学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

**********密************封************线**********

考生类别____________

第 36 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

北京物理学会编印　　　　　　2019 年 12 月 8 日

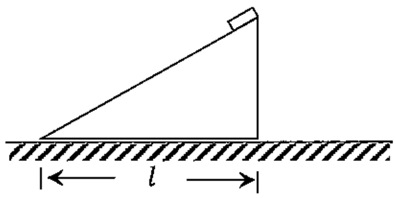
题号	一	二			
	1～10	11	12	13	14
分数					
阅卷人					
题号	三			总分	
	15	16	17		
分数					
阅卷人					

答题说明：前 14 题是必做题，满分是 120 分；文管组和农林医组只做必做题；除必做题外，非物理 B 组限做 15 题，满分 140 分；非物理 A 组限做 15、16 题，满分 160 分；物理组限做 15、17 题，满分 160 分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理。请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

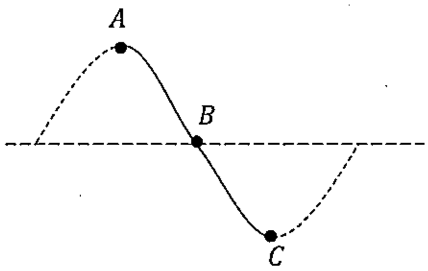
一、填空题（必做，共 10 题，每题 2 空，每空 3 分，共 60 分）

1.质点沿半径为 R 的圆周运动，角加速度为常量 β。已知 $t=0$ 时刻质点速度为零，则在 $t>0$ 时刻，质点的切向加速度 $a_{切}=$__________，向心加速度 $a_{心}=$____________。

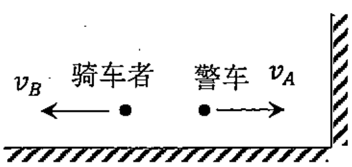
2.如图所示，光滑水平面上停放着底面长度为 l 的劈形大物块，开始时在大物块的顶点有一个静止的小物块，而后自由释放，于是这两个物块都有水平方向的移动。已知大物块、小物块的质量比为 3:1。设系统处处无摩擦，小物块滑落至底部时，大物块水平移动距离 $S_M=$________________，小物块水平移动距离 $S_m=$________________。



3.某时刻的弦波如图所示，此时图中用实线表示的弦段中，振动动能最大的部位在__________处，振动势能最小的部位在__________处（填 A、B 或 C 字母即可）。

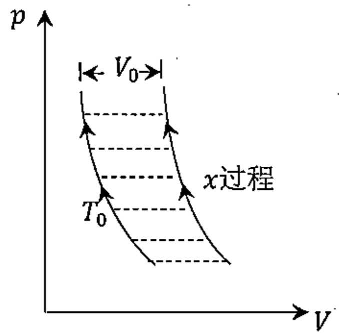


4.如图所示，在竖直山坡左侧地面上有一辆警车以 $v_A=10$ 米/秒的速度朝着山壁驶去，同时发出频率为 $\nu_0=1000$ 赫兹的警笛声。在警车左侧有一骑自行车者，他以速度 $v_B=2$ 米/秒背向山壁离去。已知声波在空气中的传播速度为 $u=330$ 米/秒。那么骑自行车者接收到的两种声波频率为 $\nu_1=$ 赫兹，$\nu_2=$__________赫兹。



5.粘滞系数 η 越____________，流速为 v 的流体 v 越____________，流体越容易形成湍流。（填大、小即可）

6.单原子理想气体的 x 过程在 $p\sim V$ 坐标平面上的曲线如图所示。x 过程线上的每一个点的压强 p 不变，将体积 V 减少为 $V-V_0$，其中 V_0 是个常量。x 过程线平移成温度为 T_0 的等温线。据此可导出 x 过程在 $p\sim V$ 坐标面的过程方程为______________________。继而可得 x 过程的摩尔热容量 $C_{mx}=$__________________。（要求 C_{mx} 表述为随变量 V 变化的函数。）

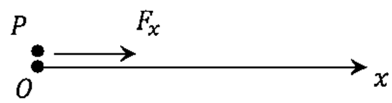


7.在任何一个惯性参考系中，速度为 $\vec{v}$、电量为 q 的带电质点，在电、磁场中所受力可表述为 $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$。采用第一个测量方案：____________________________________，即可测出电场场强。再采用第二个测量方案：____，即可测出磁感应强度。

8.费马原理可表述为，光从空间一点传播到另一点是沿着光程为极值的路径传播的。具体地说就是把光的实际路径与其邻近的其他路径相比较，光的实际路径的光程为（1）极小、（2）极大，或（3）稳定值。
光的反射定律是与费马原理中___________的相符；光从椭圆一个焦点射出，经椭圆环反射，可聚会通过椭圆的另一个焦点，这与费马原理中的___________相符。（可填（1）、或（2）、或（3））

9.黑体的总辐射本领 E_0 与绝对温度 T 的斯特藩—波尔兹曼关系为$E_0(T)=$________________，其中的 σ 为斯特藩—波尔兹曼常量。黑体辐射本领的峰值波长 λ_m 与绝对温度 T 的维恩位移关系为 $\lambda_m=$__________________，其中 b 为维恩常量。

10.如图所示，某惯性系中，静质量为 m_0 的质点 P 静止在 x 坐标轴的原点 O。从 $t=0$ 时刻开始，P 在一个沿 x 轴方向的恒力 F_x 作用下，P 的质量增为 $2m_0$，此时 $t=$____________________，P 所在位置的坐标量 $x=$____________________。

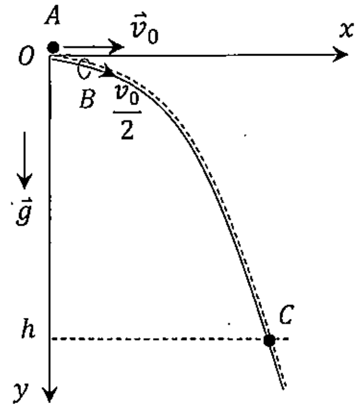


学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

***************密***************封***************线***************

二、计算题（必做，共4题，每题15分，共60分）

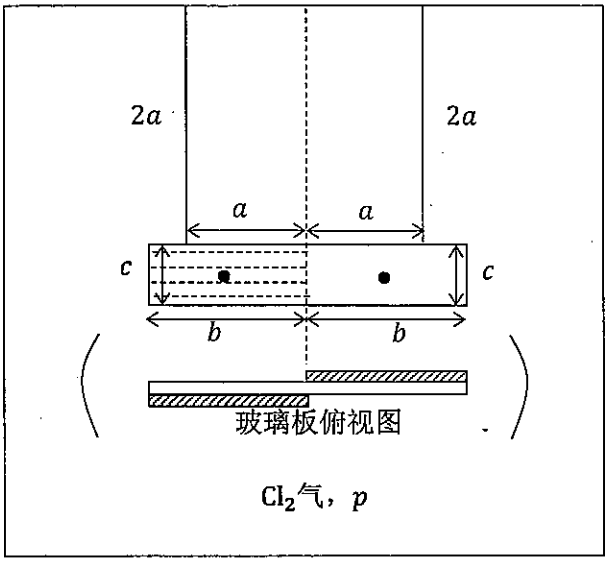
11.（15分）如图所示，有一个竖直平面上设置 $O-xy$ 坐标面。从 O 点沿水平的 x 轴朝右抛出一个初速为 $\vec{v}_0$ 的小球 A，略去空气阻力，A 在 $O-xy$ 平面的运动轨迹是图中用虚线所示的一条抛物线。



现在用一条光滑的细金属丝，从 O 点开始沿原虚线抛物线，弯成图中用实线所示的一条抛物线形的固定金属丝。将一个质量为 m 的小金属环 B 套在金属丝上，以沿着 x 轴方向的 $\frac{v_0}{2}$ 初速度从 O 点开始运动。B 与金属之间处处无摩擦。

