# 习题课 1 解答

1. 先证明下连续性.设$\{A_n\}$是F中一个单调不减的事件序列，即

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} A_n$$

若定义$A_0=\varnothing$,则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i - A_{i-1})$，由于$A_{i-1}\subset A_i$，显然诸$(A_i - A_{i-1})$两两不交，由可列可加性得

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i - A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(A_i - A_{i-1})$$

又由有限可加性

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i - A_{i-1}) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i - A_{i-1})=P(A_n)$$

所以

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

再证明上联系性.设$\{A_n\}$是F中一个单调不增的事件序列，则$\{A_n{}^c\}$为单调不减的时间序列，有上面所证知

$$1-\lim_{n\to\infty} P(A_n)=\lim_{n\to\infty}[1-P(A_n)] = \lim_{n\to\infty} P(A_n{}^c)$$

$$= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i{}^c)=P(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}) = 1-P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

至此，得

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

下面证明　有限可加性＋下连续性$\Leftrightarrow$可数可加性

充分性显然，下证必要性

设$\{A_n\}$是F中一个两两不相容的事件序列，由有现可加性知：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

等式左边不超过1，所以等式右边的级数收敛，即

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

记

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

则$\{F_n\}$为单调不减的事件序列，由下连续性得

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(F_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

2. 解：设$\mathrm{A}=\{$第一次取出的是合格品$\}$

$\mathrm{A_i}=\{$第一次是从第i箱取出的$\}$，$\mathrm{i}=1,2,3,4$

$\mathrm{B}=\{$再从该箱中取出的是次品$\}$

$\mathrm{B_i}=\{$第一次取出的合格品来自第i箱$\}$，$\mathrm{i}=1,2,3,4$

易知：$\mathrm{P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)}=0.25;$

$$\mathrm{P}(A|\mathrm{A_1})=0.9,\mathrm{P}(A|\mathrm{A_2})=0.8,\mathrm{P}(A|\mathrm{A_3})=0.7,\mathrm{P}(A|\mathrm{A_4})=0.6;$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}(\mathrm{P(A}_i)\mathrm{P}(A|\mathrm{A}_i))=0.75$$

$$P(B_1)=\mathrm{P}(A_1|\mathrm{A})=\frac{P(A_1)\mathrm{P}(A|\mathrm{A_1})}{P(A)}=9/30;$$

$$P(B_2)=\mathrm{P}(A_2|\mathrm{A})=\frac{P(A_2)\mathrm{P}(A|\mathrm{A_2})}{P(A)}=8/30;$$

$$P(B_3)=\mathrm{P}(A_3|\mathrm{A})=\frac{P(A_3)\mathrm{P}(A|\mathrm{A_3})}{P(A)}=7/30;$$

$$P(B_4)=\mathrm{P}(A_4|\mathrm{A})=\frac{P(A_4)\mathrm{P}(A|\mathrm{A_4})}{P(A)}=6/30;$$

$$P(B|B_1)=0.1,P(B|B_2)=0.2,P(B|B_3)=0.3,P(B|B_4)=0.4$$

故，所求概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}(\mathrm{P(B}_i)\mathrm{P(B}|\mathrm{B}_i))=7/30.$$

3. 解：记A表示甲乙之间恰有k个人.

排成一行时：

首先从甲乙两人中选出一人，站在一个位置上，比如，排在第i位上，则另一个人必须排在第i+k+1位上，且$\mathrm{i+k+1\le n}$，即$\mathrm{i\le n-k-1}$，即选出的人有n-k-1中排法。最后，让余下的n-2个人排在其余的n-2个空位上，有(n-2)!种排法, 由乘法原理知，甲乙之间恰有k个人的排法共有

$$2\,\mathrm{(n\text{-}k\text{-}1)(n\text{-}2)!}$$

种排法，故

$$\mathrm{P(A)}=\frac{2\,\mathrm{(n\text{-}k\text{-}1)(n\text{-}2)!}}{n!}=\frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}$$

