线性代数参考答案

杨鹏

这是 [1] 的一份习题解答.

目录

1. 线性映射和矩阵

1.1. 映射.

练习 1.1.1. 判断下列映射是否是单射, 满射, 双射, 并写出双射的逆映射.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x+1$.

◀ 双射. 逆映射为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x-1$. ▶

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto 2x$.

◀ 双射. 逆映射为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{x}{2}$. ▶

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto 3$.

◀ 均不是. ▶

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$.

◀ 均不是. ▶

5. $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$.

◀ 单射. ▶

6. $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), x\mapsto e^x$.

◀ 双射. 逆映射为 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto logx$. ▶

7. $f:[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]\to[-1,1], x\mapsto sinx$.

◀ 双射. 逆映射为 $f:[-1,1]\to[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}],\ x\mapsto -arcsinx-\pi$.(注意标准的反正弦函数 $arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 是 $sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ 的逆映射,其定义域与题目中的不同.所以考虑把 f 分解为 $g:[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ x\mapsto -x-\pi$ 与 $h:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1], x\mapsto sinx$ 的复合再求逆映射.这里选取的 g 满足 $sin(g(x))=sinx$.) ▶

练习 1.1.2. 对复合映射 $f=g\circ h$,证明或举出反例.

1. g,h 都是满射, 则 f 也是满射.

◀ 正确. 设 $g\circ g'=id$, $h\circ h'=id$. 则 $f\circ(h'\circ g')=g\circ h\circ h'\circ g'=g\circ id\circ g'=g\circ g'=id$. 故 f 是满射. ▶

2. g,h 都是单射, 则 f 也是单射.

◀ 正确. 设 $g'\circ g=id$, $h'\circ h=id$. 则 $(h'\circ g')\circ f=h'\circ g'\circ g\circ h=h'\circ id\circ h=h'\circ h=id$. 故 f 是单射. ▶

3. h 不是满射,则 f 可能是满射.

◀ 例: $h:\{0\}\to\{0,1\}$, $0\mapsto 0$. $g:\{0,1\}\to\{0\}$, $0,1\mapsto 0$. 我们有 $f=id_{\{0\}}$. ▶

4. g 不是满射,则 f 可能是满射.

◀ 错误. 若 f 满, 则存在 f' 使得 $f\circ f'=id$, 从而有 $g\circ h\circ f'=id$, 故 g 也满, 矛盾. 任举一例使得 g 不是满射即可. ▶

5. g 不是单射,则 f 可能是单射.

◀ 例: $h:\{0\}\to\{0,1\}$, $0\mapsto 0$. $g:\{0,1\}\to\{0\}$, $0,1\mapsto 0$. 我们有 $f=id_{\{0\}}$. ▶

6. h 不是单射,则 f 可能是单射.

◀ 错误. 若 f 单, 则存在 f' 使得 $f'\circ f=id$, 从而有 $f'\circ g\circ h=id$, 故 h 也单, 矛盾. 任举一例使得 h 不是单射即可. ▶

7. g,h 都不是双射, 则 f 可能是双射.

◀ 例: $h:\{0\}\to\{0,1\}$, $0\mapsto 0$. $g:\{0,1\}\to\{0\}$, $0,1\mapsto 0$. 我们有 $f=id_{\{0\}}$. ▶

思考其中真命题的逆否命题的含义.

练习 1.1.3. 1. 在不改变对应法则和定义域的前提下, $\mathbb{R}$ 上的变换 $f(x)=x^2+2x+3$, 把陪域换成哪个集合, 得到的映射是满射?

◀ $[2,\infty)$. ▶

2. 证明映射 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ 是单射.

◀ 若 $f(x)=f(y)$, 由 $f(x)=x, f(y)=y$, 有 $x=y$. ▶

练习 1.1.4. 下列 $\mathbb{R}$ 上的变换,哪些满足交换律 $f\circ g=g\circ f$?

1. $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$.

◀ 不满足. ▶

2. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.

◀ 满足. ▶

3. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$.

◀ 不满足. ▶

4. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x + 2$.

◀ 满足. ▶

5. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x + 1$.

◀ 不满足. ▶

6. $f(x) = sinx$, $g(x) = cosx$.

◀ 不满足. ▶

练习 1.1.5. 对 $\mathbb{R}$ 上的变换 $f(x) = 2x + 1$ 和 $g(x) = ax + b$,求实数 a, b,使得 $f \circ g = g \circ f$.

◀ $(f \circ g)(x) = 2(ax + b) + 1$, $(g \circ f)(x) = a(2x + 1) + b$. 解得当且仅当 $a = b + 1$ 时原式成立. ▶

练习 1.1.6. 在化简函数 $arccos \circ sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [0, \pi]$ 的下列步骤中,分别利用了映射的哪些性质?

1. 如果 $y = (arccos \circ sin)(x)$,则 $cosy = (cos \circ (arccos \circ sin))(x)$.

◀ 映射的复合. ▶

2. $cos \circ (arccos \circ sin) = (cos \circ arccos) \circ sin$.

◀ 结合律. ▶

3. $(cos \circ arccos) \circ sin = id_{[0,1]} \circ sin$.

◀ 如果 $f = g$,那么 $f \circ h = g \circ h$. ▶

4. $id_{[0,1]} \circ sin = sin$.

◀ 单位. ▶

综上得 $siny = cosz$,由此推断化简结果.

练习 1.1.7. 用数学归纳法证明,任取有限个映射 $f_1. \cdots f_n$,如果对 $1 \le i \le n-1$, f_{i+1} 的定义域都包含 f_i 的陪域,则复合映射 $f_n \circ \cdots \circ f_1$ 不依赖于映射两两复合次序的选择.

◀ 我们想要证明无论怎样选择复合次序, $f_n \circ \cdots \circ f_1$ 总是等于 $f_n \circ (f_{n-1} \circ (\cdots \circ f_2) \circ f_1)) \cdots)$. 我们需要两个引理.

引理 1. $(f_n \circ (f_{n-1} \circ (\cdots \circ f_2)) \cdots) \circ f_1 = f_n \circ (f_{n-1} \circ (\cdots \circ f_2) \circ f_1)) \cdots)$.

◀ 对 n 归纳. $n = 3$ 时即为结合律,证明: $(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(x) = f_3((f_2 \circ f_1)(x)) = f_3(f_2(f_1(x))) = (f_3 \circ f_2)(f_1(x)) = ((f_3 \circ f_2) \circ f_1)(x)$,故 $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1)$. (注意这里只用了映射的复合的定义. 另证: 设 $f_1 : x_1 \mapsto x_2, f_2 : x_2 \mapsto x_3, f_3 : x_3 \mapsto x_4$,则 $f_2 \circ f_1 : x_1 \mapsto x_3, f_3 \circ (f_2 \circ f_1) : x_1 \mapsto x_4, f_3 \circ f_2 : x_2 \mapsto x_4, (f_3 \circ f_2) \circ f_1 : x_1 \mapsto x_4$.)

之后使用结合律归纳. ▶

引理 2. $(f_n \circ (f_{n-1} \circ (\cdots \circ f_{k+1})) \cdots) \circ (f_k \circ (f_{k-1} \circ (\cdots \circ f_1)) \cdots) = f_n \circ (f_{n-1} \circ (\cdots \circ f_1) \cdots)$.

◀ 使用引理 1 对 k 归纳. ▶

现在使用归纳法来证明定理. $n = 1$ 时是平凡的. 设 $n \le k$ 时定理成立. $n = k + 1$ 时,任给 $f_n \circ \cdots \circ f_1$ 的一种复合顺序,设最后一次复合为 $(f_n \circ \cdots \circ f_{i+1}) \circ (f_i \circ \cdots \circ f_1)$. 由归纳假设这等于 $(f_n \circ (f_{n-1} \circ (\cdots \circ f_{i+1})) \cdots) \circ (f_i \circ (f_{i-1} \circ (\cdots \circ f_1)) \cdots)$. 又由引理 2,这等于 $f_n \circ (f_{n-1} \circ (\cdots \circ f_1) \cdots)$. ▶

练习 1.1.8. 证明,任意映射 f 都存在分解 $f = g \circ h$,其中 h 是满射, g 是单射.

◀ 设 $f: X \to Y$. 考虑 f 的像集 $Y' = \{b \in Y |$ 存在 $a \in X,\ f(a) = b\}$. 我们有自然的映射 $h: X \to Y'$, $a \mapsto f(a)$ 和子集的嵌入 $g: Y' \to Y$. 易见 $f = g \circ h$, 且 h 是满射, g 是单射. ▶

练习 1.1.9. 证明命题 1.1.2: 对映射 $f: X \to Y$, 有

1. f 是单射当且仅当存在另一个映射 $g: Y \to X$, 使得 $g \circ f = id_X$;

◀ ⇒: 定义 g 如下. 对任意的 $b \in Y$, 若存在某个 $a \in X$ 使得 $f(a) = b$, 则定义 $g(b) = a$, 否则任意选取某个 $a \in X$ 并定义 $g(b) = a$. 容易验证 g 是良定的且 $g \circ f = id_X$.

⇐: 若 $f(a) = f(b)$, 则 $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, 即 $a = b$. 故 f 单. ▶

2. f 是满射当且仅当存在另一个映射 $g': Y \to X$, 使得 $f \circ g' = id_Y$;

◀ ⇒: 定义 g' 如下. 对任意的 $b \in Y$, 存在某个 $a \in X$ 使得 $f(a) = b$. 定义 $g'(b) = a$. 容易验证 g' 是良定的且 $f \circ g' = id_Y$.

⇐: 对任意的 $b \in Y$, $b = id_Y(b) = f \circ g'(b)$. 故 f 满. ▶

3. f 是双射当且仅当 f 可逆, 即存在另一个映射 $g: Y \to X$, 使得 $f \circ g = id_Y, g \circ f = id_X$.

◀ ⇒: 由上, 存在映射 $g, g': Y \to X$, 使得 $g \circ f = id_X$, $f \circ g' = id_Y$. 故 $g = g \circ id_Y = g \circ f \circ g' = id_X \circ g' = g'$ 即为 f 的逆.

⇐: 由上, f 单且满. ▶

1.2. 基本概念.

练习 1.2.1. 如图 1.2.6 所示, 钟表表盘上对应整点有 12 个向量.

1. 计算 12 个向量之和.

◀ 零向量. ▶

2. 不计 2 点方向向量, 计算其他 11 个向量之和.

◀ 2 点方向向量的负向量 (或 8 点方向向量). ▶

3. 假设这 12 个向量的起点从表盘中心移到 6 点, 则 12 点对应向量变为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. 计算此时 12 个向量之和.

◀ $\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.2.2. 如果平面上的向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 共线, 那么 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ 是否共线?

◀ 是的. 题目中的两个条件都等价于 $ad - bc = 0$. ▶

练习 1.2.3. 证明命题 1.2.5 : 向量加法和数乘满足的八条运算法则.

◀ 自行验证. 用到的无非是数的加法和数乘对应的运算法则. ▶

练习 1.2.4. 1. 如果只用加法交换律, 不用加法结合律, 那么 $(a + b) + c$ 有多少种与之相等的表达式?

◀ (包括 $(a + b) + c$ 自身有)4 种. $(a + b) + c, (b + a) + c, c + (a + b), c + (b + a)$. ▶

2. 如果只用加法结合律, 不用加法交换律, 那么 $((a + b) + c) + d$ 有多少种与之相等的表达式?

◀ (包括 $(a+b)+c$ 自身有)5 种. $((a+b)+c)+d, (a+(b+c))+d, a+((b+c)+d), a+(b+(c+d)), (a+b)+(c+d)$. ▶

练习 1.2.5. 判断下列映射是否是线性映射.

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$.

◀ 不是. ▶

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$.

◀ 是. ▶

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 0.$

◀ 是. ▶

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 1.$

◀ 不是. ▶

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2.$

◀ 不是. ▶

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 2^{ln\,x}.$

◀ 不是. ▶

7. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+y\\y-x\\2x\end{bmatrix}.$

◀ 是. ▶

8. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+1\\y-x\\2x\end{bmatrix}.$

◀ 不是. ▶

练习 1.2.6. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是线性映射, 证明存在实数 k, 使得 $f(x)=kx$.

◀ 取 $k=f(1)$. $f(x)=xf(1)=kx$.(注意: 对一个一般的映射 f, 不能设 f 形如某个多项式或其他初等函数. 我们能够使用的只有 $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$.) ▶

练习 1.2.7. 设映射 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}g(x,y,z)\\h(x,y,z)\end{bmatrix}$, 其中 $g,h:\mathbb{R}^3\to$ ▶. 证明 f 是线性映射当且仅当 g,h 都是线性映射.

◀ f 是线性映射 $\Leftrightarrow$ 对向量 $X,Y\in\mathbb{R}^3$ 和数 a,b 满足 $f(aX+bY)=af(X)+bf(Y)\Leftrightarrow g(aX+bY)=ag(X)+bg(Y), h(aX+bY)=ah(X)+bh(Y)\Leftrightarrow g,h$ 是线性映射. ▶

练习 1.2.8. 设 $x_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, x_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, x_3=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, b_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, b_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, b_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, 是否存在线性映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, 满足 $f(x_i)=b_i,\ i=1,2,3$?

◀ 不存在. 由 $f(x_i)=b_i,\ i=1,2$ 知 $f(x_3)=f(-x_1+x_2)=-f(x_1)+f(x_2)=-b_1+b_2\neq b_3$, 矛盾. ▶

练习 1.2.9. 判断下列映射是否是线性映射.

1. 给定 $a\in\mathbb{R}^m,\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m,\ f(k)=ka.$

◀ 是. ▶

2. 给定实数 $k,\ f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m,\ f(a)=ka.$

◀ 是. ▶

3. $f:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^m,\ f(\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\\a_{m+1}\end{bmatrix})=a_{m+1}\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}.$

◀ 不是. ▶

练习 1.2.10. 给定三维向量 $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, 定义:

1. 二者点积为 $a\cdot b:=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.
2. 二者叉积为 $a\times b:=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$.

那么给定 $a\in\mathbb{R}^m$, 映射 $f:\mathbb{R}^3\to R, b\to a\cdot b$ 和 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, b\to a\times b$ 是否是线性映射?

◀ 是. ▶

练习 1.2.11. 给定平面上任意面积为 1 的三角形, 经过下列变换之后, 其面积是否确定? 如果是, 面积多少?(不需严谨证明, 猜测答案即可.)

1. 旋转变换.

◀ 面积为 1. ▶

2. 反射变换.

◀ 面积为 1. ▶

3. 对 x_2 投影的投影变换.

◀ 面积为 0. ▶

4. x_1 方向拉伸 3 倍, x_2 方向不变的伸缩变换.

◀ 面积为 3. ▶

5. 把 x_1 方向的 3 倍加到 x_2 方向上, 保持 x_2 方向不变的错切变换.

◀ 面积为 1. ▶

练习 1.2.12. 设 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 $f(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}-y+1\\x+2\end{bmatrix}$.

1. 证明 f 不是线性变换.

◀ $f(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. ▶

2. 构造分解 $f=g\circ h$, 其中 g 是 $\mathbb{R}^2$ 上的平移变换, h 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换. (这种平移与线性变换的复合称为仿射变换. 注意, 平移变换并不是线性变换.)

◀ $h:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$, $g:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+1\\y+2\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.2.13. 设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(a+b)=f(a)+f(b)$, f 是否是线性映射?(需要微积分知识)

◀ 是的. 易见对 $k\in\mathbb{Z}$ 有 $f(ka)=kf(a)$. 以 $b=\frac{a}{k}$ 代入知 $f(ka)=kf(a)$ 对 $k\in\mathbb{Q}$ 成立. 由 f 连续, 这对 $k\in\mathbb{R}$ 也对. ▶

1.3. 线性映射的表示矩阵.

练习 1.3.1. 将下列向量 b 写成矩阵和向量乘积的形式.

(提示: 将一个 m 行 1 列的列向量写成某个 $m\times k$ 阶矩阵与某个 k 行 1 列的列向量之积.)

1. $b=2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

◀ $b=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$. ▶

2. $b=5\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$.

◀ $b=\begin{bmatrix}1&5\\2&4\\3&3\\4&2\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$. ▶

3. $b=\begin{bmatrix}2b+a+c\\c-b\\a+b+c\\a+b\end{bmatrix}$, 其中 a,b,c 为常数.

◀ $b=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$. ▶

4. $b=f(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix})$, 其中 $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ 是线性变换, 满足 $f(e_k)=ke_{6-k}$, $k=1,\cdots,5$.

◀ $b=\begin{bmatrix}0&0&0&0&5\\0&0&0&4&0\\0&0&3&0&0\\0&2&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$. ▶

5. 假设如果某天下雨, 则第二天下雨概率为 0.8; 如果当天不下雨, 则第二天下雨概率为 0.3. 已知当天有一半的概率会下雨, 令 $b\in\mathbb{R}^2$, 其两个分量分别是明天下雨和不下雨的概率.

◀ $b=\begin{bmatrix}0.8&0.3\\0.2&0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.2. 判断下列矩阵和向量的乘积是否良定义. 在可以计算时, 先将其写成列向量的线性组合, 再进行计算.

1. $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix}1\\4\\4\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

◀ 不是. ▶

3. $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix}1\\4\\9\end{bmatrix}$. ▶

5. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\5\\7\end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix}1\\4\\9\\16\end{bmatrix}$. ▶

6. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. ▶

7. $\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. ▶

8. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\\7 & 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

9. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$. ▶

10. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◀ 是的. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.3. 设 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$, $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. 对任意自然数 i, 令 $u_{i+1} = Au_i$, $v_{i+1} = Av_i$.

1. 对 $i = 1, 2, 3, 4$, 计算 u_i, v_i.

◀ $u_i = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$v_i = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 2.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.05 \\ 1.95 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.225 \\ 1.775 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.3125 \\ 1.6875 \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, 3, 4$. ▶

2. 猜测 $\lim_{i\to\infty} u_i$, $\lim_{i\to\infty} v_i$.

◀ $\lim_{i\to\infty} u_i = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$, $\lim_{i\to\infty} v_i = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1.6 \end{bmatrix}$. ▶

3. 任取初始向量 w_0, 猜测极限 $\lim_{i\to\infty} w_i$, 不同初始向量得到的极限在同一条直线上吗?

◀ 设 $w_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, 则极限 $\lim_{i\to\infty} w_i = \begin{bmatrix} 0.6(a+b) \\ 0.4(a+b) \end{bmatrix}$. 在. ▶

练习 1.3.4. 设线性变换 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. 令 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 将 y_1, y_2, y_3 分别用 x_1, x_2, x_3 表示出来.

◀ $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1 + x_2$, $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$. ▶

2. 将 x_1, x_2, x_3 分别用 y_1, y_2, y_3 表示出来.

◀ $x_1 = y_1$, $x_2 = -y_1 + y_2$, $x_3 = -y_2 + y_3$. ▶

3. 找到矩阵 B, 使得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

◀ $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$. ▶

4. 设 g 是由矩阵 B 决定的线性变换, 证明 f,g 互为逆变换.

◀ 我们需要验证 fg 和 gf 均为单位映射. 这等价于验证 AB 与 BA 均为单位阵. 沿用前面的记号, 我们有 $AB\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}, BA\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, 故 AB 与 BA 均为单位阵. ▶

练习 1.3.5. 计算下列线性映射 f 的表示矩阵.

1. f 为 xy 平面向 y 轴的投影变换.

◀ $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$. ▶

2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot x$, 其中点积的定义见练习 1.2.10.

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$. ▶

3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x)=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times x$, 其中叉积的定义见练习 1.2.10.

◀ $\begin{bmatrix}0&-3&2\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$. ▶

4. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $f(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4+x_2\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$. ▶

5. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $f(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_4\\x_2\\x_3\\x_1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$. ▶

6. $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $f(\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_m\\ \vdots\\ x_1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} & & & & 1\\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.6. 考虑桥墩载荷问题,其中 l_1,l_2,d 作为常数.

1. 映射 f 输入 F_1,F_2 得到输出 f_1,f_2,写出 f 的矩阵.

2. 以桥梁的左端为支点,顺时针方向的力矩为 $df_2-l_1F_1-l_2F_2$.以桥梁的右端为支点或者以桥梁的中点作为支点,都能类似地得到顺时针方向的力矩.假设映射 f 的输入为 F_1,F_2,f_1,f_2,而输出为桥梁的左端,中点和右端的顺时针方向的力矩,写出 f 的矩阵.

练习 1.3.7. 设 xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 f 是下列三个变换的复合:先绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$;然后进行一个保持 y 坐标不变,同时将 y 坐标的两倍加到 x 坐标上的错切;最后再沿着直线 $x+y=0$ 反射.

1. 证明 f 是线性变换.

◀ 这是由于三个变换均为线性变换,且线性变换的复合也是线性变换. ▶

2. 计算 $f(e_1)$ 和 $f(e_2)$.

◀ $f(e_1)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{bmatrix}$, $f(e_2)=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}-\sqrt{3}\end{bmatrix}$. ▶

3. 写出 f 的矩阵.

◀ $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{1}{2}-\sqrt{3}\end{bmatrix}$. ▶

4. 计算 $f(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix})$.

◀ $\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\\ -1-\frac{11\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.8. 1. 幻方矩阵是指元素分别是 $1,\cdots,9$ 的 3 阶矩阵 M,且每行,每列以及两条对角线上的三个元素之和都相同.求 $M\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$ 的所有可能值.

◀ $\begin{bmatrix}15\\15\\15\end{bmatrix}$. ▶

2. 数独矩阵是指 9 阶矩阵 M,从上到下,从左到右依次分成九个 3×3 的子矩阵,且每行,每列以及九个子矩阵中的元素都是 $1,\cdots,9$.求 $M\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$ 的所有可能值.

◀ $\begin{bmatrix}45\\ \vdots\\ 45\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.3.9. 证明, 如果 n 阶方阵 A 对任意 n 维列向量 x, 都有 $Ax=0$, 则 $A=0$.

◀ 设 $A=\begin{bmatrix}A_1 & \cdots & A_n\end{bmatrix}$, A_i 是列向量. 我们有 $A_i=Ae_i=0$, 故 $A=0$. 这里 $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ 是第 i 个元素为 1, 其他元素为 0 的列向量. ▶

练习 1.3.10. 证明, 如果 n 阶方阵 A 对任意 n 维列向量 x, 都存在依赖于 x 的常数 $c(x)$, 满足 $Ax=c(x)x$, 则存在常数 c, 使得 $A=cI_n$.

