考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

******************密******************封******************线******************

考生类别____________

第 23 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

北京物理学会编印　　　　　　　　2006.12.10

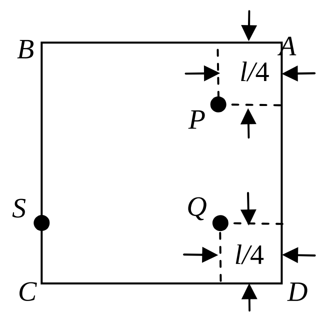
北京物理学会对本试卷享有版权，未经允许，不得翻印出版或发生商业行为，违者必究。

题号	一	二			
	1 ~ 12	13	14	15	16
分数					
阅卷人					
题号	二			总分	
	17	18	19		
分数					
阅卷人					

答题说明：前 16 题是必做题，满分是 100 分；少学时组只做必做题；非物理 B 组限做 17 题，满分 110 分；非物理 A 组限做 17、18 题，满分 120 分；物理组限做 17、19 题，满分 120 分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理，请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

一.填空题（必做，共 12 题，每题 2 空，每空 2 分，共 48 分）

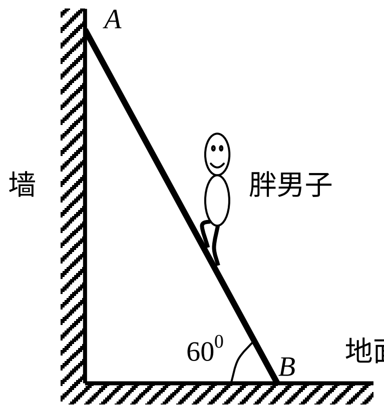
1．在每边长为 l 的正方形光滑台球桌面 ABCD 上，有两个静止的小球 P 和 Q,其中 P 到 AB 边和 AD 边的距离同为 $l/4$，Q 到 CD 边和 AD 边的距离也同为 $l/4$，如图所示。令 P 对准 BC 边的 S 点以速度 v 运动，相继与 BC 边及 CD 边弹性碰撞后,恰好能打中 Q。则 S 点与 C 点的距离为_________，P 从开始运动直到与 Q 相碰，其间经过的时间为______________。



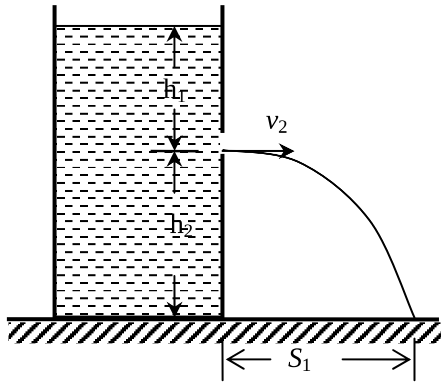
2．设想地球、月球半径以及两球中心间距都缩小为原值的十分之一，但质量不变。那么，地面处原周期为 1 秒的小角度单摆，现周期为____________秒；将月球绕地球运动的原周期仍然记为月，　月球绕地球运动的现周期便为_______________月。

3．半径为 R 的孤立导体球，其电容为____________。两个半径同为 R 的导体球，球心间距远大于 R 时形成的导体对电容器，其电容可近似为______________。

4．如图所示，长l、质量M的匀质重梯上端A靠在光滑的竖直墙上，下端B落在水平地面上，梯子与地面的夹角为 60^0。一个质量也为M的胖男子从B端缓慢爬梯，到达梯子的中点时，梯子尚未滑动，稍过中点，梯子即会滑动，据此可知梯子与地面间的摩擦因数μ = ______________。令质量为 2M/3 的瘦男子替换胖男子从B端缓慢爬梯，为使梯子不会滑动，他可到达的最高位置与B端相距__________。

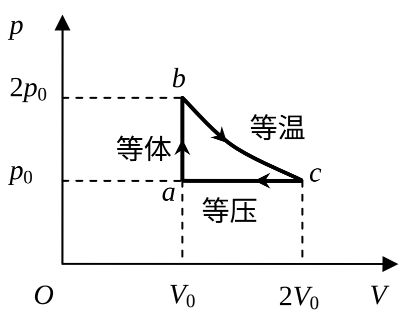


5．在水平地面上的一个桶内盛有高为h_1+h_2的水，桶的侧面有一小孔，孔与水面相距h_1，水从小孔流出时的速度为v_1 =_____________，对应的水平射程为S_1，如图所示。如果小孔的位置改取在水面下方h_2处，对应的水平射程记为S_2，则$S_2 - S_1$ =__________________。



