第二章：控制系统的数学模型

引言

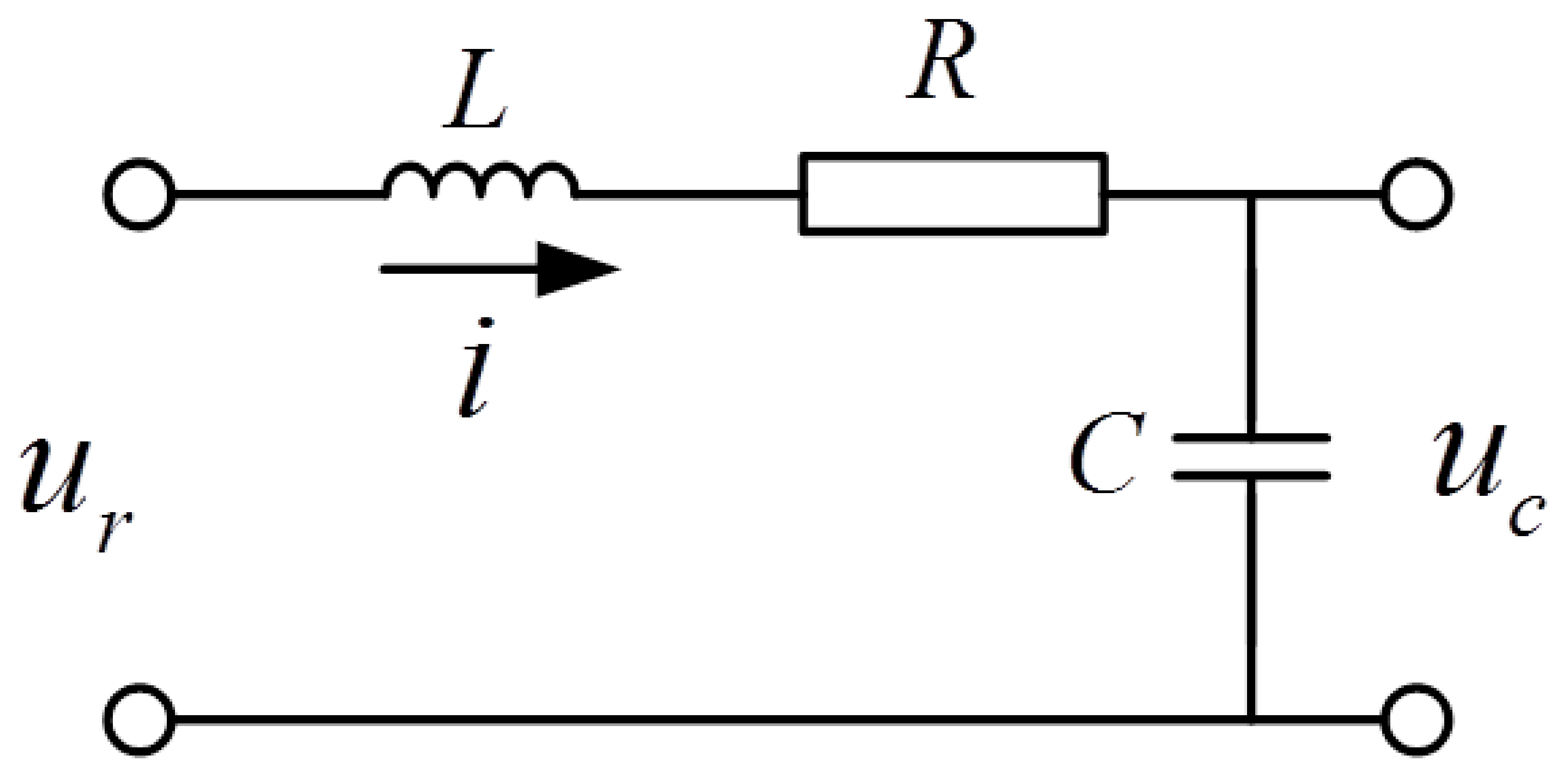
- 控制理论研究的主要内容
  - 给定一个控制系统，研究其运动的性质和特征，即**控制系统的分析**
  - 设计一个控制系统，使其运动具有给定的性质和特征，即**控制系统的综合和设计**
- 控制系统建模：从物理抽象到数学
  - 微分方程、差分方程、代数方程
- 控制系统实践：从数学回归到物理
- 建模方法：
  - **机理建模**：根据机理列写方程
  - **系统辨识**：根据变量的运动数据
- 描述分类
  - **时间域描述**：讨论的对象是实数时间t的函数
  - **频率域描述**：讨论的对象是复数频率s（时间函数的特定变换后的象函数）

控制系统的微分方程描述

1. RLC电路

根据电路基本原理有:

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{di}{dt} + u_C = u_r \\ i = C\dfrac{du_C}{dt} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_r$$

输入量：原因 u_r

输出量（受控量）：结果 u_C及其导数

中间（内部）变量：i

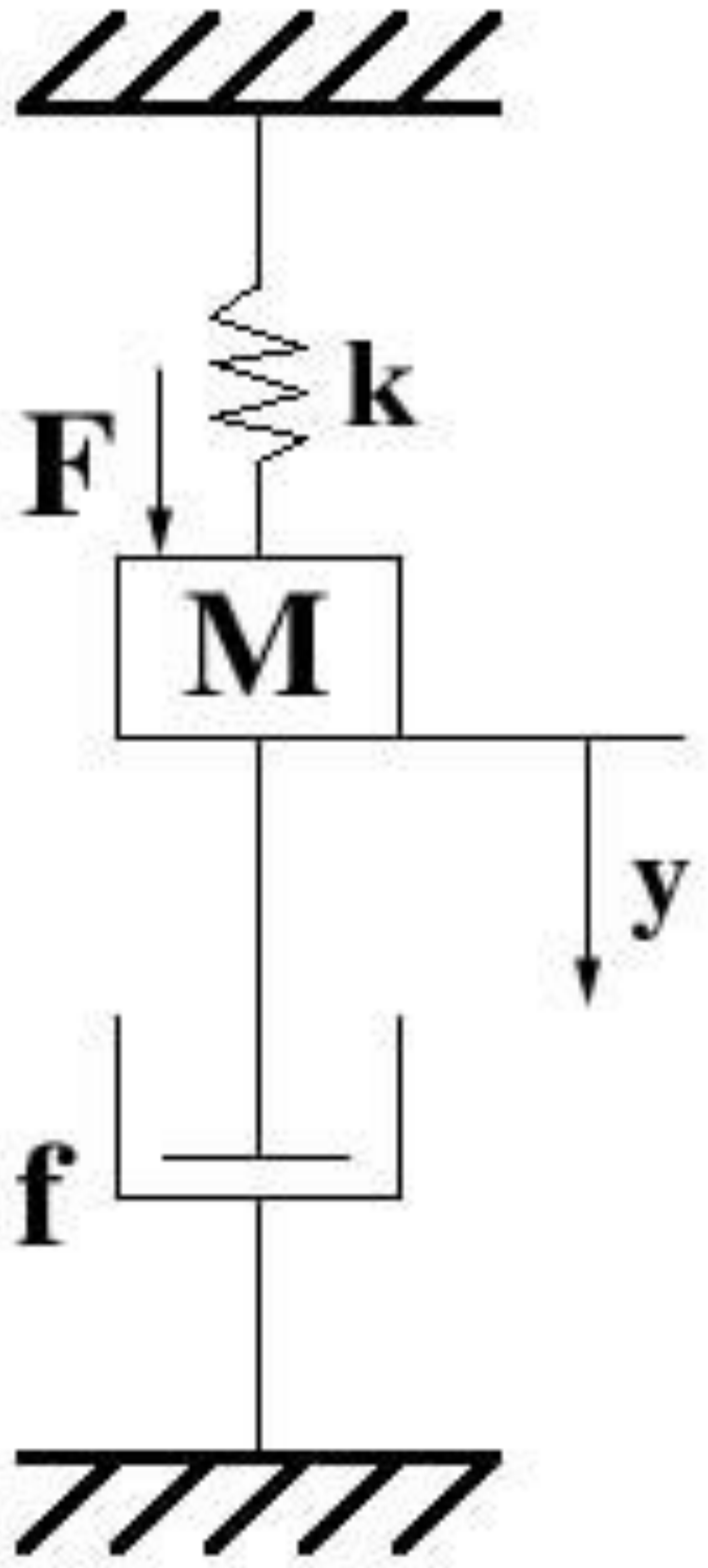
控制系统的微分方程描述

2. 质量 - 弹簧 - 阻尼系统

$$\sum F(i) = Ma$$

$$F - ky - f\frac{dy}{dt} = M\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad M\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = F$$



输入量： F

输出量（受控量）： y及其导数

控制系统的微分方程描述

3. 电动机方程

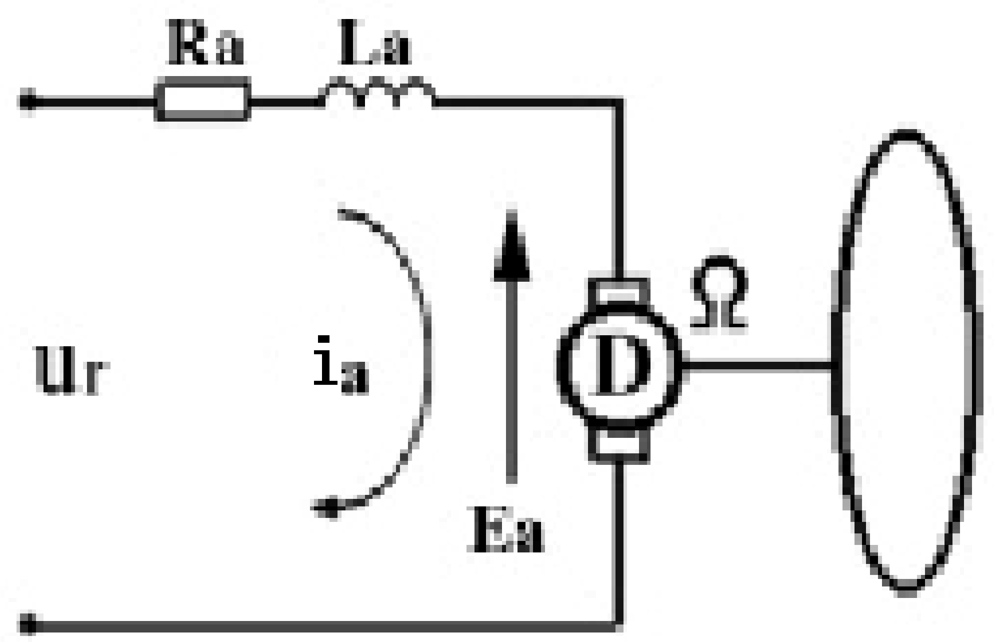
电路方程: $u_r - E_a = L_a \dfrac{di_a}{dt} + R_a i_a$　　(1)

机械运动方程: $M - M_L = J \dfrac{d\Omega}{dt}$　　(2)

电路与旋转部分的联系方程: $E_a = k_d \Omega$　　(3)

$M = k_d i_a$　　(4)

M: 电动机产生的电磁力矩
M_L: 电动机轴上的反向力矩
J: 电动机旋转部分的总体转动惯量
Ω: 电动机轴的角速度
k_d: 电动机的比例系数，已知参数



Ur ：电枢控制输入
Ω ：被控量

E_a: 电枢电势
R_a和L_a: 电枢电路的总电阻和总电感

控制系统的微分方程描述

- （4）⟶（2）得： $i_a = \frac{J}{k_d}\frac{d\Omega}{dt} + \frac{M_L}{k_d}$ （5）
- （3）（5）⟶（1）得： $\frac{L_a J}{k_d}\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{k_d}\frac{d\Omega}{dt} + k_d\Omega = u_r - (\frac{L_a}{R_a}\frac{dM_L}{dt} - \frac{R_a}{k_d}M_L)$
- **整理并定义两个时间常数**

机电时间常数 $\frac{JR_a}{k_d^2} = T_m$ 电磁时间常数 $\frac{L_a}{R_a} = T_a$

- **电机方程**

$$T_aT_m\frac{d^2\Omega}{dt^2} + T_m\frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d}u_r - \frac{R_a}{k_d^2}(T_a\frac{dM_L}{dt} + M_L)$$

控制系统的微分方程描述

如果忽略阻力矩，即 $M_L = 0$

方程右边只有电枢回路的控制量u_r**，则电机方程是典型二阶微分方程**

如果进一步忽略 $T_a(T_a \approx 0)$**，电机方程则为一阶微分方程**

$$T_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d} u_r$$

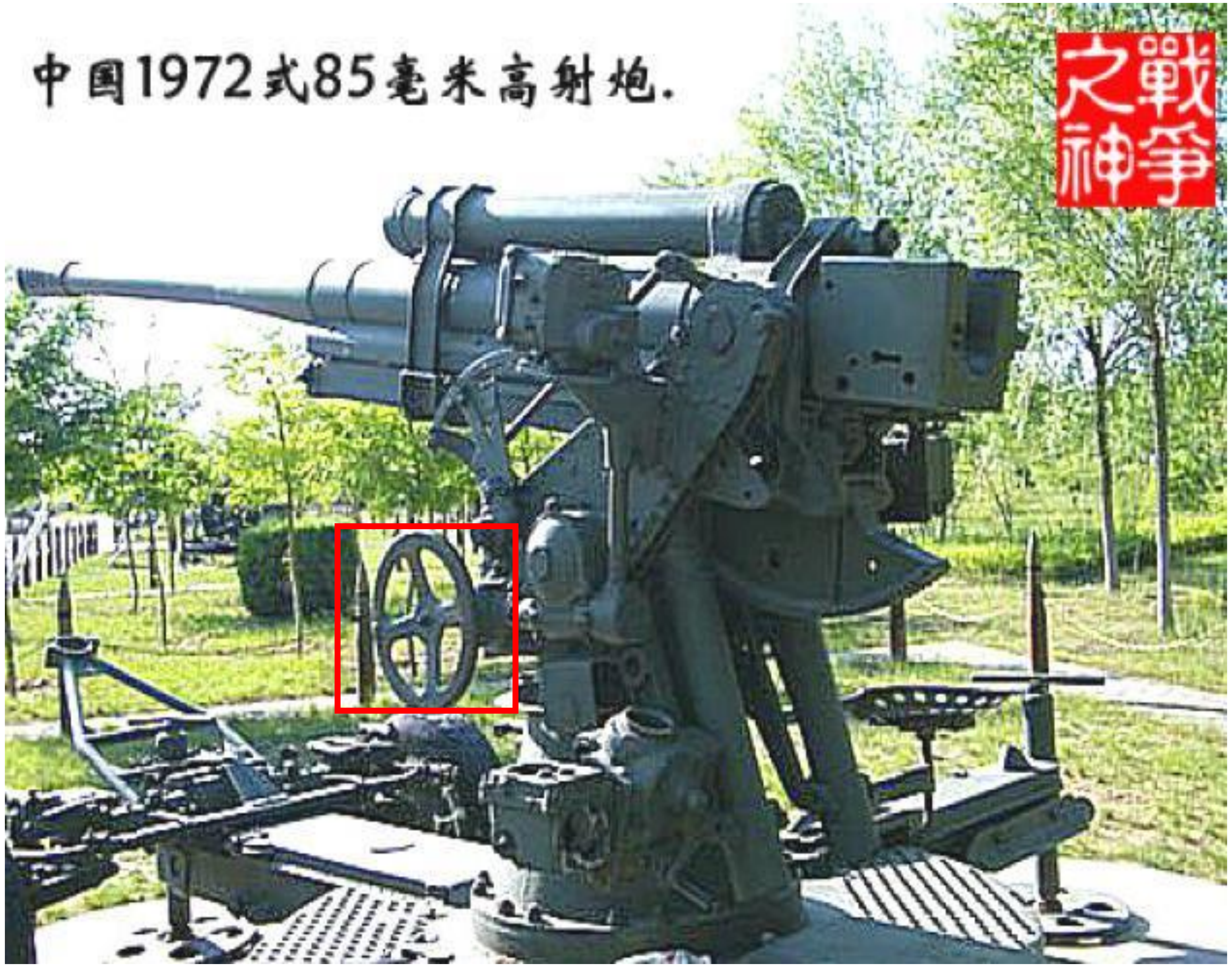
控制系统的微分方程描述

电机控制的意义：

- ■ 应用广泛
  - 无处不在
- ■ 系统复杂
  - 高阶微分系统
- ■ 要求精度高
  - 高精度机床
  - <0.005mm（ISO）

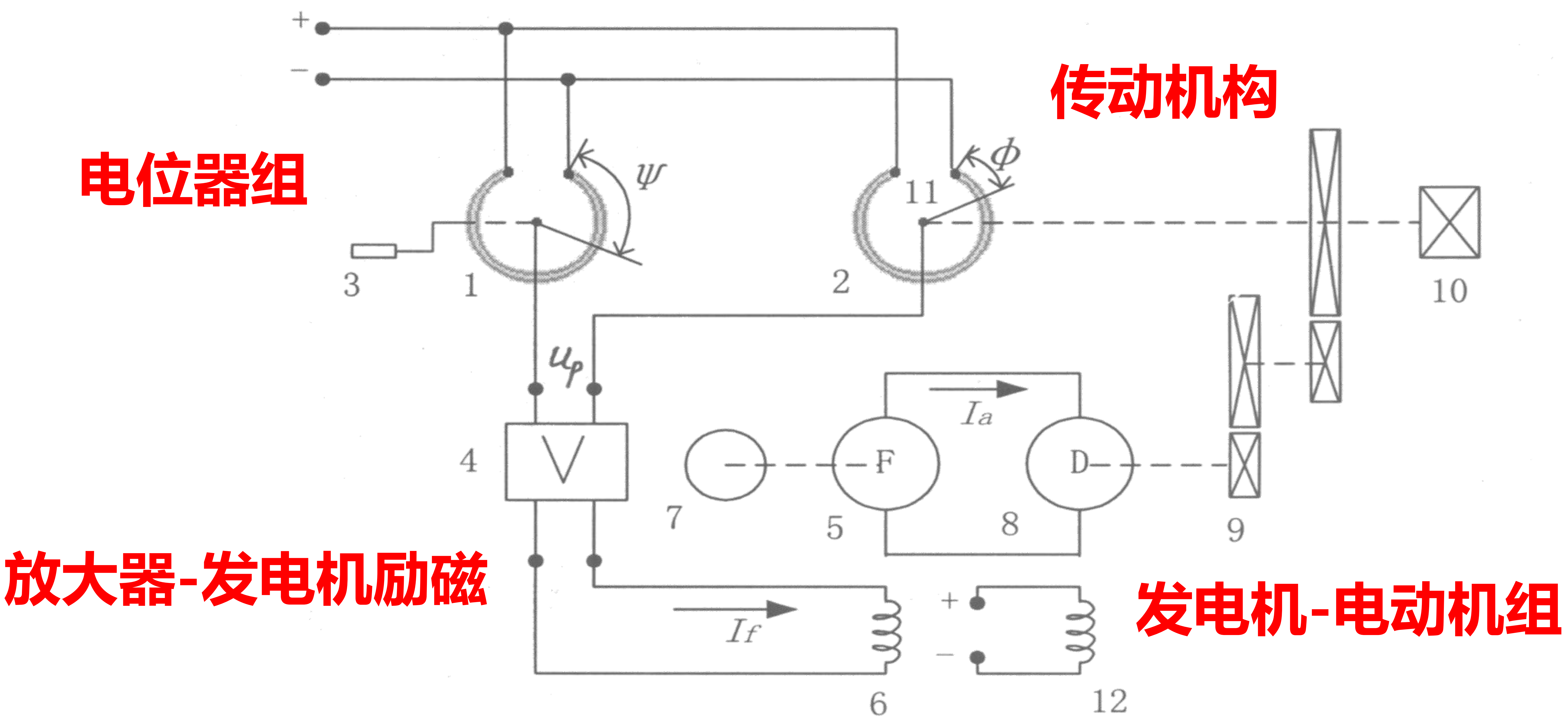
大量装置的控制精度取决于电机的控制精度

控制系统的微分方程描述



控制系统的微分方程描述

复杂系统建模时，要注意区分输入量和受控量，检查受控量的数目，最后得到的方程的数目必须与独立受控量的数目相等，否则无法求解。



小功率闭环随动系统（见教科书, 图2.2.8）

控制系统的微分方程描述

1. 电位器组

输入量ψ

$$u_p = k_p(\psi - \phi)$$

输入ψ和ϕ，输出u_p

受控量ϕ，u_p，I_f，Ω

2. 放大器-发电机励磁

$$R_f I_f + L_f \frac{dI_f}{dt} = k_a u_p \Rightarrow T_f \frac{dI_f}{dt} + I_f = \frac{k_a}{R_f} u_p$$

输入u_p，输出I_f

3. 发电机-电动机组(忽略阻力矩 $M_L = 0$)

$$E_f = k_g I_f \qquad T_a T_m \frac{d^2\Omega}{dt^2} + T_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d} E_f$$

输入I_f，输出Ω

4. 传动机构

$$\Omega \rightarrow \phi \qquad \frac{d\phi}{dt} = k_t \Omega$$

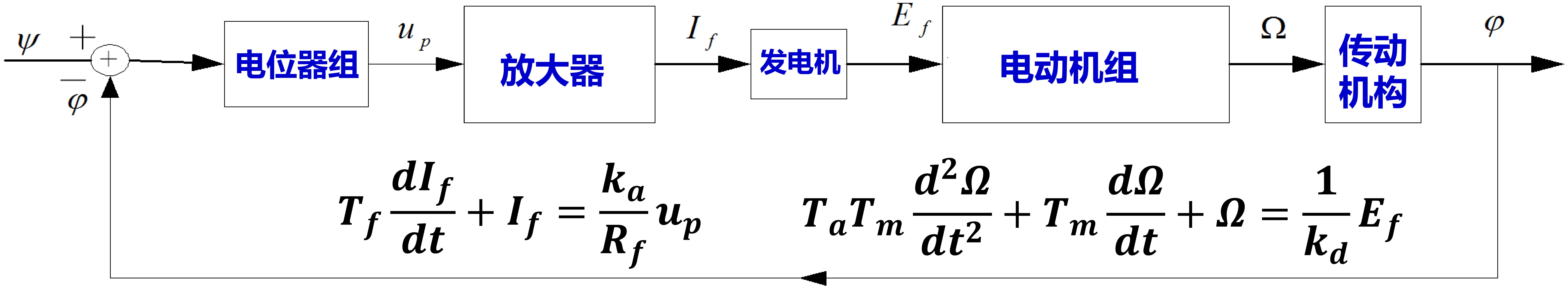
输入Ω，输出ϕ

控制系统的结构图

$$u_p = k_p(\psi - \varphi)$$

$$E_f = k_g I_f$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = k_t \Omega$$



$$T_f \frac{dI_f}{dt} + I_f = \frac{k_a}{R_f} u_p$$

$$T_a T_m \frac{d^2\Omega}{dt^2} + T_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d} E_f$$

Q：根据每个环节的输入输出关系确定传递函数?

控制系统的微分方程描述

整理得到输出关于输入的关系：

$$\frac{T_f T_a T_m}{k}\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}t^4}+\frac{(T_f+T_a)T_m}{k}\frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}t^3}+\frac{T_f+T_m}{k}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\varphi=\psi$$

$k=\frac{k_p k_a k_g k_t}{R_f k_d}$ **开环比例系数**

给定输入和初始状态，得到输出的具体形式：

$$\boldsymbol{\varphi(t)=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}+C_3e^{\mu t}\sin\nu t+C_4e^{\mu t}\cos\nu t+\varphi^*(t)}$$

特解

模态或振型： $e^{\alpha t}$，$e^{\beta t}$，$e^{\mu t}\sin\nu t$，$e^{\mu t}\cos\nu t$

特征方程的根完全决定了自由运动的模态

机理建模必须充分了解物理过程，微分方程描述不直观、难以分析

控制系统的微分方程描述

控制系统的微分方程求解

线性定常系统由如下n阶微分方程描述：

$$a_0\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}y(t)+a_ny(t)=$$
$$b_0\frac{d^m}{dt^m}x(t)+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t)+\cdots+b_{m-1}\frac{d}{dt}x(t)+b_mx(t)$$

如何求解此微分方程呢?