◀ 设 $A=\begin{bmatrix}A_1 & \cdots & A_n\end{bmatrix}$. 我们有 $A_i=Ae_i=c(e_i)e_i$. 取 $x=\begin{bmatrix}1\\ \cdots\\ 1\end{bmatrix}$, 由 $Ax=\begin{bmatrix}c(e_1)\\ \cdots\\ c(e_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c(x)\\ \cdots\\ c(x)\end{bmatrix}$ 知诸 $c(e_i)$ 均相等且等于 $c(x)$. 故 $A=c(x)I_n$. ▶

1.4. 线性方程组.

练习 1.4.1. 把下列矩阵化为行简化阶梯形, 并回答问题. (注意: 主列 (主元所在的列) 的定义首次出现于 105 页. 参见书后的名词索引.)

1. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第一列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&5&5&5\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$. 是. ▶

2. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第二列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&7&8&9&10\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&7&8&9&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\0&7&8&9&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&7&8&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&6&6&6&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&0&1&2&3\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&-1&-2\\0&0&1&2&3\end{bmatrix}$. 是. ▶

3. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第三列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\0&0&8&9&10\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&8&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&8&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{7}{8}&-\frac{7}{4}\\0&1&0&-\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}\\0&0&8&9&10\end{bmatrix}$. 是. ▶

4. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第四列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\0&0&0&9&10\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&0&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&\frac{11}{9}\\0&1&2&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&9&10\end{bmatrix}$. 是. ▶

5. $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 化简后第五列是否为主列?

◀ $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\\10&10&10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\0&0&0&0&10\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&10\end{bmatrix}$. 是. ▶

练习 1.4.2. 下列方程组有解时, 找到所有解; 方程组无解时, 对方程组做初等行变换, 得到矛盾表达式 $0=1$.

1. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$. 解为 $x=1, y=1$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5\\0&-2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5\\0&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$. 通解为 $x=z, y=-2z$. ▶

3. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2\\2&2\\4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2\\1&1\\0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$. 解为 $x=0, y=0$. ▶

4. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&0\\5&6&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&-1\\4&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$. 无解. ▶

5. $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$. 通解为 $x=-z, y=-z$. ▶

6. $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$. 解为 $x=0, y=0$. ▶

7. $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&0\\1&5&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$. 无解. ▶

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. 解为 $x = 1, y = 2, z = 3, t = 4$. ▶

9. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & -20 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. 解为 $x = -1, y = 2, z = -3, t = 4$. ▶

练习 1.4.3. 将下列问题首先化成 $Ax = b$ 的形式, 然后求所有解.

1. 对 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$, 如何将其第三列写成前两列的线性组合?

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$.

计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 解为 $x = -1, y = 2$. ▶

2. 对 $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 如何将其第四列写成前两列的线性组合?

◀ $\begin{bmatrix}1&2\\6&7\\11&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\9\\14\end{bmatrix}$.

计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}1&2&4\\6&7&9\\11&12&14\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&4\\5&5&5\\10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&4\\1&1&1\\10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}$. 解为 $x=-2,y=3$. ▶

3. 对 $\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$, 如何将其第五列写成前两列的线性组合?

◀ $\begin{bmatrix}1&2\\6&7\\11&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\10\\15\end{bmatrix}$.

计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}1&2&5\\6&7&10\\11&12&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&5\\5&5&5\\10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&5\\1&1&1\\10&10&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}$. 解为 $x=-3,y=4$. ▶

练习 1.4.4. 求证: 齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=0,\end{cases}$ 有非零解当且仅当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$.

◀ $\Rightarrow$: 设有非零解 x_1,x_2. 若 x_1,x_2 至少有一个为 0, 代入原方程易知 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$. x_1,x_2 均不为 0 时, 将 $a_{11}=-\frac{a_{12}x_2}{x_1}$ 代入 $a_{21}x_1+a_{22}x_2=0$, 得到 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$.

$\Leftarrow$: 若 $a_{11}=a_{12}=0$, 易得 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=0,\end{cases}$ 的一组非零解. 若 $a_{11},a_{12}\neq 0, x=-a_{12},y=a_{11}$ 为 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=0,\end{cases}$ 的一组非零解. ▶

练习 1.4.5. 求满足下列条件的常数 b,c.

1. 方程组 $\begin{bmatrix}1&2\\3&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$ 无解.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}1&2&3\\3&b&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&b-6&-2\end{bmatrix}$. 方程组无解当且仅当 $b-6=0$, 或 $b=6$. ▶

2. 方程组 $\begin{bmatrix}3&2\\6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\c\end{bmatrix}$ 无解.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}3&2&10\\6&4&c\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&2&10\\0&0&c-20\end{bmatrix}$. 方程组无解当且仅当 $c-20\neq 0$, 或 $c\neq 20$. ▶

3. 方程组 $\begin{bmatrix}2&5&1\\4&b&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$ 无解.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}2&5&1&0\\4&b&1&2\\0&1&-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&6&0&3\\4&b+1&0&5\\0&1&-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&6&0&3\\0&b-11&0&-1\\0&1&-1&3\end{bmatrix}$. 方程组无解当且仅当 $b=11$. ▶

4. 方程组 $\begin{bmatrix}b&3\\3&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix}$ 有无穷组解.

◀ $b\neq\pm3$ 时, 作高斯消元知方程组有唯一解. $b=3$ 时, 无解. $b\neq3$ 时, 有无穷组解. ▶

5. 方程组 $\begin{bmatrix}2&b\\4&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\c\end{bmatrix}$ 有无穷组解.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix}2&b&16\\4&8&c\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&b-4&16-\frac{c}{2}\\4&8&c\end{bmatrix}$. 方程组有无穷组解当且仅当 $b-4=0$ 且 $16-\frac{c}{2}=0$, 或等价于 $b=4$ 且 $c=32$. ▶

6. 方程组 $\begin{bmatrix}1&b&0\\1&-2&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ 有非零解.

◀ $\begin{bmatrix}1&b&0\\1&-2&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&b&0\\1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&b+1&0\\1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$, 方程组有非零解当且仅当 $b+1=0$, 或 $b=-1$. ▶

7. 方程组 $\begin{bmatrix}b&2&3\\b&b&-4\\b&b&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ 有非零解 (求三个不同的 b).

◀ $b=0$ 时易见有非零解. $b\neq0$ 时, $\begin{bmatrix}b&2&3\\b&b&-4\\b&b&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}b&2&3\\b&b&-4\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}b-3&-1&0\\b+4&b+4&0\\1&1&1\end{bmatrix}$. 故 $b=-4$ 时有非零解. 再设 $b\neq0,-4$, $\begin{bmatrix}b-3&-1&0\\b+4&b+4&0\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}b-3&-1&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}b-2&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$. 故 $b=2$ 时有非零解. ▶

练习 1.4.6. 设齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0,\\ ax_1-x_3=0,\\ -x_1+3x_3=0,\end{cases}$ 有非零解, 求 a 的值, 并求出所有的解.

◀ $\begin{bmatrix}2&1&1\\a&0&-1\\-1&0&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&1\\a+2&1&0\\-7&-3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&1\\a-\frac{1}{3}&0&0\\-7&-3&0\end{bmatrix}$. 故 $a=\frac{1}{3}$. 此时 $\begin{bmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-7&-3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-7&-3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&7\\0&0&0\end{bmatrix}$. 通解为 $x_1=3x_3, x_2=-7x_3$. ▶

练习 1.4.7. 在下列方程组中, 讨论在 p 取不同值时方程组是否有解, 并在有解时, 求出所有的解.

$$\begin{cases}px_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+px_2+x_3=p,\\ x_1+x_2+px_3=p^2,\end{cases}$$

◀ $p=1$ 时有无穷组解, 通解为 $x_1=-x_2-x_3+1$. 下设 $p\neq 1$. 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1\\ 1 & p & 1 & p\\ 1 & 1 & p & p^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1\\ 1-p & p-1 & 0 & p-1\\ 1-p^2 & 1-p & 0 & p^2-p\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 1+p & 1 & 0 & -p\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} p+1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 2+p & 0 & 0 & -p-1\end{bmatrix}$. $p=-2$ 时, 无解. $p\neq 1,-2$ 时, 解为 $x_1=-\frac{p+1}{p+2}, x_2=\frac{1}{p+2}, x_3=\frac{p^2+2p+1}{p+2}$. ▶

练习 1.4.8. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$. 求证:

1. $Ax=b$ 有解当且仅当 $b_1+b_2+b_3=0$.

◀ 计算增广矩阵. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1\\ -1 & 0 & 1 & b_2\\ 0 & -1 & -1 & b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1\\ 0 & 1 & 1 & b_1+b_2\\ 0 & -1 & -1 & b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1\\ 0 & 1 & 1 & b_1+b_2\\ 0 & 0 & 0 & b_1+b_2+b_3\end{bmatrix}$. 故 $Ax=b$ 有解当且仅当最后一行为 0, 即 $b_1+b_2+b_3=0$. ▶

2. 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集是 $\{kx_1|k\in\mathbb{R}\}$, $x_1=\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. 故通解为 $x_1=x_3, x_2=-x_3$. ▶

3. 当 $Ax=b$ 有解时, 设 x_0 是一个解, 则解集是 $\{x_0+kx_1|k\in\mathbb{R}\}$.

◀ $Ax=b\Leftrightarrow A(x-x_0)=0\Leftrightarrow x-x_0\in\{kx_1|k\in\mathbb{R}\}\Leftrightarrow x\in\{x_0+kx_1|k\in\mathbb{R}\}$. ▶

练习 1.4.9. 求三阶方阵 A, 使得线性方程组 $AX=\begin{bmatrix} 2\\ 4\\ 2\end{bmatrix}$ 的解集是 $\{\begin{bmatrix} 2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}|c,d\in\mathbb{R}\}$.

◀ $AX=0$ 的解集为 $\{c\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}|c,d\in\mathbb{R}\}$, 故 A 的行是 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ 的倍数. 由特解 $\begin{bmatrix} 2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ 解出 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.4.10. 1. 构造三阶方阵, 其元素各不相同, 且行简化阶梯形有且只有一个主元.

◀ 例: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 10 & 20 & 30\\ 100 & 200 & 300\end{bmatrix}$ ▶

2. 构造 100 阶方阵 A, 所有元素非零, 且行简化阶梯形恰有 99 个主元. 试描述 $Ax=0$ 的解集.

◀ 例: $A=\begin{bmatrix}1&1&1&&\cdots&1&1\\1&2&1&&\cdots&1&1\\1&1&2&\ddots&&\vdots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\vdots&&\ddots&2&1&1\\1&1&\cdots&&1&2&1\\1&1&\cdots&&1&1&1\end{bmatrix}$. A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1&&&&&&1\\&1&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&1&\\&&&&&&0\end{bmatrix}$. $Ax=0$ 的解集为 $\{k\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{bmatrix}|k\in\mathbb{R}\}$. ▶

练习 1.4.11. 给定线性方程组 $Ax=0$, 其中 A 是 100 阶方阵. 假设 Gauss 消元法计算到最后一行得到 $0=0$.

1. 消元法是在计算 A 的行的线性组合. 因此 A 的 100 行的某个线性组合是?

   ◀ $\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$. ▶

2. 计算出 $0=0$ 说明方程组有无穷多解. 因此 A 的 100 列的某个线性组合是?

   ◀ $\begin{bmatrix}0\\0\\\cdots\\0\\0\end{bmatrix}$. ▶

3. 试说明 Gauss 消元法计算出的零行的个数和自由变量的个数相等.

   ◀ 二者均等于行数减去主元个数. ▶

练习 1.4.12. 仅用从上往下的倍加变换 (即把上面的行的若干倍加到下面的行上), 将下列矩阵化为阶梯形, 并分析其主元的规律.

1. $\begin{bmatrix}1&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}$.

   ◀ $\begin{bmatrix}1&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}2&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}2&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&&\\&\frac{3}{2}&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&&\\&\frac{3}{2}&1&\\&&\frac{4}{3}&1\\&&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&&\\&\frac{3}{2}&1&\\&&\frac{4}{3}&1\\&&&\frac{5}{4}\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}2&-1&&\\-1&2&-1&\\&-1&2&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}2&-1&&\\-1&2&-1&\\&-1&2&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&&\\&\frac{3}{2}&-1&\\&-1&2&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&&\\&\frac{3}{2}&-1&\\&&\frac{4}{3}&-1\\&&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&&\\&\frac{3}{2}&-1&\\&&\frac{4}{3}&-1\\&&&\frac{5}{4}\end{bmatrix}$. ▶

这些矩阵都是三对角矩阵,即除对角元素及与其相邻的元素外其余元素都是零的方阵.

练习 1.4.13. 求解 $\begin{cases}x_1+x_n=0,\\x_1+x_2=0,\\x_2+x_3=0,\\\cdots\\x_{n-1}+x_n=0.\end{cases}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&1\\1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&&&1\\0&1&&-1\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&&&1\\&1&&-1\\&&\ddots&\vdots\\&&1&(-1)^n\\&&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&&&1\\&1&&-1\\&&\ddots&\vdots\\&&1&(-1)^n\\&&&1-(-1)^n\end{bmatrix}$.

n 为奇数时只有 0 解. n 为偶数时有解 $x_i=(-1)^i x_n$. ▶

练习 1.4.14. 证明用倍加变换与倍乘变换可以实现对换变换.

◀ 考虑两个向量 a,b. $(a,b)\to(a,a+b)\to(-b,a+b)\to(b,a+b)\to(b,a)$. ▶

练习 1.4.15. 证明定理 1.4.8 第二部分.

定理 1.4.8：任意矩阵都可以用对换行变换和倍加行变换化为阶梯形;任意矩阵都可以用初等行变换化为行简化阶梯形.

◀ 首先用倍乘变换将主元全部变为 1,再用倍加变换用主元消去与其处于同一列的所有元素. ▶

练习 1.4.16. 练习 1.3.8 中的数独矩阵经历哪些行变换或列变换后还是数独矩阵?

◀ 仅置换行 (列) 顺序,且保持九个子矩阵的元素不变的行 (列) 变换. ▶

练习 1.4.17 (初等列变换在方程组上的含义)**.** 考虑方程组 $\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$. 进行下列换元,写出 x',y' 满足的方程组. 对比原方程组,其系数矩阵做了哪种初等变换?

1. $x'=y, y'=x$.

◀ $\begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$. ▶

2. $x'=2x, y'=y$.

◀ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$. ▶

3. $x'=x, y'=x+y$.

◀ $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$. ▶

4. $x'=1+x, y'=y$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 10\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.4.18 (方程,法向量与超平面)**.** 给定原点 O,则空间中的点 P 与向量 OP 一一对应.空间中所有点构成的集合称为点空间,上述一一对应是点空间到线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的双射.注意,点空间与线性空间并不相同.特别地,空间中的点 P 也可用向量 $OP\in\mathbb{R}^3$ 表示.

两个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量垂直当且仅当其内积为零 (练习 1.2.10).与空间中某个平面垂直的非零向量称为该平面的法向量.考虑空间中以非零向量 $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ 为法向量的平面.

1. 给定 $p,q\in\mathbb{R}^3$,分别对应该平面上的两个点,证明,$\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}p=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}q$.

◀ 由于 $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ 为平面的法向量,故 $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ 垂直于 $p-q$. ▶

2. 设该平面经过对应于 $p\in\mathbb{R}^3$ 的点,令 $d=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}p$,证明,该平面是方程 $ax+by+cz=d$ 的解集.

◀ 对平面上的点 q,由上问 q 也在 $ax+by+cz=d$ 的解集中.反之,对满足方程 $ax+by+cz=d$ 的 q, $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ 垂直于 $p-q$,这说明 q 在平面上. ▶

3. 设 $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 和 $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ 的解集平面平行,试分析两个方程系数的关系.

◀ (这里使用的平行的定义是法向量平行,不单独考虑平面重合的情况.这种定义的好处是平行是等价关系. 考试时请不要这样写.) 两平面平行当且仅当向量 $\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{bmatrix}$ 平行.由于是非零向量,故这等价于存在 $k\in\mathbb{R}$,使得 $a_1=ka_2, b_1=kb_2, c+1=kc_2$. ▶

4. 设 $\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{bmatrix}$ 为两个不共线的非零向量,则 $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 和 $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ 的解集平面不平行,因此必相交于一条直线 l,对方程做倍加变换,证明,$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 与 $(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)z=d_1+d_2$ 的解集平面的交集还是直线 l.(从几何上看,倍加变换将一个平面沿相交直线旋转,因此不改变解集的交集.)

◀ 这是由于方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ (a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)z=d_1+d_2\end{cases}$ 与 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases}$ 同解. ▶

一个 m 元线性方程的解集是对应于 $\mathbb{R}^m$ 的点空间中的一个超平面,因此求解线性方程组等价于求若干超平面的交集.

练习 1.4.19. 对下列问题,将其化成 $Ax=b$,并找到所有解.

1. 考虑例 1.2.1 中的桥墩载荷问题. 假设重物的重力分别为 $F_1=2, F_2=3$, 放置的位置 l_1, l_2 为未知变量, 桥梁长度为 5, 如果两个桥墩的载荷分别为 $f_1=3, f_2=2$, 求所有可能的 $\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$.

2. 笼中有若干鸡兔, 每只鸡有一个头两条腿两只翅膀, 每只兔有一个头四条腿两只翅膀, 笼中现有 4 个头, 12 条腿, 8 只翅膀, 求鸡兔数目.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$. 解得 $x=2, y=2$. ▶

3. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 满足 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$, 且 A 第一列的元素之和为 2, 求所有可能的 A.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$. 解得 $a=d-6, b=-d+10, c=-d+8$. ▶

4. 求平面上直线 $y=2x+3, y=-x+5$ 的交点.

◀ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$. 解得 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{13}{3}$. ▶

5. 空间中有三个平面, 分别经过点 $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, 具有法向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, 求这三个平面的交点 (练习 1.4.18).

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 无解. ▶

6. 空间中有一条经过原点的直线, 并且与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 垂直, 求所有直线上的点.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 解得 $x=z, y=-z$. ▶

7. 空间中有一个平面经过点 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所有与该平面垂直的向量.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$. 解得 $x = z, y = z$. ▶

练习 1.4.20. 如果线性方程组 $Ax = b$ 和 $Cx = b$,对任意 b 都有相同的解集,那么 $A = C$ 成立么?

◀ 设 $Ae_i = a_i$ 为 A 的第 i 行. 由题意知 $Ce_i = a_i$, 即 C 的第 i 行与 A 相同. ▶

练习 1.4.21. 设线性映射 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 当 $n > m$ 时, F 是否可能是单射? 当 $n < m$ 时, F 是否可能是满射?

◀ $n > m$ 时, $Fx = 0$ 必有非零解, 故 F 不单.

$n < m$ 时, 设 $a_i \in \mathbb{R}^n$ 满足 $Fa_i = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, 这里唯一的非零元在第 i 行. 由 $n < m$ 可以解出一组不全为零的常数 k_i 使得 $k_1a_1 + \cdots + k_ma_m = 0$. 故在 $\mathbb{R}^m$ 中有 $\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{bmatrix} = k_1F(a_1) + \cdots + k_mF(a_m) = F(k_1a_1 + \cdots + k_ma_m) = 0$, 矛盾. ▶

1.5. **线性映射的运算.**

练习 1.5.1. 设 A, B, C 分别是 $3 \times 5, 5 \times 3, 3 \times 1$ 矩阵, 则 $BA, AB, BC^T, A(B + C)$ 中哪些定义良好?

◀ BA, AB. ▶

练习 1.5.2. 设 $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}$, 求 $AB, BA, AB - BA$.

◀ $\begin{bmatrix}3 & -3 & 3\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 0 & 3\\ -3 & -1 & -1\end{bmatrix}$,

练习 1.5.3. 计算.

1. $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}17 & -6\\ 35 & -12\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}17 & -6\\ 35 & -12\end{bmatrix}^5$.

◀ $\begin{bmatrix}3197 & -1266\\ 7385 & -2922\end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\-2&-5&4\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}4&3&-3\\2&3&-2\\4&4&-3\end{bmatrix}$. ▶

5. $\begin{bmatrix}8&6&-6\\4&6&-4\\8&8&6\end{bmatrix}^6$.

◀ $\begin{bmatrix}12160&12096&-12096\\8064&8128&-8064\\16128&16128&-16064\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.4. 考虑下列 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换.

1. 设 $R_\theta(x)=R_\theta x$,其中 $R_\theta=\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}$. 求证:

(a) R_θ 是绕原点逆时针旋转角度 θ 的变换.

◀ 考虑单位向量 $\begin{bmatrix}cos\alpha\\sin\alpha\end{bmatrix}$,这是单位向量 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 逆时针旋转角度 α 得到的向量. R_θ 将其变为 $\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos\alpha\\sin\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\theta cos\alpha-sin\theta sin\alpha\\sin\theta sin\alpha+cos\theta cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos(\theta+\alpha)\\sin(\theta+\alpha)\end{bmatrix}$,这是单位向量 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 逆时针旋转角度 $\theta+\alpha$ 得到的向量. ▶

(b) 分析当 θ 取何值时,存在常数 λ 和非零向量 x,满足 $R_\theta x=\lambda x$.

◀ 考虑方程 $\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$,或等价于 $\begin{bmatrix}cos\theta-\lambda&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$. 注意到我们可以对非零向量 x 做一个旋转将其变为 $\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}$,其中 a 为 x 的长度,且旋转变换两两交换,故不妨设 $x=\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}$. 代入原式得 $cos\theta=\lambda, sin\theta=0$. 故 $\theta=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. ▶

(c) 计算 R_θ^n, $n>0$.

◀ 归纳证得 $R_\theta^n=\begin{bmatrix}cosn\theta&-sinn\theta\\sinn\theta&cosn\theta\end{bmatrix}$. ▶

2. 设 $H_\theta(x)=H_\theta x$,其中 $H_\theta=\begin{bmatrix}cos2\theta&sin2\theta\\sin2\theta&-cos2\theta\end{bmatrix}$,而 $v=\begin{bmatrix}cos\theta\\sin\theta\end{bmatrix}$, $w=\begin{bmatrix}sin\theta\\-cos\theta\end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的向量. 求证:

(a) $v^Tw=0, v^Tv=w^Tw=1; H_\theta v=v, H_\theta w=-w$. 试分析变换 H_θ 的几何意义.

◀ 直接做矩阵乘法验证. H_θ 的几何意义是关于 v 所在直线的反射 (参见例 1.2.10,2). ▶

(b) $H_\theta^2=I_2, H_\theta=I_2-2ww^T$.