6．质量、半径相同的匀质圆环 A、匀质圆盘 B 和匀质球体 C，开始时旋转角速度同为零，在水平地面上从同一“ 起跑线 ”以相同的水平初速度朝同一方向运动。若 A、B、C 与地面间的摩擦因数相同，那么，A、B、C 中最先达到匀速纯滚动状态的是_____，最终动能损失量最大的是__________。

7. 某气体的状态方程可表述为$pV = f(T)$，该气体所经历的循环过程如图所示。气体经bc过程对外作功量为W =______________p_0V_0，经过一个循环过程吸收的热量_______________Q =_________________p_0V_0。

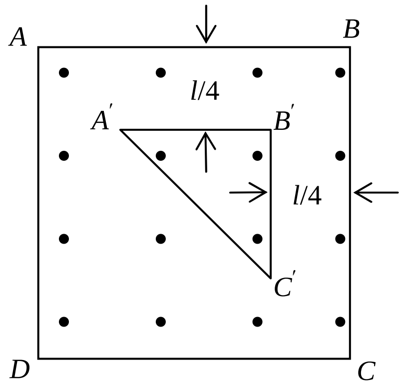


8. 比热同为常量c，质量同为m的 6 个球体，其中A球的温度为T_0， 其余 5 个球的温度同为 $2T_0$。通过球与球相互接触中发生的热传导，可使A球的温度升高。假设接触过程与外界绝热， 则A球可达到的最高温度为 T_0，对应的A球熵增量为_____________mc。

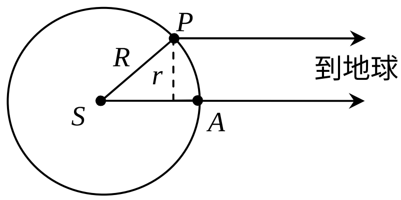
考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

************密************封************线************

9. 每边长为l的正方形ABCD区域外无磁场，区域内有图示方向的匀强磁场，磁感应强度随时间的变化率为常量k。区域内有一个腰长为$l/2$的等腰直角三角形导线框架$A'B'C'$，直角边$A'B'$与AB边平行，两者相距$l/4$，直角边$B'C'$与BC平行，两者相距$l/4$。已知框架$A'B'C'$总电阻为R，则感应电流强度I =________________。若将导线$A'B'$和$B'C'$取走，留下导线$A'C'$在原来位置，此时导线$A'C'$中的感应电动势ε =__________________。

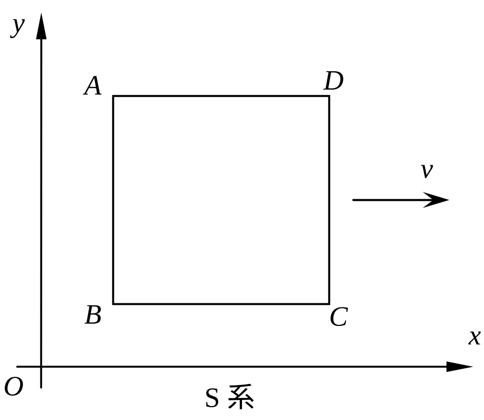


10. 某颗恒星（处理成一个点）S 外围半径 R 处为尘埃组成的球壳所包围，该星所发射的光首先被尘埃球壳所吸收，然后由尘埃发射光。当该恒星突然经历一次新星爆炸发出很强的光脉冲后，在远处地球上的观察者将先看到由图中 A 处辐射的光，然后才看到由 P 处辐射的光，总的效果是一个以 A 为中心、半径 r 不断增大的光环。将真空光速记为 c，光环从出现到半径达最大，其间历时_________，过程中光环半径 r 随时间 t 增大的速率 $\frac{dr}{dt}$ 与 r 之间的函数关系为 $\frac{dr}{dt}$ =________________。



11. 用主折射率为n_o、n_e的负晶体制成两块波片，当波长为λ的单色线偏振光正入射经过其中的一块二分之一波片后，出射光为___________（填：部分偏振光、线偏振光或圆偏振光）。接着，又正入射经过第二块波片，出射光恰好为圆偏振光，该波片的厚度至少为______________。

