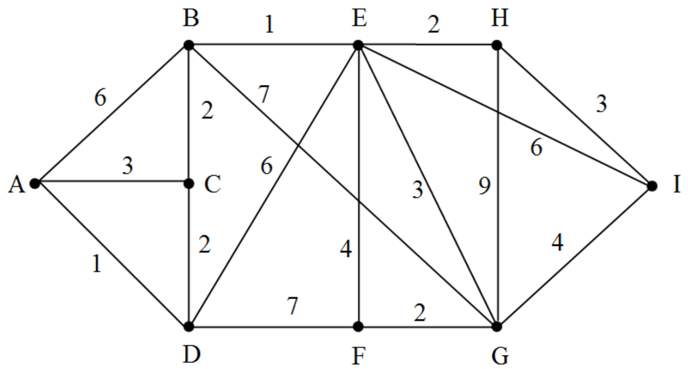
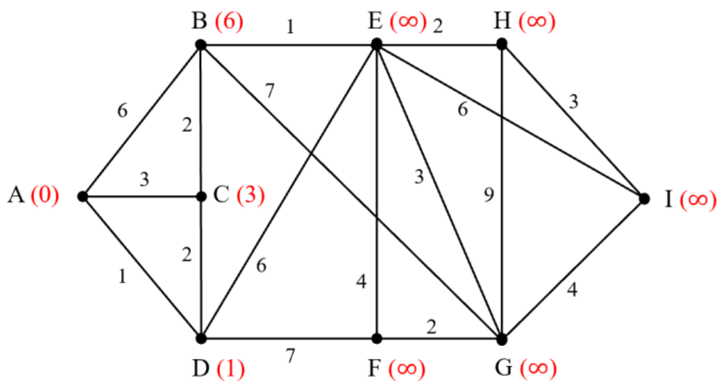
运筹学第七次作业（20230412）

1. 对于如下网络，分别使用值迭代法和策略迭代法求解从 A 到 I 的最短路径以及最短长度。

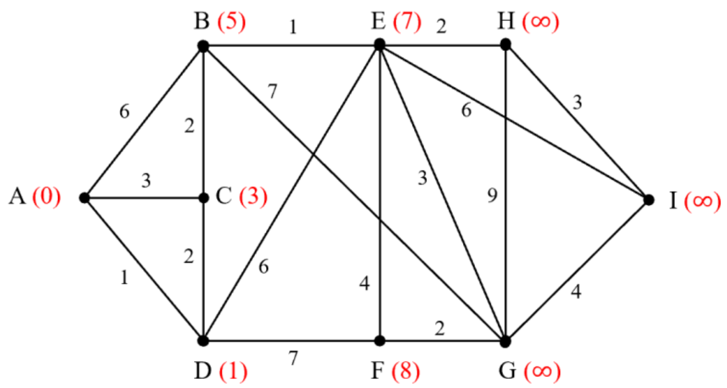


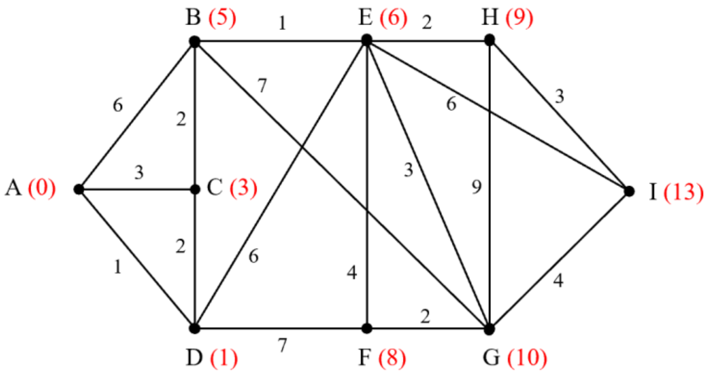
解：

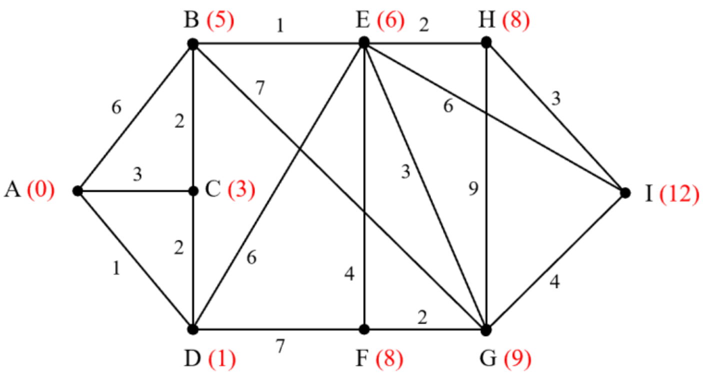
值迭代法：首先取 $f_1(v_i) = d(v_i, v_A), i \in V = \{A, B, \dots, I\}$，初始无直接连接的节点设置路径长度为 ∞