◀ 直接验证. (第二条的另一种证法: 因为 v 和 w 张成了平面,所以 H 在 v 和 w 上的作用唯一确定了线性变换 H. 验证 $H_\theta=I_2-2ww^T$ 满足 $H_\theta v=v, H_\theta w=-w$ 即可.) ▶

(c) $R_{-\theta}H_\phi R_\theta=H_{\phi-\theta}, H_\phi R_\theta H_\phi=R_{-\theta}$, 并分析其几何意义.

◀ 直接验证. 几何意义是明显的 (画一下一个单位向量在这些映射下的像就知道了),这里不再赘述. ▶

3. 设 $S(x)=Sx$,其中 $S=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$. 设 λ 是常数,求证: $Sx=\lambda x$ 有非零解当且仅当 $\lambda=1$,并求出所有的非零解; 计算 $S^k, k>0$.

◀ $Sx=\lambda x$ 等价于 $\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}x=0$. 易见 $\lambda=1$ 时有解, $\lambda\neq 1$ 时无非零解.

$S^k=(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix})^k=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^k+k\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{k-1}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\cdots=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}$. (这里可以用二项式定理展开的原因是两项交换.) ▶

练习 1.5.5. 计算.

1. $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^2$.

◀ $\begin{bmatrix}4&&&\\&4&&\\&&4&\\&&&4\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^k$.

◀ 由于 $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^2=4I_4$, 故 $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^{2m}=4^mI_4$, $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^{2m+1}=4^mI_4\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}=4^m\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.6. 设 E_{ij} 是 (i,j) 元为 1, 其余元素为 0 的矩阵, 而 n 阶方阵 $J_n=\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&0&1\\&&&0\end{bmatrix}$.

1. 计算 $A=I_2+J_2, B=I_2+J_2^T, C=J_2-J_2^T$.

◀ $A=\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&\\1&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}&1\\-1&\end{bmatrix}$. ▶

2. 先计算 AB 再计算 $(AB)C$, 然后先计算 BC 再计算 $A(BC)$.

◀ $AB=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$, $(AB)C=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&1\end{bmatrix}$, $BC=\begin{bmatrix}&1\\-1&1\end{bmatrix}$, $A(BC)=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&1\end{bmatrix}$. ▶

3. 先计算 AB, AC 再计算 $AB+AC$, 然后先计算 $B+C$ 再计算 $A(B+C)$.

◀ $AB=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$, $AC=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&\end{bmatrix}$, $AB+AC=\begin{bmatrix}1&2\\&1\end{bmatrix}$, $B+C=\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$, $A(B+C)=\begin{bmatrix}1&2\\&1\end{bmatrix}$. ▶

4. 计算 $AB+BC, B(A+C), (A+C)B$, 三者是否相等?

◀ $AB+BC=\begin{bmatrix}2&2\\&2\end{bmatrix}$, $B(A+C)=\begin{bmatrix}1&2\\&3\end{bmatrix}$, $(A+C)B=\begin{bmatrix}3&2\\&1\end{bmatrix}$. 不相等. ▶

5. 计算 $(A+B)^2, A^2+2AB+B^2, A^2+AB+BA+B^2$, 三者是否相等?

◀ $(A+B)^2=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$, $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2=\begin{bmatrix}6&4\\4&4\end{bmatrix}$, $A^2+AB+BA+B^2=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$. 仅成立 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$. ▶

6. 计算 $(AB)^2$ 与 A^2B^2, 二者是否相等?

◀ $(AB)^2=\begin{bmatrix}5&3\\3&2\end{bmatrix}$, $A^2B^2=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$. 不相等. ▶

7. 计算 $E_{13}-e_1e_3^T$, $e_1e_1^T+\cdots+e_4e_4^T$, $E_{13}E_{32}$, $E_{32}E_{13}$, 其中 $e_i\in\mathbb{R}^4, E_{ij}$ 是 4 阶方阵.

◀ 0, I_4, E_{12}, 0. ▶

8. 计算 $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}5&6\end{bmatrix}$. ▶

9. 计算 $J_4\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $J_4^T\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $J_4^2\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, J_4^4.

◀ $\begin{bmatrix}2\\3\\4\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\4\\0\\0\end{bmatrix}$, 0. ▶

10. 计算 J_n^k, 其中 k 是正整数.

◀ $k<n$ 时 $J_n^k=\begin{bmatrix}&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\\&&&&\\&&&&\end{bmatrix}$, 其中第 i 行的 1 出现的位置是 $(i,i+k)$. $k\geqslant n$ 时为 0. ▶

11. 设 $P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix}$, 计算 PJ_4+J_4P, $(P+I_4)(2P+3I_4)-(2P+3I_4)(P+I_4)$.

◀ $\begin{bmatrix}1&3&4&5\\1&4&8&13\\1&5&13&26\\0&1&4&10\end{bmatrix}$, 0(直接展开即可). ▶

12. 设 $R=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$, $T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&1\end{bmatrix}$, 计算 SRT, SR^TT.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.7. 设 2 阶矩阵 B 的 $(1,2)$ 元增加 1,对下列矩阵讨论该矩阵的哪行哪列一定不变,并举例说明所有其他行列确实可以变化.

1. $A+B$.

◀ 第 2 行和第 1 列不变. ▶

2. AB.

◀ 第 1 列不变. ▶

3. BA.

◀ 第 2 行不变. ▶

4. B^2.

◀ 都可以变. ▶

练习 1.5.8. 判断对错.

1. 如果 B 的第一列等于第三列,则 AB 的第一列等于第三列.

◀ 正确. 设 B 的列为 $x_1,\cdots,x_m$,则 $B=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}$. B 的第一列等于第三列当且仅当 $B=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}1 & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}$. 左乘 A 不改变这个性质. ▶

2. 如果 B 的第一列等于第三列,则 BA 的第一列等于第三列.

◀ 错误. ▶

3. 如果 A 的第一行等于第三行,则 ABC 的第一行等于第三行.

◀ 正确. 将第 1 问的解答取转置即得. ▶

练习 1.5.9. 求所有满足条件的矩阵 B.

1. 对任意 3 阶方阵 $A, BA=4A$.

◀ 取 $A=I_3$,知 $B=4I_3$. ▶

2. 对任意 3 阶方阵 $A, BA=4B$.

◀ 取 $A=I_3$,知 $B=0$. ▶

3. 对任意 3 阶方阵 A, BA 的每一行都是 A 的第一行.

◀ 题目条件即 $BA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}A$. 取 $A=I_3$,知 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$. ▶

4. 对任意 3 阶方阵 A, AB 的每一行的每一个元素都是 A 的对应行的平均值.

◀ 条件即 $AB = A\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. 取 $A = I_3$, 知 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. ▶

5. $B^2 \neq 0$, $B^3 = 0$.

◀ $B = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}P$, 其中 P 是某个可逆矩阵. ▶

6. $B\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}B$.

◀ 条件等价于 $B\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}B$. 设 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 代入解得 B 形如 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.10. 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. p, q, r 取何值时, 有 $AB = BA$?

◀ 只需考虑 $\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix}$. 解得 $q = 0, p = r$. ▶

2. z 取何值时, 有 $BC = CB$?

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价于 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 或 $z\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 这恒成立. ▶

3. p, q, r, z 取何值时, 有 $ABC = CAB$?

◀ 与上面类似地, 提出 C 的因子 z, 原式等价于 $z\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 解得 $z = 0$ 或 $q = 0, p = r$. ▶

练习 1.5.11. 证明:

1. 设 n 维向量 x 的每个分量都是 1, 则 n 阶方阵 A 的各行元素之和为 1 当且仅当 $Ax = x$.

◀ 直接计算. ▶

2. 若 n 阶方阵 A, B 的各行元素之和均为 1, 则 AB 的各行元素之和也均为 1.

◀ 由第 1 题, $ABx = Ax = x$. ▶

3. 若 n 阶方阵 A, B 的各列元素之和均为 1, 则 AB 的各行元素之列也均为 1.

◀ 第 2 题的结果取转置即得. ▶

练习 1.5.12. 证明命题 1.5.17.

命题 1.5.17. 矩阵的乘法还满足如下运算法则:

1. 对加法的分配律: $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$.

2. 对数乘的交换律: $k(AB) = (kA)B = k(AB)$.

◀ 可以用以下方法证明: (1) 利用线性映射对应的性质直接得到矩阵对应的性质; (2) 直接验证两边矩阵对应位置的元素相同; (3) 将矩阵乘法写成向量乘法的形式. ▶

练习 1.5.13. 证明上三角矩阵对加法, 数乘, 乘法封闭, 即: 设 U_1, U_2 是 n 阶上三角矩阵, k 是实数, 则 $U_1 + U_2, kU_1, U_1U_2$ 都是上三角矩阵. 此外, U_1U_2 的对角元素是 U_1, U_2 对应的对角元素的乘积.

◀ 直接写出矩阵元素进行验证.▶

练习 1.5.14. 设 A 是 n 阶上三角矩阵,求证:$A^n=0$ 当且仅当 A 是严格上三角矩阵.

◀ ⇐:若 $A=\begin{bmatrix}0 & * & * & \cdots & * & * \\ & 0 & * & \cdots & * & * \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & * & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & 0\end{bmatrix}$ 为严格上三角矩阵,则

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & * & \cdots & & * \\ & 0 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & * \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0\end{bmatrix},A^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0\end{bmatrix},\cdots$$

归纳可得 A^k 的前 k 列 (或后 k 行) 均为 0,故 $A^n=0$.

⇒:若 A 不是严格上三角矩阵,则 A 的对角线上存在某个元素 $a_{ii}\neq 0$. A^k 对应位置的元素为 $a_{ii}^k\neq 0$. ▶

练习 1.5.15. 证明,如果 n 阶方阵 A 满足 $A^n=0$,则 $(I^n-A)(I_n+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=I_n$.

◀ 展开上式左边得到 I_n-A^n. ▶

练习 1.5.16. 对 n 阶方阵 A,考虑集合 $Com(A)=\{n \text{ 阶方阵 } B|AB=BA\}$.

1. 求证: $Com(A)$ 是所有 n 阶方阵的集合当且仅当 A 是数量阵 kI_n.

◀ ⇐:所有 n 阶方阵均与数量阵交换.

⇒:设 $A=(a_{ij})$ 以及 E_{ij} 为 (i,j) 处为 1,其他元素为 0 的矩阵. 由于任意 n 阶方阵均为诸 E_{ij} 的线性组合,故我们应该对所有的 i,j 考虑方程 $AE_{ij}=E_{ij}A$. $i=j$ 时,$AE_{ii}=E_{ii}A$. 对 $k\neq i$ 考虑 $AE_{ii}=E_{ii}A$ 两边的 (i,k) 位置的元素,我们得到 $a_{ik}=0$. $i\neq j$ 时,考虑 $AE_{ij}=E_{ij}A$ 两边的 (i,j) 位置的元素,我们得到 $a_{ii}=a_{jj}$. 故 A 是数量阵. ▶

2. 设 $A=diag(d_i)$,d_i 互不相同,求 $Com(A)$.

◀ 设 $B=(b_{ij})$ 满足 $AB=BA$,我们得到 $d_ib_{ij}=b_{ij}d_j$. 故 $i\neq j$ 时 $b_{ij}=0$,即 B 为对角阵. ▶

3. 求证:任取 $B,C\in Com(A)$,都有 I_n, $kB+lC$, $BC\in Com(A)$.

◀ 直接验证满足定义.▶

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,求证:$J_3=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\in Com(A)$,而且

$$Com(A)=\{k_1I_3+k_2J_3+k_3J_3^2|k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}\}.$$

◀ 与 A 交换等价于与 $A-I=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 交换. 设 $B=(b_{ij})$ 满足 $AB=BA$,或等价于 $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}B=B\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,我们得到 $b_{11}=b_{22}=b_{33}$, $b_{12}=b_{23}$, $b_{21}=b_{31}=b_{32}=0$,故 $B=b_{11}I_3+b_{12}J_3+b_{13}J_3^2$. 且形如这样的 B 均与 A 交换. ▶

练习 1.5.17. 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$,求 A^k,其中 k 是正整数.

◀ 我们给出 $k\geqslant 2$ 时的情况. $A^k=(\lambda I_3+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix})^k=\lambda^kI_3+k\lambda^{k-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{(k-1)k}{2}\lambda^{k-2}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{(k-1)k}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.5.18. 设 A 是 n 阶方阵,求证: $A+A^T$, AA^T, A^TA 都是对称矩阵,而 $A-A^T$ 是反对称矩阵.

◀ $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$, $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$, $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$, $(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$. ▶

练习 1.5.19. 求证:

1. 任意方阵 A 都唯一地表为 $A=B+C$,其中 B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵.

◀ 假设我们已经得到了这样的分解 $A=B+C$,转置得 $A^T=B^T-C^T$. 联立两式解得 $B=\frac{1}{2}(A+A^T)$, $C=\frac{1}{2}(A-A^T)$. 检验知 B,C 满足题目中的条件. 由于已经显式给出了 B,C 的表达式,故它们是唯一的. ▶

2. n 阶方阵 A 是反对称矩阵当且仅当对任意 n 维列向量 x,都有 $x^TAx=0$.

◀ $\Rightarrow$: 1 阶矩阵 x^TAx 等于自身的转置. $x^TAx=(x^TAx)^T=-x^TAx$,故 $x^TAx=0$.

$\Leftarrow$: 设 $A=(a_{ij})$. 取 x 为第 i 个分量为 1,其余位置为 0 的列向量, $x^TAx=0$ 给出 $a_{ii}=0$. 取 y 为第 i,j 个分量为 1,其余位置为 0 的列向量, $y^TAy=0$ 给出 $a_{ij}+a_{ji}=0$. ▶

3. 设 A,B 是 n 阶对称矩阵,则 $A=B$ 当且仅当对任意 n 维列向量 x,均有 $x^TAx=x^TBx$.

◀ $\Rightarrow$: 显然.

$\Leftarrow$: 设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. 取 x 为第 i 个分量为 1,其余位置为 0 的列向量, $x^TAx=x^TBx$ 给出 $a_{ii}=b_{ii}$. 取 y 为第 i,j 个分量为 1,其余位置为 0 的列向量, $y^TAy=y^TBy$ 给出 $a_{ij}=b_{ij}$. ▶

练习 1.5.20. 设 A,B 是同阶对称矩阵. 求证: AB 是对称矩阵当且仅当 $AB=BA$.

◀ $\Rightarrow$: $AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$.

$\Leftarrow$: $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$. ▶

练习 1.5.21. 设 A 是实对称矩阵,如果 $A^2=0$,求证: $A=0$.

◀ 对任意的列向量 x, $0=x^TA^2x=x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)$,故列向量 $Ax=0$. 这说明 $A=0$. ▶

练习 1.5.22 (矩阵的迹)**.** m 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的对角元素的和 $\sum_{i=1}^m a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{mm}$ 称为它的迹,记作 $trace(A)$. 验证下列性质.

1. 对任意同阶方阵 $A, B, trace(A+B) = trace(A) + trace(B)$.

◀ 验证每个分量相等. ▶

2. 对任意方阵 A 与实数 $k, trace(kA) = ktrace(A)$.

◀ 验证每个分量相等. ▶

3. 对 m 阶单位矩阵 $I_m, trace(I_m) = m$.

◀ 直接计算. ▶

4. 对任意方阵 $A, trace(A) = trace(A^T)$.

◀ 直接计算. ▶

5. 设 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, 则 $trace(A^T B) = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$. 如果 A 是 m 阶方阵呢?

◀ 直接计算. ▶

6. 设 v, w 是 m 维向量, 则 $trace(v^T w) = trace(wv^T)$.

◀ 直接计算. ▶

7. 设 A, B 分别是 $m \times n, n \times m$ 阶矩阵, 则 $trace(AB) = trace(BA)$.

◀ 直接写出矩阵的元素进行计算.

这里额外给出一种证法 (初学者不妨暂时略过): 设 V, W 为 n, m 维线性空间, $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V, U)$. 我们需要证明 $\mathrm{trace}(fg) = \mathrm{trace}(gf)$. 只需注意到有以下的交换图表

$$
\begin{tikzcd}
 & V \otimes U^* \otimes U \otimes V^* \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{ev}_U \otimes \mathrm{id}_{V^*}"] & & U \otimes V^* \otimes V \otimes U^* \arrow[dd, "\mathrm{id}_U \otimes \mathrm{ev}_V \otimes \mathrm{id}_{U^*}"] \\
\mathrm{Hom}(U,V) \otimes \mathrm{Hom}(V,U) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dd, "\circ"] & & \mathrm{Hom}(V,U) \otimes \mathrm{Hom}(U,V) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dd, "\circ"] & \\
 & V \otimes V^* \arrow[dd, "\mathrm{ev}_{V^*}"] & & U \otimes U^* \arrow[dd, "\mathrm{ev}_{U^*}"] \\
\mathrm{End}(V) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dd, "\mathrm{tr}"] & & \mathrm{End}(U) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dd, "\mathrm{tr}"] & \\
 & \mathbb{F} \arrow[rr, equal] & & \mathbb{F} \\
\mathbb{F} \arrow[ur, equal] \arrow[rr, equal] & & \mathbb{F} \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}
$$

图中两个横向的自然同构由张量积的交换约束给出. ▶

8. 设 A, B 是任意 m 阶方阵, 则 $AB - BA \neq I_m$.

◀ 两边取迹即得. ▶

练习 1.5.23 (差分矩阵与求导). 在微积分中, $f(x)$ 的导数 $f'(x) \approx \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$. 对数列 a_n 的相邻两项做减法, 可以看作是一种离散导数 $\frac{a_{n+1}-a_n}{1}$. 两者具有某种共性, 令 D 为 100 阶向前差分矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 而 $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{100} \end{bmatrix}$. 求证:

1. 若 a_k 是关于 k 的 3 次多项式,则除第 1 个分量外,Da 的第 k 个分量是关于 k 的 2 次多项式.

◀ 设 $a_k = ak^3 +$ 低次项. $(Da)_k = a_k - a_{k-1} = ak^3 - a(k-1)^3 +$ 低次项 $=$ 低次项. 这里的低次项意指多项式中次数不大于 2 的部分. ▶

2. 若 $a_k = e^k$,则除第 1 个分量外,$\frac{e}{e-1}Da$ 的第 k 个分量是 e^k.

◀ $(\frac{e}{e-1}Da)_k = \frac{e}{e-1}(e^k - e^{k-1}) = e^k$. ▶

练习 1.5.24. 如图 1.5.2 的电路包含 5 个顶点, 电势分别为 v_i, $1 \le i \le 5$, $i.j$ 两点之间电阻为 $r_{ij} \neq 0$, 从顶点 i 到 j 的电流为 c_{ij} 又记 $c_{ii} = 0$. 令电势矩阵为 $V = diag(v_1, \cdots, v_5)$, 电流矩阵为 $C = [c_{ij}]$, 电导矩阵为 $R = [\frac{1}{r_{ij}}]$. 求证 $C = VR - RV$.

练习 1.5.25. 图 1.5.3 中的图含有四个顶点 v_1, v_2, v_3, v_4, 顶点之间有边连接. 对称矩阵 A 称为该图的邻接矩阵: 如果 v_i, v_j 之间有边, 则 A 的 i, j 元是 1; 如果 v_i, v_j 之间无边, 则 A 的 i, j 元是 0.

1. 从 v_3 出发, 三次通过连线, 最后回到 v_3 的方法有几种?

◀ 0 种. ▶

2. 求矩阵 A^3 的 $(3, 3)$ 元.

◀ 0. ▶

3. 分析 A^n 的 i, j 元的意义.

◀ 从 i 出发, n 次通过连线到达 j 的方法的个数. ▶

练习 1.5.26. 设 v^T, w^T 是 k 维行向量, A 是 $m \times n$ 矩阵.

1. 如果矩阵乘积 v^TA 良定义, 需要满足什么条件?

◀ v^T 的列数等于 A 的行数, 即 $k = m$. ▶

2. 对任意常数 $a, b \in \mathbb{R}$, 证明 $(av^T + bw^T)A = av^TA + bw^TA$.

◀ 分配律. ▶

3. 把 $2a^T + 3b^T + 4c^T$ 写成一个行向量和矩阵的乘积. 提示: 类比于矩阵乘列向量是矩阵的列的线性组合, 行向量乘矩阵是矩阵的行的线性组合.

◀ $2a^T + 3b^T + 4c^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^T \\ b^T \\ c^T \end{bmatrix}$. ▶

4. 求矩阵 A, 使得 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$.

◀ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. 注意矩阵 A 的 (i, j) 元即为 x_iy_j 的系数. ▶

5. 求矩阵 A, 使得 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4xy + 5y^2$. 这样的 A 是否唯一?

◀ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 5 \end{bmatrix}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 是和为 4 的常数. 不唯一. ▶

6. 求 3 阶对称矩阵 A, 使得对任意非零 3 维向量 v, 都有 $v^TAv > 0$.

◀ 例: $A = I_3$. ▶

练习 1.5.27. 由标准坐标向量 e_i 定义 $E_{ij} = e_ie_j^T$, 它是 (i, j) 元为 1, 其他元素为 0 的矩阵.

1. 证明, 当 $j \neq k$ 时, $E_{ij}E_{kl} = 0$.

◀ 直接验证. ▶

2. 对任意矩阵 A,求向量 v 使得 Av 是 A 的第 i 列.

◀ $v = e_i$. ▶

3. 对任意矩阵 A,求向量 v 使得 $v^T A$ 是 A 的第 i 行.

◀ $v = e_i$. ▶

4. 对任意矩阵 A,证明,$e_i^T A e_j$ 为 A 的 (i,j) 元.

◀ 直接验证. ▶

5. 对 $e_k \in \mathbb{R}^m$ 证明,$\sum_{k=1}^m e_k e_k^T = I_m$.

◀ 直接验证. ▶

6. (阅读) 计算矩阵乘积 AB 的 (i,j) 元的另一种方法: 设 A 有 m 列,B 有 m 行,则

$$e_i^T ABe_j = e_i^T AI_m Be_j = ei^T A(\sum_{k=1}^m e_k e_k^T)Be_j = \sum_{k=1}^m (e_i^T Ae_k)(e_k^T Be_j).$$

练习 1.5.28. 注意 m 维列向量是 $m \times 1$ 矩阵.

1. 对 $v \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{R}, kv, vk$ 是否可以看作矩阵乘法?

◀ 是的. 分别可以看作以 m 阶标量阵 kI_m 左乘和以 1 阶标量阵 kI_1 右乘. ▶

2. 对 $v \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n, vw^T$ 是否良定义? 如果是,乘积有几行几列?

◀ 是的. 这是一个 $m \times 1$ 矩阵与一个 $1 \times n$ 矩阵的乘法. 乘积是 $m \times n$ 矩阵. ▶

3. 求 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 的第 $(12,7)$ 元.

