

罗伯特·德瓦尼 (Robert L. Devaney) / 文 崔继峰 / 译

回溯至 20 世纪七八十年代, 数学家所从事的动力系统领域, 是由计算能力不断增强的计算机绘制他们所研究对象的图像而构成。这些图像使他们大吃一惊: 类分形结构的美和复杂性竟可以与大自然本身相媲美。分形图像的绘制主要是利用了曼德博集合, 曼德博集合即使在动力系统领域外也为世人所知晓。这篇文章将详细阐述曼德博集合的来龙去脉并探究它无限的复杂性。

迭代

曼德博集合是由所谓的迭代生成, 这也意味着一再地重复反馈过程。在数学中, 迭代常常被用来做函数的迭代。对曼德博集合而言, 参与迭代的函数是一些想象中最简单的函数: 它们被称作二次多项式并具有形式 $f(x) = x^2 + c$, 其中 c 为常数。接下来, 我们会具体地探讨有关 c 的取值问题。

为了开始迭代 $x^2 + c$, 我们须先选定一个初始值, 并将该初始值记作 x_0 。将初始值 x_0 代入函数 $x^2 + c$, 这样便得到一个新的数

$$x_1 = x_0^2 + c$$

现在, 我们对前一次所得结果施行相同的运算步骤, 得到一系列新的数, 即

$$x_2 = x_1^2 + c$$

$$x_3 = x_2^2 + c$$

$$x_4 = x_3^2 + c$$

如此等等。由该迭代生成的数 x_0, x_1, x_2, \dots 拥有一个名字: x_0 在 $x^2 + c$ 迭代下的轨

道 (orbit)。

迭代函数的理论来源于现实生活中的问题，建立动物种群数量增加的数学模型就是其中的一个例子。一个繁殖周期后，动物种群的数量依赖于它当前的数量，因此我们可以凭借函数 $f(x)$ 来建立种群数量增长的数学模型，其中 x 表示当前的动物种群数量， $f(x)$ 则给出一个繁殖周期后种群的数量。若要得到若干个繁殖周期后的种群数量，我们则需要对函数 $f(x)$ 进行迭代。种群数量增长标准模型中用到的是二次多项式函数，巧合的是，这与我们将在此处考虑数量的函数极其类似，这也是他们利用二次函数来研究种群数量增长的最初动机。

这将导致了数学领域的一个重要问题：典型轨道本质上是什么样子？它们是收敛的还是发散的？它们的轨道是环形的还是无规则的？曼德博集合正是回答这一问题的几何版本。

我们来考虑一些例子，其中令 $c = 1$ ，且选择 0 作为初始值，那么此时的轨道为

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= 0^2 + 1 = 1 \\x_2 &= 1^2 + 1 = 2 \\x_3 &= 2^2 + 1 = 5 \\x_4 &= 5^2 + 1 = 26 \\x_5 &= 26^2 + 1 = \text{大数字} \\x_6 &= \text{更大的数字} \\x_7 &= \text{真正地大数字},\end{aligned}$$

我们看到轨道中的值越来越大——轨道趋向于无穷远处。

我们再来看另外的一个例子，此时令 $c = 0$ ，初始值仍然为 0，然而如下，轨道明显不同了，迭代后仍固定于一点 0

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= 0^2 + 0 = 0 \\x_2 &= 0^2 + 0 = 0 \\x_3 &= 0^2 + 0 = 0.\end{aligned}$$

如果我们令 $c = -1$ ，发生了这样的事：初始值为 0 时，轨道却为

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= 0^2 - 1 = -1 \\x_2 &= (-1)^2 - 1 = 0 \\x_3 &= 0^2 - 1 = -1 \\x_4 &= (-1)^2 - 1 = 0.\end{aligned}$$

此时我们可以看到，迭代值在 0 和 -1 之间振荡，这是一条周期为 2 的轨道。

为了理解轨道的性质，我们经常采用一种最简单的方式，即几何绘图：绘制轨道的时间序列图。为研究轨道的性质提供了大量的信息。以下四幅图中，我们依次展示了 $x^2 + c$ 在 $c = -1.1, -1.3, -1.38$ 以及 $c = -1.9$ 时的时间序列图。在每一幅图中，我们计算了以 0 为初始值的轨道点值，并用直线段将点值连接起来。我们可以看到，轨道的性质随着 c 的变化而变化： $c = -1.1$ 时，轨道的周期趋近于 2； $c = -1.3$ 时，轨道的周期趋近于 4； $c = -1.38$ 时，轨道的周期趋近于 8； $c = -1.9$ 时，轨道的周期并无显著模式可循。数学家则运用“混沌”