◆ **拉普拉斯变换**

- **工程数学中常用的一种积分变换**
- **对于求解线性微分方程尤为有效，可把微分方程化为容易求解的代数方程来处理，从而简化计算和分析**

Laplace变换

$L[f(t)]=F(s)$　从时域→复域

定义　$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$　$s=\sigma+jw$ **复数自变量**

举例　$$f(t)=1(t)$$

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

常见函数的Laplace变换

$$\delta(t) \rightarrow 1(s)$$

$$\sin \alpha t \rightarrow \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

$$1(t) \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$\cos \alpha t \rightarrow \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

$$t \rightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$e^{-\alpha t} \rightarrow \frac{1}{s + \alpha}$$

P71，表2.5.1

Laplace变换基本定理

初值定理

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

条件：$f(t)$ 不含冲击函数及其各阶导数，或象函数$F(s)$为真分数

终值定理

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

条件：$f(t)$ 在 t 趋于无穷时极限存在

微分定理

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$$L\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-)$$

延迟定理

$$L[f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s)$$

Laplace变换基本定理

积分定理 $f(t)=\int g(t)dt$ $F(s)=\dfrac{G(s)}{s}+\dfrac{f(0^-)}{s}$

线性性质 $L[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$

时间尺度定理 $L\left[f\left(\dfrac{t}{a}\right)\right]=aF(as)$

卷积定理 $f_1(t)*f_2(t)\rightarrow F_1(s)F_2(s)$

衰减定理 $L[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$

Laplace反变换

Laplace反变换定义：$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{ts}ds$

工程中$F(s)$常为有理函数，将其分解成部分分式处理

常见Laplace反变换：

$$1(s)\ \rightarrow\ \delta(t)$$

$$\frac{1}{s}\rightarrow 1(t)$$

$$\frac{1}{s^n}\rightarrow\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{Ts+1}\rightarrow e^{-t/T}/T$$

$$\frac{1}{s^2+w^2}\rightarrow\frac{\sin wt}{w}$$

$$\frac{s}{s^2+w^2}\rightarrow\cos wt$$

P71，表2.5.1

用Laplace变换解微分方程的过程

1. 对微分方程的两端同求Laplace变换
2. 对变换后的代数方程进行整理化简，展开成部分分式
3. 运用Laplace反变换求出一个通解，根据初始值确定最终结果

$$a_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = r$$

假设零初值

$$a_4 s^4 \bar{y}(s) + a_3 s^3 \bar{y}(s) + a_2 s^2 \bar{y}(s) + a_1 s \bar{y}(s) + a_0 \bar{y}(s) = \bar{r}(s)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{\bar{r}(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s + p_n}$$

$$y(t) = K_1 e^{-p_1 t} + K_2 e^{-p_2 t} + \cdots + K_n e^{-p_n t}$$

用Laplace变换解微分方程

$$\begin{cases} T\dfrac{dy}{dt} + y = r & r(t) = 1(t) \\ & y(0) = 0 \end{cases}$$

方程两边进行Laplace变换（零初始条件）

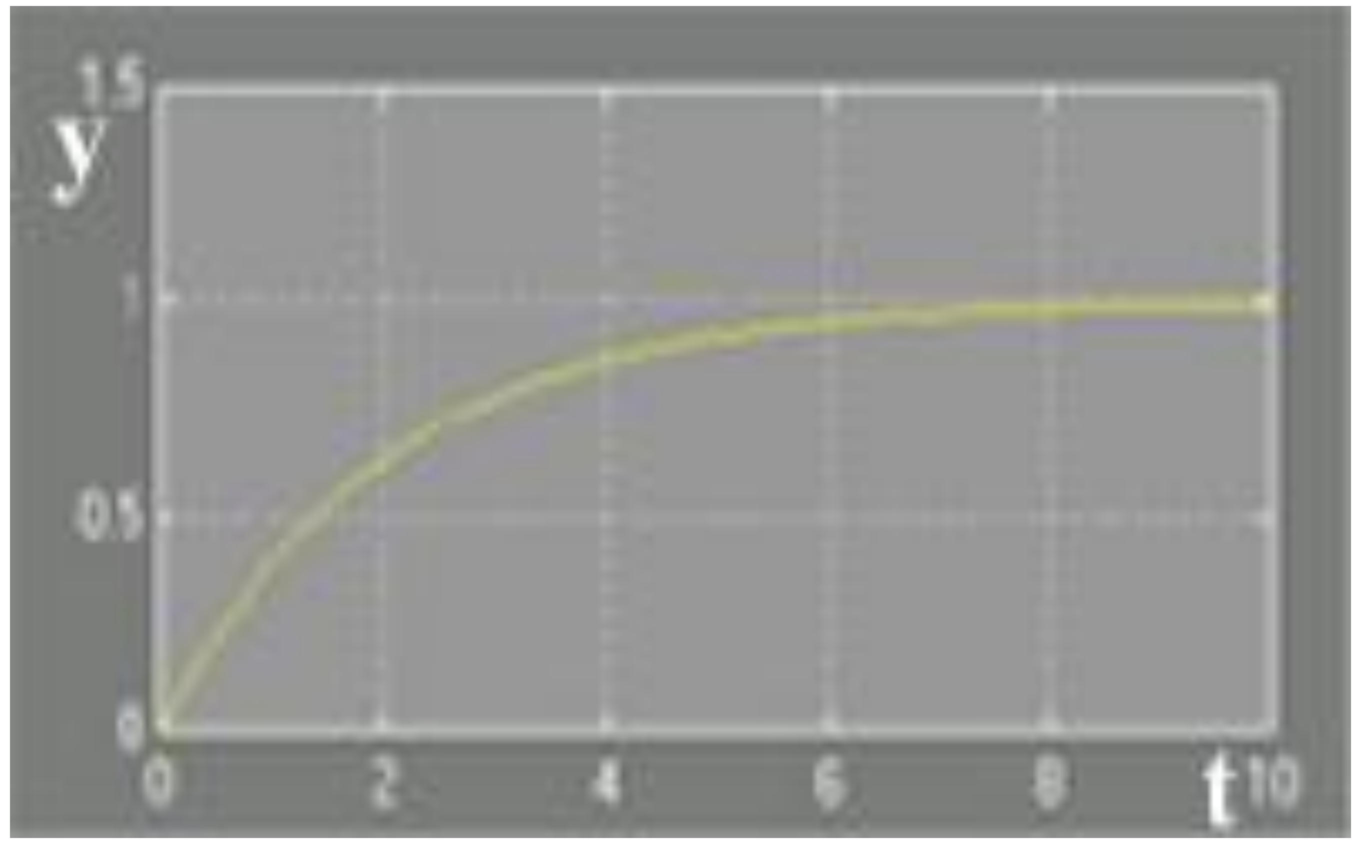
$$Tsy(s) + y(s) = r(s)$$

$$y(s) = \frac{r(s)}{Ts+1} = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

用Laplace变换解微分方程

反变换 $y(t) = 1(t) - e^{-\frac{t}{T}}$

试用终值定理求 $y(\infty)$

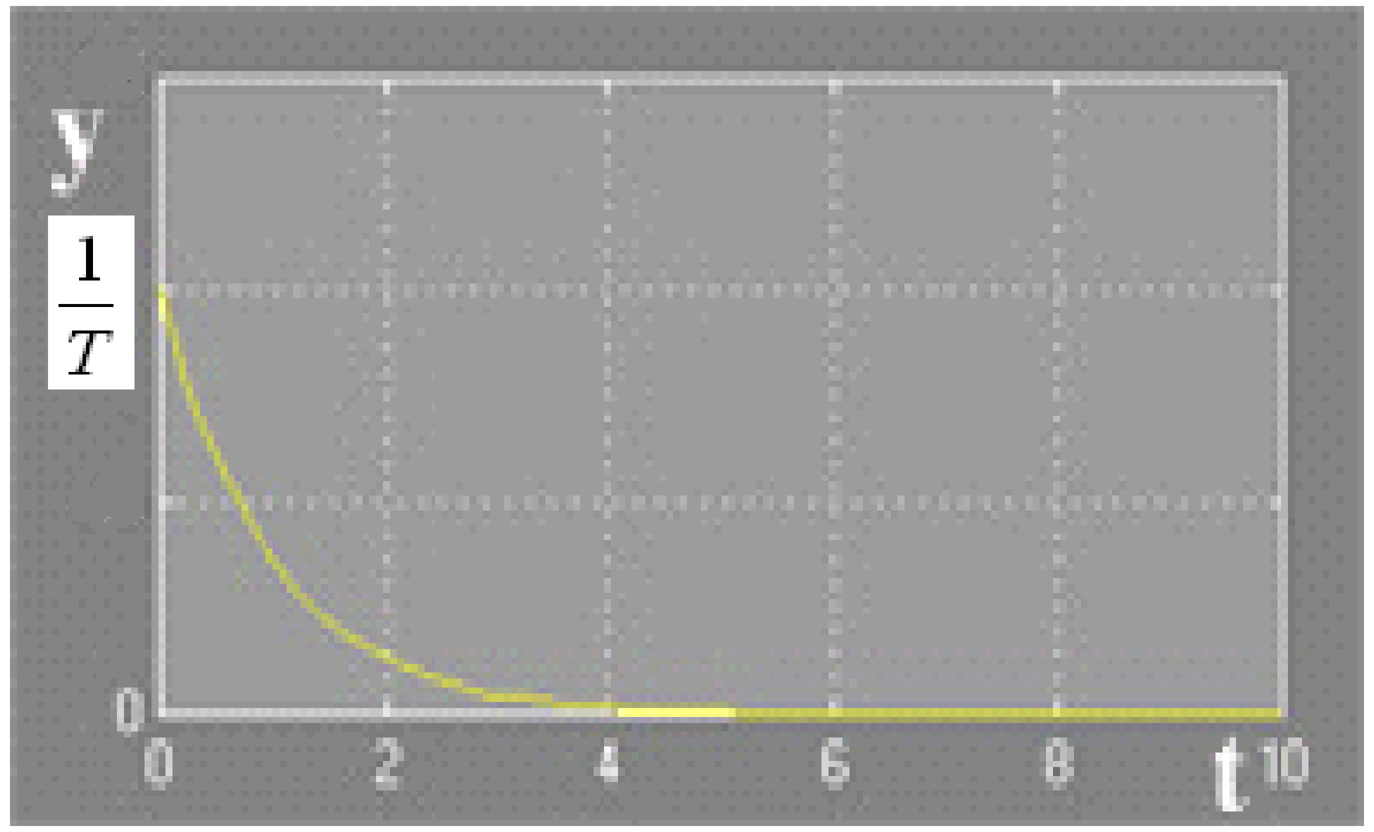


当 $r(t) = \delta(t)$

$$y(s) = \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

反变换 $y(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$

$$y(0^-) = 0, \quad y(0^+) = \frac{1}{T}$$



初值有限跳变！ **试用初值定理求 $y(0^+)$**

传递函数

传递函数的定义（单输入单输出线性定常系统，且零初值条件下）

$$G(s)=\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{\text{输出的Laplace变换}}{\text{输入的Laplace变换}}$$

传递函数描述的系统本身与输入无关

变量 s 为复数，称为复频率；相应的数学描述称为频率域描述

传递函数的零点和极点

- 传递函数分子多项式与分母多项式经因式分解可写为如下形式：

$$G(s)=\frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

- 传递函数分子多项式的根z_i称为传递函数的**零点**
- 分母多项式的根p_j称为传递函数的**极点**
- K^*称为**传递系数**或根轨迹增益
- 分母多项式被称为传递函数的特征多项式或**特征方程**

极点决定自由运动的模态

零点的作用是调节各模态在输出量中的比重

由传递函数确定系统的输出响应

- **已知$G(s), r(t)$**
- **求$R(s) = L[r(t)]$**
- **求$Y(s) = G(s)R(s)$**
- **求拉普拉斯反变换$y(t) = L^{-1}[G(s)R(s)]$**

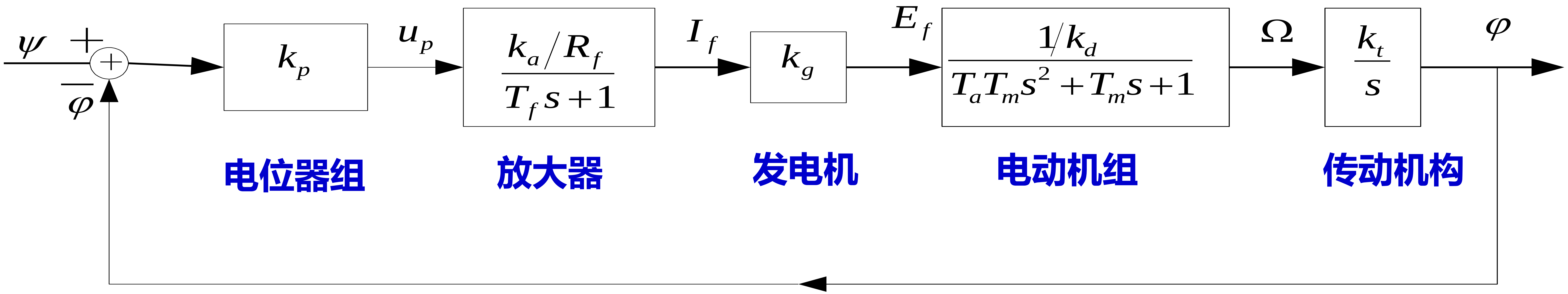
性质

- **传递函数$G(s)$的拉氏反变换$g(t)$称为脉冲响应，是系统在单位脉冲输入时的输出响应**

$$R(s) = L[\delta(t)] = 1 \qquad g(t) = L^{-1}[G(s)]$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)R(s)] = \int_0^t r(t)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t r(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

控制系统的传递函数表示



$$u_p = k_p(\psi - \varphi)$$

$$T_f \frac{dI_f}{dt} + I_f = \frac{k_a}{R_f} u_p$$

$$E_f = k_g I_f$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = k_t \Omega$$

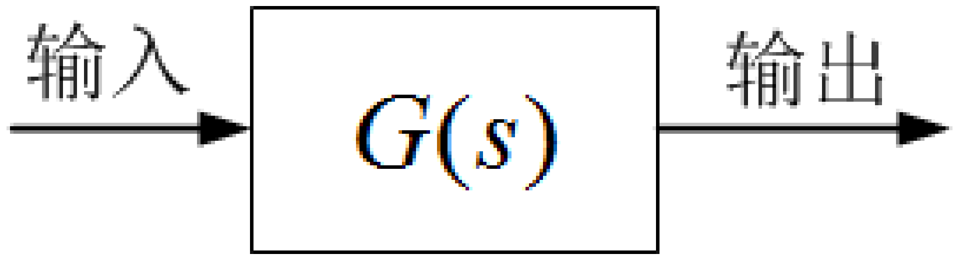
$$T_a T_m \frac{d^2\Omega}{dt^2} + T_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d} E_f$$

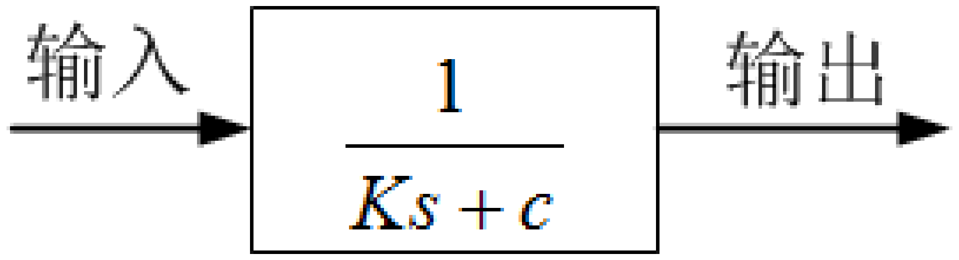
方框中的公式就是对应模块的传递函数　　**优点：直观、清晰、简单**

传递函数框图

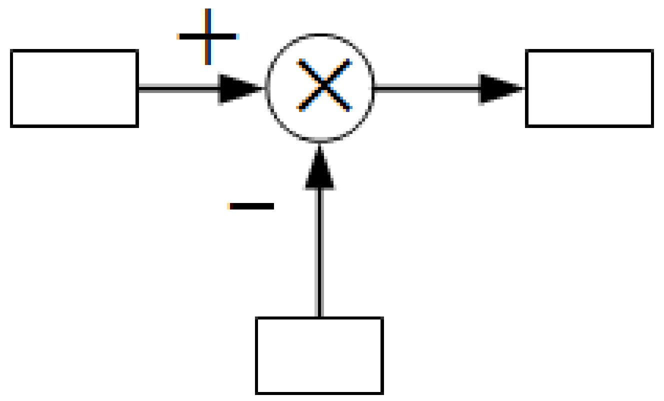
1. 框图的定义

- **系统框图是传递函数的一种图形描述方式，简明直观，运算方便**

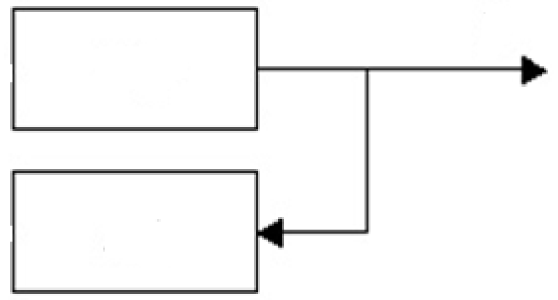




- **求和单元**



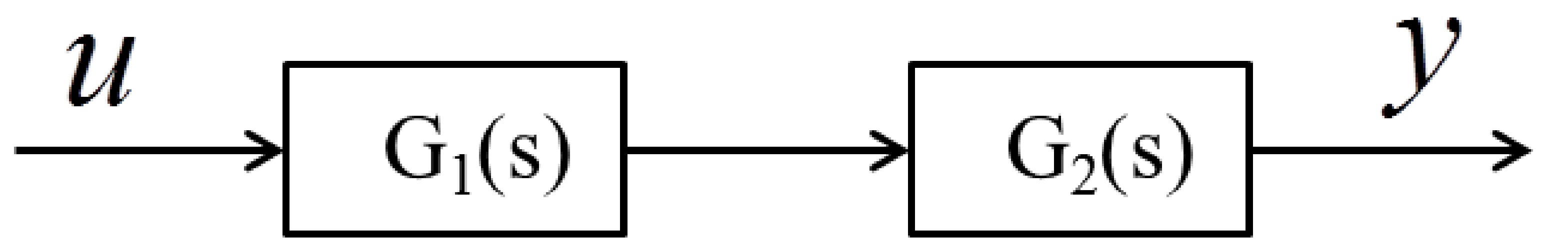
- **分支单元**



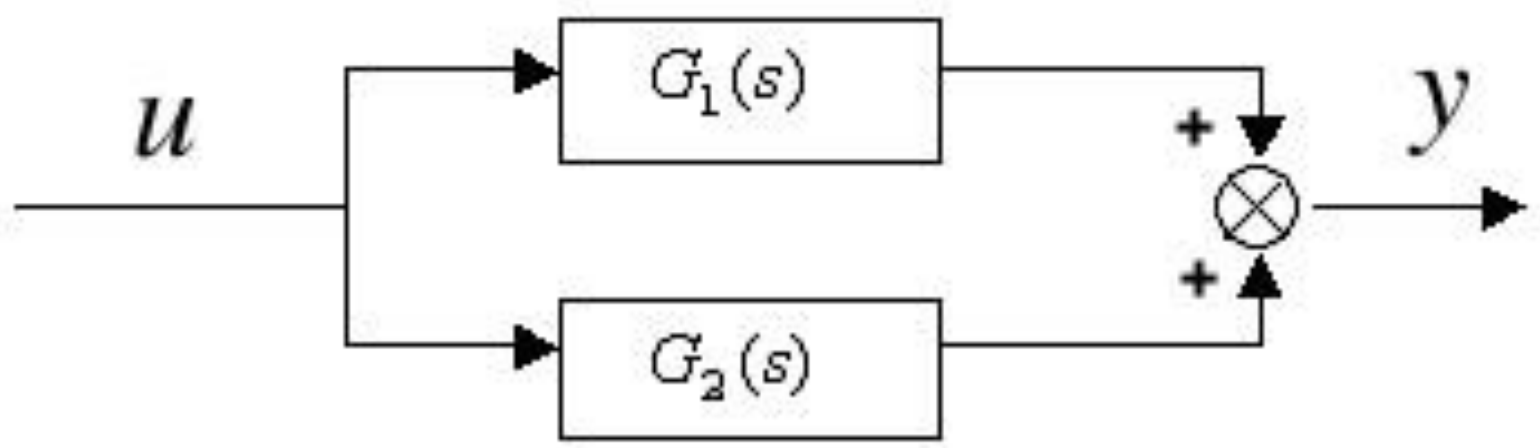
传递函数框图

2. 框图的连接方式

- **串联　传递函数相乘** $\frac{y(s)}{u(s)} = G_2(s)G_1(s)$



- **并联　传递函数相加** $\frac{y(s)}{u(s)} = G_1(s) + G_2(s)$



传递函数框图

- **反馈**

G(s): 主通道的传递函数

H(s): 负反馈通道的传递函数

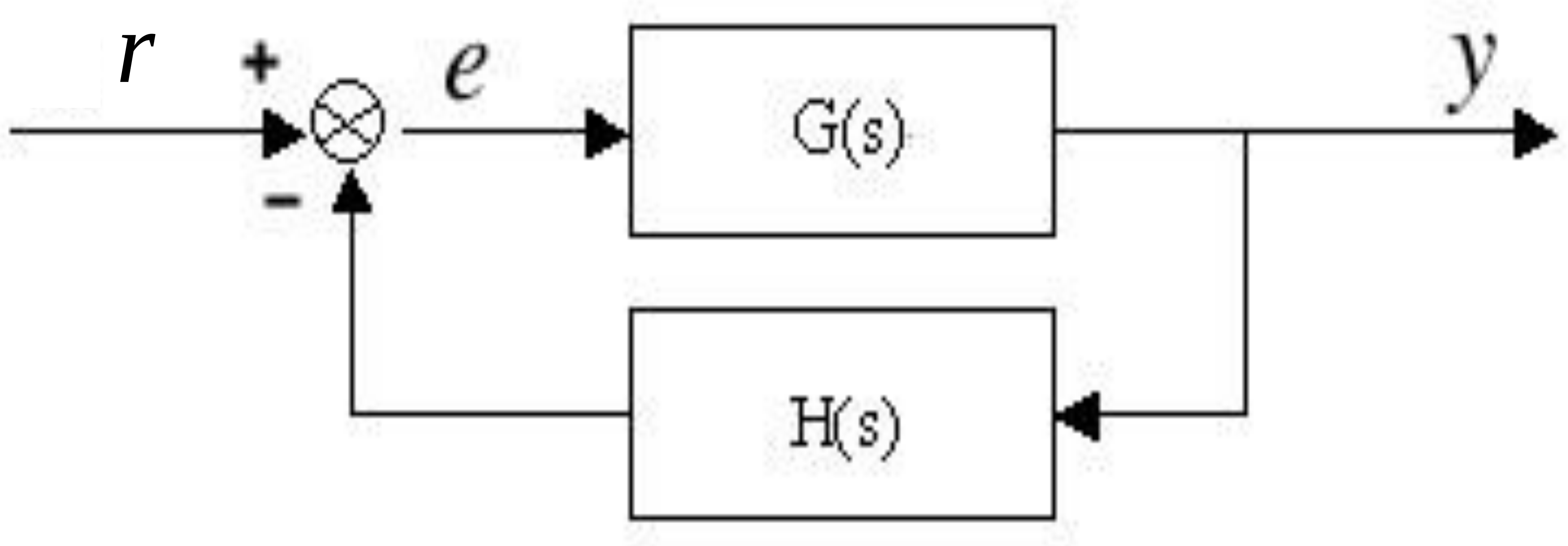
G(s)H(s): 开环传递函数

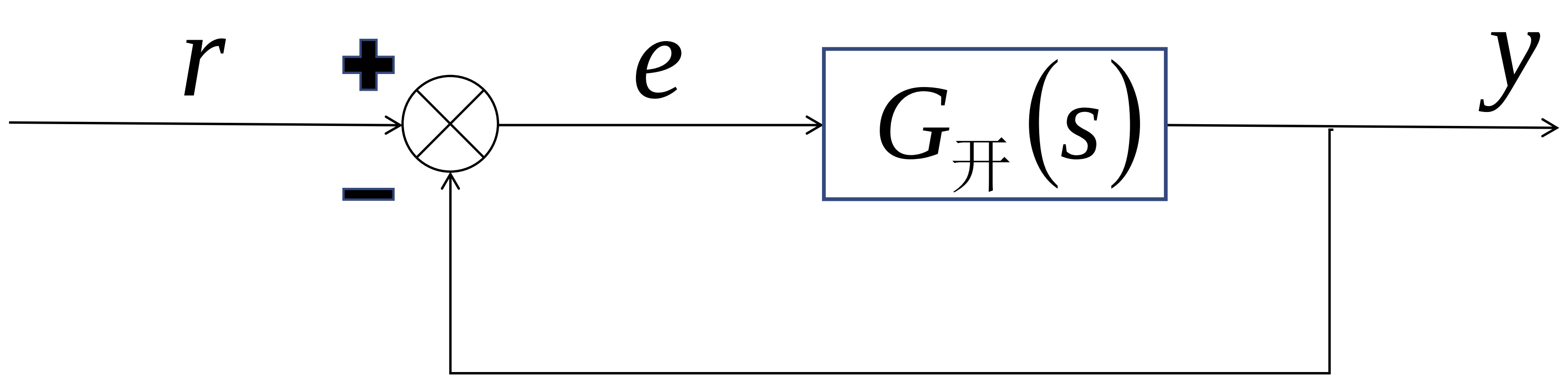
$$G(r-Hy)=y$$

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{G_{主}}{1+G_{开}}$$

同理可得正反馈如下：

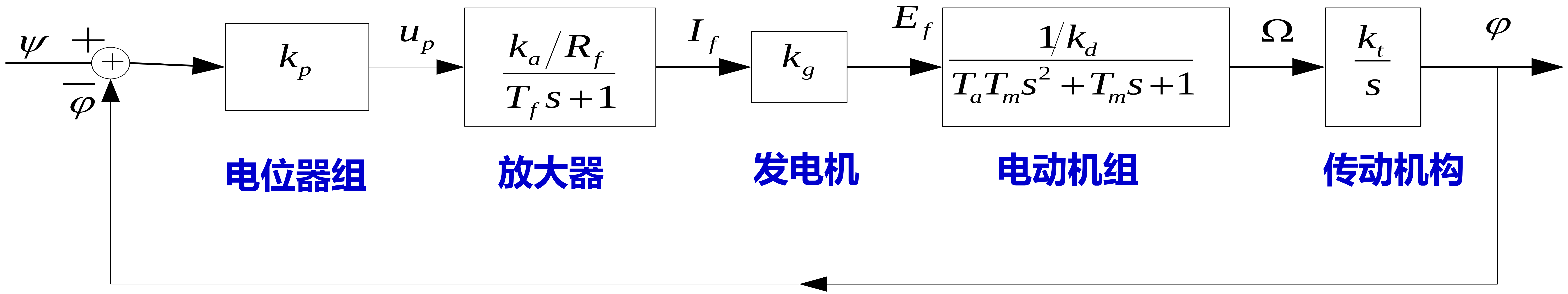
$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$



