人工智能基础

作业 3

1. 求取下列各式的合取范式，并给出求取过程。

(1) $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

(2) $\neg P \Rightarrow \neg\neg\big(Q \vee (R \wedge \neg S)\big)$

(3) $\big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow \mathrm{R})\big) \Rightarrow \big(\mathrm{P} \Rightarrow (\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{Q})\big)$

(4) $\Big(P \Rightarrow \big(Q \vee (R \wedge S)\big)\Big) \wedge \big(R \vee (S \Rightarrow Q)\big)$

1. 合取范式. [若干个互不相同的子句（析取项）的合取形式]

(1) $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

$\equiv \neg\neg P \vee (\neg P \vee Q)$ $\qquad P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

$\equiv P \vee \neg P \vee Q$

$\equiv$ TRUE

(2) $\neg P \Rightarrow \neg\neg(Q \vee (R \wedge \neg S))$

$\equiv \neg P \Rightarrow (Q \vee (R \wedge \neg S))$

$\equiv \neg\neg P \vee (Q \vee (R \wedge \neg S))$

$\equiv P \vee (Q \vee (R \wedge \neg S))$

$\equiv (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg S)$

分配律. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(3) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow (R \Rightarrow Q))$

$\equiv \neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee \neg R \vee Q)$

$\equiv (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee \neg R \vee Q)$

摩根律 $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

分配律

$\equiv (P \vee \neg P \vee \neg R \vee Q) \wedge (Q \vee \neg P \vee \neg R \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg P \vee \neg R \vee Q)$

$\equiv \neg P \vee Q \vee \neg R$

(4) $(P \Rightarrow (Q \vee (R \wedge S))) \wedge (R \vee (S \Rightarrow Q))$

$\equiv (\neg P \vee (Q \vee (R \wedge S))) \wedge (R \vee (\neg S \vee Q))$

分配律

$\equiv (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee S) \wedge (R \vee \neg S \vee Q)$

（可进一步化简，答案不唯一，但合取范式里不能有重复项）

2. 证明以下语句为重言式。

(1) $\big((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \Rightarrow \neg P$ （拒取式）

(2) $\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ （假言三段论）

(3) $\big((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ （等价三段论）

(4) $\big((P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S)\big) \Rightarrow (\neg P \vee \neg R)$ （破坏性二难）

证明：(1) $((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$

$\equiv ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$

$\equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \Rightarrow \neg P$

$\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$

$\equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg P$

$\equiv Q \vee P \vee \neg P \equiv True$.

该语句对所有命题均为真，是重言式，证毕.

(2) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

$\equiv ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \Rightarrow (\neg P \vee R)$

$\equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow (\neg P \vee R)$

$\equiv \neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)) \vee (\neg P \vee R)$

$\equiv ((P\vee Q)\wedge(P\vee\neg R)\wedge(\neg Q\vee\neg R))\vee(\neg P\vee R)$

$\equiv (P\vee Q\vee\neg P\vee R)\wedge(P\vee\neg R\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg R\vee\neg P\vee R)$

$\equiv True\wedge True\wedge True$

$\equiv True$

该语句对所有命题均为真，是重言式．证毕．

(3) $((P\Leftrightarrow Q)\wedge(Q\Leftrightarrow R))\Rightarrow(P\Leftrightarrow R)$

其中：$P\Leftrightarrow Q \equiv (P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)$

$\equiv (\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)$

$\equiv (\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge P)\vee(Q\wedge\neg Q)$

$\equiv (\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$

故原式 $\equiv \left[((\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q))\wedge((\neg Q\wedge\neg R)\vee(Q\wedge R))\right]\Rightarrow(P\Leftrightarrow R)$

$\equiv [(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee False\vee False]\Rightarrow(P\Leftrightarrow R)$

$\equiv \neg[(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)]\vee[(P\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg R)]$

$\equiv [(P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)]\vee(P\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg R)$

$\equiv (P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg R)\vee(Q\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge\neg P)\vee(R\wedge\neg Q)$
$\vee(P\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg R)$

$\equiv [P\wedge(R\vee\neg R)]\vee[\neg P\wedge(\neg R\vee R)]\vee(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)$
$\vee(Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge\neg Q)$

$\equiv (P\vee\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge\neg Q)$

$\equiv True \lor (P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg P) \lor (Q \land \neg R) \lor (R \land \neg Q)$

$\equiv True$

该语句对所有命题均为真，是重言式. 证毕.

