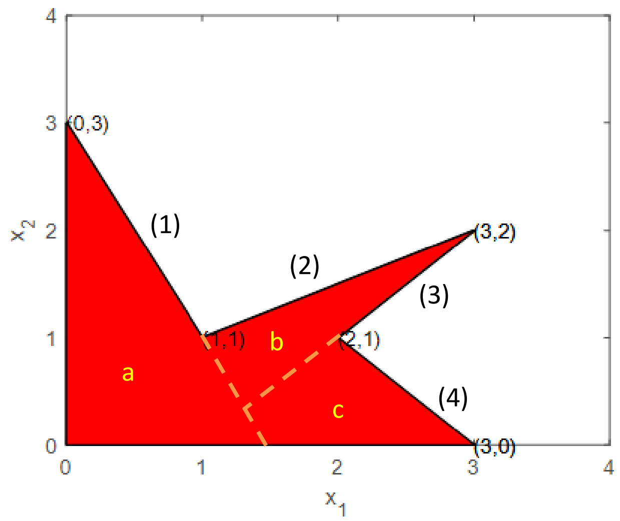
运筹学第六次作业参考答案（20230329）

1. 将 $\max_{x\in\Omega} x_1 + x_2$ 表示成混合整数线性规划，其中集合Ω为下图红色所示区域。



解：

四条直线方程为

$$2x_1 + x_2 = 3 \quad (1)$$

$$-x_1 + 2x_2 = 1 \quad (2)$$

$$x_1 - x_2 = 1 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 = 3 \quad (4)$$

设$y_i \in \{0,1\}, i = 1,2,3$，$M$为充分大的正数。a, b, c 三个子区域取并集即可组成红色区域。由于并集允许有重叠的区域，所以上图虚线区域实际是下面描述的 a, b, c 区域的子集。

区域 a:

$$2x_1 + x_2 \le 3 + y_1 M$$

区域 b:

$$-x_1 + 2x_2 \le 1 + y_2 M$$

$$x_1 - x_2 \le 1 + y_2 M$$

区域 c:

$$-x_1 + x_2 \le -1 + y_3 M$$

$$x_1 + x_2 \le 3 + y_3 M$$

红色区域内任一点只有一个区域约束起作用，故$y_1 + y_2 + y_3 = 2$，综上得到最终混合整数规划模型为

$$\max \ x_1 + x_2$$

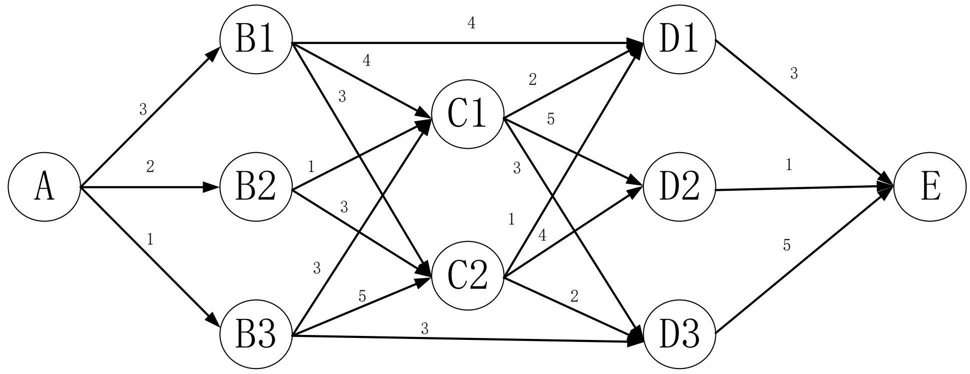
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \le 3 + y_1 M$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 1 + y_2 M$$

$$x_1 - x_2 \le 1 + y_2 M$$
$$-x_1 + x_2 \le -1 + y_3 M$$
$$x_1 + x_2 \le 3 + y_3 M$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$
$$y_i \in \{0,1\}, i = 1,2,3$$