◀48. ▶

4. 求 v, w, 使得 $vw^T = \begin{bmatrix} (-1)^{(i+j)} \end{bmatrix}$.

◀ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^m \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix}$. ▶

5. 求 v, w, 使得 $vw^T = \begin{bmatrix} \frac{i}{j} \end{bmatrix}$.

◀ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}$. ▶

6. 令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix}$. 证明 $AB = \sum_{i=1}^n a_i b_i^T$.

◀ 使用分块矩阵的乘法. 当然也可以直接验证. ▶

1.6. 可逆矩阵.

练习 1.6.1. 计算下列矩阵乘法.

1. $\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -3\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \end{bmatrix}^k$, k 是正整数.

◀ $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \end{bmatrix}^{4m} = I_4$, $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \end{bmatrix}^{4m+1} = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \end{bmatrix}^{4m+2} = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ 1 & & & \end{bmatrix}^{4m+3} = \begin{bmatrix} & & & 1\\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

◀ $(ad-bc)I_4$. ▶

5. $\begin{bmatrix}1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ -1 & & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 3 & 3 & 1 & \\ & 4 & 6 & 4 & 1\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.2. 求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}^{-1} = (I_3 + \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1\\ & & \end{bmatrix})^{-1} = I_3 - \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1\\ & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1\\ & & \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ & 1 & -1\\ & & 1\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$ ▶

4. $\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.3. 设 $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & a & -2\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 不可逆, 求 A.

◀ 用第 3 行消掉前两行的第 3 个元素, $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & a & -2\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 13 & a-4 & 0\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$. $a = 4$. ▶

练习 1.6.4. 设 $A = \begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$, 解方程 $Ax = e_i, i = 1, 2, 3$, 并求 A^{-1}.

◀ $Ax = e_1$ 的解为 $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$, $Ax = e_2$ 的解为 $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{18} \end{bmatrix}$, $Ax = e_3$ 的解为 $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \\ -\frac{1}{9} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.5. 对 $\begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}$ 做初等行变换,求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

◀ $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & 1 & \\ & & -1 & 2 & & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & 1 & \\ & & -1 & 2 & & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & -1 & 2 & & & & 1 \end{bmatrix} \to$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \to$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & \frac{4}{3} & & \frac{8}{15} & \frac{16}{15} & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \frac{1}{2} & 1 & & \\ & & 1 & & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 1 & & & \\ & 1 & & & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ & & 1 & & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \to$$
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ & 1 & & & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ & & 1 & & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ & & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$. 逆矩阵是 $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$. ▶

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & & \\ 3 & 4 & & \\ & & 1 & 2 \\ & & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ & & -2 & 1 \\ & & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. ▶

6. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. ▶

7. $\begin{bmatrix} 1 & -a & & \\ & 1 & -b & \\ & & 1 & -c \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & a & ab & abc \\ & 1 & b & bc \\ & & 1 & c \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

8. $\begin{bmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$.

$$◀\begin{bmatrix} 1 & -a & (-a)^2 & \cdots & (-a)^{n-1} \\ & 1 & -a & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & (-a)^2 \\ & & & \ddots & -a \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. ▶$$

练习 1.6.6. 说明 $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 可逆,并计算其逆.

◀ 对角占优矩阵可逆. 其逆矩阵为 $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.7. 求 $A = \begin{bmatrix} & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \\ a_n & & & \end{bmatrix}$ 的逆矩阵,其中 $a_i \neq 0$.

$$◀\begin{bmatrix} & & & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1}^{-1} & \end{bmatrix}. ▶$$

练习 1.6.8. 求下列矩阵方程的解: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

◀$X = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -9 & -6 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$. (回忆对可逆方阵 A 和矩阵 B,对 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 做行变换把 A 变成 I,这时 B 就被变成了 $A^{-1}B$,因为这个行变换对应左乘矩阵 A^{-1}: $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \to A^{-1}\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}A & A^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \end{bmatrix}$. 同样地,对 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 做列变换把 A 变成 I,这时 B 就被变成了 BA^{-1},这个列变换对应右乘矩阵 A^{-1}: $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} AA^{-1} \\ BA^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ BA^{-1} \end{bmatrix}$. 本题为前一种情况.) ▶

练习 1.6.9. 证明二阶方阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 可逆当且仅当 $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. 此时, $A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

◀$\Leftarrow$: 直接验证 $A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ 是 A 的左右逆.

$\Rightarrow$: 前面已证. ▶

练习 1.6.10. 证明,有一列元素 (或一行元素) 全为零的方阵不可逆.

◀ 仅证明第一个论述. 矩阵 A 的第 k 列元素全为零等价于 $Ae_k=0$. 左乘不改变这个性质, 故 A 没有左逆元. ▶

练习 1.6.11. 证明, 对角元素全非零的上三角矩阵 U 可逆, 其逆矩阵 U^{-1} 也是上三角矩阵, 且 U^{-1} 的对角元素是 U 的对角元素的倒数.

◀ 对 $\begin{bmatrix} U & I_n \end{bmatrix}$ 做初等行变换即得: $\begin{bmatrix} u_{11} & * & \cdots & * & 1 & & & \\ & u_{22} & \ddots & \vdots & & 1 & & \\ & & \ddots & * & & & \ddots & \\ & & & u_{nn} & & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} u_{11} & & & & 1 & * & \cdots & * \\ & u_{22} & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & & & \ddots & * \\ & & & u_{nn} & & & & 1 \end{bmatrix} \to$ $\begin{bmatrix} 1 & & & & u_{11}^{-1} & * & \cdots & * \\ & 1 & & & & u_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & & & \ddots & * \\ & & & 1 & & & & u_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$.

(另解: 设 $U = \begin{bmatrix} u_{11} & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$, 其中 $*$ 表示我们不具体写出的元素, 对角元 $u_{ii} \neq 0, i = 1, \cdots, n$. 我们有 $U = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. 注意到矩阵 $N = \begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ 满足 $N^n = 0$, 故 $I = I+N^n = (I+N)(I-N+N^2+\cdots+(-N)^{n-1})$, 从而 $I+N$ 可逆且 $(I+N)^{-1} = I-N+N^2+\cdots+(-N)^{n-1}$ 也是对角元为 1 的上三角阵. 故 $U = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}(I+N)$ 可逆且 $U^{-1} = (I+N)^{-1} \begin{bmatrix} u_{11}^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$ 的对角线元素是 U 的对角线元素的倒数.) ▶

练习 1.6.12. 是否只有方阵才有可能可逆? 设 A 是 $m \times n$ 矩阵.

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, 能否找到 B, C 使得 $AB = I_2, CA = I_3$?

◀ 可以找到 B. 设 $B = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$, 易见 $AB = \begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3 & y_1+2y_2+3y_3 \\ 4x_1+5x_2+6x_3 & 4y_1+5y_2+6y_3 \end{bmatrix} = I_2$ 有无穷多解. 同样地, 设 $C = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$, 易见 $CA = \begin{bmatrix} x_1+4y_1 & 2x_1+5y_1 & 3x_1+6y_1 \\ x_2+4y_2 & 2x_2+5y_2 & 3x_2+6y_2 \\ x_3+4y_3 & 2x_3+5y_3 & 3x_3+6y_3 \end{bmatrix}$ 无解, 故不存在这样的 C. ▶

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{bmatrix}$, 能否找到 B,C 使得 $AB=I_2, CA=I_3$?

◀ 均不能. 方法同上. ▶

3. 设 $CA=I_n$, 证明 $Ax=0$ 只有零解. 此时 m,n 之间有何种关系?

◀ $Ax=0$ 两边左乘 C 知 $CAx=0$, 即 $I_nx=0, x=0$. 解方程知此时有 $m\geq n$. ▶

4. 设 $AB=I_m$, 证明 $A^Tx=0$ 只有零解. 此时 m,n 之间有何种关系?

◀ 上一题的解答取转置即得. 此时有 $m\leq n$. ▶

5. 设 $AB=I_m, CA=I_n$, 证明 $m=n$ 且 $B=C$; 由此可知, 可逆矩阵一定是方阵.

◀ 前两问给出了 $m=n$. 我们有 $B=I_nB=CAB=CI_n=C$. ▶

6. 如果 $m\neq n$, 那么 $\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$ 之间是否存在线性双射?

◀ 由上一问知不存在. ▶

练习 1.6.13. 如果 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=I_n$, 判断 A,B 是否可逆.

◀ 由于齐次线性方程组 $Bx=0$ 只有零解, 故 B 可逆, 从而 A 也可逆. ▶

练习 1.6.14. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.

1. 求上述矩阵对应的初等行, 列变换.

◀ A: 把第 2 行加到第 1 行; 把第 1 列加到第 2 列;
B: 把第 3 行加到第 1 行; 把第 1 列加到第 3 列;
C: 把第 3 行加到第 2 行; 把第 2 列加到第 3 列;
D: 第 1 行乘 2; 第 1 列乘 2;
P: 互换第 2, 3 行; 互换第 2, 3 列. ▶

2. 从行变换的角度看, 是否一定有 $AB=BA$? 如果否, $AB-BA$ 从行变换的角度意味着什么?

◀ 是的. 把第 2 行加到第 1 行和把第 3 行加到第 1 行显然可以交换. ▶

3. 从行变换的角度看, 是否一定有 $AC=CA$? 如果否, $AC-CA$ 从行变换的角度意味着什么?

◀ 否. 把第 3 行加到第 1 行. ▶

4. 从行变换的角度看, 是否一定有 $BC=CB$? 如果否, $BC-CB$ 从行变换的角度意味着什么?

◀ 是的. 把第 3 行加到第 1 行和把第 3 行加到第 2 行显然可以交换. ▶

5. 从行变换的角度看, D 是否和 A,B,C 可交换? 计算 $DAD^{-1}, DBD^{-1}, DCD^{-1}$.

◀ D 与 A,B 不交换, D 与 C 交换. $DAD^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $DBD^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $DCD^{-1}=C$. ▶

6. 从行变换的角度看, P 是否和 A,B,C 可交换? 计算 $PAP^{-1}, PBP^{-1}, PCP^{-1}$.

◀ P 与 A,B,C 都不交换. $PAP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $PBP^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $PCP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$. ▶

7. 对三阶方阵 X, $(AX)B$ 和 $A(XB)$ 对 X 分别做了何种行, 列变换?

◀ 先把第 2 行加到第 1 行, 再把第 1 列加到第 3 列; 先把第 1 列加到第 3 列, 再把第 2 行加到第 1 行. ▶

8. 对任意矩阵 X, 先做初等行变换, 再做初等列变换, 其结果是否等于先做该初等列变换, 再做该初等行变换? 这对应着矩阵乘法的什么性质?

◀ 是的. 结合律. ▶

练习 1.6.15. 设矩阵 A 和 B 左相抵. 求证:

1. 如果 A 的第一列全是零, 则 B 的第一列全是零.

◀ A 的第一列全是零等价于 $A\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质. ▶

2. 如果 A 的所有列都相同, 则 B 的所有列都相同.

◀ A 的所有列都相同等价于 $A\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质. ▶

3. 如果 A 的第一列是第二列与第三列的和, 则 B 的第一列也是第二列与第三列的和.

◀ A 的第一列是第二列与第三列的和等价于 $A\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质. ▶

4. 如果 A 的第一列和第二列不成比例, 则 B 的第一列和第二列也不成比例.

◀ 我们考虑其逆否命题. A 的第一列和第二列成比例等价于存在常数 k_1, k_2 使得 $A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质. ▶

练习 1.6.16. 设有 M_1, M_2, M_3 三个城市, 城市之间有人口迁移. 定义矩阵 A, 其 (i,j) 元 a_{ij} 为人在一年中从 A_j 迁移到 A_i 的概率. 注意, A 的每个元素都在 $0,1$ 之间, 且 A 的每一列的元素之和都是 1.

1. 设今年三个城市的人口分别是 x_1, x_2, x_3, 证明明年它们的预期人口分别是 $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 的三个分量.

◀ 直接验证. ▶

2. 人口迁移满足什么条件时, A 为列对角占优矩阵 (行对角占优矩阵的转置)? 人口迁移满足什么条件时, A 为行对角占优矩阵? 考虑现实生活中的情形, 讨论这些假设是否合理.

◀ 一半以上人口留在原城市; 人口留在本城的概率大于其他城市迁往本城的概率之和. ▶

3. 如果把矩阵对角占优定义中的大于号换成大于等于号, 则称该矩阵为弱对角占优矩阵. 证明 $A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\0 & \frac{1}{3} & 0\\\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 弱对角占优, 且可逆, 并求其逆矩阵.

◀ 显然 A 弱对角占优. $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&1&0\\-1&-1&2\end{bmatrix}$. ▶

4. 对任意 n 阶方阵, 设它有 $n-1$ 行都是对角占优, 仅有 1 行弱对角占优, 该矩阵可逆吗?

◀ 不一定. 例: $\begin{bmatrix}1&\\&0\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.17. 设 A 是 n 阶方阵.

1. 对任意两个多项式 $p(x),q(x)$, 是否一定有 $p(A)q(A)=q(A)p(A)$?

◀ 是的. 直接展开. (由于多项式中只出现矩阵 A, 故乘法交换律成立.) ▶

2. 证明, 所有形如 $\begin{bmatrix}a&b&c\\&a&b\\&&a\end{bmatrix}$ 的矩阵全都彼此交换.

◀ 这是由于每个 $\begin{bmatrix}a&b&c\\&a&b\\&&a\end{bmatrix}=aI_3+b\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\&&\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\&&\end{bmatrix}^2$ 均为 $\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\&&\end{bmatrix}$ 的多项式. ▶

3. 设 $f(x)=p(x)+q(x),g(x)=p(x)q(x)$, 证明, $f(A)=p(A)+q(A),g(A)=p(A)q(A)$.

◀ 只证后者. 设 $g(x)=\sum_{i=1}^{n}g_ix^i$, $p(x)=\sum_{i=1}^{n_1}p_ix^i$, $q(x)=\sum_{i=1}^{n_2}q_ix^i$, 我们有 $g_i=\sum_{1\le i_1\le n_1,1\le i_2\le n_2,i_1+i_2=i}p_{i_1}q_{i_2}$. 为验证 $g(A)=p(A)q(A)$. 将等式右边展开并比较两边 A 各幂次的系数. 建议想要写清楚的同学使用数学归纳法. (回忆我们对多项式 $g(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ 定义 $g(A)=a_nA^n+...+a_1A+a_0I$, 当 $g(x)=p(x)q(x)$ 时, 你需要论证 $g(A)=p(A)q(A)$. 证明的方法是比较两边多项式的系数. 这并不是平凡的, 因为矩阵的运算律与多项式的运算律不完全相同, 矩阵乘法没有交换律. 例如对 $p(x,y)=x$, $q(x,y)=y$, $g(x,y)=p(x,y)q(x,y)$, $h(x,y)=q(x,y)p(x,y)$, 对二元多项式我们有 $g=h$, 但对矩阵 A,B 不一定有 $g(A,B)=h(A,B)$. 这里成立的原因 (大致) 是多项式中只含有 A 时交换律也是成立的.) ▶

4. 求 A 使得 $A+I_n,A-I_n$ 均不为零, 但是 $A^2-I_n=0$.

◀ 例: $\begin{bmatrix}1&\\&-1\end{bmatrix}$. ▶

5. 设 $A^2-I_n=0$, 证明, 任何 n 维向量 v 都存在分解式 $v=x+y$, 满足 $(A-I_n)x=(A+I_n)y=0$.

◀ $v=\frac{A+I_n}{2}v+\frac{-(A-I_n)}{2}v$. ▶

6. 设 $A^3=0$, 证明 $A+I_n$ 与 $A-I_n$ 都可逆, 并求 $p(x),q(x)$ 使得 $p(A),q(A)$ 分别为其逆.

◀ $I_3=A^3+I_3=(A+I)(A^2-A+I_3)$; $-I_3=A^3-I_3=(A-I)(A^2+A+I_3)$. (注意到对任意的 $\lambda\neq 0$, 同样的论证给出 $A-\lambda I_n$ 可逆.) ▶

练习 1.6.18. 证明, 如果 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$, 则 I_n-2A 可逆.

◀ 我们需要用 A 的多项式表示 $(I_n-2A)^{-1}=-\frac{1}{2}(A-\frac{1}{2}I_n)^{-1}$. 这里为了带余除法的简便等价地考虑 A 的首一多项式. 做多项式的带鱼除法, $0=A^2-A=A(A-\frac{1}{2}I_n)-\frac{1}{2}A=(A-\frac{1}{2}I_n)(A-\frac{1}{2}I_n)-\frac{1}{4}I_n$. 这说明 $(A-\frac{1}{2}I_n)^{-1}$ 从而 I_n-2A 可逆并给出其逆. (注意到若矩阵 A 满足多项式方程 $f(A)=0$, 则对满足 $f(\lambda)\neq 0$ 的任意的 λ, 同样的带余除法 (即 $f(A)=g(A)(A-\lambda I_n)+hI_n$) 给出 $A-\lambda I_n$ 可逆, 及其逆 $(=-\frac{1}{h}g(A))$ 作为 A 的次数小于 f 的多项式. 如果 A 是一个上三角阵, 方程 $f(A)=0$ 对 A 的对角元给出了什么限制, 导致 $A-\lambda I_n$ 可逆?) ▶

练习 1.6.19. 如果一个 n 阶方阵从 $(1,n)$ 元到 $(n,1)$ 元的对角线下的所有元素均为零, 则称为西北矩阵. 类似地, 可以定义东南矩阵. 如果 B 是西北矩阵, 那么 B^T,B^2,B^{-1} 是什么矩阵? 西北矩阵和东南矩阵的乘积是什么矩阵?

◀ B^T 是西北矩阵, B^{-1} 是东南矩阵. 西北矩阵和东南矩阵的乘积是东北矩阵. ▶

练习 1.6.20. 1. 求可逆矩阵 A,B, 使得 $A+B$ 不可逆.

◀ 例: $A=I_n, B=-I_n$. ▶

2. 求不可逆矩阵 A,B, 使得 $A+B$ 可逆.

◀ 例: $A=\begin{bmatrix}1&\\&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&\\&1\end{bmatrix}$. ▶

3. 求 3 阶不可逆矩阵 A, 使得对任意 $k>0, A+kI_3$ 都对角占优.

◀ $A=0$. ▶

练习 1.6.21. 求所有三阶矩阵 A, 满足 $A^2=I_3$, 且 A 的每个元素只能是 0 或 1.

◀ $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.22. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$ 是对称矩阵, 通过"对称化简"求其逆矩阵:

1. 将 A 的第一行的二倍从第二行中减去, 第一行的三倍从第三行中减去. 这对应哪个初等矩阵 E_1? E_1^T 对应的列变换是什么? 计算 E_1A 和 $A_1=E_1AE_1^T$.

◀ $E_1=\begin{bmatrix}1&&\\-2&1&\\-3&&1\end{bmatrix}$. $E_1^T=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$ 对应的列变换是将第一列的二倍从第二列中减去, 第一列的三倍从第三列中减去. $E_1A=\begin{bmatrix}1&2&3\\&&-1\\&-1&-3\end{bmatrix}$, $A_1=E_1AE_1^T=\begin{bmatrix}1&&\\&&-1\\&-1&-3\end{bmatrix}$. ▶

2. 将 A_1 的第二行与第三行调换. 这对应哪个初等矩阵 E_2? E_2^T 对应的列变换是什么? 计算 E_2A_1 和 $A_2=E_2A_1E_2^T$.

◀ $E_2=\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}$. $E_2^T=\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}$ 对应的列变换是将第二列与第三列调换. $E_2A_1=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&-3\\&&-1\end{bmatrix}$, $A_2=E_2A_1E_2^T=\begin{bmatrix}1&&\\&-3&-1\\&-1&\end{bmatrix}$. ▶

3. 将 A_2 的第二行的 $\frac{1}{3}$ 倍从第三行中减去. 这对应哪个初等矩阵 E_3? E_3^T 对应的列变换是什么? 计算 E_3A_2 和 $A_3=E_3A_2E_3^T$.

◀ $E_3=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&-\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$, $E_3^T=\begin{bmatrix}1&&\\&1&-\frac{1}{3}\\&&1\end{bmatrix}$ 对应的列变换是将第二列的 $\frac{1}{3}$ 倍从第三列中减去. $E_3A_2=\begin{bmatrix}1&&\\&-3&-1\\&&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, $A_3=E_3A_2E_3^T=\begin{bmatrix}1&&\\&-3&\\&&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$. ▶

4. 综上, $A_3=E_3E_2E_1AE_1^TE_2^TE_3^T$, 由此求 A 的逆.

◀ $A=(E_3E_2E_1)^{-1}A_3(E_3E_2E_1)^{-T}$, 两边取逆得 $A^{-1}=(E_3E_2E_1)^TA_3^{-1}(E_3E_2E_1)=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.6.23. 求证: 对称矩阵的逆矩阵也是对称矩阵; 反对称矩阵的逆矩阵也是反对称矩阵.

◀ 设方阵 A 满足 $A^T=A$, 我们要证明 $(A^{-1})^T=A^{-1}$, 只需验证 $(A^{-1})^T$ 是 A 的左右逆, 即验证 $(A^{-1})^TA=A(A^{-1})^T=I$. 同理, 设方阵 B 满足 $B^T=-B$, 我们只需验证 $(B^{-1})^TB=B(B^{-1})^T=-I$. (如果直接使用 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$ 这个结果, 这道题是很简单的. 但是课本上没有给出 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$ 的证明, 所以你应该知道如何验证. 你应该在使用某个结果前验证之.) ▶

1.7. **分块矩阵.**

练习 1.7.1. 设 A 的行简化阶梯形为 R, 行变换对应的可逆矩阵是 P.

1. 求 $\begin{bmatrix}A&2A\end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形, 以及行变换对应的可逆矩阵.

◀ 由 $PA=R$, $P\begin{bmatrix}A&2A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}PA&2PA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R&2R\end{bmatrix}$. 易见这是行简化阶梯形. 行变换对应的可逆矩阵是 P. ▶

2. 求 $\begin{bmatrix}A\\2A\end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形, 以及行变换对应的可逆矩阵.

◀ $\begin{bmatrix}P&\\&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&\\-2I&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\2A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P&\\&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}$ 为行简化阶梯形. 行变换对应的可逆矩阵是 $\begin{bmatrix}P&\\&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&\\-2I&I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P&\\-2I&I\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.2. 求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix}1&1&&&\\2&1&&&\\&&2&2&3\\&&1&-1&0\\&&-1&2&1\end{bmatrix}$.