排成环时：

解法1：排成环时共有(n−1)!种排法，而事件A的样本点个数为(n−2)!，故

$$P(A)=\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{1}{n-1}$$

解法2：首先从甲乙二人中选出一人，比如甲排在某位上，然后让其余n-2人排上，则剩余一个位置留给乙，其共有n-1中可能站法，而事件A要求乙只有一种站法，故 $P(A)=\frac{1}{n-1}$

解法3：对这n个位置编号1，2,⋯n，所以共有n！种排法。首先从甲乙二人中选出一人，比如甲排在某位上，共有n种选择，因为顺时针要求，乙的位置便定了，然后让其余n-2人排上，共有$(n-2)!$种选择，所以

$$P(A)=\frac{n(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n-1}$$

4. 解：设$A=\{$取出的n个数中最大的是k$\}$，$B_m=\{$取出的n个数中最大的不超过m$\}$，$1\le m\le 10.$

易知

$$P(B_m)=\frac{C_m^n}{C_{10}^n}$$

而$A=B_k-B_{k-1}$，且$B_k\supset B_{k-1}$，得

$$P(A)=P(B_k-B_{k-1})=P(B_k)-P(B_{k-1})=\frac{C_k^n-C_{k-1}^n}{C_{10}^n}$$

5. 解：设$A_i=\{i$ 次交换后黑球出现在甲袋中$\}$，$i=1,2,3$，记$p_i=P(A_i)$，则由末步分析法得

$$p_i=0.9p_{i-1}+0.1(1-p_{i-1})$$

由于$p_1=0.9$，可得$p_2=0.82, p_3=0.756.$

6.解： $A_i$＝｛第 $i$ 次摸得白球｝，显然$P(A_1)=\frac{a}{a+b}$，用首步分析法归纳证明，$P(A_i)=\frac{a}{a+b}$。只要注意到$P(A_{i+1}\mid A_1)$就是表示在$a-1$个白球与 b 个黑球的袋中第 $i$ 次摸得白球的概率，就容易解决了。

7. 解：设 $p_i$ 为从第 i 个袋中取出黑球的概率，则对 $i=2,\cdots,N$，有

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1}\frac{a+1}{a+b+1}+(1-p_{i-1})\frac{a}{a+b+1} \\ &= \frac{1}{a+b+1}p_{i-1}+\frac{a}{a+b+1}, \end{aligned}$$

由于 $p_1=\frac{a}{a+b}$，故得 $p_1=p_2=\cdots=p_N=\frac{a}{a+b}$

8. 解：假定第 15 排的座位依次编号为 1~20 号，设事件

$A_i$ ={甲坐第 $i$ 号座位}, $i=1,2,\cdots,20$

$B$ ={甲乙两人相邻而坐}

显然，$P(A_i)=\frac{1}{20}$，$i=1,2,\cdots,20$

当甲坐第 1（或 20）号座位时，乙可坐在甲的左边或右边就能与甲相邻，所以

$$P(B\,|\,A_1)=P(B\,|\,A_{20})=\frac{1}{19}$$

而当甲坐第 $i$ $(i=2,3,\cdots,19)$ 号座位时，乙只有坐第 2（或 19）号座位才能与甲相邻，所以 $P(B\,|\,A_i)=\frac{2}{19}, i=2,3,\cdots,19$

于是，由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{20}P(A_i)P(B\,|\,A_i)=\frac{1}{20}(\frac{1}{19}+18\times\frac{2}{19}+\frac{1}{19})=\frac{1}{10}$$

9. 解：设 $A$={摸到的两球都是白球}；$B$={丢失的是白球}，则 $P(B)=\frac{m}{m+n}, P(B^c)=\frac{n}{m+n}$；且 $P(A\,|\,B)=\frac{C_{m-1}^2}{C_{m+n-1}^2}$; $P(A\,|\,B^c)=\frac{C_m^2}{C_{m+n-1}^2}$; 由 Bayes 公式，得

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\,|\,B)P(B)}{P(A\,|\,B)P(B)+P(A\,|\,B^c)P(B^c)}=\frac{m-2}{m+n-2}。$$