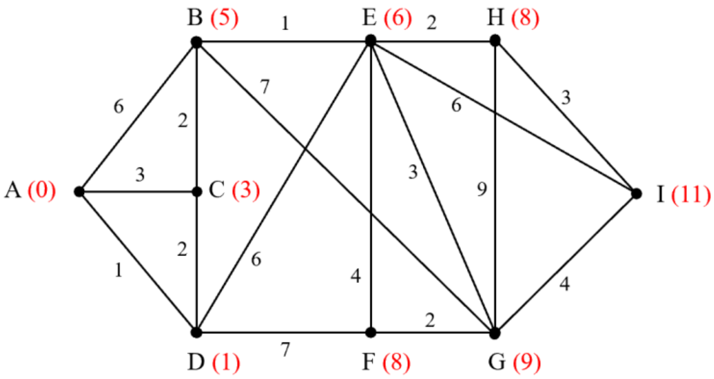


然后对 $k \geq 1$ 按公式 $f_{k+1}(v_i) = \min_{i \in V}\{d(v_i, v_j), +f_k(v_j)\}$ 进行迭代









此时迭代已经收敛，得到最短路径为 11，最优路线根据各点的最优值可确定为 $A \to C \to B \to E \to H \to I$ 或 $A \to D \to C \to B \to E \to H \to I$

策略迭代法：首先选取一个无回路策略

$$p_1(A) = B, p_1(B) = E, p_1(C) = B, p_1(D) = F$$
$$p_1(E) = I, p_1(F) = G, p_1(G) = I, p_1(H) = I$$

由

$$f_1(A) = 6 + f_1(B), f_1(B) = 1 + f_1(E), f_1(C) = 2 + f_1(B)$$
$$f_1(D) = 7 + f_1(F), f_1(E) = 6 + f_1(I), f_1(F) = 2 + f_1(G)$$
$$f_1(G) = 4 + f_1(I), f_1(H) = 3 + f_1(I), f_1(I) = 0$$

可解得

$$\hat{f}_1(A) = 13, \hat{f}_1(B) = 7, \hat{f}_1(C) = 9, \hat{f}_1(D) = 13, \hat{f}_1(E) = 6,$$

$$\hat{f}_1(F)=6,\hat{f}_1(G)=4,\hat{f}_1(H)=3,\hat{f}_1(I)=0$$

根据公式 $c_{v,p(v)}+\hat{f}_1\big(p_1(v)\big)=\min_{j\in V,j\neq i}\{c_{ij}+\hat{f}_1(v_j)\},\forall i\in V$ 得到改进策略为

$$p_2(A)=C,p_2(B)=E,p_2(C)=B,p_2(D)=C$$
$$p_2(E)=H,p_2(F)=G,p_2(G)=I,p_2(H)=I$$

继续迭代得到

$$p_3(A)=C,p_3(B)=E,p_3(C)=B,p_3(D)=C$$
$$p_3(E)=H,p_3(F)=G,p_3(G)=I,p_3(H)=I$$

此时策略不再改变，迭代停止，得到一条从 A 到 I 的最优策略为 $A\to C\to B\to E\to H\to I$，最短长度为 11.

2. 给出下面问题的对偶问题，并讨论解的存在性。

$$\begin{aligned}\max\ & ax_1+bx_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1-x_2\le 1\\ & -x_1+x_2\le 2\end{aligned}$$

解:

对偶问题为

$$\begin{aligned}\min\ & y_1+2y_2\\ \text{s.t.}\ & y_1-y_2=a\\ & -y_1+y_2=b\\ & y_1,y_2\ge 0\end{aligned}$$

当 $a+b=0$ 时，对偶问题存在有限的最优解，此时原问题也存在有限的最优解，且最优值相同；

当 $a+b\neq 0$ 时，对偶问题无可行解，此时原问题可能无解，也可能有无界的最优解。由于原问题已经存在可行解，因此原问题有无界的最优解。