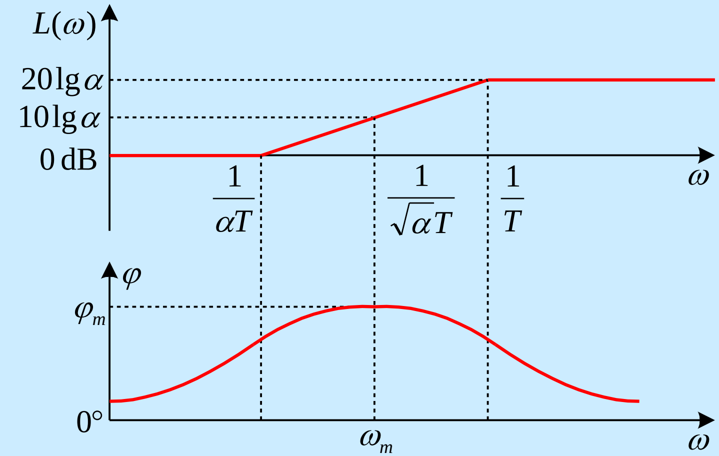
- 取 $\omega_c = 50 > 45$ rad/s,

  则

$$\arg G_p(j50) = -90° - \arctan 5 - \arctan 0.5$$
$$= -90° - 78.69° - 26.57° = -195.26°$$

- 由于要求相角裕量 $\gamma = 30°$, 因此超前控制器需提供 $\varphi = 45°$
- 选择 $\varphi_m = \varphi + (5 \text{ to } 10)° = 55°$

$$\frac{G_c(s)}{K_c}=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

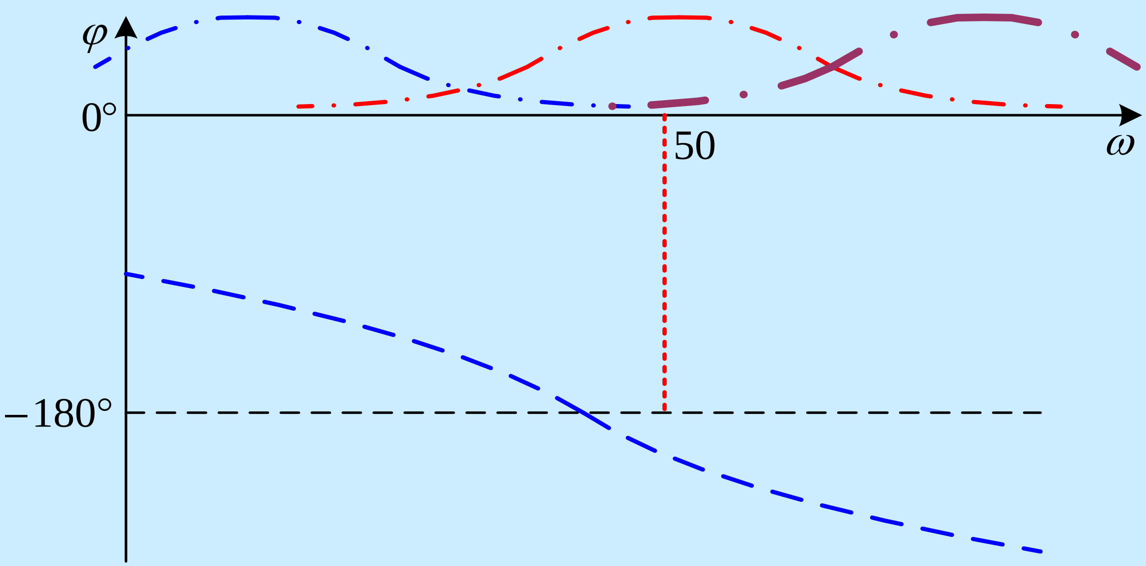


(iv) 计算 α

$$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=10$$

(v) 计算 T

- 合适选择 T 保证相角裕量



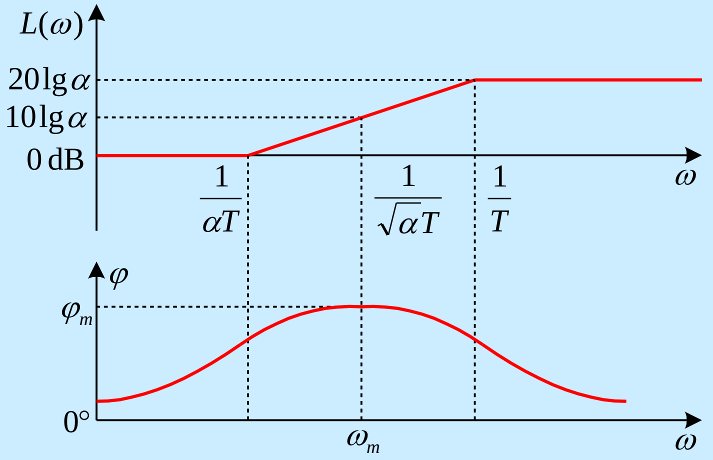
$$\frac{G_c(s)}{K_c} = \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

- 令 $\omega_m = 50$ rad/s, 则

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\omega_m} = 0.006325$$

$$\frac{1}{T} = 158.11$$

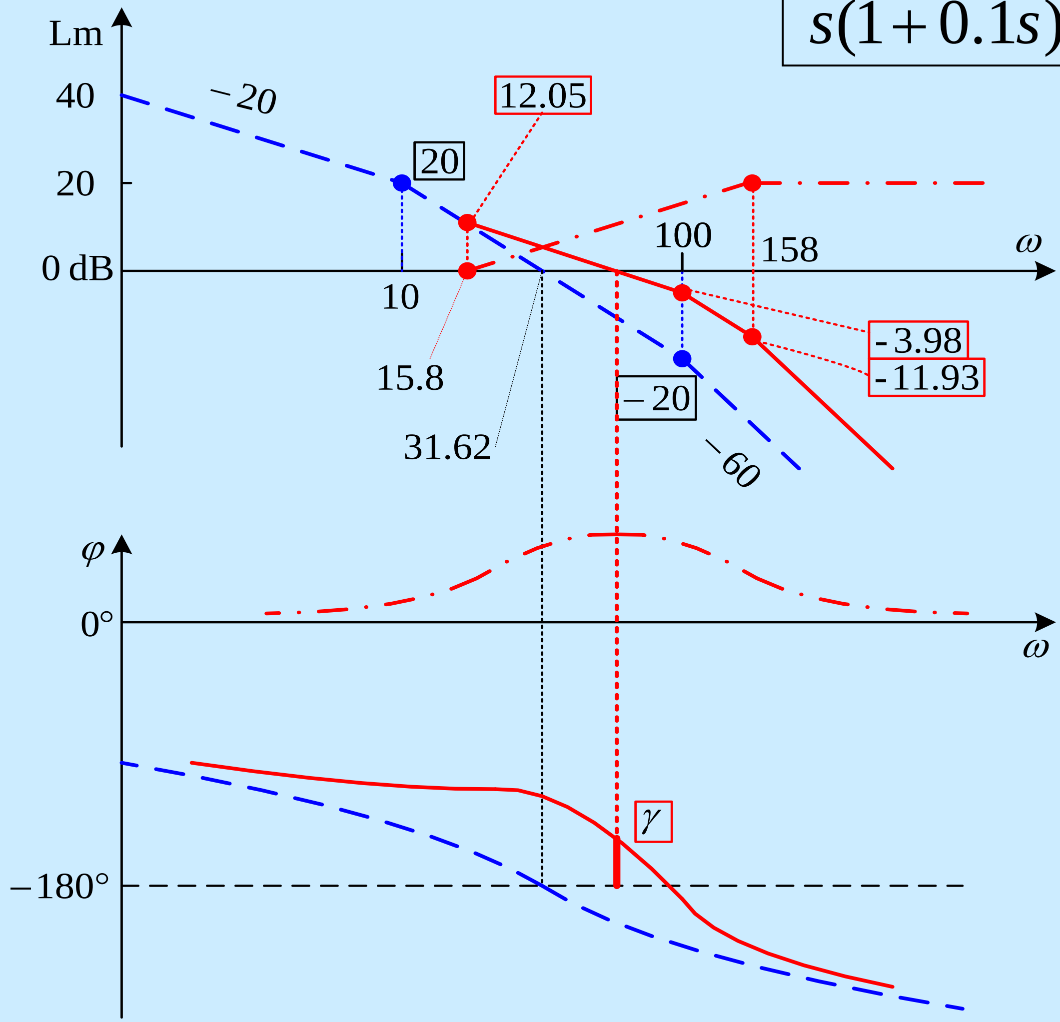
$$\alpha T = 0.06325 \qquad \frac{1}{\alpha T} = 15.81$$



(vi) 超前校正的传递函数 $\quad \dfrac{G_c(s)}{K_c} = \dfrac{1+0.06325s}{1+0.006325s}$

- **低频段频率响应幅频没有变化，从而保持** $K_v = 100\ \text{s}^{-1}$
- **注：设置的增益截止频率在此步未必能保证**
  - **思考: 如何使所选频率成为截止频率？**

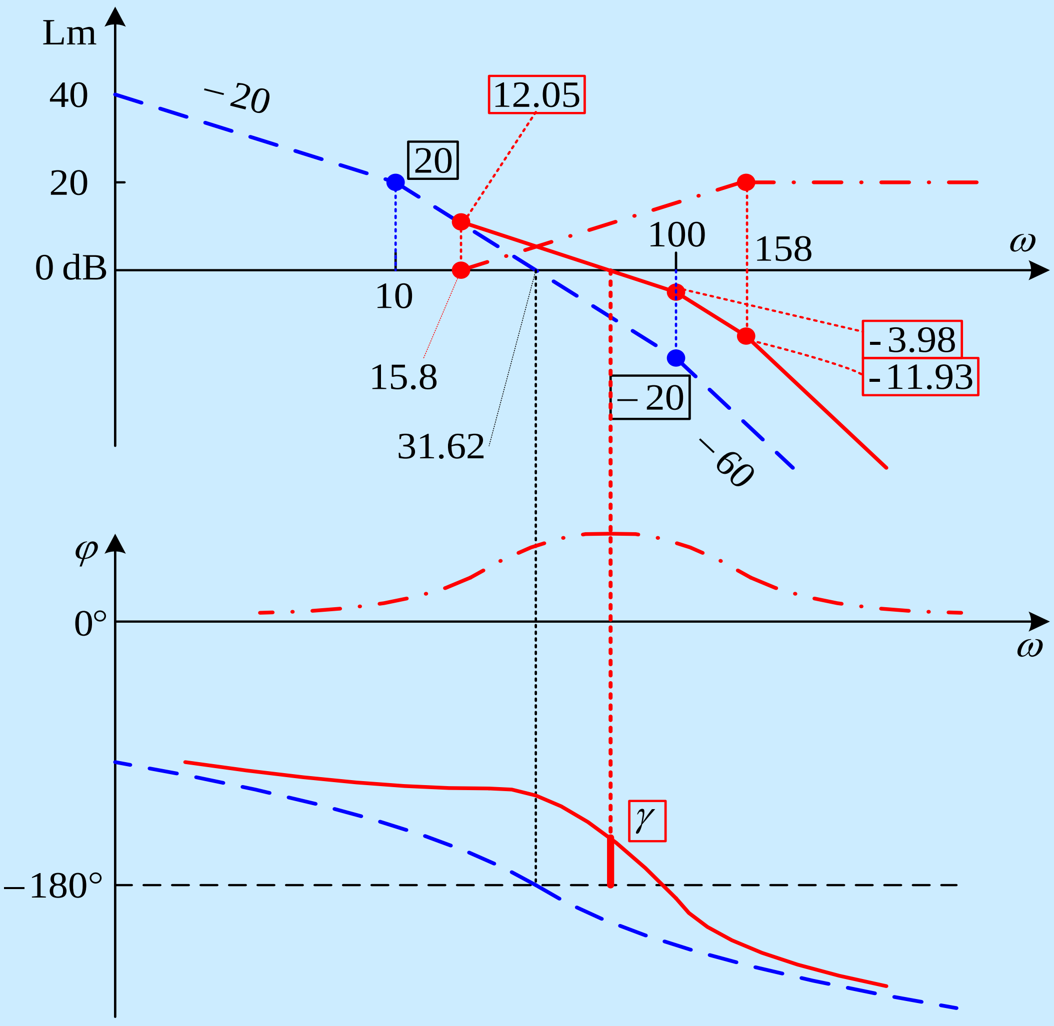
(vii) 性能检验



$$G_p(s)G_c(s) = \frac{100(1+0.06325s)}{s(1+0.1s)(1+0.01s)(1+0.006325s)}$$

$$\frac{G_c(s)}{K_c} = \frac{1+0.06325s}{1+0.006325s} = 10\frac{s+15.8}{s+158}$$

$$K_cG_p(s) = \frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$



- **渐近线法:**

$$\omega_{gc} = 63.3$$

$$\gamma = 30.8°$$

$$K_v = 100s^{-1}$$

- **精确计算:**

$$\omega_{gc} = 54$$

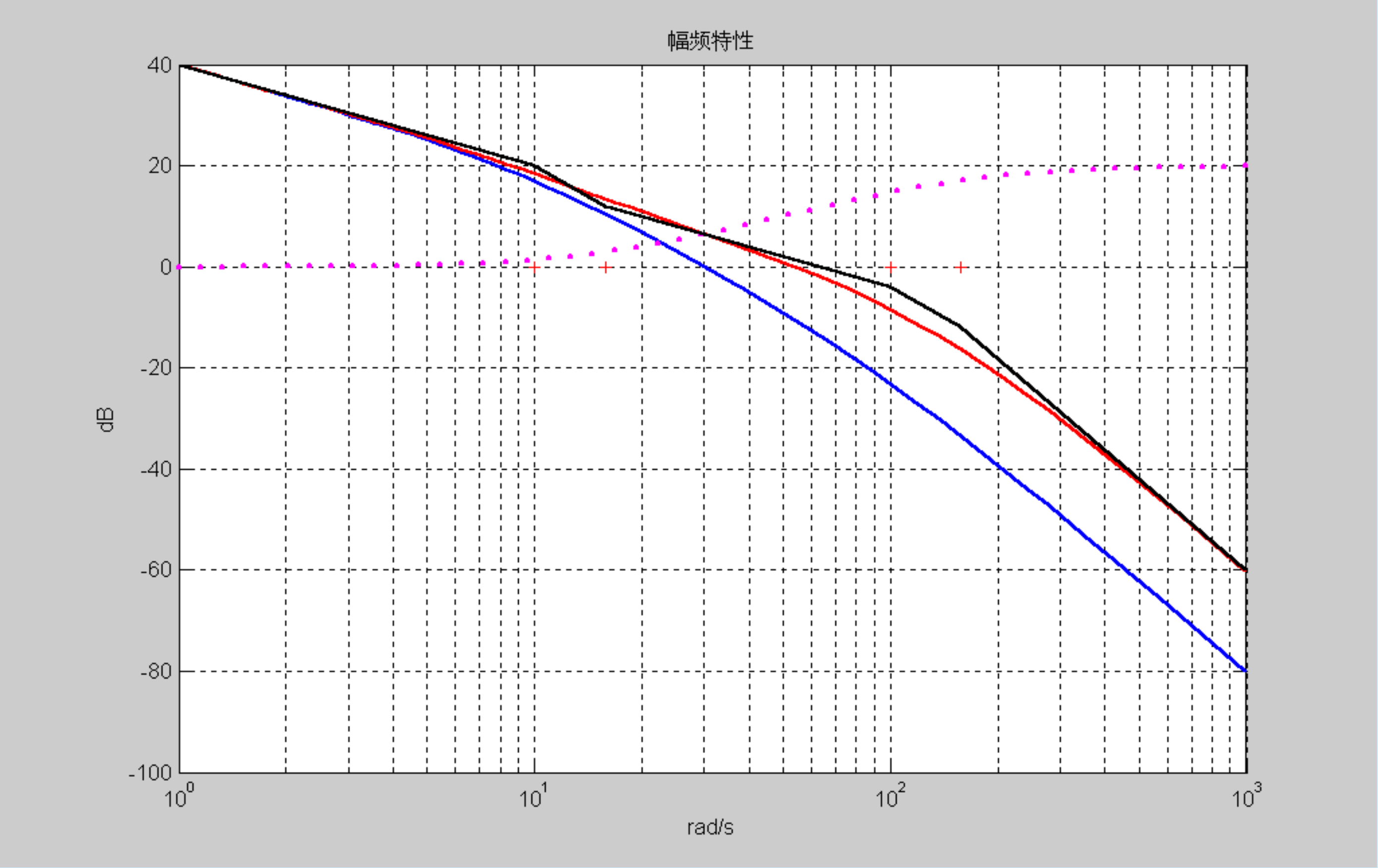
$$\gamma = 37°$$

$$\omega_{pc} = 119.7$$

$$K_g = 11.31$$

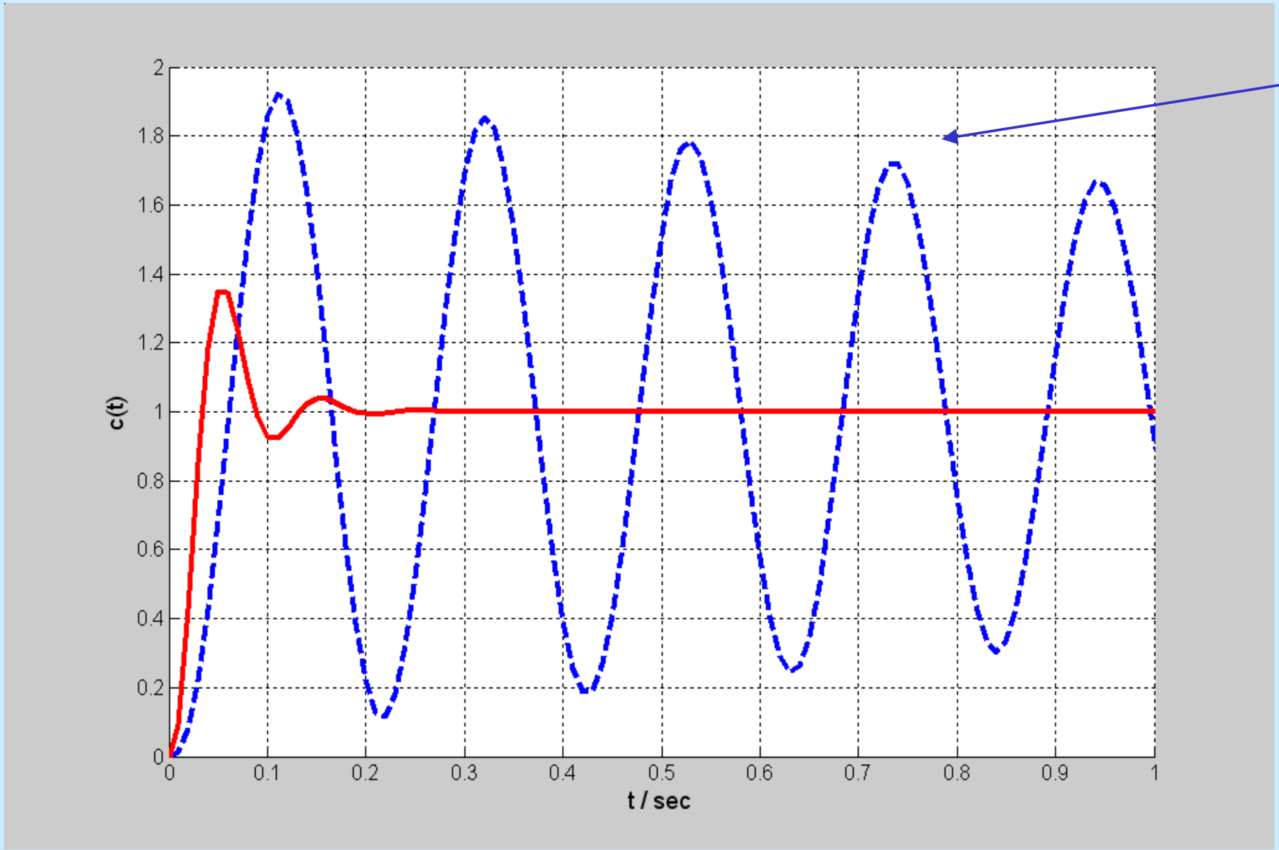
(viii) 进一步检验

- **对数幅频特性**



- **bode(numq, denq); grid on; margin(numq, denq)**

- **校正前后的时间响应**



- **校正前**

$p_1 = -109.23$

$p_{2,3} = -0.39 \pm j\,30.26$

- **校正后**

$p_1 = -203.89$

$p_{2,3} = -23.47 \pm j\,62.75$

$p_4 = -17.27$

$z_1 = -15.81$

3. 设计步骤小结（仅供参考）

(1) 根据稳态误差系数确定期望的开环增益

(2) 计算增益校正后系统的相角裕量

(3) 确定所需超前角 φ，并取 $\varphi_{\mathrm{m}} = \varphi + (5 \text{ to } 10)°$

(4) 计算

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_{\mathrm{m}}}{1-\sin\varphi_{\mathrm{m}}}$$