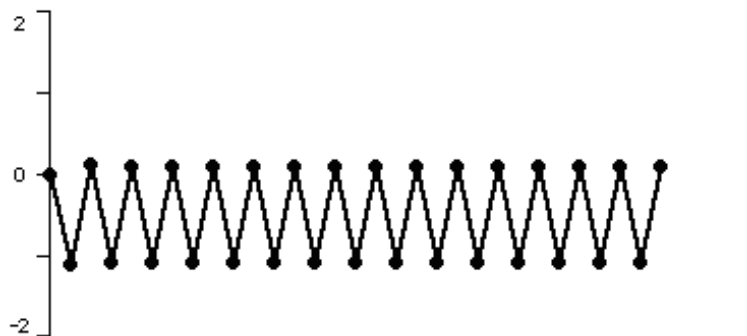


图 1：函数 $x^2 - 1.1$ 以 0 为初始值的迭代轨道，它的周期趋近于 2

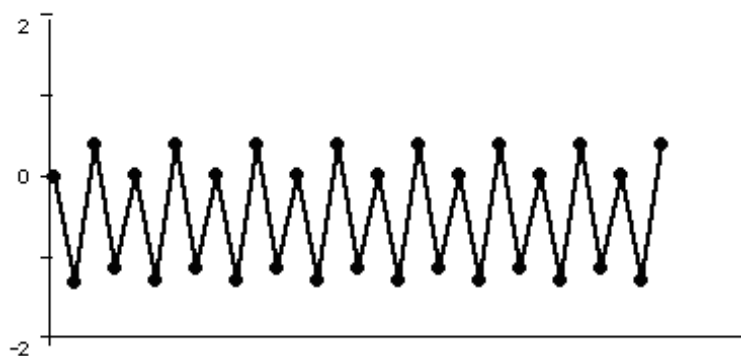


图 2：函数 $x^2 - 1.3$ 以 0 为初始值的迭代轨道，它的周期趋近于 4

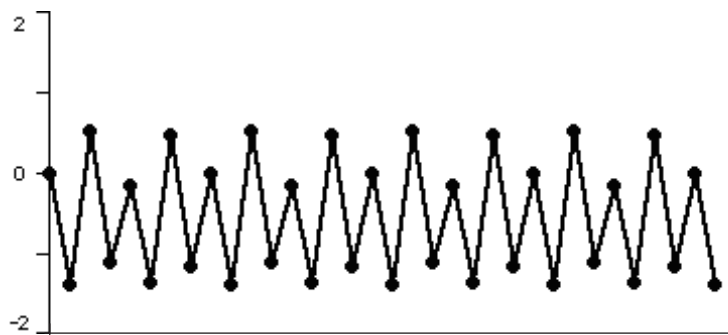


图 3：函数 $x^2 - 1.38$ 以 0 为初始值的迭代轨道，它的周期趋近于 8

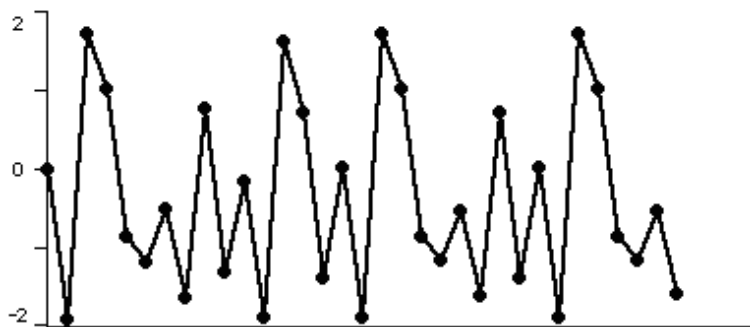


图4：函数 $x^2 - 1.9$ 以0为初始值的迭代轨道，它的周期并无显著模式可循，故被认为是混沌的

(chaos) 一词来描述该现象。

其他 c 值的轨道时间序列图的性质如下：

- $c = -0.65$ (趋近于一定点)¹
- $c = -1.6$ (混沌行为)²
- $c = -1.75$ (趋近于周期3)³
- $c = -1.8$ (近似于周期3, 有时被称为间歇现象)⁴
- $c = -1.85$ (混沌行为)⁵
- $c = 0.2$ (趋近于一定点)⁶

在继续之前，让我们做一个看似显然且并无新意的梳理。函数 $x^2 + c$ 在多次迭代之后，轨道上的点要么变得越来越大，导致轨道趋近于无穷远处，要么并非如此。若轨道不趋近于无穷远处，那么它的行为将会是多种多样的：它或趋近于一固定点或某一周期或无规则可循。但是，基本观察点是一分为二的：轨道有时趋近于无穷远处，有时不是。曼德博集合就是函数 $x^2 + c$ 在初值为0时迭代的产物。

复数

那么，曼德博集合平面图是什么样子？不是我们已经考虑过的随 c 值变化的直线图。答案是，不只是考虑实数 c ，我们也考虑 c 为虚数的情况。你若对复数不熟悉，请读《复数的简介》⁷ 或读 Plus 上的文章《令人好奇的四元数》(Curious quaternions)⁸，以便获得更多相关知识。

