作业4：逆运动学

1. Puma560逆运动学

j	theta	d	a	alpha	offset
1	q1	0	0	1.5708	0
2	q2	0	0.4318	0	0
3	q3	0.15005	0.0203	-1.5708	0
4	q4	0.4318	0	1.5708	0
5	q5	0	0	-1.5708	0
6	q6	0	0	0	0

按照上图的DH参数我们可以列写各关节的变换矩阵如下：

$$
{}_1^0T=\begin{bmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}_2^1T=\begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & a_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}_3^2T=\begin{bmatrix} cos\theta_3 & -sin\theta_3 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -sin\theta_3 & -cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

则｛3｝到｛0｝的变换矩阵为：

$$
{}_3^0T={}_1^0T{}_2^1T{}_3^2T
$$

假设：

$$
{}_3^0T=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

则有：

$$
\begin{aligned}
n_x &= c_1c_2c_3 - s_1s_2c_3 \\
n_y &= s_3 \\
n_z &= s_1c_2c_3 + c_1s_2c_3 \\
o_x &= -c_1c_2s_3 + s_1s_2s_3 \\
o_y &= c_3 \\
o_z &= -s_1c_2s_3 - c_1s_2s_3 \\
a_x &= -c_1s_2 - s_1c_2 \\
a_y &= 0 \\
a_z &= -s_1s_2 + c_1c_2 \\
p_x &= c_1c_2a_3 - c_1s_2d_3 + c_1a_2 - s_1s_2a_3 - s_1c_2d_3 \\
p_y &= 0 \\
p_z &= s_1c_2a_3 - s_1s_2d_3 + s_1a_2 + c_1s_2a_3 + c_1c_2d_3
\end{aligned}
$$

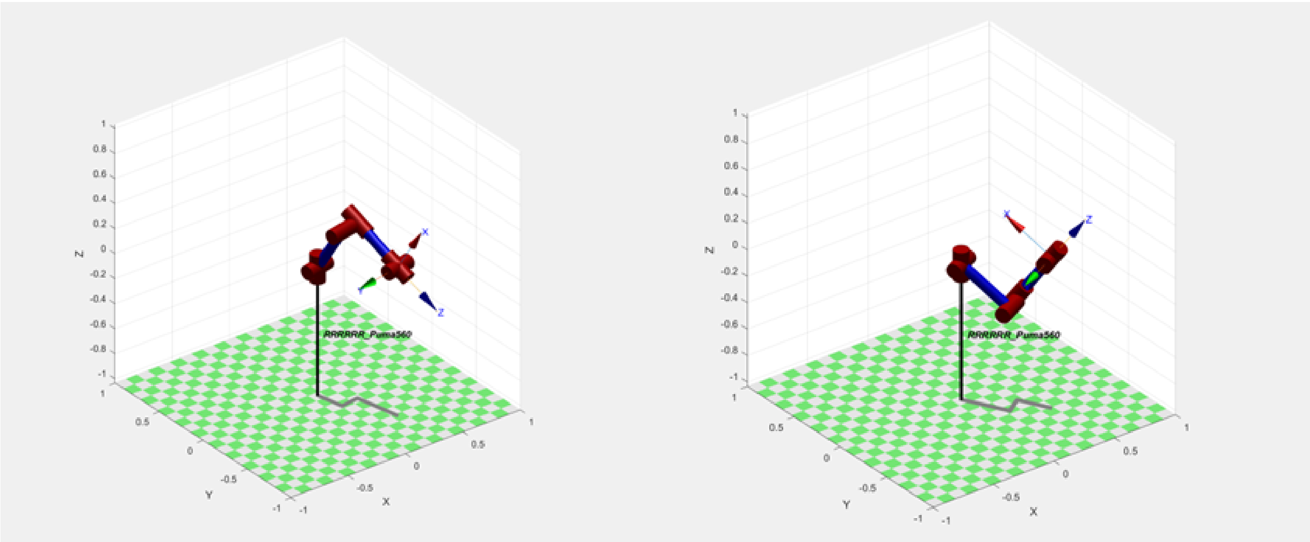
整理得：

$$
\begin{aligned}
a_x &= -sin(\theta_1 + \theta_2) \\
a_z &= cos(\theta_1 + \theta_2) \\
p_x &= a_3cos(\theta_1 + \theta_2) - d_3sin(\theta_1 + \theta_2) + a_2c_1 \\
p_y &= a_3sin(\theta_1 + \theta_2) + d_3cos(\theta_1 + \theta_2) + a_2s_1
\end{aligned}
$$

所以有：

$$
\begin{aligned}
\theta_3 &= acrtan\frac{n_y}{o_y} \\
\theta_1 &= arctan\frac{p_y + a_xa_3 - d_3a_z}{p_x - a_3a_z - d_3a_x} \\
\theta_2 &= arctan(-\frac{a_x}{a_z}) - \theta_1
\end{aligned}
$$

可能的机器人位型如下：



2. 平面两自由度机器人

matlab代码如下：

```
syms theta1 theta2
l1 = 0.5
l2 = 0.5
x = l1*cos(theta1)+l2*cos(theta1+theta2)
y = l1*sin(theta1)+l2*sin(theta1+theta2)
J = jacobian([x,y],[theta1,theta2])
matrix1 = subs(J,{theta1,theta2},{0,0})
det(matrix1)
matrix2 =subs(J,{theta1,theta2},{0,pi/2})
det(matrix2)
matrix3 =subs(J,{theta1,theta2},{pi/2,0})
det(matrix3)
matrix4 =subs(J,{theta1,theta2},{pi/4,0.8*pi})
det(matrix4)
```

解得的雅克比矩阵为：

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{2}-\frac{\sin(\theta_1)}{2} & -\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{2} \\ \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}+\frac{\cos(\theta_1)}{2} & \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{2} \end{pmatrix}$$

情况1，$\theta_1=0,\theta_2=0$时：

- 雅克比矩阵如下：

$$J_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- 行列式为：

$$\det=0$$

- 所以情况一雅可比矩阵奇异

情况2，$\theta_1=0,\theta_2=\frac{\pi}{2}$时：

- 雅克比矩阵如下：

$$J_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- 行列式为：

$$\det=\frac{1}{4}$$

- 所以情况二雅可比矩阵非奇异

情况3，$\theta_1=\frac{\pi}{2},\theta_2=0$时：

- 雅克比矩阵如下：

$$J_3 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行列式为：

$$\det = 0$$

- 所以情况三雅可比矩阵奇异

情况4，$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = 0.8\pi$时：

- 雅克比矩阵如下：

$$J_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}{2} & -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}{2} \end{pmatrix}$$

- 行列式为：

$$\det = \frac{\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}{8} - \frac{\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)}{8}$$

- 所以情况四雅可比矩阵非奇异