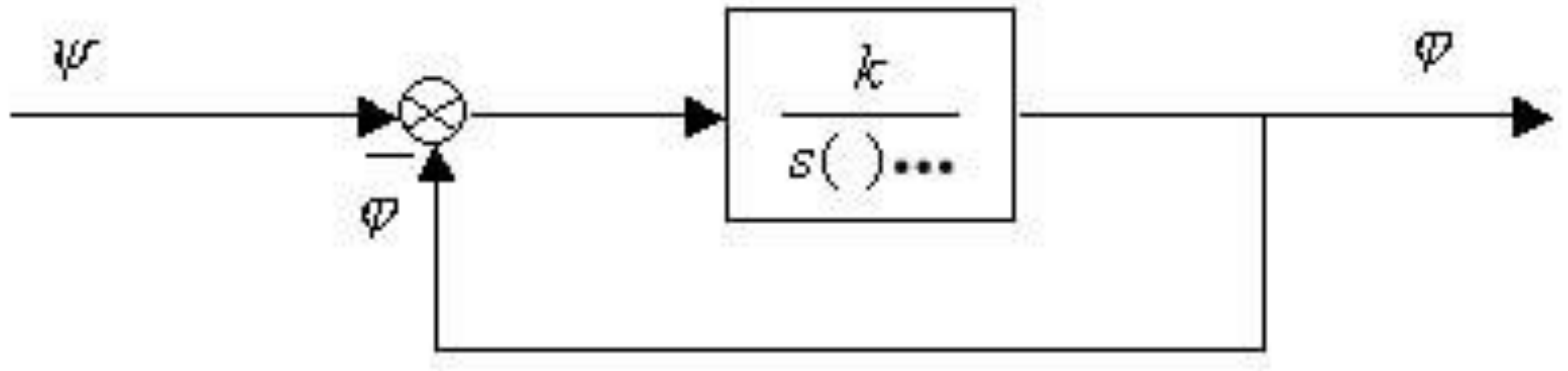


单位负反馈 $\frac{G_{开}}{1+G_{开}}=\frac{y}{r}=G_{闭}$

传递函数框图



上述随动系统可化成如下形式：



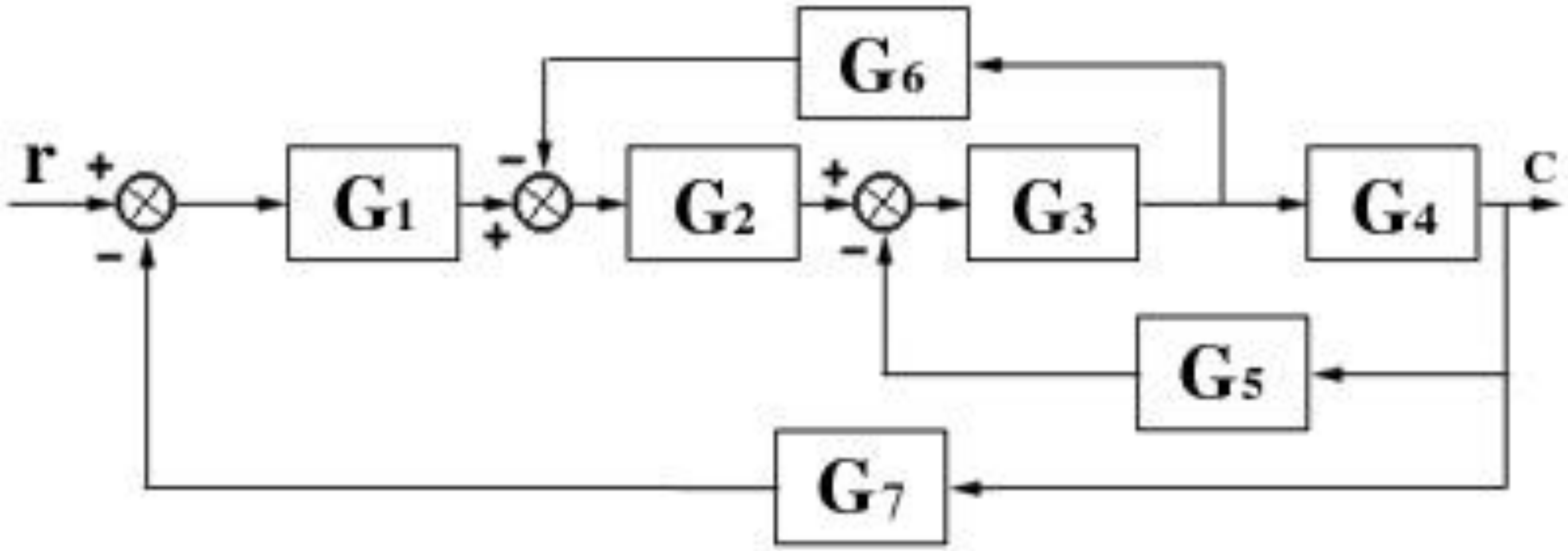
推导出 φ 与 ψ 之间的关系

（1）传递函数

（2）微分方程 $$\frac{T_fT_aT_m}{k}\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}t^4}+\frac{(T_f+T_a)T_m}{k}\frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}t^3}+\frac{T_f+T_m}{k}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\varphi=\psi$$

