

课后作业习题答案与提示-Part II

若有错误, 请指出

练习1. 求下列幂级数收敛半径:

$$(1). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^{2n}, \quad (2). \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sin \frac{1}{n})^{-n^2} z^n.$$

答案. (1). $R = \sqrt{\frac{1}{e}}$, (2). $R = \frac{1}{e}$;

练习2. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$ 的收敛半径分别为 $R_1 (> 0)$, $R_2 (> 0)$, 求证 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq R_1 R_2$ (提示: 用定义); 并举例使得 $R > R_1 R_2$ 成立.

Proof. 对任意 $z: |z| < R_1 R_2$ 时, 可分解 $z = z_1 z_2$ 使得 $|z_1| < R_1$, $|z_2| < R_2$. 注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n z_1^n| = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \beta_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n z_1^n| |\beta_n z_2^n| < M \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n z_2^n|, \text{ 绝对收敛, } M \text{ 为一合适正常数.}$$

故 $R \geq R_1 R_2$.

□

举例如下:

$$\text{Example 1. } \alpha_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \beta_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, R = +\infty, R_1 = R_2 = 1,$$

$$\text{Example 2. } \alpha_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} + \frac{1 + (-1)^n}{2} 2^n, \beta_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, R = 1, R_1 = \frac{1}{2}, R_2 = 1.$$

练习3. 确定幂级数的收敛圆盘并求和函数:

$$(1). f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n, \quad (2). g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} z^n.$$

答案. (1). $f(z) = \frac{2z^2}{(1-z)^3}$, (2). $g(z) = z - (z-1)\ln(1-z)$.

练习4. 下列三个幂级数具有相同的收敛半径 (用定义证明, 只需要考虑收敛半径为正数的情形):

$$(1). \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (2). \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}, \quad (3). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}.$$

注: 只需要证明前面两个幂级数的收敛半径相同就可以了。

Proof. 设(1),(2)中幂级数的收敛半径分别为 R, r . 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^n$ 收敛半径一致, 不难看出 $R \geq r$. 若 $R = 0$ 则显然 $R = r = 0$, 不妨设 $R > 0$. 下证当 $|z| < R$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^n$ 绝对收敛即可. 取 z_0 使得 $|z| < |z_0| < R$, 则 $q = \sqrt{\frac{|z|}{|z_0|}} < 1$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n z_0^n| = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n z_0^n| \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n |c_n z_0^n| q^n < \sum_{n=1}^{\infty} Mq^n < +\infty, \quad M \text{ 为一合适正常数.}$$

□

练习5. 在相应点对下列函数展开Taylor级数(前四项即可), 并指出收敛半径:

$$(1). \tan z, z_0 = \frac{\pi}{4}, \quad (2). e^{\frac{z}{z-1}}, z_0 = 0.$$

答案. 展开略. (1). $R = \frac{\pi}{4}$, (2). $R = 1$.

练习6. 求下列幂级数在复平面上和函数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}.$$

答案. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$ 是 \mathbb{C} 上整函数. 注意到 $f'''(z) = f(z)$, 以及 $f(0) = 1, f'(0) = f''(0) = 0$. 解此常微分方程可得

$$f(z) = \frac{1}{3}(e^z + e^{\omega z} + e^{\omega^2 z}), \text{ 其中 } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

练习7. 求值: $\ln^{(2n)}(1 + iz^2)|_{z=0} (n \geq 1)$. (此处为 $2n$ 阶导数)

答案. $f(z) = \ln(1 + iz^2)$.

$$\ln(1 + iz^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (iz^2)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+1}}{n+1} z^{2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

比较两边同幂次前系数, 可得: $\ln^{(2n)}(1 + iz^2)|_{z=0} = f^{(2n)}(0) = \frac{(-i)^{n-1} i (2n)!}{n}$.

练习8. 设整函数 $f(z)$ 在复平面 \mathbb{C} 上处处满足 $|f(z)| \leq |z|^s$, 此处 s 为正常数但 $s \notin \mathbb{Z}$, 求证: $f(z) \equiv 0$.