注：本题的表示方法不唯一，只要合理划分区域即可。

2. 求下图所示的从 A 到 E 的最短路线及其长度。

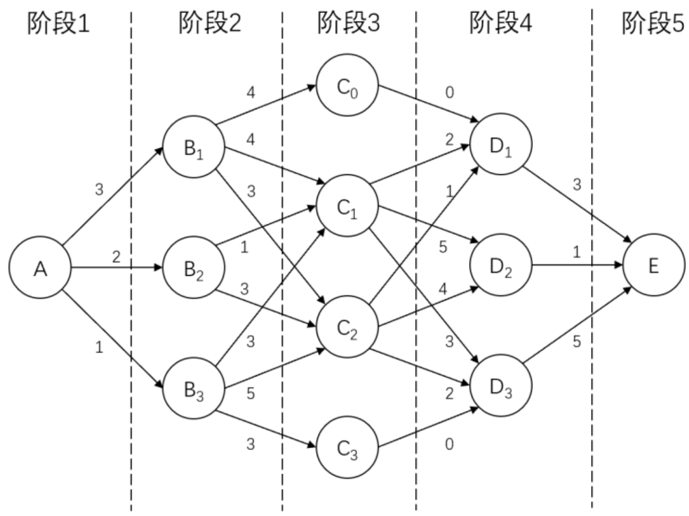


（1）将原问题表示为多阶段决策问题。

（2）分别用逆推法和顺推法求解（1）中多阶段决策问题。

解：

(1) 添加中间状态C_0, C_3，并划分阶段如下



状态集：$S_k = \{A\}, \{B_1, B_2, B_3\}, \dots, \{E\},\ k = 1,2,\dots,5$

决策集：$U_k(s_k) = \{B_1, B_2, B_3\}, \{C_0, C_1, C_2\}, \dots, \{E\},\ \forall s_k \in S_k, k = 1,2,\dots,4$

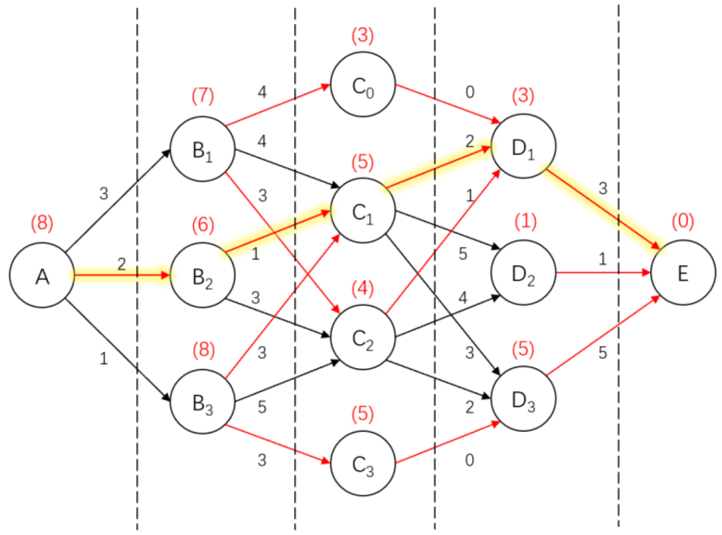
状态转移函数：$T_k(s_k,u_k)=u_k$，$\forall s_k\in S_k,u_k\in U_k(s_k),k=1,2,\dots,4$