(4) $((P \Rightarrow Q) \land (R \Rightarrow S) \land (\neg Q \lor \neg S)) \Rightarrow (\neg P \lor \neg R)$

$\equiv ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor S) \land (\neg Q \lor \neg S)) \Rightarrow (\neg P \lor \neg R)$

$\equiv \neg ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor S) \land (\neg Q \lor \neg S)) \lor (\neg P \lor \neg R)$

$\equiv (P \land \neg Q) \lor (R \land \neg S) \lor (Q \land S) \lor \neg P \lor \neg R$

$\equiv (P \land \neg Q) \lor (R \land \neg S) \lor (Q \land S) \lor (\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q)$
$\lor (\neg R \land S) \lor (\neg R \land \neg S)$

$\equiv [(P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg Q)] \lor [(R \land \neg S) \lor (\neg R \land \neg S)] \lor (Q \land S)$
$\lor (\neg P \land Q) \lor (\neg R \land S)$

$\equiv \neg Q \lor \neg S \lor (Q \land S) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg R \land S)$

$\equiv \neg Q \lor (\neg S \land \neg Q) \lor [(\neg S \land Q) \lor (Q \land S)] \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg R \land S)$

$\equiv \neg Q \lor Q \lor (\neg S \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg R \land S)$

$\equiv True \lor (\neg S \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (\neg R \land S)$

$\equiv True$

该语句对所有命题均为真，是重言式. 证毕.

3. 使用**演绎证明**方法给出下列证明的推理过程。

如果今天是星期三，则有晚课且需要进行核酸检测；
如果有晚课，则要在晚课前进行核酸检测；
如果需要进行核酸检测，则去紫荆检测点或听涛检测点；
如果晚课前进行核酸检测，则紫荆检测点人很多；
如果检测点人很多，则不在该检测点进行核酸检测。

证明：今天星期三，所以去听涛检测点。
（需要定义命题语句、定义知识库 KB、给出演绎过程）

3. 演绎证明.

A: 今天是星期三　B: 有晚课　C: 需进行核酸检测　D: 晚课前进行核酸检测

E: 去紫荆检测点　F: 去听涛检测点　G: 紫荆检测点人多

知识库 KB = $(A \Rightarrow B \wedge C) \wedge (B \Rightarrow D) \wedge (C \Rightarrow E \vee F) \wedge (D \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow \neg E) \wedge A$

1) $A \Rightarrow B \wedge C$　前提引入

2) A　前提引入

3) $B \wedge C$　1) 2) 假言推理

4) $B \Rightarrow D$　前提引入

5) D　3) 4) 假言推理

6) $C \Rightarrow E \vee F$　前提引入

7) $E \vee F$　3) 6) 假言推理

8) $D \Rightarrow G$　前提引入

9) G　5) 8) 假言推理

10) $G \Rightarrow \neg E$　前提引入

11) $\neg E$　9) 10) 假言推理

12) F　7) 11) 析取三段论

得到 今天星期三，所以去听涛检测点

3/3

（意思对即可）

4. 使用**归结原理**证明通过知识库 KB 能否得出α，即证明$KB \vDash \alpha$是否成立。

$$KB: (A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee G) \wedge (\neg D \vee G)$$

$$\alpha: G$$

A. ***Using resolution to prove that*** $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee G) \wedge (\neg D \vee G) \vDash G$

Prove: *we can prove it by illustrating that* $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee G) \wedge (\neg D \vee G) \wedge \neg G$ *is unsatisfiable. According to the* ***soundness of resolution****, we just need to prove the resolution closure of clauses in above sentence contains the empty clause.*

The resolving process is below:

$$\frac{\neg C \vee G, \neg G}{\neg C}, \quad \frac{\neg D \vee G, \neg G}{\neg D}, \quad \frac{\neg B \vee D, \neg D}{\neg B}, \quad \frac{A \vee B, \neg B}{A}, \quad \frac{\neg A \vee C, A}{\neg C}, \quad \frac{\neg C, C}{\phi}$$

Thus, $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee G) \wedge (\neg D \vee G) \vdash G$.

Therefore, according to the **soundness of resolution**, we have $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee G) \wedge (\neg D \vee G) \vDash G$.