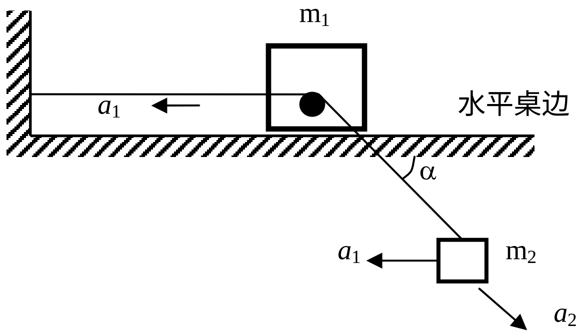
12. 如图所示，各边静长为L的正方形面板ABCD，在惯性系S的xy坐标面上以匀速度v沿x轴运动。运动过程中AB边和BC边各点均朝x轴连续发光，在S系中各点发光方向均与y轴平行。这些光在x轴上照亮出一条随着面板运动的轨迹线段，它的长度l = L。若改取AB边静长为L'，BC边静长仍为L的长方形面板，当v =0.6c时，x轴上运动的轨迹线段长度恰好等于L，那么必有L' =________________。



二.基本计算题（必做，共 4 题，每题

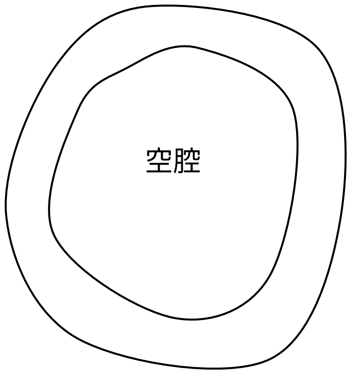
13 分，共 52 分）

13．（**必做**）如图所示，水平轻绳跨过固定在质量为m_1的水平物块的一个小圆柱棒后，斜向下连接质量为m_2的小物块，设系统处处无摩擦，将系统从静止状态自由释放后，假设两物块的运动方向恒如图所示，即绳与水平桌面的夹角α始终不变，试求α、a_1和a_2。



考场______ 姓名______ 准考证号______ 所在学校______
************密************封************线************

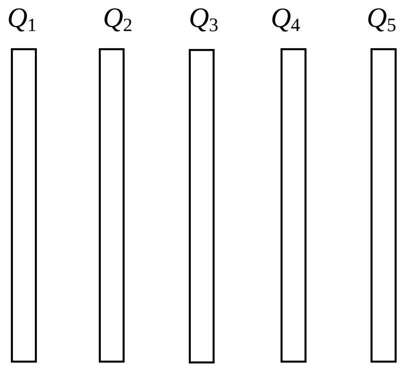
14.(**必做**)在图示的密闭容器内有一空腔，加热容器会使腔壁产生热辐射，在空腔内形成包含各种频率的光子气。而后，腔壁会继续向空腔输运各种频率的光子，光子气中各种频率的光子也会输运到腔壁，在给定温度下达到动态平衡。平衡时，可等效地将腔壁处理成既不产生新的热辐射光子，也不吸收腔内已有的光子，这相当于假设腔壁对光子气中的光子是全反射的，于是光子气可类比成理想气体。已知腔内光子气的能量密度 u 与温度 T 的 4 次方正比，试求光子气压强 p 与温度 T 的关系。



15.（**必做**）5 块相同的导体大平板相互间隔地自左至右平行放置，各自带电量分别 为 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5，如图所示，静电平衡后，试求：

（1）第一块平板左侧面电量 $Q_{1左}$ 和第 5 块平板右侧面电量 $Q_{5右}$；

（2）试计算 $Q_{2左}$ 和 $Q_{3左}$（用已知量表示）。



考场________ 姓名________ 准考证号________ 所在学校________

****************密****************封****************线****************

16．（**必做**）衰变中的原子核个数N随时间t指数减少，规律为 $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$ ，其中λ为 衰变常数。原子核个数减少为$N_0/2$ 的时间称为半衰期，记为τ，有 $\tau=\ln 2/\lambda$ 。自然界中存在下述核衰变：$\rightarrow {}^{228}_{90}\mathrm{Th}\xrightarrow[\tau_1=1.91y]{}{}^{224}_{88}\mathrm{Ra}\xrightarrow[\tau_2=3.66d]{}{}^{220}_{86}\mathrm{Rn}\rightarrow$ ，如果矿物中这三种原子核的数目已近似不随时间变，则可模型化为不随时间变化，称这三种元素已处于平衡态。从这样的矿物中提取出全部 ${}^{228}_{90}\mathrm{Th}$ 和 ${}^{224}_{88}\mathrm{Ra}$ ，构成质量M=1g的混合物，试求：