传递函数框图

复杂框图的例子（来自于机理建模）



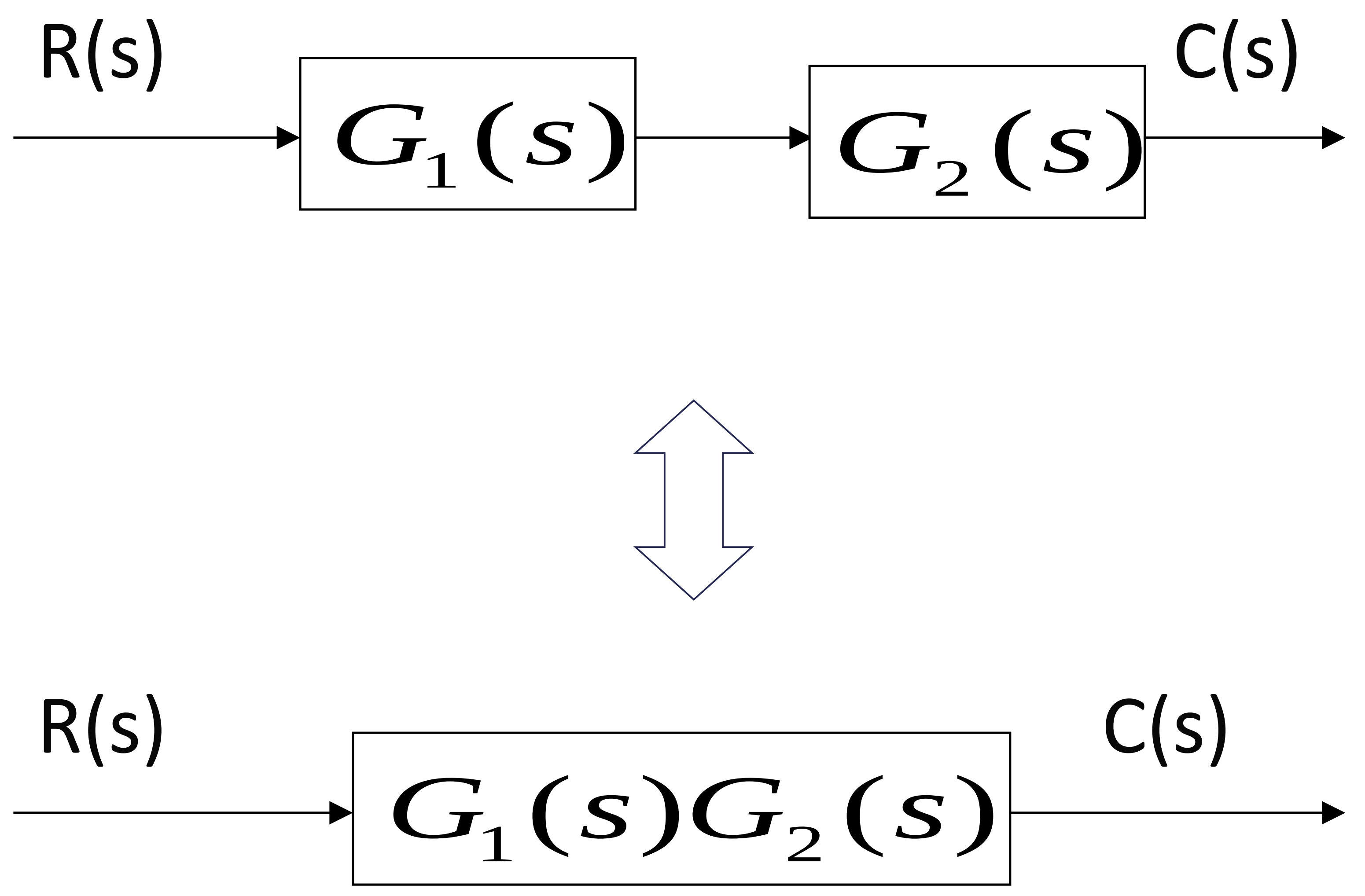
系统整体传递函数可通过列变量方程组并化简求得，但费时费力

框图变换

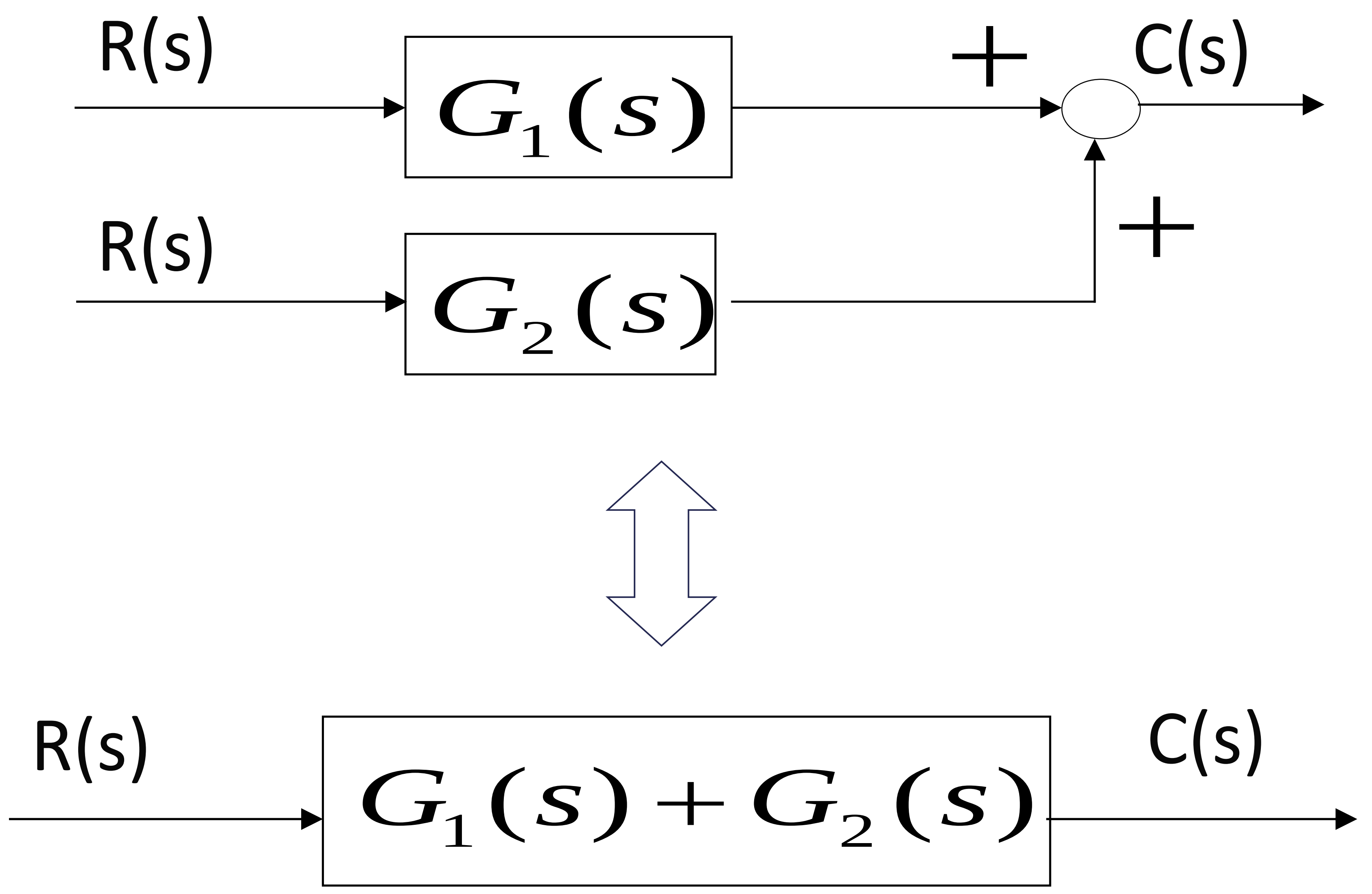
框图变换目的是通过局部变换逐步实现整体传递函数的简化计算

基本原则：传递函数不变，即变换前后“变量对”之间的关系保持相同

（1）串联

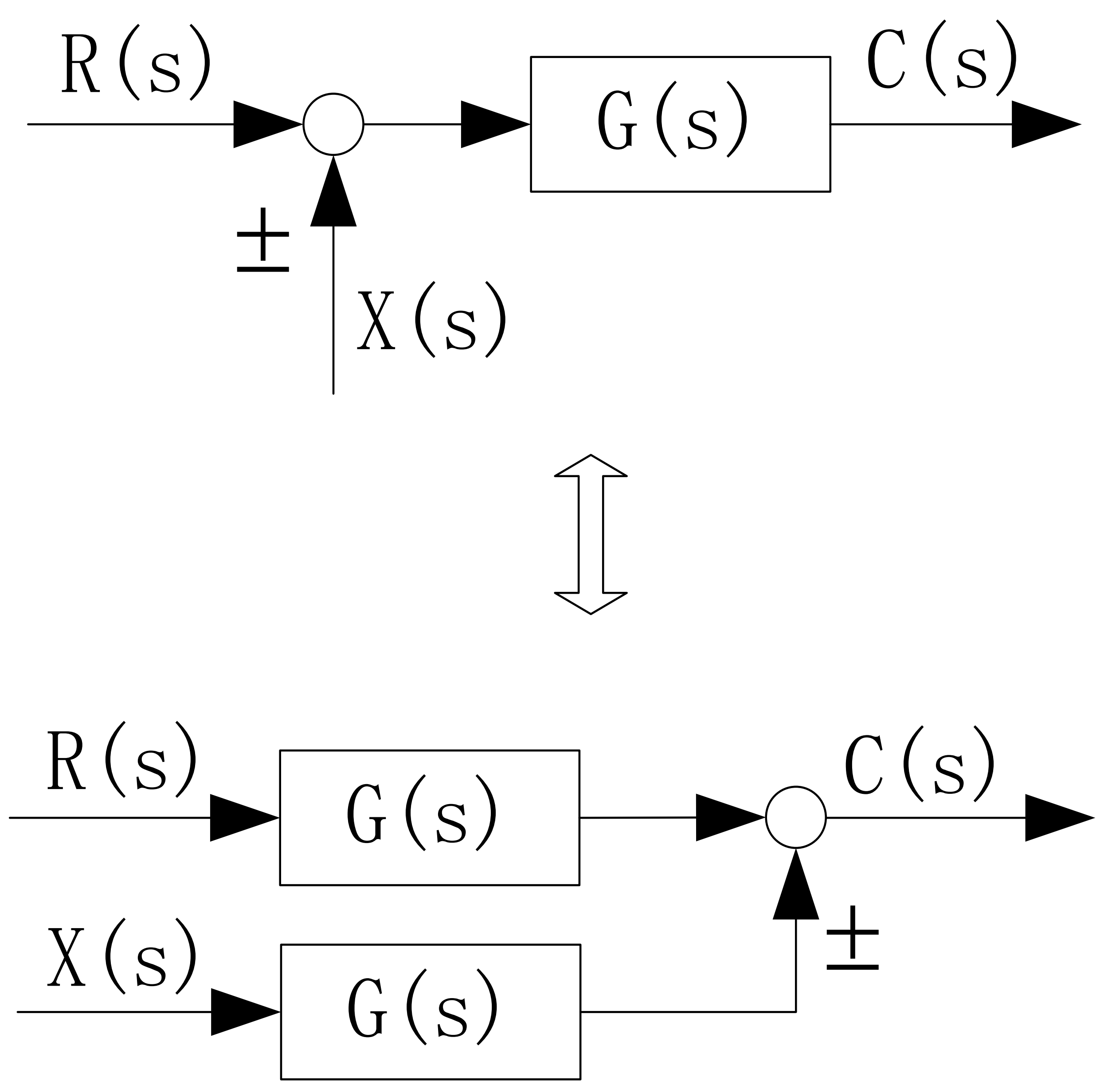


（2）并联

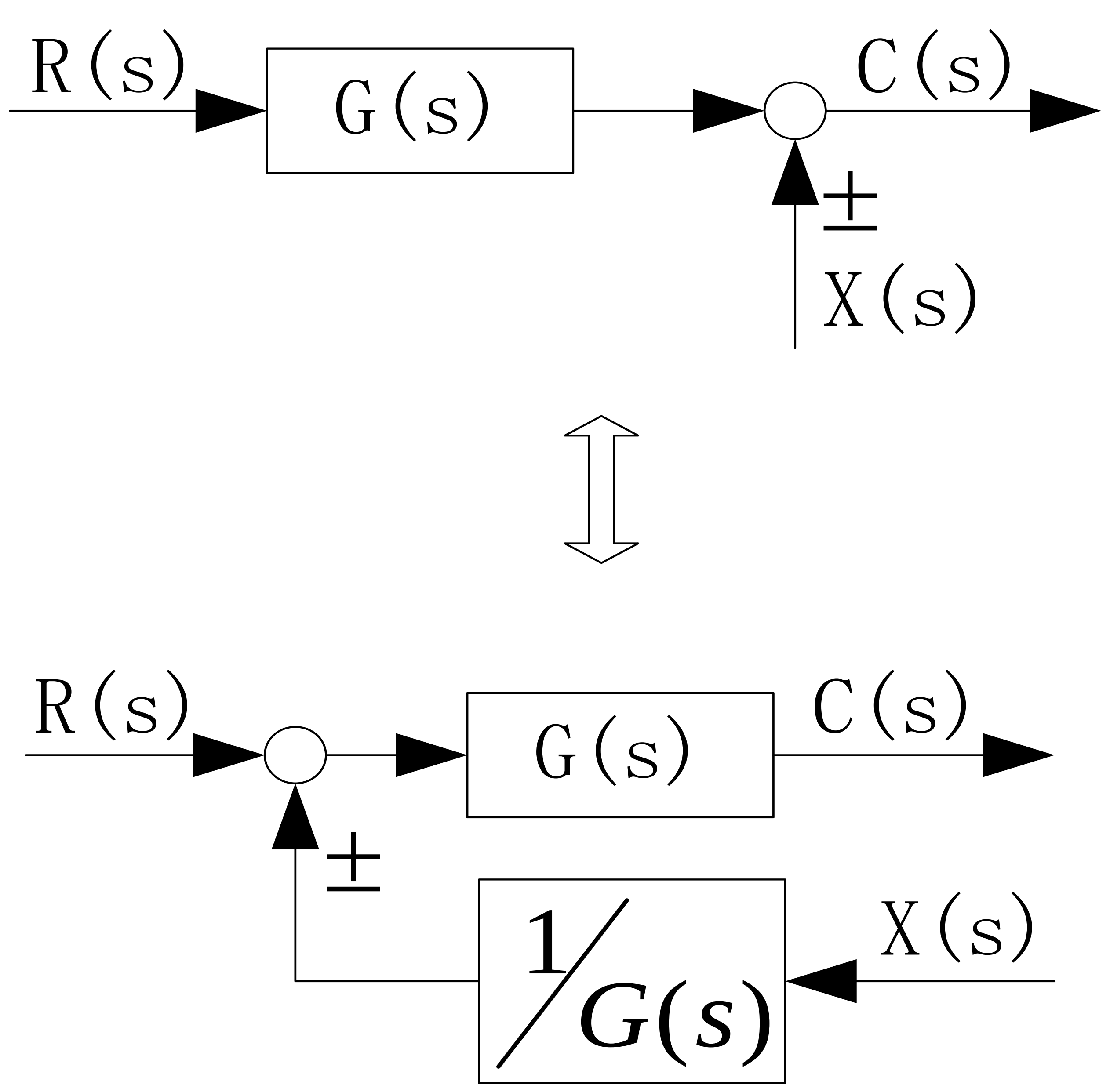


框图变换

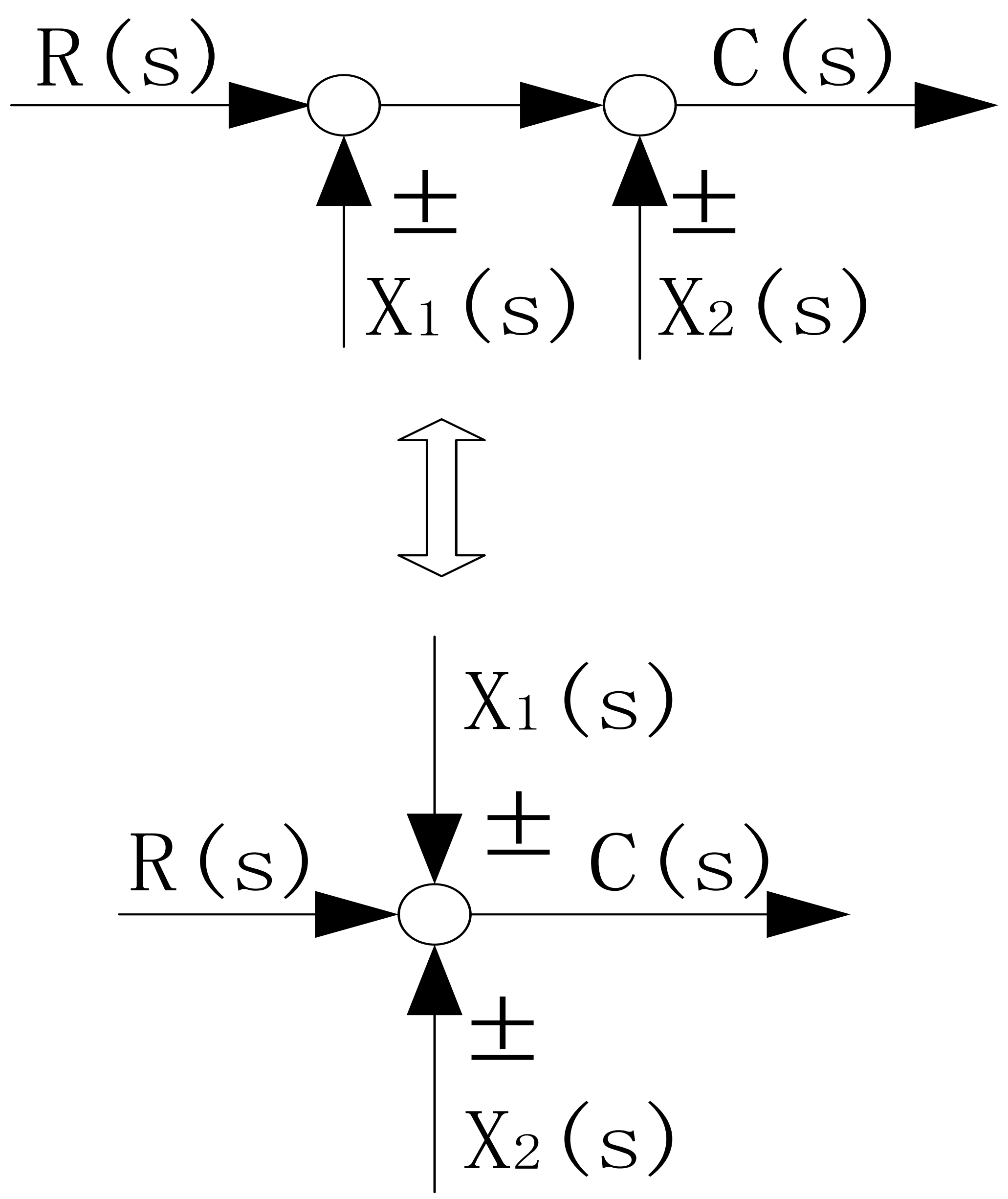
(3）比较点后移



(4）比较点前移

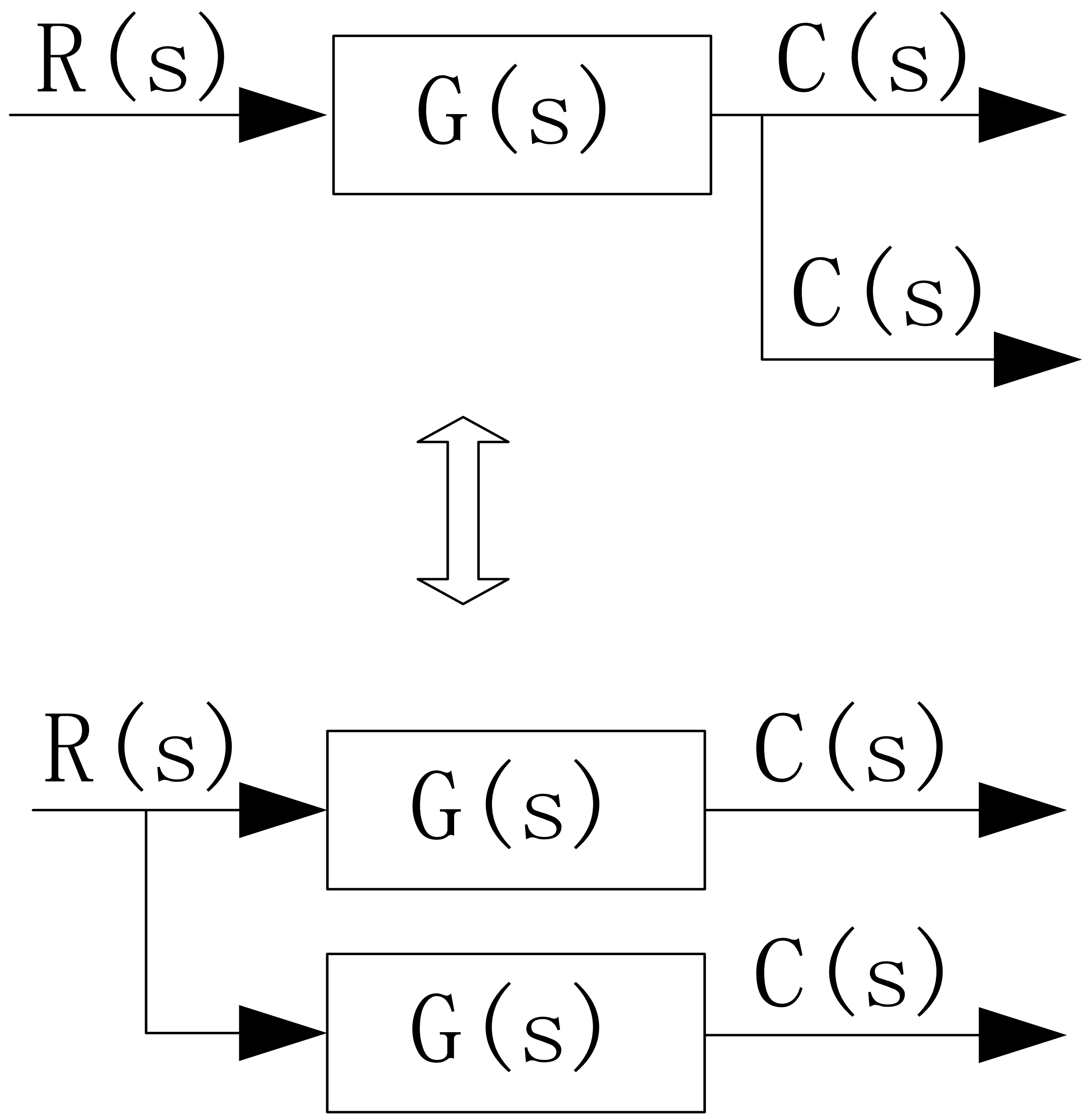


(5）比较点合并

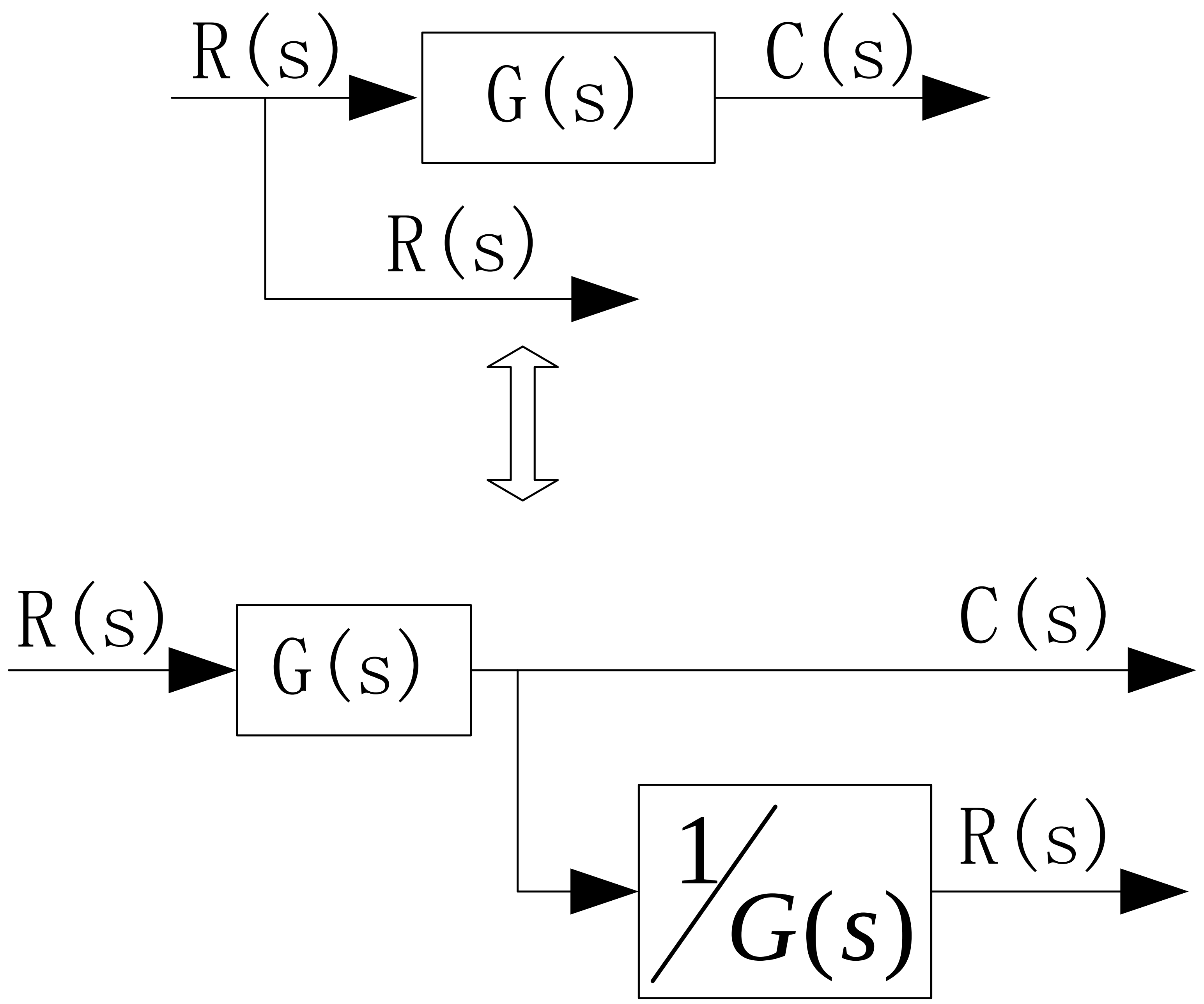


框图变换

（6）引出点前移

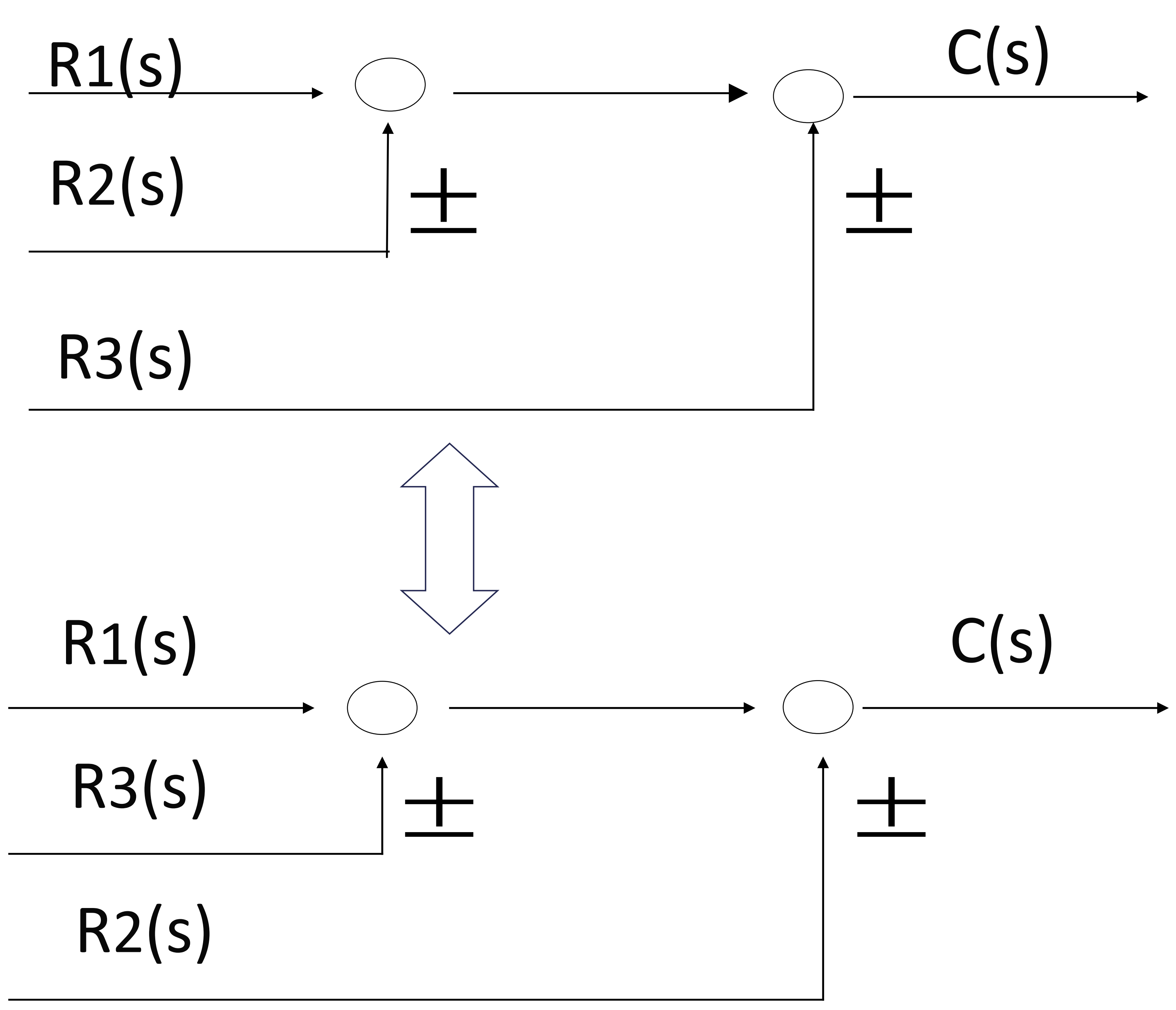


（7）引出点后移

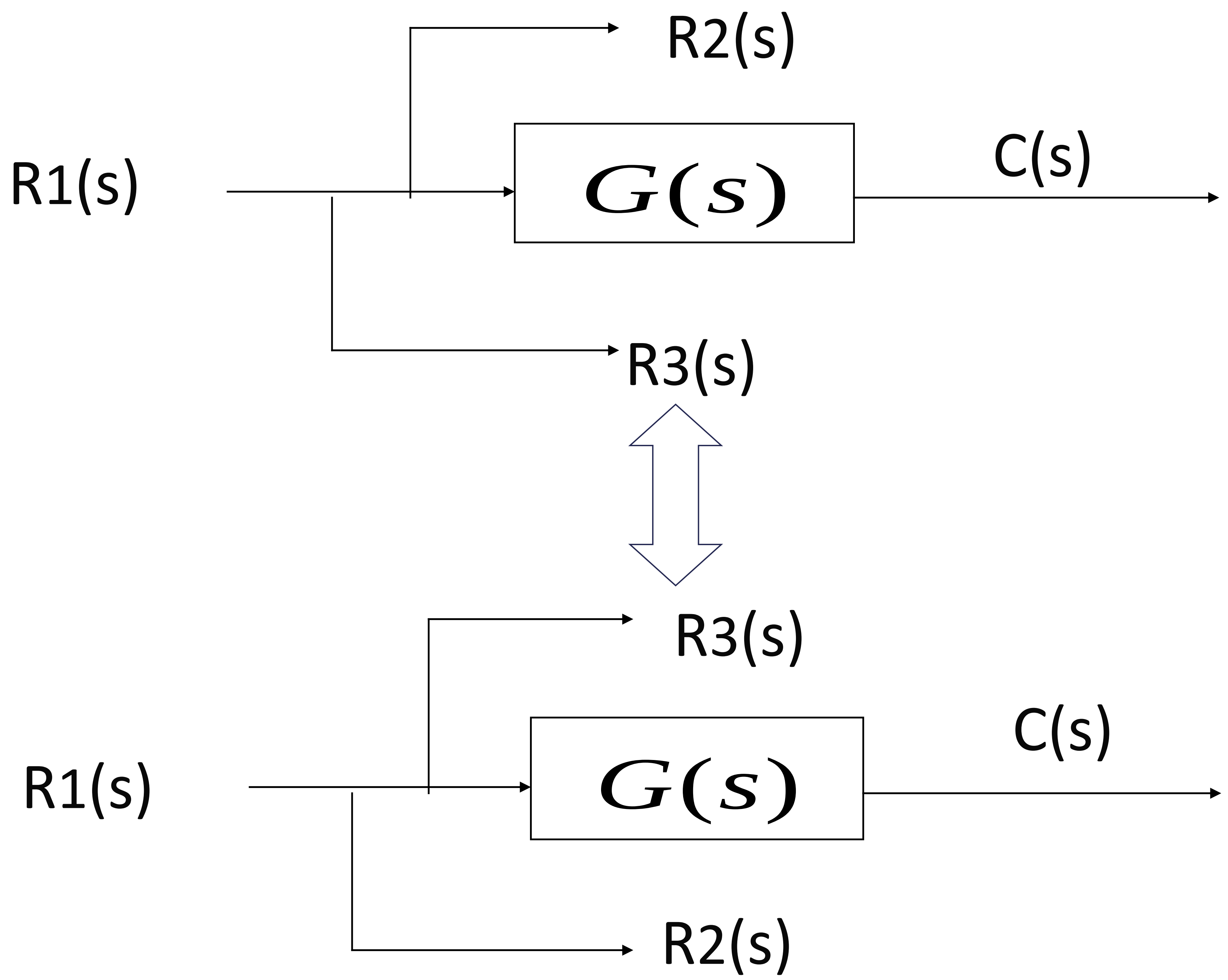


框图变换

（8）比较点交换

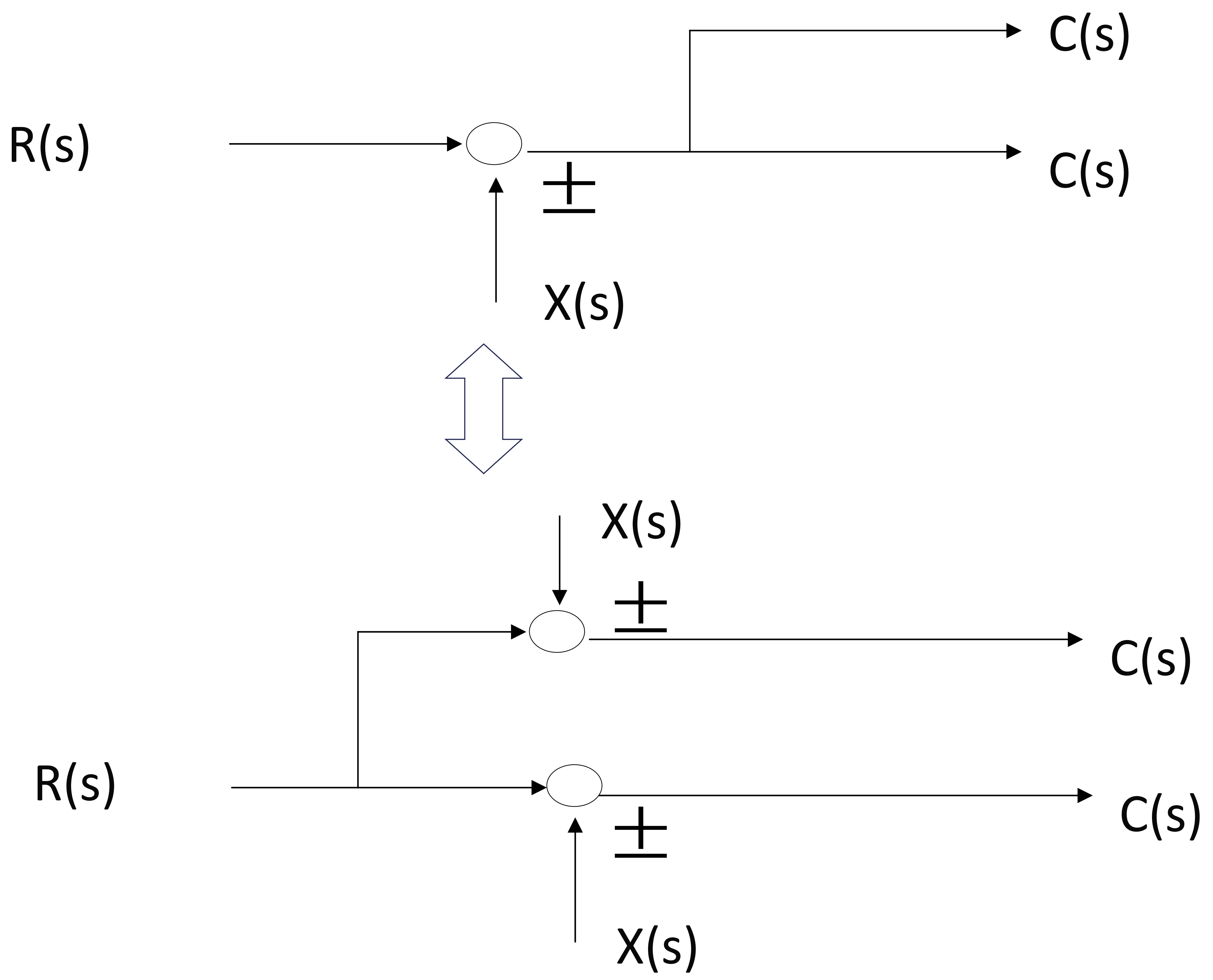


（9）引出点交换



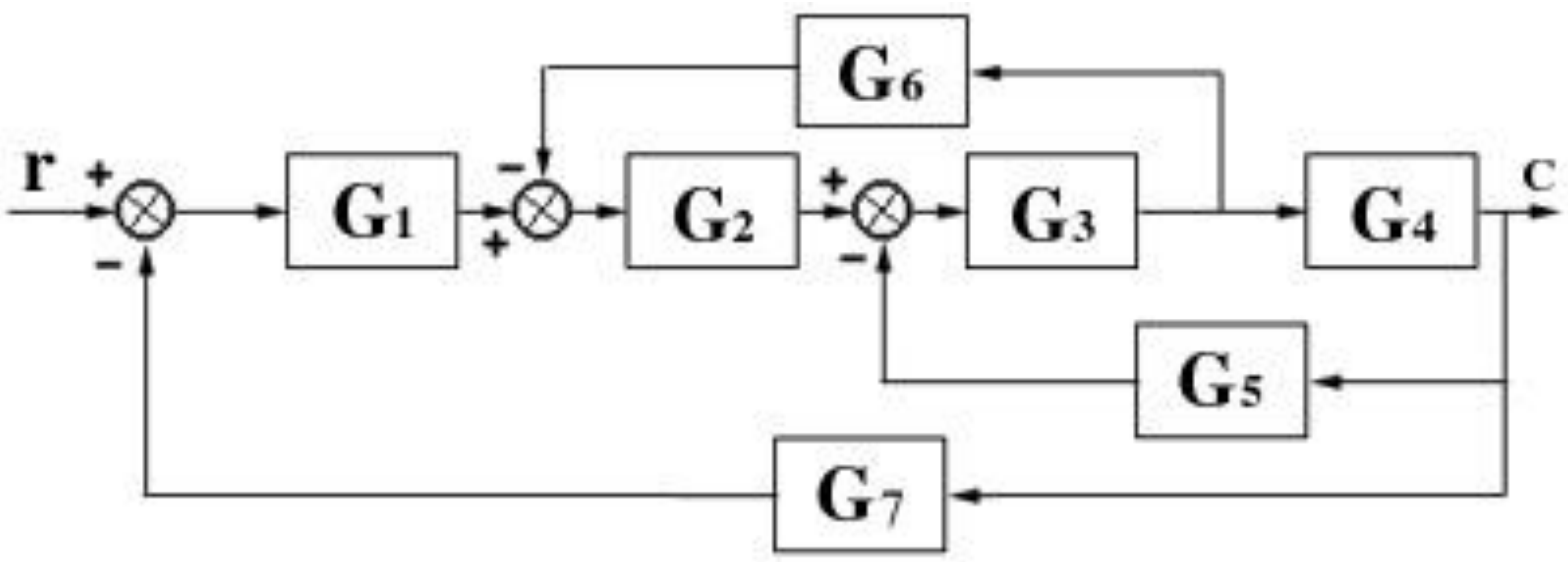
框图变换

（10）引出点和比较点交换



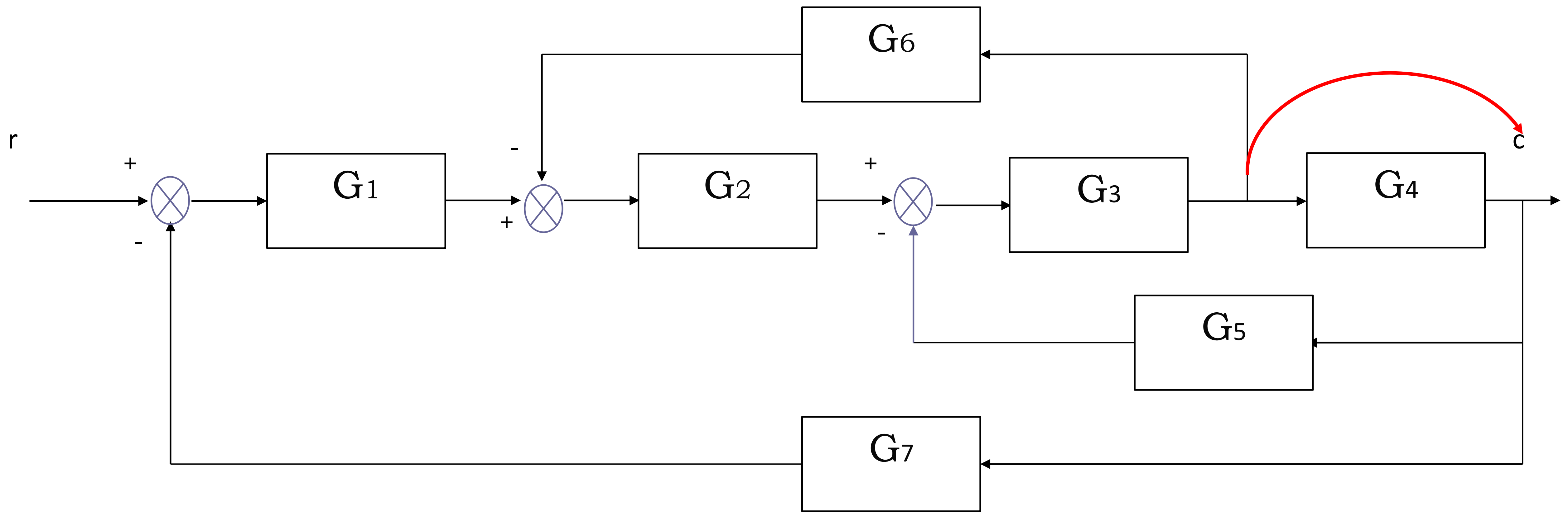
框图变换的例子

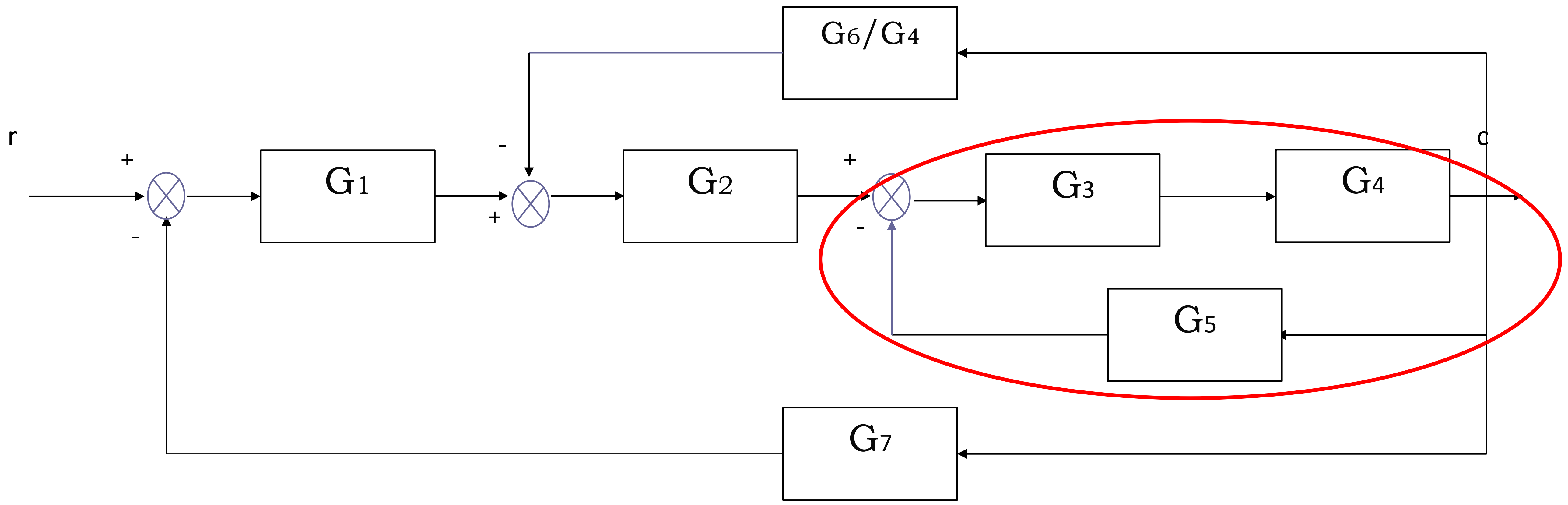
（1）交叉反馈