Proof. 在 \mathbb{C} 上有Taylor展开:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \text{ 其中 } c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

$C_R: |z| = R, R > 0$.

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{|z|^s dz}{|z|^{n+1}} \\ &= \frac{1}{R^{n-s}} = \begin{cases} \rightarrow 0, & R \rightarrow +\infty, \text{ if } n > s; \\ \rightarrow 0, & R \rightarrow 0^+, \text{ if } n < s. \end{cases} \end{aligned}$$

于是 $c_n \equiv 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 从而 $f(z) \equiv 0$.

□

练习9. 证明解析函数唯一性定理: 设函数 $f(z), g(z)$ 在区域 D 上解析, $a \notin \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset D, a \in D$, 若

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \quad (2) f(z_n) = g(z_n), n \in \mathbb{N},$$

则 $f(z) \equiv g(z)$.

提示. 注意到 $\{z_n\}$ 是函数 $f(z) - g(z)$ 的一系列零点, 用零点孤立性, 立即可得。

练习10. 计算积分

$$(1). I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} z \sin \frac{z}{z-1} dz, \quad (2). I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} z \sinh \frac{z}{z-1} dz.$$

提示. 对 $z \cosh \frac{z}{z-1}$ 进行Laurent展开如下(设 $\zeta = z - 1$):

$$\begin{aligned} z \sin \frac{z}{z-1} &= [(z-1) + 1] \sin(1 + \frac{1}{z-1}) = [\zeta + 1] [\sin 1 \cos \frac{1}{\zeta} + \cos 1 \sin \frac{1}{\zeta}] \\ &= (\zeta + 1) [\sin 1 (1 - \frac{1}{2!\zeta^2} + \frac{1}{4!\zeta^4} + \cdots) + \cos 1 (\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{3!\zeta^3} + \frac{1}{5!\zeta^5} + \cdots)] \end{aligned}$$

于是 $c_{-1} = \cos 1 - \frac{\sin 1}{2}$, 从而 $I_1 = \cos 1 - \frac{\sin 1}{2}$.

类似对 $z \sinh \frac{z}{z-1}$ 进行Laurent展开可求得

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} z \sinh \frac{z}{z-1} = \cosh 1 + \frac{\sinh 1}{2}.$$

练习11. 求 $\sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^{6n}}{(-2n)!}$ 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上的和函数。

答案. $\cosh \frac{1}{z^3}$.

练习12. 设集合 $A = \{z_1, z_2, \cdots, z_m\}$ 是 \mathbb{C} 中 m -点集. 如果函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus A$ 上解析且有界, 试证明:
 $f(z) \equiv$ 常数。

Proof. 如果直接使用判别可去奇点的充要条件, 此函数补充定义后就成了整函数, 那么由Liouville定理直接可证。但我们此时还不能直接使用可去奇点的观念, 所以只能在 ∞ 的某个邻域内进行Laurent展开, 然后证明它的所有非常数项系数为0, 这样由函数唯一性定理, $f(z) \equiv$ 常数。

$|f(z)| < M$, 对足够大的 R ,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n : \quad R < |z| < +\infty.$$

其中

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}}, \quad r \in (R, +\infty), \\ |c_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^{n+1}} \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{M ds}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}, \end{aligned}$$

令 $r \rightarrow +\infty$, 不难看出当 $n \geq 1$ 时, $c_n \equiv 0$.

下证当 $n \leq -1$ 时, $c_n \equiv 0$. 由复合闭路定理, 对充分小的 r_1, r_2, \cdots, r_m ,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_j|=r_j} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}}$$

令

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_j|=r_j} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}},$$

则

$$\begin{aligned}|a_j| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_j|=r_j} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^{n+1}} \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_j|=r_j} M(|z_j|-r_j)^{-n-1} ds \\ &= Mr_j(|z_j|-r_j)^{-n-1} \rightarrow 0, \text{ as } r_j \rightarrow 0_+.\end{aligned}$$

不难看出: $c_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 0$.

□

练习13. 设函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析且处处满足 $|f(z)| \leq |z|^m$, 此处 m 为一非0整数, 求证: $f(z) \equiv Kz^m$, 其中 K 为某常数且 $|K| \leq 1$.