◀ 分块求逆. 结果为 $\begin{bmatrix}-1&1&&&\\2&-1&&&\\&&1&-4&-3\\&&1&-5&-3\\&&-1&6&4\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1&&1&\\1&&2&\\&1&&1\\&&&1\end{bmatrix}$.

◀ 将矩阵写成一个准对角阵右乘置换二三列的置换矩阵再求逆. $\begin{bmatrix}2&-1&&\\&&1&-1\\-1&1&&\\&&&1\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.3. 计算下列分块矩阵:

1. $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & I_m \end{bmatrix}^{-1}$.

◀ $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_n & A \end{bmatrix}^{-1}$.

◀ $\begin{bmatrix} -A & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.4. 设分块矩阵 $X = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$,其中 A, B 可逆. 试证 X 可逆, 并求其逆.

◀ $X = \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & \\ & A \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵之积故可逆. $X^{-1} = \begin{bmatrix} B & \\ & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.5. 设分块矩阵 $U = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$,其中 A, B 可逆. 试证 U 可逆, 并求其逆.

◀ $U = \begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}C \\ & I \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵之积故可逆. $U^{-1} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}C \\ & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}C \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ & B^{-1} \end{bmatrix}$. (也可直接设 $U^{-1} = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}$ 并代入计算.) ▶

练习 1.7.6. 设 A_1, A_2 分别为 m, n 阶方阵, 且存在可逆方阵 T_1, T_2, 使得 $T_1^{-1}A_1T_1$ 和 $T_2^{-1}A_2T_2$ 都是对角矩阵. 求证: 存在 $m+n$ 阶可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T$ 是对角矩阵.

◀ 取 $T = \begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix}$. $T^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & \\ & T_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{-1}A_1T_1 & \\ & T_2^{-1}A_2T_2 \end{bmatrix}$ 为对角矩阵. ▶

练习 1.7.7. 1. 任取 $m \times n$ 矩阵 X, 分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, 计算 $\begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} A+XC & B+XD \\ C & D \end{bmatrix}$. ▶

2. 由此判断 $\begin{bmatrix} 1 & & & & c_1 \\ & 1 & & & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a \end{bmatrix}$ 何时可逆, 并在可逆时求其逆.

◀ $$\begin{bmatrix}1&&&&0\\&1&&&0\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&0\\-b_1&-b_2&\cdots&-b_{n-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&c_1\\&1&&&c_2\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&c_{n-1}\\b_1&b_2&\cdots&b_{n-1}&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&&c_1\\&1&&&c_2\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&c_{n-1}\\0&0&\cdots&0&a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i\end{bmatrix}$$. 故当且仅当 $a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i\neq 0$ 时有逆, 此时其逆为 $$\begin{bmatrix}1&&&&c_1\\&1&&&c_2\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&c_{n-1}\\0&0&\cdots&0&a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&&0\\&1&&&0\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&0\\-b_1&-b_2&\cdots&-b_{n-1}&1\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}1&&&&-(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}c_1\\&1&&&-(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}c_2\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&-(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}c_{n-1}\\0&0&\cdots&0&(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&0\\&1&&&0\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&0\\-b_1&-b_2&\cdots&-b_{n-1}&1\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}1&&&&-(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}c_1\\&1&&&-(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}c_2\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&-(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}c_{n-1}\\-(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}b_1&-(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}b_2&\cdots&-(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}b_{n-1}&(a-\sum_{i=1}^{n-1}b_ic_i)^{-1}\end{bmatrix}.$$ ▶

练习 1.7.8. 利用 Sherman-Morrison 公式判断下列矩阵何时可逆, 并在可逆时求其逆.
$$\begin{bmatrix}a_1+1&1&1&\cdots&1\\1&a_2+1&1&\cdots&1\\1&1&a_3+1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&1&\cdots&1&a_n+1\end{bmatrix}.$$

◀ 首先设 $a_1,\cdots,a_n\neq 0$. $$\begin{bmatrix}a_1+1&1&1&\cdots&1\\1&a_2+1&1&\cdots&1\\1&1&a_3+1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&1&\cdots&1&a_n+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&&&&\\&a_2&&&\\&&a_3&&\\&&&\ddots&\\&&&&a_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

由于 $$\begin{bmatrix}a_1&&&&\\&a_2&&&\\&&a_3&&\\&&&\ddots&\\&&&&a_n\end{bmatrix}$$ 可逆, 我们可以应用 Sherman-Morrison 公式:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ 可逆当且仅当

$$1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^{-1} \neq 0.$$

此时有 $$\left(\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} - \frac{\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^{-1} - \frac{a_1^{-2}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_1^{-1}a_2^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_1^{-1}a_3^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & \cdots & -\frac{a_1^{-1}a_n^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \\ -\frac{a_2^{-1}a_1^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & a_2^{-1} - \frac{a_2^{-2}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_2^{-1}a_3^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & \cdots & -\frac{a_2^{-1}a_n^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \\ -\frac{a_3^{-1}a_1^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_3^{-1}a_2^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & a_3^{-1} - \frac{a_3^{-2}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & \ddots & -\frac{a_3^{-1}a_n^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n^{-1}a_1^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_n^{-1}a_2^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & -\frac{a_n^{-1}a_3^{-1}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} & \cdots & a_n^{-1} - \frac{a_n^{-2}}{1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \end{bmatrix}.$$

现在考虑 $a_1, \cdots, a_n$ 不必非零的一般情况. 如果 $a_1, \cdots, a_n$ 中有至少两个为 0, 则矩阵有两行相等故不可逆. 如果仅有某个 $a_k = 0$, 我们有

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & -1 & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & -1 & & & \\
& & & 1 & & & \\
& & & -1 & 1 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & -1 & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1+1 & 1 & & \cdots & \cdots & & 1 \\
1 & \ddots & \ddots & & & & \\
& \ddots & a_{k-1}+1 & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & a_{k+1}+1 & \ddots & \\
& & & & \ddots & \ddots & 1 \\
1 & & \cdots & \cdots & & 1 & a_n+1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
-1 & \cdots & -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
a_1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & a_{k-1} & & & & \\
& & & 1 & & & \\
& & & & a_{k+1} & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & a_n
\end{bmatrix}.
$$

此时逆矩阵为

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
-1 & \cdots & -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & a_{k-1} & & & & \\
& & & 1 & & & \\
& & & & a_{k+1} & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & a_n
\end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix}
1 & & & -1 & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & -1 & & & \\
& & & 1 & & & \\
& & & -1 & 1 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & -1 & & & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
a_1^{-1} & & & -a_1^{-1} & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & a_{k-1}^{-1} & -a_{k-1}^{-1} & & & \\
-a_1^{-1} & \cdots & -a_{k-1}^{-1} & 1-\sum_{1\le i\le n, i\neq k} a_i^{-1} & -a_{k+1}^{-1} & \cdots & a_n^{-1} \\
& & & -a_{k+1}^{-1} & a_{k+1}^{-1} & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & -a_n^{-1} & & & a_n^{-1}
\end{bmatrix}. \blacktriangleright
$$

练习 1.7.9. 1. 求 A 使得 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 为反对称矩阵.

◀ 由 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 等价于 $A^T = -A$. ▶

2. 求 5 阶置换矩阵 P, 满足 $P^5 \neq I_5, P^6 = I_5$.

◀ 例: $\begin{bmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 1 & & & & \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & \end{bmatrix}$. ▶

3. 求对称矩阵 A,使得不存在 B,满足 $A = BB^T$.

◀ 例:考虑实矩阵.对 $A = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$,不存在 B 满足 $A = BB^T$.(如果我们的域中任何元素都有平方根,那么任意的 A 均能表达成某个 BB^T 的形式.) ▶

练习 1.7.10. 给定 $m \times n, n \times m$ 矩阵 A, B,求证:$I_m + AB$ 可逆当且仅当 $I_n + BA$ 可逆.

◀ 考虑 $\begin{bmatrix} I_n & \\ -A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & \\ & I_m + AB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ -A & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n + BA & \\ & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & \\ -A & I_m \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.11. 设实分块方阵 $X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$,其中 A 是方阵.如果 X 与 X^T 可交换,求证:$C = 0$.

◀ $\begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & \\ C^T & B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & \\ C^T & B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix}$ 或等价于 $\begin{bmatrix} AA^T + CC^T & CB^T \\ BC^T & BB^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^TA & A^TC \\ C^TA & C^TC + B^TB \end{bmatrix}$ 给出了 $C^TC = 0$.对任意的实列向量 $x, 0 = x^TC^TCx = (Cx)^T(Cx)$,故 $Cx = 0$.从而 $C = 0$. ▶

练习 1.7.12. 设分块对角矩阵 $J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$,其中 $J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$.试找出一个五次多项式 $f(x)$,使得 $f(J) = 0$.

◀ $f(x) = a(x-2)^3(x-1)^2$. 注意对分块对角矩阵 $\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix}$ 有 $f(\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_n) \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.13. 构造 $2n$ 阶实方阵 A,满足 $A^2 = -I_{2n}$.

◀ 例:$A = \begin{bmatrix} & -1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & 1 & \end{bmatrix}$. ▶

练习 1.7.14. 设 A, B 为两个左相抵的行简化阶梯形矩阵.

1. 证明:$Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

◀ 设对某个可逆矩阵 P 有 $A = PB$.则 $Ax = PBx = 0$ 当且仅当 $Bx = 0$. ▶

2. 证明,如果 A 的最后一列不是主列,则存在 x 使得 $A \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$.

◀ 设 A 有某个行简化阶梯形,直接计算. ▶

3. 证明,如果 A 最后一列是主列,则对任意 $x, A \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$.

◀ 这个向量的最后一行非零. ▶

4. 设 A, B 除了最后一列之外, 其他列均相等, 且 A 的最后一列不是主列, 证明 $A = B$.

◀ 由第 2 问, 存在 x 使得 $A\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. 由第 1 问, $B\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. 由 $(A-B)\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, $A - B$ 的最后一列为零. ▶

5. 设 A, B 除了最后一列之外, 其他列均相等, 且 A 的最后一列是主列, 证明 $A = B$.

◀ 由 A 的最后一列是主列, B 的最后一列也是主列, 否则存在 x 使得 $B\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, 从而也有 $A\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. 故 A, B 的最后一列均为 $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. ▶

6. 用数学归纳法证明, 左相抵的行简化阶梯形必然相等. 由此证明, 一个矩阵 A 的行简化阶梯形唯一.

◀ 对矩阵的列数归纳. ▶

练习 1.7.15 (置换的不动点)**.** 设 P 是置换矩阵. 如果 P 对应的行变换保持第 i 行不变, 则称 i 为 P 的不动点.

1. 证明 i 是 P 的不动点当且仅当 P 的第 i 个对角元为 1.

◀ 显然. ▶

2. 证明 P 的不动点个数等于 $trace(P)$(练习 1.5.22).

◀$trace(P)$ 等于 P 的对角元之和. ▶

3. 对任意置换矩阵 P_1, P_2, 证明 P_1P_2 和 P_2P_1 的不动点个数相等.

◀ 这是由于 $trace(P_1P_2) = trace(P_2P_1)$. ▶

练习 1.7.16. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的变换 $f(x) = Ax + b$, 具有该形式的变换称为仿射变换. 仿射变换通常不是线性变换. (仅在 $b = 0$ 时是.)

1. 证明 $\begin{bmatrix} A & b \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) \\ 1 \end{bmatrix}$. 记 $A_f := \begin{bmatrix} A & b \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$.

◀ 直接验证. ▶

2. 证明 $A_fA_g = A_{f\circ g}$.

◀ 直接验证. ▶

3. 证明当仿射变换 f 可逆时, 矩阵 A_f 可逆, 且 $A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1}$.

◀ 直接验证. ▶

(本题的意义是将仿射空间嵌入相同维数的射影空间中, 可以把仿射变换在这个仿射开子集上的限制写成线性变换的形式.)

练习 1.7.17. 图 1.7.3 中有四个弹簧振子. 弹簧的初始长度为 l_1, l_2, l_3, l_4, 振子在稳态的最终长度为 $l_1 + x_1, l_2 + x_2, l_3 + x_3, l_4 + x_4$.

1. 找到矩阵 A 使得 $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = g\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}$. 此时 A 的分块结构有什么特点? 你能否从系统中看出原因?

2. 图 1.7.3 中振子下面, 由劲度系数分别为 k_5, k_6 的弹簧挂住了一个质量为 m_5 的振子. 找到矩阵 A 使得 $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = g\begin{bmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\m_4\\m_5\end{bmatrix}$. 此时 A 的分块结构是否还有之前的特点? 为什么?

练习 1.7.18. 考虑一个元素皆为复数的矩阵. 将每个元素分成实部和虚部, 不难发现对任意复数矩阵, 都存在实数矩阵 A, B, 使得该复数矩阵为 $A+iB$, 其中 i 是虚数单位. 同理, 任意复数向量, 都存在实数向量 v, w, 使得该复数向量为 $v+iw$. 下面用 $R(A), R(v), I(A), I(v)$ 来表达复矩阵 A 和复向量 v 的实部和虚部.

1. 用实数矩阵和向量 A, B, v, w 来表达 $(A+iB)(v+iw)$ 的实部和虚部;

◀ $Av - Bw$; $Aw + Bv$. ▶

2. 对任意实数矩阵 A, B, 求矩阵 X, 使得 $X\begin{bmatrix}R(v+iw)\\I(v+iw)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R((A+iB)(v+iw))\\I((A+iB)(v+iw))\end{bmatrix}$ 对任意实数向量 v, w 都成立.

◀ $\begin{bmatrix}A & -B\\B & A\end{bmatrix}$. ▶

3. 考虑映射 $f(a+ib) = \begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}$. 验证 $f((a+ib)(c+id)) = f(a+ib)f(c+id)$.

◀ 直接验证. ▶

练习 1.7.19 (错位分块对角矩阵)**.** 定义 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \triangle \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & a_{12} & 0\\0 & b_{11} & 0 & b_{12}\\a_{21} & 0 & a_{22} & 0\\0 & b_{21} & 0 & b_{22}\end{bmatrix}$.

1. 证明 $(A_1 \triangle B_1)(A_2 \triangle B_2) = (A_1A_2) \triangle (B_1B_2)$.

◀ 直接验证. ▶

2. 证明 $A \triangle B$ 可逆当且仅当 A, B 都可逆; 此时有 $(A \triangle B)^{-1} = A^{-1} \triangle B^{-1}$.

◀ 注意到 $I_2 \triangle I_2 = I_4$. ▶

3. 求 X, 使得对任意 2 阶方阵 A, B, 都有 $X(A \triangle B)X^{-1} = \begin{bmatrix}A & 0\\0 & B\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1\end{bmatrix}$. ▶

1.8. **LU 分解.**

练习 1.8.1. 求下列矩阵的 PLU 分解, 其中 L 为单位下三角矩阵.

1. $\begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\-3 & 0 & 1\\2 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} & 1 & \\1 & & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\ & 3 & -2\\ & & 0\end{bmatrix}$. (注意本题不可 LU 分解.) ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$. ▶

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}$. ▶

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. ▶

7. $\begin{bmatrix}1&5&5&5\\1&2&6&6\\1&2&3&7\\1&2&3&4\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5&5&5\\&-3&1&1\\&&-3&1\\&&&-3\end{bmatrix}$. ▶

8. $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&&&1\\&1&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\1&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&-1\end{bmatrix}$. ▶

9. $\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&1&&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&&1&\\&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&\\&-1&&1\\&&-1&1\\&&&3\end{bmatrix}$. ▶

注意观察,哪些 0 保留在了 L 中或者 U 中.

练习 1.8.2. 利用行变换解下列方程

1. $\begin{bmatrix}1&5&5&5\\1&2&6&6\\1&2&3&7\\1&2&3&4\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}34\\28\\23\\20\end{bmatrix}$.

◀ $x=\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}34\\28\\23\\20\end{bmatrix}$.

◀ $y=\begin{bmatrix}34\\-6\\-5\\-3\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}1&5&5&5\\0&-3&1&1\\0&0&-3&1\\0&0&0&-3\end{bmatrix}x=y$,这里的 y 是上一问的解.

◀ $x=\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$. ▶

练习 1.8.3. 设 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&w^T\\v&B\end{bmatrix}$ 存在 LU 分解 $A=LU$,其中 $v\neq 0$.

1. A 的左上角元素 a_{11} 是否非零?

◀ 是的. 由 L,U 的对角元非零,计算 L 和 U 的积即得. ▶

2. 从上往下对 A 做行变换,将 v 变为 0 时,需要做多少次加法,乘法?

◀ 加法,乘法各 $(n-1)^2$ 次. 设 v 的元素为 $v_i, i=1,2,\cdots,n-1$,其中 v_i 在 A 的第 $i+1$ 行. 对 B 的第 i 行的操作是将 w^T 乘 $-\frac{v_i}{a_{11}}$ 加到 B 的第 i 行, $i=1,2,\cdots,n-1$. 我们对 B 的每个元素做了 1 次加法和乘法,而 B 的元素个数是 $(n-1)^2$. ▶

3. 再设 A 为对称矩阵. 此时 v 和 w 有什么关系? B 有什么性质?

◀ $v=w$. B 为对称矩阵. ▶

4. 利用行变换将 v 变为 0 时,再利用对应的列变换将 w^T 变为 0,求证此时 B 变为对称矩阵. 此时需要做几次加法,乘法?

◀ 设将 v 变为 0 对应的行变换是左乘可逆矩阵 P,则将 w^T 变为 0 对应的列变换是右乘可逆矩阵 P^T, $B=PAP^T$ 也是对称阵. 加法,乘法各 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次. ▶

由此看到,对称矩阵 LU 分解的计算量可以节省 (大约) 一半. 这是因为 B 在做完行变换后也是对称矩阵,因此计算出矩阵右上角 (即 $\begin{bmatrix}* & \cdots & *\\ & \ddots & \vdots\\ & & *\end{bmatrix}$ 中 $*$ 所在的位置) 的元素即可,这些元素的个数是 $\frac{n(n-1)}{2}$. 重复此步骤直到将 A 化为对角阵,我们将 B 写成了 LDL^T 的形式,这里 $U=DL^T$. 注意我们将用于左乘的初等矩阵相乘得到 L 时不需要做额外的计算. 计算总数时需要求出 $\sum_{k=2}^n k^2$,你可能注意到了对 $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$ 两边从 $k=2$ 到 n 求和即可. 计算所有四则运算的总数时还要多一些低次项,但我们只关心最高阶项,所以这无关紧要. (总之,计算的次数是有限的.)

练习 1.8.4. 设 n 阶方阵 $T=\begin{bmatrix}1&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&-1&2&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&-1\\&&&-1&2\end{bmatrix}$. 利用初等变换证明,存在分解式 $T=LU$,其中 L 是下三角矩阵,U 是上三角矩阵. 据此求出 T^{-1}.

◀ 依次将 T 的第 i 行加到第 $i+1$ 行, $i=1,2,\cdots,n-1$, 我们得到 $\begin{bmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\\vdots&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\\1&1&\cdots&1&1\end{bmatrix}T=\begin{bmatrix}1&-1&&&\\&1&-1&&\\&&1&\ddots&\\&&&\ddots&-1\\&&&&1\end{bmatrix}$. 故

$$T=\begin{bmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\\vdots&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\\1&1&\cdots&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&&&\\&1&-1&&\\&&1&\ddots&\\&&&\ddots&-1\\&&&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&&\\-1&1&&&\\&-1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&&&\\&1&-1&&\\&&1&\ddots&\\&&&\ddots&-1\\&&&&1\end{bmatrix},$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&&&\\&1&-1&&\\&&1&\ddots&\\&&&\ddots&-1\\&&&&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&&\\-1&1&&&\\&-1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\&1&\ddots&\ddots&1\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\\vdots&\ddots&\ddots&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\\1&1&\cdots&1&1\end{bmatrix}=$$

$\begin{bmatrix}n&n-1&n-2&\cdots&1\\n-1&n-1&n-2&\cdots&1\\n-2&n-2&n-2&\ddots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$. (注意矩阵 $N=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}$ 满足矩阵方程 $N^n=0$, 故 $I=I-N^n=$ $(I-N)(I+N+N^2+\cdots+N^{n-1})$, 从而 $(I-N)^{-1}=I+N+N^2+\cdots+N^{n-1}=I+\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}+$

$$\begin{bmatrix}0&0&1&&\\&0&0&\ddots&\\&&0&\ddots&1\\&&&\ddots&0\\&&&&0\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0&1\\&0&\ddots&\ddots&0\\&&0&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\&1&\ddots&\ddots&1\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&1\end{bmatrix}$$, 以及取转置后知对 $\begin{bmatrix}0&&&&\\1&0&&&\\&1&0&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&0\end{bmatrix}$ 有类似结果.) ▶

2. 子空间和维数

2.1. 基本概念.

练习 2.1.1. 判断下列子集是否是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 其中的子空间是否可以写成线性生成的子空间; 如果可以, 写出一组生成向量.

1. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T \mid \sum_{i=1}^n a_i=0\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}1&0&-1&0&\cdots&0\end{bmatrix}^T$, $\cdots$, $\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&-1\end{bmatrix}^T$. ▶

2. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T \mid \sum_{i=1}^n a_i=1\}$.

◀ 否. ▶

3. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T \mid \sum_{i=1}^n a_i^2=0\}$.

◀ 是. 零空间是子空间. 生成向量的集合为空集. (空集生成的子空间是零空间. 不能写零向量是生成向量, 因为生成向量是线性无关的, 且生成向量的数量等于子空间维数. 回忆一族向量生成的子空间是包含这些向量的最小的子空间.) ▶

4. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T | a_1=0\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0&0&1&0&\cdots&0\end{bmatrix}^T$, $\cdots$, $\begin{bmatrix}0&\cdots&0&1\end{bmatrix}^T$. ▶

5. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T | a_1\geq 0\}$.

◀ 否. ▶

6. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T | a_1=\cdots=a_n\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix}1&\cdots&1\end{bmatrix}^T$. ▶

7. $\{\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{bmatrix}^T | a_1^2=\cdots=a_n^2\}$.

◀ 否. ▶

8. $\{\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\end{bmatrix}^T | a_1a_2a_3=0\}$.

◀ 否. ▶

9. $\{\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\end{bmatrix}^T | a_1=a_2\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}^T$. ▶

10. $\{\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\end{bmatrix}^T | a_1\leq a_2\leq a_3\}$.

◀ 否. ▶

11. $\{\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\end{bmatrix}^T \mid \begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{bmatrix}$ 是可逆矩阵 $\}$.