图中金属丝的 C 点位置其 y 坐标量为 $y=h>0$。试求 B 环到达 C 点位置时，B 环对金属丝的压力大小 $F(h)$。

12.（15 分）一块质量为 m 的平薄长方形匀质玻璃板，用两根等长轻细软线如图所示悬挂起来。玻璃板每一侧面的半个表面对称地涂了一层化学性质活泼的金属薄膜，其质量可忽略不计。整个装置竖直地悬挂在空的容器中，并向容器内通入压强为 p 的氯气。设每一个分子遇金属的分子发生化合反应的概率为 $q < 1$，且在讨论的时间范围内 q 为恒量，生成的氯化物留在玻璃板上。整个装置的线度量均已在图中示出，平衡时玻璃板将绕它的中央竖直轴转过一个小角度 α，试求 α。



13.（15 分）严格意义下的矢量，要满足平行四边形叠加或分解的法则。但平时常引入严格意义之外的所谓矢量。这些所谓的矢量仍是即有大小，又有方向的量。例如图 1 中的电流是从 A 流到 B 的方向，但 I 已表示电流强度标量的大小，不可将图 1 中的 I 改写为 $\vec{I}$。由电流、电阻形成的电压也是从 A 到 B 的方向。定性而言，相当于直流电路导线、电阻内静电场给等效虚拟的正电荷粒子的电场力将电流从 A 压到 B。故简写为

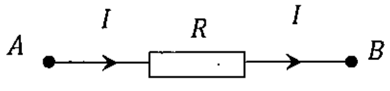


图 1

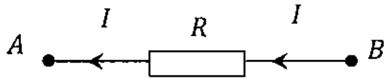


图 2

$U_{AB}=IR$ (1)，注解：U_{AB} 是从 A 到 B 方向的电压。

若改为电流从 B 到 A，如图 2 所示。则 A 到 B 的电压若表述为

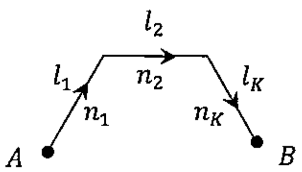
$U_{AB}=IR$ (2)，注解：从 A 到 B 的电压其方向应该是从 B 到 A 的方向。

这很不方便，故常简述为

$$U_{AB}=-IR\ (2)$$

即（1)、(2）式通过标量前的 + 、− 号来区别方向，不必写注解。这么处理的好处还在于带 + 、− 号的所谓矢量便于作加、减运算。例如，在直流电路的基尔霍夫方程组中就包含着这样的运算。

几何光学费马原理中定义的光程 L_{AB}、$n_i l_i$



$$L_{AB}=\sum_{i=1}^{K} n_i l_i$$

无论分段光程 l_i 还是整体光程 L_{AB} 也都可有 + 、− 号之分。

如图 3 所示，若光从 A 到 B 传播，则 A 到 B 的光程

$$L_{AB}=nl$$

光从 A 到 B 传播，则 B 到 A 的光程为

$$L_{BA}=-L_{AB}=-nl$$

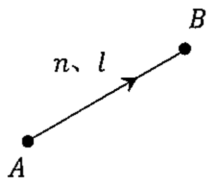


图 3

在折射率 $n=1.0$ 的环境中，有一个固体椭圆环和一段固体双曲线，它们的几何结构均已在图 4 中示出。

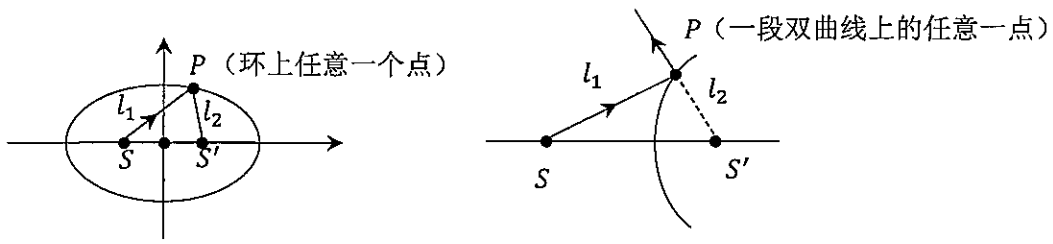


图 4

凭据费马原理

（1）证明椭圆环中焦点 S、S' 之间必有几何光学中的实物~实像关系；

（2）证明相对图 4 右侧的一段固定双曲线的外焦点 S 与内焦点的 S' 之间有实物~虚像关系。

学校＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 准考证号＿＿＿＿＿＿ 考场＿＿＿＿＿＿

**********密**********封**********线**********

14.（15 分）3 维空间正方体（即立方体）顶点数 $N_3=8$，棱数 $L_3=12$。为了一致，将 2 维空间正方形规范地称为 2 维空间正方“体”，其顶点数 $N_2=4$，棱数 $L_2=4$。将 1 维空间的一条直线段称为 1 维空间“正方体”，其顶点数 $N_1=2$，棱数 $L_1=1$。

（1）试用递推方法，求出 $K(K\geq 1)$ 维空间正方体的顶点数 N_K 和棱数 L_K。

取 K 维空间正方体对角线（两个相距最远的顶点的直连线）中的一个顶点为原点，以正方体单个棱长为坐标轴的单位长度，设置 K 维空间正交系 $\{x_1、x_2\cdots x_K\}$。则被选为坐标系原点的坐标量 x_i 均取为零。

简化正方体：

为讨论简化，如果正方体各顶点的任一坐标量 x_i 只为 0 或 1，即不会是 ± 2、$\pm 3\cdots$，则此正方体称为简化正方体。

若无任何说明，下述讨论的正方体均为简化正方体。

将

顶点的 $\sum_{i=1}^{K}x_i=j$ 的顶点，合称为第 j 组顶点

第 j 组顶点的顶点数为 C_K^j

即有 $j=0$：$C_K^j=1$：（第 0 组顶点只有一个顶点，即为坐标原点）

$j=1$：$C_K^j=K$

$j=K$：$C_K^K=1$：（第 K 组顶点只有一个顶点，即为对角线的另一个顶点）

（2）取四维空间正方体，其第 0 组的唯一顶点，有可能通过某条棱与第 1 组顶点中的一个顶点连接，又有可能通过另一条棱与第 1 组顶点中的另一个顶点连接。将这些可存在的棱称为两个相邻顶点组之间的连接棱。将第 0 组的顶点与第 1 组的顶点之间可存在的连接棱条数总和记为 α_0。

取 K 维空间正方体的第 j 组顶点与第 $j+1$ 组顶点之间可存在的连接棱条数总和记为 α_j。

再设 K 维空间正方体的每条棱都是电阻为 R 的电阻棒，再设外界电流从 $j=0$ 顶点流入，从 $j=K$ 顶点流出，将这两个顶点间的电压记为 U_{0K}，这两个顶点之间的等效电阻记为 R_{0K}。

（2.1）取某个 3 维空间正方体所在 3 维正交坐标系 $0-x_1$、x_2、x_3 中，画出此正方体的几何结构图。参考此图，试求

$$\alpha_0、\alpha_1、\alpha_2 \text{ 和 } U_{0K}、R_{0K}$$

（2.2）改取 4 维空间正方体，试求

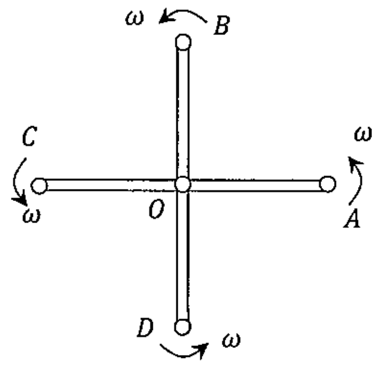
$$\alpha_0、\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3 \text{ 和 } U_{0K} \text{ 和 } R_{0K}$$

学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

********密********封********线********

三、限做题（根据考生类别选做）

15.（20 分）用长度同为 L，质量都为 m 的均匀光滑长杆 AC、BD，在 O 处连接成一个图示的杆架。且在 A、B、C、D 和 O 处都有一个光滑的圆形小孔。将杆架平放在光滑水平桌面上。