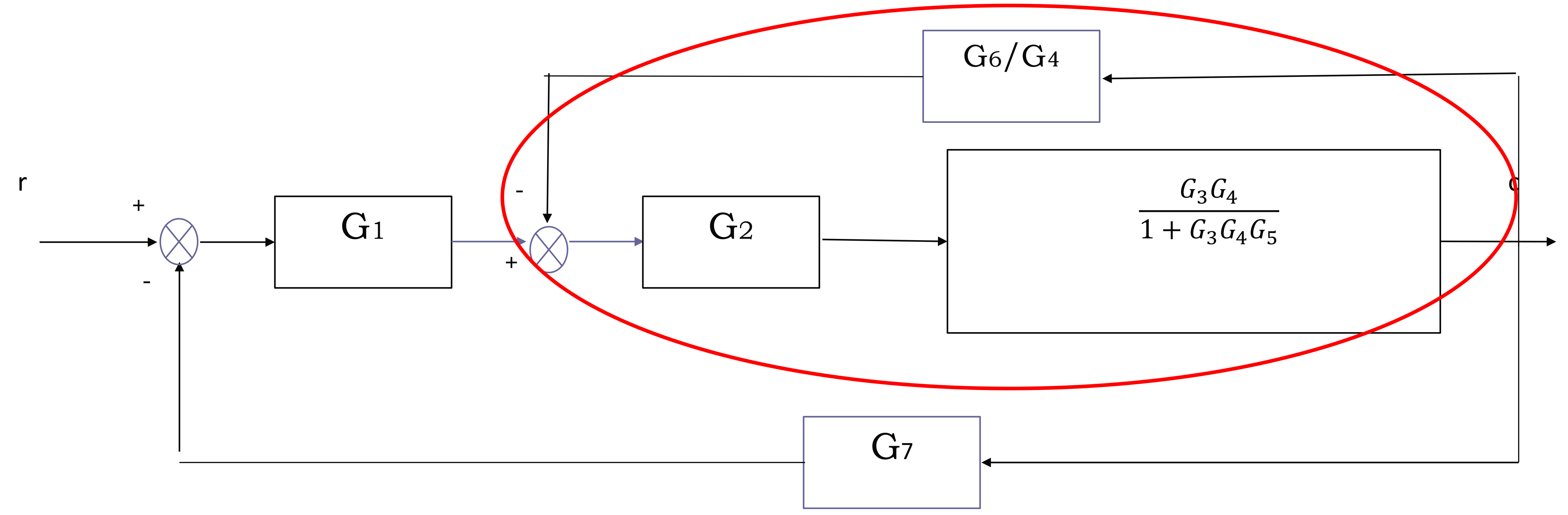
框图变换的例子

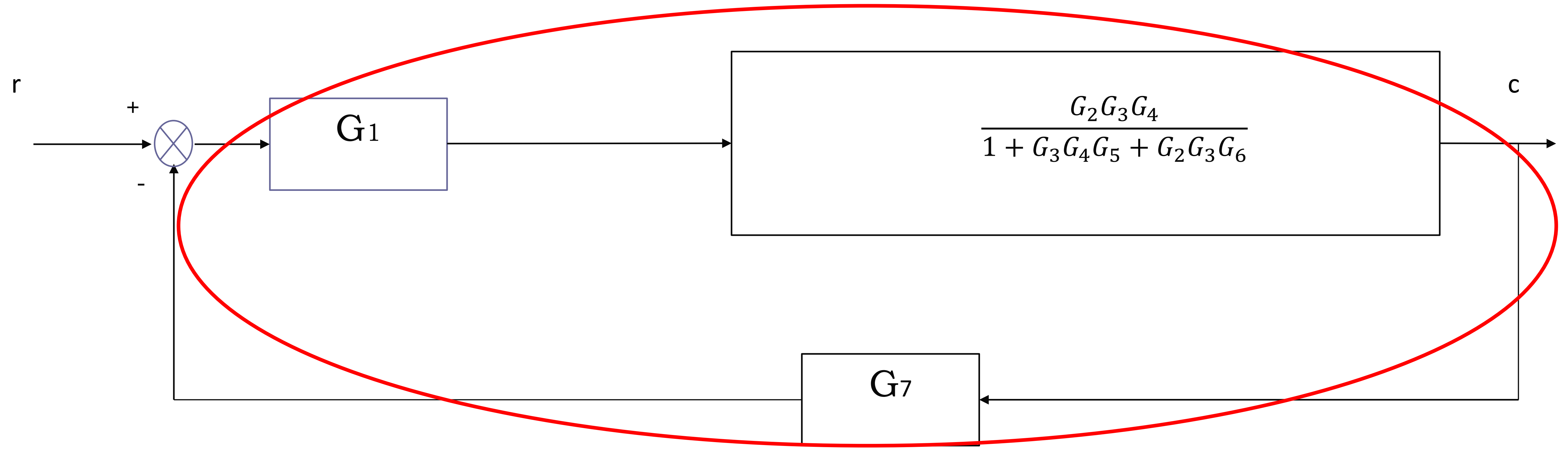
解法一

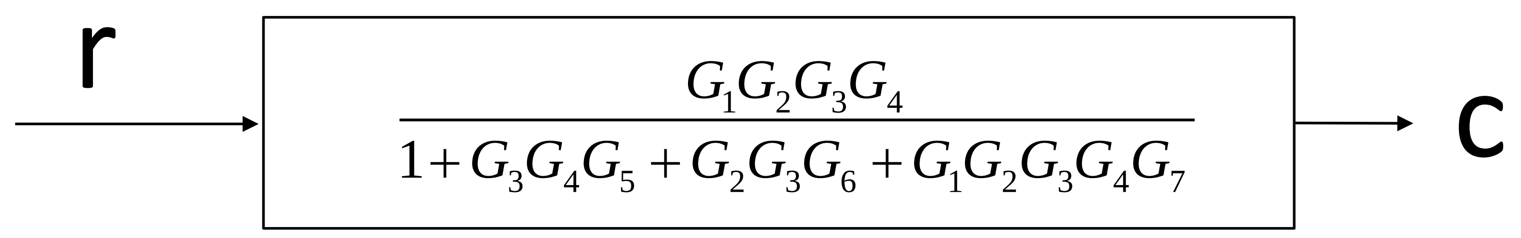




框图变换的例子

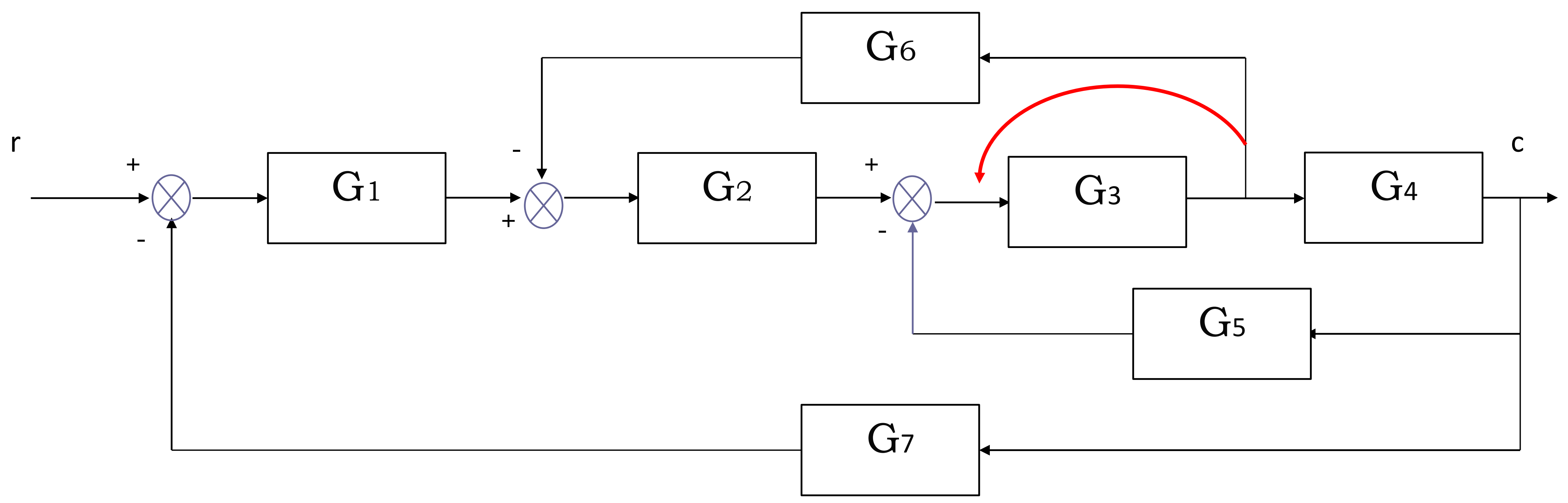

r
+
-
G1
G6/G4
G2
$\frac{G_3G_4}{1+G_3G_4G_5}$
c
G7

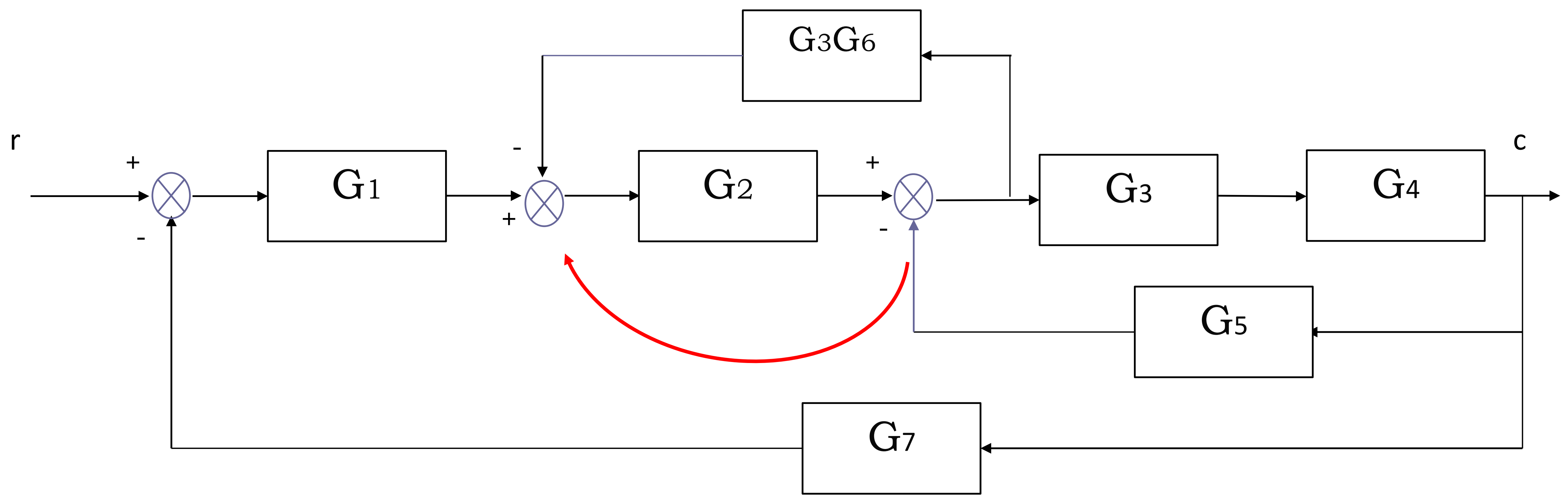

r
+
-
G1
$\frac{G_2G_3G_4}{1+G_3G_4G_5+G_2G_3G_6}$
c
G7


r
$\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_3G_4G_5+G_2G_3G_6+G_1G_2G_3G_4G_7}$
c

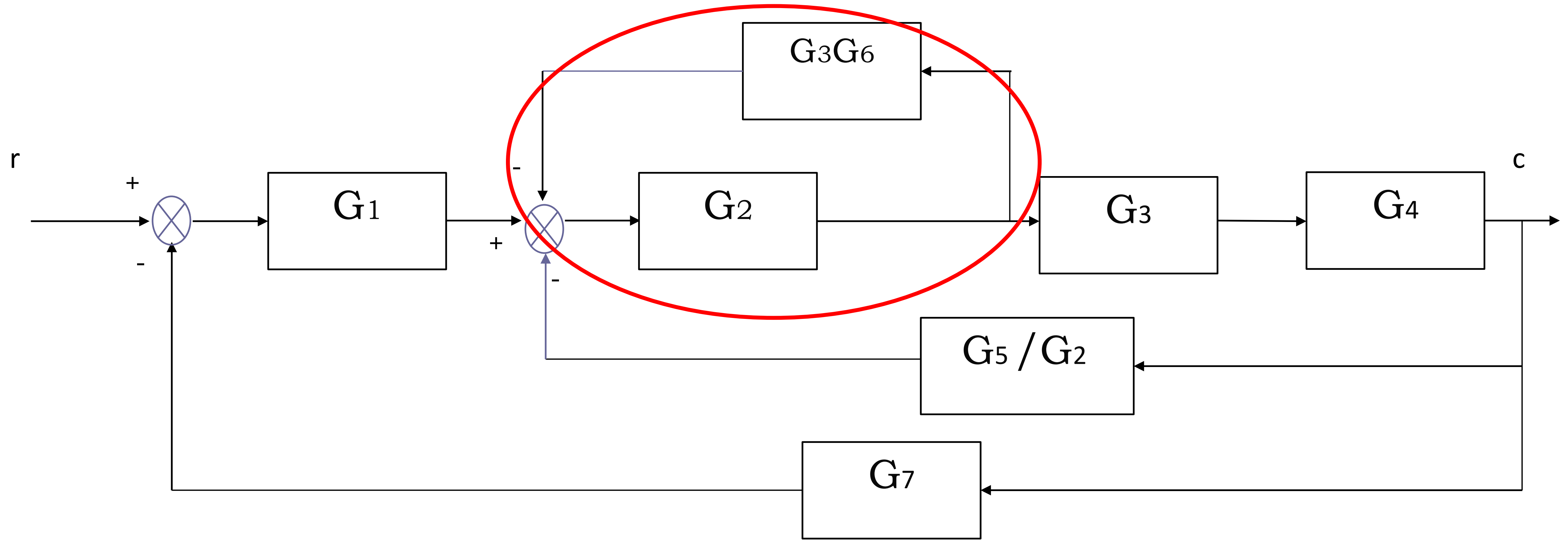
框图变换的例子

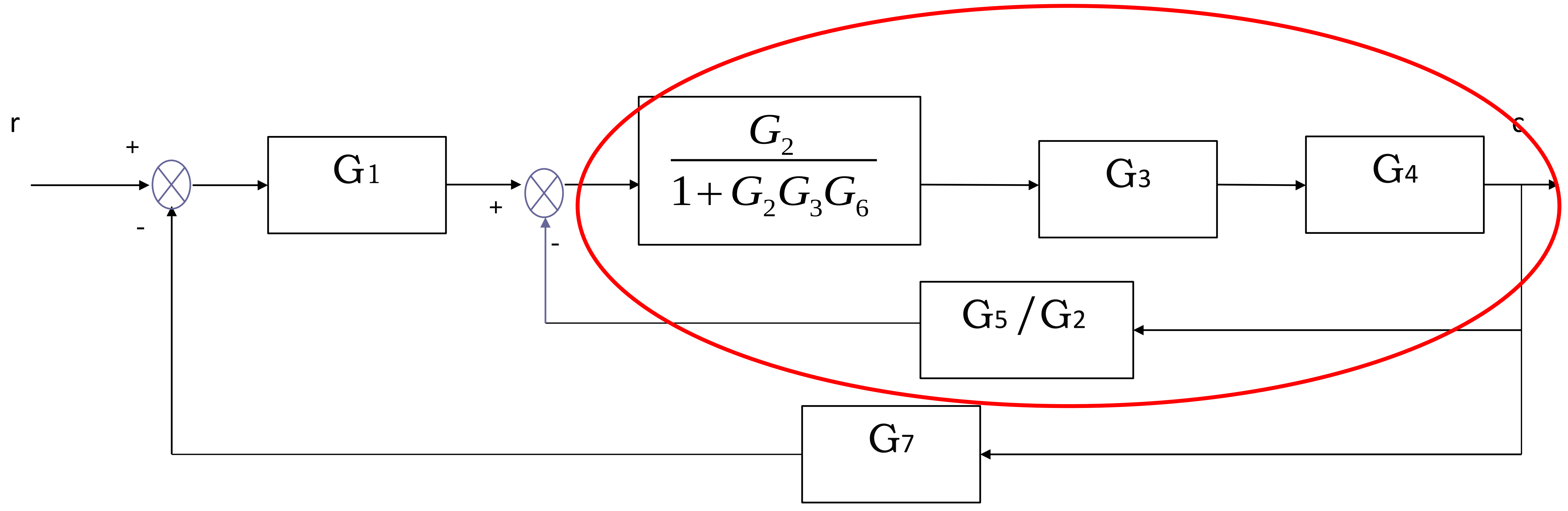
解法二



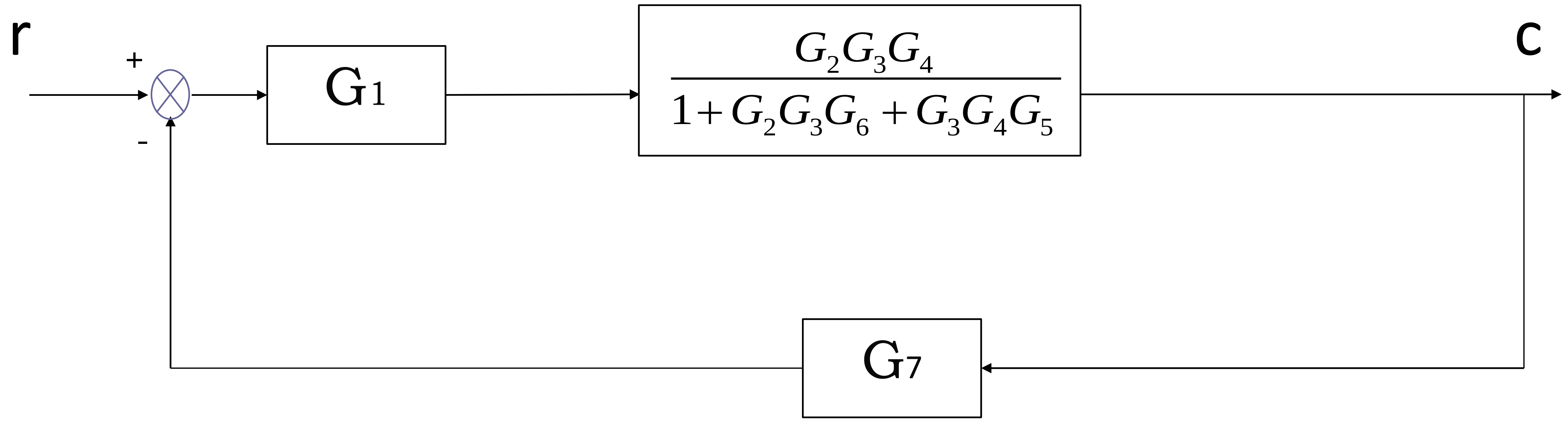


框图变换的例子

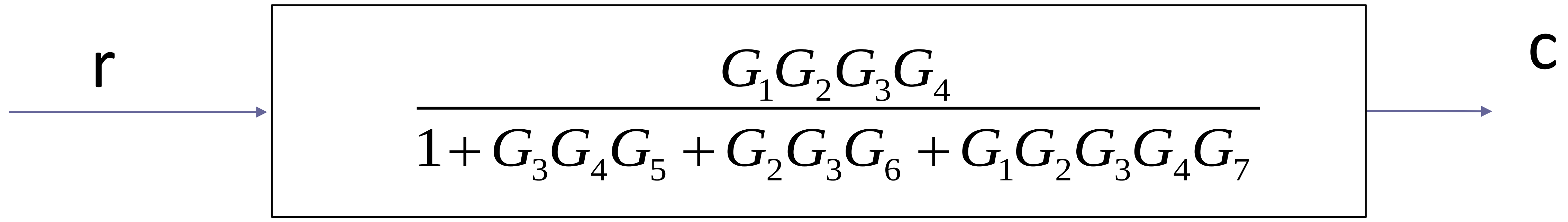




框图变换的例子



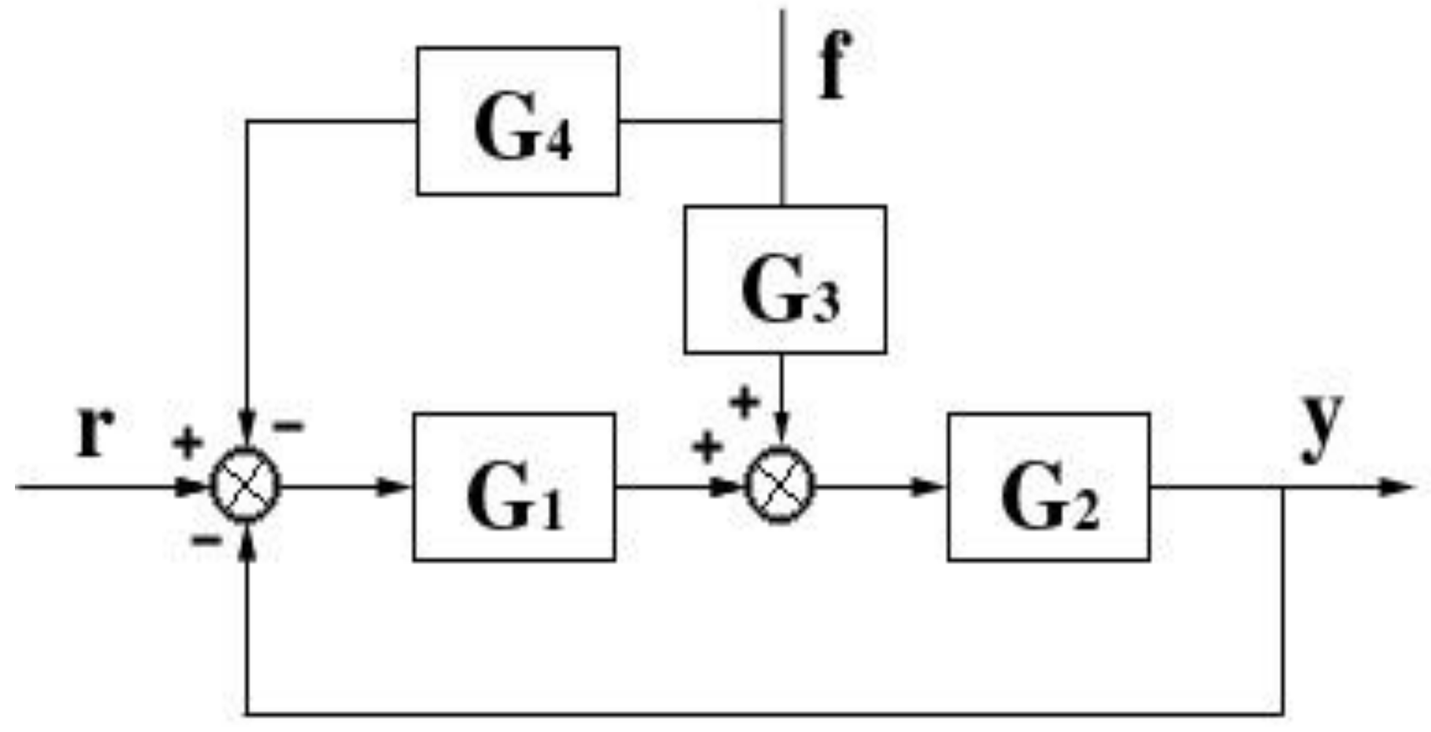
r
+
-
G1
$\frac{G_2G_3G_4}{1+G_2G_3G_6+G_3G_4G_5}$
c
G7



r
$\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_3G_4G_5+G_2G_3G_6+G_1G_2G_3G_4G_7}$
c