（1）开始时（$t=0$），混合物中 ${}^{228}_{90}\mathrm{Th}$ 的原子核个数N_1和 ${}^{224}_{88}\mathrm{Ra}$ 的原子核个数N_2；

（2）$t>0$ 时刻，混合物中 ${}^{224}_{88}\mathrm{Ra}$ 的原子核个数N_2（t）；

（3） ${}^{228}_{90}\mathrm{Th}$ 原子核数减为初值一半时， ${}^{224}_{88}\mathrm{Ra}$ 的原子核数 N_2^*

数学参考知识：线性一次型微分方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ 的通解为

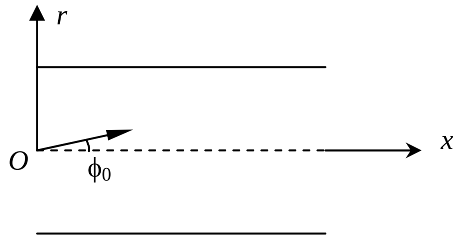
$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

三．计算题（每题 10 分，少学时组不做，非物理 B 组限做第 17 题；非物理 A 组限做第 17、18 题；物理组限做第 17、19 题）

17．**（少学时组不做，其他组必做）**

细圆柱形的光纤如图所示，折射率沿径向分布的函数为

$n^2(r)=n_0^2(1-\alpha^2r^2)$，$\alpha>0$，$\alpha^2r_{\max}^2<1$，其中$n_0$为光纤中央轴上（即$r=0$处）的折射率。沿中央轴设置 x 坐标，光线从原点 O 射出，与 x 轴夹角为ϕ_0，设ϕ_0较小，光线不会与光纤壁相遇，试求光线方程$r\sim x$。进而说明，若从 O 点出射的是半顶角ϕ_0为小角度的细圆锥形光束，则此光束又会汇聚在 x 轴上的某一点，即出现自聚焦现象。



考场＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 准考证号＿＿＿＿＿＿＿ 所在学校＿＿＿＿＿＿＿＿

****************密*****************封****************线****************

18．**（非物理 A 组必做，其他组不做）**

由恒压电源V_0和电阻构成的直流电路以及将要讨论的相关电压量已在图 1 中示出。

（1）试证电压V_{n+1}、V_n和V_{n-1}之间有下述关系，

$$V_{n+1}-2V_n+V_{n-1}=\left(\frac{R_A}{R_B}\right)V_n$$

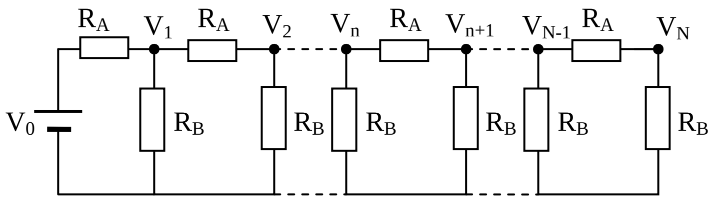


图 1

（2）从图 1 中可以看出V_n应随n的增大而递减，因此可尝试检查$V_n=V_0e^{-n\alpha}$是否满足（1）问中的关系式，若是，求出α值。

（3）唾腺或肾小管的单层上皮细胞的结构如图 2 所示。单一细胞的电阻为R_B，两相邻细胞间的接触面电阻为R_A，细胞截面的形状约为各边长 10μm的正方形。用电极在第一个细胞和其外的细胞液之间施加电压V_0=30mV，然后依次测量各个细胞和其外细胞液之间的电压V(x)，所得对数实验曲线如图 3 所示。据此，求出R_A对R_B的比值。