（1）开始时，杆架绕着 O 孔（或者说绕着过 O 孔的几何轴）以逆时针方向的角速度 ω 旋转。而后将一根光滑的实物轴插入 A 孔，使杆架绕着此轴转动，试求杆架绕着此轴转动稳定后，杆架旋转的角速度 ω_A 转动方向和大小。

（2）杆架绕轴稳定转动后某时刻，快速将 A 轴拔去，随即将另一根光滑的实物轴快速插入 B 孔，使杆架绕着此轴转动。再求稳定后，杆架绕 B 轴旋转的角速度 ω_B 方向和大小。

（3）将开始时杆架绕 O 孔轴转动的动能记为 E_{KO}；将最后杆架绕 B 轴转动的动能记为 E_{KB}。

再引入

比例数 $\alpha = E_{KB}/E_{KO}$

试求 α，

若 $\alpha > 1$：请给出定性解释；

若 $\alpha = 1$：请给出定性解释；

若 $\alpha < 1$：请给出定性解释。

学校________ 姓名________ 准考证号________ 考场________

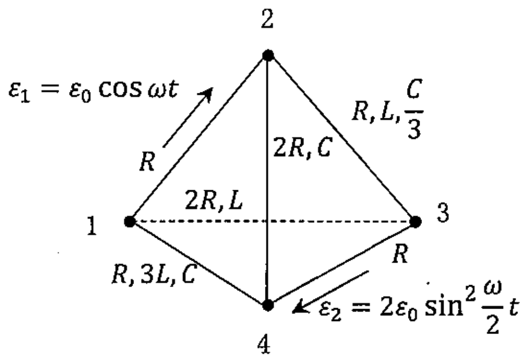
****************密****************封****************线****************

16.（20 分）四面体的四个顶点分别记为 1、2、3、4，每条棱上用理想导线串接的电阻、电感、电容和电源的参量均已在图中示出，且有 $\omega L=\frac{1}{\omega C}=R$ 。设电路已处于稳定状态，试用交流电路复数法求解下述各量。

（1）顶点 2 到顶点 1 的实电压 $u_{21}(t)$ 和顶点 4 到顶点 3 的实电压 $u_{43}(t)$；

（2）顶点 4 到顶点 1 那条棱上的实电流 $i_{41}(t)$；

（3）顶点 4 到顶点 1 那条棱上的瞬时功率 $p_{41}(t)$ 及其平均值 $\bar{P}_{41}$ 。



学校______ 姓名______ 准考证号______ 考场______

********密********封********线********

17.（20 分）一半径为 R，总电量为 $Q>0$ 的均匀带电球面，电学教材中通常都用静电场的高斯定理，求得全空间静电场强分布为

$$\vec{E}(\vec{r}):\begin{cases}=0 & r<R\\ =\dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & r>R\end{cases}$$

为何未给出球面上的场强 $\vec{E}(\vec{R})=\cdots$

有一位同学说，因为静电场高斯定理成立的条件是高斯面上不可有电荷，所以不能将高斯面取在球面上用高斯定理求得 $\vec{E}(\vec{R})$。

1.你若认为那位同学说的对，请说明为何静电场高斯定理成立的条件是高斯面上不可有电荷？

2.进而说明，若改取为均匀带电球体，为何教材中可在有电荷的球体内取与球体共心的球面为高斯面，用高斯定理求得了球体内的场强 $\vec{E}(\vec{r})_{r<R}$ 的分布？

3.电荷面密度为常量 $\sigma>0$ 的无穷大均匀带电平面，先求出平面上场强分布；再应用高斯定理求出平面两侧空间电场 $\vec{E}$ 分布。

4.静止在静电场中带电（q）质（m）点 P，受电场力 $\vec{F}=q\vec{E}$ 的作用而加速运动，使 P 的动能增加。据普适的能量守恒原理，P 的动能增加，一定来源于外界某种能量的减少。可取的解释是，静电场通过电场力 $\vec{F}=q\vec{E}$ 对 P 作功，使得电场中有相应的一部分能量转化为 P 的所增动能。

静电场可以输出能量，表明静电场存储有能量，称为电场能量。

电作用理论已得知，真空静电场能量的能量密度 w_e 与场强 $\vec{E}$ 的关系为 $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$，据此试求均匀带电球面 (Q,R) 上的场强大小 $E(R)$。

2019年大学生物理竞赛
解答和给分

一、填空题（共10题，每题2空，每空3分，共60分）

1. βR， $\beta^2 t^2 R$。

2. $l/4$， $3l/4$。

3. B，B。

4. 965， 1025。

5. 小，大。

6. $p(V-V_0)=\nu RT_0$， $\left(\frac{5}{2}-\frac{V}{V_0}\right)R$。

7. 先使带电质点 $\vec{v}=0$，可测得其受力 $\vec{F}_1=q\vec{E}\Rightarrow\vec{E}=\vec{F}_1/q$。
令 $\vec{v}\neq 0$，可测出受力 $\vec{F}_2$，即可得 $\vec{F}_3=\vec{F}_2-\vec{F}_1=q\vec{v}\times\vec{B}$，通过数学关系。

8. （1），（3）。

9. σT^4， b/T。

10. $\sqrt{3}m_0c/F_x$ ，m_0c^2/F_x。

二、计算题（共4题，每题15分，共60分）

11.（15分）

解：

抛物线 C 处曲率半径 ρ_C：

将 A 球从 $t=0$ 开始运动，则有

$$\begin{cases}a_x=0\\a_y=g\end{cases}\quad\begin{cases}v_x=v_0\\v_y=gt\end{cases}\quad\begin{cases}x=v_0t,t=\dfrac{x}{v_0}\\y=\dfrac{1}{2}gt^2=\dfrac{gx^2}{2v_0^2}\end{cases}\qquad（2分）$$

将 A 球质量记为 m_0，A 球到达 C 处，速度记为 v，能量守恒可得：

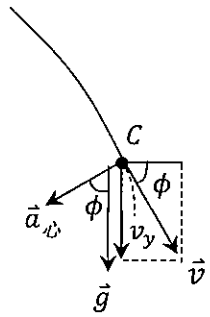
$$\frac{1}{2}m_0v^2-\frac{1}{2}m_0v_0^2=m_0gh\Rightarrow v^2=v_0^2+2gh\qquad（1分）$$

参考题解图1，有

$$\cos\phi=\frac{v_0}{v}=\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}\quad(1)\qquad（1分）$$

$$a_{心}=g\cos\phi=gv_0\Big/\sqrt{v_0^2+2gh}$$

$$\rho_C=\frac{v}{a_{心}}=(v_0^2+2gh)^{\frac{3}{2}}/gv_0\quad(2)\qquad（3分）$$



题解图1

B 环到达 C 处时金属丝的压力 $F(h)$：

B 环到达 C 处时，x 方向、y 方向的速度方向都不会变。合成速度记为 $\vec{v}^*$，其方向仍是 C 点处抛物线的切线方向，即与题解图1中的 $\vec{v}$ 方向相同，如题解图2所示。$\vec{v}_x$ 与 $\vec{v}^*$ 夹角 ϕ，以及 $\vec{g}$ 与 $\vec{a}_{心}$ 夹角也为 ϕ，与题解图2所示相同。在 C 处，环 B 受金属丝弹力 $\vec{N}$ 的方向是 C 处垂直于切线方向朝外的法向，其大小 N 与 $F(h)$ 相同。B 环从 O 到 C 运动过程中能量守