框图变换的例子

(2) 扰动输入的情况

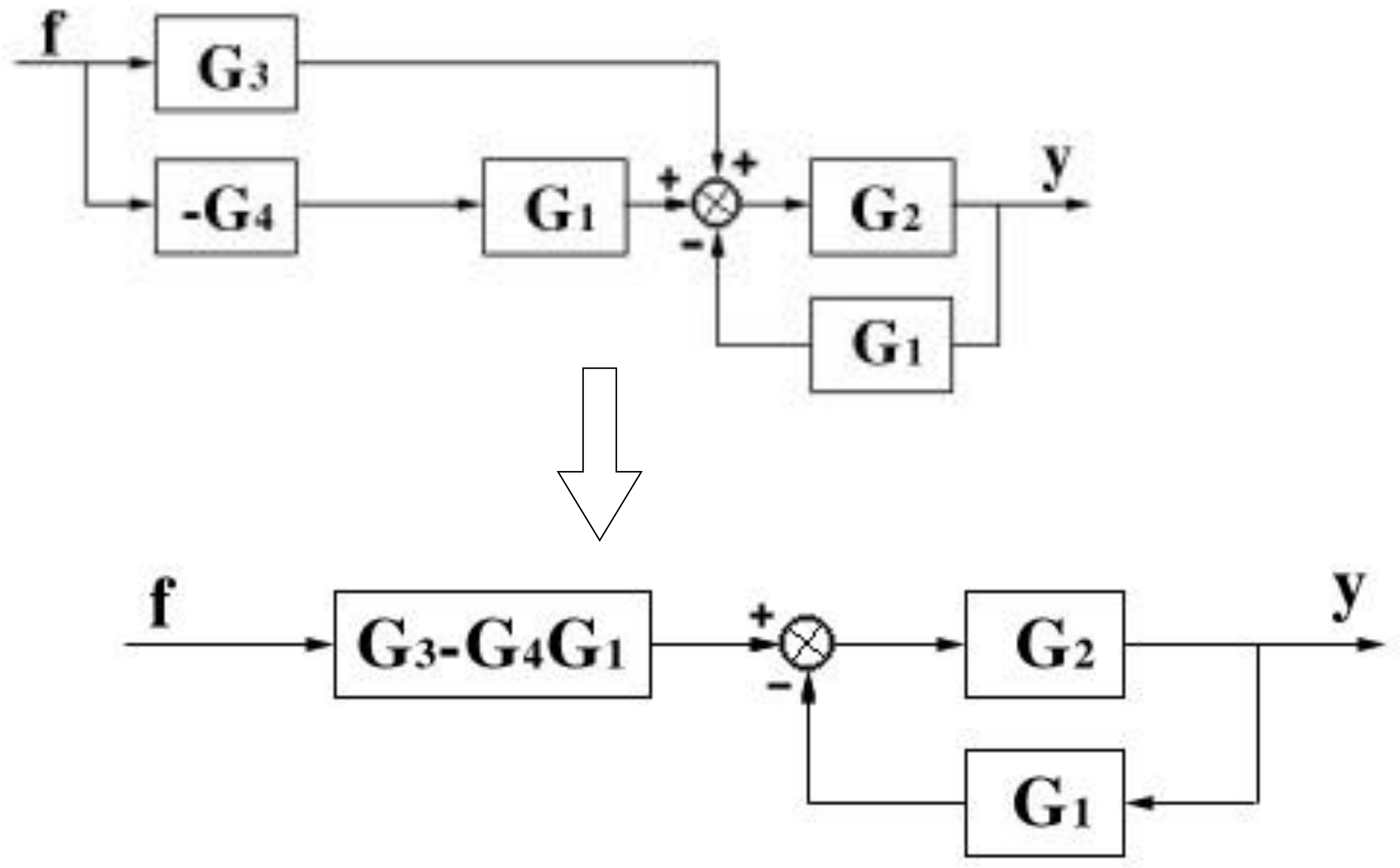


(a) 求 $\frac{y(s)}{r(s)}(f=0)$

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2}$$

(b) 求 $\frac{y(s)}{f(s)}\ \ (r=0)$

$$\frac{y(s)}{f(s)}=\frac{(G_3-G_4G_1)G_2}{1+G_1G_2}$$

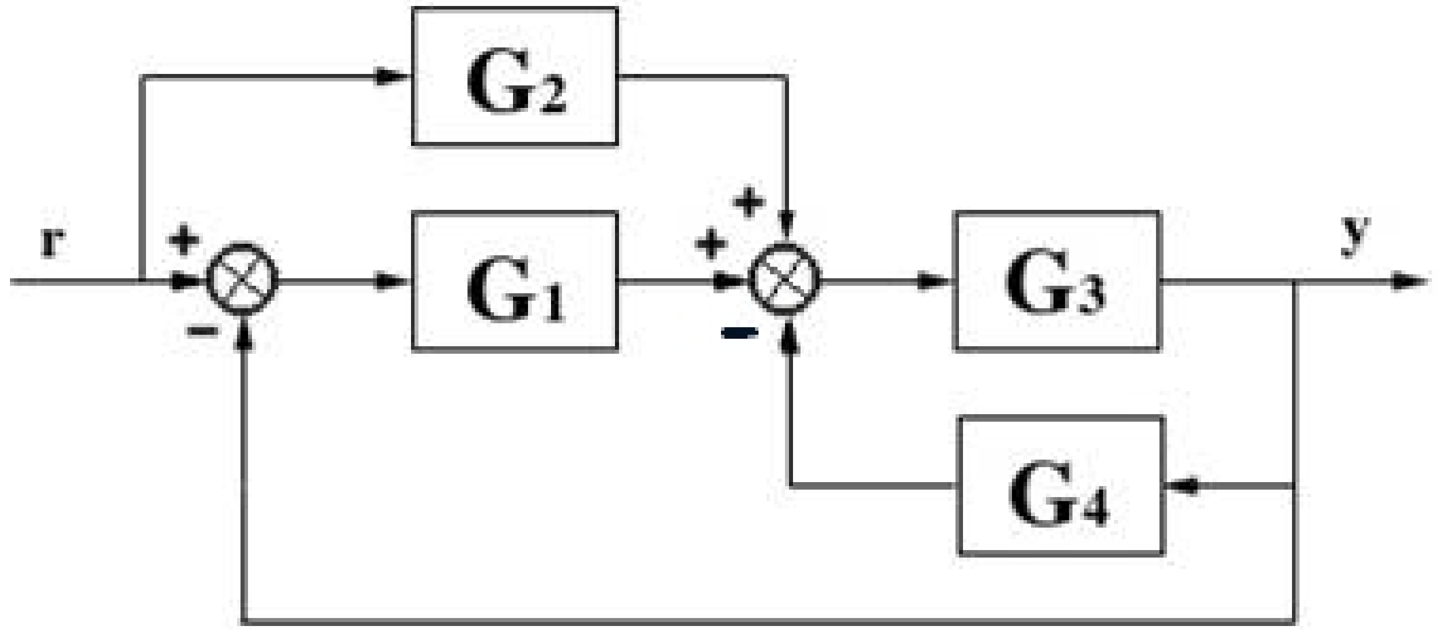


(c) 为使 y 不受扰动 f 的影响应如何选G_4?

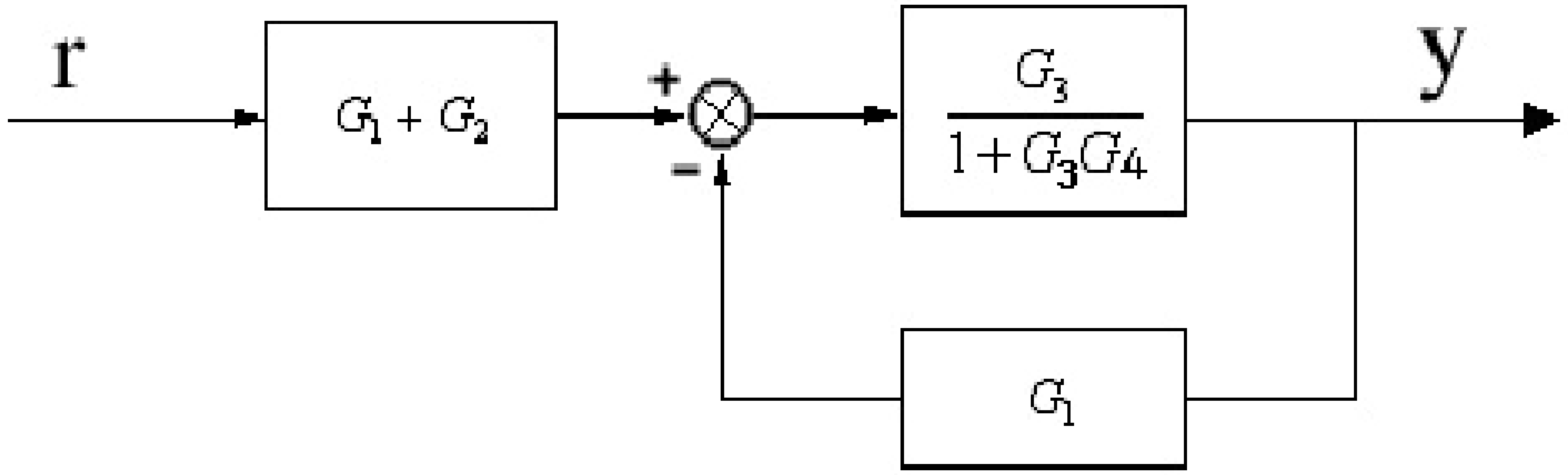
当 $\frac{y(s)}{f(s)}=0$，即 $G_4=\frac{G_3}{G_1}$，y 不受 f 的影响

框图变换的例子

（3）顺馈的例子



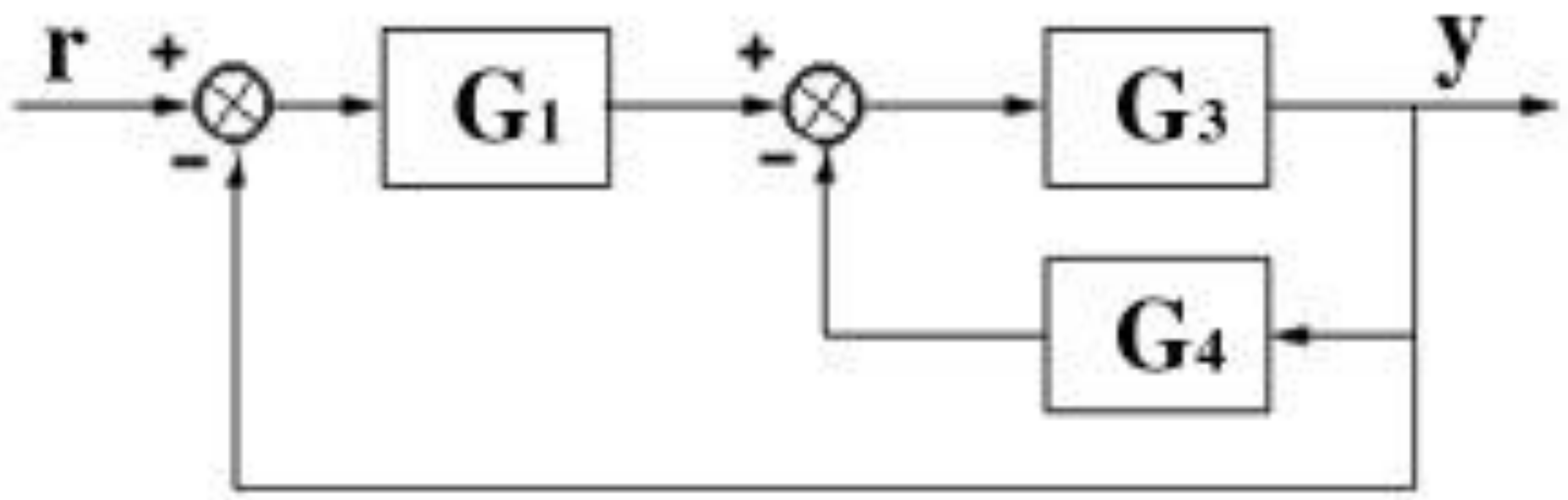
变换框图

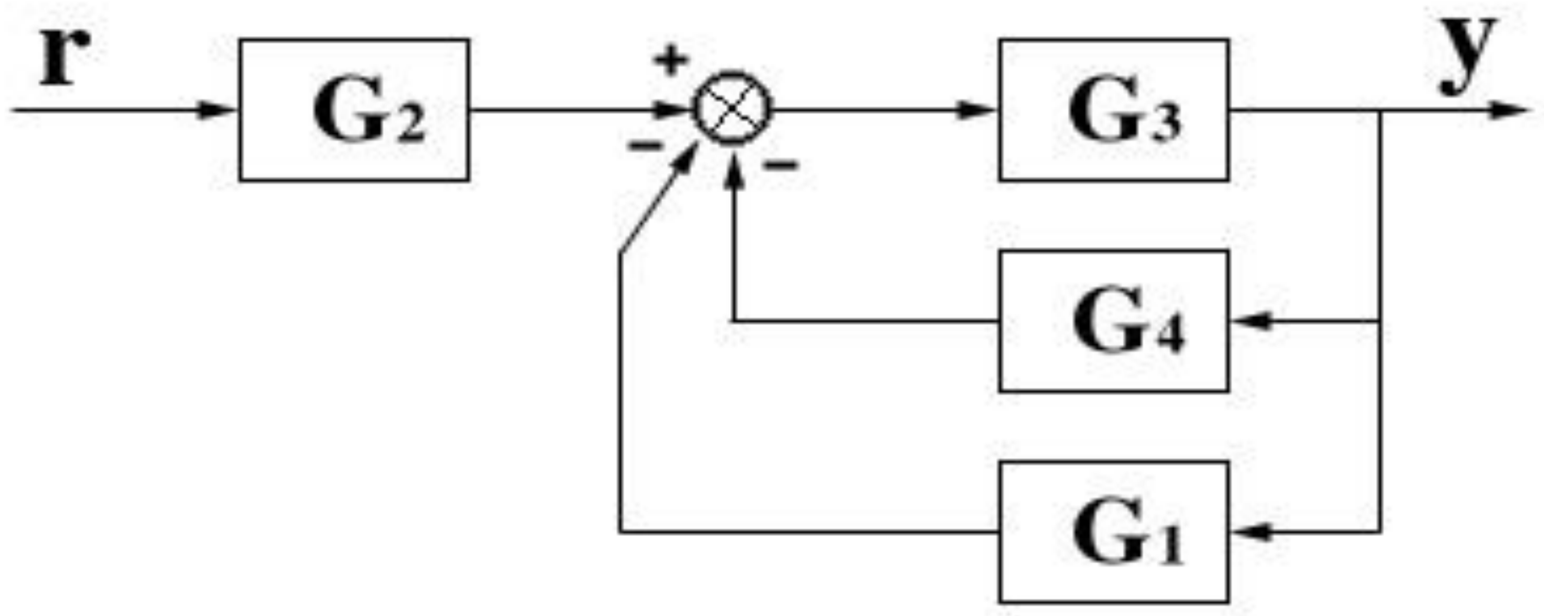


$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{(G_1+G_2)\dfrac{G_3}{1+G_3G_4}}{1+\dfrac{G_1G_3}{1+G_3G_4}}=\frac{(G_1+G_2)G_3}{1+G_3G_4+G_1G_3}$$

框图变换的例子

也可视为双输入系统

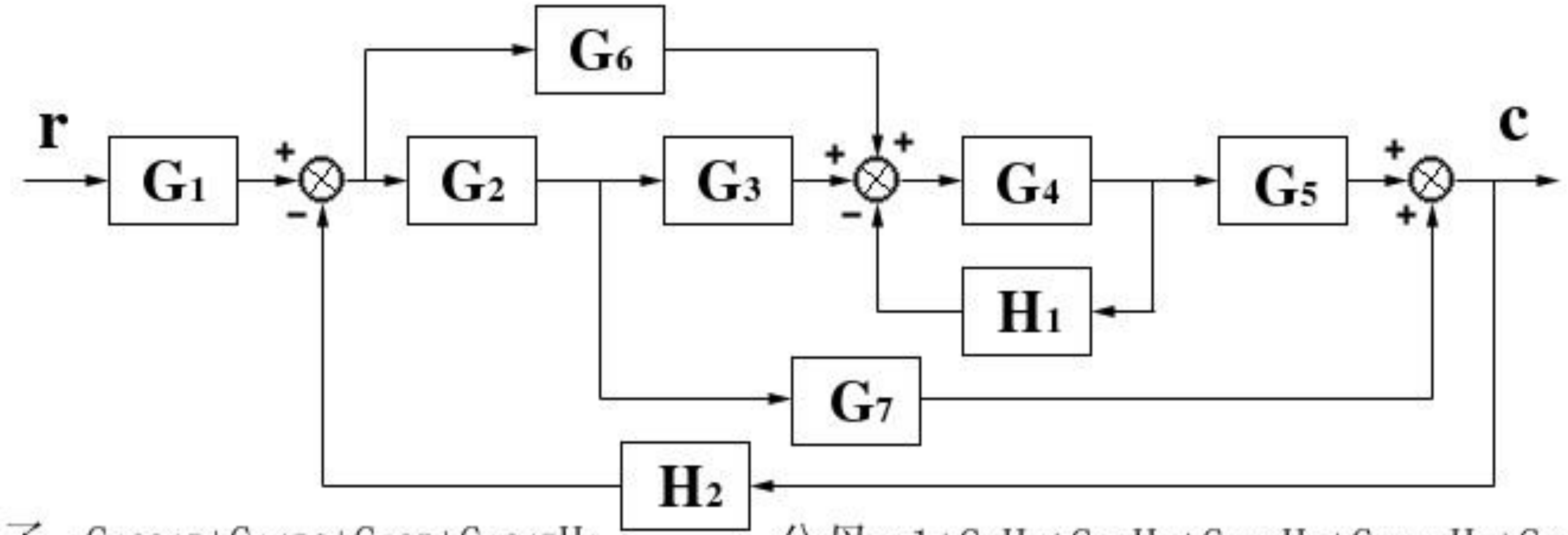




框图变换的例子

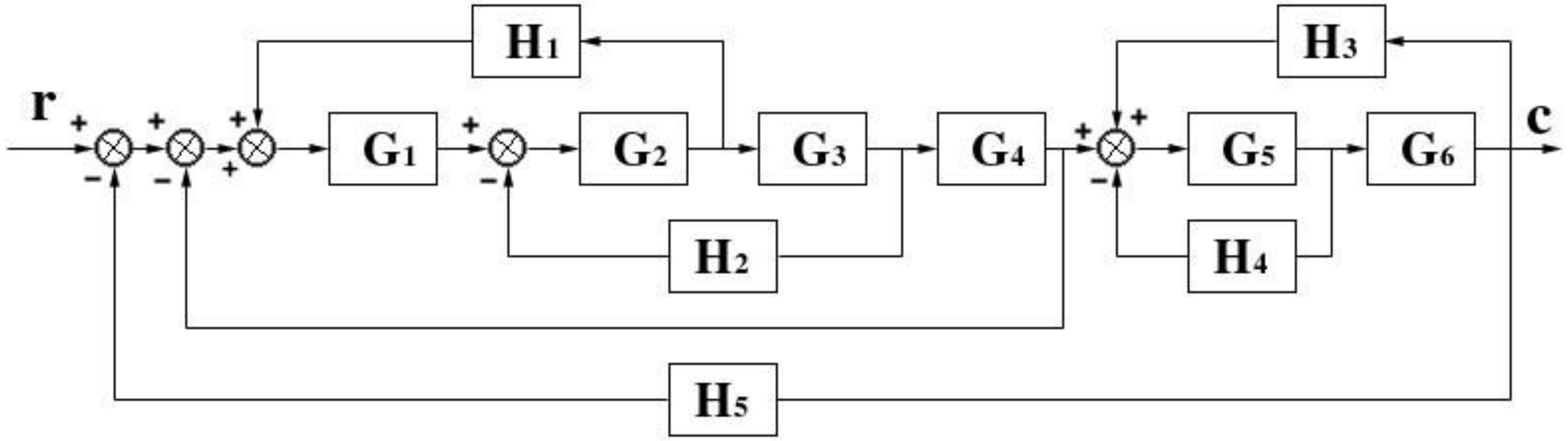
补充题

题一



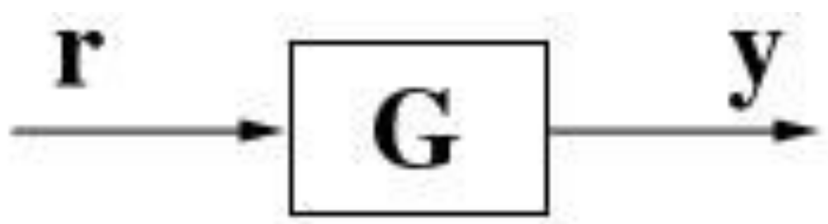
分子：$G_{12345}+G_{1456}+G_{127}+G_{1247}H_{1}$ 分母：$1+G_{4}H_{1}+G_{27}H_{2}+G_{456}H_{2}+G_{2345}H_{2}+G_{247}H_{12}$