¹ 轨道图见：<https://plus.maths.org/content/os/issue40/features/devaney/time1>

² 轨道图见：<https://plus.maths.org/content/os/issue40/features/devaney/time2>

³ 轨道图见：<https://plus.maths.org/content/os/issue40/features/devaney/time3>

⁴ 轨道图见：<https://plus.maths.org/content/os/issue40/features/devaney/time4>

⁵ 轨道图见：<https://plus.maths.org/content/os/issue40/features/devaney/time5>

⁶ 轨道图见：<https://plus.maths.org/content/os/issue40/features/devaney/time6>

⁷ 参见：<https://plus.maths.org/content/os/issue40/features/devaney/complex>

⁸ 参见：<https://plus.maths.org/content/os/issue32/features/baez/index>

现在，我们来看一些当 c 是复数时 $x^2 + c$ 迭代的例子：若 $c = i$ ，那么 $x^2 + i$ 以 0 为初始值时的迭代如下：

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= 0^2 + i = i \\x_2 &= i^2 + i = -1 + i \\x_3 &= (-1 + i)^2 + i = -i \\x_4 &= (-i)^2 + i = -1 + i \\x_5 &= (-1 + i)^2 + i = -i \\x_6 &= (-i)^2 + i = -1 + i\end{aligned}$$

我们发现，最终发展为了以 2 为周期的轨道。若 $c = 2i$ ，轨道就截然不同了，如下

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= 0^2 + 2i = 2i \\x_2 &= (2i)^2 + 2i = -4 + 2i \\x_3 &= (-4 + 2i)^2 + 2i = 12 - 14i \\x_4 &= (12 - 14i)^2 + 2i = -52 - 334i \\x_5 &= \text{大数字 (意味着远离初始值 0)} \\x_6 &= \text{更大的数字}\end{aligned}$$

我们看到，此时的轨道在复平面上趋近于无穷远处（以 $(0, 0)$ 为初始坐标，轨道上的点越来越远离 0 点）。我们再次观察发现：轨道有时趋近于无穷远处，有时却不。

曼德博集合

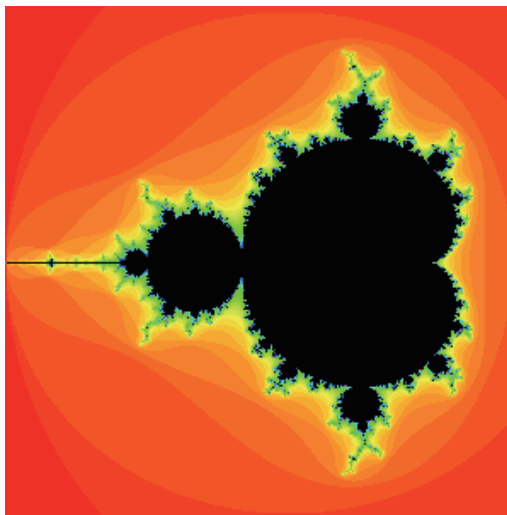


图 5：图中黑色区域为曼德博集合——在该黑色区域中任意选一 c 值，你会发现， $x^2 + c$ 以 c 为初始值，无论迭代多少次，轨道也不会发散至无穷远处。曼德博集合在平面上关于 x 轴对称，它与 x 轴的相交的区域为 $[-2, -1/4]$ 。其中，0 点位于“主心形”区域内，-1 位于“主心形”左侧部分连接处的球状区域内。

上面，曼德博集合将一些几何引入至基本观察中。下面是曼德博集合的精确定义：

曼德博集合是由 $x^2 + c$ 以 0 为初始值，无论迭代多少次，也不会发散至无穷远处的轨道组成，其中 c 为复数。

通过之前的计算，我们发现当 $c = 0, -1, -1.1, -1.3, -1.38$ 以及 $c = i$ 时， $x^2 + c$ 以 0 为初始值迭代后的值依然在曼德博集合内，而 $c = 1$ 和 $c = 2i$ 时，轨道发散至无穷远处。我们选用字母 M 来表示曼德博集合，它是以 1980 年首次研究曼德博集合的数学家曼德博（Benoit Mandelbrot）⁹ 的名字而命名的。

此时，一个自然的问题是：为什么有人会关心 $x^2 + c$ 以 0 为初始值迭代后轨道的性质呢？为什么考虑的初始值不是 i ？或者是 $2 + 3i$ ？或者是其他的初始值呢，为什么？正如我们下面所看到的，对于探究以 0 为初始值迭代后轨道的性质，是有一个很好的理由的：令人惊讶的是，以 0 为初始值迭代后的轨道莫名其妙地向我们揭示了大量以其他值为初始值迭代后的轨道的性质。

基于此，我们需要指出的是，根据我们对于曼德博集合的定义，很容易利用计算机绘制其图形，可参见 Plus 上的文章《曼德博集合的计算》（*Computing the Mandelbrot set*）¹⁰。

球状物（Bulbs）与触角（Antennas）

如上面的图 5，曼德博集合的计算机图形令人难以置信它竟是如此的复杂。众所周知，无论你怎么放大曼德博集合的边界，它的褶皱总是和被放大前的一模一样。边界褶皱的确切性质仍是数学中重要的未解决问题之一：然而，很多事物可以被认为与曼德博集合有关，这些事物显示出，它们的结构绝不是天然的：它的每一小片都载满了数学意义。