恒：

$$\frac{1}{2}mv^{*2}-\frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{4}=mgh$$

$$\Rightarrow v^{*2}=\frac{v_0^2}{4}+2gh \quad （2分）$$

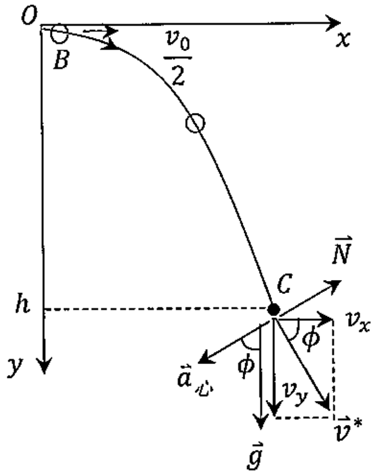
环 B 在 C 处的向心力由重力 $m\vec{g}$ 、金属丝对环 B 的弹力 $\vec{N}$ 组合提供合成，即有

$$\frac{mv^{*2}}{\rho_C}=mg\cos\phi-N \quad （2分）$$

将前已给出的 $\cos\phi$ 、ρ_C 表述式（1)、(2)

$$\cos\phi=v_0/\sqrt{v_0^2+2gh} \quad ,$$

$$\rho_C=(v_0^2+2gh)^{\frac{3}{2}}/gv_0$$



题解图 2

代入后，得

$$N=mg\cos\phi-m\frac{v^{*2}}{\rho_C}=\frac{mgv_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}-\frac{m\left(\frac{v_0^2}{4}+2gh\right)}{\frac{(v_0^2+2gh)^{\frac{3}{2}}}{gv_0}}=\frac{mgv_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}-\frac{mgv_0\left(\frac{v_0^2}{4}+2gh\right)}{(v_0^2+2gh)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}mg}{\left(1+\frac{2gh}{v_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

即得

$$F(h)=N=\frac{3}{4}mg/\left(1+\frac{2gh}{v_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad （4分）$$

12. （15分）

解：与金属发生化合反应的氯气分子对玻璃板的碰撞可以看作是完全非弹性的，不发生反应的则认为是弹性的。对于前者，氯气分子给予玻璃板的冲量是后者的一半。

设氯气的分子数密度为 n，温度为 T，则金属板上未涂金属的表面因受氯气分子弹性碰撞所得压强与容器壁所得压强同为氯气压强 p，且有

$$p=nkT \quad （2分）$$

每一个氯气分子遇金属发生化合反应的概率为 q，不发生反应的概率为 $1-q$，故 n 中有 qn 个分子与金属面发生完全非弹性碰撞，对压强的贡献为

$$p_1'=\frac{1}{2}(qn)kT=\frac{1}{2}qp \quad （1分）$$

n 中有 $(1-q)n$ 个分子与金属面发生弹性碰撞，对压强贡献为

$$p_2'=(1-q)nkT=(1-q)p \quad （1分）$$

因此，玻璃板涂金属表面所得压强为

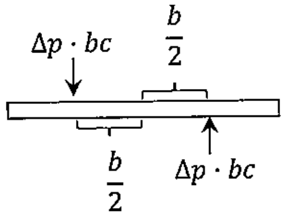
$$p'=p_1'+p_2'=\left(1-\frac{q}{2}\right)p$$

p 与 p' 的压强差为

$$\Delta p=p-p'=\frac{1}{2}qp \quad （1分）$$

Δp 形成的前后一对压力均匀分布在未涂金属的玻璃板前后两个半侧面上，它们相对玻璃板中央轴有非零力矩，等效力臂为 $b/2$，如题解图 1 所示。Δp 形成的力矩大小为

$$M' = 2[\Delta p \cdot (bc)] \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{2} q b^2 c p \qquad （2 分）$$



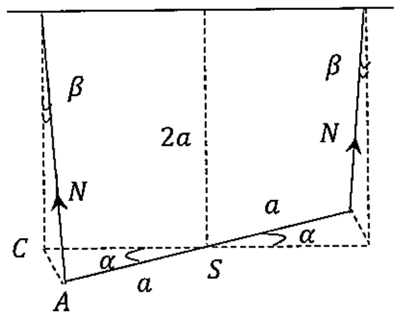
题解图 1

因 M' 的作用，玻璃板转过小角度 α，如题解图 2 所示。设细线张力为 N，张力的水平分量为 $N\sin\beta$，其中 β 为细线转过的小角度，对应力矩为

$$M = 2[(N\sin\beta) \cdot a \cdot \sin\angle SAC]$$

$$\angle SAC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow M = 2aN\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2} \qquad （2 分）$$



题解图 2

由 $\overline{AC}$ 对应放热几何关系可得

$$2a\beta = \overline{AC} = a\alpha$$

再考虑到 α 为小角度，即有

$$\beta = \frac{\alpha}{2}, \sin\beta = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2} = 1$$

代入 M 表述式，可得

$$M = aN\alpha \qquad （2 分）$$

再由竖直方向上力平衡式

$$mg = 2N \cdot \cos\beta = 2N$$

可得 $N = \frac{1}{2}mg$，于是有

$$M = \frac{1}{2}mga \cdot \alpha \qquad （2 分）$$

玻璃板平衡时有

$$M' = M$$

即

$$\frac{1}{2}qb^2cp = \frac{1}{2}mga \cdot \alpha$$

由此可算得玻璃板转过的小角度为

$$\alpha = qb^2cp/mga \qquad （2 分）$$

13.（15 分）

解：（1） $L_{SS'} = L_1 + L_2 = l_1 + l_2$

$\Rightarrow L_{SS'}$ 为常量　　（7 分）

（2） $L_{SS'} = L_1 + L_2 = l_1 - l_2$

$\Rightarrow L_{SS'}$ 为常量　　（8 分）

14.（15 分）

解：（1）K（≥ 2）维空间正方体由 $K-1$ 维空间正方体沿着新增的第 K 个垂直方向延展而成。据此，可建立递推关系：

$$N_K = 2N_{K-1}, N_1 = 2$$

$$L_K = 2L_{K-1} + N_{K-1}, \qquad L_1 = 1$$

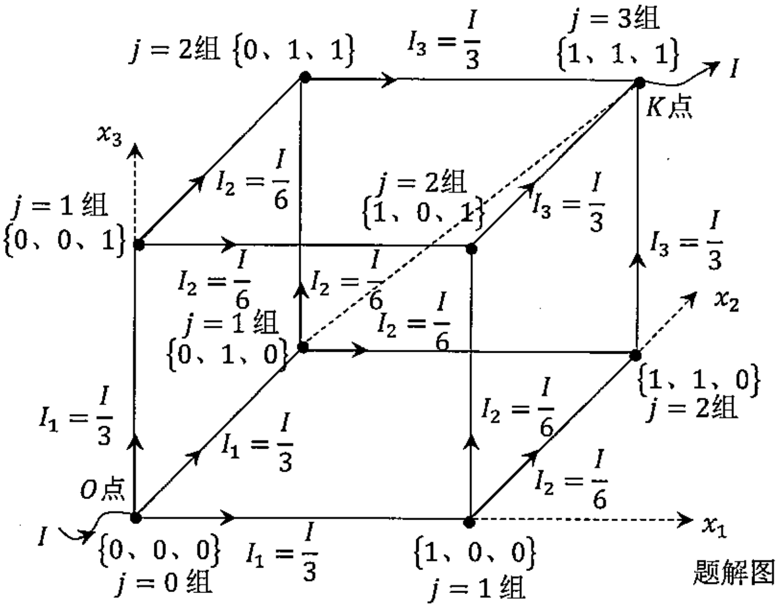
即得

$$N_K = 2^K \qquad （1分）$$

$$L_K = 2(2L_{K-2} + 2^{K-2}) + 2^{K-1} = 2^{K-1}L_1 + (K-1)\cdot 2^{K-1}$$

$$\Rightarrow L_K = K \cdot 2^{K-1} \qquad （1分）$$

（2.1）取3维空间正方体所在3维正交坐标系 $0-x_1$、x_2、x_3 中的几何结构如题解图所示



题解图

$j=0$组：顶点$\{0、0、0\}$ $\Rightarrow$ $j=1$组：顶点$\begin{cases}\{1、0、0\}\\\{0、1、0\}\\\{0、0、1\}\end{cases}$

$$\alpha_0 = 3 \qquad （1分）$$

$\Rightarrow j=2$组：顶点$\begin{cases}\{1、1、0\}\\\{1、0、1\}\\\{0、1、1\}\end{cases}$ $\quad\Rightarrow j=3$组：顶点：$\{1、1、1\}$