题二

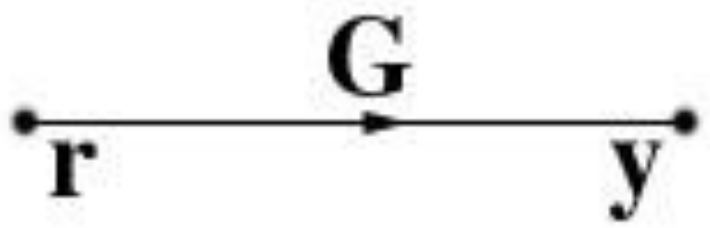


信号流图

节点表示输出量

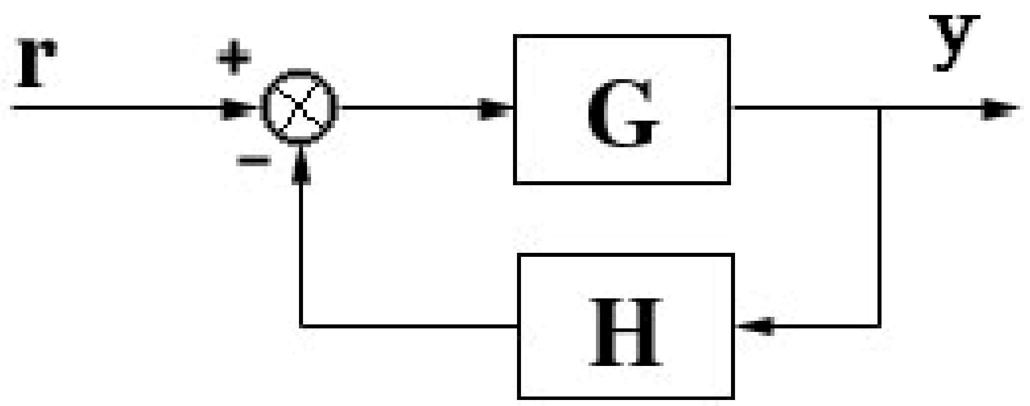


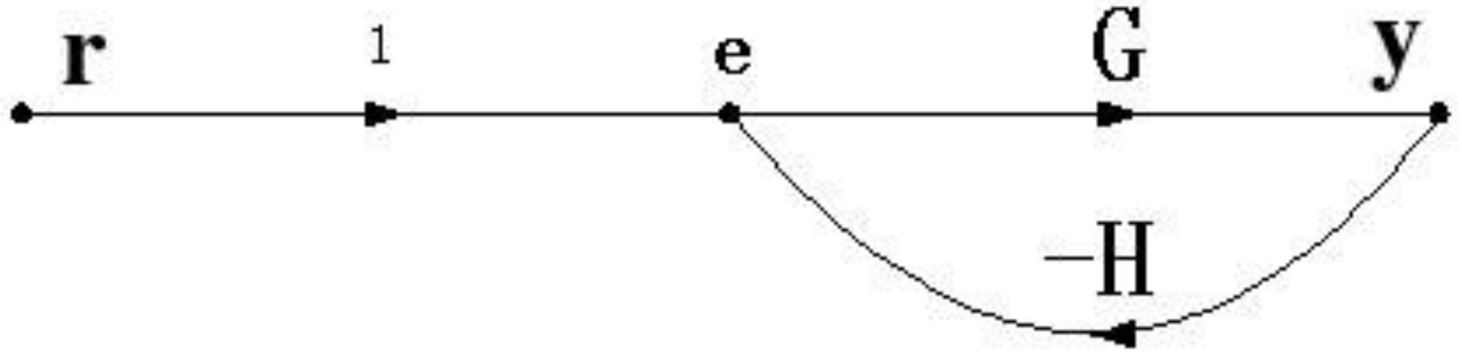
(框图表示)



(信号流图表示)

两节点之间带有箭头的线段代表框图中的一个框，若是直接连接则标1

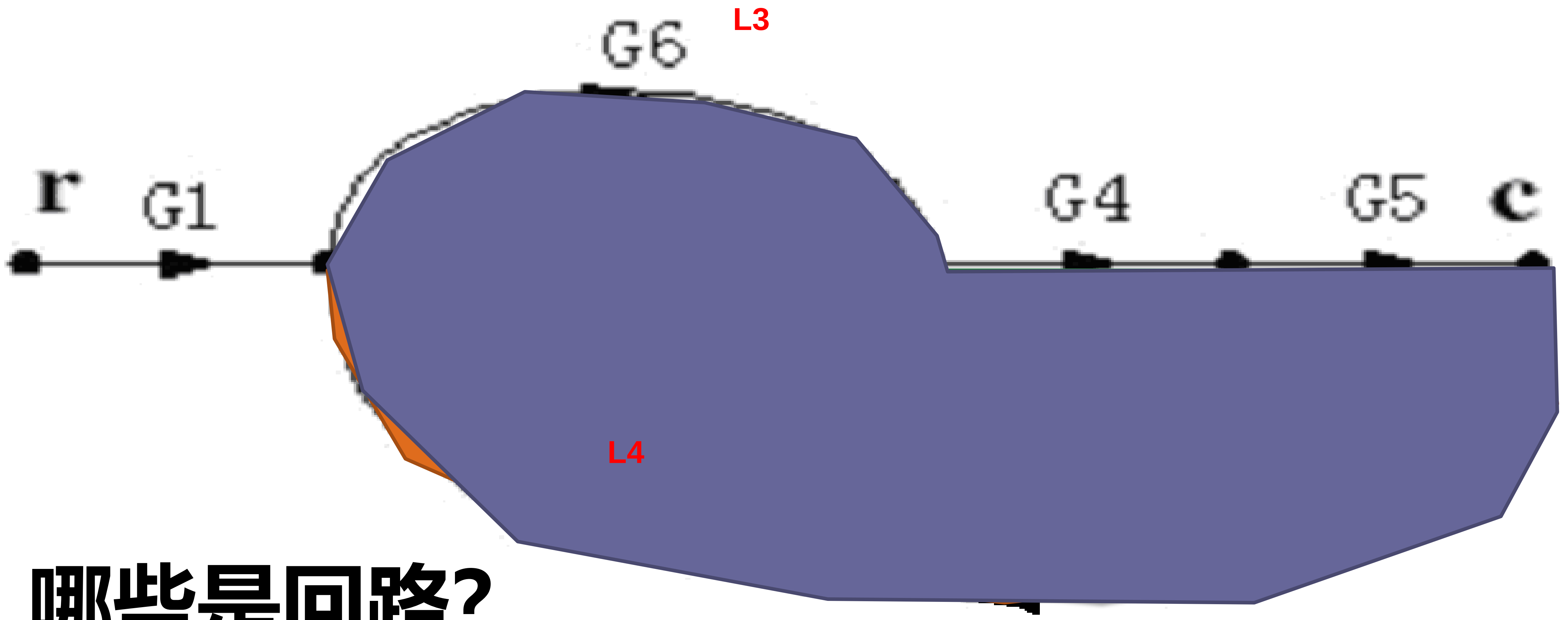




- **支路：两节点之间的定向线段**
- **通路：从一点到另一点的有向路径（每个中间节点仅经过一次）**
- **回路：闭合的通路**
- **不接触回路：没有公共节点的回路**

信号流图

补充题1用信号流图表示如下：



请问哪些是输入r到输出c的通路？哪些是回路？

前向通路三条

$$Q_1 = G_1G_2G_3G_4G_5 \qquad Q_2 = G_1G_4G_5G_6 \qquad Q_3 = G_1G_2G_7$$

回路四个

$$L_1 = -G_4H_1 \qquad L_2 = -G_2G_7H_2 \qquad L_3 = -G_6G_4G_5H_2 \qquad L_4 = -G_2G_3G_4G_5H_2$$

信号流图

计算信号流图中的两节点之间的传递函数用梅逊公式

$$H(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_{i}Q_i(s)\Delta_i(s)$$

$Q_i(s)$第i条前向通路的传递函数

Δ流图的特征式= 1 - 所有回路的传递函数之和

+ 每两个互不接触回路的传递函数的乘积之和

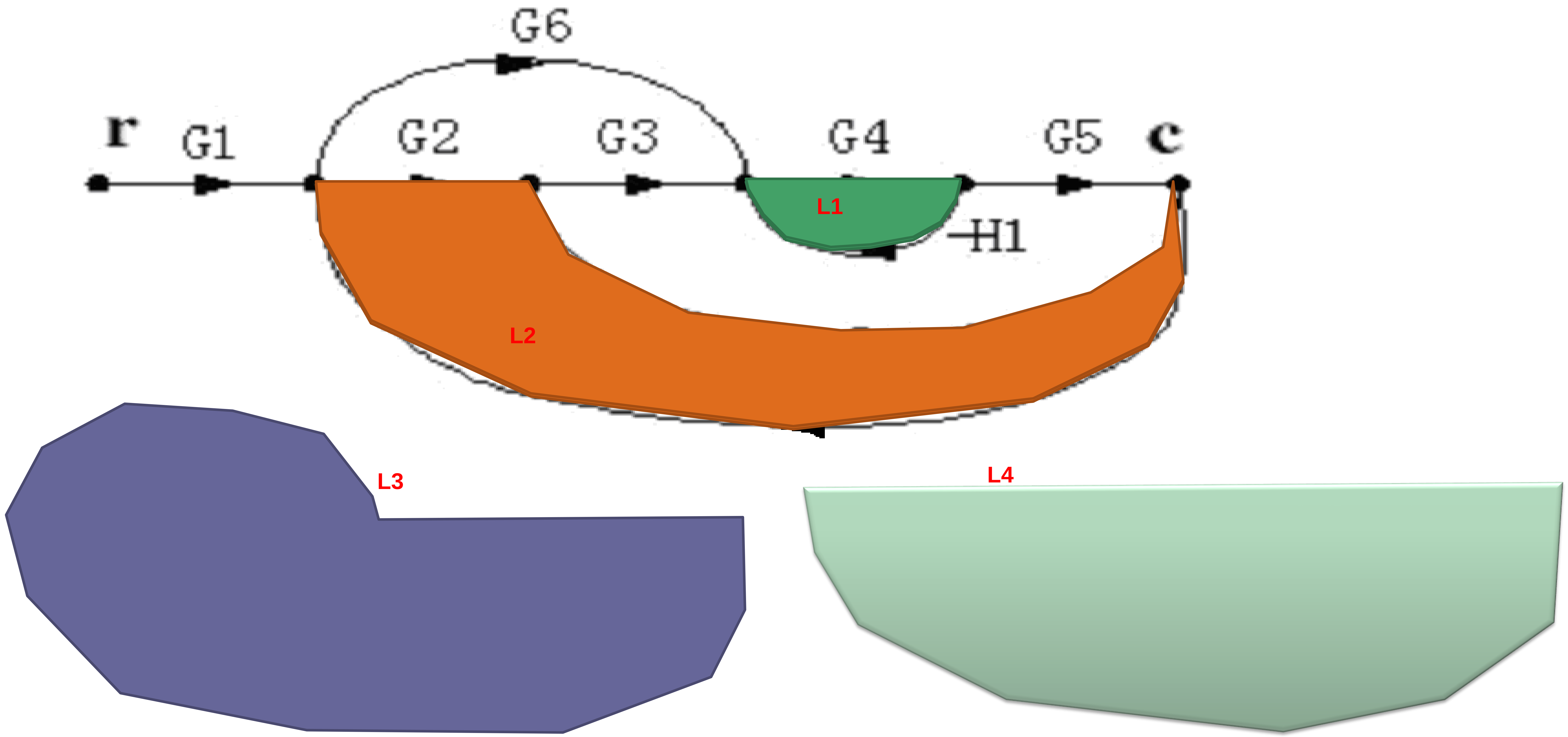
- 每三个互不接触回路的传递函数的乘积之和+....

$$= 1-\sum_a L_a+\sum_b\sum_c L_bL_c-\ldots\ldots$$

Δ_i余子式，从Δ中去除与第i条前向通路接触的回路

信号流图

补充题1用信号流图表示如下：



信号流图

此例有前向通路三条

$$Q_1 = G_1G_2G_3G_4G_5 \qquad Q_2 = G_1G_4G_5G_6 \qquad Q_3 = G_1G_2G_7$$

回路四个

$$L_1 = -G_4H_1 \qquad L_2 = -G_2G_7H_2 \qquad L_3 = -G_6G_4G_5H_2 \qquad L_4 = -G_2G_3G_4G_5H_2$$

互不接触回路

L_1、L_2**互不接触**

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_2$$

$$\Delta_1 = 1$$

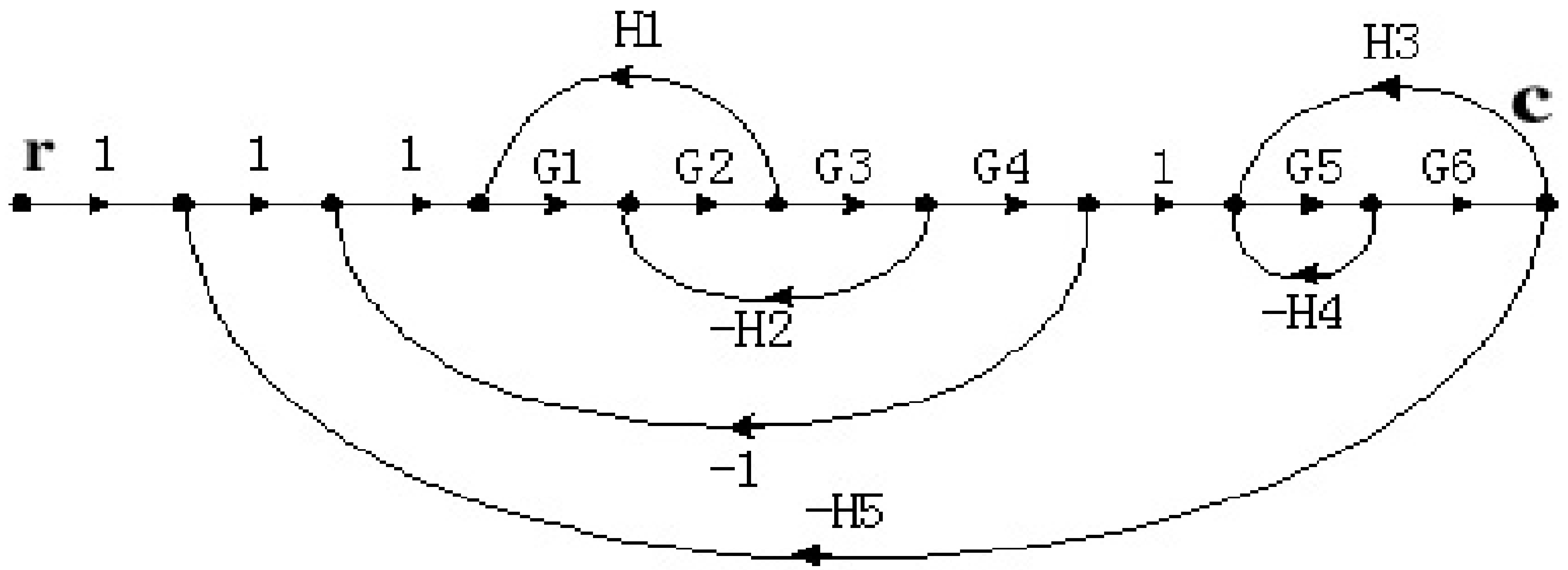
$$\Delta_2 = 1$$

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

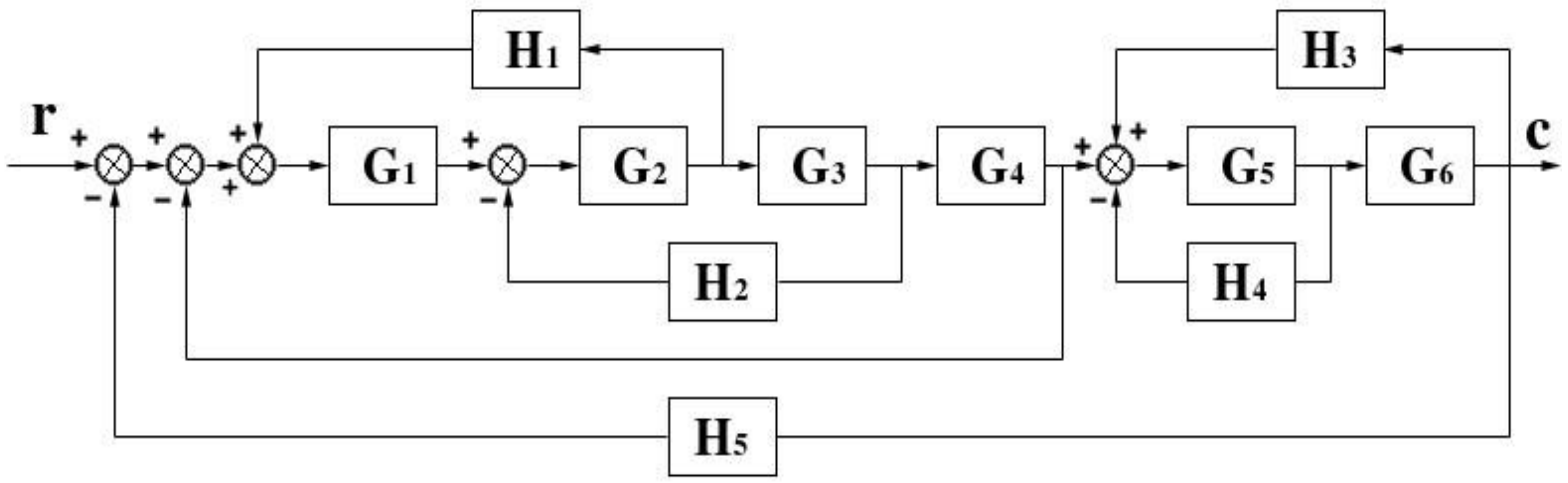
$$\frac{c}{r} = \frac{1}{\Delta}(Q_1\Delta_1 + Q_2\Delta_2 + Q_3\Delta_3)$$

信号流图

补充题2



r
1
1
1
G1
G2
G3
G4
1
G5
G6
c
H1
H3
-H2
-H4
-1
-H5



r
c
G1
G2
G3
G4
G5
G6
H1
H2
H3
H4
H5

信号流图

前向通路: $Q_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6$

回路: $L_1 = -G_2G_3H_2$ $L_2 = G_1G_2H_1$ $L_3 = -G_5H_4$

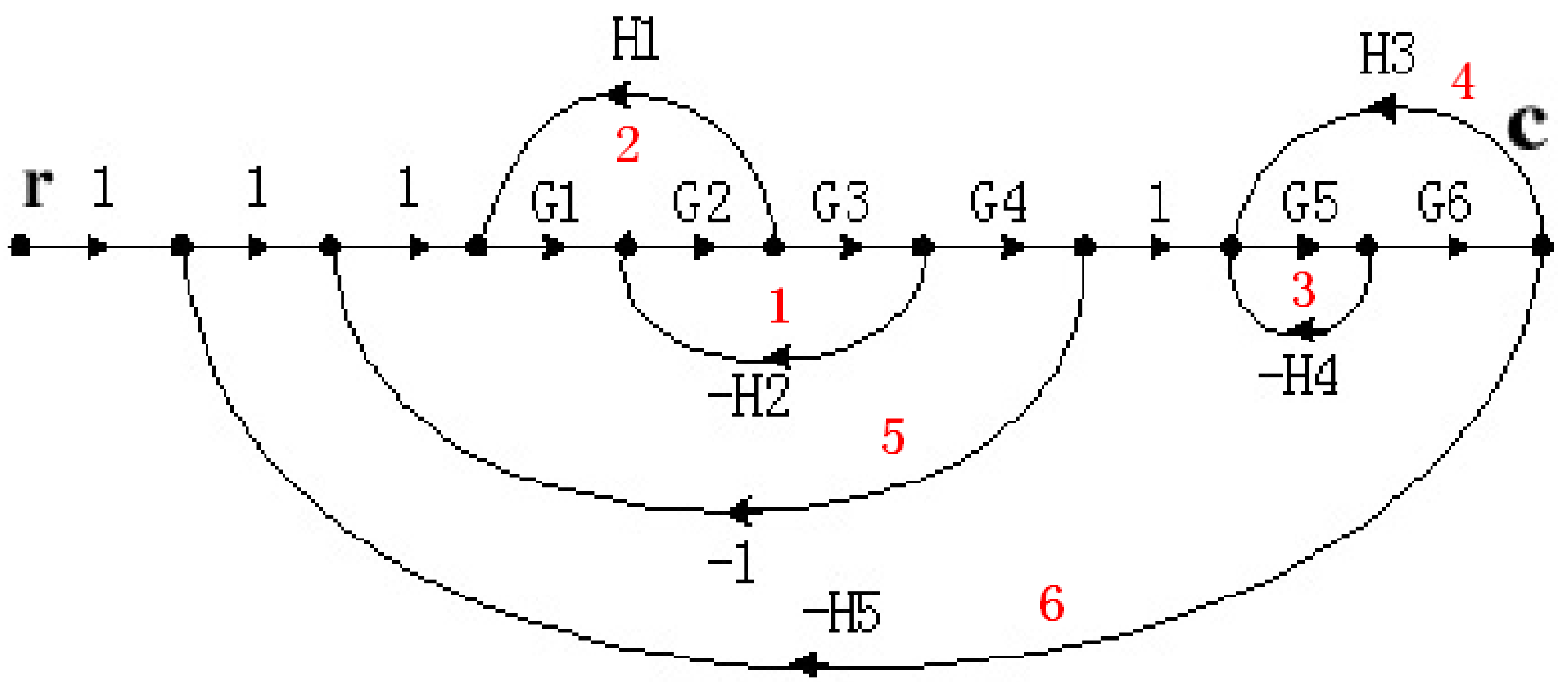
$L_4 = G_5G_6H_3$ $L_5 = -G_1G_2G_3G_4$ $L_6 = -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_5$

不接触回路 L_1L_3、L_1L_4、L_2L_3、L_2L_4、L_5L_3、L_5L_4

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + \cdots L_6) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4 + L_5L_3 + L_5L_4)$$

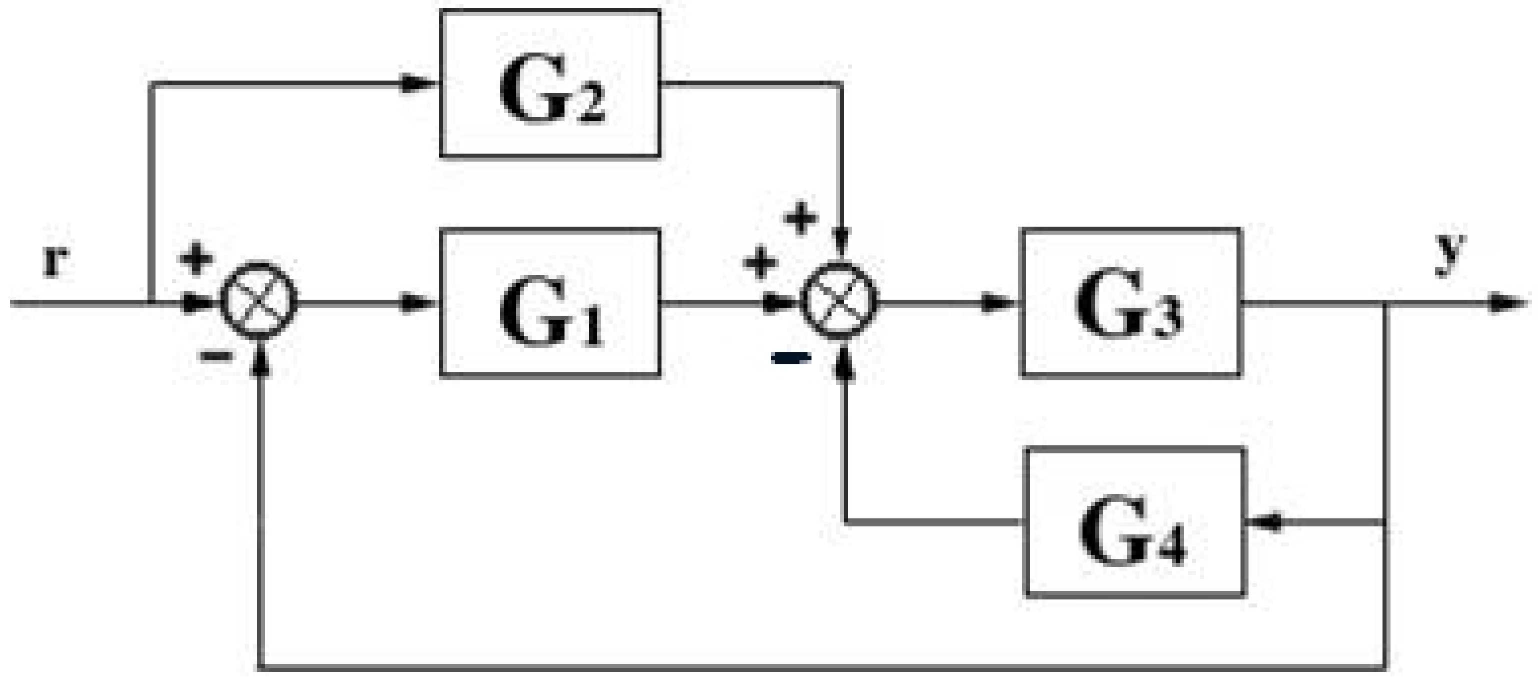
$$\Delta_1 = 1$$

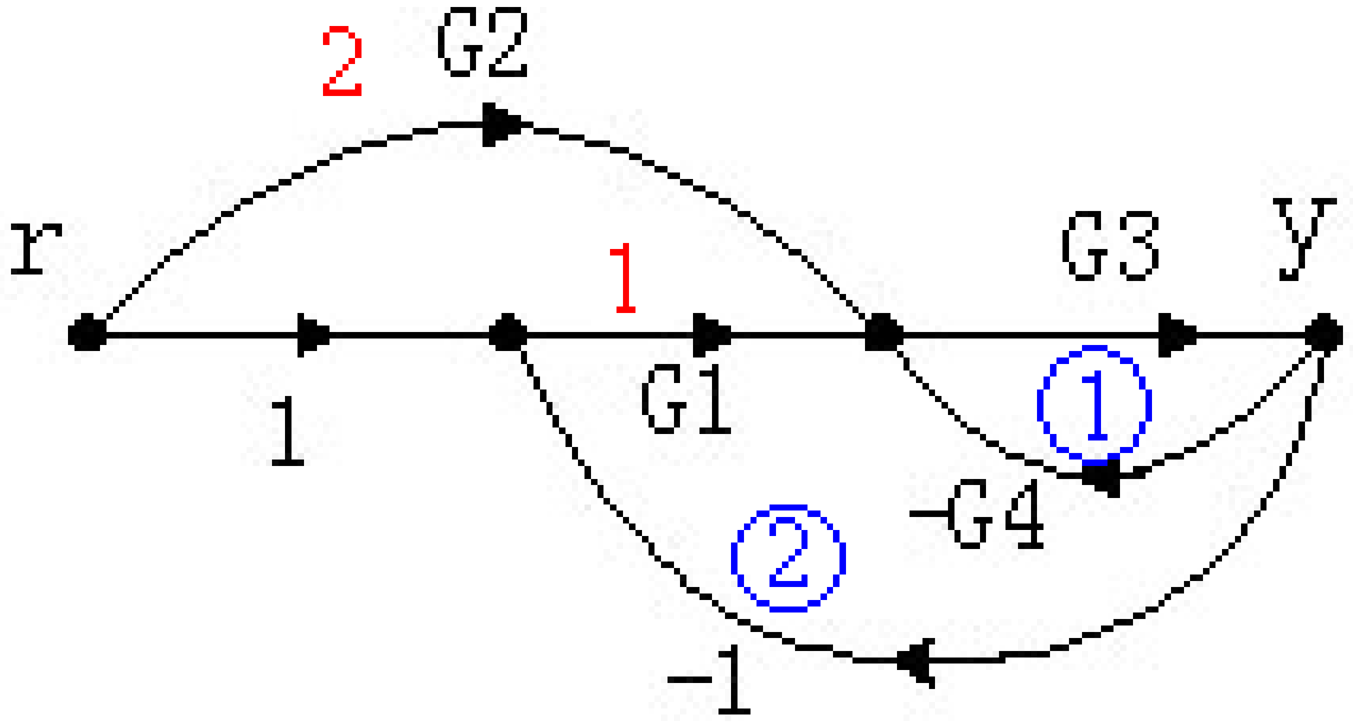
$$\frac{c}{r} = \frac{1}{\Delta} Q_1 \Delta_1$$



