Fourier Series

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t\quad b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega t+\varphi_n)\quad a_n=c_n\cos\varphi_n\quad b_n=-c_n\sin\varphi_n$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}\quad F_n=\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t\quad F_{-n}=F_n^*$$

$$u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\to a_n=\frac{2\tau}{T}\mathrm{Sa}\frac{n\pi\tau}{T}\quad b_n=0$$

$$u(t)-u\left(\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{2}\to a_0=0\quad b_n=\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}$$

$$\frac{t}{T}\left(u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\to a_n=0\quad b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{T}\right)(u(t)-u(t-T))\to a_n=0\quad b_n=\frac{1}{n\pi}$$

$$\left(1-\frac{2|t|}{T}\right)\left(u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\to a_n=\mathrm{Sa}^2\frac{n\pi}{2}\quad b_n=0$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{T}\left|t-\frac{T}{4}\right|\right)\left(u\left(t+\frac{T}{4}\right)-u\left(t-\frac{3T}{4}\right)\right)\to a_n=0\quad b_n=\frac{2}{n\pi}Sa\frac{n\pi}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi t}{T}\left(u\left(t+\frac{T}{4}\right)-u\left(t-\frac{T}{4}\right)\right)\to a_n=\frac{2}{(1-n^2)\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\quad b_n=0$$

$$\left|\cos\frac{\pi t}{T}\right|\to a_n=(-1)^n\frac{4}{(1-4n^2)\pi}\quad b_n=0$$

Fourier Transform

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_if_i(t)\to\sum_{i=1}^{n}a_iF_i(\omega)\quad f(t)e^{j\omega_0 t}\to F(\omega-\omega_0)$$

$$f(t)\cos\omega_0 t\to\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

$$f(t)\sin\omega_0 t\to\frac{\mathrm{j}}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$$

$$f(at-t_0)\to\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega t_0}{a}}\quad f(t_0-at)\to\frac{1}{|a|}F\left(-\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega t_0}{a}}$$

$$f(-t)\to F(-\omega)\quad f^*(t)\to F^*(-\omega)\quad f^*(-t)\to F^*(\omega)$$

$$f^{(n)}(t)\to(\mathrm{j}\omega)^nF(\omega)\quad(-jt)^nf(t)\to F^{(n)}(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t}f\mathrm{d}\tau\to\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)\quad\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}+\pi f(0)\delta(t)\to\int_{-\infty}^{\omega}F\mathrm{d}u$$

$$f_1(t)*f_2(t)\to F_1(\omega)F_2(\omega)\quad f_1(t)f_2(t)\to\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

$$F(t)\to2\pi f(-\omega)\quad\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

实→实偶虚奇幅偶相奇，虚→实奇虚偶幅偶相奇

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{-jn\omega_0 t}\to F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$f_{\mathrm{sp}}(t)=f(t)\left(u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\Rightarrow F_n=\frac{F_{\mathrm{sp}}(n\omega_0)}{T_0}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-nT_{\mathrm{s}})\to\frac{1}{T_{\mathrm{s}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_{\mathrm{s}})$$

$$\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_{\mathrm{s}})\to\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega)\delta(\omega-n\omega_{\mathrm{s}})$$

$$\mathrm{e}^{-at}u(t)\to\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}\quad\mathrm{e}^{-a|t|}\to\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\to\tau\mathrm{Sa}\frac{\omega\tau}{2}\quad e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}\to\sqrt{\pi}\tau\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}$$

$$\cos\frac{\pi t}{\tau}\left(u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)\to\frac{2\pi\tau}{\pi^2-\omega^2\tau^2}\cos\frac{\omega\tau}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right)\left(u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)\to\frac{2\pi^2\tau}{4\pi^2-\omega^2\tau^2}\mathrm{Sa}\frac{\omega\tau}{2}$$

$$\left(1-\frac{2|t|}{\tau}\right)\left(u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)\to\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\frac{\omega\tau}{4}$$

