运筹学第五次作业参考答案（20230322）

1. 用单纯型法直接求解如下线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & 6x_1 + x_3 \le 8 \\ & x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_j \ge 0,\ j = 1,2,3 \end{aligned}$$

其最优单纯型表如下：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	1/6	0	1	-1/6	-5/6	3
x_1	1	-1/6	0	0	1/6	-1/6	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	0	-1/6	0	0	-5/6	-7/6	z-9

1） 从表中直接读出该问题对偶问题的最优解和最优值。

2） 若目标函数中 x_1 的系数变为 c_1，求能够使当前基保持最优的 c_1 的取值范围。

解：

1) 对偶问题的最优值为 9，最优解为$(y_1, y_2, y_3) = \left(0, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right)^{\mathrm{T}}$

2) 设目标函数变为 $\max\ z = C_1x_1 + x_2 + 2x_3$，则单纯形表变为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	1/6	0	1	-1/6	-5/6	3
x_1	1	-1/6	0	0	1/6	-1/6	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	C_1	1	2	0	0	0	z-9

将目标函数中基变量的系数消去得到

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	1/6	0	1	-1/6	-5/6	3
x_1	1	-1/6	0	0	1/6	-1/6	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	0	-1+C_1/6	0	0	-C_1/6	-2+C_1/6	z-4-C_1

若仍然保持当前基为最优，应有

$$\begin{cases} -1 + \dfrac{C_1}{6} \le 0 \\ -\dfrac{C_1}{6} \le 0 \\ -2 + \dfrac{C_1}{6} \le 0 \end{cases}$$

解得$0 \le C_1 \le 6$

2. 用分支定界法求解下面整数规划问题。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 + \ \ 3x_2 \le 14 \\
& x_1 \ \ + 0.5x_2 \le 4.5 \\
& x_1, x_2 \ge 0\text{，且为整数}
\end{aligned}
$$

解：

设原问题的松弛问题为(P1)，解该问题有$\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{13}{4},\frac{5}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，上界$\bar{z}_1 = \frac{59}{4}$。对该问题分别加上约束$x_1 \le 3$和$x_1 \ge 4$形成子问题(P2)和(P3)。