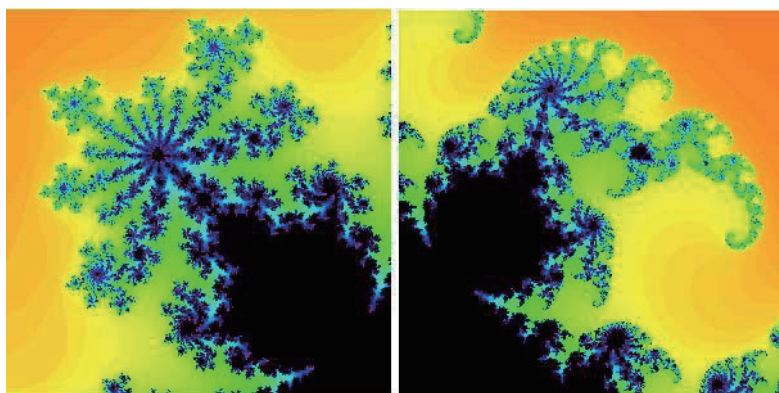


图 6: 曼德博集合在特写镜头下的“装饰品”，这里的两个“球状物”是直接附属在“主心形”上的。

⁹ 曼德博简介详见：<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mandelbrot.html>

¹⁰ 参见：<https://plus.maths.org/content/os/issue9/features/mandelbrot/index>

我们现在来仔细看一看曼德博集合。你可以看到，曼德博集合包含了一个主体部分，该主体部分看起来有点像躺在一侧的心脏，所以它被称为 M 的“主心形”（源自希腊语 *kardia*，意思是心脏）。附属于“主心形”的部分是无数的“装饰品”（*decoration*）。当仔细地查看这些“装饰品”时，你会发现它们的形状并不同。

这些直接附属在 M 的“主心形”上的“装饰品”被称作“主要的球状物”（*primary bulbs*）或者是“主要的装饰品”（*primary decorations*）。反过来，任意一个“主要球状物”也被无穷多个更小的“装饰品”所依附，有如“触角”（*antennas*）。尤其是，正如图 6 中清晰可见，附属于每个“装饰品”的“主要触角”（*main antenna*）似乎是由若干从“装饰品”变为“装饰品”的“辐条”（*spokes*）构成。

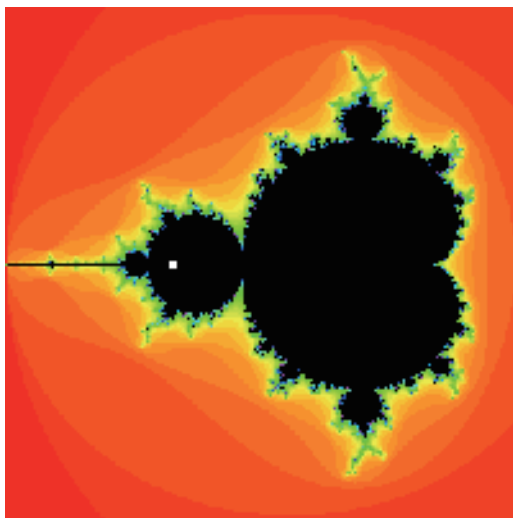
“触角”上的这些“辐条”的数目与 $x^2 + c$ 的动力性质有一种美妙的关系，其中的 c 位于“主要球状物”中。要了解这一点，我们从附属于“主心形”左侧的“大的球状物”中取一 c ，比如取 $c = -1.01$ 。令初始值 $x_0 = 0.0099$ ，通过如下计算可知，该函数迭代后的轨道的周期为 2

$$x_0 = 0.0099$$

$$x_1 = 0.0099^2 - 1.01 = -1.0099$$

$$x_2 = (-1.0099)^2 - 1.01 = 0.0099$$

$$x_3 = 0.0099^2 - 1.01 = -1.0099.$$



白点处为 $c = -1.01$

若令初始值 $x_0 = 0$ ，曼德博集合的轨道则为

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = -1.01$$

$$x_2 = 0.0101$$

$$x_3 = -1.00989799$$

$$x_4 = 0.00989395$$

$$x_5 = -1.00990210$$

$$x_6 = 0.00990227$$

等等。轨道的周期越来越接近于 2，但它不会在上面着陆——数学家们说，以 0 为初始值迭代后的轨道总是被吸引到以 2 为周期的轨道上。这不仅仅适用于 $c = -1.01$ ，对于“主要球状物”中任意的 c ，以 0 为初始值迭代后的轨道总是被吸引到以 2 为周期的轨道上。

类似的事情会发生在每一个“主要球状物”内：若 c 在“主要球状物”内部，以 0 为初始值迭代后的轨道会被吸引到以 n 为周期的轨道上。对于在“主要球状物”内部的任意一个 c 而言， n 的值是一样的，且它被称作“主要球状物”的周期。为了验证这是对的，请登录我的网站并打开由丹弗（James Denvir）开发的曼德博集合迭代器应用程序（*Mandelbrot set iterator applet*）¹¹，点击程序中曼德博集合的任意一点，你将会从它的左侧看到以 0 为初始值迭代后的轨道。