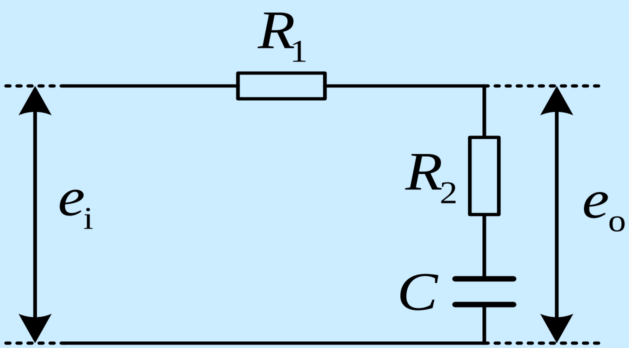
(5) 计算

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\omega_{\mathrm{m}}} \qquad \alpha T = \frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_{\mathrm{m}}}$$

(6) 校正后系统的检验与分析

6.3 滞后校正

6.3.1 相位滞后网络



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{R_2Cs+1}{(R_1+R_2)Cs+1}$$

- 令 $R_2C=T$, $\dfrac{R_1+R_2}{R_2}=\beta>1$

则

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\beta T}}$$

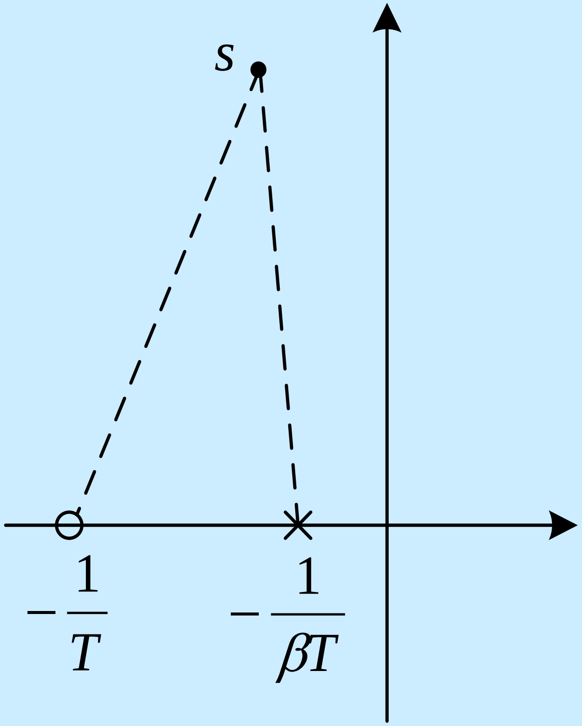
- 说明:存在其他实现方式,有源电路,见实验指示书比例积分

$$G_c(s)=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$$

$$\beta>1$$

6.3.2 特性

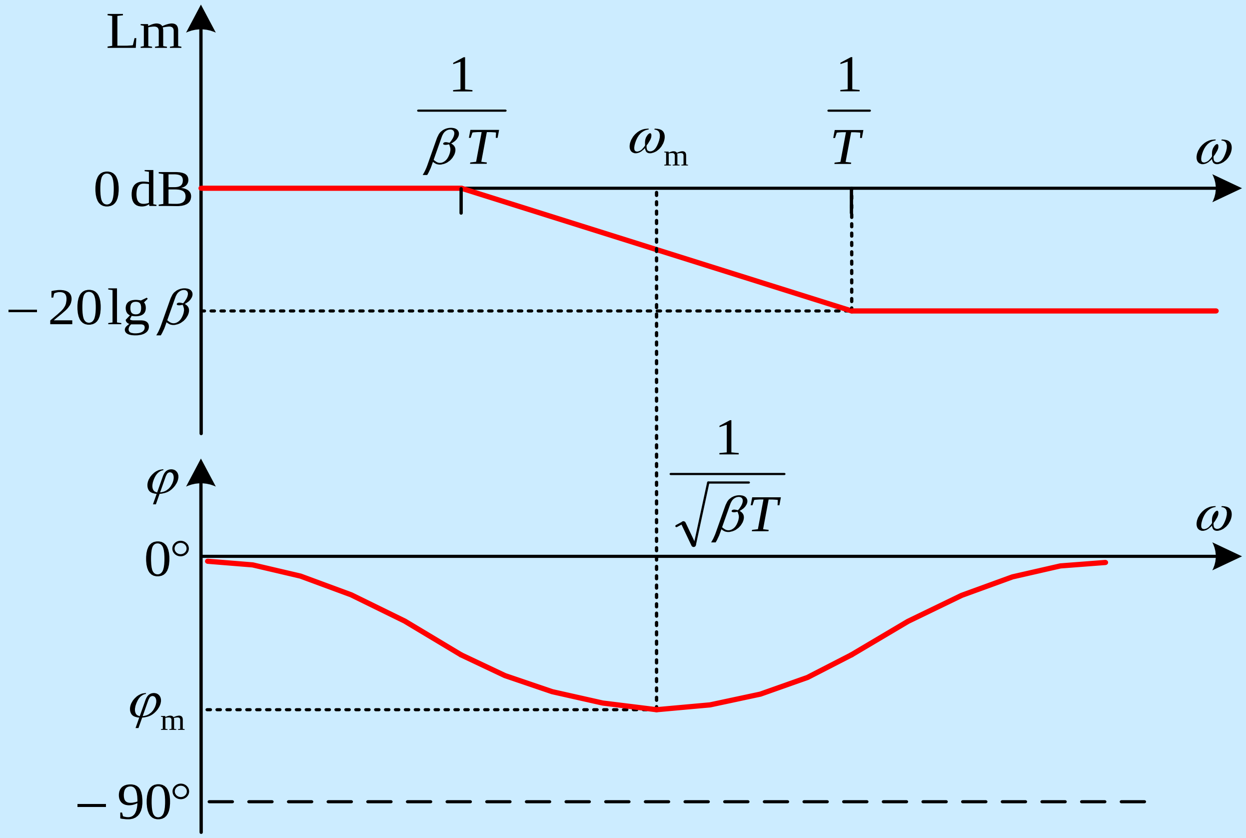
1.零−极点分布



- 产生滞后角

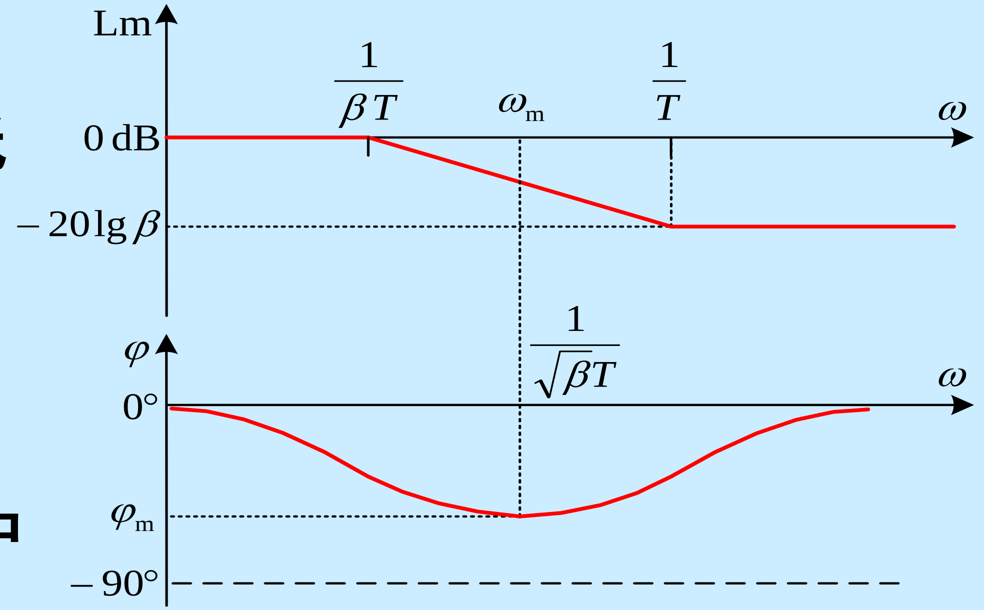
2. Bode图

$$G_c(s)=\frac{1+Ts}{1+\beta Ts}\qquad \beta>1$$



- 低通滤波特性
- 通常劣化暂态响应

- 通常作用在低频段，降低对中频段相角裕量的影响

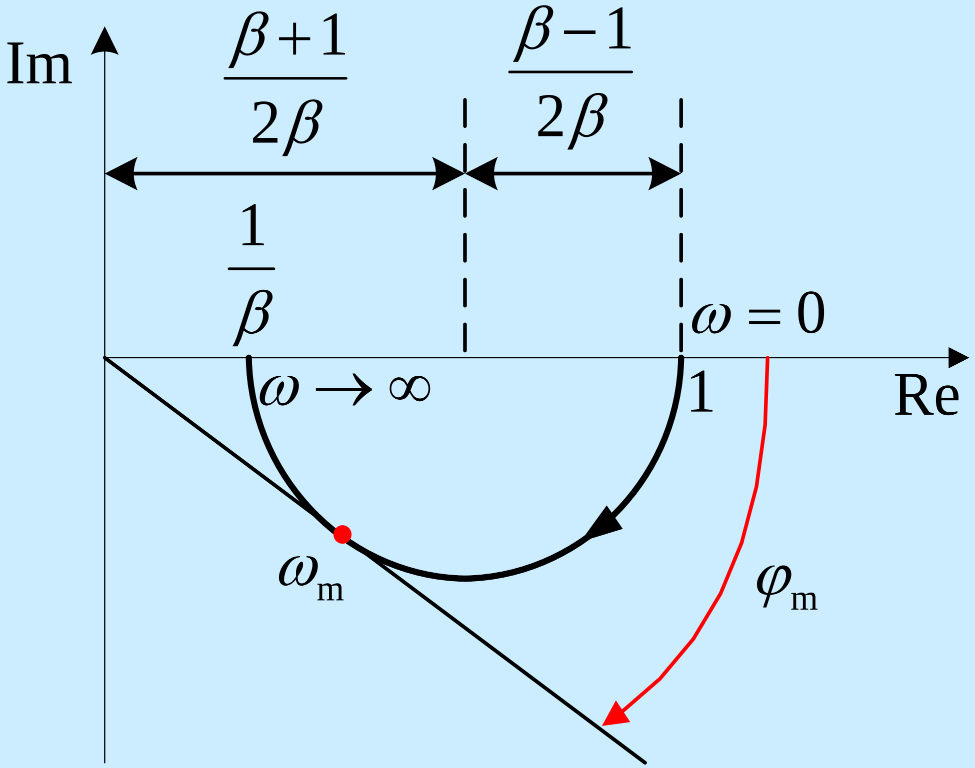


- 额外加大增益，避免对中频段幅值的影响

- 提高低频段的幅值，从而改善稳态误差

$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} \qquad \beta > 1$$

3. Nyquist 图



$$\sin\varphi_m = \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$\varphi_m = \arcsin\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

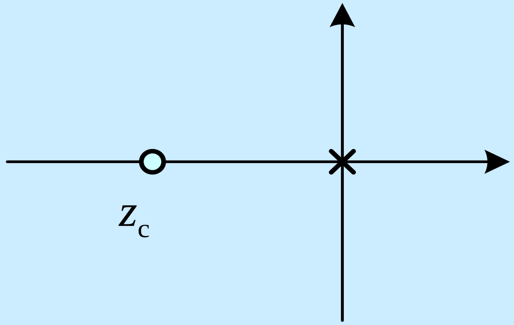
$$= \arctan\frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}}$$

$\varphi_m < 0$

6.3.3 基于根轨迹的滞后校正

1. 积分校正

♦ PI 控制器



$$G_c(s) = 1 + K_I \frac{1}{s} = \frac{s + z_c}{s}$$

• 如果原先的对象具有快速的暂态响应, 则 PI 控制器通过提高系统型次改善稳态误差 e_{ss}

♦ PI控制器的优点

• 降低稳态误差

♦ PI控制器的缺点

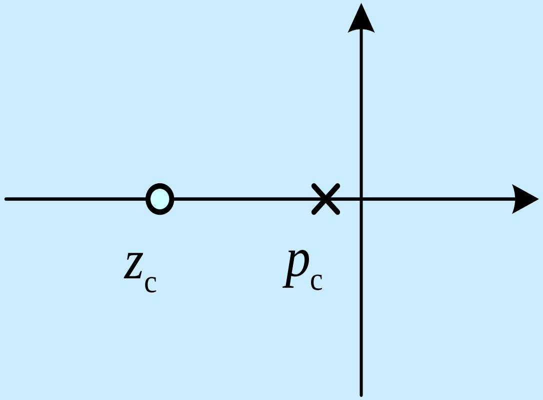
• 响应速度变慢

• 难以物理实现纯积分

♦ **PI 控制器的变型**

- **将极点从原点稍许左移**
- **滞后校正** $p_c << 1$

$$G_c(s) = \frac{s - z_c}{s - p_c}$$



2. 改善稳态误差

- **以 I 型系统为例**

$$G_p(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{s\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)} \qquad K'_v = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(-p_j)}$$

$$K_v' = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(-p_j)}$$

- 令 $G_c(s) = \dfrac{K_c}{\beta}\cdot\dfrac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$

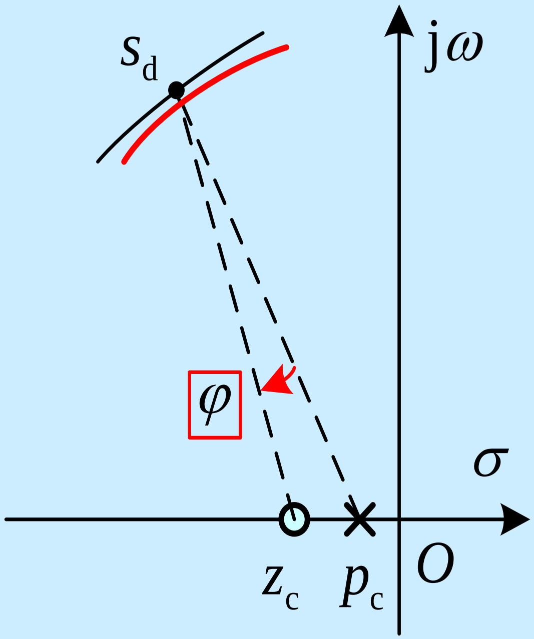
- 则 $G_p(s)G_c(s) = \dfrac{K\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{s\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}\cdot\dfrac{K_c}{\beta}\cdot\dfrac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$

- $K_v = \dfrac{K\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(-p_j)}\cdot\dfrac{K_c}{\beta}\cdot\dfrac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{\beta T}} = K_v' K_c$

- **静态误差系数将增加K_c倍**

3. 零极点的选择

(1) p_c和z_c必须紧挨，保证根轨迹较小的变化



- $p_c = z_c \Rightarrow$ **根轨迹不变**
- $p_c \approx z_c \Rightarrow$ **根轨迹变化较小**
- **结论:**
  $p_c \approx z_c$ **能够保证根轨迹在主导极点附近几乎不变**

(2) $K_c=\beta$ 使得主导极点几乎不变

- $p_c \approx z_c \Rightarrow \left|\dfrac{s_d - z_c}{s_d - p_c}\right| \approx 1$
- **根据幅值条件** $\left|G_p(s)G_c(s)\right| = 1$

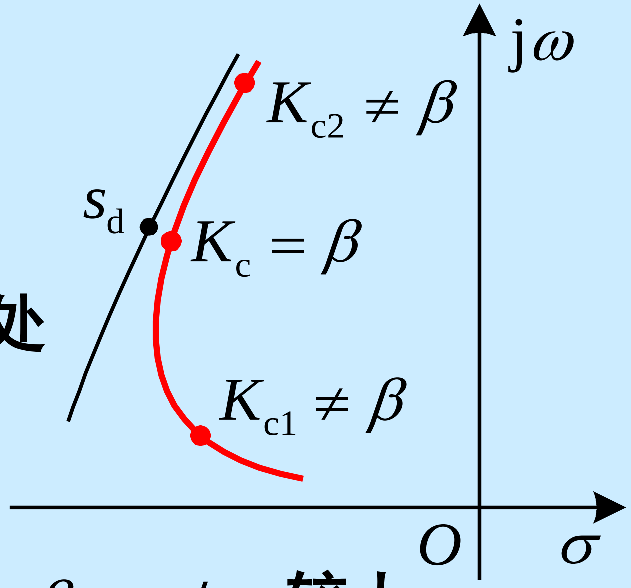
$$\left|G_p(s)G_c(s)\right| = \left|\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s_d - z_i)}{s_d\prod_{j=1}^{n}(s_d - p_j)} \cdot \frac{K_c}{\beta} \cdot \frac{s_d - z_c}{s_d - p_c}\right|$$

$$= \left|\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s_d - z_i)}{s_d\prod_{j=1}^{n}(s_d - p_j)}\right| \cdot \frac{K_c}{\beta} \cdot \left|\frac{s_d - z_c}{s_d - p_c}\right| \approx 1 \cdot \frac{K_c}{\beta} \cdot 1 = 1$$

- **结论:**

* $K_c = \beta$, s_d **几乎维持在原处**

* $K_c \neq \beta$, s_d **将沿新的根轨迹移动到别处**



(3) 高精度要求控制器的增益较大，即 $\beta = z_c / p_c$ **较大**

(4) p_c **和** z_c **必须紧邻远点**

- $p_c \approx z_c$ **减小对根轨迹的影响**
- $z_c / p_c = \beta >> 1$ **实现较高的增益**
- $z_c << 1$ **且** $p_c << 1$ **几乎不影响主导极点，并改善稳态误差**

4. 示例

例 6.3.1 给定如下对象

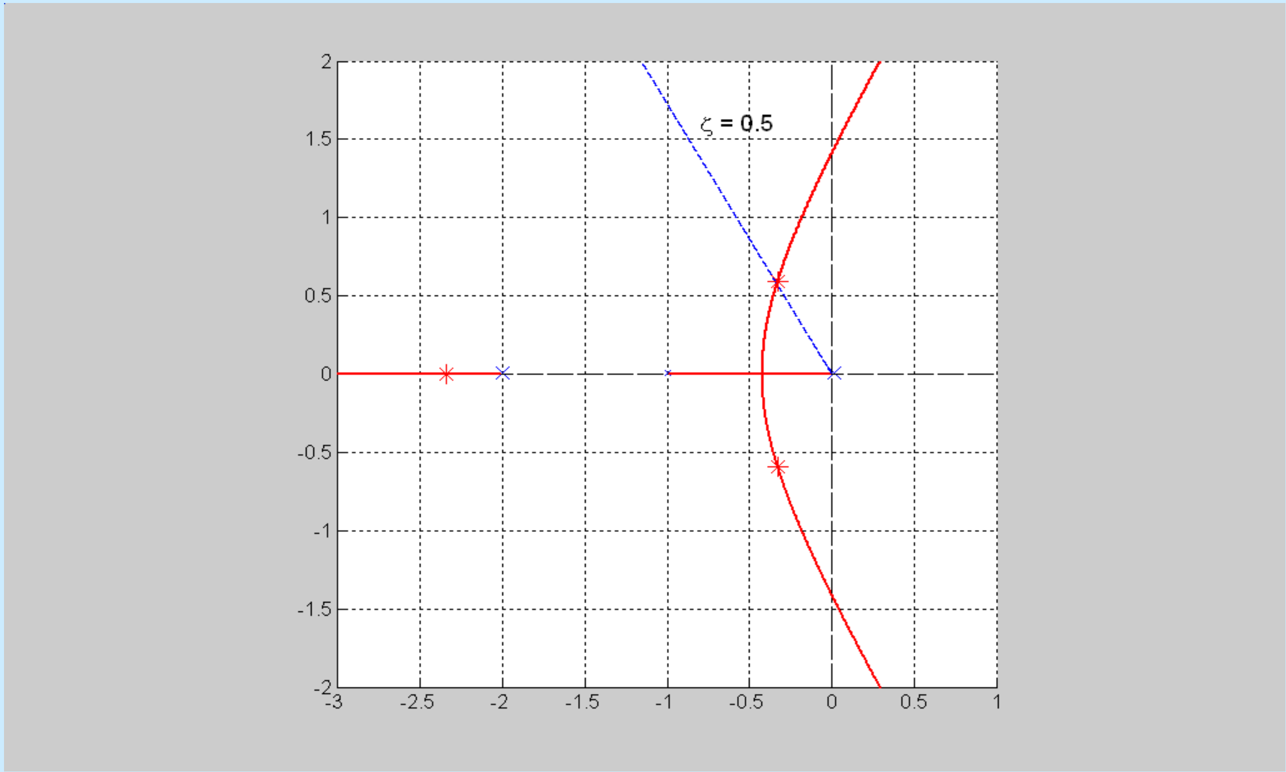
$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{1.06}{s\,(s+1)(s+2)}$$