阶段指标函数：$d_k(s_k,u_k)$，$\forall s_k\in S_k,u_k\in U_k(s_k)$，$k=1,2,\dots,4$

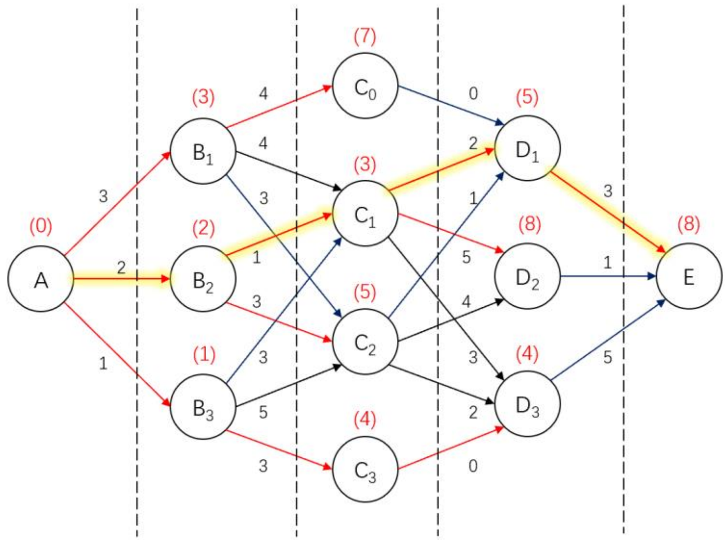
求策略$p=\{u_1,\dots,u_4\}$，使得下述过程指标函数达到最小

$$d_1(s_1,u_1)+\sum_{k=2}^{4}d_k(T_{k-1}(s_{k-1},u_{k-1}),u_k)$$

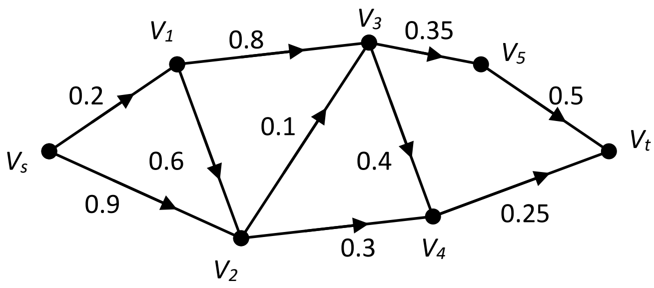
(2) 逆推法：从 E 开始向 A 分阶段求解，得到一条最短路径为 $A\to B_2\to C_1\to D_1\to E$，长度为 8.



顺推法：从 A 开始向 E 分阶段求解，得到同样一条最短路径为 $A\to B_2\to C_1\to D_1\to E$，长度为 8.



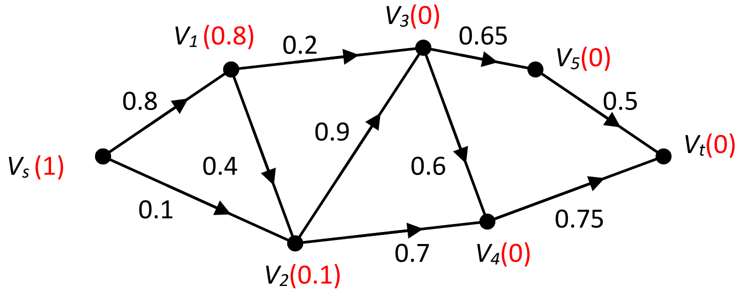
3. 开车从V_s到V_t的网络如下图所示，其中各边数字表示在相应路段堵车的概率。假定各路段是否堵车互相独立。请求出堵车概率最小的路线及其概率值。（提示：堵车概率最小等价于不堵车概率最大。）