利用该应用程序，你可以验证较大一些“主要球状物”的周期（如图 7 所示）。只需要点击“球状物”内部的 c 值并数一数环内的点数。

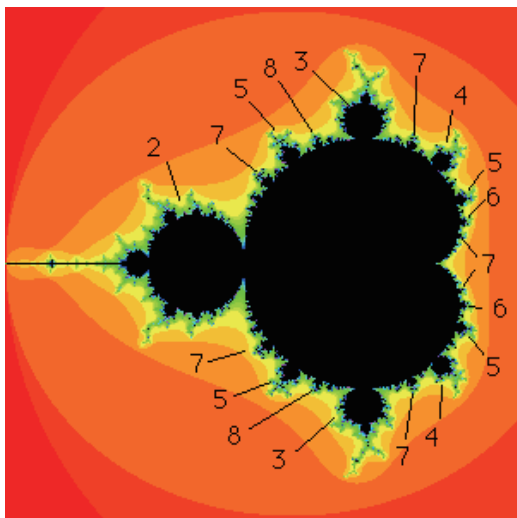


图 7：“球状物”的周期

图 8 是“球状物”周期为 3, 4, 5 与 7 的特写镜头（从上面的左端开始，按顺时针方向）。现在数一数附属于“球状物”的最大“触角”的“辐条”数目（别

¹¹ <http://math.bu.edu/DYSYS/applets/M-setIteration.html>

忘了数从“主球状物”到“触角”的主要结点所发射的“辐条”)。现在,我们来看这里的一个显著的相关性:“辐条”的个数与“主要球状物”的周期是完全相等的!

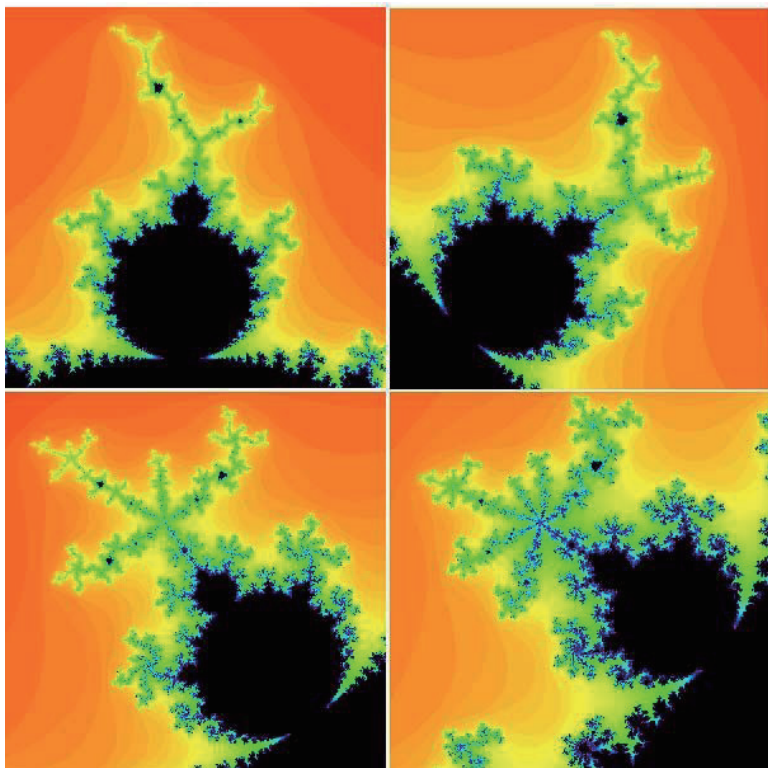


图8:“球状物”与它们的周期。“球状物”周期分别为3,4,5与7(从上面的左端开始,按顺时针方向)。值得注意的是,“主触角”上“辐条”个数与“主要球状物”的周期是完全相等的!

没有直接附着于“主要心脏形曲线”上“非主要球状物”也有类似的结果。既然如此,那么“球状物”的周期是“主触角”上“辐条”个数的倍数。

充满的朱丽亚集合

但是,显著的相关性并不会到此为止。还有第二种更动态的方法来计算 M 中“主要球状物”的周期。为了解释这个,我们不得不引入充满的朱丽亚集合(filled Julia set)的概念。以 $x^2 + c$ 生成的充满的朱丽亚集合与曼德博集合略有不同。对 M 而言,我们仅仅针对每一个 c 值来计算以 0 为初始值的迭代轨道,并将其结果呈现出来。对于在 M 中的 c ,以 0 为初始值的迭代轨道若不趋近于无穷远处,曼德博集合便是 c 平面中的一幅图。

对于充满的朱丽亚集合而言,我们固定一 c 值,然后考虑所有可能的初始值得到的轨道。这些初始值仍在 $x^2 + c$ 的充满的朱丽亚集合之中。它正式的定义如下:

对一固定的复数 c , $x^2 + c$ 的充满的朱丽亚集合是指那些使轨道不趋近于无穷的初始值组成的集合。

(注意：朱丽亚集合也有一个记号，它被用来描述充满的朱丽亚集合的边界。)

从上面的例子可以看到，0 点位于 $x^2 + 0$ 的充满的朱丽亚集合中，主要因为它是固定的。但是 0 点并不在 $x^2 + 1$ 的充满的朱丽亚集合中，因为它的轨道趋近于无穷远处。

因此， c 不同时，得到的充满的朱丽亚集合也是不同的。我们将 $x^2 + c$ 的充满的朱丽亚集合记作 J_c 。图 9 至图 12 展示了不同 c 值下充满的朱丽亚集合。

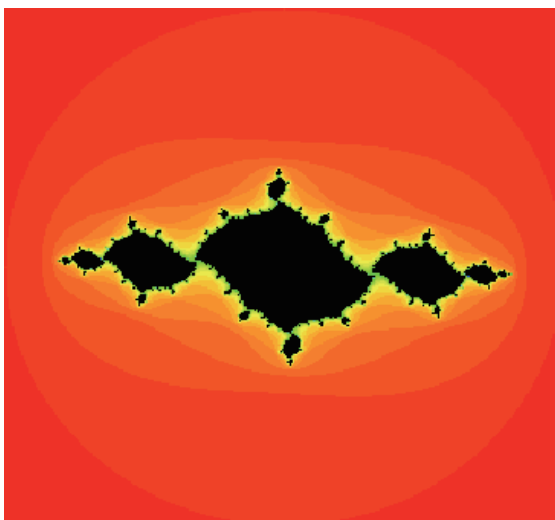


图 9： $c = -1.037 + 0.17i$ 时的 J_c ，它嵌入 2 个周期的“球状物”中

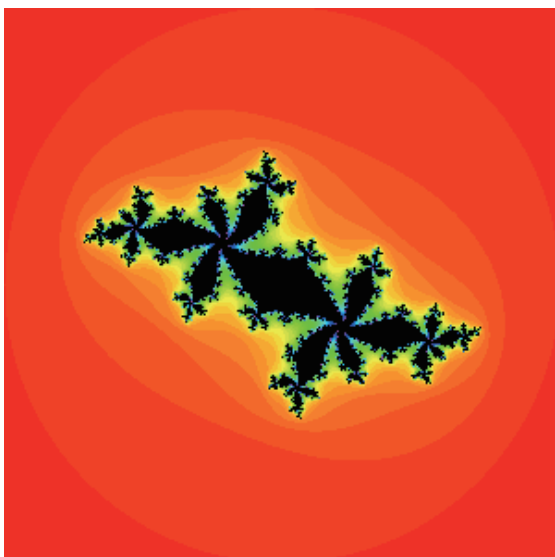


图 10： $c = -0.52 + 0.57i$ 时的 J_c ，它嵌入 5 个周期的“球状物”中

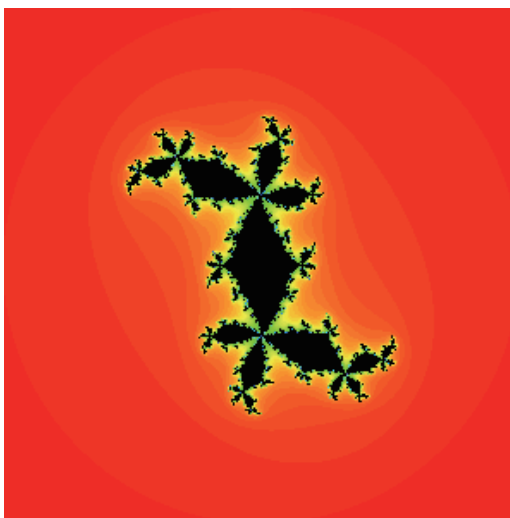


图 11 : $c = -0.295 + 0.55i$ 时的 J_c , 它嵌入 4 个周期的“球状物”中

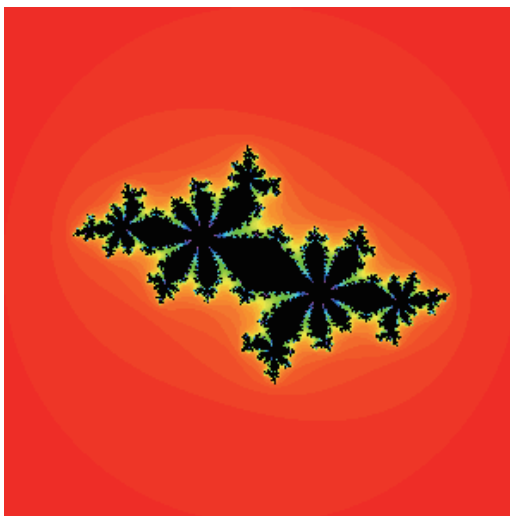


图 12 : $c = -0.624 + 0.435i$ 时的 J_c , 它嵌入 7 个周期的“球状物”中

为了进一步认识充满的朱丽亚集合, 你若可以绘制 $c = 0$ 的充满的朱丽亚集合, 你会发现它是个圆盘。对于大多数充满的朱丽亚集合而言, 离开计算机便无法绘制。为了观看其中的一些, 请登录我的网站并打开由夏皮罗 (Yakov Shapiro) 开发的曼德博和朱丽亚集应用程序 (Mandelbrot and Julia set applet)¹², 点击程序中右侧曼德博集合中特定一点, 你将会从它的左侧看到相对应的充满的朱丽亚集合。