试设计滞后校正，使得校正后$K_{\mathrm{v}}=5\ \mathrm{sec}^{-1}$ **且** s_{d} **几乎不变**

Solution:

$$G_{CL}(s)=\frac{1.06}{s^3+3s^2+2s+1.06}$$

(i) 校正前系统分析



$$s_{1,2}=-0.33\pm \mathrm{j}\,0.59 \quad \omega_n=0.67 \quad \zeta=0.5$$

$$s_3=-2.34 \quad K_v'=0.53\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$G_c(s)=\frac{K_c}{\beta}\cdot\frac{s-z_c}{s-p_c}$$

$$z_c/p_c=\beta>>1$$

(ii) 所需施加增益

$$K'=\frac{K_v}{K_v'}=\frac{5}{0.53}=9.43\approx 10$$

- **需要滞后校正来提高** K_v **并维持** s_d **不变**

(iii) 滞后校正控制器设计

- **取** $\beta=K'=10$ • **选择** $z_c=-0.1$ $p_c=-0.01$

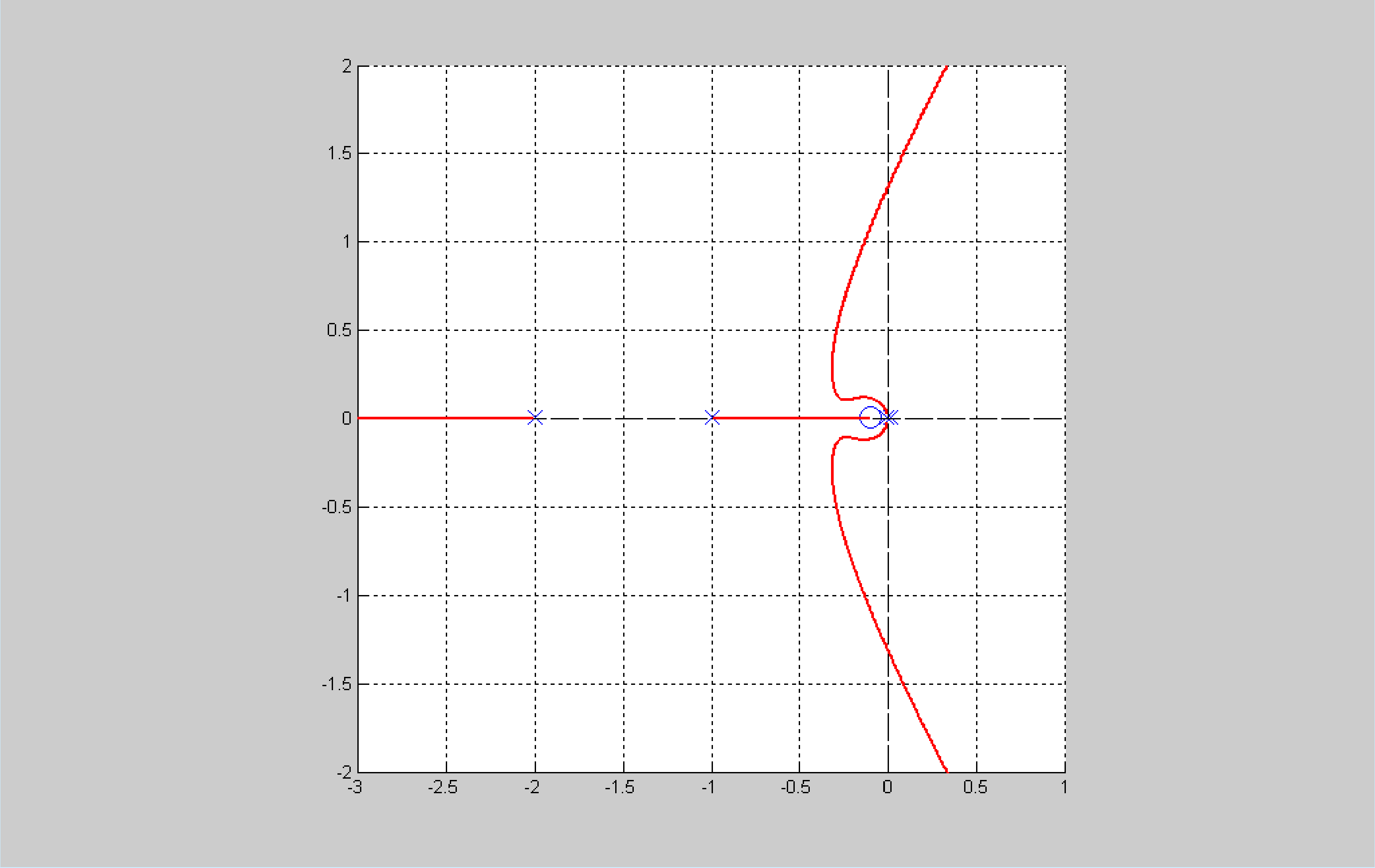
$$G_c(s)=\frac{K_c}{10}\cdot\frac{s+0.1}{s+0.01}$$

$$G_p(s)G_c(s)=\frac{1.06K_c}{10}\cdot\frac{s+0.1}{s(s+1)(s+2)(s+0.01)}$$

注: K_c **可以取** 10 **来满足性能要求, 留在后面进一步讨论**

$$G_p(s)G_c(s)=\frac{0.106K_c(s+0.1)}{s(s+1)(s+2)(s+0.01)}$$

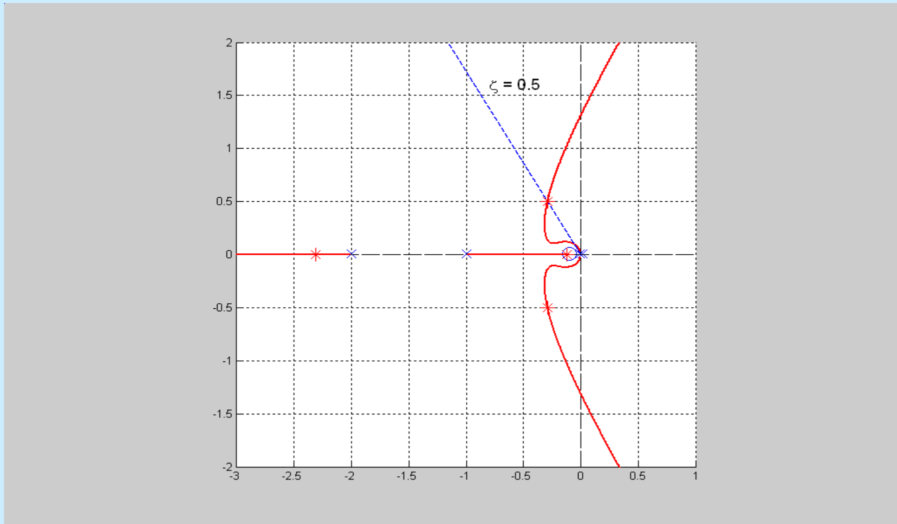
- **校正后的根轨迹**



- **确定主导极点**

*** 试凑法确定**$\zeta = 0.5$ **对应的主导极点如下：**

$$s_{1,2} = -0.2896 \pm \mathrm{j}\,0.5016$$



- **根据幅值条件确定控制器增益**

$$\left| G_\mathrm{p}(s_1) G_\mathrm{c}(s_1) \right| = 1$$

$$\frac{1.06K_\mathrm{c}}{10} = \left| \frac{s(s+1)(s+2)(s+0.01)}{s+0.1} \right|_{s=s_1} = 0.9615$$

$$K_\mathrm{c} = 9.0708$$

- **滞后校正控制器** $G_\mathrm{c}(s) = 0.9071 \cdot \dfrac{s+0.1}{s+0.01}$

$$s_{1,2}=-0.33\pm \mathrm{j}\,0.59$$
$$\omega_{\mathrm{n}}=0.676$$

(iv) 校正后的系统检验

$s_{1,2}=-0.2896\pm \mathrm{j}\,0.5016$ **(主导极点)** $\leftarrow \omega_{\mathrm{n}}=0.579$

$$s_3=-0.1243\approx z_{\mathrm{c}}$$

$$s_4=-2.3065=-7.96\times 0.2896=-7.96\sigma$$

$$K_{\mathrm{v}}=4.8075<5\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$G_{\mathrm{c}}(s)=0.9071\cdot\frac{s+0.1}{s+0.01}$$

(v) 进一步改善

(a) 减小 $|z_{\mathrm{c}}|$ **且保持** $\beta=10$，**可降低对根轨迹的影响**

- **譬如**

$$G_{\mathrm{c1}}(s)=0.95\cdot\frac{s+0.05}{s+0.005}$$

$s_{1,2}=-0.314\pm \mathrm{j}\,0.544$ $\quad K_{\mathrm{v}}=5.04\ \mathrm{s}^{-1}$

$\uparrow$

$\omega_{\mathrm{n}}=0.628$

$$G_c(s) = 0.9071\frac{s+0.1}{s+0.01}$$
$$s_{1,2} = -0.33 \pm \mathrm{j}\,0.59$$
$$K_v = 4.8075\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$G_{c1}(s) = 0.95\frac{s+0.05}{s+0.005}$$
$$s_{1,2} = -0.314 \pm \mathrm{j}\,0.544$$
$$K_v = 5.04\ \mathrm{s}^{-1}$$

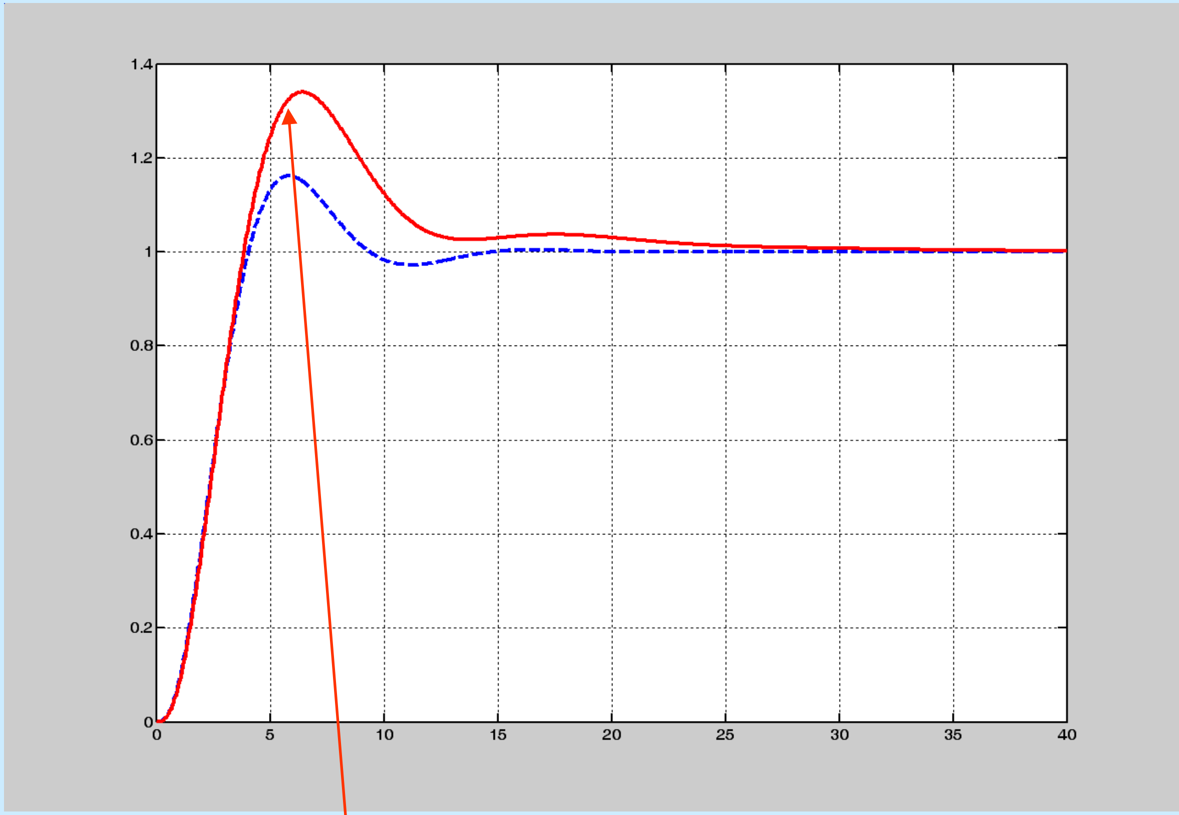
(b) 加大 β 且保持 z_c 不变，可提高稳态误差系数

- **譬如**

$$G_{c2}(s) = 0.905 \cdot \frac{s+0.1}{s+0.008}$$
$$\beta = 12.5$$
$$s_{1,2} = -0.2885 \pm \mathrm{j}\,0.4997$$
$$K_v = 5.998\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \uparrow$$
$$\omega_n = 0.577$$

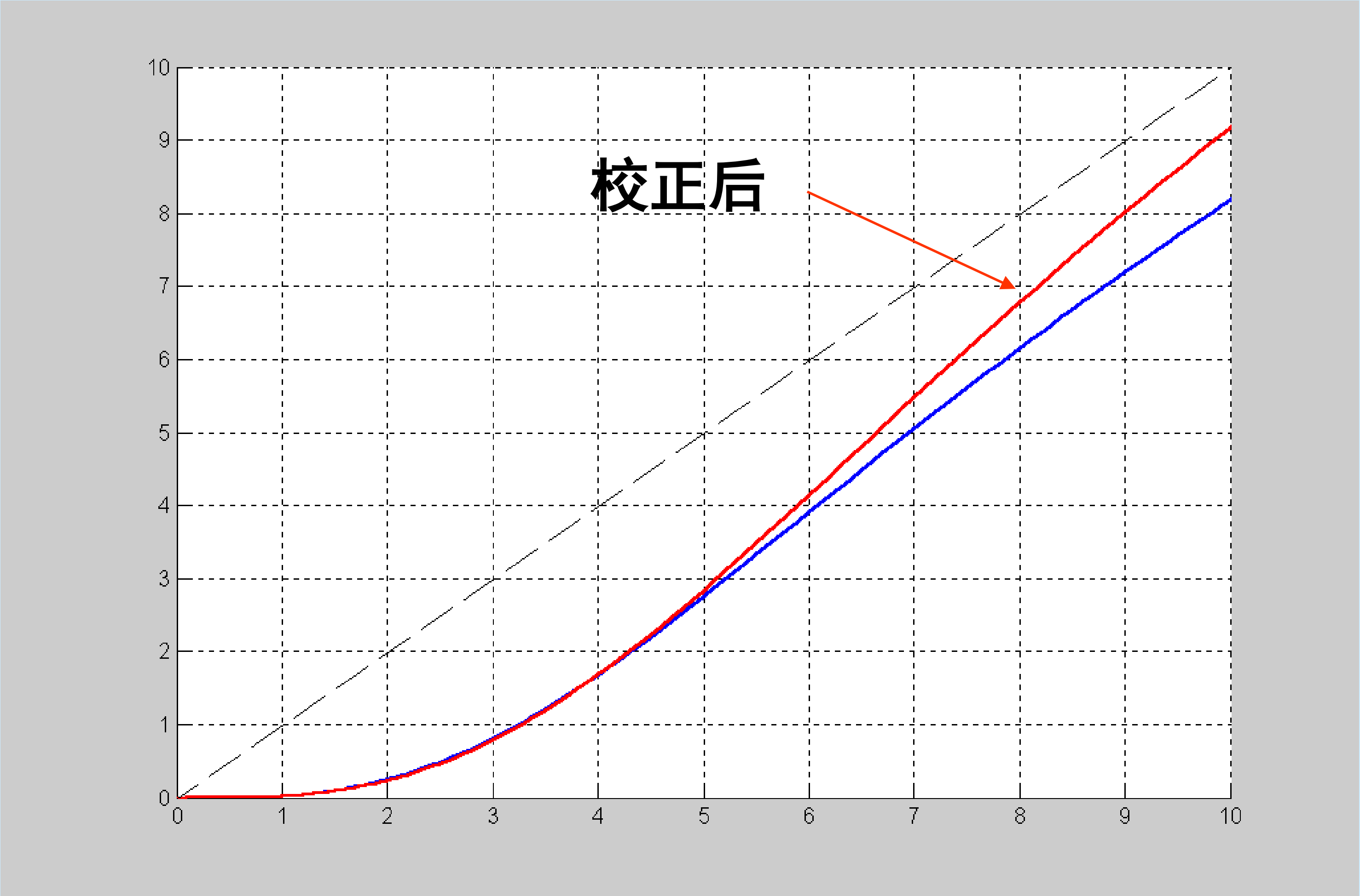
(vi) 时间响应

- 校正前后系统的单位阶跃响应 $G_c(s)$

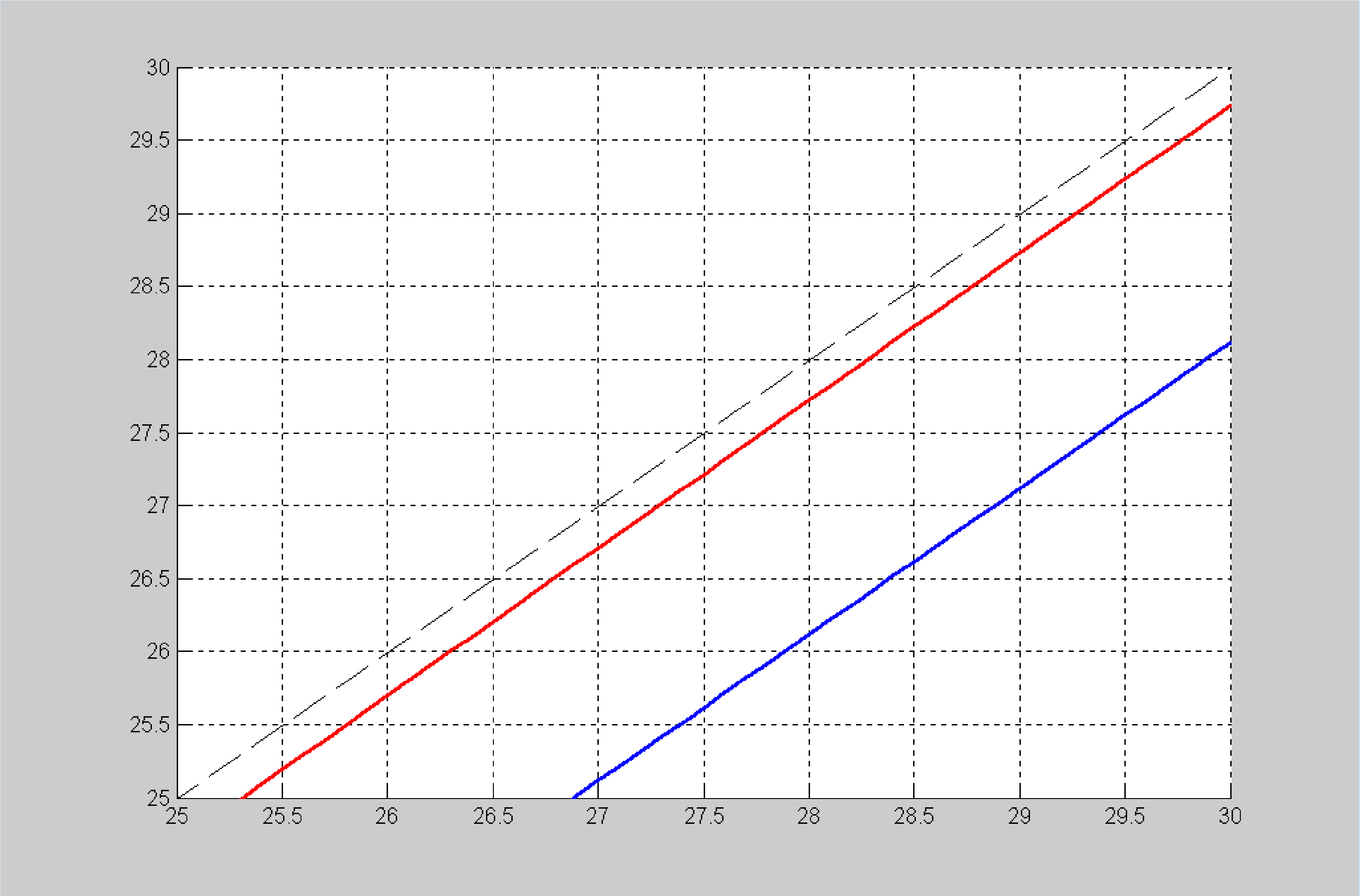


(**Red line** – 校正后)