提示. 使用上面习题9的方法。

练习14. 找出下列函数在扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上所有奇点并进行分类:

$$(1). \frac{z}{(1+e^{\pi z})^3(1+z^2)^2}, \quad (2). \frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z} + \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^5}.$$

答案. 以下 $n \in \mathbb{Z}$.

(1). ∞ : 非孤立奇点; $i(2n+1)(n \neq 0, -1)$: 均是3级极点; $\pm i$: 均是5级极点。

(2). ∞ : 非孤立奇点; $n\pi(n \neq 0)$: 均是单极点; 0 : 可去奇点; 2 : 4级极点。

练习15. 证明Weierstrass定理: 设 z_0 为 $f(z)$ 一个本性奇点, 对 \forall 给定 $A \in \overline{\mathbb{C}}$, 在 z_0 点某个空心邻域 $B_\delta^*(z_0)$ 内存在复数列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$(1). \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \quad (2). \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A.$$

Proof. 反证法。

情形1. 设 $A \in \mathbb{C}$. 若不存在所需要的子列, 则必存在 $b > 0$ 使得 $|f(z) - A| > b$ 在 z_0 某个小邻域内成立. 于是 $\frac{1}{f(z)-A}$ 在此邻域内有界, z_0 为 $\frac{1}{f(z)-A}$ 的可去奇点, 可认为 $\frac{1}{f(z)-A}$ 是此邻域内解析函数. 要么 $\frac{1}{f(z)-A}|_{z=z_0} = 0$, 此时 z_0 必须为 $f(z) - A$ 极点, 从而是 $f(z)$ 极点, 与 z_0 是本性奇点矛盾; 要么 $\frac{1}{f(z)-A}|_{z=z_0} \neq 0$, 此时 z_0 必须是 $f(z)$ 可去奇点, 矛盾。

情形2. 设 $A = \infty$. 若不存在所需要的子列, 则必存在 $M > 0$ 使得 $|f(z)| < M$ 在 z_0 某个小邻域内成立, 此时 z_0 必是 $f(z)$ 可去奇点, 矛盾! □

练习16. 设 z_0 为 $f(z)$ 一个孤立奇点, m, k 为两个正整数且 $m < k$. 若

$$(1). \lim_{z \rightarrow z_0} f^{(m)}(z) = 0, \text{ 则 } z_0 \text{ 为 } f(z) \text{ 可去奇点;}$$

$$(2). \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f^{(m)}(z) = A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ 则 } z_0 \text{ 为 } f(z) \text{ 之 } (k - m) \text{ 级极点.}$$

提示. 利用Laurent展开式, 来判断其负幂项的最高可能次数 (先排除本性奇点可能)。

练习17. 设 $f(z)$ 在 $z = 0$ 的某个空心邻域 $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$ ($R > 0$) 内解析且以 $z = 0$ 为奇点, 已知存在复数列 $\{z_n\}_{n=0}^\infty \subset B$ 满足下列条件(i)(ii)(iii):

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} f'(z_n) = 1, \quad \text{及} \quad (iii) f(z_n) \equiv 2, \text{ 对 } \forall n \in \mathbb{N},$$

试判断 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的何种孤立奇点, 并证明你的结论。

答案. $z=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

证明: 由条件 (iii) 知道, $z=0$ 不可能为 $f(z)$ 的极点, 只需再证明 $z=0$ 不可能为 $f(z)$ 的可去奇点, 反证法, 假设 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则由条件 (iii) 必有 $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 2$. 在补充定义 $f(0) = 2$ 后, $f(z)$ 成为 $B \cup \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ 上解析函数. 注意此时 $f(z) - 2$ 以 0 及所有 z_n 作为零点, 由解析函数零点孤立性, 必须有 $f(z) \equiv 2$, 从而 $f'(z) \equiv 0$, 这矛盾于条件 (2). 证毕.