◀ 否. ▶

12. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T \mid \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 是不可逆矩阵 $\}$.

◀ 否. ▶

13. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T \mid \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵 $\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. ▶

14. $\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T \mid \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 是反对称矩阵 $\}$.

◀ 是. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. ▶

(为什么有同学写子空间找不到一组生成向量?)

练习 2.1.2. 判断满足下列性质的 $\mathbb{R}^3$ 子集 M 是否存在. 若存在, 进一步判断哪些是子空间.

1. M 含有 e_1, e_2, e_3; 对任意 $v, w \in M$, 都有 $v + w \in M$; 存在 $v \in M$, 使得 $\frac{1}{2}v \notin M$.

◀ 存在. 例: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}$. 都不是子空间. ▶

2. M 含有所有形如 $\begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \\ 1 \end{bmatrix}$ 的向量; 对任意 $v \in M$, 都有 $kv \in M$; 存在 $v, w \in M$, 使得 $v + w \notin M$.

◀ 存在. 例: $\{\begin{bmatrix} kcos\theta \\ ksin\theta \\ k \end{bmatrix} | 0 \le \theta < 2\pi, k \in \mathbb{R}\}$. 都不是子空间. ▶

3. M 含有 e_1, e_2 但不含有 e_3; 对任意 $v, w \in M, k \ge 0$, 都有 $v + w, kv \in M$.

◀ 存在. 例: $\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} | a, b \ge 0\}$. $\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$ 是子空间. ▶

练习 2.1.3. 证明命题 2.1.8 .

命题 2.1.8 :

1. 子集 $span(S)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

◀ 验证其非空且对加法和数乘封闭. ▶

2. 如果 S 中的向量都在 $\mathbb{R}^n$ 的某个子空间中, 则 $span(S)$ 中的向量也都在该子空间中.

◀ 由子空间含有其中向量的线性组合得到. ▶

(注: 由于没有引入抽象线性空间的定义, 现在还不能说明某个线性空间的子空间是线性空间.)

练习 2.1.4. 证明, $R(O_{m\times n}) = 0$, $N(O_{m\times n}) = \mathbb{R}^n$; 如果 n 阶方阵 A 可逆, 则 $R(A) = \mathbb{R}^n$, $N(A) = 0$.

◀ 对任意的 n 维列向量 $x, O_{m\times n}x = 0$, 故 $R(O_{m\times n}) = 0$, $N(O_{m\times n}) = \mathbb{R}^n$.

对可逆方阵 A 及任意列向量 $y, A(A^{-1})y = y$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, 故 $R(O_{m\times n}) = 0$, $N(O_{m\times n}) = \mathbb{R}^n$. ▶

练习 2.1.5. 证明, 对例 2.1.2 中的 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$, 这三个向量中的任意两个都可以作为 $R(A)$ 的一组生成向量, 但是, 其中任意单个向量都不能生成 $R(A)$.

例 2.1.2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, 则 $R(A)=Ax|x\in\mathbb{R}^3=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}|x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix}|x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 是陪域 $\mathbb{R}^3$ 中的整个 x_1x_2 平面；而 $N(A)=x\in\mathbb{R}^3|Ax=0=k\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 是定义域 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的一条直线. 映射 A 既不是单射, 也不是满射.

◀ 直接解方程以尝试将 $R(A)$ 中的任意形如 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix}$ 的向量解为你选择的向量的线性组合. ▶

练习 2.1.6. 判断下列 A,B 是否具有相同的列空间, 零空间, 证明或举出反例.

1. A 为任意矩阵, B 分别为 $2A$, $\begin{bmatrix}A&A\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A&AC\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A\\CA\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A&A\\0&A\end{bmatrix}$, PA, AQ, 其中 P,Q 可逆.

◀ $2A$: 相同, 相同.
$\begin{bmatrix}A&A\end{bmatrix}$: 相同, 不同.
$\begin{bmatrix}A&AC\end{bmatrix}$: 相同, 不同.
$\begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix}$: 不同, 相同.
$\begin{bmatrix}A\\CA\end{bmatrix}$: 不同, 相同.
$\begin{bmatrix}A&A\\0&A\end{bmatrix}$: 不同, 不同.
PA: 不同, 相同.
AQ: 相同, 不同. ▶

2. A 为 n 阶方阵, B 分别为 $A+I_n$, A^2, A^T.

◀ $A+I_n$: 不同, 不同.
A^2: 不同, 不同.
A^T: 不同, 不同. 反例自举. ▶

练习 2.1.7. 设矩阵 A,B 具有相同的行数和列数, 对下列判断, 证明或举出反例.

1. 如果 A,B 有相同的零空间, 那么对任意向量 b, $Ax=b$ 与 $Bx=b$ 一定同解.

◀ 错误. 例：$A=I$, $B=2I$. ▶

2. 如果 A,B 有相同的列空间, 那么对任意向量 b, $Ax=b$ 与 $Bx=b$ 一定同解.

◀ 错误. 例：$A=I$, $B=2I$. ▶

3. 如果 A,B 有相同的零空间和列空间, 那么对任意向量 b, $Ax=b$ 与 $Bx=b$ 一定同解.

◀ 错误. 例：$A=I$, $B=2I$. ▶

练习 2.1.8. 设 $Ax=b$ 有解, 证明,

1. $R(A)=R(\begin{bmatrix}A&b\end{bmatrix})$.

◀ 设 $Ax_0=b$, 我们有 $R(\begin{bmatrix}A&b\end{bmatrix})=R(\begin{bmatrix}A&Ax_0\end{bmatrix})=Ay+y_{n+1}Ax_0=Ay=R(A)$. ▶

2. $N(A^T) = N(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix})$.

◀ 设 $Ax_0 = b, N(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix}) = N(\begin{bmatrix} A^T \\ x_0^T A^T \end{bmatrix}) = \{x | A^T x = x_0^T A^T x = 0\} = \{x | A^T x = 0\} = N(A^T)$. ▶

练习 2.1.9. 把 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 b 表示成 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合.

1. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

◀ 设 $b = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, 即 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$. 解得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$. ▶

2. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◀ 同上, 设 $b = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, 解得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 2.1.10. 判断下列向量组是否线性相关.

1. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$;

◀ 高斯消元. 否. ▶

2. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

◀ 是. ▶

练习 2.1.11. 如果向量组 a, b, c 中的任何两个都线性无关, 试问该向量组是否一定线性无关？

◀ 否. 例：对线性无关的两向量 $e_1, e_2, e_1, e_2, e_1 + e_2$. ▶

练习 2.1.12. 设 $\mathbb{R}^n$ 中向量 a_1, a_2, a_3,满足 $k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0$,其中 $k_1k_2 \neq 0$.求证：$span(a_1, a_3) = span(a_2, a_3)$.

◀ 由于 $a_2 = -\frac{k_1}{k_2}a_1 - \frac{k_3}{k_2}a_3$ 以及 $a_1 = -\frac{k_2}{k_1}a_2 - \frac{k_3}{k_1}a_3$, $span(a_1, a_3) = span(a_2, a_3) = span(a_1, a_2, a_3)$. ▶

练习 2.1.13. 证明向量组 a_1, a_2, a_3 与向量组 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1$ 线性等价.

◀ 这是由于 $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & a_2 + a_3 & a_3 + a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 以及方阵 $\begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆. ▶

练习 2.1.14. 设向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关,证明向量组 $a_1, a_1 + a_2, \cdots, a_1 + \cdots + a_s$ 线性无关.

◀ 这是由于 $\begin{bmatrix} a_1 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + \cdots + a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ 以及方阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ 可逆. ▶

练习 2.1.15. 设 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关, A 是 n 阶可逆矩阵,求证：$Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关.

◀ $\begin{bmatrix} k_1Aa_1 & k_2Aa_2 & \cdots & k_sAa_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} k_1a_1 & k_2a_2 & \cdots & k_sa_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1a_1 & k_2a_2 & \cdots & k_sa_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0$. ▶

练习 2.1.16. 证明,一个线性无关向量组的任意部分组也线性无关；如果向量组有一个部分组线性相关,则该向量组也线性相关.

◀ 第二个论断由定义显然正确.第一个论断是第二个的逆否命题. ▶

练习 2.1.17. 证明,一个向量组线性相关当且仅当其中有一个向量可以被其他向量线性表示.

◀"$\Leftarrow$ ": 由定义即得.

"$\Rightarrow$ ": 设向量组 $a_1, \cdots, a_s$ 线性相关,则存在不全为 0 的常数 $k_1, \cdots, k_s$ 使得 $k_1a_1 + \cdots k_sa_s = 0$.设某个 $k_i \neq 0$,则有 $a_i = -\frac{k_1}{k_i}a_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}a_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}a_{i+1} - \cdots - \frac{k_s}{k_i}a_s$. (这个命题的意义是我们可以逐个去除某个向量组中的向量直到得到某个线性无关的子向量组.反之,你也可以逐个添加线性无关的向量直到得到某个线性无关的子向量组.)
▶

练习 2.1.18. 给定 $\mathbb{R}^m$ 中向量组 $a_1, \cdots, a_n$,从每个向量中去掉第 $i_1, \cdots, i_s$ 个分量,得到 $\mathbb{R}^{m-s}$ 中向量组 $a'_1, \cdots, a'_n$.证明：

1. 如果 $a_1, \cdots, a_n$ 线性相关,则 $a'_1, \cdots, a'_n$ 线性相关.

◀ 若向量组 $a_1, \cdots, a_n$ 线性相关,则存在不全为 0 的常数 $k_1, \cdots, k_n$ 使得 $k_1a_1 + \cdots k_na_n = 0$.从每个向量中去掉第 $i_1, \cdots, i_s$ 个分量后,仍有 $k_1a'_1 + \cdots k_na'_n = 0$,故 $a'_1, \cdots, a'_n$ 线性相关. ▶

2. 如果 $a'_1, \cdots, a'_n$ 线性无关,则 $a_1, \cdots, a_n$ 线性无关.

◀ 这是上一问的逆否命题. ▶

练习 2.1.19 (子空间的和)**.** 设 M, N 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间,定义集合 $M + N := \{m + n | m \in M, n \in N\}$.证明,

1. 集合 $M + N$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间,称为子空间 M 与 N 的和.

◀ 验证 $0 \in M + N$ 以及 $M + N$ 对加法和数乘封闭. ▶

2. 交集 $M\cap N$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间,称为子空间 M 与 N 的交.

◀ 验证 $0\in M\cap N$ 以及 $M\cap N$ 对加法和数乘封闭. ▶

3. 集合的交与并满足 $(S_1\cup S_2)\cap S_3=(S_1\cap S_3)\cup(S_1\cap S_2)$. 证明或举出反例：子空间的交与和满足 $(M+N)\cap W=(M\cap W)+(N\cap W)$.

◀ 反例：对线性无关的两向量 $e_1,e_2,M=span(e_1)$, $N=span(e_2)$, $W=span(e_1+e_2)$. ▶

4. 集合的交与并满足 $(S_1\cap S_2)\cup S_3=(S_1\cup S_3)\cap(S_1\cup S_2)$. 证明或举出反例：子空间的交与和满足 $(M\cap N)+W=(M+W)\cap(N+W)$.

◀ 反例：对线性无关的两向量 $e_1,e_2,M=span(e_1)$, $N=span(e_2)$, $W=span(e_1+e_2)$. ▶

练习 2.1.20. 设 $\mathbb{R}^m$ 中子空间 $M=span(a_1,\cdots,a_s),N=span(b_1,\cdots,b_t)$, 证明, $M+N=span(a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_t)$.

◀ 证明两边互相包含. ▶

练习 2.1.21. 1. 给定 $m\times n,m\times s$ 矩阵 A,B, 证明, $R(A)+R(B)=R(C)$, 其中 $C=\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}$.

◀ $R(C)=Cx=\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=Ax_1+bx_2=Ax_1+bx_2=R(A)+R(B)$. ▶

2. 给定 $m\times n,l\times n$ 矩阵 A,B, 证明, $N(A)\cap N(B)=N(D)$, 其中 $D=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$.

◀ $N(D)=\{x|Dx=0\}=\{x|\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}x=0\}=\{x|\begin{bmatrix}Ax\\Bx\end{bmatrix}=0\}=\{x|Ax=Bx=0\}=\{x|Ax=0\}\cap\{x|Bx=0\}=N(A)\cap N(B)$. ▶

练习 2.1.22 (Kirchhoff 电压定律)**.** 对图 2.1.1 中的电路网络, 令 M_G 为对应的关联矩阵. 根据 Kirchhoff 电压定律, 找出一个方程组, 其解集恰为 $R(M_G)$. 要求用尽量少的方程 (但不需要写出证明).

练习 2.1.23 (电路网络拓展)**.** 设电路网络的关联矩阵是 M_G, 定义图的 Laplace 矩阵 $L_G=M_G^TM_G$.

1. 矩阵 L_G 的元素有什么意义？
2. 求子空间 $N(L_G)$ 的一组生成向量.
3. 求子空间 $R(L_G)$ 的一组生成向量, 要求其中每个向量至少有两个分量为零.
4. 任取向量 $v\in N(L_G),w\in R(L_G),v^Tw$ 可能取哪些值？
5. 求线性方程组, 其解集恰好是 $R(L_G)$.

2.2. **基和维数.**

练习 2.2.1. 求下列向量组的极大无关部分组和秩.

1. $a_1=\begin{bmatrix}2\\3\\1\\1\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}4\\6\\2\\2\end{bmatrix}$, $a_3=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}$, $a_4=\begin{bmatrix}2\\4\\3\\2\end{bmatrix}$.

◀ 使用筛选法. a_1 线性无关, 将 a_1 添加到极大无关组中. a_1,a_2 线性相关. a_1,a_3 线性无关, 将 a_3 添加到极大无关组中. a_1,a_3,a_4 线性相关. 故我们得到了极大无关部分组 $\{a_1,a_3\}$. 秩为 2.

(另解: 从练习 2.1.15 可以看出对矩阵 $\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_s\end{bmatrix}$ 做行变换不改变线性无关性, 故将其化为行简化阶梯形后可以直接给出极大无关组. $\begin{bmatrix}2&4&0&2\\3&6&1&4\\1&2&2&3\\1&2&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\&&1&1\\&&&\\&&&\end{bmatrix}$, 易见 $\{a_1,a_3\}$ 构成极大无关部分组且秩为 2.) ▶

2. $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 有极大无关部分组 $\{a_1, a_2\}$. 秩为 2. ▶

练习 2.2.2. 在下列向量组中，除去哪个向量，得到的向量组和原向量组线性等价?

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

◀ 第 1, 2, 3, 4 个. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 第 1, 2, 4 个. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 第 1, 4 个. ▶

4. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 第 4 个. ▶

练习 2.2.3. 用筛选法去掉方程组中所有多余的方程: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 筛选法留下了第 1, 2, 3 个方程. ▶

练习 2.2.4. 给定线性无关的向量组 a_1, a_2, a_3, 求 $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_1$ 所有的极大线性无关部分组.

◀ 三个向量中的任意两个. ▶

练习 2.2.5. 证明，一个向量组的任意线性无关的部分组都可以扩充成它的一个极大线性无关部分组.

◀ 从这个部分组开始使用筛选法. 筛选法保证了选取的向量线性无关且能线性表示所有向量. ▶

练习 2.2.6. 证明，如果向量组 S 可以被向量组 T 线性表示，则 $rank(S) \leq rank(T)$.

◀ 我们可以用 S 和 T 的极大线性无关部分组 S' 和 T' 代替 S 和 T 而不改变秩. 此时仍有 S' 可以被 T' 线性表示, 故 $rank(S) = rank(S') \leq rank(T') = rank(T)$. (不等号由基扩充定理保证.) ▶

练习 2.2.7. 证明，如果向量组和它的一个部分组的秩相同，则两个向量组线性等价.

◀ 设向量组 S 与部分组 S' 的秩相同. 取 S' 的极大线性无关部分组 S'', 由 S'' 线性无关且 $rank(S) = rank(S'')$, 故 S'' 也是 S 的极大线性无关部分组. 故 S 与 S' 可以互相线性表示. ▶

练习 2.2.8. 举例说明秩相等的向量组未必线性等价.

◀ $\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\}, \{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$. ▶

练习 2.2.9. 已知向量组的秩是 r，设 S 是一个包含 r 个向量的部分组．证明：

1. 如果 S 线性无关，则 S 是原向量组的一个极大线性无关部分组.

◀ 将线性无关的部分组 S 扩充成极大线性无关部分组 S'. 比较集合的势知 $S = S'$. ▶

2. 如果 S 与原向量组线性等价，则 S 是原向量组的一个极大线性无关部分组.

◀ 删去可以线性表示原向量组的向量组 S 中的某些向量得到原向量组的极大线性无关部分组 S''. 比较集合的势知 $S = S''$. ▶

练习 2.2.10. 证明命题 2.2.17.

命题 2.2.17. 设 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的 r 维子空间，给定 M 中含有 r 个向量的向量组 $a_1, \cdots, a_r$.

1. 如果 $a_1, \cdots, a_r$ 线性无关，则 $a_1, \cdots, a_r$ 是 M 的一组基.

◀ 将线性无关的向量组 $a_1, \cdots, a_r$ 扩充为 M 的一组基. 比较集合的势知这组基正是 $a_1, \cdots, a_r$. ▶

2. 如果 $M = span(a_1, \cdots, a_r)$, 则 $a_1, \cdots, a_r$ 是 M 的一组基.

◀ 删去可以线性表示 M 的向量组 $a_1, \cdots, a_r$ 中的某些向量得到 M 的一组基. 比较集合的势知这组基正是 $a_1, \cdots, a_r$. ▶

练习 2.2.11. 求下列子空间的基和维数.

1. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x - y = 0$ 与平面 $x + y - 2z = 0$ 的交集.

◀ 解线性方程组得一组基 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. 维数为 1. ▶

2. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中与向量 $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ 都垂直的向量组成的子空间.

◀ 本问为上一问的同义转述. ▶

3. 齐次线性方程组 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} x = 0$ 的解集.

◀ 解线性方程组得一组基 $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$. 维数为 1. ▶

练习 2.2.12. 一个三阶方阵，如果每行、每列以及两个对角线上的元素之和都相等，则称为幻方矩阵. 判断 $\{a = \begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_9\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^9 | \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\a_4 & a_5 & a_6\\a_7 & a_8 & a_9\end{bmatrix}$ 是幻方矩阵 $\}$ 是否是 $\mathbb{R}^9$ 的子空间．如果是，求它的一组基.

◀ 是. 对矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&1&-1&-1&-1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&-1&-1&-1\\0&1&1&-1&0&0&-1&0&0\\1&0&1&0&-1&0&0&-1&0\\1&1&0&0&0&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&-1&0&0&0&-1\\1&1&0&0&-1&0&-1&0&0\end{bmatrix}$ 高斯消元以解出对应的线性方程组. 解空间的一组基为 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}4&9&2&3&5&7&8&1&6\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}4&3&8&9&5&1&2&7&6\end{bmatrix}^T$. (注: 这里用洛书 $\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}$ 与其转置给出了一组基.) ▶

练习 2.2.13. 任取非零常数 $k_1,\cdots,k_n$ 满足 $\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_n}+1\neq 0$, 求如下向量组的秩:

$$a_1=\begin{bmatrix}1+k_1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\ a_2=\begin{bmatrix}1\\1+k_2\\\vdots\\1\end{bmatrix},\cdots,a_n=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1+k_n\end{bmatrix}.$$

◀ 由练习 1.7.8, 方阵 $\begin{bmatrix}1+k_1&1&\cdots&1\\1&1+k_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1+k_n\end{bmatrix}$ 可逆, 故向量组的秩为 n. ▶

练习 2.2.14. 给定 r 阶方阵 P 和子空间 M 的一组基 $a_1,\cdots,a_r$. 令 $\begin{bmatrix}b_1&\cdots&b_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_r\end{bmatrix}P$. 证明, $b_1,\cdots,b_r$ 是 M 的一组基当且仅当矩阵 P 可逆.

◀ $b_1,\cdots,b_r$ 是 M 的一组基 $\iff \begin{bmatrix}b_1&\cdots&b_r\end{bmatrix}$ 秩为 $r \iff \begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_r\end{bmatrix}P$ 秩为 $r\iff P$ 可逆. (最后的 $\iff$ 成立的理由: $\Leftarrow$: 右乘可逆阵不改变矩阵的秩 (可逆操作不改变向量组的秩). $\Rightarrow$: 矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_r\end{bmatrix}P$ 的秩不大于 P 的秩.) ▶

练习 2.2.15 (Steinitz 替换定理). 设 $S:a_1,\cdots,a_r$ 线性无关，可被 $T:b_1,\cdots,b_t$ 线性表示，求证：

1. $r\leq t$.

◀ 假设 $t>r$. 设 $\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1&\cdots&b_t\end{bmatrix}A$. 由 A 的行数大于列数, 存在 $x\neq 0$ 使得 $Ax=0$. 我们有 $\begin{bmatrix}a_1&\cdots&a_r\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}b_1&\cdots&b_t\end{bmatrix}Ax=0$, 与 $a_1,\cdots,a_r$ 线性无关矛盾. ▶

2. 可以选择 T 中的 r 个向量换成 S，得到的新的向量组与 T 线性等价.

◀ 将 $a_1,\cdots,a_r$ 扩充为 $a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_t$ 的一个极大线性无关组. 若其中向量不足 t 个, 任取 $b_1,\cdots,b_t$ 中的一些向量补足至 t 个. ▶

练习 2.2.16 (平行的平面). 考虑方程 $x-3y-z=12$ 和 $x-3y-z=0$ 的解集. 这两个解集的交集是什么？如果 x_1,x_2 分别是第一个和第二个方程的解，那么 x_1+x_2, x_1+2x_2, $2x_1+x_2$ 分别是哪个方程的解？

提示：从几何上看，这两个解集是 $\mathbb{R}^3$ 中两个平行的平面，其中一个经过原点，因此是二维子空间；另一个不经过原点，因此不是子空间.

◀ 空集. 第一个，第一个，都不是. ▶

练习 2.2.17. 设 M, N 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间，求证维数公式：$dim(M+N) = dim(M) + dim(N) - dim(M \cap N)$.

提示：先取 $M \cap N$ 的一组基，根据基扩充定理，分别扩充成 M 和 N 的一组基，证明这两组基的并集是 $M+N$ 的一组基.