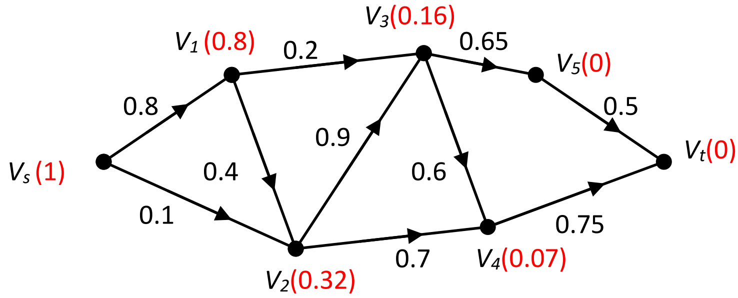


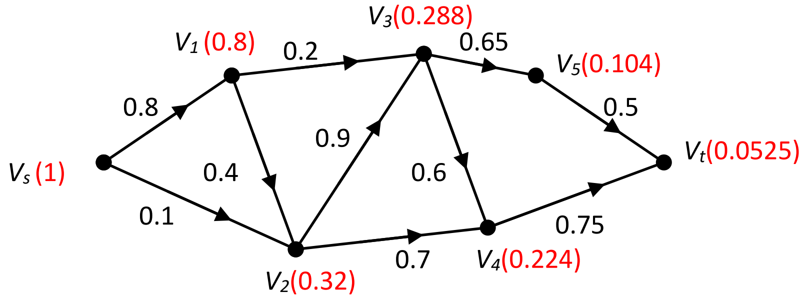
解：

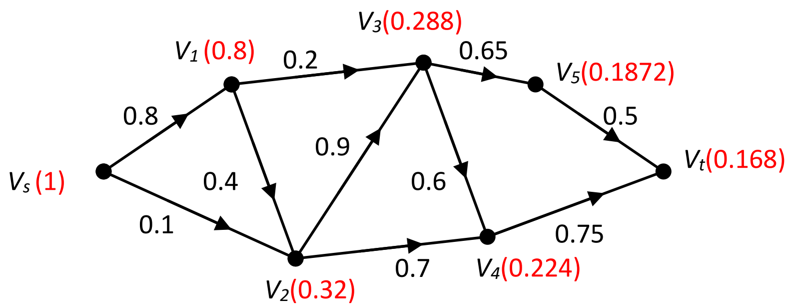
将原图各边权重转换为不堵车的概率。希望不堵车概率最大，即求概率乘积最大的路径，该问题仍然满足最优性原理。

本题可以转换为多阶段决策问题，使用顺推法或逆推法求解。在此采用值迭代法求解，每次计算到V_s不堵车的最大概率。括号内表示当前节点到V_s最大的不堵车概率，初始值为0.

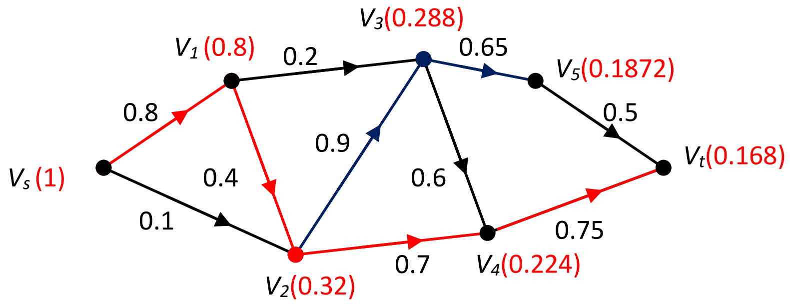








迭代终止，根据每个节点的最优值得到



堵车概率最小的路径为 $V_s \to V_1 \to V_2 \to V_4 \to V_t$，概率值为 1 - 0.168 = 0.832

4. 用动态规划方法求解下列问题

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & z = 8x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^3 \\
\text{s.t.}\ \ & 2x_1 + x_2 + 10x_3 = b \\
& x_i \geq 0, i = 1,2,3 \\
& b\text{为正数}
\end{aligned}
$$

解：

建立序贯决策模型。

阶段：三个决策阶段，按x_1, x_2, x_3的顺序

状态：k阶段x_k可取的最大值$s_k, k = 1,2,3,4$

决策：k阶段x_k实际取值，$k = 1,2,3$

状态集：$S_1 = \{b\}, S_k = [0, b], k = 2,3,4$

允许决策集：$2x_1 \leq s_1$，$x_2 \leq s_2$，$10x_3 \leq s_3$

阶段指标：$d_1(s,x) = 8x_1^2, d_2(s,x) = 4x_2^2, d_3(s,x) = x_3^3$

状态转移函数：$s_1 = b$，$s_2 = s_1 - 2x_1$，$s_3 = s_2 - x_2$，$s_4 = s_3 - 10x_3$

设$f_k(s)$表示k及以后阶段的总收益，采用逆推法。

$$f_4(s) = 0, \qquad \forall s \in S_4$$

$$\forall s \in S_3\text{：}\ f_3(s) = \max_{0 \leq 10x_3 \leq s} x_3^3 = \left(\frac{s}{x_3}\right)^3$$

$$\forall s \in S_2:\ f_2(s) = \max_{0 \le x_2 \le s} 4x_2^2 + \left(\frac{s - x_2}{10}\right)^3 = \max\left\{\frac{s^3}{1000}, 4s^2\right\}$$

$$\forall s \in S_1 = \{b\}:\ f_1(s) = \max_{0 \le 2x_1 \le s}\left(8x_1^2 + \max\left\{\frac{(s-2x_1)^3}{1000}, 4(s-2x_1)^2\right\}\right)$$

$$= \max_{0 \le 2x_1 \le b}\left(8x_1^2 + \max\left\{\frac{(b-2x_1)^3}{1000}, 4(b-2x_1)^2\right\}\right)$$

$$= \max\left\{2b^2, \frac{b^3}{1000}, 4b^2\right\}$$

$$= \max\left\{4b^2, \frac{b^3}{1000}\right\}$$

当$4b^2 \ge b^3/1000$，即$b \le 4000$时，$f_1(s) = 4b^2$，在$x_1 = x_3 = 0, x_2 = b$时取得；