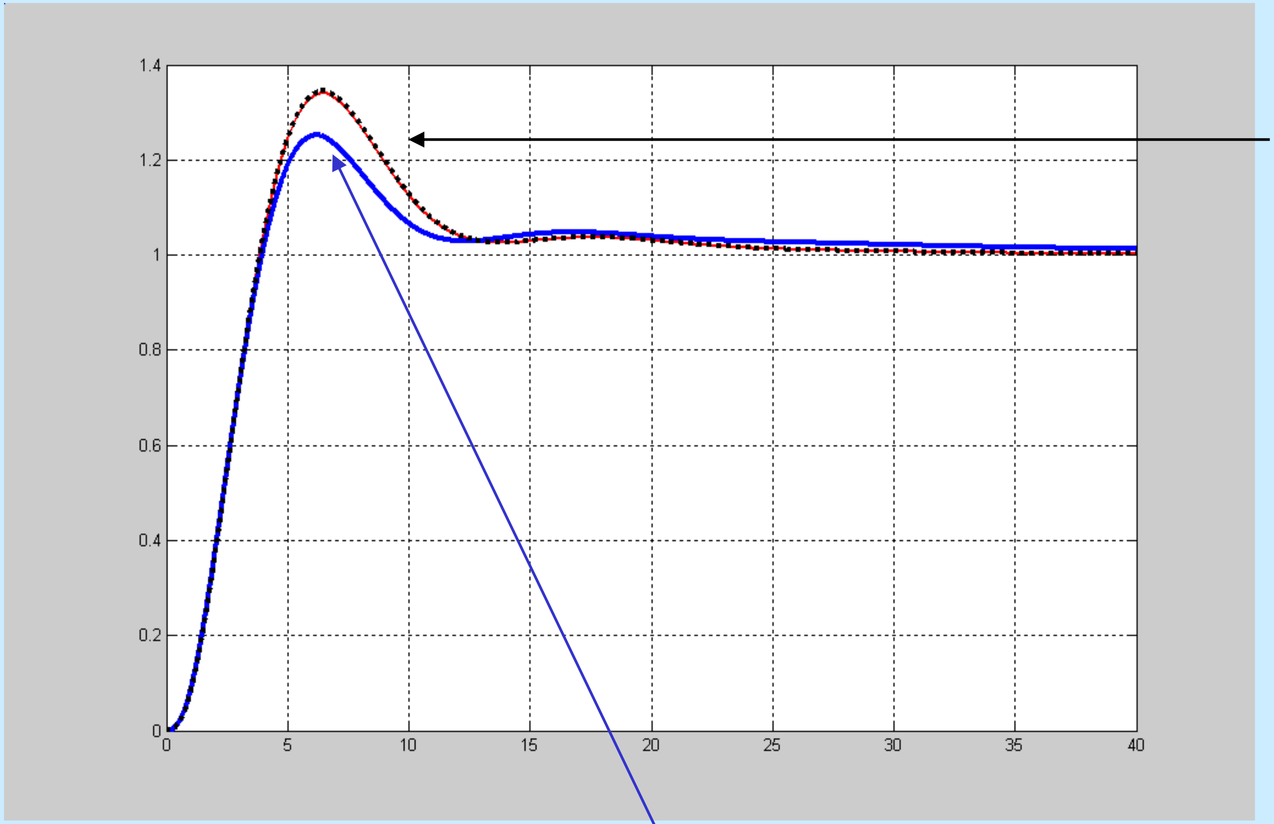
- **校正前后的单位斜坡响应** $G_{c1}(s)$



- **校正前后的单位斜坡响应** $G_{c2}(s)$



- 不同滞后校正对应的单位阶跃响应



Black – $G_{c2}(s)$

Red – $G_c(s)$

Blue – $G_{c1}(s)$

♦ **说明:**

(1) K_v **近似增加** β **倍**

(2) p_c **和** z_c **之间的距离导致** s_d **变化较小**

$$\arg G_c(s_d) = \arg \frac{s+0.1}{s+0.01}\bigg|_{s=-0.33+j0.59}$$

$$= \arctan\frac{0.59}{-0.23} - \arctan\frac{0.59}{-0.32} = -7.17^\circ$$

$$\arg G_{c1}(s_d) = \arg \frac{s+0.05}{s+0.005}\bigg|_{s=-0.33+j0.59} = -3.46^\circ$$

(3) 响应变缓: $\omega_n \downarrow$, $t_s \uparrow$

5. 设计步骤小结（仅供参考）

(1) 绘制对象的根轨迹，确定主导极点 s_d

(2) 计算所需施加的增益

(3) 确定 p_c，z_c, K_c

(4) 检验$G_p(s)G_c(s)$**根轨迹上的主导极点**

$$G_c(s)=\frac{1+Ts}{1+\beta Ts}$$

6.3.4 基于Bode图的滞后校正

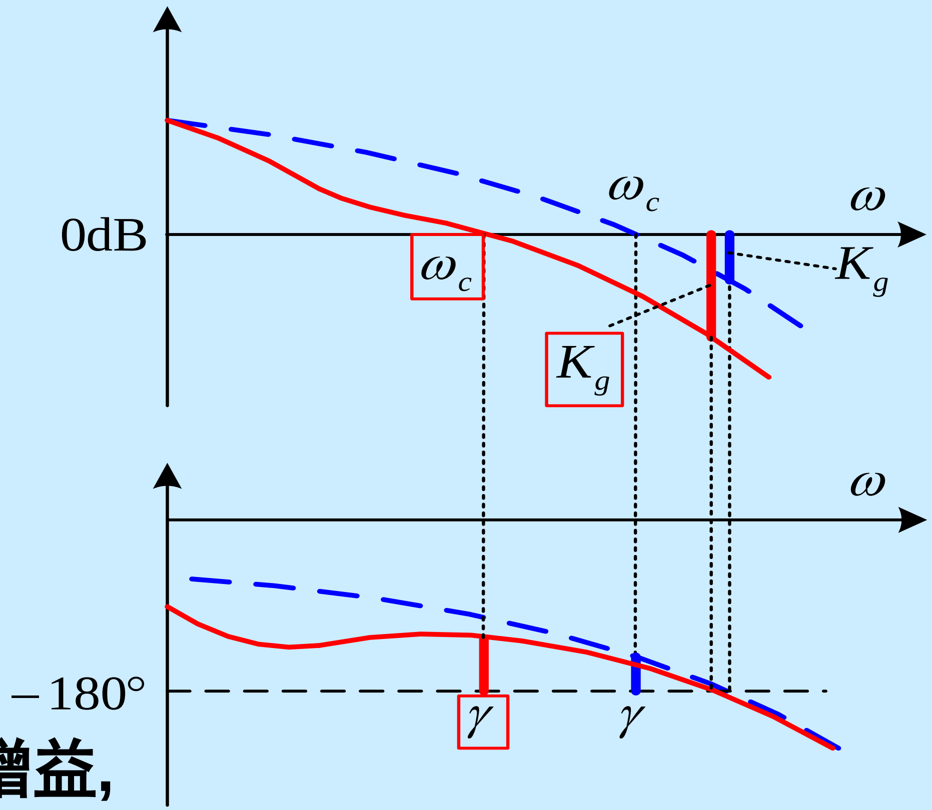
1. 选择 $\dfrac{1}{T}$

$$\frac{1}{T}<\frac{\omega_c}{10}\left(\frac{\omega_c}{5}\right)$$

$$\Rightarrow\ \left|\arg G_c(j\omega_c)\right|<5^\circ$$

2. 图形解释

(i) 假设对象具有高增益



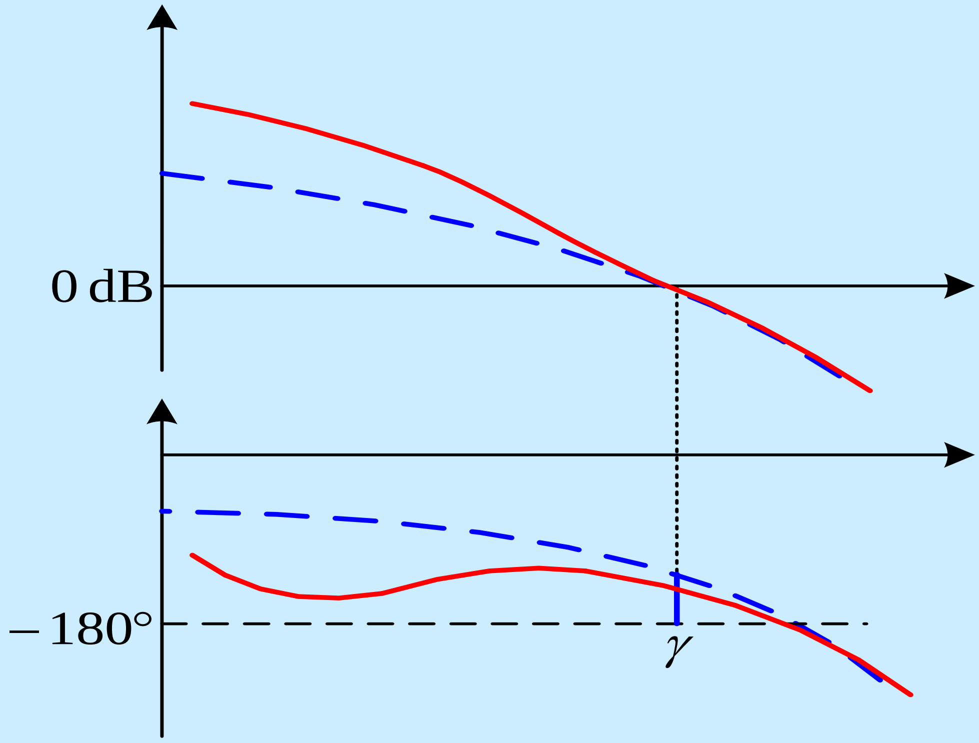
- **如果滞后校正不额外施加增益,**

  则 $\omega_c\downarrow$, $\gamma\uparrow$, $K_g\uparrow$

$$G_c(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\beta Ts}$$

(ii) 假设对象具有高稳定性

- 滞后校正额外施加增益可提高 K_v



3. 示例

例 6.3.2 给定对象的传递函数如下(包含了控制器增益)

$$G_{\mathrm{p}}(s) = \frac{K}{s(1+s)(1+0.5s)}$$

试设计串联校正，使得校正之后系统满足如下指标

$$\gamma \geq 40^\circ \qquad K_{\mathrm{g}} \geq 10\,\mathrm{dB} \qquad K_{\mathrm{v}} \geq 5\ \mathrm{s}^{-1}$$

Solution:

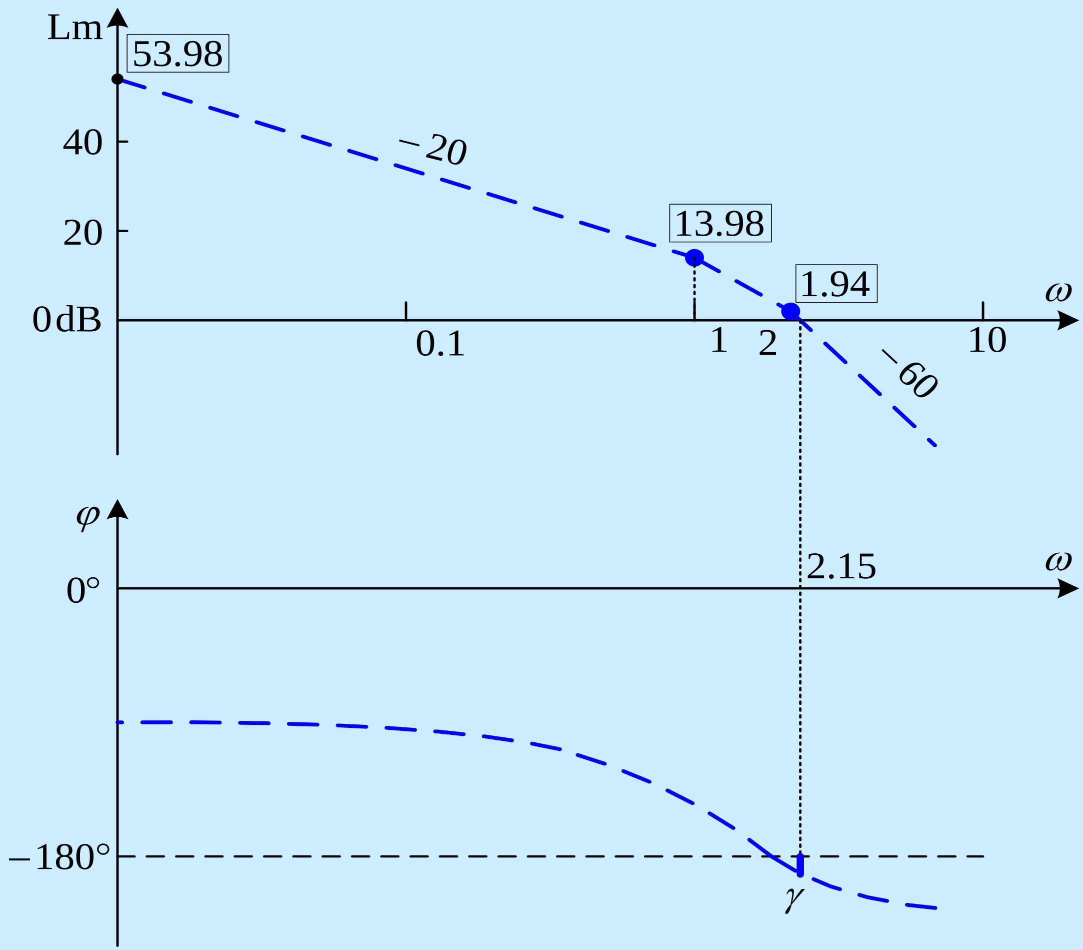
(i) 确定开环增益

$$K_{\mathrm{v}} = \lim_{s\to 0} s\,G_{\mathrm{p}}(s) = K = 5$$

$$G_{\mathrm{p}}(s) = \frac{5}{s(1+s)(1+0.5s)}$$

(ii) 增益校正后的系统分析

$$G_p(s) = \frac{5}{s(1+s)(1+0.5s)}$$



$$\omega_{gc} = 2.1544$$
$$\gamma = -22.2293°$$

- 闭环系统不稳定

$$\omega_{pc} = 1.5$$
$$K_g = -6$$

- 思考: 为什么不能采用超前校正？

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{5}{s(1+s)(1+0.5s)}$$

(iii) 选择 ω_{gc}

$$\gamma=(40+12)°=52°$$

$$\arg G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)=$$

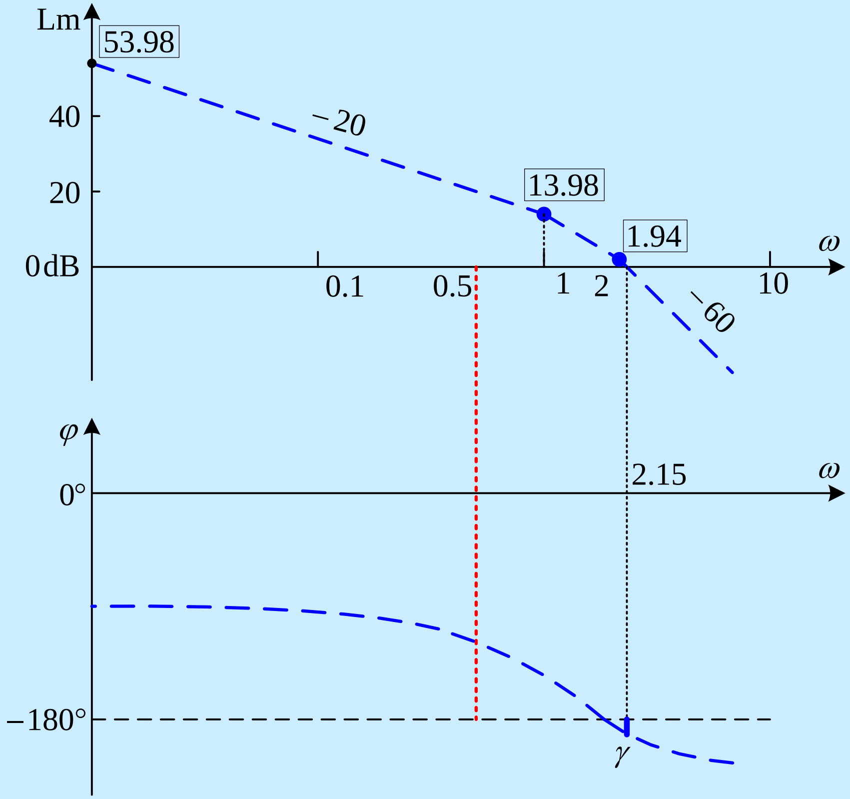
$$\arg\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}0.5\omega)}$$

$$=-90°-\arctan\omega$$

$$-\arctan 0.5\omega$$

$$=-128°$$

$$\omega=0.5\ \ \mathrm{rad/s}$$



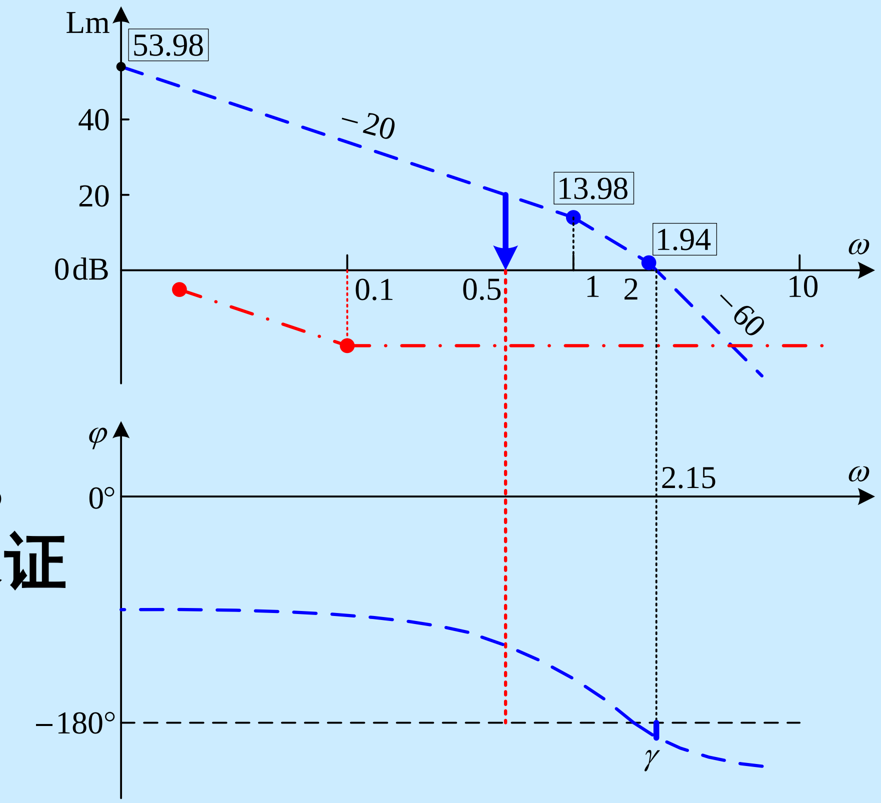
- **取新的截止频率** $\omega_{\mathrm{gc}}=0.5\ \ \mathrm{rad/s}$

(iv) 取 $\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega_{gc}}{5}=0.1$

$T=10$

(v) 计算 β

- $\left|G_p(j0.5)\right| \approx 10 = 20$ **dB**
- **滞后校正必须在**0.5 rad/s **处降低幅值** 20 dB, **来保证** ω_{gc} = 0.5 rad/s



- $-20\lg\beta=-20 \quad \beta=10$

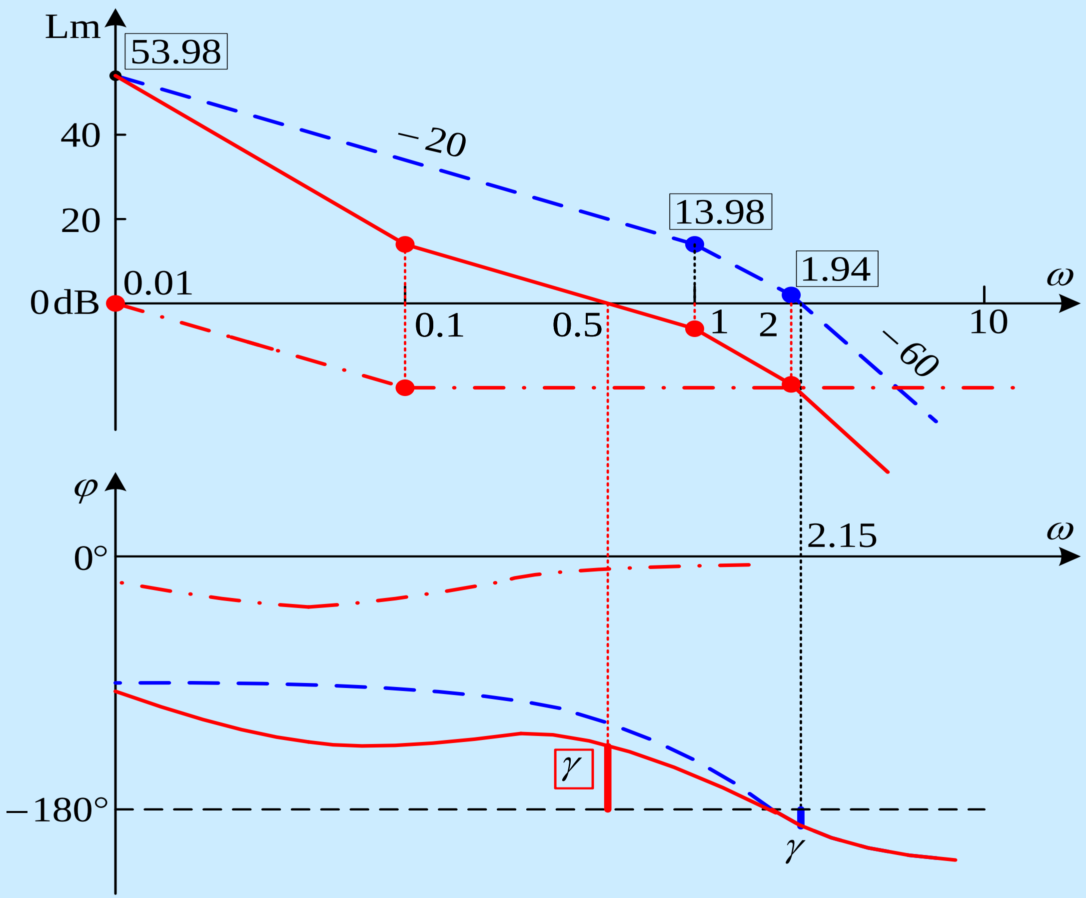
$\dfrac{1}{\beta T}=0.01$

- $G_c(s)=\dfrac{1+Ts}{1+\beta Ts}=\dfrac{1+10s}{1+100s}$

$$G_p(s)G_c(s)=\frac{5(1+10s)}{s(1+s)(1+0.5s)(1+100s)}$$

$$G_c(s)=\frac{1+10s}{1+100s}$$

(vi) 校正后的系统检验



$\omega_{gc}=0.5$

$\gamma=39°$

$\omega_{pc}=1.32$

$K_g=11$

$K_v=5\ s^{-1}$

(精确计算)

