1　解：令$A_i=\{$第i个部件需要调整$\}$，$i=1,2,3.$考虑随机变量

$$X_i=\begin{cases}1,\ 如A_i出现，\\ 0,\ 如A_i不出现，\end{cases}\qquad i=1,2,3$$

则X_i服从$0-1$分布，因此有

$$E(X_i)=P(A_i),D(X_i)=P(A_i)[1-P(A_i)].$$

按题意，因而有

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$=0.10+0.20+0.30=0.60$$

由于X_1,X_2,X_3相互独立，又有

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)$$
$$=0.10\times0.90+0.20\times0.80+0.30\times0.70$$
$$=0.46$$

2　解：设$A_k=\{$第k位乘客在第i站下车$\}$，则$P(A_k)=1/9, k=1,2,\cdots,25.$ 又因$A_1,A_2,\cdots,A_{25}$相互独立，所以，第i站无人下车（因此不停车）的概率为

$$P(\bigcap_{k=1}^{25}\overline{A_k})=\prod_{k=1}^{25}P(\overline{A_k})=(\frac{8}{9})^{25},i=1,2,\cdots,9.$$

则

$$P(X_i=0)=(\frac{8}{9})^{25},P(X_i=1)=1-(\frac{8}{9})^{25},i=1,2,\cdots,9.$$

停车次数

$$S=\sum_{i=1}^{9}X_i$$

所以
$$E(S)=\sum_{i=1}^{9}E(X_i)=\sum_{i=1}^{9}P(X_i=1)=9[1-(\frac{8}{9})^{25}].$$

3 解：先求X的概率分布. X的可能取值为：n, n+1,⋯N. 事件{X=k}表示某人看到的n个不同牌照号中最大的为k, 其余n−1个牌照号都小于k, 即有

$$p_k = P(X=k) = \frac{C_k^n - C_{k-1}^n}{C_N^n} = \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}, k = n, n+1, \cdots N.$$

利用熟知的组合公式$\sum_{k=n}^{M} C_{k-1}^{n-1} = C_M^n$，可知

$$\sum_{k=n}^{N} p_k = \sum_{k=n}^{N} \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n} = 1.$$

所以,$\{p_k$，$k = n, n+1, \cdots N\}$为X的概率分布，而其数学期望是

$$E(X) = \sum_{k=n}^{N} kp_k = \sum_{k=n}^{N} \frac{kC_{k-1}^{n-1}}{C_N^n} = \sum_{k=n}^{N} \frac{\dfrac{k!}{(n-1)!(k-n)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$= \frac{n(N+1)}{n+1} \sum_{k=n}^{N} \frac{\dfrac{k!}{n(n-1)!(k-n)!}}{\dfrac{(N+1)N!}{(n+1)n!(N-n)!}}$$

$$= \frac{n(N+1)}{n+1} \sum_{k=n}^{N} \frac{C_k^n}{C_{N+1}^{n+1}}$$

$$= \frac{n(N+1)}{n+1}.$$

即 $$N = \frac{n+1}{n} E(X) - 1.$$

4 证明：有对称性

$\dfrac{X_1}{X_1 + \ldots + X_n}, \dfrac{X_2}{X_1 + \ldots + X_n}, \cdots \dfrac{X_n}{X_1 + \ldots + X_n}$同分布，故

$$E\left(\frac{X_1}{X_1 + \ldots + X_n}\right) = E\left(\frac{X_2}{X_1 + \ldots + X_n}\right) = \cdots = E\left(\frac{X_n}{X_1 + \ldots + X_n}\right)$$

而

$$E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1 + \ldots + X_n}\right) = 1,$$

故 $$E\left(\frac{X_i}{X_1 + \ldots + X_n}\right) = \frac{1}{n}$$

因此有数学期望的线性性知：$E\left(\dfrac{X_1 + \ldots + X_k}{X_1 + \ldots + X_n}\right) = \dfrac{k}{n}.$

5 证明 利用数学期望的极值性质：

$$D(X)=E(X-EX)^2\le E(X-\frac{a+b}{2})^2\le E(b-\frac{a+b}{2})^2=\frac{(b-a)^2}{4}.$$

方差表示$r.v.$的离散程度，只有当离散程度达到最大时才能达到它的上限.
取值于[a,b]的r.v.何时离散程度最大呢？当然是把概率质量均衡地放在两个端点上，因此当

P(X=a)=P(X=b)=1/2,

时，其方差最大，计算可知等于$\frac{(b-a)^2}{4}$.

注：极值不等式推导：

$$\begin{aligned}E(X-c)^2&=EX^2-2cEX+c^2\\&=EX^2-(EX)^2+(EX)^2-2cEX+c^2\\&=E(X-EX)^2+(EX-c)^2\end{aligned}$$

6 先补充一个例子：

例 1：袋中有 N 只球，但其中白球的个数为随机变量，只知道其数学期望为 n，试求从袋中摸一球，该球为白球的概率。

解：记 X 为袋中的白球数，由题意，$EX=\sum_{k=0}^{N}kP(X=k)=n$，利用全概率公式得

$$\begin{aligned}P(\text{摸一球为白球})&=\sum_{k=0}^{N}P(\text{摸一球为白球}|X=k)P(X=k)\\&=\sum_{k=0}^{N}\frac{k}{N}P(X=k)=\frac{EX}{N}=\frac{n}{N}\end{aligned}$$

例 2：教材习题 1.24 和 2.18 的统一解法

解：设 X_i 表示进行 i 次后袋中的白球数，i=1，2，…，n.记

$$\xi_i=\begin{cases}1, & \text{第i次摸到一只白球，}\\0, & \text{第i次摸到一只黑球，}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

则 $X_i=X_{i-1}+1-\xi_i$,故$EX_i=EX_{i-1}+1-E\xi_i$

而由例 1 知

$$E\xi_i=P(\text{第}i\text{次摸到一只白球})=\frac{EX_{i-1}}{a+b}$$

于是，$EX_i=EX_{i-1}+1-\frac{EX_{i-1}}{a+b}$，即

$$EX_i=1+\frac{a+b-1}{a+b}EX_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n$$

$\mathrm{EX}_0 = a$

解得

$$EX_n = (a+b) - b\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n$$

从而，所求概率为$\frac{\mathrm{EX_n}}{\mathrm{(a+b)}} = 1 - \frac{b}{a+b}\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n$

8 解： $E(N_1+N_2 \mid N_1) = E(N_1 \mid N_1) + E(N_2 \mid N_1)$

$= N_1 + EN_2 = N_1 + \lambda_2$,所以

$$P(E(N_1+N_2 \mid N_1) = n+\lambda_2) = P(N_1 = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda_1^n}{n!}$$