◀ 取 $M \cap N$ 的一组基 $a_1, \cdots, a_i$, 分别扩充成 M 的一组基 $a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_j$ 和 N 的一组基 $a_1, \cdots, a_i, c_1, \cdots, c_k$. 考虑向量组 $a_1, \cdots, a_i, b_1, \cdots, b_j, c_1, \cdots, c_k$, 其显然可以线性表示 $M+N$. 下面说明其线性无关. 设有线性组合 $k_1a_1 + \cdots + k_ia_i + l_1b_1 + \cdots + l_jb_j + m_1c_1 + \cdots + m_kc_k = 0$. 由 $l_1b_1 + \cdots + l_jb_j = -(k_1a_1 + \cdots + k_ia_i + m_1c_1 + \cdots + m_kc_k) \in N$ 知 $l_1b_1 + \cdots + l_jb_j \in M \cap N$, 由 $M \cap N$ 的一组基 $a_1, \cdots, a_i$ 与 $b_1, \cdots, b_j$ 线性无关知 $l_1 = \cdots = l_j = 0$. 同理有 $m_1 = \cdots = m_k = 0$. 故 $k_1a_1 + \cdots + k_ia_i = 0$. 由 $a_1, \cdots, a_i$ 是 $M \cap N$ 的一组基有 $k_1 = \cdots = k_i = 0$. ▶

2.3. **矩阵的秩.**

练习 2.3.1. 给定矩阵 $A = u_1v_1^T + u_2v_2^T$.

1. 写出 A 的行空间、列空间.

◀ 设 u_i, v_i 的第 j 个元素为 u_{ij}, v_{ij}. A 的列空间 $R(A)$ 是 $Ae_1 = u_1v_1^Te_1 + u_2v_2^Te_1 = v_{11}u_1 + v_{21}u_2$ 和 $Ae_2 = u_1v_1^Te_2 + u_2v_2^Te_2 = v_{12}u_1 + v_{22}u_2$ 生成的子空间. A 的行空间 $R(A^T)$ 是 $A^Te_1 = v_1u_1^Te_1 + v_2u_2^Te_1 = u_{11}v_1 + u_{21}v_2$ 和 $A^Te_2 = v_1u_1^Te_2 + v_2u_2^Te_2 = u_{12}v_1 + u_{22}v_2$ 生成的子空间. ▶

2. 如果 u_1, u_2, v_1, v_2 都不为零，求 $rank(A)$.

◀ $rank(A)$ 可能的取值为 $0, 1, 2$. ▶

3. 讨论这四个向量与 $rank(A)$ 之间的关系.

◀ $u_1v_1^T$ 和 $u_2v_2^T$ 中的每项可以提供秩 1. ▶

练习 2.3.2. 求下列矩阵列空间的一组基.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ 第 $1, 2, 4$ 列. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$.

◀ 第 $1, 2, 3$ 列. ▶

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ 第 $1, 2, 3, 4, 5$ 列. ▶

练习 2.3.3. 求满足下列条件的 3×4 矩阵 A 的行简化阶梯形和秩.

1. $Ax=0$ 解集的一组基为 $\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-2\\0\\6\\1\end{bmatrix}$.

◀ A 对应的行简化梯形矩阵对应零空间 $N(A)$ 满足的一组线性无关的线性方程. 设 $N(A)$ 的一组基为 $a_1,\cdots,a_k$, 解方程 $x^T\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_k\end{bmatrix}=0$ 得到一组线性无关的行向量 x^T, 再做行变换化为行简化梯形即为 A 的行简化梯形. (解方程时选取适当的解, 可以直接得到行简化梯形.) 解得 A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\ & & 1 & -6\\ & & & \end{bmatrix}$. $rank(A)=2$.▶

2. A 的 i,j 元为 $a_{ij}=4$.

◀ A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$. $rank(A)=1$. ▶

3. A 的 i,j 元为 $a_{ij}=i+j+1$.

◀ A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ & 1 & 2 & 3\\ & & & \end{bmatrix}$. $rank(A)=2$. ▶

4. A 的 i,j 元为 $a_{ij}=(-1)^{i+j}$.

◀ A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$. $rank(A)=1$. ▶

练习 2.3.4. 设矩阵 A 的行简化阶梯形为 R，求下列 B 的行简化阶梯形.

1. $B=\begin{bmatrix}A & A\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}R & R\end{bmatrix}$. ▶

2. $B=\begin{bmatrix}A & AC\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}R & RC\end{bmatrix}$. ▶

3. $B=\begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}$. ▶

4. $B=\begin{bmatrix}A\\CA\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}$. ▶

5. $B=\begin{bmatrix}A & A\\0 & A\end{bmatrix}$.

◀ 设 $R=\begin{bmatrix}R_1\\0\end{bmatrix}$, 其中 R_1 行满秩. B 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}R_1 & 0\\0 & R_1\\0 & 0\end{bmatrix}$. ▶

6. $B=PA$, 其中 P 是可逆矩阵.

◀ R. ▶

7. A 有 LU 分解 $A = LU$, 这里 L 为单位下三角阵, 令 $B = U$.

◀ I. (由于 A 可逆.) ▶

练习 2.3.5. 求矩阵 A 中 “$*$” 处的元素，满足相应的条件.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & * & * \\ 4 & * & * \end{bmatrix}$, 且 A 的秩为 1.

◀ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$. (秩 1 矩阵的任意两行 (列) 线性相关.) ▶

2. $A = \begin{bmatrix} * & 9 & * \\ 1 & * & * \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$, 且 A 的秩为 1.

◀ $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$. ▶

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & * \end{bmatrix}$, $a \neq 0$, 且 A 的秩为 1.

◀ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{bmatrix}$. ▶

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & * \end{bmatrix}$, 且 A 的秩为 2.

◀ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$. ▶

练习 2.3.6. 构造满足下列条件的矩阵 R，要求其中为 1 的元素尽量多.

1. R 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第二、四、五列.

◀ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & \end{bmatrix}$. ▶

2. R 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第一、三、六、七列.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

3. R 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第四、六列.

◀ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$. ▶

4. R 为 4×8 的行简化阶梯形，其中自由列为第二、四、五、六列.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

5. R 为 4×8 的行简化阶梯形，其中自由列为第一、三、六、七、八列.

◀ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$. ▶

练习 2.3.7. 说明满足下列条件的矩阵 A 是否存在．如果存在，举例说明，要求其中为 0 的元素尽量多.

1. A 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第二、四、五列, A^T 的主列为第一、三列.

◀ 不存在. 主列的数量即为矩阵的秩, 而 $rank(A) = rank(A^T)$. ▶

2. A 为 4×7 的阶梯形，其中主列为第二、四、五列, A^T 的主列为第二、三、四列.

◀ 不存在. 非零的阶梯形矩阵第 1 行非零. ▶

练习 2.3.8. 证明, $rank(kA) = rank(A)\,(k\neq 0)$, $rank(A+B)\leq rank(A)+rank(B)$.

◀ 前者是由于左乘可逆阵 kI 不改变秩; 后者是由于 $A+B$ 的列空间含于 A 的列空间和 B 的列空间生成的向量空间, 故其维数不大于后两者的维数之和. ▶

练习 2.3.9. 对分块矩阵 $C=\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$，证明，$\max\{rank(A), rank(B)\}\leq rank(C)\leq rank(A)+rank(B)$.

◀ 由 A, B 的列空间含于 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 的列空间，故有 $rank(A)\leq rank(C), rank(B)\leq rank(C)$，从而有 $\max\{rank(A), rank(B)\}\leq rank(C)$. 由 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 的列空间含于 A 的列空间和 B 的列空间生成的向量空间, 故其维数不大于后两者的维数之和. ▶

练习 2.3.10. 1. 对分块对角矩阵 $C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$，证明，$rank(C) = rank(A)+rank(B)$.

◀ 将 C 相抵到 $\begin{bmatrix} I_{rank(A)} & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & I_{rank(B)} & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 即得 $rank(C) = rank(A)+rank(B)$. ▶

2. 对分块上三角矩阵 $C=\begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}$，证明，$rank(C)\leq rank(A)+rank(B)$. 由此证明，当 A, B 可逆时，C 也可逆.

◀ 将 C 相抵到 $\begin{bmatrix} I_{rank(A)} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ & & I_{rank(B)} & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 再相抵到 $\begin{bmatrix} I_{rank(A)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ & & I_{rank(B)} & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 即得 $rank(C) \leq rank(A)+rank(B)$, 等号成立当且仅当第二个矩阵中的 $* = 0$. 当 A, B 可逆时，C 相抵于 $\begin{bmatrix} I_{rank(A)} & \\ & I_{rank(B)} \end{bmatrix}$ 故可逆. ▶

练习 2.3.11. 设 A, B, C 分别为 $m\times n, n\times k, k\times s$ 矩阵，证明，$rank(AB)+rank(BC) \leq rank(ABC)+rank(B)$.

◀ 相抵. $\begin{bmatrix} & B \\ ABC & \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 列}]{\text{第 2 列右乘}C} \begin{bmatrix} BC & B \\ ABC & \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{-A\text{左乘第 1 行}} \begin{bmatrix} BC & B \\ & -AB \end{bmatrix}$. 故 $rank(ABC) + rank(B) = rank(\begin{bmatrix} & B \\ ABC & \end{bmatrix}) = rank(\begin{bmatrix} BC & B \\ & -AB \end{bmatrix}) \geq rank(-AB) + rank(BC) = rank(AB) + rank(BC)$. ▶

练习 2.3.12. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 1, 证明, 存在非零向量 $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$, 使得 $A = ab^T$.

◀ 由 A 的秩为 1, A 的某列 $a \neq 0$, 且 A 的任意两列线性相关. 设 A 的第 i 列等于 a 的 b_i 倍, 取 $b = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$, 则 $A = ab^T$. ▶

练习 2.3.13. 试分析矩阵 A 满足什么条件时，$AB = AC$ 可以推出 $B = C$.

◀ $AB = AC$ 可以推出 $B = C$ 当且仅当 A 列满秩 (这等价于 A 左可逆, 见下一题). 若 A 左可逆 (即存在矩阵 A' 使得 $A'A = I$), 我们有 $AB = AC \Rightarrow A'AB = A'AC \Rightarrow B = C$. 若 A 不列满秩, 则 $Ax = 0$ 有非零解，$Ax = A0$ 即为反例. (注意: A 不是方阵时也有左右可逆的概念, 但同时有左右逆时一定是方阵.) ▶

练习 2.3.14. 设 $m \times n$ 矩阵 A 列满秩, 求证: 存在行满秩的 $n \times m$ 矩阵 B, 使得 $BA = I_n$.

◀ 我们有 $m \geq n$. 由 A 的秩为 n, A 的行向量 $a_1^T, \cdots, a_m^T$ 生成了整个 (n 维) 行向量空间, 故存在 $b_{i1}, \cdots, b_{in}$ 使得 $b_{i1}a_1^T + \cdots + b_{in}a_m^T = e_i^T$. 取 $B = (b_{ij})$ 即有 $BA = I_n$. 由 $n = rank(I_n) = rank(BA) \leq rank(B) \leq n$, 我们有 $rank(B) = n$ 即 B 行满秩. ▶

练习 2.3.15. 证明命题 2.3.10.

命题 2.3.10: 1. 矩阵 A 可逆当且仅当 A 满秩.

2. 矩阵 A 是零矩阵当且仅当 $rank(A) = 0$.

◀ 由于相抵不改变命题中的条件, 故只需考虑 A 的相抵标准形 $\begin{bmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{bmatrix}$. 第一个命题的两边均等价于 $n - r = 0$, 第二个命题的两边均等价于 $r = 0$. ▶

练习 2.3.16. 设 A, B 是 n 阶方阵，利用不等式 $rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$，证明，

1. 如果 $AB = I_n$，则 A, B 都可逆，且 $BA = I_n$.

◀ 若 $AB = I_n$，由不等式 $rank(A) = rank(B) = n$, 故 A, B 都可逆. 由 $AB = I_n$, B 为 A 的逆，故 $BA = I_n$. ▶

2. 如果 AB 可逆，则 A, B 都可逆.

◀ 由不等式 $rank(A) = rank(B) = n$, 故 A, B 都可逆. ▶

练习 2.3.17. 证明命题 2.3.15.

命题 2.3.15: 给定两个 $m \times n$ 矩阵 A, B. 那么二者相抵，当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $PAQ = B$.

◀ 初等行变换即左乘可逆阵，初等列变换即右乘可逆阵. ▶

练习 2.3.18. 证明，当 A 行满秩时，仅用初等列变换就可以把它化为相抵标准形；当 A 列满秩时，仅用初等行变换就可以把它化为相抵标准形.

◀ 第一个断言是第二个的转置, 只证第二个断言. 考虑 A 的行简化阶梯形, 其必形如 $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 2.3.19. 对二阶方阵 A，如果存在 $n>2$，使得 $A^n=0$，求证: $A^2=0$.

◀ 在秩不等式 $rank(AB)+rank(BC)\le rank(ABC)+rank(B)$ 中取 $B=A^{k-1}, C=A$ 有 $rank(A^{k-1})-rank(A^k)\ge rank(A^k)-rank(A^{k+1})$, 故若对某个 k 有 $rank(A^{k-1})=rank(A^k)$, 则 $rank(A^{k-1})=rank(A^k)=rank(A^{k+1})=\cdots$. 设 p 是最小的正整数使得 $A^p=0$, 我们有 $2=rank(I_2)>rank(A)>\cdots>rank(A^p)=0$, 故 $p\le 2$. ▶

练习 2.3.20. 多项式 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，求证：对任意方阵 A，都有 $rank(f(A))\le rank(A)$.

◀ 由 $f(0)=0$，存在某个多项式 $g(x)$ 使得 $f(x)=xg(x)$. $rank(f(A))=rank(A\cdot g(A))\le rank(A)$. ▶

练习 2.3.21. 证明反对称矩阵的秩是偶数．由此证明，奇数阶反对称矩阵一定不可逆.

◀ 我们需要进行保持反对称性的操作以求得反对称阵的不变量. 下面对 A 的阶数归纳证明对反对称阵 A, 存在可逆阵 P 使得 $P^TAP=diag(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},0,\cdots,0)$.

归纳奠基. 对 1 阶反对称阵 $A=0$ 命题显然成立. 2 阶反对称阵形如 $\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$. 若 $a=0$, 命题显然成立. 若 $a<0$, 我们可以互换 A 的两行, 再互换 A 的两列 (这对应取 $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 并考虑 P^TAP), 故只需考虑 $a>0$ 的情况. 此时取 $P=\begin{bmatrix} a^{-\frac{1}{2}} & \\ & a^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$ 即可.

归纳提升. 设命题对 $k-1$ 阶反对称阵和 $k-2$ 阶反对称阵成立. 我们证明命题对 k 阶反对称阵 A 成立.

若 A 的第一行为 0, 即 $A=diag(0,A_1)$, 其中 A_1 为 A 右下角 $k-1$ 阶的反对称块, 由归纳假设存在可逆阵 P_1 使得 $P_1^TA_1P_1=diag(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},0,\cdots,0)$. 取 $P=diag(1,P_1)$, 则 $P^TAP=diag(0,\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},0,\cdots,0)$, 再取一个置换矩阵 P' 交换对角块的顺序即可.

若 A 的第一行不为 0, 取某个适当的置换矩阵 P'' 并考虑 P''^TAP'', 只需考虑 A 的 $(2,1)$ 元不为 0 的情况, 此时 $A=\begin{bmatrix} A_2 & -*^T \\ * & *' \end{bmatrix}$, 其中 $A_2=\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$, $a\ne 0$. 取 $P=\begin{bmatrix} I_2 & A_2^{-1}*^T \\ & I_{k-2} \end{bmatrix}$ 并考虑 P^TAP, 我们将 A 化为了某个准对角阵, 再应用 $k-2$ 阶时的归纳假设, 我们将 A 化为了 $diag(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},0,\cdots,0)$ 的形式.

故反对称阵的秩是偶数. 奇数阶反对称阵不满秩, 从而不可逆. (这是相合部分的标准结论.) ▶

练习 2.3.22. 设 A 是 n 阶可逆实反对称矩阵，b 是 n 维实列向量，求证:

1. $rank(A+bb^T)=n$;

◀ 相抵证明 $\begin{bmatrix} 1 & \\ & A+bb^T \end{bmatrix}$ 可逆: $\begin{bmatrix} 1 & \\ & A+bb^T \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{b\text{左乘第 1 行}}\begin{bmatrix} 1 & \\ b & A+bb^T \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 2 列}]{\text{第 1 列右乘}-b^T}\begin{bmatrix} 1 & -b^T \\ b & A \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 1 行}]{b^TA^{-1}\text{左乘第 2 行}}\begin{bmatrix} 1 & \\ b & A \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{-b\text{左乘第 1 行}}\begin{bmatrix} 1 & \\ & A \end{bmatrix}$. 注意对反对称方阵 A^{-1} 有 $b^TA^{-1}b=0$. (本题也可以通过证明对应的齐次线性方程组只有零解得到满秩. 一般地, 考虑特征值可知若方阵 A 的对称分量与反对称分量之一可逆, 则 A 可逆.) ▶

2. $rank(\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}) = n$.

◀ 相抵. $\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{-b^TA^{-1}\text{左乘第 1 行}} \begin{bmatrix} A & b \\ & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 列}]{\text{第 1 列右乘}-A^{-1}b} \begin{bmatrix} A & \\ & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 2.3.23 (满秩分解)**.** 1. 求向量 u, v, 使得 $uv^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$.

◀ $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. ▶

2. 设 A 是秩为 $r > 0$ 的 $m \times n$ 的矩阵, 令 C 为 A 的主列按顺序组成的矩阵, 则 C 有几行几列? 令 R 为 A 的行简化阶梯形的非零行按顺序组成的矩阵, 则 R 有几行几列? 求证 $A = CR$.

◀ m 行 r 列. r 行 n 列. 若 A 为行简化阶梯形, 不难看出 $A = CR$. 对一般的矩阵 A', 我们有 $A' = PA$, 其中 P 可逆, A 为某个行简化阶梯形矩阵. 记 A' 对应的矩阵为 C', R', 我们有 $C' = PC$, $R' = R$, 由 $A = CR$ 我们有 $A' = C'R'$. ▶

3. 任意秩为 $r > 0$ 的 $m \times n$ 矩阵 A 可以分解成列满秩矩阵和行满秩矩阵的乘积，即分别存在 $m \times r, r \times n$ 矩阵 C, R，且 $rank(C) = rank(R) = r$，使得 $A = CR$.

◀ 由上一问即得. ▶

4. 证明，任意线性映射 f 都存在分解 $f = g \circ h$，其中 g 是线性满射，h 是线性单射. 提示：对一般的映射，也有类似的结论，见练习 1.1.8.

◀ 设 f 对应的矩阵是 A, 取 g, h 分别为上一问的分解中的 C, R 对应的线性映射即可. ▶

练习 2.3.24 (秩一分解)**.** 证明，任意秩为 $r > 0$ 的矩阵 A 可以分解成 r 个秩为 1 的矩阵的和.

◀ 考虑相抵标准形 $A = Pdiag(I_r, 0)Q$, 则 $A = Pdiag(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, 0)Q + \cdots + Pdiag(\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, 0)Q$ 即为欲求分解. ▶

2.4. 线性方程组的解集.

练习 2.4.1. 求下列矩阵零空间的一组基:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 7 & -5 & 5 & 5\\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 2\\ -3\\ 7\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2\\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4\\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ -5\\ 0\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$. ▶

练习 2.4.2. 求下列方程组的全部解: $\begin{cases}2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1,\\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1,\\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1.\end{cases}$

◀ $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5\\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{6}x_5\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}$. ▶

练习 2.4.3. 求下列矩阵零空间的一组基.

1. $\begin{bmatrix}I_n & I_n\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}e_i\\ -e_i\end{bmatrix}, i = 1, 2, \cdots, n.$ ▶

2. $\begin{bmatrix}I_n & I_n\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}e_i\\ -e_i\end{bmatrix}, i = 1, 2, \cdots, n.$ ▶

3. $\begin{bmatrix}I_n & I_n & I_n\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}e_i\\ -e_i\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}e_i\\ 0\\ -e_i\end{bmatrix}, i = 1, 2, \cdots, n.$ ▶

练习 2.4.4. 给定 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ 6 & 1 & \\ 9 & 8 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ & 1 & 2 & 3\\ & & 1 & 2\end{bmatrix}$，求 A 的零空间、列空间、行空间、左零空间的一组基.

◀ 对 A 做可逆行变换不改变 A 的零空间, A 的零空间即为 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ & 1 & 2 & 3\\ & & 1 & 2\end{bmatrix}$ 的零空间, 一组基为 $\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

对 A 做可逆列变换不改变 A 的列空间, A 的列空间即为 $\begin{bmatrix}1 & & \\ 6 & 1 & \\ 9 & 8 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 6 & 1 & & \\ 9 & 8 & 1 & \end{bmatrix}$ 的列空间, 一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

A 的行空间即为 A^T 的列空间, 对 A 做可逆行变换不改变 A^T 的列空间, A^T 的列空间即为 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ & 1 & 2 & 3\\ & & 1 & 2\end{bmatrix}^T$ 的列空间, 一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$.

A 的左零空间即为 A^T 的零空间,对 A 做可逆列变换不改变 A^T 的零空间, A^T 的零空间即为 $\begin{bmatrix}1 & & & \\ 6 & 1 & & \\ 9 & 8 & 1 & \end{bmatrix}^T$ 的零空间, 一组基为 $\varnothing$. ▶

练习 2.4.5. 线性方程组 $Ax=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ 的全部解是 $x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 求 A.

◀ 对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 故可解出 A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ & \end{bmatrix}$, A 的每行是 $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$ 的线性组合. 代入特解 $x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 解得 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}$. ▶

练习 2.4.6. 求常数 a,b,c, 使得方程 $\begin{bmatrix}1 & -3 & -1\end{bmatrix}x=12$ 的所有解都具有如下形式: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}c\\0\\1\end{bmatrix}x_3$.

◀ 考察特解 $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 得 $a = 12$. 对应的齐次线性方程组 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} x = 0$ 的解形如 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$, 解得 $b = 3, c = 1$. ▶

练习 2.4.7. 设 3×4 矩阵 A 的零空间的一组基是 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. 求 $rank(A)$.

◀ $rank(A) = 4 - dim(N(A)) = 3$. ▶

2. 写出 A 的行简化阶梯形.

◀ A 对应的行简化梯形矩阵对应零空间 $N(A)$ 满足的一组线性无关的线性方程. 设 $N(A)$ 的一组基为 $a_1, \cdots, a_k$, 解方程 $x^T \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{bmatrix} = 0$ 得到一组线性无关的行向量 x^T, 再做行变换化为行简化梯形即为 A 的行简化梯形. (解方程时选取适当的解, 可以直接得到行简化梯形.) 解得 A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & & -2 & \\ & 1 & -3 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

3. 方程组 $Ax = b$ 对哪些 b 有解?