当$b > 4000$时，$f_1(s) = \frac{b^3}{1000}$。在$x_1 = x_2 = 0, x_3 = \frac{b}{10}$时取得。

综上，得到最优值和最优解为

$$z_{\max} = \begin{cases} 4b^2, & 0 < b \le 4000\ \ (x_1 = 0, x_2 = b, x_3 = 0) \\ \dfrac{b^3}{1000}, & b > 4000\ \ \left(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \dfrac{b}{10}\right) \end{cases}$$

5. 考虑一个总期限为$N+1$年的设备更新问题。已知一台新设备的价值为C元，其T年末的残值为

$$S(T) = \begin{cases} N - T, & if\ \ N \ge T \\ 0\ \ , & otherwise \end{cases}$$

又对有T年役龄的该设备，年年创收益为

$$P(T) = \begin{cases} N^2 - T^2, & if\ \ N \ge T \\ 0\ \ , & otherwise \end{cases}$$

要求：

a） 对此问题建立动态规划模型。

b） 当$N=3$，$C=10$时求数值解。

解：

a) 建立序贯决策模型，一共有N个决策阶段。

状态：第k年末设备的役龄s_k , $k = 1,2,\dots,N+1$，其中$s_1 = 1$

决策：第k年末是否更新设备x_k , $k = 1,2,\dots,N$

状态集：$S_1 = \{1\}, S_2 = \{1,2\}, \dots, S_{N+1} = \{1,2,\dots,N+1\}$

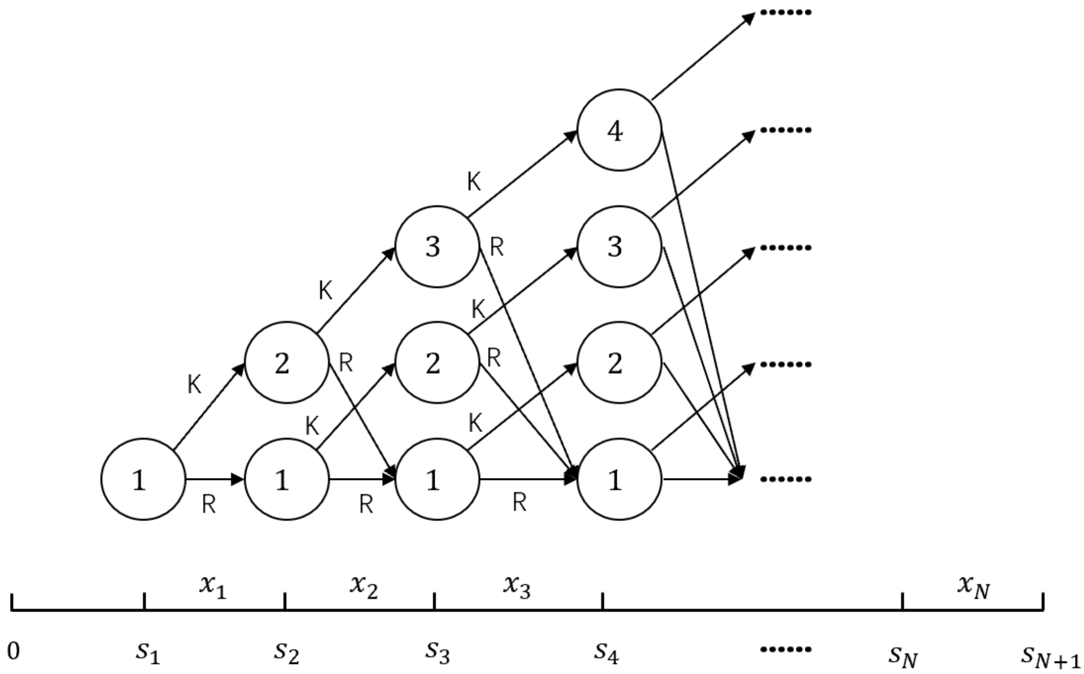
允许决策集：$U = \{R\text{: 更新Renewal}，K\text{: 保留Keep}\}$