$$\left(1+\frac{t}{\tau}\right)(u(t+\tau)-u(t))\to\frac{1}{\omega^2\tau}\left(1+\mathrm{j}\omega\tau-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\right)$$

$$\left(-\frac{\tau}{2},0\right),\left(-\frac{\tau_1}{2},1\right),\left(\frac{\tau_1}{2},1\right),\left(\frac{\tau}{2},0\right)\to\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega(\tau+\tau_1)}{4}\mathrm{Sa}\frac{\omega(\tau-\tau_1)}{4}$$

$$\mathrm{Sa}\,\omega_0 t\to\frac{\pi}{\omega_0}\left(u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right)\quad t\mathrm{e}^{-at}u(t)\to\frac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^2}$$

$$\delta(t)\to1\quad1\to2\pi\delta(\omega)\quad u(t)\to\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)\quad\mathrm{sgn}(t)\to\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

$$tu(t)\to\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{\mathrm{s}})\to\omega_{\mathrm{s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_{\mathrm{s}})$$

$$\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 tu(t)\to\frac{a+\mathrm{j}\omega}{(a+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}\quad\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 tu(t)\to\frac{\omega_0}{(a+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$$

$$\frac{1}{b-a}\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}\right)u(t)\to\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+a)(\mathrm{j}\omega+b)}$$

$$\cos\omega_0 t\left(u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)\to\frac{\tau}{2}\left[\mathrm{Sa}\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}+\mathrm{Sa}\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right]$$

Laplace Transform

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\quad f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

$$f(at-t_0)\to\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{st_0}{a}}\quad f(t_0-at)\to-\frac{1}{a}F\left(-\frac{s}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{st_0}{a}}$$

$$f^{(n)}(t)\to s^nF(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}(0_-)$$

$$\int_{-\infty}^{\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau\to\frac{1}{s}\left(F(s)+\int_{-\infty}^{0_-}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

$$(-t)^nf(t)\to F^{(n)}(s)\quad\frac{f(t)}{t}\to\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s$$

$$f_1(t)f_2(t)\to\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F_1(p)F_2(s-p)\mathrm{d}p$$

$$\delta(t)\to1\quad\delta^{(n)}(t)\to s^n\quad t^nu(t)\to\frac{n!}{s^{n+1}}\quad t^n\mathrm{e}^{-at}u(t)\to\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\cos\omega_0 tu(t)\to\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\quad\sin\omega_0 tu(t)\to\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 tu(t)\to\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\quad\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 tu(t)\to\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

$$t\cos\omega_0 t u(t)\to\frac{s^2-\omega_0^2}{\left(s^2+\omega_0^2\right)^2}\quad t\sin\omega_0 t u(t)\to\frac{2\omega_0 s}{\left(s^2+\omega_0^2\right)^2}$$

$$\frac{K}{(s-p)^k}\Rightarrow K=\frac{1}{(n-k)!}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}s^{n-k}}\left[(s-p)^n F(s)\right]\Big|_{s=p}$$

Z Transform

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}\quad x[n]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

$$x[n+m]u[n]\to z^m\left(X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k}\right)$$

$$x[n-m]u[n]\to z^{-m}\left(X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x[k]z^{-k}\right)$$

$$a^n x[n]\to X\left(\frac{z}{a}\right)\quad x[-n]\to X\left(\frac{1}{z}\right)\quad x_{(k)}[n]\to X\left(z^k\right)$$

$$nx[n]\to -zX'(z)\quad x^*[n]\to X^*\left(z^*\right)$$

$$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)\quad \lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

$$x[n]y[n]\to\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)\frac{dv}{v}$$

$$x[n]y^*[n]\to\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)\frac{dv}{v}$$

$$x[n]-x[n-1]\to\left(1-z^{-1}\right)X(z)\quad \sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\to\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