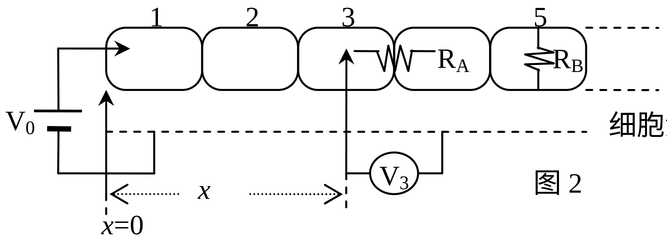


图 2

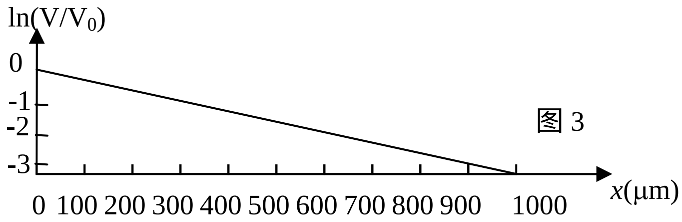


图 3

19．**（物理组必做，其他组不做）**在匀强磁场空间内，与磁感应强度 $\vec{B}$ 垂直的一个平面上，质量为 m、带电量为 q（$q > 0$）的粒子从 $t = 0$ 时刻，以 $\vec{v}_0$ 初速度开始运动，运动过程中粒子速度为 $\vec{v}$ 时所受阻力为 $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$，其中γ是正的常量。

(1)计算 $t > 0$ 时刻粒子速度大小 v 和已通过的路程 s。

(2)计算粒子运动方向（即速度方向）相对初始运动方向恰好转过 $\pi/2$ 时刻的速度大小 v^*。

第 23 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷解答

一．填空题（12 题，每题 2 空，每空 2 分，共 48 分）

1．$l/4$, $\frac{\sqrt{13}}{2}\frac{l}{v}$；　2．0.1, $\sqrt{10^{-3}}=0.0316$；3．$4\pi\varepsilon_0 R$，　$2\pi\varepsilon_0 R$

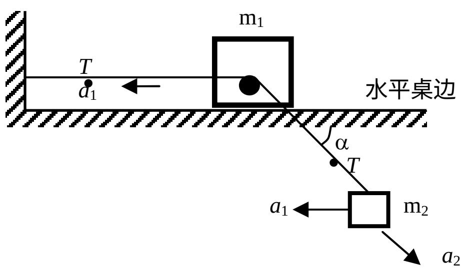
4．$\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，　$\frac{1}{2}$；　5．$\sqrt{2gh_1}$，　0；6．C，　A；7．$2\ln 2$，　$2\ln 2-1$；

8．$\frac{63}{32}$，　$\ln\left(\frac{63}{32}\right)$；　9．$\frac{kl^2}{8R}$，　0；　10．$\frac{R}{c}$，　$\frac{c\sqrt{R^2-r^2}}{r}$；

11．线偏振光，　$\frac{\lambda}{4(n_o-n_e)}$；　12．$(\sqrt{1-\beta^2}+\beta)$，　$\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}=\frac{1}{3}$，其中 $\beta=\frac{v}{c}$

二．计算题

13．（13 分）



解：参考图示参量，有

m_1：$T-T\cos\alpha=m_1a_1$　(1)　　（2 分）

$$m_2：\begin{cases} m_2g-T\sin\alpha=m_2a_2\sin\alpha\ (2)\quad (2分) \\ T\cos\alpha=m_2(a_1-a_2\cos\alpha)\ (3)\quad (2分) \end{cases}$$

运动关联：m_2沿绳伸长方向移动量等于m_1左行量，

既有$v_2=v_1$，进而有　$a_2=a_1=a$　(4)　　　　（2 分）

将（4）式代入（1）、(2)、(3）式，得

$T(1-\cos\alpha)=m_1a$，$m_2g-T\sin\alpha=m_2a\sin\alpha$，$T\cos\alpha=m_2a(1-\cos\alpha)$　消去 T，

得 $\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}(1-\cos\alpha)m_2a=m_1a$　(5)　　$m_2g-\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha\cdot m_2a=m_2a\sin\alpha$　6)

由（5）式得 $\begin{cases} \cos^2\alpha-(k+2)\cos\alpha+1=0 \\ k=m_1/m_2>0 \end{cases}$

解得 $\cos\alpha=\begin{cases} \frac{1}{2}\left[(k+2)+\sqrt{k(k+4)}\right]>1\text{舍去} \\ \frac{1}{2}\left[(k+2)-\sqrt{k(k+4)}\right]<1 \end{cases}$

即有 $\begin{cases} \alpha=\arccos\left\{\frac{1}{2}\left[(k+2)-\sqrt{k(k+4)}\right]\right\} \\ k=m_1/m_2>0 \end{cases}$　　　（3 分）