$\omega_{gc}=0.454$

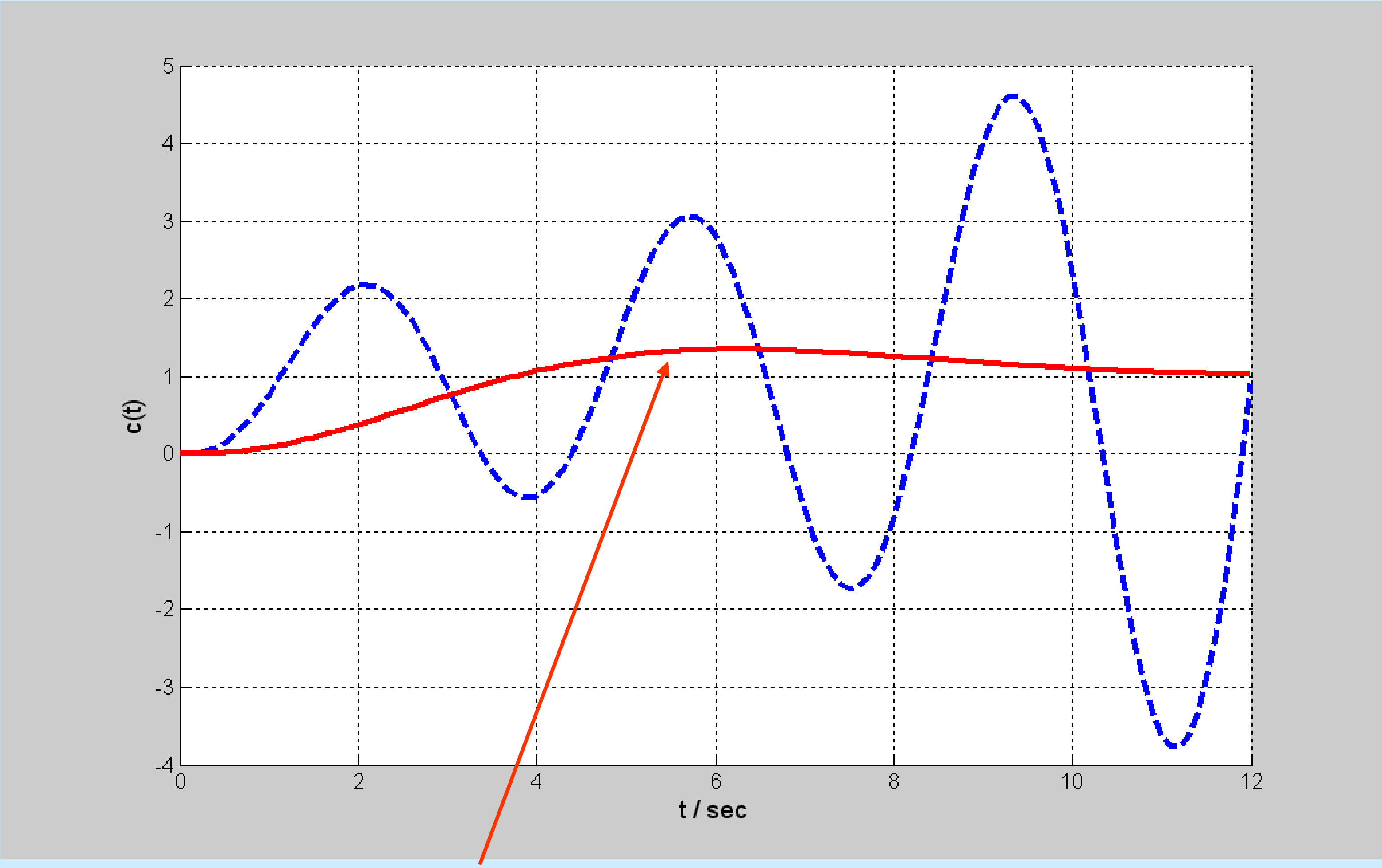
$\gamma=41.6°$

$\omega_{pc}=1.32$

$K_g=14.3$

- **思考: 如何进一步改善相位裕量?**

(v) 时间响应



(red—校正后)

4. 设计步骤小结（仅供参考）

(1) 根据稳态误差系数确定开环增益

(2) 绘制增益校正后系统的Bode图, 计算增益裕量和相位裕量

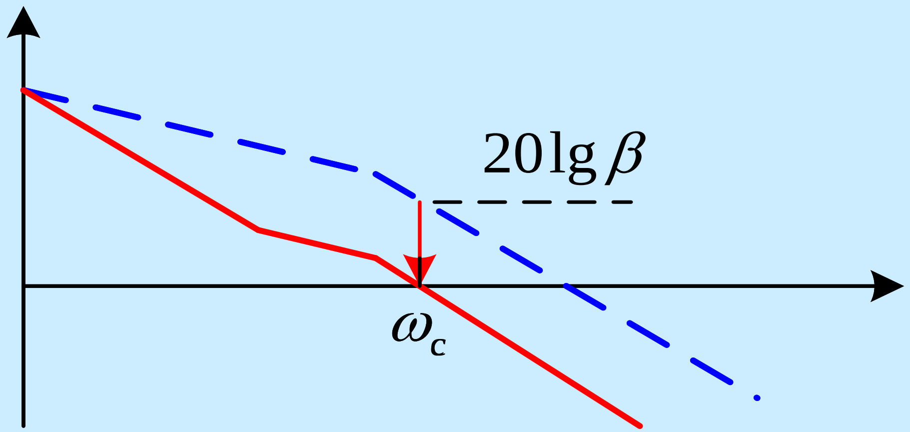
(3) 选择新的截止频率 ω_{gc} 使得

$$180^\circ + \arg\left[KG_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{gc}})\right] = \gamma + (5\ \mathrm{to}\ 12)^\circ$$

(4) 选取 $\dfrac{1}{T} < \left(\dfrac{1}{5}\ \mathrm{to}\ \dfrac{1}{10}\right)\omega_{\mathrm{gc}}$

至少要求 $\dfrac{1}{T} < \dfrac{\omega_{\mathrm{gc}}}{2}$

(5) 计算 β 和 $\frac{1}{\beta T}$



滞后校正必须使得

$$20\lg\left|G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{gc}})G_{\mathrm{c}}(\mathrm{j}\omega_{\mathrm{gc}})\right| = 0$$

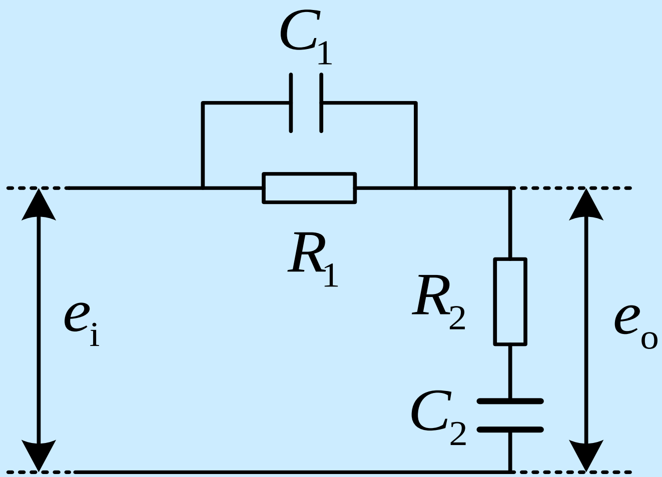
(6) 校正后系统的检验与分析

6.4 超前滞后校正

- 应用场合

* 控制对象的稳定性差、稳态误差大

6.4.1 超前滞后网络



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s}$$

- 令 $R_1C_1=T_1$,

  $R_2C_2=T_2$,

  （通常 $T_1<T_2$）

$$R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2=\frac{T_1}{\beta}+\beta T_2 \qquad (\beta>1)$$

- 则

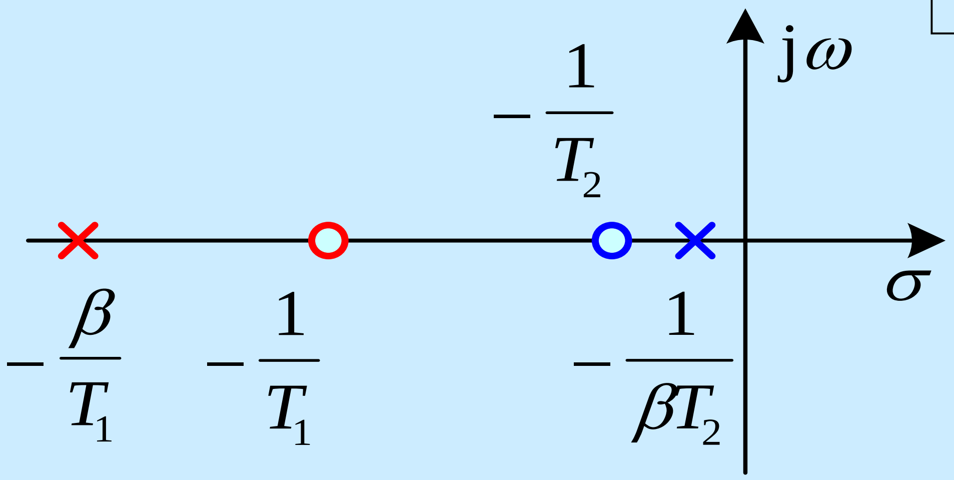
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)(\beta T_2s+1)}=\frac{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\frac{\beta}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

6.4.2 特性

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\left(s+\dfrac{1}{T_1}\right)\left(s+\dfrac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\dfrac{\beta}{T_1}\right)\left(s+\dfrac{1}{\beta T_2}\right)}$$

$(T_2 > T_1)$

1. 零-极点分布

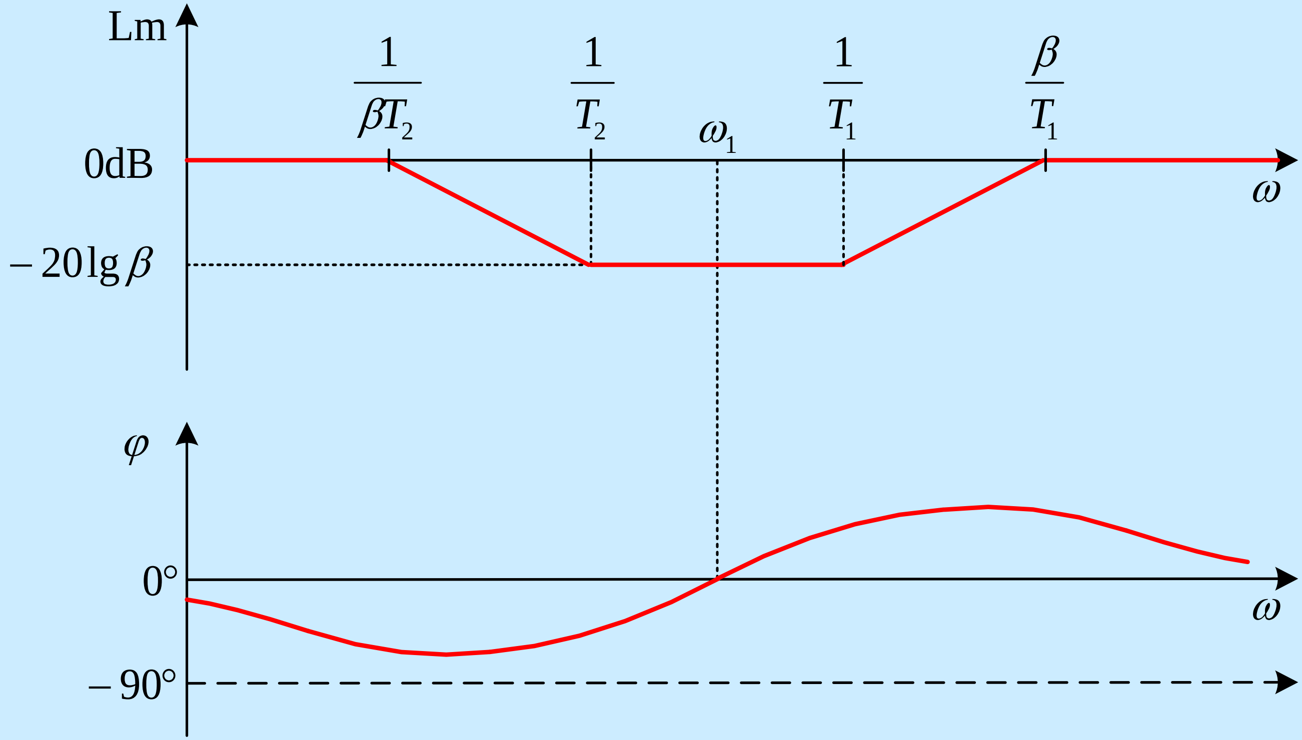


- 两组零极点
- 相当于 { 超前校正 串联 滞后校正 }

2. Bode图

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{\left(1+\frac{T_1}{\beta}s\right)(1+\beta T_2 s)}$$

$(T_1 < T_2)$

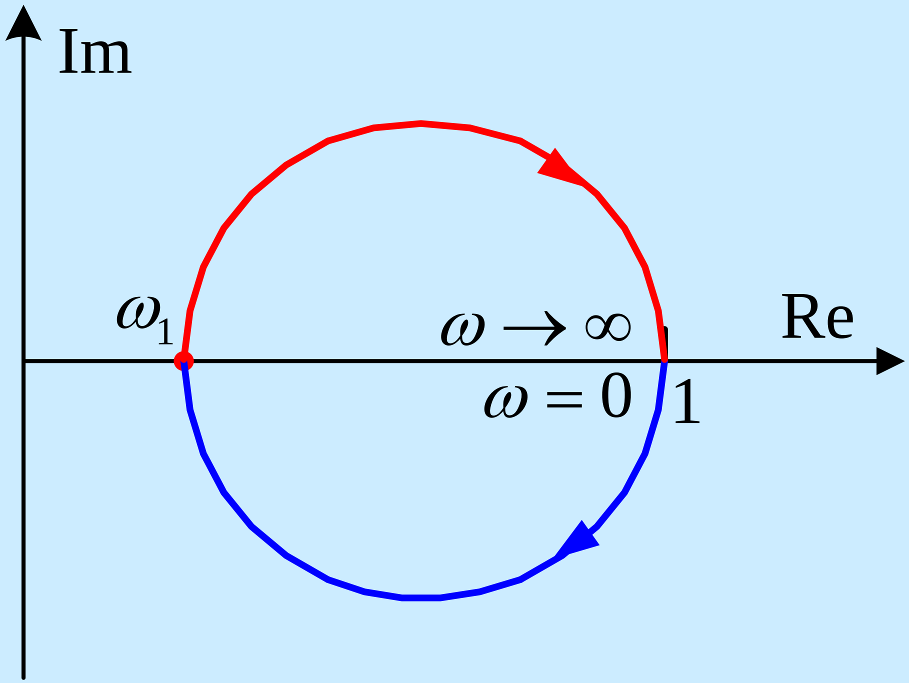


- $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$

- **超前滞后校正= 滞后校正**
  串联　超前校正

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{\left(1+\frac{T_1}{\beta}s\right)(1+\beta T_2 s)}$$

3. Nyquist 图



- $\omega = \omega_1$ **时,** $\varphi = 0$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{\left(1+\frac{T_1}{\beta}s\right)(1+\beta T_2 s)}$$

- **其他形式**

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{(1+\alpha T_1 s)}{(1+T_1 s)} \cdot \frac{(1+T_2 s)}{(1+\beta T_2 s)}$$

$$= \frac{K_c \alpha}{\beta} \cdot \frac{\left(s+\frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)} \cdot \frac{\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

$\alpha > 1 \qquad \beta > 1$

$\alpha = \beta$ or $\alpha \neq \beta$

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{\left(s+\frac{1}{\alpha T_1}\right)}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)} \cdot \frac{\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{(s-z_1)}{(s-p_1)} \cdot \frac{(s-z_2)}{(s-p_2)}$$

$p_1/z_1 = \alpha \qquad z_2/p_2 = \beta$

6.4.3 基于根轨迹的超前滞后校正

1. 基本原则

(1) T_1 **和** T_2 **可分开选取，满足** $T_2/T_1 >> 1$

(2) 超前环节:

$$\frac{-1}{T_1} \qquad \frac{-\beta}{T_1} \qquad \text{or} \qquad \frac{-1}{\alpha T_1} \qquad \frac{-1}{T_1}$$

♦ **功能: 改善稳定性和响应速度**

♦ **设计方法:**

• **与超前校正一样**

• **选取**$-1/T_1$ **(** $-1/\alpha T_1$ **) 对消对象最接近原点的极点，以实现较高的稳定性和更快的响应速度**

(3) 滞后环节:

$$\frac{-1}{T_2} \qquad \frac{-1}{\beta T_2}$$

- **功能：改善稳态精度**
- **设计方法: 接近原点、β较大**

2. 示例

例 6.4.1 给定对象的传递函数如下

$$G_{\mathrm{p}}(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

试设计串联校正，使得校正后系统满足如下指标

$$K_{\mathrm{v}} = 50\,\mathrm{s}^{-1} \qquad \omega_{\mathrm{n}} = 5 \qquad \zeta = 0.5$$

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

$$\omega_n = 5$$
$$\zeta = 0.5$$

Solution:

(i) 校正前的系统分析

$$s_{1,2} = -0.25 \pm \mathrm{j}1.984$$

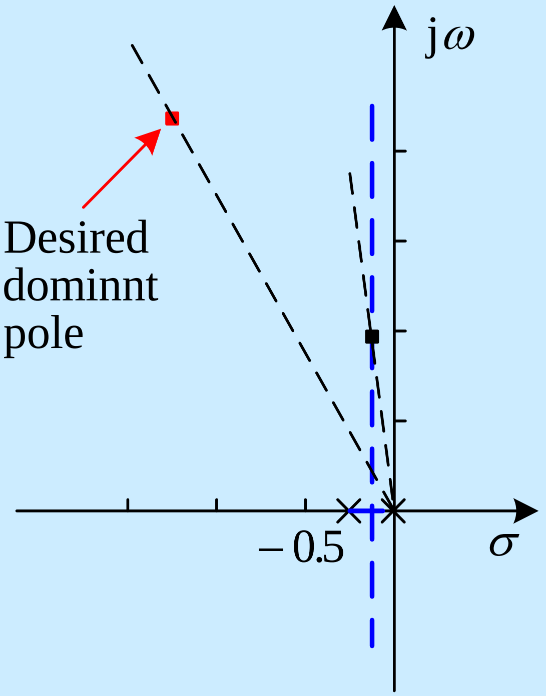
$$\omega_n = 2 \ \text{rad/s} \quad \zeta = 0.125$$

$$K_v' = 8\,\mathrm{s}^{-1}$$

(ii) 期望主导极点

$$s_d = -\zeta\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$= -2.5 \pm \mathrm{j}4.33$$

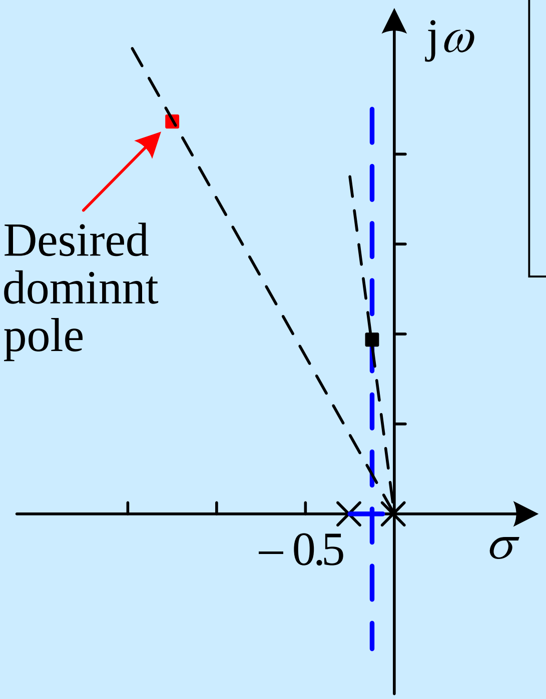


$$K_v' = 8\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$\omega_n' = 2$$
$$\zeta' = 0.125$$

(iii) 确定校正类型

- 可能需要超前滞后校正
- 令控制器传递函数如下

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$



$$K_v = 50\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$\omega_n = 5$$
$$\zeta = 0.5$$