$\alpha_1 = 6$（1分） $\qquad\qquad \alpha_2 = 3$（1分）

设外界电流 I 从 0 点流入，电流又经 3 条对称的连接棱等分为分流 $I_1=\frac{I}{3}$ 流到 $j=1$ 组各个顶点，

流入 $j=1$ 组 3 个顶点的合电流仍为 I，又经 6 条对称的连接棱等分的分流 $I_2=\frac{I}{6}$ 流到 $j=2$ 组各个顶点。

流入 $j=2$ 组 3 个顶点的合电流仍为 I，又经 3 条对称的连接棱等分的分流 $I_3=\frac{I}{3}$ 流到 $j=3$ 组顶点：K 点，合电流仍为 I，再经 K 点流到外界。

从 0 点任取一条由 3 条棱中 3 个分流 I_1、I_2、I_3 合成到达 K 点，即得

$$U_{0K}=I_1R+I_2R+I_3R=\frac{I}{3}R+\frac{I}{6}R+\frac{I}{3}R=\frac{5}{6}IR$$

继而可得

$$R_{0K}=\frac{U_{0K}}{I}=\frac{5}{6}R \qquad （3 分）$$

（2.2）参考（2.1）的解，考虑到 4 维空间正方体各顶点坐标量 $\{x_1、x_2、x_3、x_4\}$

x_i 只可取 0 或 1

不难可得

$j=0$ 组：1 个顶点：$\{0、0、0、0\}$

$j=1$ 组：4 个顶点：$\{1、0、0、0\}$，$\{0、1、0、0\}$，$\{0、0、1、0\}$，$\{0、0、0、1\}$

这两组顶点间有 $\alpha_0=4$ 条对称的连接棱。（1 分）

$j=1$ 组：

顶点 $\{1、0、0、0\}$ 可通过 3 条连接棱到达 $j=2$ 组 3 个顶点 $\begin{matrix}\{1、1、0、0\}\\\{1、0、1、0\}\\\{1、0、0、1\}\end{matrix}$

顶点 $\{0、1、0、0\}$ 可通过 3 条连接棱到达 $j=2$ 组 3 个顶点 $\begin{matrix}\{1、1、0、0\}\\\{0、1、1、0\}\\\{0、1、0、1\}\end{matrix}$

顶点 $\{0、0、1、0\}$ 可通过 3 条连接棱到达 $j=2$ 组 3 个顶点 $\begin{matrix}\{1、0、1、0\}\\\{0、1、1、0\}\\\{0、0、1、1\}\end{matrix}$

顶点 $\{0、0、0、1\}$ 可通过 3 条连接棱到达 $j=2$ 组 3 个顶点 $\begin{matrix}\{1、0、0、1\}\\\{0、1、0、1\}\\\{0、0、1、1\}\end{matrix}$

结论：$j=1$ 组 4 个顶点，每个顶点坐标有 1 个 1、3 个 0，3 个 0 中有 1 个 0 可升为 1，共有 $C_3^1=3$ 种选择，故 $j=1$ 组 4 个顶点的每个顶点都可有 3 条向外连接棱到达 $j=2$ 组的顶点，即 $j=1$ 组 4 个顶点共发出 4×3 条连接棱到达 $j=2$ 组顶点。即 $j=1$ 组与 $j=2$ 组顶点之间共有

$\alpha_1=12$ 条对称的连接棱：（1 分）

这 12 条连接棱的外端点有 12 个，这些端点的坐标彼此可能不同，也可能相同。例如 $j=1$ 组顶点 $\{1、0、0、0\}$ 与顶点 $\{0、1、0、0\}$ 各自对应的一个外端点同为 $j=2$ 组真实顶点 $\{1、1、0、0\}$。

不难看出，前面给出的 12 条对称连接棱的外端点 12 个坐标量中，独立不重复的坐标量是下述 6 个：

$j=2$ 组：$\{1、1、0、0\}$，$\{1、0、1、0\}$，$\{0、1、1、0\}$，$\{1、0、0、1\}$，$\{1、0、0、1\}$，$\{0、0、1、1\}$

$\Rightarrow$ 即 $j=2$ 组真实顶点即为上述 6 个独立坐标量对应的 6 个顶点。

其实 $j=2$ 组真实顶点坐标 $\{x_1、x_2、x_3、x_4\}$ 必定有 2 个 0、2 个 1，只能取

$$C_4^2=\frac{4\cdot 3}{2}=6\text{ 个}$$

$j=3$ 组：真实坐标量 $\{x_1、x_2、x_3、x_4\}$ 必须有 1 个 0、3 个 1，

即有 $C_4^1=C_4^3=4$ 个

但 $j=2$ 组顶点与 $j=3$ 组顶点间连接棱的条数 α_2 需从 $j=2$ 组真实顶点数为 6 开始讨论。其中每一个顶点坐标量 $\{x_1、x_2、x_3、x_4\}$ 中有 2 个 1、2 个 0，为升到 $j=3$ 组顶点，其中 2 个 1 须升为 3 个 1，因此 2 个 0 中须有 1 个 0 升为 1，显然有 2 种选择，即 $j=2$ 组每个真实顶点需发出 2 条不同方向的连接棱，共计有

$\alpha_2=6\times 2=12$ 条对称的连接棱。（1 分）

$j=3$ 组真实顶点有 4 个，$j=4$ 组真实顶点只有 1 个 $\{1、1、1、1\}$

很易得到 $j=3$ 组与 $j=4$ 组顶点间共有

$\alpha_3=4$ 条对称的连接棱。（1 分）

设外界电流 I 从 0 点流入，电流又经 $\alpha_0=4$ 条对称的连接棱等分为分流 $I_1=\frac{I}{4}$ 分别流到 $j=1$ 组各个顶点。

流入 $j=1$ 组 4 个真实顶点的合成电流仍为 I，又经 $\alpha_1=12$ 条对称的连接棱等分为分流 $I_2=\frac{I}{12}$ 流到 $j=2$ 组各个顶点。流入 $j=2$ 组 6 个真实顶点的合电流仍为 I。又经 $\alpha_2=12$ 条对称的连接棱等分为分流 $I_3=\frac{I}{12}$ 流到了 $j=3$ 组各个顶点，合电流仍为 I，又经 $\alpha_3=4$ 条对称的连接棱等分为分流 $I_4=\frac{I}{4}$ 流到了 $j=4$ 组顶点：$\{1、1、1、1\}$ 点，合电流仍为 I，再经 K 点 $\{1、1、1、1\}$ 流到外界。

从 0 点任何一条由 4 条相邻组间连接对应的 4 段分段电流 I_1、I_2、I_3、I_4 合成到达 $j=4$ 组顶点 $\{1、1、1、1\}$ 点，即得

$$U_{0K}=I_1R+I_2R+I_3R+I_4R=\frac{I}{4}R+\frac{I}{12}R+\frac{I}{12}R+\frac{I}{4}R=\frac{2}{3}IR$$

$$R_{0K}=\frac{U_{0K}}{I}=\frac{2}{3}R \quad （3 分）$$

15.（20 分）

解：

AC 杆、BD 杆各自绕 O 孔转动惯量同为 $\frac{1}{12}ML^2$

AC 杆、BD 杆各自绕 A 孔、B 孔、C 孔、D 孔转动惯量同为 $\frac{1}{3}ML^2$

杆架绕 O 孔转动惯量同为 $\frac{1}{6}ML^2$

杆架绕 A 孔、B 孔、C 孔、D 孔转动惯同为 $\frac{2}{3}ML^2$

（1）

插入 A 轴前，杆架质心（O 点）速度为零。

相对地面参考系的 A 孔角动量 = 相对地面参考系的 O 孔角动量：

$$\Rightarrow L_O = I_O\omega = \frac{1}{6}ML^2\omega\text{，转动方向仍为逆时针转动方向} \quad （3 分）$$