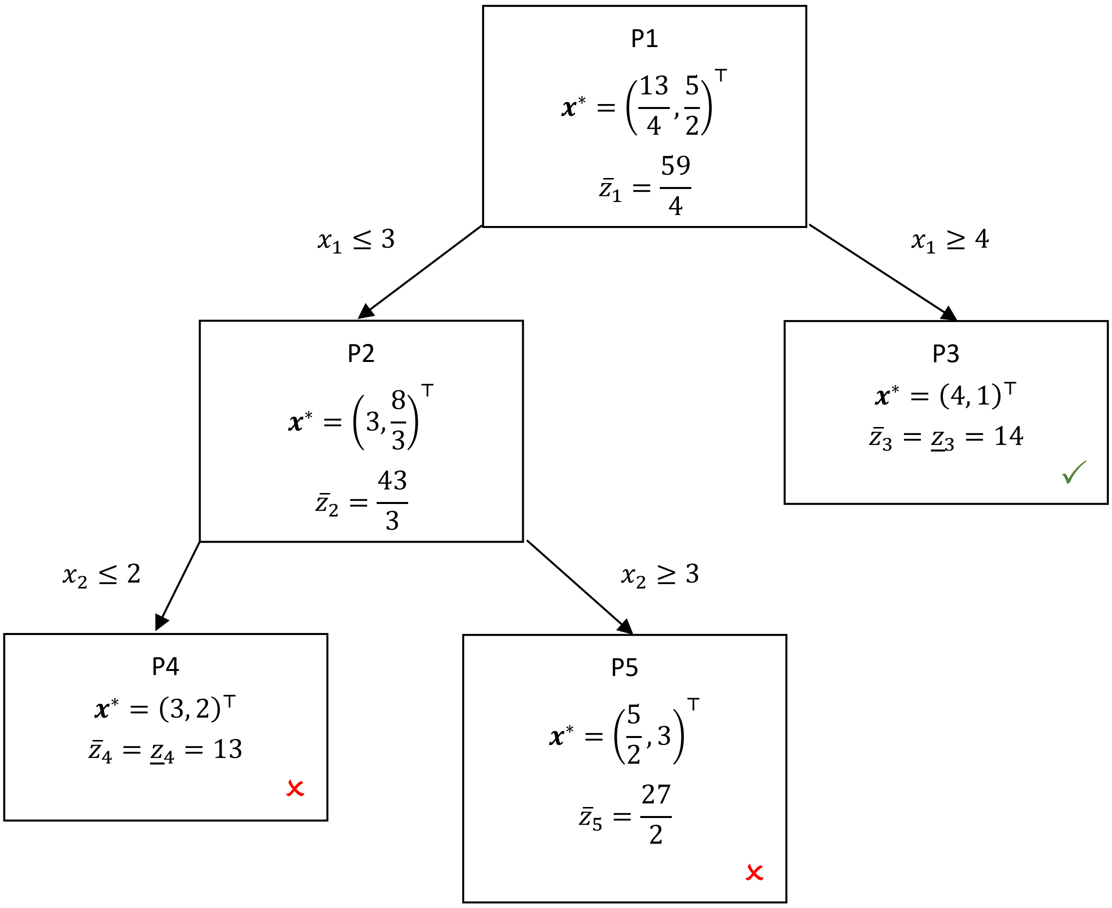
解(P2)有$\boldsymbol{x}^* = \left(3,\frac{8}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，上界$\bar{z}_2 = \frac{43}{3}$。该问题分别加上约束$x_2 \le 2$和$x_2 \ge 3$形成子问题(P4)和(P5).

解(P3)有$\boldsymbol{x}^* = (4,1)^{\mathrm{T}}$，上下界$\bar{z}_3 = \underline{z}_3 = 14$。

解(P4)有$\boldsymbol{x}^* = (3,2)^{\mathrm{T}}$，上下界$\bar{z}_4 = \underline{z}_4 = 13$。由于$\bar{z}_4 < \underline{z}_3$，故剪枝。

解(P5)有$\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{5}{2},3\right)^{\mathrm{T}}$，上界$\bar{z}_5 = \frac{27}{2}$。由于$\bar{z}_5 < \underline{z}_3$，故剪枝。

综上可得原问题最优解为$\boldsymbol{x}^* = (4,1)^{\mathrm{T}}$， $z^* = 14$。树状图如下：



3. 用割平面法求解下面线性规划问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 11x_1 + 4x_2 \\ s.t. \quad & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 16 \\ & 2x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0，且为整数 \end{aligned}$$

解：

原问题引入松弛变量x_3, x_4, x_5，画出单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	-1	2	1	0	0	4
x_4	5	2	0	1	0	16
x_5	2	-1	0	0	1	4
	11	4	0	0	0	

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	3/2	1	0	1/2	6
x_4	0	9/2	0	1	-5/2	6
x_1	1	-1/2	0	0	1/2	2
	0	19/2	0	0	-11/2	

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	-1/3	4/3	4
x_2	0	1	0	2/9	-5/9	4/3
x_1	1	0	0	1/9	2/9	8/3
	0	0	0	-19/9	-2/9	

取上表中第 3 行的约束，即

$$x_1 + \frac{1}{9}x_4 + \frac{2}{9}x_5 = \frac{8}{3}$$

$$\Delta(x) = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{9}x_4 + \frac{2}{9}x_5\right)$$

添加割平面约束$\Delta(x) \le 0$，以及松弛变量x_6，用对偶单纯形法，得到

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	-1/3	4/3	0	4
x_2	0	1	0	2/9	-5/9	0	4/3
x_1	1	0	0	1/9	2/9	0	8/3
x_6	0	0	0	-1/9	-2/9	1	-2/3
	0	0	0	-19/9	-2/9	0	