注意: 此时 $\alpha = \beta$

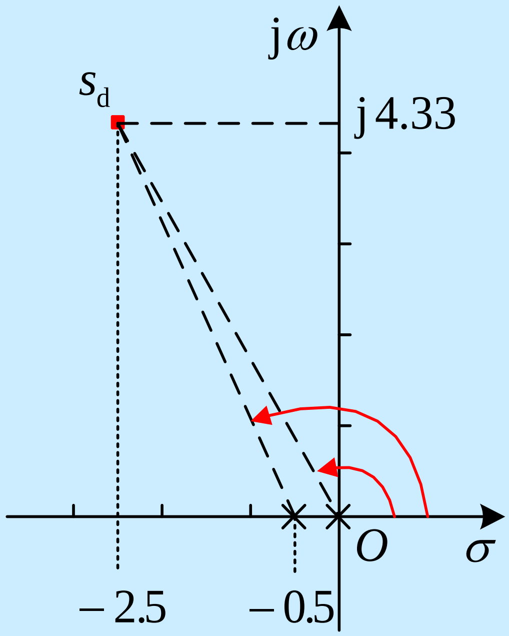
(iii) 所需超前角

$$\arg\left[G_{\mathrm{p}}(s_{\mathrm{d}})\right]=\arg\left[\frac{1}{s(s+0.5)}\right]_{s=s_{\mathrm{d}}}$$

$$=-\arctan\frac{4.33}{-2.5}$$

$$-\arctan\frac{4.33}{-2.5+0.5}$$

$$=-120°-114.8° = -234.8°$$



- **从而，超前角** $\varphi=-180°-(-234.8°)\approx 55°$

注: $1/T_1$ **和** β **可根据超前角来计算，但未必能保证** K_{v}

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

(iv) 计算 K_c

- $K_v = \lim_{s\to 0} sG_p(s)G_c(s)$

$$= \lim_{s\to 0} sG_p(s)K_c$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{4K_c}{0.5} = 8K_c = 50$$

- $K_c = 6.25$
- K_v **在此步得以满足**

(v) 计算 T_1 **和** β

- **设** $T_2 >> 1$**, 则**

$$\left| \frac{s_d + \frac{1}{T_2}}{s_d + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \approx 1$$

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

$$s_d = -2.5 \pm j4.33$$

- **幅值条件:**

$$\left|G_p(s_d)G_c(s_d)\right| \approx \left|G_p(s_d)\right| \cdot K_c \cdot \left|\frac{s_d + \frac{1}{T_1}}{s_d + \frac{\beta}{T_1}}\right|$$

$$= \frac{4\times 6.25}{\left|s_d\right|\left|s_d+0.5\right|} \cdot \left|\frac{s_d + \frac{1}{T_1}}{s_d + \frac{\beta}{T_1}}\right| = \frac{5}{4.77} \cdot \left|\frac{s_d + \frac{1}{T_1}}{s_d + \frac{\beta}{T_1}}\right| = 1$$

$$\left|\frac{s_d + \frac{1}{T_1}}{s_d + \frac{\beta}{T_1}}\right| = \frac{4.77}{5}$$

- 通过试凑法或计算确定 T_1

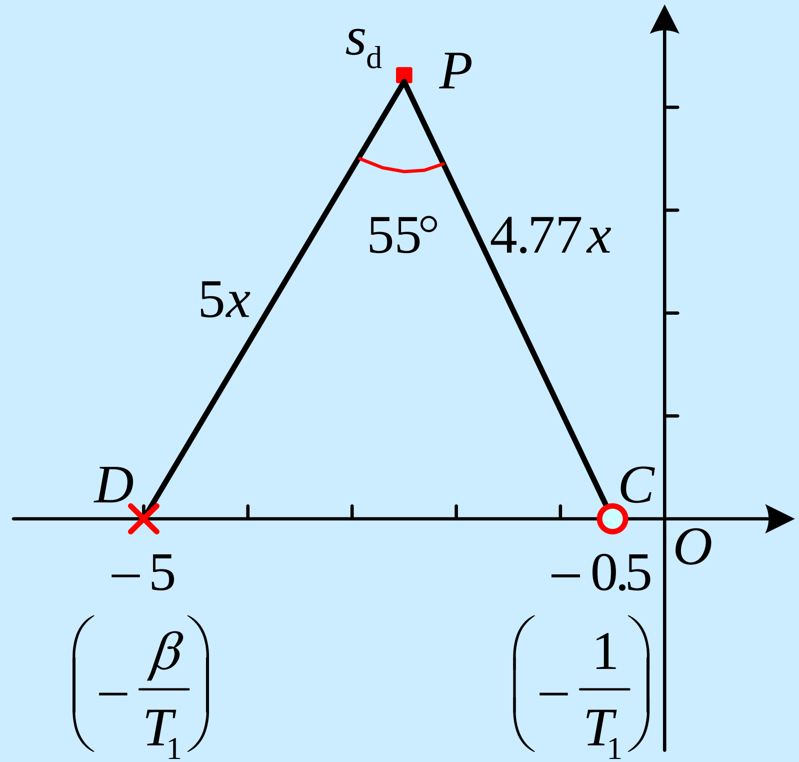
$$\angle DPC = 55^\circ$$

$$\frac{\left|\overline{PC}\right|}{\left|\overline{PD}\right|} = \frac{4.77}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\overline{CO}\right| = 0.5$$

$$\left|\overline{DO}\right| = 5$$



$$\boxed{\frac{\left|s_d + \frac{1}{T_1}\right|}{\left|s_d + \frac{\beta}{T_1}\right|} = \frac{4.77}{5}}$$

$$\boxed{\varphi = 55^\circ}$$

$$\boxed{G_p(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}}$$

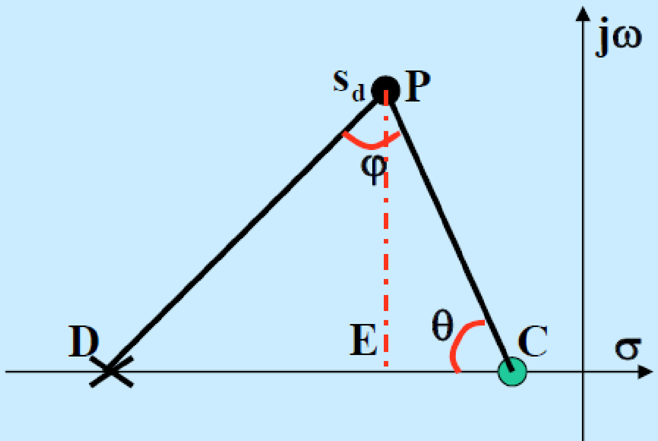
$$-\frac{1}{T_1} = -0.5 \qquad -\frac{\beta}{T_1} = -5 \qquad \textbf{i.e.}\quad T_1 = 2 \qquad \beta = 10$$

- $-1/T_1$ 恰好与对象的一个极点相消

- 确定 T_1 的另一种方法

s_d，φ，$\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PD}}$ 已知

确定 D、C 的位置？



$\theta \rightarrow$ D、C

$\angle PCD = \theta \quad \rightarrow \quad \angle PDC = 180^{o} - \theta - \varphi$

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{\sin(180^{o} - \theta - \varphi)}{\sin(\theta)} = \sin(\varphi)c\tan(\theta) + \cos(\varphi)$$

$$c\tan(\theta) = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \times \frac{1}{\sin(\varphi)} - c\tan(\varphi)$$

(vi) 选取 T_2 使得

$$\left|\frac{s_{\mathrm{d}}+\dfrac{1}{T_2}}{s_{\mathrm{d}}+\dfrac{1}{\beta T_2}}\right|\approx 1 \qquad -3^\circ<\arg\left[\frac{s_{\mathrm{d}}+\dfrac{1}{T_2}}{s_{\mathrm{d}}+\dfrac{1}{\beta T_2}}\right]<0^\circ$$

- 取 $T_2=10$

$$\left|\frac{s_{\mathrm{d}}+0.1}{s_{\mathrm{d}}+0.01}\right|\approx 0.9911 \qquad \arg\left[\frac{s_{\mathrm{d}}+0.1}{s_{\mathrm{d}}+0.01}\right]=-0.9^\circ$$

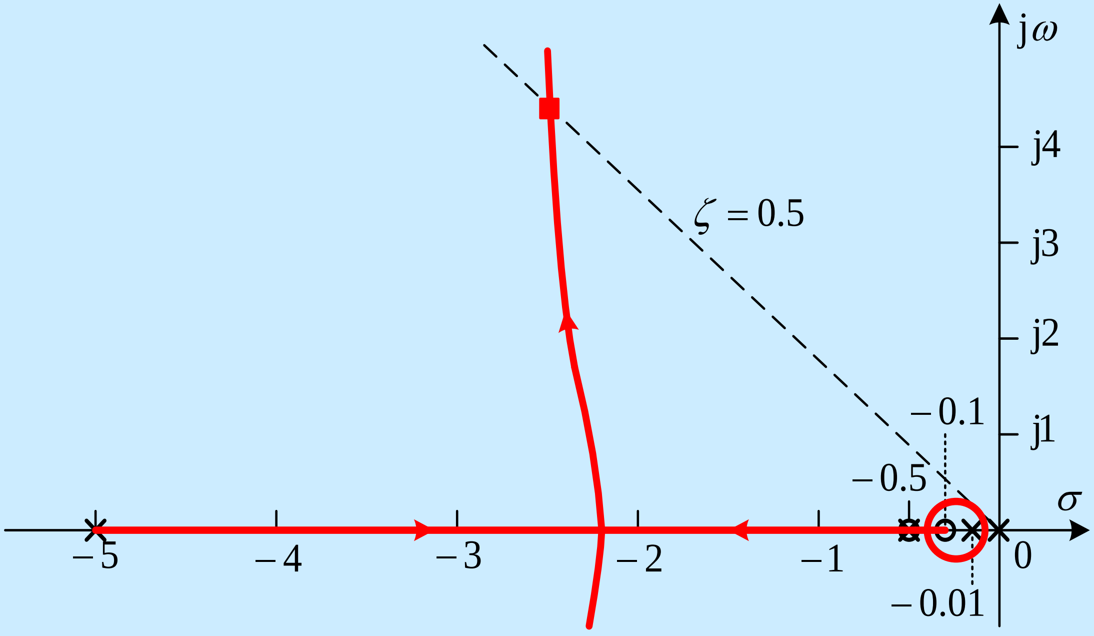
- 从而，控制器的传递函数如下

$$G_{\mathrm{c}}(s)=6.25\frac{(s+0.5)(s+0.1)}{(s+5)(s+0.01)}$$

(vii) 校正后的系统检验

$$G_p(s)G_c(s)=\frac{25(s+0.1)}{s(s+5)(s+0.01)}$$

- **上半平面根轨迹**



* **会合点:**

$-2.451, -0.0051$

* **分离点:**

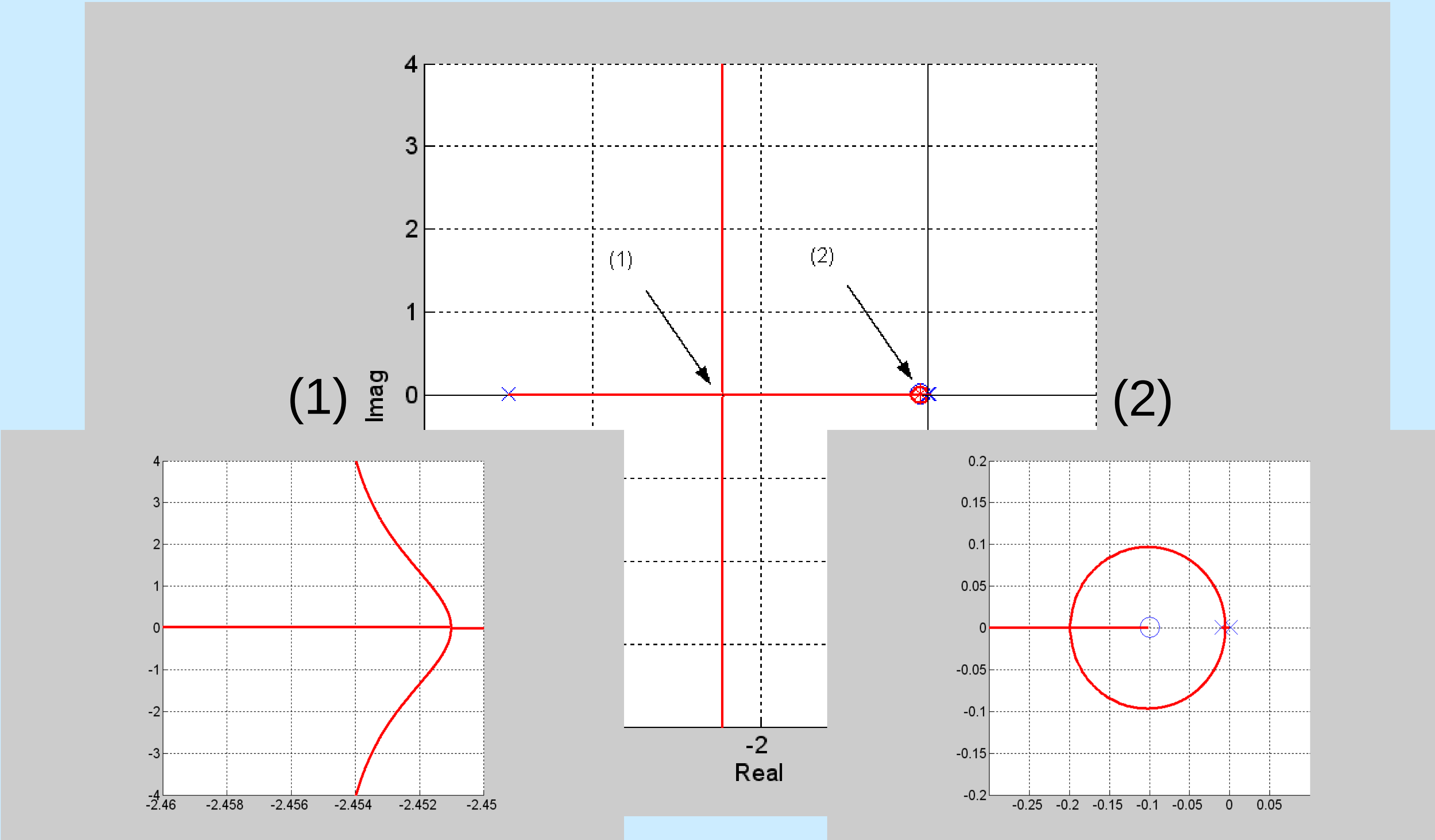
-0.1989

$$s_d=-2.454\pm j\,4.304$$

$$s_3=-0.1018\approx -1/T_2$$

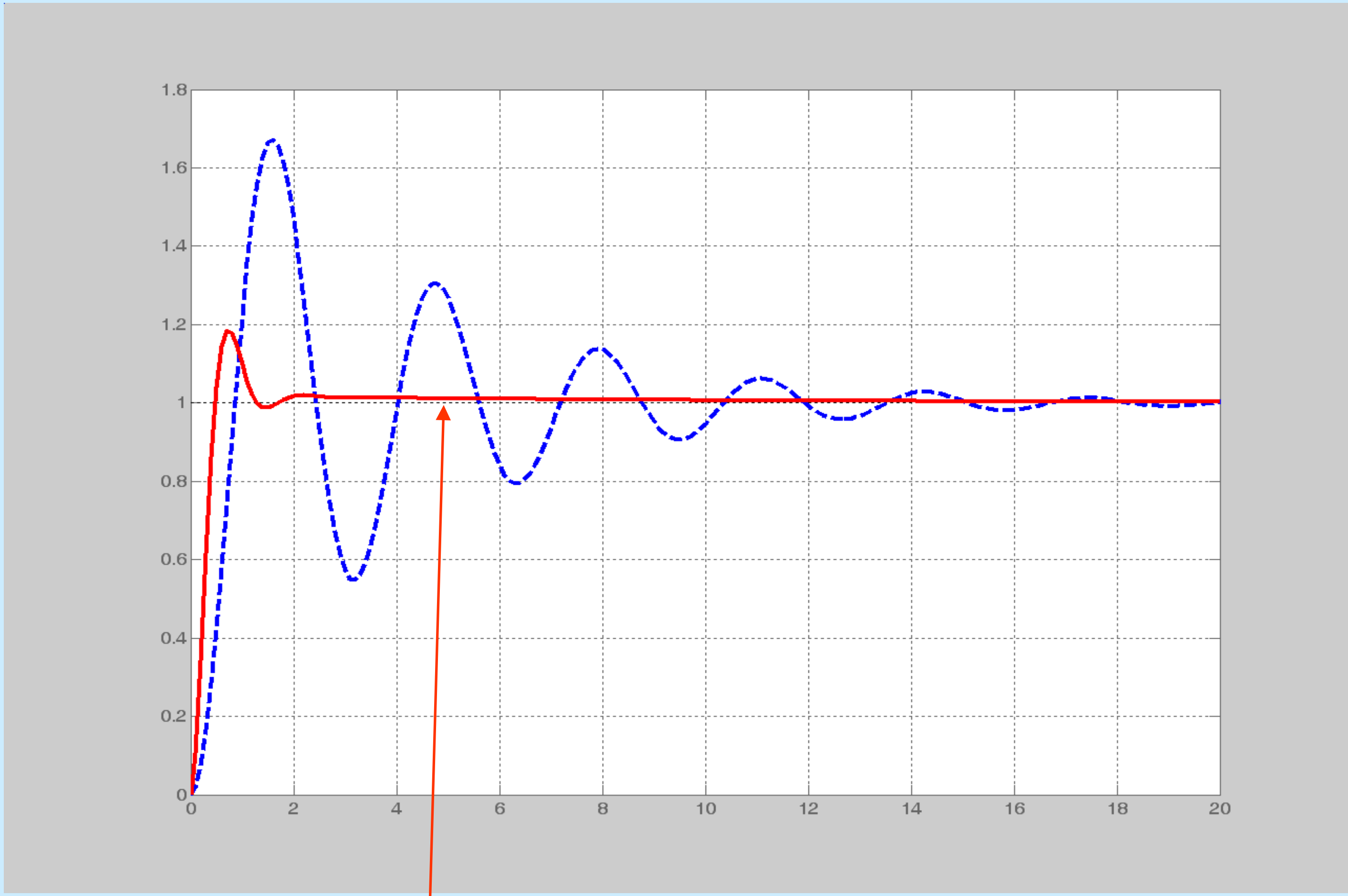
$$K_v=50\ \ \mathrm{s}^{-1}$$

- **MATLAB 作图**



4
3
2
1
0
Imag
(1)
(2)
-2
Real
(1)
(2)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2.46
-2.458
-2.456
-2.454
-2.452
-2.45
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.2
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05

(viii) 校正前后的单位阶跃响应



(red – 校正后)

♦ 说明:

(1) 对消对象极点与超前环节零点可取得更快响应速度

(2) 超前环节和滞后环节可分开设计

• 思考: 此例如何分开设计?