状态转移函数：$s_{k+1} = T_k(s_k, x_k) = \begin{cases} s_k + 1, & x_k = K \\ 1\ , & x_k = R \end{cases}$, $k = 1,2,\dots,N$

阶段指标函数：$d_k(s_k, x_k) = \begin{cases} P(s_k) & , x_k = K \\ P(0) + S(s_k) - C & , x_k = R \end{cases}$ ，$k = 1,2,\dots,N$

求策略$\boldsymbol{p} = \{x_1, \dots, x_N\}$，使得下述过程指标函数达到最小

$$\sum_{k=1}^{N} d_k(s_k, x_k)$$



b) 方法一：用逆推法

$$f_4(s_4) = 0$$

$$\forall s_3 \in S_3 = \{1,2,3\}, \qquad f_3(s_3) = \max_{x_3 \in U} d_3(s_3, x_3)$$

$$= \max_{x_3 \in U} \{P(s_3), P(0) + S(s_3) - C\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max_{x_3 \in U} \{9 - s_3^2, 2 - s_3\} \\
&= 9 - s_3^2
\end{aligned}
$$

$$\forall s_2 \in S_2 = \{1,2\}, \qquad f_2(s_2) = \max_{x_2 \in U} d_2(s_2, x_2) + f_3\big(T_2(s_2, x_2)\big)$$

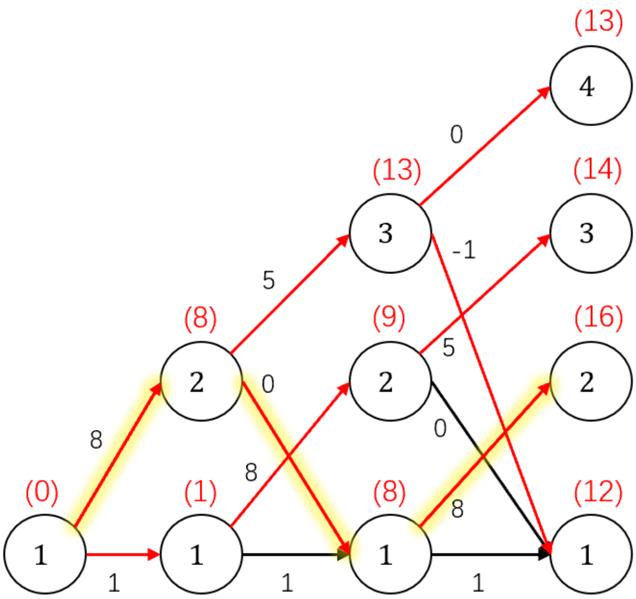
$$
\begin{aligned}
&= \max_{x_2 \in U} \{9 - s_2^2 + 9 - (s_2+1)^2, 2 - s_2 + 9 - 1^2\} \\
&= \max_{x_2 \in U} \{17 - 2s_2^2 - 2s_2, 10 - s_2\} \\
&= \begin{cases} 13, & s_2 = 1\ (x_2 = K) \\ 8, & s_2 = 2\ (x_2 = R) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\forall s_1 \in S_1 = \{1\}, \qquad f_1(s_1) = \max_{x_1 \in U} d_1(s_1, x_1) + f_2\big(T_1(s_1, x_1)\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \max_{x_1 \in U} \{9 - s_1^2 + 8, 2 - s_1 + 13\} \\
&= 16
\end{aligned}
$$