信号流图

顺馈的例子





前向通路

$$Q_1 = G_1G_3$$

$$Q_2 = G_2G_3$$

回路

$$L_1 = -G_3G_4$$

$$L_2 = -G_1G_3$$

无不接触回路

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) \quad \Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1$$

$$\frac{y}{r} = \frac{1}{\Delta}(Q_1\Delta_1 + Q_2\Delta_2)$$

控制系统的基本单元

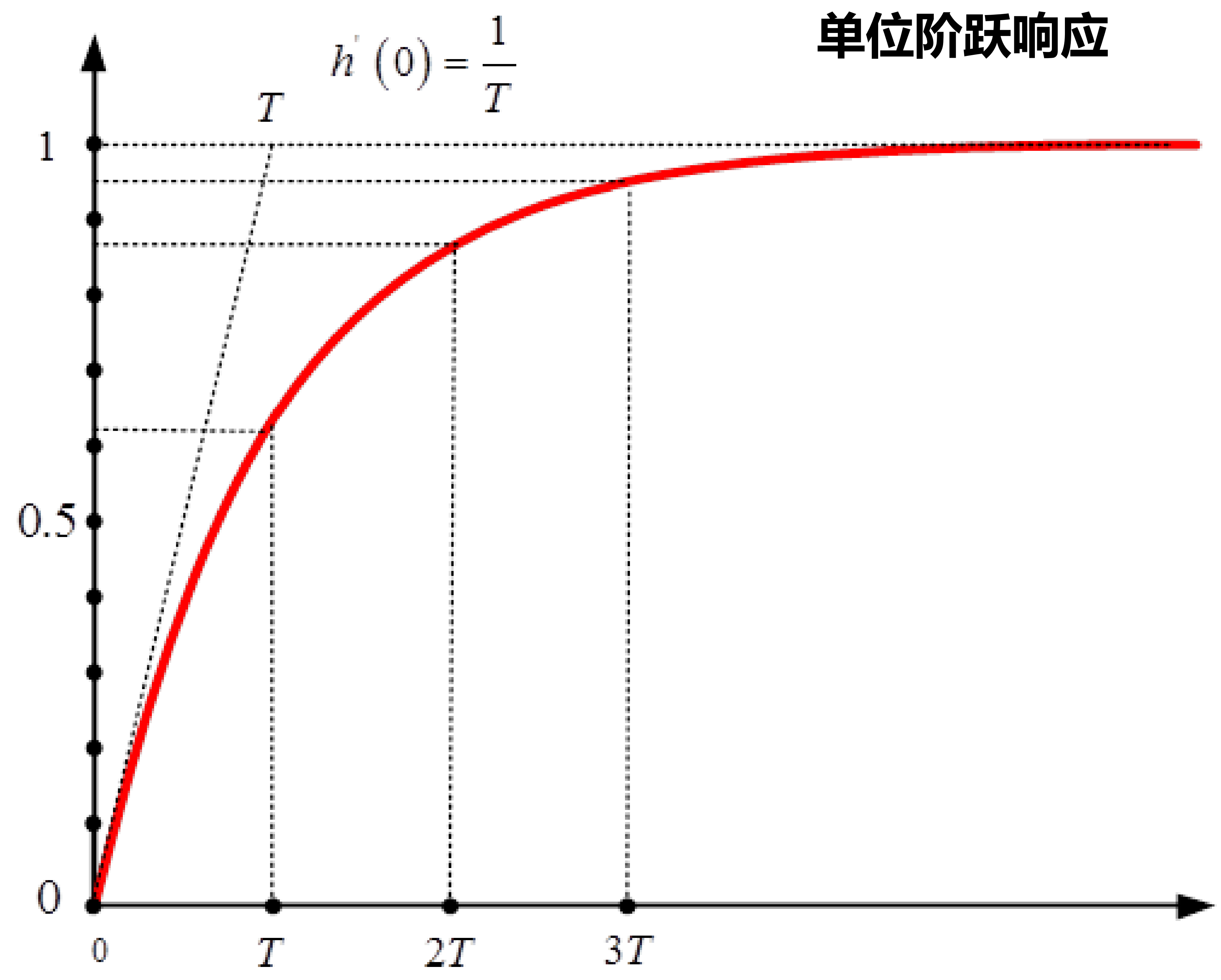
1. 比例 $G(s) = k$　　k **比例系数或放大系数**

2. 惰性（惯性） $G(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$　　$T>0$ **时间常数**

阶跃响应特征——指数曲线

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} (t \geq 0)$$



控制系统的基本单元

3. 二阶振荡环节 $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$

$T>0$ 时间常数

ζ 阻尼系数

特征方程的根 $s_{1,2}=\dfrac{-2\zeta T\pm\sqrt{4\zeta^2T^2-4T^2}}{2T^2}=-\dfrac{\zeta}{T}\pm\dfrac{\sqrt{\zeta^2-1}}{T}$

$0<\zeta<1$，一对共轭复根（实部为负） 衰减振荡 欠阻尼

$\zeta=0$ ，一对共轭虚根 等幅振荡 无阻尼

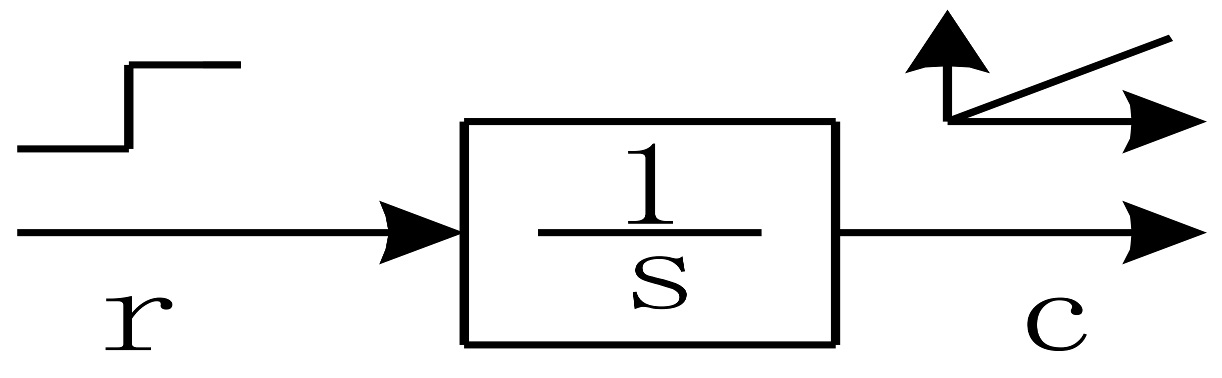
$\zeta=1$ ，两个相等的负实根 单调衰减 临界阻尼

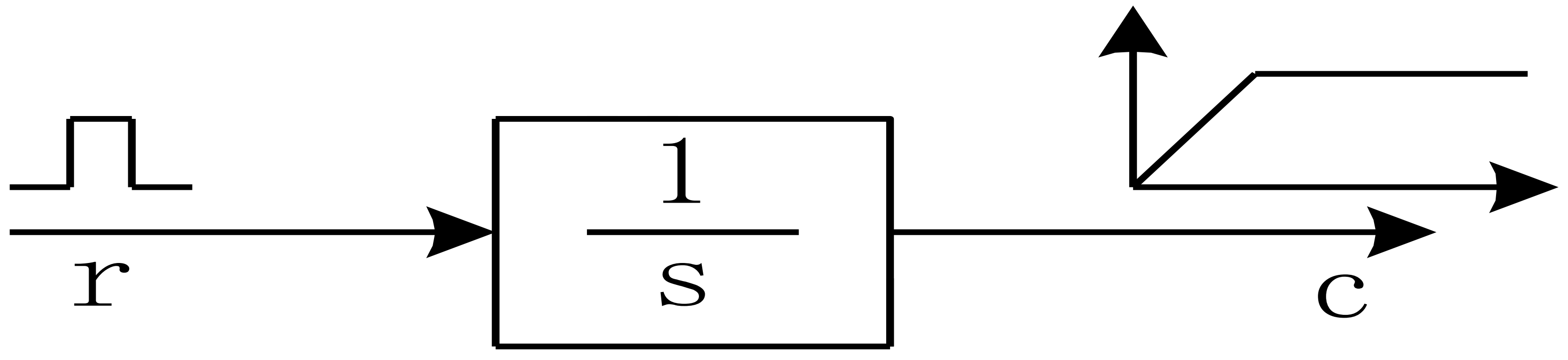
$\zeta>1$ ，两个不相等的负实根，可分解为两个惰性单元串联 单调衰减 过阻尼

系统动态响应的性质取决于其特征根

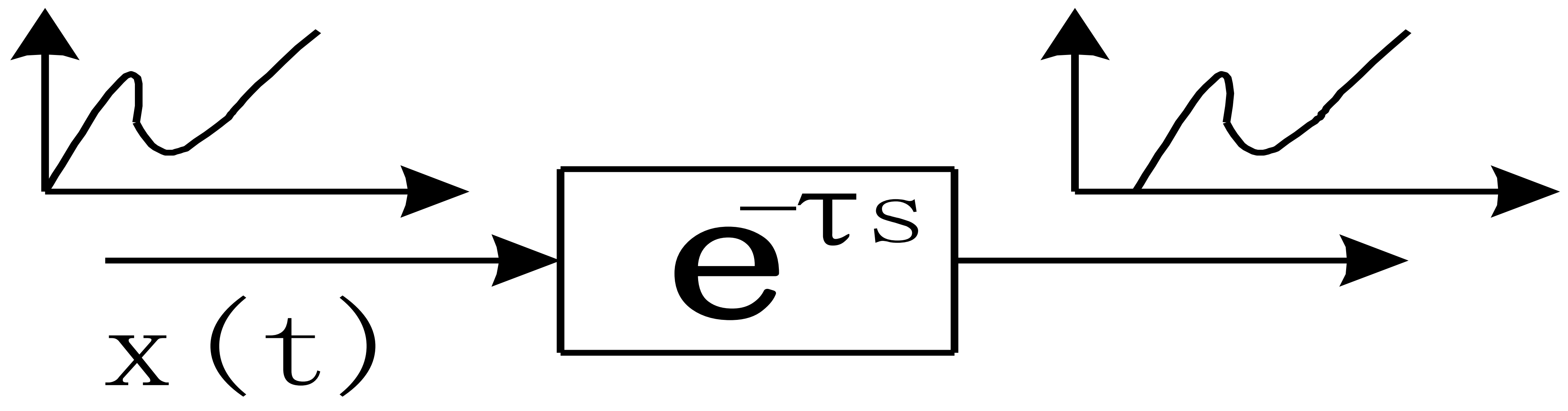
控制系统的基本单元

4. 积分 $G(s)=\dfrac{1}{s}$





5. 延时环节 $G(s)=e^{-\tau s}$



控制系统的基本单元

6. 微分环节

纯微分 $G(s) = s$

一阶微分 $G(s) = Ts + 1$

二阶微分 $G(s) = T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1$

实际系统中这些微分环节不能单独存在，只能与其它环节配合使用

非线性单元的线性化

非线性单元

譬如放大器：在一定范围内输出与输入呈现线性关系$y = kx$，但当放大器饱和时，y与x之间就不再是线性关系

微偏线性化

在工作点附近的小邻域内，将y与x之间的关系展成泰勒级数

设 $y = f(x)$，在 x_0 附近可表示成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

非线性单元的线性化

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

对光滑函数$f(x)$，当$x - x_0 = \Delta x$ 足够小且在 x_0点 $f(x)$高阶导数不是∞时，忽略Δx的高阶项，得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

即

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x$$

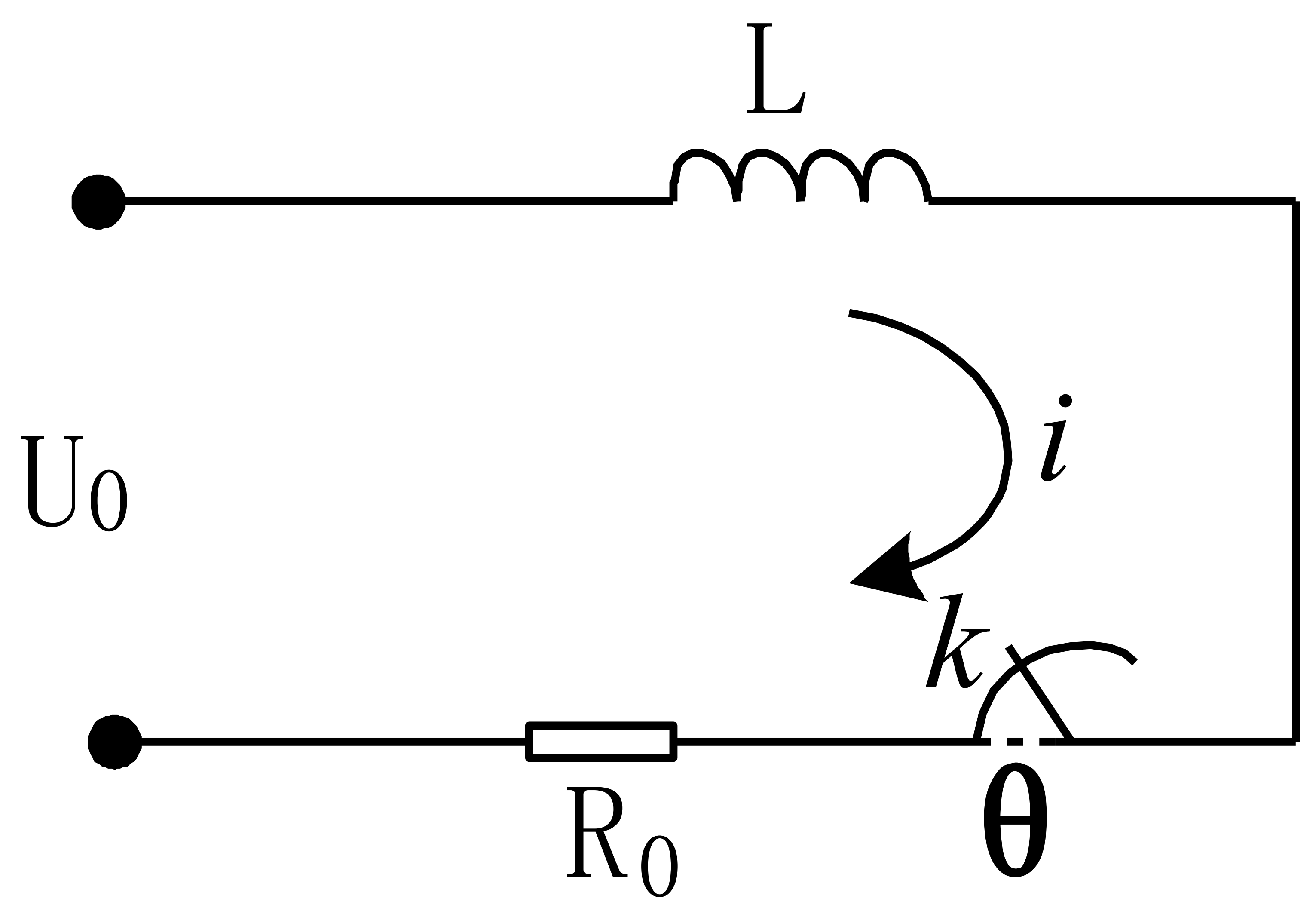
说明y的增量与x的增量之间呈线性关系。注意，上式只在小范围内有效。

非线性单元的线性化

举例：

$R = R_0 + k\theta$, U_0**已知，**

研究当θ变化时， i 如何变化



$$U_0 = L\frac{di}{dt} + Ri = L\frac{di}{dt} + (R_0 + k\theta)i$$

两变量相乘，非线性！

非线性单元的线性化

工作点设在稳态且θ等于0处，有：

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0}, i = I_0 + \Delta i$$

于是：

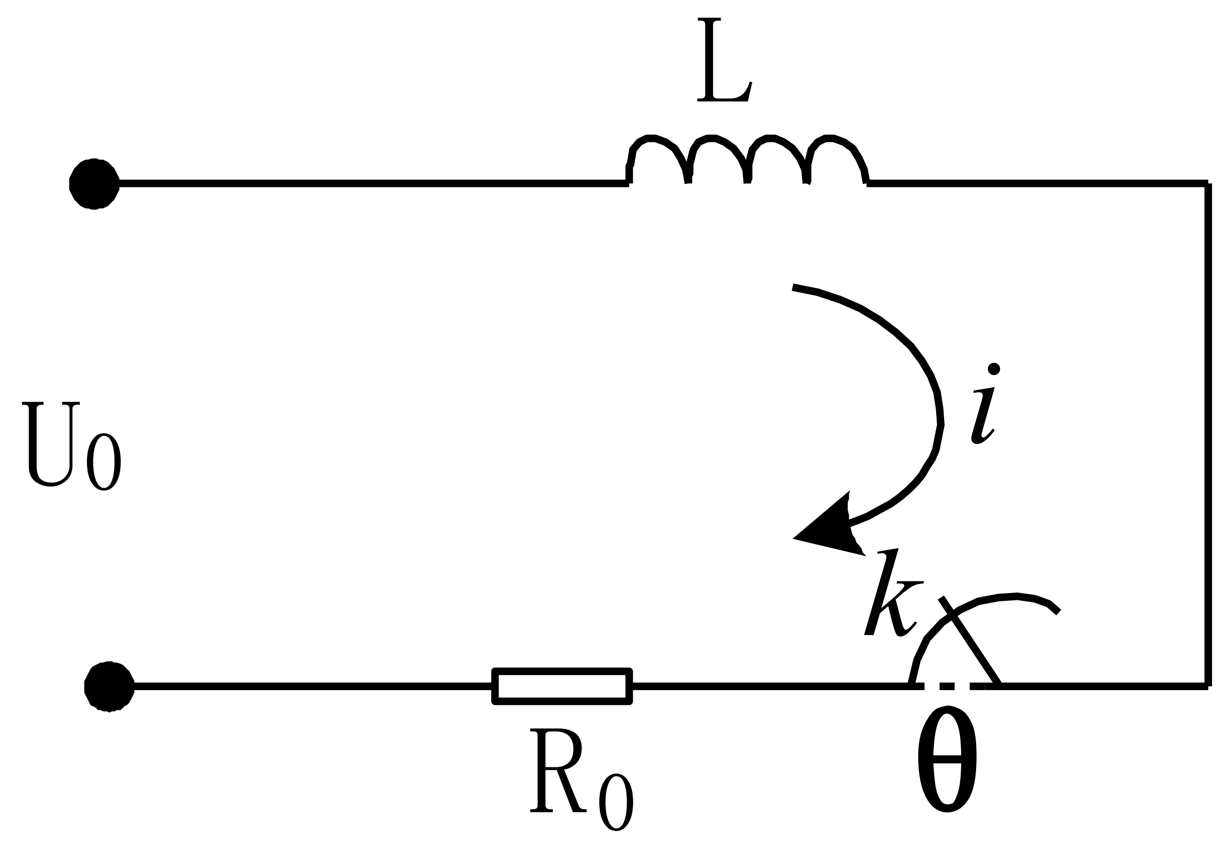
$$U_0 = L\frac{d(I_0 + \Delta i)}{dt} + (R_0 + k\Delta\theta)(I_0 + \Delta i)$$

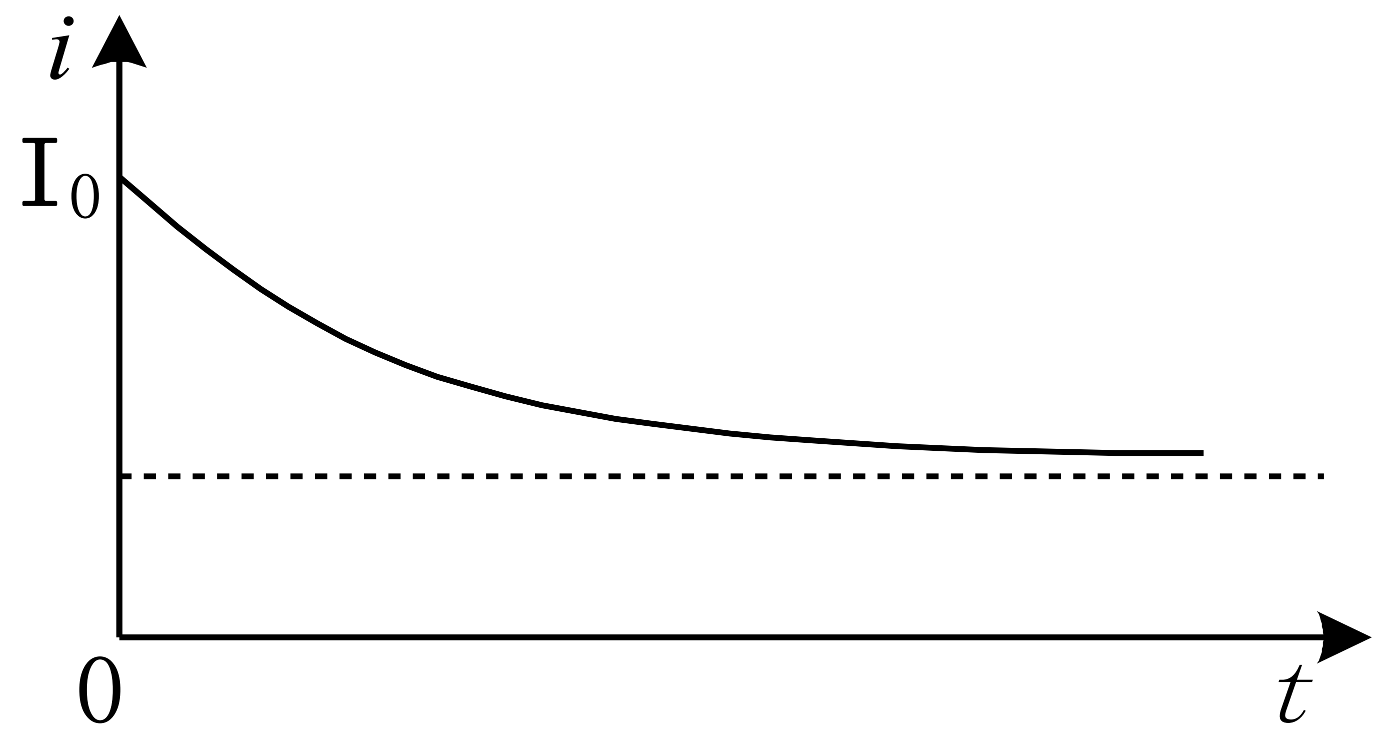
$$U_0 = L\frac{d\Delta i}{dt} + R_0 I_0 + kI_0\Delta\theta + R_0\Delta i + \underline{k\Delta\theta\Delta i}$$

$$\because U_0 = R_0 I_0$$

$$\therefore L\frac{d\Delta i}{dt} + R_0\Delta i = -kI_0\Delta\theta$$

从而，获得工作点附近的线性方程





稳态时电阻微小定常变化带来电流的变化