杆架动能：

$$E_{KO} = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}ML^2\omega^2 = \frac{1}{12}ML^2\omega^2$$

插入 A 轴后，

杆架相对地面参考系的 A 孔角动量

$$L_A = I_A\omega_A = \frac{2}{3}ML^2\omega_A \quad （3 分）$$

插入 A 轴前后，以 A 孔为参考点，杆架所受外力矩均为零，故角动量不变，即

$$L_A = L_O \Rightarrow \omega_A = \frac{\omega}{4} \quad \text{转动方向同为逆时针转动方向}$$

杆架动能：$E_{KA} = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{12}ML^2\omega^2\right) = \frac{1}{4}E_{KO}$ （2 分）

（2）

拔去 A 轴后，B 轴尚未插入 B 孔，此时质心 O 的动量相对 B 孔角动量为零。（2 分）

因此，此时杆架相对地面参考系 B 孔的角动量等于此时杆架相对质心 O 的角动量，即为

$$L_{OB} = I_O\omega_A = \frac{1}{6}ML^2\cdot\frac{1}{4}\omega = \frac{1}{24}ML^2\omega \quad （2 分）$$

B 孔插入转轴后，外力对 B 孔力矩仍为零，故此后杆架对 B 轴角动量为

$$L_B = L_{OB} \Rightarrow I_B\omega_B = \frac{1}{24}ML^2\omega \text{，} I_B = \frac{2}{3}ML^2$$

$$\Rightarrow \omega_B = \frac{1}{16}\omega \quad \text{转动方向仍为逆时针方向。（2 分）}$$

（3）

此时杆架动能为

$$E_{KB} = \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{16}\omega\right)^2 = \frac{1}{16}E_{KA} \quad （2 分）$$

$$\Rightarrow E_{KB} = \frac{1}{16}E_{KA} = \frac{1}{16}\times\frac{1}{4}E_{KO}$$

$$\Rightarrow \alpha = E_{KB}/E_{KO} = \frac{1}{64} < 1 \quad （2 分）$$

$\alpha < 1$ 的定性解释：插入实物 A 轴或 B 轴的过程中，杆架中水平运动部位的固态物质与无水平方向运动的细杆相遇部位固态物质间发生类似完全非弹性的碰撞事件，这会导致杆架动能减少。 （2 分）

16.（20 分）

解：

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cos \omega t \Longrightarrow \tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_0 e^{j\omega t} \qquad （1 分）$$

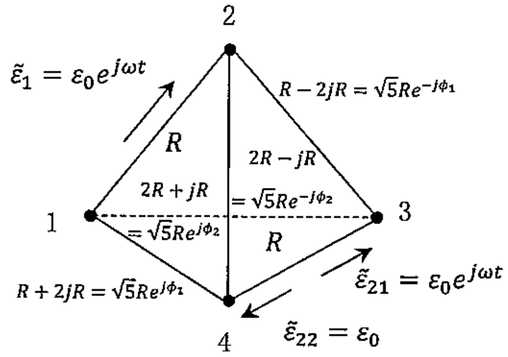
$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0 \sin^2 \frac{\omega}{2} t = -\varepsilon_0 \cos \omega t + \varepsilon_0$$

$$\Longrightarrow \tilde{\varepsilon}_2 = -\tilde{\varepsilon}_{21} + \tilde{\varepsilon}_{22} \Longrightarrow \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{21} = \varepsilon_0 e^{j\omega t} \\ \tilde{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_0 \end{cases} \qquad （1 分）$$

$\tilde{\varepsilon}_1$、$\tilde{\varepsilon}_{21}$ 对应的各棱复阻抗分布如题解图 1 所示，其中引入的复阻抗参数为

$\begin{cases} \phi_1 = \arctan 2 \\ \phi_2 = \arctan \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}$（1 分）

据线性分解，原电路电流分布可处理为 $\tilde{\varepsilon}_1$、$\tilde{\varepsilon}_{21}$、$\tilde{\varepsilon}_{22}$ 单独供电时电流分布的叠加。



题解图 1

i）$\tilde{\varepsilon}_1$ 供电

各条棱上电流方向设为题解图 2 所示。

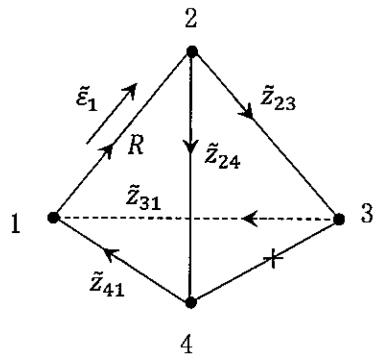
因

$$\tilde{z}_{23}/\tilde{z}_{31} = \tilde{z}_{24}/\tilde{z}_{41}$$

故

$\widetilde{U}_{34} = 0$，$\tilde{I}_{34} = 0$，3、4 间可被断开

（2 分）



题解图 2

$$\tilde{z}_{231} = \tilde{z}_{23} + \tilde{z}_{31} = 3R - jR = \sqrt{10}Re^{-j\phi^*},$$

$$\phi^* = \arctan \frac{1}{3}$$

$$\tilde{z}_{241} = \tilde{z}_{24} + \tilde{z}_{41} = 3R + jR = \sqrt{10}Re^{j\phi^*}$$

$$\tilde{z}_{2(34)1} = {\tilde{z}_{231} \cdot \tilde{z}_{241}}/{\tilde{z}_{231} + \tilde{z}_{241}} = \frac{5}{3}R$$

$$\tilde{z}_{总} = R + \tilde{z}_{2(34)1} = \frac{8}{3}R$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{I}_{12} &= \tilde{\varepsilon}_1/\tilde{z}_{总} = \tfrac{3\varepsilon_0}{8R} e^{j\omega t} \\ \widetilde{U}_{21} &= \tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{I}_{12}R = \tfrac{5}{8}\varepsilon_0 e^{j\omega t}\ , \end{aligned}\right\}（1 分） \qquad \widetilde{U}_{43} = -\widetilde{U}_{34} = 0$$

4~1 棱：

$$\left.\begin{aligned} \tilde{I}_{41} &= \tilde{I}_{241} = \widetilde{U}_{21}/\tilde{z}_{241} = \tfrac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \tfrac{\varepsilon_0}{R} e^{j(\omega t - \phi^*)}\ ,\ \phi^* = \arctan \tfrac{1}{3} \\ \widetilde{U}_{41} &= \tilde{I}_{41} \cdot \tilde{z}_{41} = \tfrac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \tfrac{\varepsilon_0}{R} e^{j(\omega t - \phi^*)} \cdot \sqrt{5}Re^{j\phi_1} = \tfrac{5}{8\sqrt{2}} \varepsilon_0 e^{j(\omega t + \phi_1 - \phi^*)} \end{aligned}\right\}（1 分）$$

ii）$\tilde{\varepsilon}_{21}$ 供电

各条棱上电流方向设为题解图 3 所示。

因

$$\tilde{z}_{23}/\tilde{z}_{24} = \tilde{z}_{31}/\tilde{z}_{41}$$

故

$\widetilde{U}_{21} = 0$，$\tilde{I}_{21} = 0$，1、2 间可被断开 （1 分）

$$\tilde{z}_{324} = \tilde{z}_{23} + \tilde{z}_{24} = 3R - 3jR = 3\sqrt{2}Re^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

