第一章

伪随机信号：具有较长周期的确定性信号

混沌信号：貌似周期，确定性的非周期信号

幅值\时间	连续	离散
连续	模拟信号	抽样信号
离散		数字信号

能量(受限)信号:$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|f^2(t)|dt<\infty, P=0$

功率(受限)信号:$P=lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f^2(t)|dt<\infty, E=\infty$

$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)dt=-f'(0)$

$\delta(t)=\delta(-t)$ $\delta'(t)=-\delta'(-t)$ $f(t)*\delta(t)=f(t)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)dt=0,\ f(t)*\delta'(t)=f'(t)$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$是数字信号

偶分量$f(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$

奇分量$f(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$

稳定条件：输入有界时输出有界

线性条件：①可分解②零状态线性③零输入线性

E、$\frac{1}{Z}$、D将$y(n)$变为$y(n-1)$

$e^{j\Omega n}$：当Ω接近π的奇数倍，震荡快，为高频

第二章

齐次解：$C_1e^{\alpha t}$

特解：$e(t)=t^pe^{at}\cos(\omega t)$

$r(t)=\left(\sum_{i=0}^{p}B_it^{p-i}\right)e^{at}\cos(\omega t+\varphi)$

自由响应：齐次解(由系统极点产生)

强迫响应：特解(由激励极点产生)

零输入0^+和0^-不一定连续

冲击响应$h(t)$、阶跃响应$g(t)$，$h(t)=g'(t)$

$h(t)$、$g(t)$可由$H(s)$、$\frac{H(s)}{s}$逆变换解得，要求零状态

若$f_1(t)$因果，则$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$

若都因果，则$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$

卷积性质：若$S(t)=f_1(t)*f_2(t)$，

则$S^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$

条件：当$t\to-\infty$时，$f_1(t)\to 0$ 且$f_2(t)\to 0$

$\delta(t-a)*\delta(t-b)=\delta(t-a-b)$

$u(t-a)*u(t-b)=(t-a-b)u(t-a-b)$

求零状态响应必须用 0 时刻以后值作为边界条件

求零输入响应必须用 0 时刻以前(不含 0)值作为边界条件

$h(n)$稳定条件：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<M$

解卷积：$y(n)=h(n)*x(n)$

$x(0)=y(0)/h(0)$

$x(1)=[y(1)-x(0)h(1)]/h(0)$

$x(2)=[y(2)-x(0)h(2)-x(1)h(1)]/h(0)$

$x(n)=[y(n)-\sum_{m=0}^{n-1}x(m)h(n-m)]/h(0)$

第三章

$Dirichlet$条件(一个周期内)

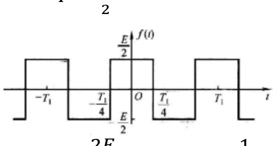
①间断点有限②极值有限③绝对可积

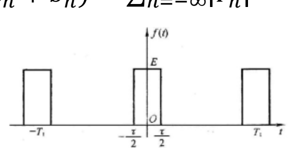
$F_n=\frac{a_n-jb_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\omega t}\,dt=F(n\omega)$

$F(-n\omega)=\frac{a_n+jb_n}{2}$，$F(0)=a_0$

$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega)e^{j\omega t}$

$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f^2(t)|dt=a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$



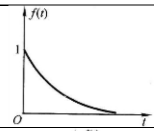
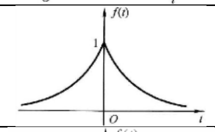
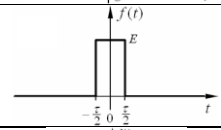
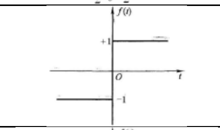
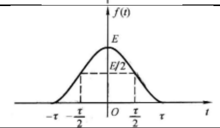
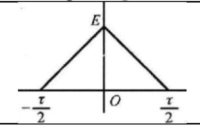


$f(t)=\frac{2E}{\pi}[\cos\omega t-\frac{1}{3}\cos 3\omega t+\frac{1}{5}\cos 5\omega t\ ...]$

$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)e^{j\omega_1 t}$

$E_n=\overline{\varepsilon_n^2}=\overline{f^2(t)}-[a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)]$

傅里叶变换$FT\begin{cases}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt\\ f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\end{cases}$