代入（6）式得 $\begin{cases} a_1=a_2=g\cot\alpha \\ \alpha=\arccos\left\{\frac{1}{2}\left[(k+2)-\sqrt{k(k+4)}\right]\right\} \end{cases}$　　　（2 分）

14．（13 分）

解：频率为ν的光子，质量为

$$m_\nu = \frac{h\nu}{c^2} \qquad (3 分)$$

光子气中这种光子的数密度记为n_ν，仿照理想气体压强公式推导，可得此种光子对光子气压强的贡献为

$$p_\nu = \frac{1}{3}n_\nu m_\nu c^2 = \frac{1}{3}n_\nu h\nu = \frac{1}{3}u_\nu \qquad (5 分)$$

其中 $u_\nu = n_\nu h\nu$，即为光子气中ν光子的能量密度。于是，光子气的总压强便为

$$p = \sum_\nu p_\nu = \frac{1}{3}\sum_\nu u_\nu = \frac{1}{3}u \qquad (3 分)$$

其中 $u = \sum_\nu u_\nu = \sum_\nu n_\nu h\nu$ 即为光子气能量密度。因$u \propto T^4$，即得

$$p \propto T^4 \qquad (2 分)$$

15．（13 分）解：

（1）静电平衡后，各板内场强均为零。取图中虚线所示高斯面，可证第 1 块板的右侧面电量$Q_{1右}$与第 2 块板的左侧面电量$Q_{2左}$必等量异号，即有

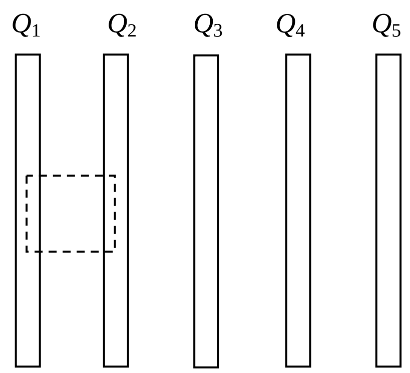
$$Q_{1右} + Q_{2左} = 0$$

同理可得 $Q_{2右} + Q_{3左} = 0, Q_{3右} + Q_{4左} = 0,$

$Q_{4右} + Q_{5左} = 0$，又因

$$Q_{1左} + \left[(Q_{1右} + Q_{2左}) + (Q_{2右} + Q_{3左}) + \ldots + (Q_{4右} + Q_{5左})\right] + Q_{5右} = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_5$$

即得 $Q_{1左} + Q_{5右} = \sum_{i=1}^{5} Q_i$ 考虑到 $(Q_{1右}, Q_{2左})$，$(Q_{2右}, Q_{3左})$，…$(Q_{4右}, Q_{5左})$中每一组面电荷给各块板内部场强的贡献均为零，便要求面电荷组$(Q_{1左}, Q_{5右})$给各导体板内部场强的贡献也为零，即要求$Q_{1左} = Q_{5右}$，便得



$$Q_{1左} = Q_{5右} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} Q_i \qquad (7 分)$$

（2）$Q_{2左} = \frac{1}{2}(Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 - Q_1)$，$Q_{3左} = \frac{1}{2}(Q_3 + Q_4 + Q_5 - Q_1 - Q_2)$ （6 分）

16．（13 分）

解：由 $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$，得 dt 时间内衰变的原子核数为 $-dN=\lambda N_0e^{-\lambda t}dt=\lambda N(t)dt$

（1）处于平衡态时，t时刻某个矿物中Th和Ra的原子个数分别记为$N_1(t)$和$N_2(t)$。经dt时间，$N_2(t)$的增量应为 $dN_2=\lambda_1N_1(t)dt-\lambda_2N_2(t)dt$，$\lambda_1=\dfrac{\ln 2}{\tau_1},\lambda_2=\dfrac{\ln 2}{\tau_2}$　　（2 分）

因 $dN_2=0$，

得 $$\frac{N_1(t)}{N_2(t)}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{1.91\times 365}{3.66}=190$$ （1 分）

题文中混合物内原子总数为　$N=N_1+N_2=191N_2$

Th 和 Ra 的摩尔质量非常接近，且 $N_1>>N_2$，平均摩尔质量近似为 Th 的摩尔质量

$\mu=228g$，得 $N=\dfrac{M}{\mu}N_A=\dfrac{1}{228}\times 6.02\times 10^{23}=2.64\times 10^{21}$

