1解 设

$$X_i=\begin{cases}1,\text{从第}i\text{个袋子中摸出一球是白球,}\\ 0\text{，其它。}\end{cases}\quad i=0,1,\cdots n.$$

由题意知$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$,

易知

$$P(X_1=1)=\frac{a}{a+b},P(X_1=0)=\frac{b}{a+b},$$

$$\begin{aligned}P(X_2=1)&=P(X_1=1)P(X_2=1|X_1=1)+\\&\quad P(X_1=0)P(X_2=1|X_1=0)\\&=\frac{a}{a+b}\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b+1}\\&=\frac{a}{a+b},\end{aligned}$$

$$P(X_2=0)=1-P(X_2=1)=\frac{b}{a+b},$$

由此可知，

$$P(X_i=1)=\frac{a}{a+b},P(X_i=0)=\frac{b}{a+b},$$

$$EX_i=1\frac{a}{a+b}+0\frac{b}{a+b}=\frac{a}{a+b},i=1,2,\cdots,n.$$

所以

$$EX=E\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{na}{a+b}$$

2解：因为$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\pi/a}$，两边对$a$微分$k$次，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k}e^{-ax^2}dx=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}}.$$

令$a=1/(2\sigma^2)$, $EX^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^ne^{-ax^2}dx$,得

当n为偶数时，设$n=2k$,由上面分析知

$$EX^n=1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)\sigma^n$$

n是奇数时，由函数的积分性质知

$$EX^n=0$$

3解先解独立性质。

由于0<x<1, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{-x}^{x} dy=2x$, 对其他$x$, $f_X(x)=0$.

对$-1<y<1, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_{|y|}^{1} dx=1-|y|$, 对其它的$y$, $f_Y(y)=0$.

故$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,即X与Y不独立.

再解相关性质。

由于$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x,y)dx=\int_{0}^{1} x\cdot 2xdx=2/3$,

$EY=\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(x,y)dy=\int_{-1}^{1} y(1-|y|)dy=0$,

$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_{0}^{1} dx\int_{-x}^{x} xydy=0$,

即E(XY)=EXEY,故X与Y不相关。

4解：由体征函数的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)Z_k\overline{Z_j} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Ee^{i(t_k-t_j)X}Z_k\overline{Z_j}\\ &= E\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e^{it_kX}e^{-it_jX}Z_k\overline{Z_j}\\ &= E\left|\sum_{k=1}^{n}e^{it_kX}Z_k\right|^2\geq 0\end{aligned}$$

5解(1)由于EX存在，故

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx<\infty.$$

对任意$M>0$,当$x\in(-\infty,-M)$,必有$|x|\geq M$,故

$$\int_{-\infty}^{-M}|x|f(x)dx\geq\int_{-\infty}^{-M}Mf(x)dx=MF(-M).$$

令$M\to\infty$，上式左端趋近于0，故证明了

$$\lim_{x\to-\infty} xF(x)=0$$

同理，对任意$N>0$,

$$\int_{N}^{\infty}|x|f(x)dx\geq\int_{N}^{\infty}Nf(x)dx=N(1-F(N)),$$

令$N\to\infty$，上式左端趋近于0，故证明了

$$\lim_{x\to\infty}x(1-F(x))=0$$

（2）$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}xf(x)dx+\int_{0}^{\infty}xf(x)dx$

$$\begin{aligned}&=\int_{-\infty}^{0}xdF(x)-\int_{0}^{\infty}xd(1-F(x))\\ &=xF(x)|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx-x(1-F(x))|_{0}^{-\infty}+\int_{0}^{\infty}(1-F(x))dx,\\ &=\int_{0}^{\infty}(1-F(x))dx-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx\end{aligned}$$

6解 由于$EY=0$，故$x=E(x+Y)$,从而对任意实数x有$|x|\le E|x+Y|$.

由独立性：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,知

$$
\begin{aligned}
E|X+Y| &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x+y|\,f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}|x+y|\,f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E|x+Y|\,f_X(x)dx \\
&\ge \int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f_X(x)dx = E|X|.
\end{aligned}
$$

同理可证明：$E|X+Y|\ge E|Y|$

所以，

$E|X+Y|\ge \max\{E|X|,E|Y|\}$.

7设$\{B(t),t\ge 0\}$为标准布朗运动, 对$0\le t_1<t<t_2$, 给定$B(t_1)=a, B(t_2)=b$, $B(0)=0$, 求$E(B(t)|B(t_1)=a, B(t_2)=b)$.

$$
\begin{aligned}
&E[B(t)\,|\,B(t_1)=a,B(t_2)=b] \\
&=E[B(t)-B(t_1)+B(t_1)\,|\,B(t_1)-B(0)=a,B(t_2)-B(t_1)=b-a] \\
&=E[B(t)-B(t_1)\,|\,B(t_2)-B(t_1)=b-a]+a \\
&=\frac{t-t_1}{\sqrt{(t-t_1)(t_2-t_1)}}\sqrt{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}[(b-a)-0]+a \\
&=(t-t_1)(t_2-t_1)^{-1}(b-a)+a
\end{aligned}
$$

第 8 题见课本布朗运动一节的定理。