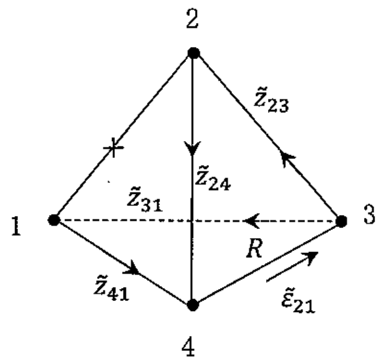
$$\tilde{z}_{314}=\tilde{z}_{31}+\tilde{z}_{41}=3R+3jR=3\sqrt{2}Re^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\tilde{z}_{3(21)4}={}^{\tilde{z}_{324}\cdot\tilde{z}_{314}}\!/_{\tilde{z}_{324}+\tilde{z}_{314}}=3R$$

$$\tilde{z}_{总}=R+\tilde{z}_{3(21)4}=4R$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{I}_{43}=\tilde{\varepsilon}_{21}/\tilde{z}_{总}=\tfrac{\varepsilon_0}{4R}e^{j\omega t}\\&\widetilde{U}_{34}=\tilde{\varepsilon}_{21}-\tilde{I}_{43}R=\tfrac{3}{4}\varepsilon_0e^{j\omega t}\end{aligned}\right\}\text{（1 分）}$$

$$\Longrightarrow\widetilde{U}_{43}=-\widetilde{U}_{34}=-\tfrac{3}{4}\varepsilon_0e^{j\omega t},\ \widetilde{U}_{21}=0$$



题解图 3

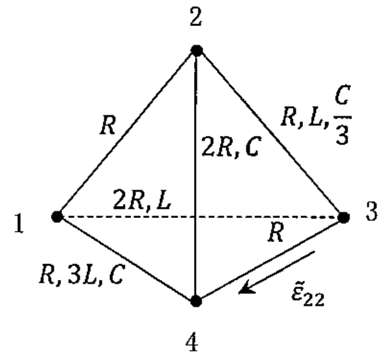
4~1 棱：

$$\tilde{I}_{314}=\widetilde{U}_{34}/\tilde{z}_{314}=\tfrac{\varepsilon_0}{4\sqrt{2}R}e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)}$$

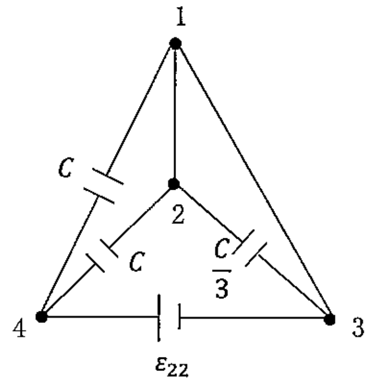
$$\left.\begin{aligned}&\tilde{I}_{41}=-\tilde{I}_{314}=-\tfrac{\varepsilon_0}{4\sqrt{2}R}e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)}\\&\widetilde{U}_{41}=\tilde{I}_{41}\cdot\tilde{z}_{41}=-\tfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\varepsilon_0e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{4}+\phi_1\right)}\end{aligned}\right\}\text{（1 分）}$$

iii）$\tilde{\varepsilon}_{22}$ 供电

题解图 4 所示的原电路可等效为题解图 5 所示的电路，顶点 1、2、3 与直流电源 $\tilde{\varepsilon}_{22}$ 负极等势。2~3 棱上电容电压为零，4~1 棱（以及 4~2 棱）电压即为 $\tilde{\varepsilon}_{22}$，即有



题解图 4



题解图 5

$$\widetilde{U}_{21}=0\,,\widetilde{U}_{43}=\tilde{\varepsilon}_{22}=\varepsilon_0\,,\widetilde{U}_{41}=\tilde{\varepsilon}_{22}=\varepsilon_0\,,\tilde{I}_{41}=0\qquad\text{（2 分）}$$

本题三小问所求各量：

（1）

$$\widetilde{U}_{21}=\frac{5}{8}\varepsilon_0e^{j\omega t}+0+0=\frac{5}{8}\varepsilon_0e^{j\omega t}$$

$$\widetilde{U}_{43}=0-\frac{3}{4}\varepsilon_0e^{j\omega t}+\varepsilon_0$$

$$\Longrightarrow u_{21}=\tfrac{5}{8}\varepsilon_0\cos\omega t\ ,\ u_{43}=\varepsilon_0\left(1-\tfrac{3}{4}\cos\omega t\right)\qquad\text{（2 分）}$$

（2）

$$\tilde{I}_{41}=\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_0}{R}e^{j(\omega t-\phi^*)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_0}{R}e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)}+0$$

$$\Longrightarrow i_{41}=\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_0}{R}\cos(\omega t-\phi^*)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_0}{R}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\tfrac{1}{4\sqrt{2}}\tfrac{\varepsilon_0}{R}\left[\tfrac{\sqrt{5}}{2}\cos(\omega t-\phi^*)-\cos\left(\omega t-\tfrac{\pi}{4}\right)\right]\ ,\ \phi^*=\arctan\tfrac{1}{3}\qquad\text{（1 分）}$$

（3）

$$\widetilde{U}_{41}=\frac{5}{8\sqrt{2}}\varepsilon_0 e^{j(\omega t+\phi_1-\phi^*)}-\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\varepsilon_0 e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{4}+\phi_1\right)}+\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow u_{41}=\frac{5}{8\sqrt{2}}\varepsilon_0\cos(\omega t+\underbrace{\phi_1-\phi^*}_{\frac{\pi}{4}})-\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\varepsilon_0\cos\left(\omega t+\underbrace{\phi_1-\frac{\pi}{4}}_{\phi^*}\right)+\varepsilon_0\,,\phi_1=\arctan 2$$

（1 分）

$$\begin{aligned}p_{41}(t)=\ & i_{41}(t)\cdot u_{41}(t)\\
=&\frac{5\sqrt{5}}{2^7}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos(\omega t-\phi^*)\cos(\omega t+\phi_1-\phi^*)\\
&-\frac{5}{2^6}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos(\omega t-\phi^*)\cos\left(\omega t+\phi_1-\frac{\pi}{4}\right)\\
&+\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos(\omega t-\phi^*)\\
&-\frac{5}{2^6}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\cos(\omega t+\phi_1-\phi^*)\\
&+\frac{\sqrt{5}}{2^5}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\omega t+\phi_1-\frac{\pi}{4}\right)\\
&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

（2 分）

$$\phi_1=\arctan 2\,(=63.4^\circ)\,,\phi^*=\arctan\frac{1}{3}(-18.4^\circ)\Rightarrow\phi_1-\phi^*=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

（严格证明 $\tan(\phi_1-\phi^*)=\frac{\tan\phi_1-\tan\phi^*}{1+\tan\phi_1\tan\phi^*}=1\ \Rightarrow\phi_1-\phi^*=45^\circ$）

$$\begin{aligned}\Rightarrow p_{41}(t)=&\frac{5\sqrt{5}}{2^7}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos(\omega t-\phi^*)\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\\
&-\frac{5}{2^6}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos(\omega t-\phi^*)\cos(\omega t+\phi^*)\\
&+\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos(\omega t-\phi^*)\\
&-\frac{5}{2^6}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\\
&+\frac{\sqrt{5}}{2^5}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\cos(\omega t+\phi^*)\\
&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \bar{P}_{41}=&\frac{5\sqrt{5}}{2^8}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\phi^*\right) && \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\phi^*\right)=\cos\phi_1={}^{1}\!/_{\sqrt{5}}\right)\\
&-\frac{5}{2^7}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos(2\phi^*) && \left(\cos 2\phi^*=1-2\sin^2\phi^*=\frac{4}{5}\right)\\
&-\frac{5}{2^7}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) && \left(\cos\frac{\pi}{2}=0\right)\\
&+\frac{\sqrt{5}}{2^6}\frac{\varepsilon_0^2}{R}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\phi^*\right) && \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\phi^*\right)={}^{1}\!/_{\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{5}{2^8}\frac{\varepsilon_0^2}{R}-\frac{1}{2^5}\frac{\varepsilon_0^2}{R}+\frac{1}{2^6}\frac{\varepsilon_0^2}{R}$$

$$\Longrightarrow \bar{P}_{41}=\frac{1}{2^8}\frac{\varepsilon_0^2}{R}=\frac{1}{256}\frac{\varepsilon_0^2}{R} \qquad （2 分）$$

17.（20 分）

解：

1.

