运筹学第四次作业参考答案（20230315）

1. 写出下面线性规划的对偶规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 2 \\
& 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \\
& x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 5 \\
& x_1, x_2 \ge 0, x_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

解：

先将原问题转换为标准形式

$$
\begin{aligned}
-\max\ & -x_1 - 2x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + 4(x_3^+ - x_3^-) - x_4 = 2 \\
& 2x_1 + x_2 + 6(x_3^+ - x_3^-) = 3 \\
& x_1 + 3x_2 + 5(x_3^+ - x_3^-) + x_5 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

得到标准形式下的对偶问题

$$
\begin{aligned}
-\min\ & 2\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_2 + 5\tilde{y}_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2\tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \ge -1 \\
& 3\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + 3\tilde{y}_3 \ge -2 \\
& 4\tilde{y}_1 + 6\tilde{y}_2 + 5\tilde{y}_3 \ge -4 \\
& -4\tilde{y}_1 - 6\tilde{y}_2 - 5\tilde{y}_3 \ge 4 \\
& -\tilde{y}_1 \ge 0 \\
& \tilde{y}_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

将$-\tilde{y}_1, -\tilde{y}_2, \tilde{y}_3$分别用$y_1, y_2, y_3$替代，化简得到原问题的对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2y_1 + 3y_2 - 5y_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2y_1 + 2y_2 - y_3 \le 1 \\
& 3y_1 + y_2 - 3y_3 \le 2 \\
& 4y_1 + 6y_2 - 5y_3 = 4 \\
& y_1, y_3 \ge 0, y_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

2. 把线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 5 \\
& \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

记为 P，

(1) 用单纯形算法解 P；
(2) 写出 P 的对偶 D；

(3) 写出 P 的互补松紧条件，并利用它们解对偶 D。通过计算 P 和 D 的最优值，检查你的答案。

解：

(1) 先转换为标准形式

$$
\begin{aligned}
& -\max\ -x_1 - x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 5 \\
& \frac{1}{2}x_2 + x_3 \qquad = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

以x_3, x_4为初始可行基，画出单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_4	1	2	0	1	5
x_3	0	1/2	1	0	3
	-1	1/2	0	0	z+3

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_2	1/2	1	0	1/2	5/2
x_3	-1/4	0	1	-1/4	7/4
	-5/4	0	0	-1/4	z+7/4

得到最优解与最优值为

$$x^* = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, 0\right)^\top, z^* = -\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

(2) 对偶问题为

$$
\begin{aligned}
& \max\ -5y_1 + 3y_2 \\
\text{s.t.}\quad & -y_1 \leq 1 \\
& -2y_1 + \frac{1}{2}y_2 \leq 0 \\
& y_2 \leq 1 \\
& y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(3) 问题 P 的最优解$x_2, x_3 \neq 0$，则在 D 中有

$$
\begin{aligned}
-2y_1 + \frac{1}{2}y_2 &= 0 \\
y_2 &= 1
\end{aligned}
$$

解得$y^* = (1/4, 1)^\top$，此时 D 的最优值为$-5 \times 1/4 + 3 = 7/4$，与 P 的最优值相同。

3. 给定线性规划问题：

$$\begin{aligned}\min\ & 5x_1 + 21x_3 \\ \text{s.t.}\ & x_1 - x_2 + 6x_3 \ge b_1 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ & x_j \ge 0,\ \ j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

其中b_1是某一个正数，已知这个问题的一个最优解为$(0.5,\ 0,\ 0.25)^{\top}$。

(1) 写出对偶问题;

(2) 求对偶问题的最优解.

