1. 标准型: $\max \ -3x_1-2x_2-x_3=-z$

s.t. $x_1+x_2+x_3+x_4=6$

$x_1-x_3-x_5=4$

$x_2-x_3-x_6=3$ $\quad x_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots 6$

单纯形表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	1	1	1	1	0	0	6
x_5	-1	0	1	0	1	0	-4
x_6	0	-1	1	0	0	1	-3
	-3	-2	-1	0	0	0	$-z$

x_5出基, x_1进基:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	1	2	1	1	0	2
x_1	1	0	-1	0	-1	0	4
x_6	0	-1	1	0	0	1	-3
	0	-2	-4	0	-3	0	$-z+12$

x_6出基, x_2进基:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	0	3	1	1	1	-1
x_1	1	0	-1	0	-1	0	4
x_2	0	1	-1	0	0	-1	3
	0	0	-6	0	-3	-2	$-z+18$

此时 $b_1<0$ 但 a_{13}、a_{14}、a_{15}、$a_{16}>0$, 此问题无解.

2-(1) 对偶问题的最优解：$Y^* = (0, \frac{5}{6}, \frac{7}{6})$

最优值：9

(2) 单纯形表变为：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	3
x_1	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1
x_3	0	1	1	0	0	$-\frac{7}{6}$	2
	c_1	1	2	0	0	0	z

$\Rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	3
x_1	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	0	$-1+\frac{1}{6}c_1$	0	0	$-\frac{1}{6}c_1$	$-2+\frac{1}{6}c_1$	$z-\frac{1}{6}c_1-4$

$$\begin{cases} -1+\frac{1}{6}c_1 \le 0 \\ -\frac{1}{6}c_1 \le 0 \\ -2+\frac{1}{6}c_1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le c_1 \le 6$$

3.

(1) 取$\lambda=0$，有：

$$\max \quad -z = -6x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1$$

$$-x_2 + x_3 + x_7 = 1 \qquad x_j \geq 0,\ j=1,2,\cdots 7$$

单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	-1	-1	0	1	0	0	1
x_6	-1	1	0	-1	0	1	0	1
x_7	0	-1	1	0	0	0	1	1
	-6	-5	3	4	0	0	0	$-z$

x_3进基，x_7出基：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	-2	0	0	1	0	1	2
x_6	-1	1	0	-1	0	1	0	1
x_3	0	-1	1	0	0	0	1	1
	-6	-2	0	4	0	0	-3	$-z-3$

∵ x_4在可行集趋向无穷大

将最后一行替换为 $-z = (\lambda-6)x_1 + (\lambda-5)x_2 + (3-\lambda)x_3 + (4-\lambda)x_4$

得到：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	-2	0	0	1	0	1	2
x_6	-1	1	0	-1	0	1	0	1
x_3	0	-1	1	0	0	0	1	1
	$\lambda-6$	$\lambda-5$	$3-\lambda$	$4-\lambda$	0	0	0	$-z$

行变换得：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	-2	0	0	1	0	1	2
x_6	-1	1	0	-1	0	1	0	1
x_3	0	-1	1	0	0	0	1	1
	$\lambda-6$	-2	0	$4-\lambda$	0	0	$\lambda-3$	$-z+\lambda-3$

① $\lambda<4$ 时， 仍然会有 $x_4\to\infty$

② $4\le\lambda\le6$ 时，

x_7 进基，x_3 出基

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	-1	-1	0	1	0	0	1
x_6	-1	1	0	-1	0	1	0	1
x_7	0	-1	1	0	0	0	1	1
	$\lambda-6$	$\lambda-5$	$3-\lambda$	$4-\lambda$	0	0	0	$-z$

$4\le\lambda\le5$ 时，所有检验数 ≤0，此时最优值 $z=0$。（$X^*=(0,0,0,0)^T$）

$5<\lambda\le 6$ 时，x_1进基，x_6出基，

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	0	-1	-1	1	1	0	2
x_2	-1	1	0	-1	0	1	0	1
x_7	-1	0	1	-1	0	1	1	2
	$2\lambda-11$	0	$3-\lambda$	-1	0	$5-\lambda$	0	$-z+5-\lambda$

$5<\lambda\le 5.5$ 时，所有检验数≤ 0，此时最优值 $z=5-\lambda$.（$X^*=(0,1,0,0)^T$）

$5.5<\lambda\le 6$ 时，由第一列，该问题无界.

③ $\lambda>6$ 时，依旧由上表第一列，该问题无界.

综上：

$$z(\lambda)=\begin{cases}-\infty & \lambda\in(-\infty,4)\cup(5.5,+\infty)\\ 0 & \lambda\in[4,5]\\ 5-\lambda & \lambda\in(5,5.5]\end{cases}$$

(2) 化为标准型 $\max\ -z=-2x_1-6x_2-15x_3$

$$\begin{aligned} s.t.\ & -2x_1-3x_2-5x_3+x_4=6-\lambda\\ & x_1+x_2+x_3+x_5=-2+\lambda\\ & x_2+2x_3+x_6=-3+2\lambda\\ & x_j\ge 0,\ j=1,2,\cdots 6\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	-2	-3	-5	1	0	0	$6-\lambda$
x_5	1	1	1	0	1	0	$-2+\lambda$
x_6	0	1	2	0	0	1	$-3+2\lambda$
	-2	-6	-15	0	0	0	$-z$

所有检验数 ≤ 0，若 $\begin{cases} 6-\lambda \ge 0 \\ -2+\lambda \ge 0 \\ -3+2\lambda \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \le \lambda \le 6$，则最优值 $z=0$，

最优解 $(0,0,0)^T$

否则，$\lambda<2$ 时，由第二行知，$a_{2j}x_j = b_2$，$j=1,2,\cdots 6$

$a_{2j} \ge 0$，$x_j \ge 0$，$b_2<0$，产生矛盾

故此时问题无解.

$\lambda>6$ 时，x_1 进基 x_4 出基.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-3+\frac{1}{2}\lambda$
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$1+\frac{1}{2}\lambda$
x_6	0	1	2	0	0	1	$-3+2\lambda$
	0	-3	-10	-1	0	0	$-z-6+\lambda$

此时 $\begin{cases} -3+\frac{1}{2}\lambda>0 \\ 1+\frac{1}{2}\lambda>0 \\ -3+2\lambda>0 \end{cases}$，所以得到最优值 $z=\lambda-6$.

最优解 $(\frac{1}{2}\lambda-3, 0, 0)^T$

综上：$z(\lambda) = \begin{cases} 0 & 2\le\lambda\le 6 \\ \lambda-6 & \lambda>6 \\ \text{不存在} & \lambda<2 \end{cases}$