总而言之, 曼德博集合与充满的朱丽亚集合之间的不同如下:

¹² <http://math.bu.edu/DYSYS/applets/Quadr.html>

曼德博集合

- 是 c 平面中的一幅图，也被称为参数平面；
- 对一切可能的 c 值，记录以 0 为初始值的迭代发展轨道。

充满的朱丽亚集合

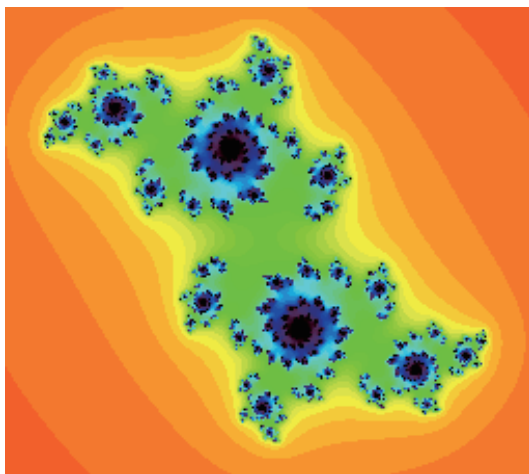
- 是 x 平面中的一幅图，也被称为动力平面；
- 对一固定的 c 值，记录一切 $x^2 + c$ 可能的迭代发展轨道。

基本的二分法

在这里被展示的所有充满的朱丽亚集合有一个共同点：它们是连通集，换句话讲，它们仅由一片区域组成。但并不是所有充满的朱丽亚集合都是连通的。复杂动力系统中最为漂亮的一个结果是由两位法国数学家朱利亚（Gaston Julia）¹³ 与法图（Pierre Fatou）¹⁴ 于 1919 年独立获得的。该结果表明，任何一个朱丽亚集合都是连通的，或者它是由无穷多个区域组成的，这些区域中只有一个点。这些点生成了类似于云朵的“云集”，我们把这些集合称为康托尔集，读 Plus 上的文章《银河系有多大？》（*How big is the milky way?*）¹⁵，可更好地理解康托尔集。

因此，基本的二分法说的是， $x^2 + c$ 的充满的朱丽亚集合要么是连通集（一片区域），要么是康托尔集（无穷多片区域），没有中间状态，即没有由 10 片，20 片或者 756 片区域组成的 J_c 。

我们如何来判定给定 J_c 的形状：它是连通集还是康托尔集？令人惊奇的是，



图中的朱丽亚集合是康托尔集，它是由黑色的点组成，每个点形成了自己独立的部分

¹³ <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Julia.html>

¹⁴ <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fatou.html>

¹⁵ <https://plus.maths.org/content/os/issue15/features/oneil/index>

它是由以 0 为初始值的迭代轨道来决定的。若 $x^2 + c$ 以 0 为初始值的迭代轨道趋近于无穷远处，那么 J_c 是康托尔集。若 $x^2 + c$ 以 0 为初始值的迭代轨道并未趋近于无穷远处，那么 J_c 是连通集。

有关这种二分法的可视化方法是由曼德博集合所提供的。若 c 处于 M 中，那么我们知道， $x^2 + c$ 以 0 为初始值的迭代轨道不会趋近于无穷远处，所以 J_c 是连通集。若 c 不在 M 中， J_c 则是康托尔集。该二分法给出了曼德博集合的第二种解释。

曼德博集合是由满足如下条件的 c 构成

- J_c 是连通的，或等价于连通，
- $x^2 + c$ 以 0 为初始值时不会趋近于无穷远处的迭代轨道。

你若想看充满的朱丽亚集合是如何随着 c 离开曼德博集合而“破碎”为无穷多片，请登录我的网站并观看视频材料¹⁶。

令人惊奇的是，以 0 为初始值的迭代轨道似乎“知道” $x^2 + c$ 的充满的朱丽亚集合的形状。对此，在数学上是有解释的，不过我们在此不作赘述。

再谈曼德博集合

但是，充满的朱丽亚集合与曼德博集合的形状之间的关系不止上面谈到的这一个。由 M 的“装饰品”内一固定的 c 形成的朱丽亚集合，可得到“装饰品”的周期，反之亦然。图 13 展示了当 $c = -0.12 + 0.75i$ 时的充满的朱丽亚集合，该集合也经常被称为道阿迪兔子，以该领域的先驱数学家道阿迪（Adrien Douady）的名字命名。我们注意到，图 13 看起来像只“分形兔”，这只兔子有一个身体和两只耳朵，你所看到的每一处都有两只耳朵。