那个同学说得对，静电场高斯定理成立的条件是高斯面上不可有电荷。 （2 分）

真空静电场的高斯定理，可由库仑定律（提供了点电荷的场强分布）和场强叠加原理组合导出。

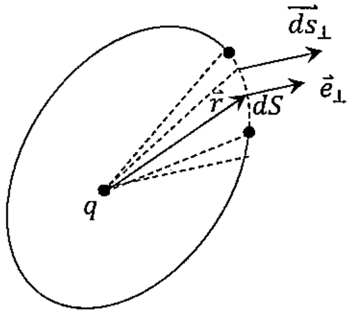
高斯定理适用的最基本对象是一个点电荷，如题解图 1 所示，在高斯面内的体区域有一个点电荷 $q>0$，它在 S 面上各位置的场强为

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

将 S 分解为一系列无穷小面元 ds，小面元法向朝外的方向矢量记为 $\vec{e}_\perp$，可构成

法向面元矢量 $\overrightarrow{ds_\perp}=ds\cdot\vec{e}_\perp$

则可导得最简单的高斯定理：



题解图 1

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\overrightarrow{ds_\perp}=\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

若 $q<0$，可导得上式仍成立

若（或 $q>0$，或 $q<0$）在 S 面外的空间区域，则可得

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\overrightarrow{ds_\perp}=0 \qquad (2)$$

如果点电荷 q 不在高斯面 S 上，则可应用场强叠加原理，很易导得

通用型高斯定理： $\oiint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\overrightarrow{ds_\perp}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{V_S内}Q_i \qquad (3)$

值得注意的是，若题解图 1 中如果点电荷 q 在 S 面上，则因 $r=0$

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\text{不可定义，}\Rightarrow \vec{E}(R)\text{或不能成立} \qquad （2 分）$$

结论：如果高斯面上有电荷（包含有限量电荷和无穷小量电荷），高斯定理不成立。

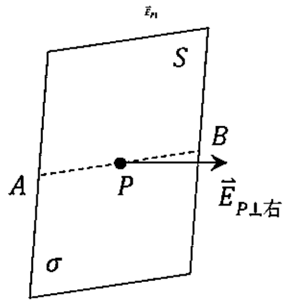
2.

均匀带电球体的电荷体密度记为常量 ρ。若在体内取一个半径 $r<R$、与球体同心的高斯面，面积可记为 S，若其厚度不为零，即使为小量 dl，体积也为小量 $dV=Sdl$，带电量为 $dq=\rho Sdl$，也为无穷小量，则不能用高斯定理来求得高斯面 S 上的场强分布。但高斯面厚度为零，高斯面上没有电荷，故可用高斯定理求得高斯面的场强分布。 （3 分）

3.

如题解图 2 所示，无穷大均匀带电平面 S 上的任何一点 P 若有与 S 面垂直朝右方向的场强分量 $\vec{E}_{P\perp}$。可将 S 面绕着 S 面上的 APB 转轴转过 $180°$，原朝右的 $\vec{E}_{P\perp右}$ 必定旋转为从 P 发出的朝左方向的 $\vec{E}_{P\perp左}$。但 S 这样旋转后其电荷分布不变，P 处仍应发出与题解图 2 一致的

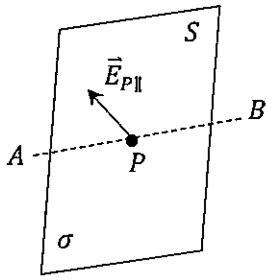
场强分量 $\vec{E}_{P\perp右}$，便产生了矛盾。解决这一矛盾的唯一可能方案是点 P 场强 $\vec{E}_P$ 的垂直于 S 面的分量 $\vec{E}_{P\perp}$ 必为零。（1分）



题解图 2

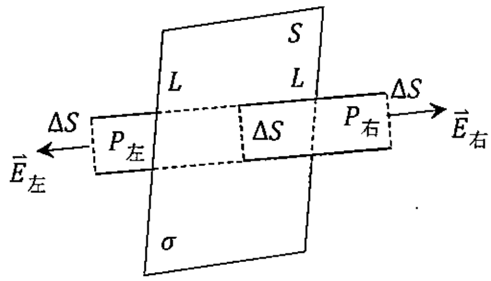
再如题解图 3 所示，S 面上任一个点 P 处场强有与 S 面平行的分量 $\vec{E}_{P\parallel}$。则可将 S 面绕着图 3 中过 P 点且与 S 面垂直的转轴 APB 转过一个角度，使得原 $\vec{E}_{P\parallel}$ 矢量也转过一个角度。又因 S 面上的电荷分布依旧，故 P 处场强 $\vec{E}_{P\parallel}$ 仍应在原方向上。解决这一矛盾的唯一可取方案是场强 $\vec{E}_P$ 在 S 面上任一方向分量均为零。（1分）

结论：S 面上场强处处为零。也可取其它方法得出此结论。（1分）



题解图 3

参考题解图 4，S 面左、右两侧对称。首先很容易类似上述论证，可得知左、右侧空间任何一点场强沿着与 S 面平行方向的分量都为零。图中画出了形如两端封口的圆柱筒形的高斯面。上、下两条线为圆柱筒的侧面，左、右两条短虚线为左、右两个端面，面积同为 ΔS，与 S 面相距同为 L。$P_{左}$、$P_{右}$ 分别为左、右端面的代表点。左、右端面各自的场强 $\vec{E}_{左}$、$\vec{E}_{右}$，方向相反，大小相同。$\vec{E}_{左}$ 方向朝左，电通量为正的 $E_{左}\cdot\Delta S$，$\vec{E}_{右}$ 方向朝右，电通量为正的 $E_{右}\cdot\Delta S$。由高斯定理可得



题解图 4

$$E_{左}\Delta S + E_{右}\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

即得

$$E_{左} = E_{右} = \frac{\Delta S}{2\varepsilon_0} \text{与} L \text{取值无关} \quad （3分）$$

故左右两侧空间都是匀强场区。

分量均为零。

结论：S 面上场强处处为零。（也可取其它方法得出此结论。）

4.

用外力缓慢朝里推移球面电荷，参考题解图 5，有

$dF = (\sigma dS)\cdot E(R), \sigma = Q/S\ , S = 4\pi R^2$ （1分）

设位移量为 dr，则作功

$$dA=\iint_S dFdr=\iint_S \sigma E(R)dSdr$$

$=\sigma E(R)Sdr=QE(R)dr$（1 分）

外界输入能量即为 dA，全部转化为新建场区

$dV=4\pi R^2dr, E=Q/_{4\pi\varepsilon_0R^2}$ （1 分）

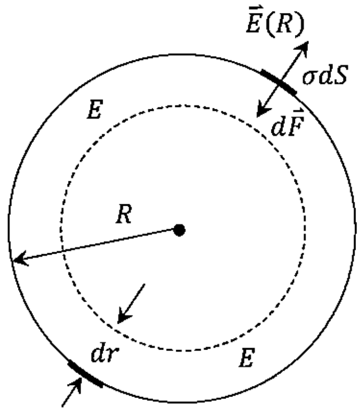
的场能，即有

$$QE(R)dr=dA=w_edV$$

$=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^24\pi R^2dr=Q^2dr/_{8\pi\varepsilon_0R^2}$ （2 分）

得

$E(R)=Q/_{8\pi\varepsilon_0R^2}$ （2 分）



题解图 5

即：均匀带电球面上的场强为从球面外无限靠近 R 球面的场强外极限

$$E(R^+)=Q/_{4\pi\varepsilon_0R^2}$$

与球面内无限靠近 R 球面的场强内极限

$$E(R^-)=0$$

的平均值：

$$E(R)=\frac{1}{2}[E(R^+)+E(R^-)]=Q/_{8\pi\varepsilon_0R^2}$$