得到最优策略为$\boldsymbol{p}^* = \{K, R, K\}$，即第1年末不更新，第2年末更新，第3年末不更新，此时最大收益为16。

方法二：用顺推法，可以直接在图上进行操作，边上的数值表示该边带来的利润，节点括号内数值表示当前状态最大利润。

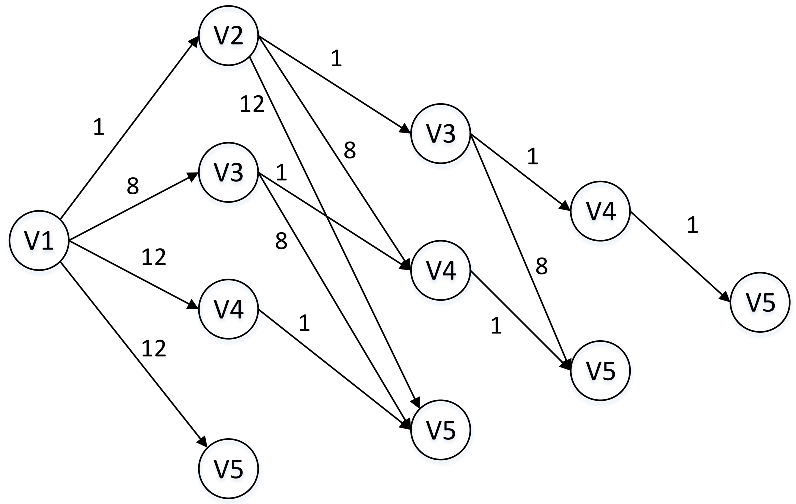


由图可知，最大收益为16，此时最优决策为第1年末不更新，第2年末更新，第3年末不更新。

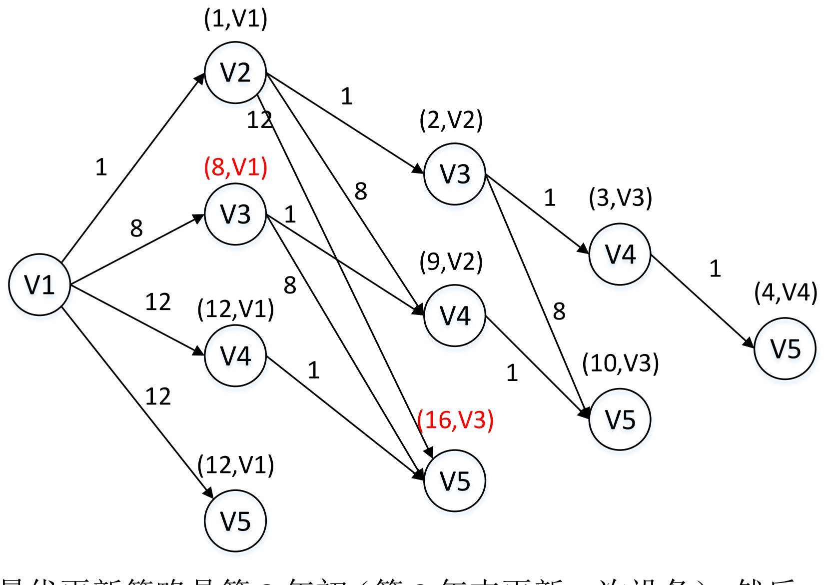
方法三（另一种建模方式）：

如下图所示，节点$V_1, \ldots, V_5$分别表示第k年初时刻，边$V_i \to V_j$表示设备从第i年初使用到第j年初（第$j-1$年末），并在第j年初更新了设备。边上的数值表示该