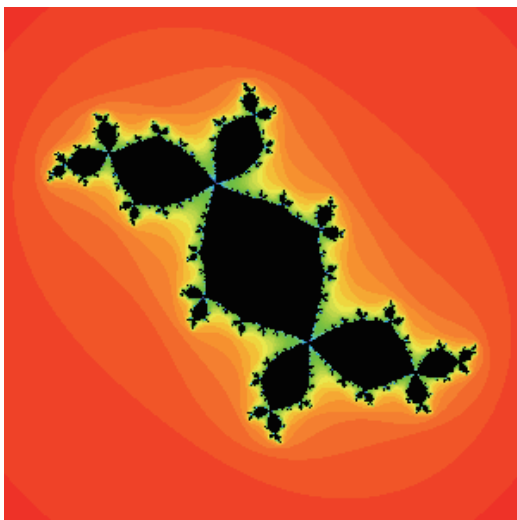


图 13：“分形兔”

¹⁶ <http://math.bu.edu/DYSYS/explorer/tour4.html>

充满的朱丽亚集合包含无穷多个“结点”，每个节点处都包含3个明显的黑色区域。图14是“分形兔”被放大的一部分，以便充分体现这一点。

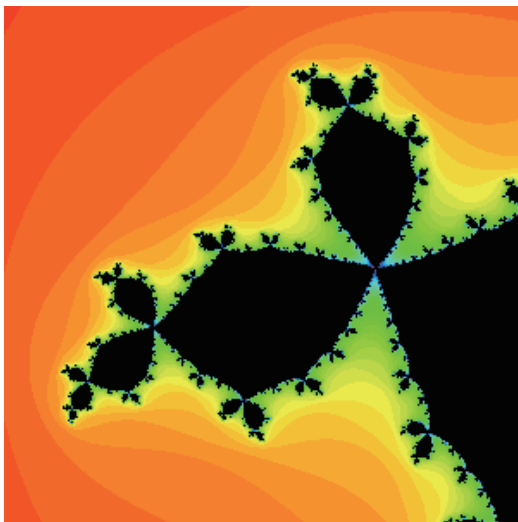


图14：“分形兔”被放大的一部分

“分形兔”的每个节点处都有三片区域，这个事情并不奇怪，因为 c 值处在曼德博集合的3倍主周期的“球状物”中。这是 M 另外一个吸引人的地方。如果你从 M 的“主要装饰品”中选择一 c 值，那么，首先， J_c 一定是连通集，其次 J_c 包含无穷多个特殊结点，并且每个结点处都有 n 个区域，其中的 n 为“球状物”的周期。图15展示的就是周期4和周期5的 J_c 。

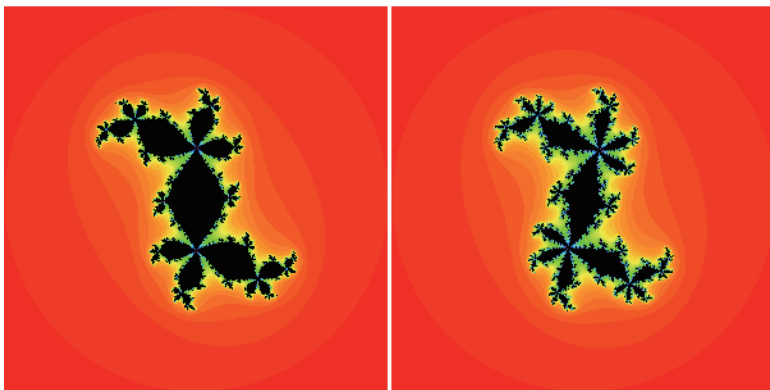


图15：周期4和周期5的充满的朱丽亚集合

我的网站上有一些朱丽亚集合以及结点随着 c 值变化而变化的视频。

总结

因此，我们已经看到曼德博集合有着各式各样的结构。我们可以利用 M 的集合形状来理解 $x^2 + c$ 的动力学性质。一方面，这种动力学与几何之间的

相互作用令人着迷，另一方面，这种相互作用还未被彻底理解。近年来，一大批数学家如道阿迪、哈伯德（John H Hubbard）、约克斯（Jean-Christophe Yoccoz）以及麦克马伦（Curt McMullen）等人致力于研究它们之间的相互作用，但仍留有很多工作待进一步完成。你若喜欢这篇文章，那么你应该进一步研究曼德博集合，并成为解决相关问题的一员。

原文译自：<https://plus.maths.org/content/unveiling-mandelbrot-set>



作者简介：

罗伯特·德瓦尼，波士顿大学数学系教授，主要研究领域是动力系统与复杂分析动力系统，编著了十余本数学书，包括面向中学师生的著作《动力行为的工具箱》（*A Tool Kit of Dynamics Activities*）。他担任了英国剧作家 Tom Stoppard 的“混沌顾问”，并在全世界作了 1300 多场与动力系统相关的报告。



译者简介：

崔继峰，2015 年博士毕业于上海交通大学，现任教于内蒙古工业大学数学系，硕士生导师。研究方向为应用数学、非线性力学和非线性动力系统。