智能机器人-动力学与控制

—运动学部分4—

逆运动学—数值方法

Newton-Raphon Method

数值求解非线性方程$g(\theta)=0$，假设θ_0是方程解的一个初始估计，在θ_0处对$g(\theta)$进行的泰勒展开：

$$g(\theta)=g\left(\theta_0\right)+\frac{\partial g}{\partial \theta}\left(\theta_0\right)\left(\theta-\theta_0\right)+h.o.t$$

只保留1阶项，并令方程$g(\theta)=0$，可以解得

$$\theta_1=\theta_0-\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\left(\theta_0\right)\right)^{-1} g\left(\theta_0\right)$$

使用θ_1作为解的新的估计，则可以得到一个数值迭代过程：

$$\theta_{k+1}=\theta_k-\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\left(\theta_k\right)\right)^{-1} g\left(\theta_k\right)$$

逆运动学—数值方法

逆运动学：已知正运动学表达式$X = F(q)$，求：$\boldsymbol{q = F^{-1}(X)}$

数值法的逆运动学：如果已知一个操作空间中的位姿H，通过迭代的方式求一个q_k，使得$\|H - F(q_k)\|$可以达到任意指定的精度ϵ，

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
q_1 & & X_1 & & H & & \Delta X_1 & & \Delta q_1 & & q_2 = q_1 + \Delta q_1 \\
q_2 & \xrightarrow{F} & X_2 & & H & \longrightarrow & \Delta X_2 & & \Delta q_2 & \longrightarrow & q_3 = q_2 + \Delta q_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
q_{k+1} & & X_{k+1} & & H & & \Delta X_{k+1} & & \Delta q_{k+1} & & q_{k+2} = q_{k+1} + \Delta q_{k+1}
\end{array}
$$

$$\Delta X \cong \frac{\partial F(q)}{\partial q^T}\Delta q = J(q)\Delta q$$

$$q_{k+1} = q_k + \Delta q_k \longleftarrow \Delta q \cong J^{-1}\Delta X$$

$$\Delta q \cong J^{\#}\Delta X$$

$$J \neq \frac{\partial F(q)}{\partial q^T}$$

$$\dot{X} \neq \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

逆运动学—数值方法

例如末端坐标系做如下微小运动：

$$Trans\left(d_x, d_y, d_z\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&dx\\0&1&0&dy\\0&0&1&dz\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad Trotx\left(d\theta_x\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-d\theta_x&0\\0&d\theta_x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Troty\left(d\theta_y\right)=\begin{bmatrix}1&0&d\theta_y&0\\0&1&0&0\\-d\theta_y&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad Trotz\left(d\theta_z\right)=\begin{bmatrix}1&-d\theta_z&0&0\\d\theta_z&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Trans\left(d_x, d_y, d_z\right)Trotx\left(d\theta_x\right)Troty\left(d\theta_y\right)Trotz\left(d\theta_z\right)=\begin{bmatrix}1&-d\theta_z&d\theta_y&dx\\d\theta_z&1&-d\theta_x&dy\\-d\theta_y&d\theta_x&1&dz\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

这是基坐标系变换到末端坐标系后，再做的微小运动的部分，所以最终的末端应该为：

$$\boldsymbol{T_k}\left[Trans\left(d_x, d_y, d_z\right)Trotx\left(d\theta_x\right)Troty\left(d\theta_y\right)Trotz\left(d\theta_z\right)\right]\triangleq \boldsymbol{T_k}+\Delta\boldsymbol{T_k}\to\boldsymbol{H}$$

逆运动学—数值方法

由此，可得到运算关系： $\Delta \boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{T}_k \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_z & d\theta_y & dx \\ d\theta_z & 0 & -d\theta_x & dy \\ -d\theta_y & d\theta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

又有：$\Delta \boldsymbol{T}_k \approx \boldsymbol{H} - \boldsymbol{T}_k$

因此可得到方程：

$$\begin{bmatrix} 0 & -d\theta_z & d\theta_y & dx \\ d\theta_z & 0 & -d\theta_x & dy \\ -d\theta_y & d\theta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{T}_k^{-1}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{T}_k)$$

从中可已得出：$d^e X_k \triangleq \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{bmatrix}$

这样就可以通过$d^e X_k$确定$\Delta \boldsymbol{q}_k$，从而实现Newton-Raphon迭代。

逆运动学—数值方法

因为：$\begin{bmatrix} {}^e\boldsymbol{v} \\ {}^e\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = {}^e\boldsymbol{J}_G(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$　　所以：$d\boldsymbol{q} \triangleq \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix}$

又：$d^e\boldsymbol{X} = {}^e\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q}) \cdot d\boldsymbol{q} \quad \rightarrow d\boldsymbol{q} = {}^e\boldsymbol{J}_A^{\#}(\boldsymbol{q}) \cdot d^e\boldsymbol{X}$

如果忽略$\boldsymbol{J}_A$和$\boldsymbol{J}_G$的差别，可以认为$\boldsymbol{J}_G = \boldsymbol{J}_A$

则最终的数值迭代公式为：

$$\boldsymbol{q}_{k+1} = \boldsymbol{q}_k + d\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{q}_k + {}^e\boldsymbol{J}_G^{\#}(\boldsymbol{q}_k) \cdot d^e\boldsymbol{X}$$