$\begin{cases}e^{-at} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$		$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-a\|t\|}$		$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$E[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u(t-\frac{\tau}{2})]$		$E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$
$sgn(t)=\begin{cases}1\\0\\-1\end{cases}$		$\frac{2}{j\omega}$双边指数逼近
$\frac{E}{2}[1+\cos\frac{\pi t}{\tau}]$		$\frac{E\tau Sa(\omega\tau)}{1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2}$
$\begin{cases}E\left(1-\frac{2}{\tau}\|t\|\right) & \|t\|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & \|t\|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$		$\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$

$\delta(t)\to 1$；$1\to 2\pi\delta(\omega)$；$u(t)\to\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

(1) $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$

(2) 实偶→实偶，虚偶→虚偶，实奇→虚奇，虚奇→实奇

$\mathcal{F}[f(-t)]=F(-\omega)$ $\mathcal{F}[f^*(t)]=F^*(-\omega)$

$\mathcal{F}[f^*(-t)]=F^*(\omega)$

(3) $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

(4) $\mathcal{F}[f(t-t_0)]=F(\omega)\,e^{-j\omega t_0}$

(5) $\mathcal{F}\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right]=F(\omega-\omega_0)$

(6) $\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(j\omega)^nF(\omega);\mathcal{F}[(-jt)^nf(t)]=F^{(n)}(\omega)$

(7) $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$

$\mathcal{F}^{(-1)}\left[\int_{-\infty}^{\omega}F(\Omega)d\Omega\right]=-\frac{f(t)}{jt}+\pi f(0)\delta(t)$

(8) $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega)$

$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

周期信号FT，若单周期FT为$F_0(\omega)$

$\mathcal{F}[f(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$ $F_n=\frac{1}{T}F_0(n\omega_1)$

$\mathcal{F}[f(t)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_1F_0(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1)$

时域抽样：$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s)$

$F_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_nF(\omega-n\omega_s)$

冲击抽样：$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$(时域)

$f_1(t)=f(t)*\frac{1}{\omega_1}\sum\delta(t-nT_1)=\frac{1}{\omega_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_1)$

第五章

$ZT\begin{cases}X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)Z^{-n}\\ x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz=\sum_m Res[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}\end{cases}$

$\mathcal{Z}[a^nu(n)]=\frac{z}{z-a}(|z|>|a|)$

$\mathcal{Z}[-a^nu(-n-1)]=\frac{z}{z-a}(|z|<|a|)$

$\mathcal{Z}[\beta^n\cos(n\omega_0)\,u(n)]=\frac{z(z-\beta cos\omega_0)}{z^2-2\beta zcos\omega_0+\beta^2}(|z|>|\beta|)$

$\mathcal{Z}[\beta^n\sin(n\omega_0)u(n)]=\frac{\beta zsin\omega_0}{z^2-2\beta zcos\omega_0+\beta^2}(|z|>|\beta|)$

$Res[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}=$

$\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\left[(z-z_m)^s X(z) z^{n-1}\right]\right\}_{z=z_m}$

$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^j}{(z-a)^j}\right]=\frac{(n+j-1)!}{n!j!}a^n u(n), |z|>|a|$

(1) 若$\mathcal{Z}[x(n)u(n)]=X(z)$，

$\mathcal{Z}[x(n-m)]=z^{-m}X(z)$

$\mathcal{Z}[x(n+m)u(n)]=z^m[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}]$

$\mathcal{Z}[x(n+2)u(n)]=z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$

(2) $\mathcal{Z}[n^m x(n)]=\left[-z\frac{d}{dz}\right]^m X(z)$

(3) $\mathcal{Z}[a^n x(n)]=X(\frac{z}{a})$ $(R_1<\left|\frac{z}{a}\right|<R_2)$

(4) $x_1(n)=\begin{cases}x\left(\frac{n}{2}\right), n偶\\ 0，n奇\end{cases}$，$X_1(z)=X(z^2)$

$x_2(n)=x(2n)$，$X_2(z)=\frac{1}{2}[X(\sqrt{z})+X(-\sqrt{z})]$

(5) $x(0)=lim_{z\to\infty}X(z)$ (存在即可)

(6) $\lim_{z\to\infty}x(n)=\lim_{z\to1}[(z-1)X(z)]$ $\big(|z|<1$，极点 z = 1 阶次小于 1$\big)$

证：$\mathcal{Z}[x(n+1)-x(n)]=(z-1)X(z)-zx(0)$

(7) $\mathcal{Z}[x(n)*h(n)]=X(z)H(z)$

(8) $\mathcal{Z}\left[\frac{1}{n+a}x(n)\right]=z^a\int_z^\infty\frac{X(v)}{v^{a+1}}dv$