即有 $N_1\approx N=2.64\times 10^{21},N_2=\dfrac{N}{191}=1.38\times 10^{19}$　　（2 分）

（2）混合物刚组成的时刻改记为 t = 0，t > 0 时刻 Th 的原子数为 $N_1(t)=N_1e^{-\lambda_1 t}$（1 分）

此时Ra原子数记为$N_2(t)$。经dt时间，有 $dN_2(t)=\lambda_1N_1(t)dt-\lambda_2N_2(t)dt$

即 $\dfrac{dN_2(t)}{dt}+\lambda_2N_2(t)=\lambda_1N_1(t)=\lambda_1N_1e^{-\lambda_1 t}$　　（2 分）

解为 $N_2(t)=e^{-\int\lambda_2dt}\left[\int\lambda_1N_1e^{-\lambda_1 t}e^{\int\lambda_2dt}dt+C\right]=e^{-\lambda_2 t}\left[\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_1e^{-\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t}+C\right]$

利用 $N_2(0)=N_2$，求得 $C=N_2-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_1$　　（3 分）

$N_2(t)=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_1\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)+N_2e^{-\lambda_2 t}$ 或 $N_2(t)=\dfrac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}N_1\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/\tau_1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/\tau_2}\right]+N_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/\tau_2}$

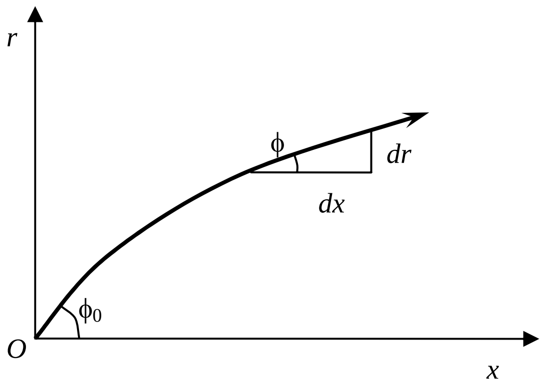
（3）Th 原子数减为一半时刻为 $t=\tau_1$，此时 Ra 的原子数为

$$N_2^*=N_2(\tau_1)=\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}N_1\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau_1/\tau_2}\right]+N_2\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau_1/\tau_2}$$

因 $\tau_1>>\tau_2$，$N_1>>N_2$，近似有 $N_2^*=\dfrac{\tau_2}{2\tau_1}N_1=\dfrac{1}{380}N_1=6.94\times 10^{18}$　　（2 分）

17．（10 分）

解：参考题解图，据折射定律有



$$n_0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi_0\right)=n(r)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)$$ （2 分）

即 $n_0\cos\phi_0=n(r)\cos\phi$

由此可得

$$\frac{dr}{dx}=\tan\phi=\frac{\sqrt{n^2-n_0^2\cos^2\phi_0}}{n_0\cos\phi_0}$$ （1 分）

因 $n^2-n_0^2\cos^2\phi_0=n_0^2-n_0^2\alpha^2r^2-n_0^2\cos^2\phi_0=n_0^2(\sin^2\phi_0-\alpha^2r^2)$

得 $\dfrac{dr}{dx}=\dfrac{\sqrt{\sin^2\phi_0-\alpha^2r^2}}{\cos\phi_0}$ （2 分）

两边对 x 求导，得

$$\frac{d^2r}{dx^2}=\frac{-\alpha^2r}{\cos\phi_0\sqrt{\sin^2\phi_0-\alpha^2r^2}}\frac{dr}{dx}=\frac{-\alpha^2r}{\cos\phi_0\sqrt{\sin^2\phi_0-\alpha^2r^2}}\frac{\sqrt{\sin^2\phi_0-\alpha^2r^2}}{\cos\phi_0}=\frac{-\alpha^2r}{\cos^2\phi_0}$$

即

$$\frac{d^2r}{dx^2}+\frac{\alpha^2r}{\cos^2\phi_0}=0$$ （2 分）

这相当于“简谐振动”微分方程，考虑到 $x=0$ 时，$r=0$，解为

$$r=A\sin\left(\frac{\alpha}{\cos\phi_0}x\right)$$ （1 分）

由 $\left.\dfrac{dr}{dx}\right|_{x=0}=\tan\phi_0$，可得 $A=\dfrac{\sin\phi_0}{\alpha}$

