1. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_k)$服从参数为$n,p_1,\cdots,p_n$ $(n\in N,0\le p_i\le 1)$的多项分布，即其分为

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_k=x_k)=\begin{cases}\dfrac{n!}{x_1!x_2!\cdots(n-x_1-\cdots-x_k)!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots(1-p_1-\cdots-p_k)^{(n-x_1-\cdots-x_k)}, & x_1+x_2+\cdots+x_k\le n,\quad x_i\in N,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

（1）试求出$(X_1,X_2,\cdots,X_k)$的任意m维$(m<k)$分量的分布？

证明略，还是多项分布

（2）试求出X_i与X_j的相关系数。

答案：$-\sqrt{\dfrac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}},i\ne j$

2. 设$X\sim Ge(p),Y\sim Ge(\tilde{p})$且相互独立，试证$X-Y$与$\min(X,Y)$相互独立。

证明：

$$P(X-Y=i)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X-Y=i,Y=k)$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}P(X=i+k,Y=k)=\frac{p\tilde{p}}{1-q\tilde{q}}q^i, & i\ge 0\\ \displaystyle\sum_{k=1-i}^{\infty}P(X=i+k,Y=k)=\frac{p\tilde{p}}{1-q\tilde{q}}\tilde{q}^{-i}, & i<0\end{cases}$$

$$P(\min(X,Y)=j)=P(X>Y,\min(X,Y)=j)+P(X<Y,\min(X,Y)=j)+P(X=Y,\min(X,Y)=j)$$
$$=P(X>j,Y=j)+P(j<Y,X=j)+P(X=j,Y=j)$$
$$=q^j\tilde{p}\tilde{q}^{j-1}+\tilde{q}^jpq^{j-1}+pq^{j-1}\tilde{p}\tilde{q}^{j-1}$$
$$=(q\tilde{q})^{j-1}[\tilde{p}q+p\tilde{q}+p\tilde{p}]$$
$$=(q\tilde{q})^{j-1}(1-q\tilde{q})$$

而

$$P(X-Y=i,\min(X,Y)=j)$$
$$=\begin{cases}P(X-Y=i,Y=j)=pq^{i+j-1}\tilde{p}\tilde{q}^{j-1}, & i\ge 0\\ P(X-Y=i,X=j)=pq^{j-1}\tilde{p}q^{j-i-1}, & i<0\end{cases}$$

$$P(X-Y=i,\min(X,Y)=j)=P(X-Y=i)P(\min(X,Y)=j),\forall i\in Z,j\in N-(0)$$

即$X-Y$与$\min(X,Y)$相互独立

3. X,Y独立同分布，且取正整数为值，则$X\sim Ge(p)$当且仅当对任意正整数j，有$P(\min(X,Y)=j,X-Y=0)=P(\min(X,Y)=j)P(X-Y=0)$.

证明：必要性略，只证充分性。

记$p_j=P(X=j)$

则 $P(\min(X,Y)=j, X-Y=0)=p_j^2$

$$P(\min(X,Y)=j)=P(X>Y,\min(X,Y)=j)+P(X<Y,\min(X,Y)=j)+P(X=Y,\min(X,Y)=j)$$
$$=P(X>j,Y=j)+P(j<Y,X=j)+P(X=j,Y=j)$$
$$=2p_j\sum_{k=j+1}^{\infty}p_k+p_j^2$$

$P(X-Y=0)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k^2\equiv A^2$。

由题设条件知，对任意正整数 j 有 $p_j^2=A^2\times[2p_j\sum_{k=j+1}^{\infty}p_k+p_j^2]$，

即 $(\frac{1}{A^2}-1)p_j=2\sum_{k=j+1}^{\infty}p_k$

从而 $(\frac{1}{A^2}-1)(p_{j-1}-p_j)=2p_j$，故有

$$p_j=\frac{1-A^2}{1+A^2}p_{j-1}=\cdots=(\frac{1-A^2}{1+A^2})^{j-1}p_1,$$

又由于 $(\frac{1}{A^2}-1)p_1=2\sum_{k=2}^{\infty}p_k$，所以 $p_1=\frac{2A^2}{1+A^2}$。从而得 $X\sim Ge(p_1)$。

4. 某城市有汽车 N 辆，编号从 1 到 N，某人站在街头，将所看到的不同的汽车号码记下：$X_1,X_2,\cdots,X_n(n<N)$, 令 $X=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，试证：$N=\frac{n+1}{n}EX-1$。