(9) $\mathcal{Z}[x(n)h(n)]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$ (收敛域内)

$=\sum_m Res\left[X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\right]_{v=v_m}$

拉氏变换LT $\begin{cases}F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-jst}dt\\ f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{jst}ds\end{cases}$

$\mathcal{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$

(1) $\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$

(2) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0-}f(\tau)d\tau}{s}$ (因果此项为 0)

(3) $\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=F(s)e^{-st_0}$

(4) $\mathcal{L}[f(t)e^{-at}]=F(s+a)$

(5) $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

(6) $\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$(真分式)

$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$ (周期信号无；在虚轴上至多在 s = 0 有一阶极点)

(7) $\mathcal{L}[-tf(t)]=\frac{dF(s)}{ds}$ $\qquad\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(s)ds$

第六章

FT ↔ LT：若$F(s)=F_0(s)+\sum\frac{k_n}{s-j\omega_n}$($\omega_n$可为 0)，

则$\mathcal{F}[f(t)]=F(s)|_{s=j\omega}+\sum k_n\pi\delta(\omega-\omega_n)$

$\frac{k_0}{(s-j\omega_0)^k}\to\frac{k_0\pi j^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(\omega-\omega_n)$

ZT ↔ LT：抽样 → LT $\xrightarrow{z=e^{sT}} ZT$

已知$\mathcal{L}(x(t))=X(s)$，求抽样后$X(z)$

$X_s(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(s+jk\omega_s)$，代入$s=\frac{1}{T}lnz$

注意$t=0$时$u(t)$的差异

ZT ↔ FT $\begin{cases}\mathrm{DTFT}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\\ \mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega})]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\end{cases}$

最小相位：右半平面没有零极点

非最小相位可表示成最小相位函数和全通函数的乘积

靠近单位圆：零点→陷波，极点→峰值点

$H(s)$零点只影响$h(t)$幅度和相位

$\begin{cases}a<|z|\le\infty, a<1\\ 极点在单位圆内\Longrightarrow 稳定\end{cases}\Longrightarrow$ 系统稳定因果

$\varphi(\omega)=零点和-极点和+(N-M)\omega$ (N:极点个数)

DFT $\begin{cases}X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{nk}\\ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W^{-nk}\end{cases}$，$W=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

(1) $y(n)=x\big((n-m)\big)_N R_N(n), \mathrm{DFT}[y(n)]=W^{mk}X(k)$

(2) $Y(k)=X\big((k-l)\big)_N R_N(k), \mathrm{IDFT}[Y(k)]=W^{-ln}x(n)$

(3) $\mathrm{IDFT}[X(k)H(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h\big((n-m)\big)_N R_N(n)$

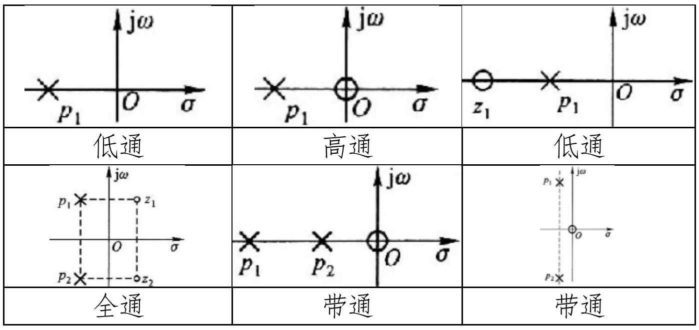
(4) $\mathrm{DFT}[x(n)h(n)]=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}X(l)h\big((k-l)\big)_N R_N(k)$

(5) 奇偶虚实同FT

	复乘	复加
DFT	N^2	$N(N-1)$
FFT	$\frac{N}{2}\log_2 N$	$N\log_2 N$

混叠：频谱无限或采样$\omega_s<2\omega$，可提高ω_s或抽样前滤波（抗混叠滤波器）

频率泄露：时域无限被截断，延长采样时间或改进窗口



低通 高通 低通
全通 带通 带通

滤波器物理可实现必要条件

(1) 平方可积

(2) 佩利维纳：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|ln|H(j\omega)||}{1+\omega^2}d\omega<\infty$

(3) 希尔伯特变换对$\begin{cases}R(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda\\ X(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda\end{cases}$

数字滤波器冲击响应分类

无限IIR：递归，非线性相位

有限FIR：非递归，线性相位（要求高）

线性相位条件：$h(n)$偶(奇)对称, $h(n)=\pm h(N-1-n)$

信号传输

①全占空脉冲②多电平③改善时域信号④单边带