解:

(1) 对偶问题为

$$\begin{cases}\max & b_1y_1 + y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 + y_2 \le 5 \\ & -y_1 + y_2 \le 0 \\ & 6y_1 + 2y_2 \le 21 \\ & y_1, y_2 \ge 0\end{cases}$$

(2) 原问题最优解中$x_1, x_3 \ne 0$，根据互补松紧性条件有

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 5 \\ 6y_1 + 2y_2 = 21 \end{cases}$$

解得$y_1 = \frac{11}{4}, y_2 = \frac{9}{4}$，再根据最优目标值相同有

$$5 \times \frac{1}{2} + 21 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{4} b_1 + \frac{9}{4}$$

得$b_1 = 2$，因此对偶问题的最优解及最优值为

$$y^* = \left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)^{\top}, z^* = \frac{31}{4}$$

4. 已知线性规划问题 A 和 B 如下

问题 A

$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	影子价格
$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1$	y_1
$\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j = b_2$	y_2
$\sum_{j=1}^{n} a_{3j} x_j = b_3$	y_3
$x_j \ge 0, j = 1,2, \dots, n$	

问题 B

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{影子价格}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} k_1 a_{1j} x_j = k_1 b_1 \qquad \hat{y}_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} k_2 a_{2j} x_j = k_2 b_2 \qquad \hat{y}_2$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{3j} + k_3 a_{1j}\right) x_j = b_3 + k_3 b_1 \qquad \hat{y}_3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n$$

求y_i与$\hat{y}_i (i = 1,2,3)$的关系

解:

问题 A 的对偶问题为

$$\min\ b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$$
$$\text{s.t. } a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + a_{3j} y_3 \geq c_j, j = 1,2,\dots,n$$

问题 B 的对偶问题为

$$\min\ k_1 b_1 \hat{y}_1 + k_2 b_2 \hat{y}_2 + (b_3 + k_3 b_1) \hat{y}_3$$
$$\text{s.t. } k_1 a_{1j} \hat{y}_1 + k_2 a_{2j} \hat{y}_2 + (a_{3j} + k_3 a_{1j}) \hat{y}_3 \geq c_j, j = 1,2,\dots,n$$

整理得

$$\min\ (k_1 \hat{y}_1 + k_3 \hat{y}_3) b_1 + k_2 \hat{y}_2 b_2 + \hat{y}_3 b_3$$
$$\text{s.t. } (k_1 \hat{y}_1 + k_3 \hat{y}_3) a_{1j} + k_2 \hat{y}_2 a_{2j} + \hat{y}_3 a_{3j} \geq c_j, j = 1,2,\dots,n$$

若$(y_1, y_2, y_3)^\top$为问题 A 对偶问题的最优解，那么问题 B 对偶问题的最优解应满足

$$y_1 = k_1 \hat{y}_1 + k_3 \hat{y}_3$$
$$y_2 = k_2 \hat{y}_2$$
$$y_3 = \hat{y}_3$$

也可以写成

$$\hat{y}_1 = \frac{y_1 - k_3 y_3}{k_1}, \qquad \hat{y}_2 = \frac{1}{k_2} y_2, \qquad \hat{y}_3 = y_3$$

5. 用对偶单纯形算法求解以下线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & z = 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

解：

将其转化为标准型

$$
\begin{aligned}
-\max\ w = -z = -6x_1 - 4x_2 - 8x_3 \\
\text{s.t.}\quad 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 - x_4 = 2 \\
4x_1 + \ x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_6 = 3 \\
x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,6
\end{aligned}
$$

由标准形式可以看出$(0,0,0,-2,-4,-3)^\mathrm{T}$是对偶问题的可行解，因此可建立对偶单纯形表如下

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	-3	-2	-1	1	0	0	-2
x_5	-4	-1	-3	0	1	0	-4
x_6	-2	-2	-2	0	0	1	-3
	-6	-4	-8	0	0	0	w

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	-5/4	5/4	1	-3/4	0	1
x_1	1	1/4	3/4	0	-1/4	0	1
x_6	0	-3/2	-1/2	0	-1/2	1	-1
	0	-5/2	-7/2	0	-3/2	0	w+6

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	0	5/3	1	-1/3	-5/6	11/6
x_1	1	0	2/3	0	-1/3	1/6	5/6
x_2	0	1	1/3	0	1/3	-2/3	2/3
	0	0	-8/3	0	-2/3	-5/3	w+23/3

此时 RHS 都是正数且检验数都不是正数，迭代停止。得到最优解与最优值为

$$
x^* = \left(\frac{5}{6},\frac{2}{3},0,\frac{11}{6},0,0\right)^\mathrm{T}, z^* = -w^* = \frac{23}{3}
$$