证明：$P(X=k)=\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n},\quad k=n,n+1,\cdots,N$，

$$EX=\sum_{k=n}^{N}kP(X=k)=\sum_{k=n}^{N}k\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}=\sum_{k=n}^{N}\frac{\frac{k!}{(n-1)!(k-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}=\frac{n(N+1)}{n+1}\sum_{k=n}^{N}\frac{C_k^n}{C_{N+1}^{n+1}}=\frac{n(N+1)}{n+1},$$

即 $N=\frac{n+1}{n}EX-1$。

5. 在上例中，如果此人将所有他看到的汽车号码都记下，即若一辆车在他面前经过两次，他就记下两个相同的号码（即放回抽样），则 $EX=\frac{1}{N^n}(N^{n+1}-\sum_{k=1}^{N}(k-1)^n)$。

解：放回抽样时，

$$P(X=k)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n},\quad k=1,2,\cdots,N$$

$$EX=\sum_{k=1}^{N}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{N}k\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}=\frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{N}(k^{n+1}-(k-1)^{n+1}-(k-1)^n)$$

$$=\frac{1}{N^n}[N^{n+1}-\sum_{k=1}^{N}(k-1)^n]$$

$$\approx\frac{1}{N^n}[N^{n+1}-\frac{N^{n+1}}{n+1}]$$

$$=\frac{nN}{n+1}$$

6. 设$Cov(X,Y|Z)=E[(X-E(X|Z))(Y-E(Y|Z))|Z]$，证明

（1）$Cov(X,Y|Z)=E(XY|Z)-E(X|Z)E(Y|Z)$

（2）$Cov(X,Y)=E[Cov(X,Y|Z)]+Cov(E(X|Z),E(Y|Z))$

证明：（1）

$$Cov(X,Y|Z)=E[(X-E(X|Z))(Y-E(Y|Z))|Z]$$
$$=E\{XY-XE(Y|Z)-YE(X|Z)+E(X|Z)E(Y|Z)|Z\}$$
$$=E[XY|Z]-E(X|Z)E(Y|Z)-E(Y|Z)E(X|Z)+E(X|Z)E(Y|Z)$$
$$=E[XY|Z]-E(X|Z)E(Y|Z)$$

（2）由于

$$E[Cov(X,Y|Z)]=E[E(XY|Z)]-E[E(X|Z)E(Y|Z)]$$
$$=E(XY)-E[E(YE(X|Z)|Z)]$$
$$=E(XY)-E[YE(X|Z)]$$

而

$$Cov(E(X|Z),E(Y|Z))$$
$$=E[E(X|Z)E(Y|Z)]-E[E(X|Z)]E[E(Y|Z)]$$
$$=E[E(YE(X|Z)|Z)]-E(X)E(Y)$$
$$=E[YE(X|Z)]-E(X)E(Y)$$

所以有 $Cov(X,Y)=E[Cov(X,Y|Z)]+Cov(E(X|Z),E(Y|Z))$

7. 设$\{X_n,n\geq 0\}$为对称简单随机徘徊，且$X_0=0$。

求$P(X_1\neq 0,X_2\neq 0,X_3\neq 0,X_4\neq 0,X_5\neq 0,X_6=0)$。

解：设$v_{2n}=P(X_1\neq 0,X_2\neq 0,\cdots,X_{2n-1}\neq 0,X_{2n}=0)$

$$u_{2n}=P(X_{2n}=0)$$

显然$v_0=0,u_0=1$，且$u_{2n}=P(X_{2n}=0)=C_{2n}^{n}(\frac{1}{2})^{2n}$

第 2n 步返回 0 点与第 2n 步首次返回 0 点的概率关系为：

$$u_{2n}=v_{2n}+v_{2n-2}u_2+v_2u_{2n-2}=\sum_{k=1}^{n}v_{2k}u_{2n-2k}$$

$$v_0=0,u_0=1$$

因此，有$\begin{cases}u_6=v_6+v_4u_2+v_2u_4\\ u_4=v_4+v_2u_2\\ u_2=v_2\end{cases}$

求得$v_6=\dfrac{1}{16}$

注：进一步思考证明：$v_{2n}=\dfrac{2C_{2n-1}^{n}}{2n-1}(\dfrac{1}{2})^{2n}$