边带来的利润。

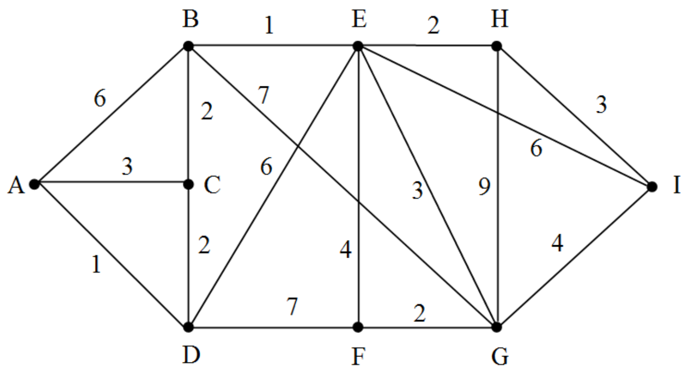


采用顺推法，每个节点上的序对表示从 V1 出发到该节点的最大代价以及最优上一节点，则：



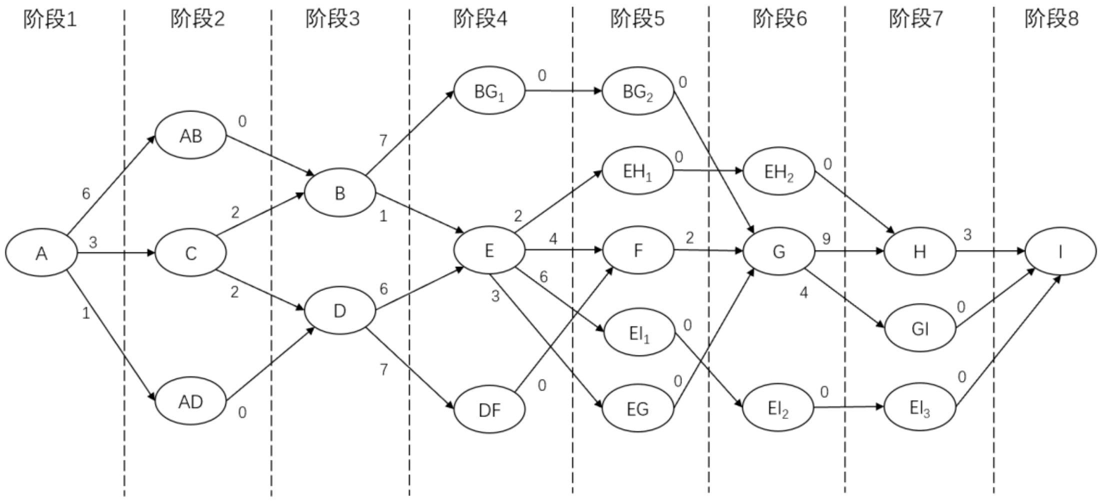
可知最优更新策略是第 3 年初（第 2 年末更新一次设备），然后一直用到第 5 年初。最大利润为 16 元。

6. （附加题）对于如下网络，在求解从 A 到 I 的最短路问题时，标准做法是采用值迭代或策略迭代法。现试问能否将网络等价变形之后转换为多阶段决策问题，不使用值迭代或策略迭代法进行求解，请给出你的过程与结果。

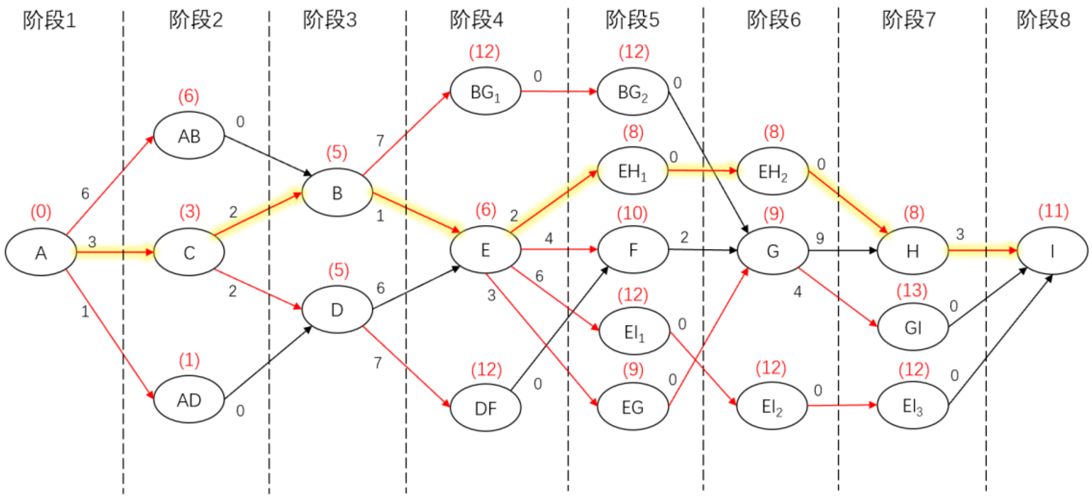


解：

添加中间状态，并划分阶段。



使用顺推法求解得到最短路径为 $A \to C \to B \to E \to H \to I$，长度为 11.



注：本题网络的变形方法不唯一。