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	-1	0	6	0
x_2	0	1	0	1/2	0	-5/2	3
x_1	1	0	0	0	0	1	2
x_5	0	0	0	1/2	1	-9/2	3
	0	0	0	-2	0	-1	

此时得到最优解$\boldsymbol{x}^* = (2,3,0,0,3,0)^\top$，最优值$z_{\max} = 34$

4. 某大学运筹学专业硕士生要求课程计划中必须选修两门数学类，两门运筹学类和两门计算机类课程。该专业所有可选课程及其归类如下表所示：

注：凡归属两类的课程选修后可认为两类中各选修了一门课程。

课程名称	**所属归类**
微积分	数学类
计算机程序设计	计算机类
运筹学	数学类，运筹学类
数据结构	数学类，计算机类
管理统计	数学类，运筹学类
计算机模拟	计算机类，运筹学类
预测	数学类，运筹学类

此外，有些课程必须学习了先修课程才能选修，如修计算机模拟必须先学习计算机程序设计。所有要求先修课程的选修课及其对应的先修课程如下表所示：

课程名称	**对应先修课程**
计算机模拟	计算机程序设计
数据结构	计算机程序设计
管理统计	微积分
预测	管理统计

现在希望知道一个硕士生最少应选修几门课程（及其对应的课程名称）才能满足上述要求。请列出求解该问题的整数线性规划模型。

解：

设$x_1, x_2, \dots, x_7$分别按顺序表示以上 7 门课程的选修情况，其中$x_i = 1$表示选修第i门课程，$x_i = 0$表示不选第i门课程。希望选修课程数目最少，即目标函数为 $\min z = \sum_{i=1}^{7} x_i$，约束条件包含两个方面：

1) 课程数量的约束：要求至少选修两门数学类，两门运筹学类和两门计算机

类课程，则有

$$x_1+x_3+x_4+x_5+x_7\geq 2$$
$$x_3+x_5+x_6+x_7\geq 2$$
$$x_2+x_4+x_6\geq 2$$

2) 先修课程的关系约束：例如“数据结构x_4”的先修课程是“计算机程序设计x_2”，那么当$x_4=1$时，必须有$x_2=1$，这个条件可以表示为$x_4\leq x_2$。根据表格可以列出所有的先修关系约束

$$x_6\leq x_2$$
$$x_4\leq x_2$$
$$x_5\leq x_1$$
$$x_7\leq x_5$$

综上，问题的 0-1 规划模型为

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{7}x_i$$
$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1+x_3+x_4+x_5+x_7\geq 2\\ & x_3+x_5+x_6+x_7\geq 2\\ & x_2+x_4+x_6\geq 2\\ & x_2-x_6\geq 0\\ & x_2-x_4\geq 0\\ & x_1-x_5\geq 0\\ & x_5-x_7\geq 0\\ & x_i\in\{0,1\}, i=1,2,\dots,7\end{aligned}$$

5. 某航空公司计划在全国选择若干个机场组建基地。设在机场j组建基地所需费用为$c_j, j=1,2,\dots,n$。若该公司在机场i和机场j的基地组建完成, 则可开通往返两地的航班并获得票款收益$r_{ij}, 1\leq i<j\leq n$。该航空公司基地组建费用上限为B. 应选择在哪些机场组建基地才能使获得的收益最大。试写出该问题的数学规划。

解：

设x_j表示是否在机场j组建基地，即$x_j=1$表示组建基地，$x_j=0$表示不组建。则可写出规划问题

$$\max\ z=\sum_{1\leq i<j\leq n}r_{ij}x_ix_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}c_jx_j\leq B,\qquad x_i\in\{0,1\}, j=1,\dots,n$$

注：目标函数中也可以减去$\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$，表示净收益。两种表示都算正确。