表明光线为正弦曲线。

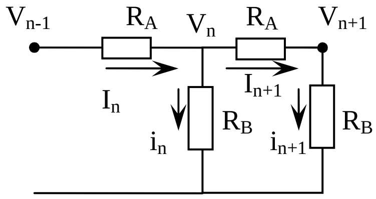
从 O 点出射后，光线与 x 轴的第一个交点的坐标为

$x_1=\dfrac{\pi}{\alpha}\cos\phi_0$，$\phi_0$为小角度时，$x_1=\dfrac{\pi}{\alpha}$ （1 分）

若从O点出射的是半顶角ϕ_0为小角度的细圆锥形光束，则光束中所有光线都会在 $x_1=\dfrac{\pi}{\alpha}$ 处与x轴相交，即光束又会汇聚在x轴上的x_1点。以后还会在x轴上的 $2x_1$，$3x_1$…等处汇聚，形成自聚焦现象。 （1 分）

18．（10 分）

解：参考题解图，有



$$I_n = i_n + I_{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{n-1} - V_n}{R_A} = \frac{V_n}{R_B} + \frac{V_n - V_{n+1}}{R_A}$$

即得

$$V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} = \left(\frac{R_A}{R_B}\right)V_n$$ （2 分）

（2）将$V_n = V_0 e^{-n\alpha}$代入上式，得$e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 2 + \frac{R_A}{R_B}$

$$\Rightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\left(2 + \frac{R_A}{R_B}\right) \pm \sqrt{\left(2 + \frac{R_A}{R_B}\right)^2 - 4}\right]$$

α需为正值，$e^{\alpha} > 1$，上式取正号，得

$$\alpha = \ln\left\{\frac{1}{2}\left[\left(2 + \frac{R_A}{R_B}\right) + \sqrt{\left(2 + \frac{R_A}{R_B}\right)^2 - 4}\right]\right\}$$ （3 分）

（3）实验曲线可代数地表述为$\frac{\ln\frac{V(x)}{V_0}}{x} = \frac{\ln\frac{1}{V_0}}{1000}$

即

$$V(x) = V_0 e^{-\left(\frac{\ln V_0}{1000}\right)x}$$ （2 分）

图 2 电路结构与图 1 相同，第 n 个细胞的电压应为

$$V_n = V_0 e^{-n\alpha}，\ n = \frac{x}{10}$$

即得

$$V_n = V(x)\Big|_{x=10n} = V_0 e^{-\left(\frac{\ln V_0}{1000}\right)10n} = V_0 e^{-\left(\frac{\ln V_0}{100}\right)n}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\ln V_0}{100} = \frac{\ln 30}{100} = 0.034$$

代入$e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 2 + \frac{R_A}{R_B}$，得

$$\frac{R_A}{R_B} = e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2 = 1.2 \times 10^{-3}$$ （3 分）

19．（10 分）

解：

（1）粒子所受切向力和所得切向加速度分别为

$$f=-\gamma v\text{ ，}\frac{dv}{dt}=a_{切}=-\frac{\gamma v}{m}$$

得

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_0^t-\frac{\gamma}{m}dt$$

$$\Rightarrow v=v_0e^{-\frac{\gamma}{m}t}\qquad\text{（3 分）}$$

再由

$$\frac{ds}{dt}=v=v_0e^{-\frac{\gamma}{m}t}\Rightarrow\int_0^s ds=\int_0^t v_0e^{-\frac{\gamma}{m}t}dt$$

得

$$s=\frac{m}{\gamma}v_0\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)\qquad\text{（3 分）}$$

（2）t 到 t+dt 时间内，粒子作半径为

$$\rho=\frac{mv}{qB}$$

的无穷小圆弧运动，速度方向偏转了小角度 dθ，则有

$$\rho d\theta=vdt$$

得

$$d\theta=\frac{v}{\rho}dt=\frac{qB}{m}dt$$

积分后便有

$$\theta=\frac{qB}{m}t$$

$$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\text{ 时，}t^*=\frac{\pi m}{2qB}$$

此时速度大小便为

$$v^*=v_0e^{-\frac{\gamma}{m}t^*}=v_0e^{-\frac{\pi\gamma}{2qB}}\qquad\text{（4 分）}$$