3. 设计步骤小结（仅供参考）

(1) 确定期望主导极点 s_{d} 的位置

(2) 计算所需超前角 φ

(3) 令

$$G_{\mathrm{c}}(s)=K_{\mathrm{c}}\frac{\left(s+\dfrac{1}{T_1}\right)}{\left(s+\dfrac{\beta}{T_1}\right)}\cdot\frac{\left(s+\dfrac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\dfrac{1}{\beta T_2}\right)}$$

根据误差系数确定 K_{c}

(4) 计算 T_1 和 β

$$\left|G_p(s_d)\right| \cdot K_c \cdot \left|\frac{s_d + \dfrac{1}{T_1}}{s_d + \dfrac{\beta}{T_1}}\right| = 1 \qquad \arg\left[\frac{s_d + \dfrac{1}{T_1}}{s_d + \dfrac{\beta}{T_1}}\right] = \varphi$$

(5) 确定 T_2

$$\left|\frac{s_d + \dfrac{1}{T_2}}{s_d + \dfrac{1}{\beta T_2}}\right| \approx 1 \qquad -3^\circ < \arg\left[\frac{s_d + \dfrac{1}{T_2}}{s_d + \dfrac{1}{\beta T_2}}\right] < 0^\circ$$

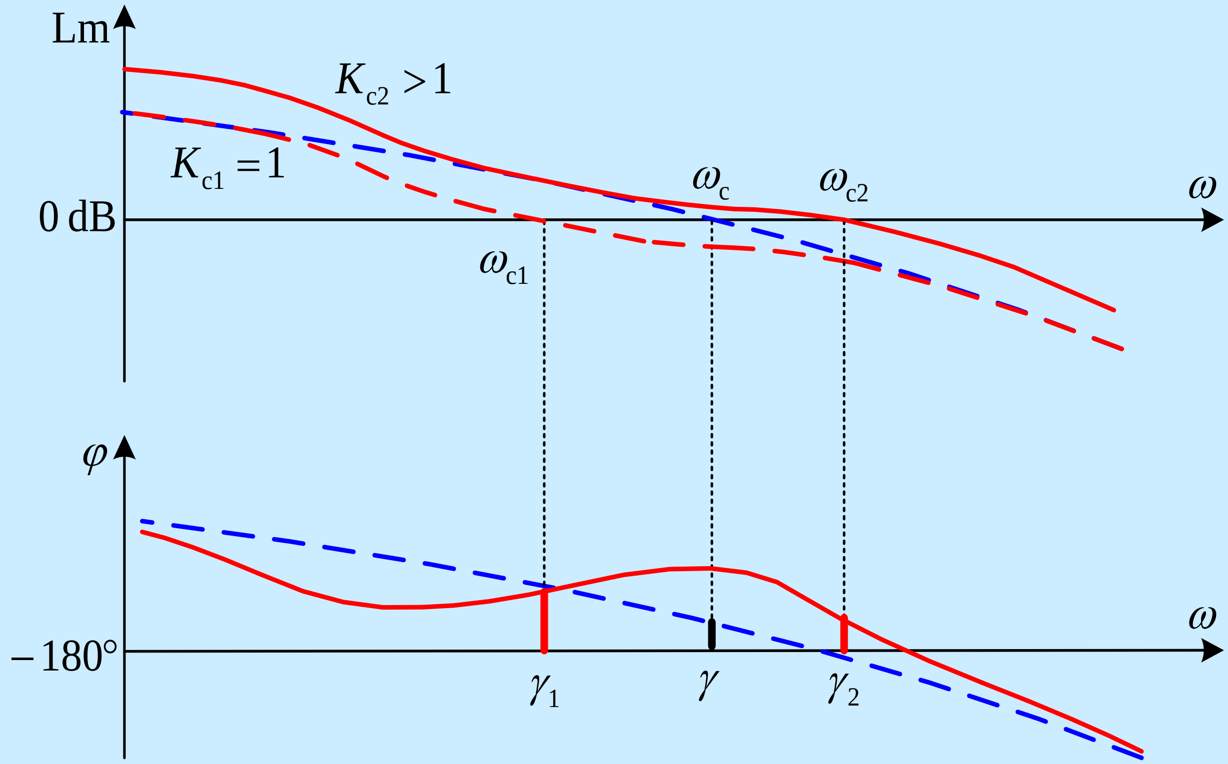
(6) 校正后的系统检验

$$G_c(j\omega) = K_c \frac{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1/\beta)(1+j\omega\beta T_2)}$$

6.4.4 基于Bode图的超前滞后校正

1. 图形解释

- $K_{c1} = 1$,
  $\omega_{c1}\downarrow$, $\gamma_1\uparrow$,
  $K_g\uparrow$,
  K_v 不变
- $K_{c2} > 1$,
  $\omega_{c2}\uparrow$, $\gamma_2\uparrow$,
  $K_v\uparrow$



2. 设计方法

(1) 方法A: 超前和滞后环节分开设计

- **选取** $\dfrac{1}{T_2} < \dfrac{\omega_c}{10}$ **使得** $\arg\left[\dfrac{j\omega_c + \dfrac{1}{T_2}}{j\omega_c + \dfrac{1}{\beta T_2}}\right] = -(3^\circ \sim 5^\circ)$

- **选取** T_1

  * $1/T_1$ **对消对象的极点**

  * **同超前校正的设计**

(2) 方法B: 经验选取 T_1, T_2 和 β

- **譬如,** $\beta=10$, $T_2 \geq T_1$, T_1 **按超前校正设计方法选取**

3. 示例

例 6.4.2 给定对象的传递函数如下(包含了控制器增益)

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

试设计串联校正使得校正后系统满足如下指标

$$\gamma \geq 40^{\circ} \qquad \omega_{\mathrm{c}}=20\ \mathrm{rad/s} \qquad K_{\mathrm{v}} \geq 100\ \mathrm{s}^{-1}$$

Solution:

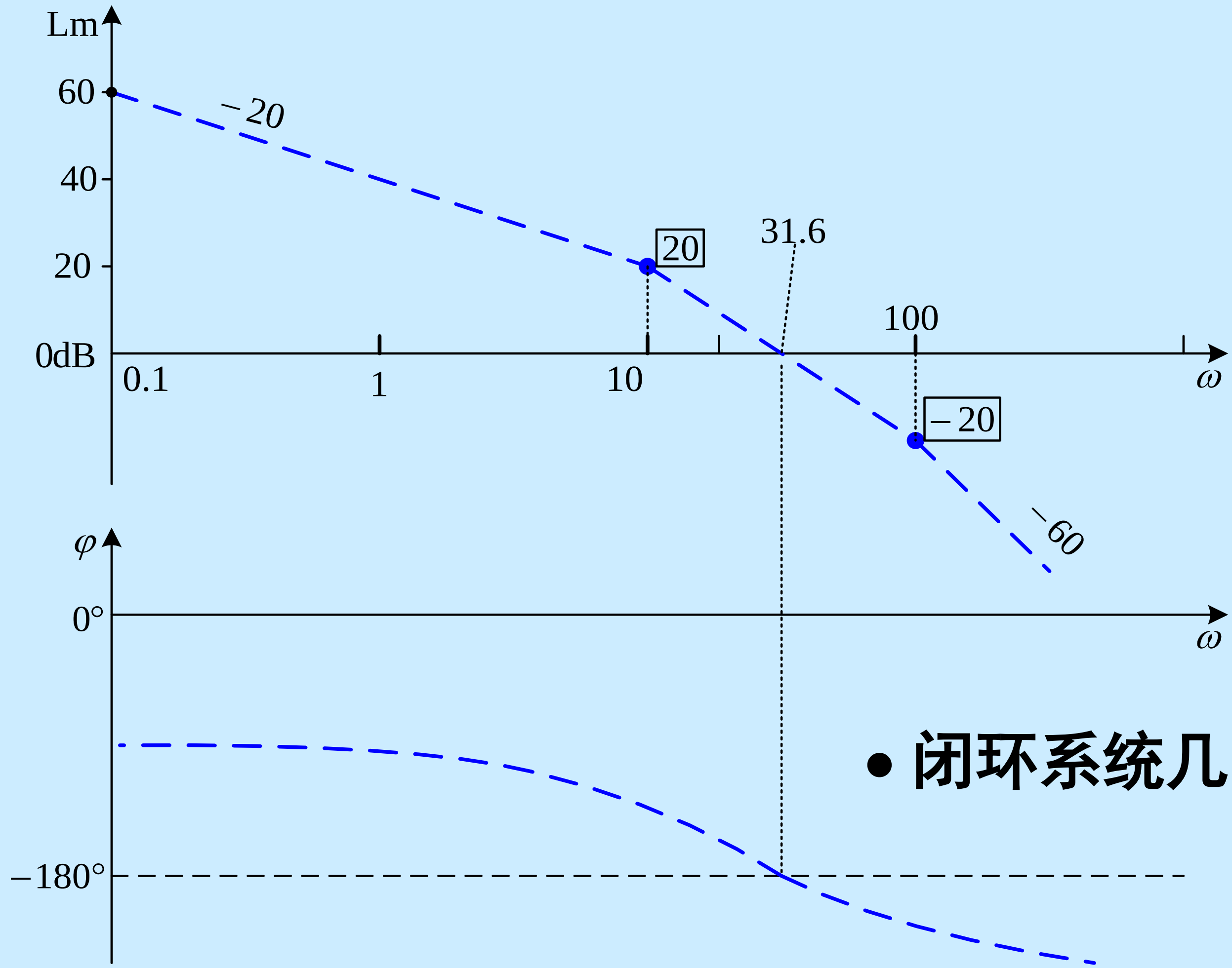
(i) 确定开环增益

$$K_{\mathrm{v}}=\lim_{s\to 0} s\,G_{\mathrm{p}}(s)=K=100$$

$$G_{\mathrm{p}}(s)=\frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

$$G_p(s)=\frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

(ii) 增益校正后的系统分析



$\omega'_{gc}=31.6\ \text{rad/s}$

$\gamma'=0°$

$\omega'_{pc}=31.6\ \text{rad/s}$

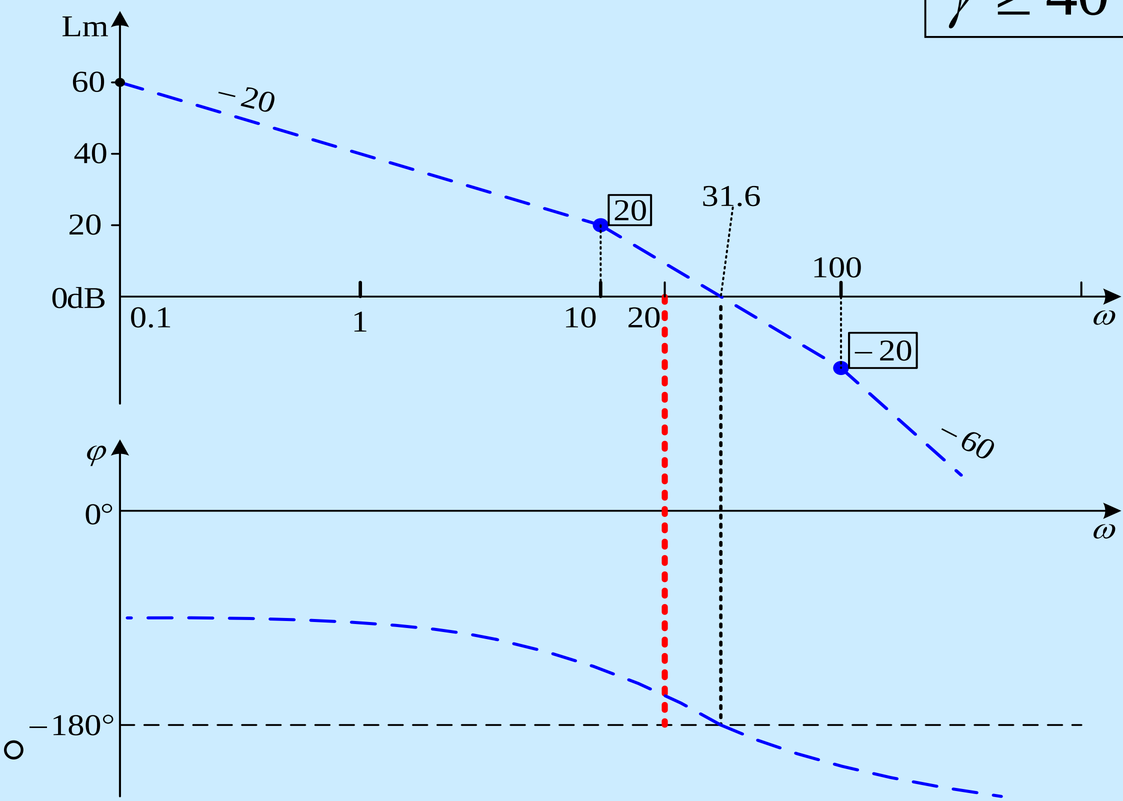
$K'_g=0.83$

- **闭环系统几乎不稳定**

- **思考: 是否可单独采用超前或滞后校正？**

$\omega_c = 20\ \text{rad/s}$

$\gamma \geq 40°$



- $\arg G(\mathrm{j}\,20) = -165°$
- **所需超前角** $\varphi = 25°$
- **取** $\varphi_m = 40°$

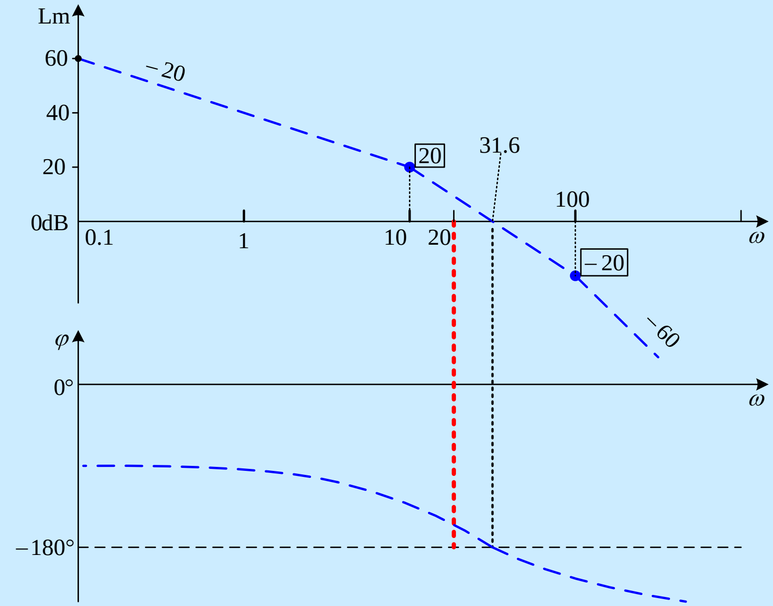
$$G_p(s)=\frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

(iii) 设计超前校正环节 $G_{c1}(s)$

$$\alpha=\frac{1+\sin 40°}{1-\sin 40°}=4.599$$

$$\frac{1}{T}=\sqrt{\alpha}\omega_c=\sqrt{4.599}\times 20=42.89$$

$$T=0.0233 \quad \alpha T=0.1072$$



- **控制器的超前校正环节**

$$G_{c1}(s)=\frac{1+0.107s}{1+0.023s}$$

- **选取超前校正环节如下**

$$G_{c1}(s)=\frac{1+0.1s}{1+0.023s}=4.348\frac{s+10}{s+43.48} \qquad \alpha=4.348$$

(控制器零点与对象极点接近)

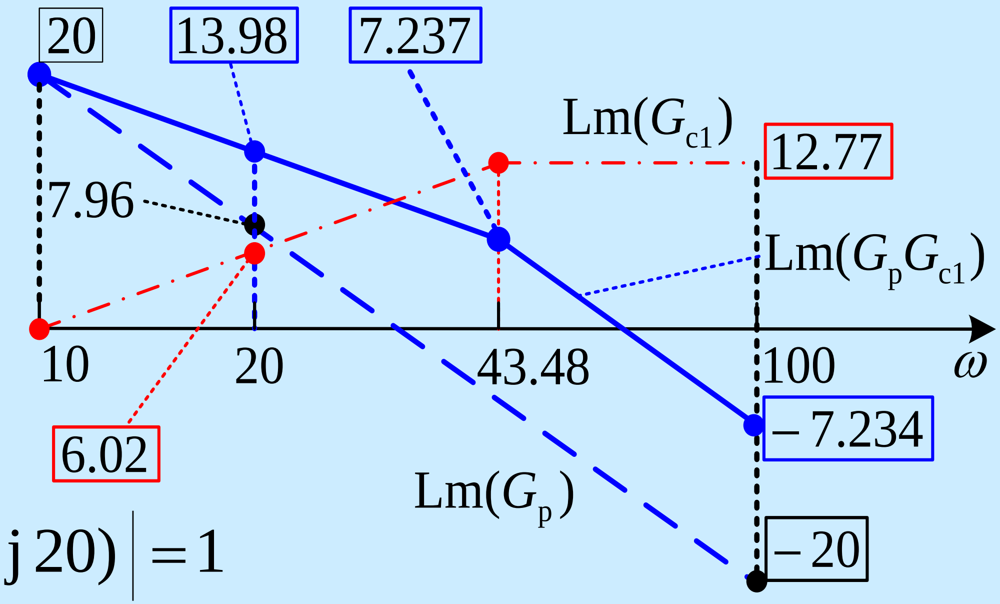
$\boxed{\alpha = 4.348}$

(iv) 设计滞后校正环节 $G_{c2}(s)$

- $G_p(\,j\omega)\;G_{c1}(\,j\omega)$的Bode图

* $\left|G_p(j20)\,G_{c1}(j20)\right|$

$= 7.96 + 6.02 \approx 14$ **dB**



* **对于** $\omega_c = 20\ \text{rad/s}$

$$\left|G_p(j20)\,G_{c1}(j20)\,G_{c2}(j20)\right| = 1$$

$$\left|G_{c2}(j20)\right| = -14\,\text{dB}$$

* $\left|G_{c2}(j20)\right| = -20\log\beta \qquad -20\log\beta = -14 \qquad \beta \approx 5$

注: $\alpha \neq \beta$

$\omega_c = 20$ rad/s

$\beta \approx 5$

- **令** $1/T_2 = \omega_c/5 = 4$, $1/\beta T_2 = 0.8$

$$T_2 = 0.25 \qquad \beta T_2 = 1.25$$

$$G_{c2}(s) = \frac{1+0.25s}{1+1.25s} = \frac{1}{5} \cdot \frac{s+4}{s+0.8}$$

- **控制器的传递函数如下**

$$G_c(s) = \frac{(1+0.1s)(1+0.25s)}{(1+0.023s)(1+1.25s)}$$

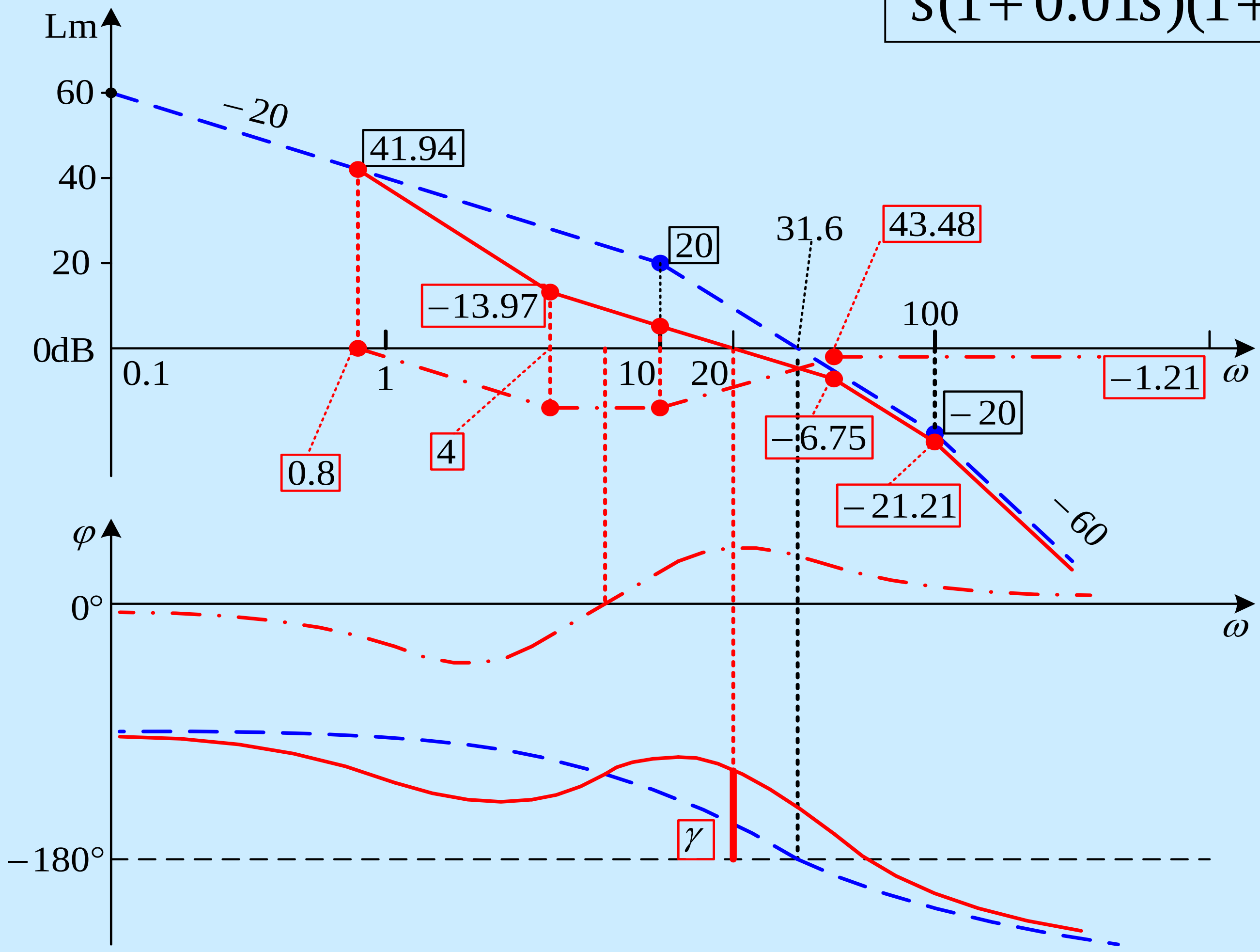
$$= 0.87\frac{(s+10)(s+4)}{(s+43.48)(s+0.8)} \qquad \alpha/\beta = 0.87$$