$$\delta[n]\to 1\quad a^n u[n]\to\frac{z}{z-a}\quad na^n u[n]\to\frac{az}{(z-a)^2}$$

$$n^2a^nu[n]\to\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}\quad n^3a^nu[n]\to\frac{az\left(z^2+4az+a^2\right)}{(z-a)^4}$$

$$n^4a^nu[n]\to\frac{az\left(z^3+11az^2+11a^2z+a^3\right)}{(z-a)^5}$$

$$\frac{(n+m)!}{n!m!}a^nu[n]\to\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}\quad \frac{n!}{m!(n-m)!}u[n]\to\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$$

$$a^n\sin n\omega_0 u[n]\to\frac{az\sin\omega_0}{z^2-2az\cos\omega_0+a^2}$$

$$a^n\cos n\omega_0 u[n]\to\frac{z(z-a\sin\omega_0)}{z^2-2az\cos\omega_0+a^2}$$

$$\sin(n\omega_0+\theta)u[n]\to\frac{z\left[z\sin\theta+\sin(\omega_0-\theta)\right]}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

$$\cos(n\omega_0+\theta)u[n]\to\frac{z\left[z\cos\theta-\cos(\omega_0-\theta)\right]}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

$$na^n\sin n\omega_0 u[n]\to\frac{az\left(z^2-a^2\right)\sin\omega_0}{\left(z^2-2az\cos\omega_0+a^2\right)^2}$$

$$na^n\cos n\omega_0 u[n]\to\frac{az\left(z^2\cos\omega_0-2az+a^2\cos\omega_0\right)}{\left(z^2-2az\cos\omega_0+a^2\right)^2}$$

$$\frac{a^n}{n!}u[n]\to e^{\frac{a}{z}}\quad \frac{1}{(2n)!}u[n]\to\cosh z^{-\frac{1}{2}}\quad \frac{1}{n}u[n-1]\to\ln\frac{z}{z-1}$$

Discrete Fourier Transform

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}\quad x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-nk}\quad W_N=e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$$

$$x\left((n\pm m)\right)_N R_N[n]\to W_N^{\mp mk}X[k]\quad x[n](N)y[n]\to X[k]Y[k]$$

$$x^*[n]\to X^*[N-k]$$

$$\mathrm{Re}\,x[n]\to X_{\mathrm{e}}[k]\Rightarrow X_{\mathrm{e}}[k]=X_{\mathrm{e}}^*[N-k]$$

$$\mathrm{Im}\,x[n]\to X_{\mathrm{o}}[k]\Rightarrow X_{\mathrm{o}}[k]=-X_{\mathrm{o}}^*[N-k]$$

实→实偶虚奇，虚→实奇虚偶

实偶→实偶，实奇→虚奇，虚偶→虚偶，虚奇→实奇

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X[k]\right|^2$$

$$X[k]=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}\quad X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\phi_k(z)$$

$$\phi_k(z)=\frac{1-z^{-N}}{N\left(1-W_N^{-k}z^{-1}\right)}=\frac{z^N-1}{Nz^{N-1}\left(z-W_N^{-k}\right)}$$

$$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\phi_k\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\phi\left(\omega-\frac{2k\pi}{N}\right)$$

$$\phi(\omega)=\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{N\sin\frac{\omega}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N-1}{2}\omega}\Rightarrow\phi_k\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\phi\left(\omega-\frac{2k\pi}{N}\right)$$

$$\mathrm{DIT}: x[2p]\to X_1[k]\quad x[2p+1]\to X_2[k]$$

$$X[k]=X_1[k]+W_N^kX_2[k]\quad X\left[k+\frac{N}{2}\right]=X_1[k]-W_N^kX_2[k]$$

$$\mathrm{DIF}: x[n]+x\left[n+\frac{N}{2}\right]\to X[2p]$$

$$\left(x[n]-x\left[n+\frac{N}{2}\right]\right)W_N^n\to X[2p+1]$$