练习18. 计算下列函数在扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上所有孤立奇点处留数:

$$(1). \frac{e^z}{z^2 + 1}, \quad (2). z^2 \cos \frac{z}{z-1}.$$

答案.

$$(1). \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2 + 1}, \infty\right] = -\sin 1; \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2 + 1}, i\right] = \frac{e^i}{2i}, \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2 + 1}, -i\right] = \frac{e^{-i}}{-2i},$$

$$(2). \operatorname{Res}\left[z^2 \cos \frac{z}{z-1}, 1\right] = -\left(\frac{5}{6} \sin 1 + \cos 1\right) = -\operatorname{Res}\left[z^2 \cos \frac{z}{z-1}, \infty\right], \text{ 参考练习 10 的解答.}$$

练习19. 计算积分:

$$(1). \oint_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{z^n + 1} dz, \quad \text{其中 } n \text{ 为正整数};$$

$$(2). \oint_{|z|=3} \tan(\pi z) dz;$$

$$(3). \oint_{|z|=R} \frac{z^2}{1 - e^{2\pi i z^3}} dz, \quad n < R^3 < n+1, \quad n \text{ 为正整数}.$$

答案.

$$(1). \oint_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{z^n + 1} dz = \oint_{|z|=2} \frac{z^{2n} - 1 + 1}{z^n + 1} dz = \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^n + 1} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2; \end{cases}$$

$$(2). \oint_{|z|=3} \tan(\pi z) dz = -12i;$$

$$(3). \oint_{|z|=R} \frac{z^2}{1 - e^{2\pi i z^3}} dz = 2n + 1, \quad n < R^3 < n+1, \quad n \text{ 为正整数}.$$

第 (3) 小题提示: 被积函数在积分围道内有孤立奇点 $z=0$, 以及方程 $z^3 = k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) 的根共 $6n$ 个, 这 $6n+1$ 个孤立奇点均为一级极点, 容易算出他们处的留数.

练习20. 设 $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, 其中 $P_n(z)$, $Q_m(z)$ 分别为 n, m 次多项式, 求证: 当 $m-n \geq 2$ 时, $\operatorname{Res}[R(z), \infty] = 0$.

提示. 证法1: 直接证明

$$\operatorname{Res}[R(z), \infty] = -\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} R(z) dz = 0.$$

证法2: $\operatorname{Res}[R(z), \infty] = \operatorname{Res}\left[\frac{-1}{z^2} R\left(\frac{1}{z}\right), 0\right] = 0, \because \frac{-1}{z^2} R\left(\frac{1}{z}\right) \text{ has removable singularity at } 0.$

练习21. 用留数方法计算积分:

$$(1). I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}, \quad \text{其中 } |a| < 1, a \in \mathbb{R};$$

$$(2). I(b) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{b + \sin \frac{\theta}{2}}, \quad \text{其中 } b > 1;$$

$$(3). I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+;$$

$$(4). I(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + px + q}, \quad \text{其中 } \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

答案.

$$(1). I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2};$$

$$(2). I(b) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{b + \sin \frac{\theta}{2}} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{b + \sin t} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{b + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}};$$

$$(3). I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} \pi \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \pi \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2}, & n \geq 2, \\ \pi, & n = 1; \end{cases}$$

$$(4). I(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + px + q} = \frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}} \cos \frac{p}{2}}{\sqrt{-\Delta}}.$$

练习22. 构造有理函数 $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, 其中 $P_n(z)$, $Q_m(z)$ 分别为 n, m 次多项式, 使得

(1). $\text{Res}[R(z)e^{iz}, \infty] = 0$, (2). $m - n = 1$ 同时成立。

答案.

$$\text{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z}, \infty\right] = A = -1, \quad \text{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^3}, \infty\right] = B = \frac{1}{2}, \quad \text{choose } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \text{ such that } c_1 A + c_2 B = 0,$$

$$\text{for example: } c_1 = 1, c_2 = 2. \text{ So, } \text{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z} + \frac{2e^{iz}}{z^3}, \infty\right] = \text{Res}\left[\frac{z^2 + 2}{z^3} e^{iz}, \infty\right] = 0.$$

注: 上述例子在实轴上有极点, 也不难通过平移构造例子 $R(z)$ 使得(1)(2)成立外, $R(z)$ 在实轴上无奇点。