(v) 校正后的系统检验

$$G_p(s)G_c(s) = \frac{100(1+0.25s)}{s(1+0.01s)(1+0.023s)(1+1.25s)}$$

• Bode图

$$G_p(s)G_c(s) = \frac{100(1+0.25s)}{s(1+0.01s)(1+0.023s)(1+1.25s)}$$



$\omega_c = 20\ \text{rad/s}$
$\gamma \geq 40°$
$K_v \geq 100\ \text{s}^{-1}$

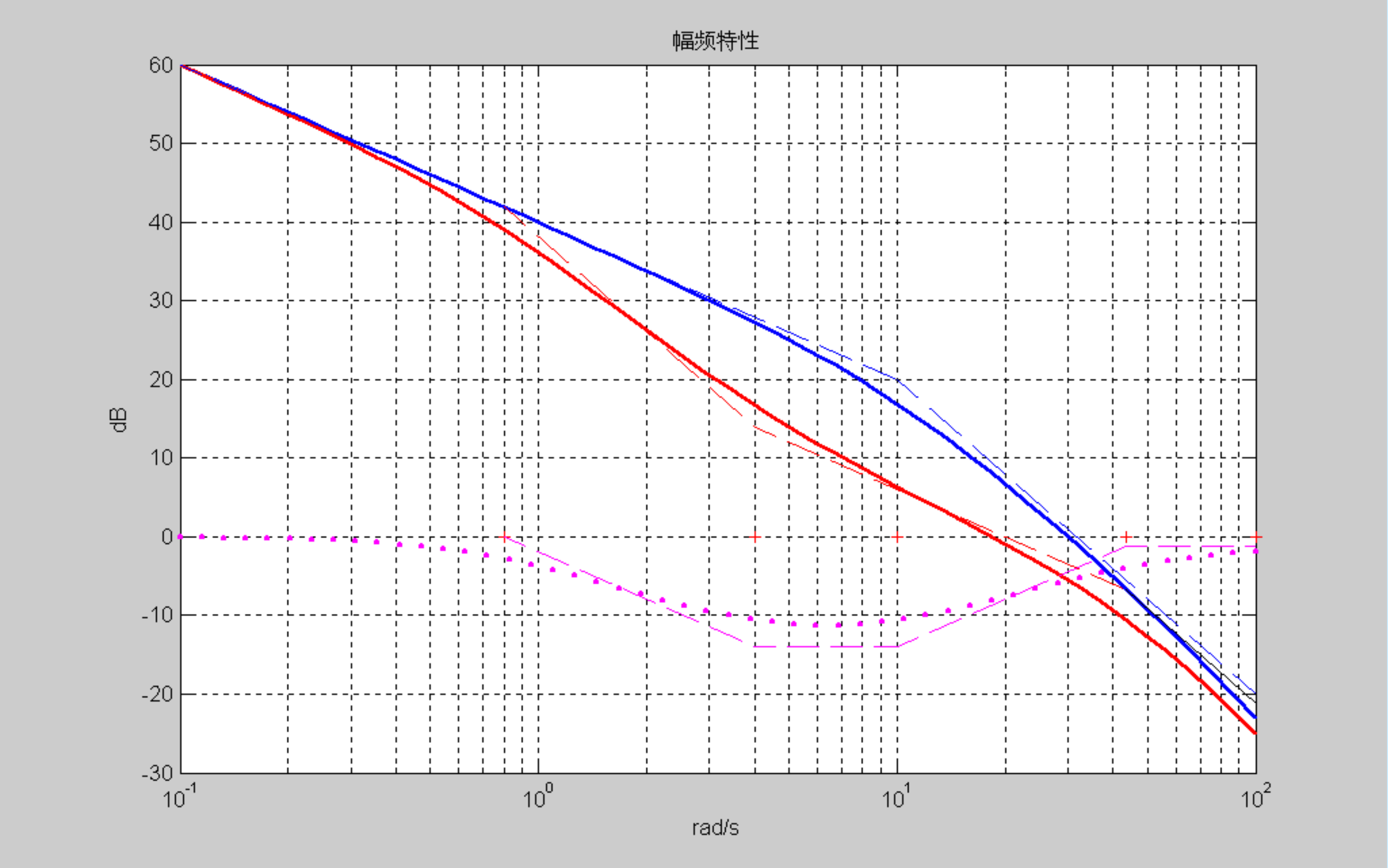
$\omega_{gc} = 20\ \text{rad/s}$
$\gamma = 44.97°$
$K_v = 100\ \text{s}^{-1}$

$\omega_{pc} = 62.4\ \text{rad/s}$
$K_g = 13.05\ \text{dB}$

(vi) 对数幅频响应

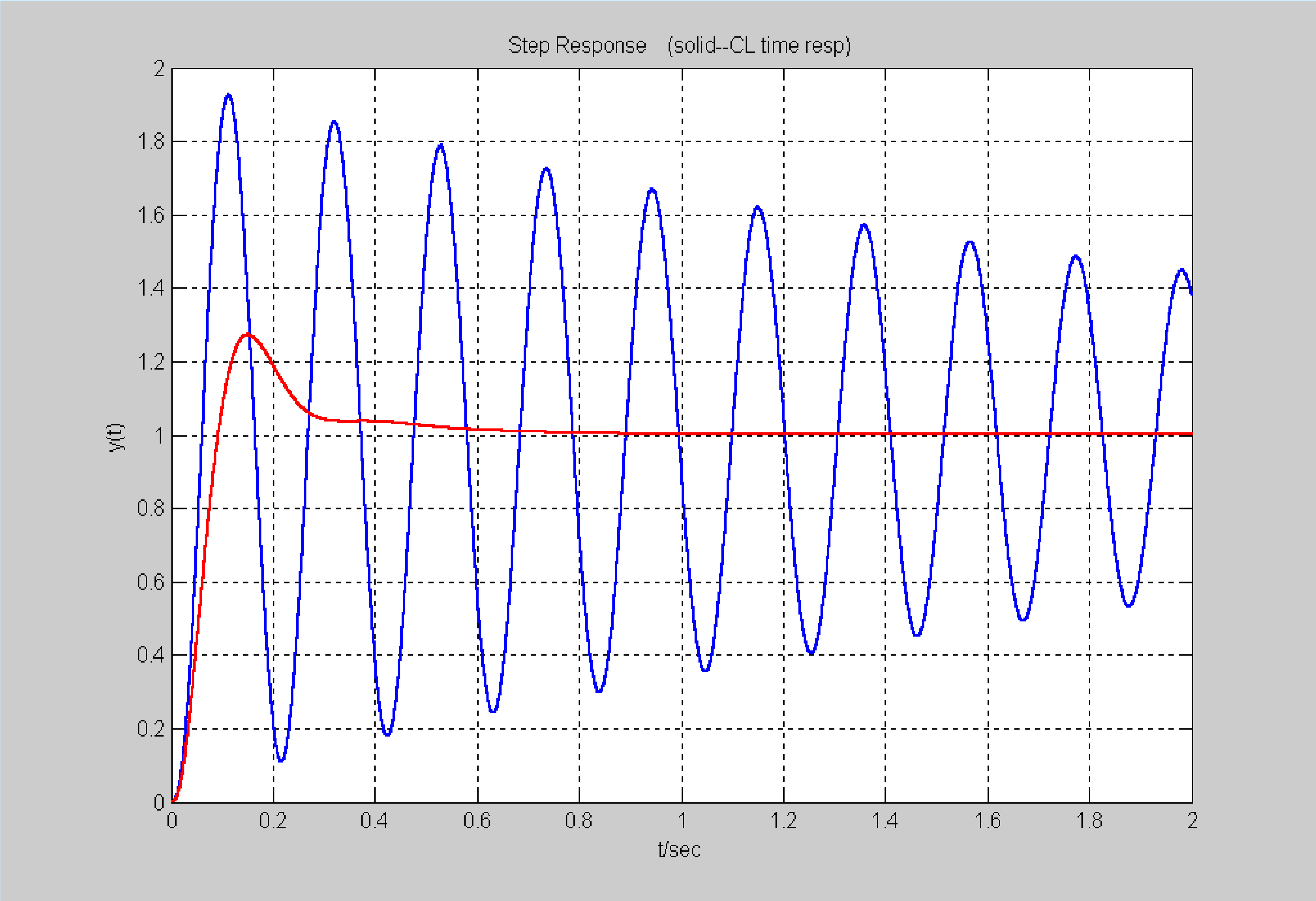
渐近线法 $\omega_{gc} = 20 \ \text{rad/s}$

$\gamma = 44.97°$



精确计算 $\omega_{gc} = 18.50 \ \text{rad/s}$ $\gamma = 46.75°$

(vii) 时间响应



Step Response (solid--CL time resp)
y(t)
t/sec
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

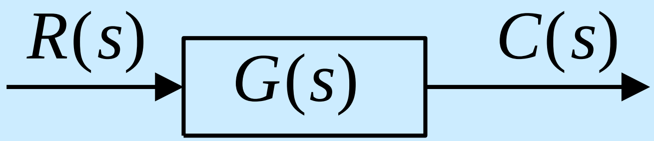
6.5 反馈校正

6.5.1 降低环境条件的影响

例 6.5.1 对于不同的系统结构, 比较输出随传递函数变化的变动

Solution:

(i) 开环对象

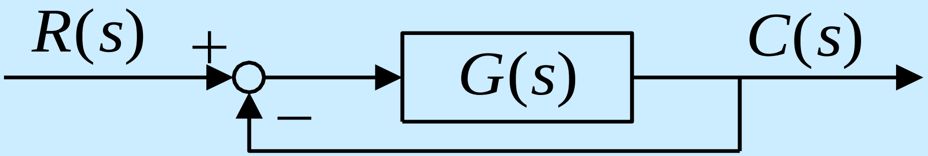


$$C(s) = G(s)R(s)$$

- **考虑微小变化** $\mathrm{d}G(s)$**:**

$$\mathrm{d}C(s) = \mathrm{d}G(s)\cdot R(s) = \frac{\mathrm{d}G(s)}{G(s)}\cdot G(s)R(s) = \frac{\mathrm{d}G(s)}{G(s)}\cdot C(s)$$

(ii) 单位反馈

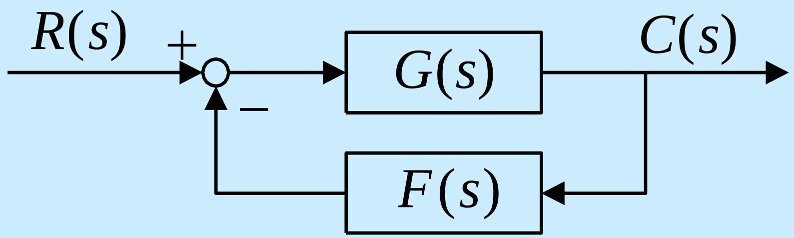


$$C(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot R(s)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}C(s) &= \frac{[\,1+G(s)\,]\mathrm{d}G(s)-G(s)\,\mathrm{d}G(s)}{[1+G(s)\,]^2}\cdot R(s) \\
&= \frac{\mathrm{d}G(s)}{[\,1+G(s)\,]^2}\cdot R(s) = \frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot\frac{\mathrm{d}G(s)}{G(s)}\cdot R(s) \\
&= \frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{\mathrm{d}G(s)}{G(s)}\cdot C(s)
\end{aligned}$$

- 影响降低 $\dfrac{1}{1+G(s)}$ 倍

(iii) 非单位反馈



$$C(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}\cdot R(s)$$

- 如果 $F(s)$ 不变

$$\mathrm{d}C(s)=\frac{[1+GF]\mathrm{d}G-GF\,\mathrm{d}G}{[1+GF]^2}\cdot R=\frac{\mathrm{d}G}{[1+GF]^2}\cdot R$$

$$=\frac{1}{1+GF}\cdot\frac{G}{1+GF}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{G}\cdot R=\frac{1}{1+G(s)F(s)}\cdot\frac{\mathrm{d}G(s)}{G(s)}\cdot C(s)$$

- 若设计使得 $|1+G(s)F(s)|>>1$

$\Rightarrow$ $\mathrm{d}G(s)$ 的影响将大大降低

6.5.2 简单的反馈可能取得良好的效果

例 6.5.2 针对如下对象设计不同的控制器

$$G(s) = \frac{K}{1+0.1s}$$

使得闭环阶跃响应的稳态输出$C(\infty) = 0.9$

Solution:

(i) 开环分析（终值定理）

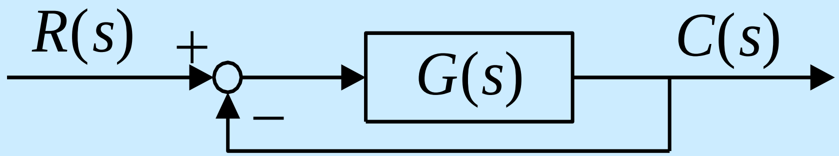
$$K = 0.9 \Rightarrow C(\infty) = 0.9$$

- **系统的时间常数** $T = 0.1$ **sec**

$$\boxed{G(s)=\frac{K}{1+0.1s}}$$

$$\boxed{T=0.1}$$

(ii) 单位反馈



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{1+K+0.1s}$$

$$C(s)=\frac{K}{1+K+0.1s}\cdot R(s)$$

$$K=9 \quad \Rightarrow \quad C(\infty)=0.9$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{9}{10+0.1s}}$$

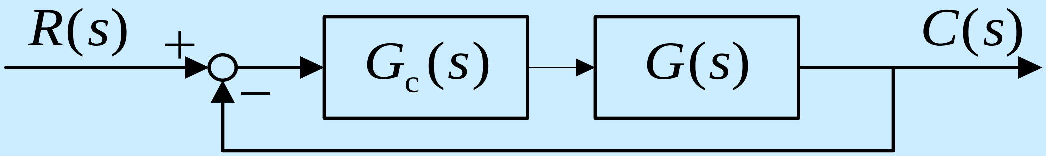
- **闭环系统的时间常数** $T=0.01$ **sec**

$$G(s)=\frac{K}{1+0.1s}$$

$$\boxed{T=0.1}$$

$$\boxed{\textbf{F/B}\ T=0.01}$$

(iii) 超前校正



令 $$G_c(s)=0.5\cdot\frac{1+0.1s}{1+0.05s}$$

$$G(s)G_c(s)=\frac{0.5K}{1+0.05s}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{0.5K}{1+0.5K+0.05s}$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{9}{10+0.05s}}$$

$$K=18 \quad\Rightarrow\quad C(\infty)=0.9$$

- **闭环系统的时间常数** $T=0.005$ **sec**

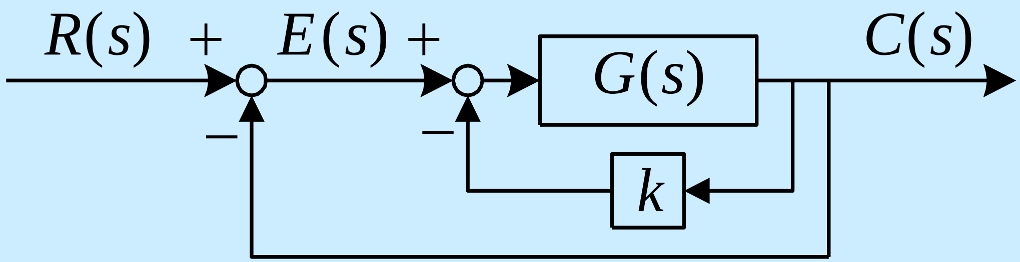
$$G(s)=\frac{K}{1+0.1s}$$

$T=0.1$

F/B $T=0.01$

Lead $T=0.005$

(iv) 反馈校正



$$\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{G(s)}{1+kG(s)}=\frac{K}{1+kK+0.1s}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{1+K+kK+0.1s}$$

要使 $C(\infty)=0.9$

$T=0.005$ **sec:**

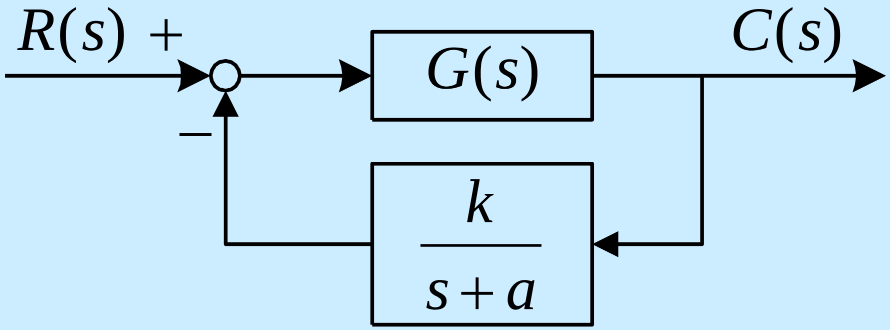
$$\frac{K}{1+K+Kk}=0.9\,,\quad \frac{0.1}{1+K+Kk}=0.005=\frac{1}{200}$$

$$K=18 \qquad k=0.05556$$

- **简单的反馈校正取得超前校正同样的效果**

$$\boxed{G(s)=\frac{K}{1+0.1s}}$$

(v) 反馈滞后校正



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{10K(s+a)}{s^2+(10+a)s+10(a+kK)}$$

要使 $C(\infty)=0.9$ **且** $T=0.005$ **sec**

$$\frac{aK}{a+kK}=0.9 \qquad 10(a+kK)=\frac{1}{T^2}=40000$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10K(s+a)}{s^2+(10+a)s+10(a+kK)}}$$

令 $\zeta = 1$，则

$$s^2+(10+a)s+10(a+kK) = s^2+2\frac{\zeta}{T}s+\frac{1}{T^2}$$

$$= s^2+400s+40000$$

$$\boxed{T = 0.005}$$

$$\boxed{\frac{aK}{a+kK} = 0.9}$$

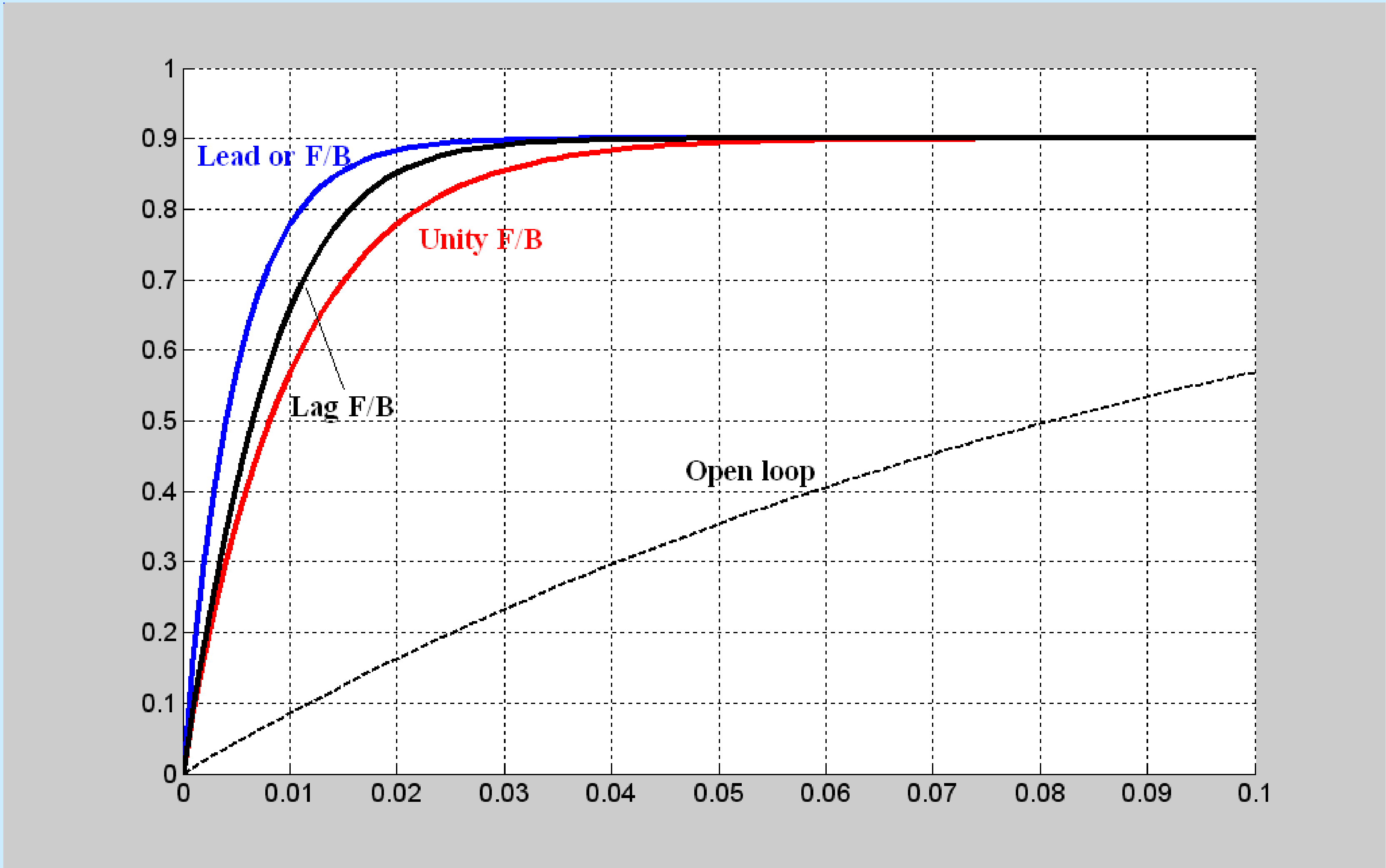
$$K = 9.23 \qquad k = 391.12 \qquad a = 390$$

- 滞后校正的传递函数如下

$$G_c(s) = \frac{k}{s+a} = \frac{391}{s+390} = \frac{1.00287}{1+0.002564s}$$

- 反馈滞后校正的效果类似串联超前校正

- **单位阶跃响应**



Lead or F/B
Unity F/B
Lag F/B
Open loop
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1

End of Chapter 6