◀ 由 A 行满秩, 存在矩阵 $B_{4\times 3}$ 使得 $AB = I_3$. 对任意的 b, $Ax = b$ 有解 $x = Bb$. ▶

练习 2.4.8. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 对任意 $v \in \mathbb{R}^4$, 令 $S_v := \{v + x_0 | x_0 \in N(A)\}$, 即由 $N(A)$ 沿着 v 平移后得到的子集. 令 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, 求 b_i 使得 S_{v_i} 是 $Ax = b_i$ 的解集, 并分析 v_1, v_2, v_3 之间的关系.

◀ $b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 38 \\ 86 \\ 1 \end{bmatrix}$. ▶

练习 2.4.9. 设 A, B, C, D 为二阶方阵，如果分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 满足每一行、每一列以及四个二阶子方阵中的四个元素都是 1,2,3,4，则称 M 为四阶数独矩阵. 写出一个四阶数独矩阵，并分别求其列空间、行空间、零空间和左零空间的一组基.

◀ 例: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. 这样的矩阵总有秩 3, 故你给出的四个空间的维数应为 $3, 3, 1, 1$. ▶

练习 2.4.10. 把国际象棋的棋盘以及棋子的初始位置分别抽象成如下矩阵 B 和 C:

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}r&n&b&q&k&b&n&r\\p&p&p&p&p&p&p&p\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\p&p&p&p&p&p&p&p\\r&n&b&q&k&b&n&r\end{bmatrix}.$$

分别求其列空间、行空间、零空间和左零空间的一组基.

◀ 注意对 A 做行变换不改变 $N(A)$ 和 $R(A^T)$, 对 A 做列变换不改变 $R(A)$ 和 $N(A^T)$, 故做行变换或列变换化为标准形可求得列空间 (列的线性组合) 和零空间 (线性方程组的解空间).

$$R(B)=R(B^T):\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}.N(B)=N(B^T):\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

对 C 的元素讨论.

(1). $r=n=b=q=k=p=0$. $C=0.R(C)=R(C^T):\varnothing.N(C)=N(C^T):e_1,\cdots,e_8$.

(2). $r=n=b=q=k=0$, $p\neq 0$. $R(C):e_2+e_7.R(C^T):e_1+\cdots+e_8.N(C):e_1,e_3,e_4,e_5,e_6,e_8,e_2-e_7.N(C^T):e_i-e_{i+1},1\le i\le 7$.

(3). $p=0$, r,n,b,q,k 不全为 0.

(4). $p\neq 0$, r,n,b,q,k 不全为 0. 具体计算与前面方法相同, 不再赘述. ▶

练习 2.4.11. 在平面直角坐标系下给定点 $A(a_1,a_2),B(b_1,b_2),C(c_1,c_2)$, 证明, A,B,C 三点不共线当且仅当矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&a_2&1\\b_1&b_2&1\\c_1&c_2&1\end{bmatrix}$ 可逆.

◀ 平面上的点 $A(a_1,a_2),B(b_1,b_2),C(c_1,c_2)$ 不共线 $\iff$ $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $A'=(a_1,a_2,1)^T,B'=(b_1,b_2,1)^T,C'=(c_1,c_2,1)^T$ 线性无关 $\iff$ 矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&a_2&1\\b_1&b_2&1\\c_1&c_2&1\end{bmatrix}$ 可逆. ▶

练习 2.4.12. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_t$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的解, 其中 $b\neq 0$, 证明, $c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t$ 也是解当且仅当 $c_0+\cdots+c_t=1$.

◀ 这是因为 $A(c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t)=(c_0+\cdots+c_t)b$. ▶

练习 2.4.13. 设 x_0 是线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，其中 $b\neq 0$，而 $k_1,\cdots,k_t$ 是 $N(A)$ 的一组基. 令 $x_i=x_0+k_i$, $1\le i\le t$, 证明，线性方程组的任意解都可唯一地表示成 $c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t$，其中 $c_0+\cdots+c_t=1$.

◀ 注意到 $c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t=x_0+c_1k_1+\cdots+c_tk_t$. ▶

练习 2.4.14. 对任意 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的向量组 $x_0, x_1, \cdots, x_t$，证明，存在满足如下条件的非齐次线性方程组：

1. $x_0, x_1, \cdots, x_t$ 都是此方程组的解；
2. 该方程组的任意解都能被 $x_0, x_1, \cdots, x_t$ 线性表示.

◀ $x_1, \cdots, x_t$ 确定了一个含有 $n-t$ 个方程的齐次线性方程组, 使得其解空间由 $x_1 - x_0, \cdots, x_t - x_0$ 生成. 由其得到一个非齐次线性方程组, 使得 x_0 为其特解. ▶

练习 2.4.15. 给定线性方程组 $Ax = b$，和分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$. 证明，如果 $rank(A) = rank(B)$, 则方程组有解.

◀ 若方程组无解, 则 $rank(\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}) \geq rank(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}) > rank(A)$. ▶

练习 2.4.16 (Fredholm 二择一定理)**.** 线性方程组 $Ax = b$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解.

◀ $Ax = b$ 有解 $\iff$ b 在 A 的列空间中. 容易看出 $\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 有解 $\iff$ b 不在 A 的列空间中. (等价证法: $Ax = b$ 有解 $\iff$ $rank(A) = rank(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix})$, $\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 有解 $\iff$ $rank(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix}) = rank(\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{bmatrix}) \overset{\text{转置}}{\iff} rank(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}) = rank(\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$, $\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解 $\iff rank(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}) + 1 = rank(\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$.) ▶

练习 2.4.17. 如果 10 阶方阵 A 满足 $A^2 = 0$，证明 $rank(A) \leq 5$. 是否存在 $A^2 = 0$,$rank(A) = 5$ 的 10 阶方阵 A?

◀ 在秩不等式 $rank(AB) + rank(BC) \leq rank(ABC) + rank(B)$ 中取三个变元分别为 A^5, I_{10}, A^5. 例: $diag(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$. ▶

练习 2.4.18. 设 A, B 分别为 $m \times n, n \times k$ 矩阵，证明，$rank(AB) \geq rank(A) + rank(B) - n$.

◀ 在秩不等式 $rank(AB) + rank(BC) \leq rank(ABC) + rank(B)$ 中取三个变元分别为 A, I_n, B. ▶

练习 2.4.19. 对 n 阶方阵 A，求证：

1. $A^2 = A$ 当且仅当 $rank(A) + rank(I_n - A) = n$.

◀ 相抵. $\begin{bmatrix} A & \\ & I_n - A \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 列}]{\text{第 1 列右乘}I} \begin{bmatrix} A & A \\ & I_n - A \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{I\text{左乘第 1 行}} \begin{bmatrix} A & A \\ A & I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 行}]{-A\text{左乘第 2 行}} \begin{bmatrix} A - A^2 & \\ A & I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 列}]{\text{第 2 列右乘}-A} \begin{bmatrix} A - A^2 & \\ & I_n \end{bmatrix}$. 故 $rank(A) + rank(I_n - A) = rank(A - A^2) + n = n \iff rank(A - A^2) = 0 \iff A^2 = A$. (直接应用秩不等式 (取秩不等式中的三个变元为 $A, I_n, I_n - A$) 以及其中等号成立的条件即可. 这里相当于重新证明了一遍秩不等式. 下一问同理.) ▶

2. $A^2 = I_n$ 当且仅当 $rank(I_n + A) + rank(I_n - A) = n$.

◀ 相抵. $\begin{bmatrix} I_n + A & \\ & I_n - A \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 列}]{\text{第 1 列右乘}I} \begin{bmatrix} I_n + A & I_n + A \\ & I_n - A \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{I\text{左乘第 1 行}} \begin{bmatrix} I_n + A & I_n + A \\ I_n + A & 2I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 列}]{\text{第 2 列右乘}-\frac{1}{2}(I_n+A)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I_n - A^2) & I_n + A \\ & 2I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{加到第 1 行}]{-\frac{1}{2}(I_n+A)\text{左乘第 2 行}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I_n - A^2) & \\ & 2I_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}I_n\text{左乘第 2 行}]{2I_n\text{左乘第 1 行}} \begin{bmatrix} I_n - A^2 & \\ & I_n \end{bmatrix}$. 故 $rank(I_n + A) + rank(I_n - A) = rank(I_n - A^2) + n = n \iff rank(I_n - A^2) = 0 \iff A^2 = I_n$. ▶

练习 2.4.20. 证明或否定：如果对任意 b，方程组 $A_1 x = b$ 和 $A_2 x = b$ 总有相同的解集，则 $A_1 = A_2$.

◀ 取 $b=A_1e_i$ 为 A_1 的第 i 列, $x=e_i$ 为 $A_1x=b$ 的解, 故也是 $A_2x=b$ 的解, 即 $A_2e_i=A_1e_i$, A_2 的第 i 列等于 A_1 的第 i 列. $A_2=\begin{bmatrix}A_2e_1\cdots A_2e_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1e_1\cdots A_1e_n\end{bmatrix}=A_1$. ▶

练习 2.4.21. 证明，$\mathbb{R}^n$ 的任意子空间一定是某个矩阵的零空间.

◀ 设这个子空间的基为 $a_1,\cdots,a_r$,将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_{n-r}$, 则线性映射 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-r}$, $k_1a_1+\cdots+k_ra_r+l_1b_1+\cdots+l_{n-r}b_{n-r}\mapsto l_1e_1+\cdots+e_{n-r}b_{n-r}$ 的矩阵的零空间即为这个子空间. ▶

练习 2.4.22. 设 A,B 分别是 $l\times n,m\times n$ 矩阵，证明，$N(A)\subseteq N(B)$ 当且仅当存在 $m\times l$ 矩阵 C，使得 $B=CA$.

◀ $N(A)\subseteq N(B)\iff B$ 的行可被 A 的行线性表示 (为什么?) $\iff$ 存在 $m\times l$ 矩阵 C，使得 $B=CA$. ▶

练习 2.4.23. 设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明，$N(A)=N(B)$ 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 T，使得 $B=TA$.

◀ $N(A)=N(B)\iff A,B$ 的行可以互相线性表示 $\iff$ 存在 m 阶可逆矩阵 T，使得 $B=TA$. ▶

练习 2.4.24. 设 A 是 n 阶方阵，求证：存在 $k\le n$，满足 $rank(A^k)=rank(A^{k+1})=\cdots$. 由此证明，如果存在 p 使得 $A^p=0$，则 $A^n=0$.

◀ 在秩不等式 $rank(AB)+rank(BC)\le rank(ABC)+rank(B)$ 中取 $B=A^{k-1},C=A$ 有 $rank(A^{k-1})-rank(A^k)\ge rank(A^k)-rank(A^{k+1})$, 故若对某个 k 有 $rank(A^{k-1})=rank(A^k)$, 则 $rank(A^{k-1})=rank(A^k)=rank(A^{k+1})=\cdots$. 设 p 是最小的正整数使得 $A^p=0$, 我们有 $n=rank(I_n)>rank(A)>\cdots>rank(A^p)=0$, 故 $p\le n$. ▶

练习 2.4.25 (Kirchhoff 电流定律)**.** 对练习 2.1.22 中的电路网络，令 M_G 为对应的关联矩阵. 根据 Kirchhoff 电流定律，求 M_G 左零空间的一组基.

练习 2.4.26. 在例 2.4.7 中，有结论 $rank(M_G^TR^{-1}M_G)=rank(M_G)$, 其中 R^{-1} 为对角元素都大于零的对角矩阵. 根据下列思路证明该结论.

1. 若 $y^TR^{-1}y=0$, 则 $y=0$.
2. $M_Gx=0$, 当且仅当 $M_G^TR^{-1}M_Gx=0$.
3. $rank(M_G^TR^{-1}M_G)=rank(M_G)$.

练习 2.4.27 (桥墩载荷)**.** 现在假设桥有三个桥墩，重力为 F_1 的重物和桥墩位置关系如图 2.4.5 所示. 以 S_1,S_2,S_3 三处为杠杆，列出方程

$$\begin{bmatrix}0&-d_1&-d_1-d_2\\d_1&0&-d_2\\d_1+d_2&d_2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_1F_1\\(d_1-l_1)F_1\\(d_1+d_2-l_1)F_1\end{bmatrix}$$

可以发现系数矩阵秩是 2，因此方程组有无穷多解. 与实际矛盾！添加力平衡条件如何？添加其他支点的杠杆平衡条件如何？全部无用！事实上，不管有多少桥墩，系数矩阵的秩都是 2. 问题出在哪里？关键问题在于我们忽略了桥的形变，以及认为结构横向联系无限强. 在实际工程计算中，这种简单实用的杠杆法要假设载荷只由相邻的两个桥墩承担. 另一种可行做法是考虑桥的形变以及结构的横向联系对载荷的影响，所需物理知识已大大超出了本书的范围.

3. 内积和正交性

3.1. 基本概念.

练习 3.1.1. 证明命题 3.1.3.

命题 3.1.3: 向量内积满足如下性质：

1. 对称性：$a^Tb=b^Ta$；

2. 双线性性：$a^T(k_1b_1+k_2b_2)=k_1a^Tb_1+k_2a^Tb_2$, $(k_1a_1+k_2a_2)^Tb=k_1a_1^Tb+k_2a_2^Tb$；

3. 正定性：$a^Ta\geq 0$，且 $a^Ta=0$ 当且仅当 $a=0$.

◀ 对称性对 1×1 矩阵取转置即得. 双线性性是由于矩阵乘法的双线性性. 正定性直接对 a 的坐标计算即得. ▶

练习 3.1.2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中求向量 a,b 的夹角.

1. $a=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\2\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\1\end{bmatrix}$.

◀ $\frac{\pi}{2}$. ▶

2. $a=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\3\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\1\\5\\1\end{bmatrix}$.

◀ $\frac{\pi}{4}$. ▶

3. $a=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$.

◀ $arccos\frac{3}{\sqrt{77}}$. ▶

练习 3.1.3. 求证：

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 a,b 夹角为 0，当且仅当存在 $k\geq 0$，使得 $a=kb$.

◀ a,b 夹角为 $0\iff a^Tb=\sqrt{\|a\|=\|b\|}\iff$ 存在 $k\geq 0$，使得 $a=kb$ (Schwarz 不等式的取等条件). ▶

2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的两向量 a,b 正交，当且仅当对任意实数 t，有 $\|a+tb\|\geq\|a\|$.

◀ 由命题 3.1.7 即得. ▶

3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 a,b 正交，当且仅当 $\|a+b\|=\|a-b\|$.

◀ a,b 正交 $\iff a^Tb=0\iff a^Ta+2a^Tb+b^Tb=a^Ta-2a^Tb+b^Tb\iff\|a+b\|^2=\|a-b\|^2$. ▶

练习 3.1.4. 证明推论 3.1.5.

推论 3.1.5 (三角不等式): $\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|$，等号成立当且仅当 a,b 共线.

◀ 两边平方，这等价于 $a^Ta+2a^Tb+b^Tb\leq a^Ta+2\|a\|\,\|b\|+b^Tb$，由 Schwarz 不等式即得. ▶

练习 3.1.5 (Cauchy-Schwarz 不等式的其他证明). 1. 先证明 a,b 都是单位向量的情形: $|a^Tb|\leq 1$，且等号成立当且仅当 $a=\pm b$. 再由单位向量的情形推广到一般的情形. 提示：利用均值不等式 $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$.

◀ 对每个分量使用均值不等式即得. 注意两边都是双线性的，故一般情况可约化到单位向量的情况. ▶

2. 根据内积的正定性，对任意实数 t，都有 $(a+tb)^T(a+tb)=a^Ta+2ta^Tb+t^2b^Tb\geq 0$. 利用判别式证明结论.

◀ 由二次型正定，其判别式非负. Cauchy-Schwarz 不等式取等对应判别式等于 0. ▶

练习 3.1.6. 给定 (非零向量) $a\in\mathbb{R}^3$. 计算 a 与坐标向量 e_1,e_2,e_3 的夹角的余弦，并计算这三个余弦值的平方和.

◀ 设 $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, 则三个余弦为 $\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$. 平方和为 1. ▶

练习 3.1.7. 设 $\|a\|=3, \|b\|=4$，确定 $\|a-b\|$ 的取值范围.

◀ $[1,7]$. ▶

练习 3.1.8. 设 $a=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}z\\x\\y\end{bmatrix}$, 且 $x+y+z=0$. 确定 a,b 夹角的取值范围.

◀ a,b 夹角的余弦值为 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\frac{1}{2}((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))}{x^2+y^2+z^2}=-\frac{1}{2}$. 故夹角为 $\frac{2}{3}\pi$. ▶

练习 3.1.9. 1. 找到 $\mathbb{R}^4$ 中的四个两两正交的向量，且每个向量的每个分量只能是 ±1.

◀ $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$. ▶

2. $\mathbb{R}^n$ 中最多有多少个两两正交的向量?

◀ n 个. (由于这些向量线性无关.) ▶

练习 3.1.10. 1. 找到 $\mathbb{R}^2$ 中的三个向量，使它们之间两两内积为负.

◀ $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$. ▶

2. 找到 $\mathbb{R}^3$ 中的四个向量，使它们之间两两内积为负.

◀ $\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\3\end{bmatrix}$. ▶

3. $\mathbb{R}^n$ 中最多有多少个向量，使它们之间两两内积为负？

◀ $n+1$ 个. 注意将 $\mathbb{R}^n$ 中两两内积为负的向量 $a_1,\cdots,a_m$ 中的前 $m-1$ 个投影到与 a_m 垂直的平面上，我们得到了 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中 $m-1$ 个两两内积为负的向量: 这是由于 $i\neq j$ 时 $a_i-\frac{a_i^Ta_m}{a_m^Ta_m}a_m$ 与 $a_j-\frac{a_j^Ta_m}{a_m^Ta_m}a_m$ 的内积仍然为负. 存在性类似前两问直接构造. ▶

练习 3.1.11. 在 $\mathbb{R}^4$ 中求一单位向量与下列向量正交：

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}, a_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

◀ 解线性方程组 $x^T\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}=0$ 再将 x 单位化. 最后得到单位向量 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix}4\\0\\1\\-3\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.1.12. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基，证明,

1. 如果 $b^Ta_i=0\,(1\leq i\leq n)$, 则 $b=0$.

◀ 这是由于 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. ▶

2. 如果 $b_1^T a_i = b_2^T a_i\,(1 \le i \le n)$, 则 $b_1 = b_2$.

◀ 这是由于 $b_1 - b_2 = 0$. ▶

练习 3.1.13. 设 a_1, a_2, a_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，证明下列向量组也是一组标准正交基：

$b_1 = \frac{1}{3}(2a_1 + 2a_2 - a_3)$, $b_2 = \frac{1}{3}(2a_1 - a_2 + 2a_3)$, $b_3 = \frac{1}{3}(a_1 - 2a_2 - 2a_3)$.

◀ 这是由于过渡矩阵 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 是正交矩阵. ▶

练习 3.1.14. 设 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是 $\mathbb{R}^5$ 的一组标准正交基，令 $b_1 = a_1 + a_5, b_2 = a_1 - a_2 + a_4, b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3$, 求 $span(b_1, b_2, b_3)$ 的一组标准正交基.

◀ $\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_5)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(a_1 - 2a_2 + 2a_4 - a_5)$, $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 - a_5)$. ▶

练习 3.1.15. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0, \end{cases}$ 解空间的一组标准正交基.

◀ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{3\sqrt{35}}\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 6 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.1.16. 利用 Gram-Schmidt 正交化方法求由下列向量线性生成的子空间的标准正交基：

1. $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

◀ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. ▶

2. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{3\sqrt{70}}\begin{bmatrix} -12 \\ 13 \\ 14 \\ 11 \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.1.17. 证明命题 3.1.13.

命题 3.1.13: 设 M, N 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间，如果 $M \subseteq N$，则 M 的任意一组标准正交基都可以扩充成 N 的一组标准正交基.

◀ 首先将 M 的这组标准正交基扩充成 N 的一组基，再做 Gram-Schmidt 正交化. M 的这组标准正交基在正交化下不变. ▶

练习 3.1.18 (勾股定理的高维推广)**.** 1. 向量 $a, b \in \mathbb{R}^n$ 围成一个三角形，证明其面积的平方为 $\frac{1}{2}(\|a\|^2 \|b\|^2 - (a^T b)^2)$.

◀ 使用三角形面积关于余弦的公式. ▶

2. 两两垂直的向量 $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ 围成一个四面体，证明其斜面上三角形面积的平方等于其余三个直角三角形面积的平方和.

◀ 使用上一问得到的面积公式. 注意斜边上的三角形由 $a-b, a-c$ 张成. ▶

练习 3.1.19. 取定非零向量 $a \in \mathbb{R}^n$，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的一个变换，它将每个向量 b 映射到其向直线 $span(a)$ 正交投影后平行于 a 的部分.

1. 证明这是一个线性变换，其表示矩阵为 $A = \frac{aa^T}{a^T a}$.

◀ 线性由投影的线性得到. 将 a 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基，易见这个线性变换在这组基上的作用与 A 确定的线性变换在这组基上的作用相同，从而 A 是这个线性变换的表示矩阵. ▶

2. 证明 $A^2 = A, A^T = A$.

◀ 直接对 $A = \frac{aa^T}{a^T a}$ 验证. ▶

练习 3.1.20 (内积决定转置)**.** 求证：设 $m \times n$ 矩阵 A 和 $n \times m$ 矩阵 B，如果对任意 $v \in \mathbb{R}^m$,$w \in \mathbb{R}^n$，都有 $(Bv)^T w = v^T (Aw)$，则 $B = A^T$.

◀ 取 v, w 为 $\mathbb{R}^m$,$\mathbb{R}^n$ 的标准正交基代入检验. (矩阵的转置在线性映射层面的某种对应是线性映射的共轭映射.) ▶

练习 3.1.21 (Riesz 表示定理)**.** 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是线性映射，证明，存在向量 b，使得对任意 $a \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(a) = b^T a$.

◀ 取 $b = \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.1.22. 1. (平行四边形法则) 证明 $\mathbb{R}^n$ 中任意平行四边形的两条对角线长度的平方和，等于其四条边长的平方和.

◀ 设平行四边形相邻的两条边为向量 a, b, 欲证 $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$. 某个向量范数的平方是其内积, 使用内积的双线性直接展开. ▶

2. (极化公式) 证明 $v^T w = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$. 提示：这意味着，长度决定角度.

◀ 直接展开. ▶

3. 设 $\|a\|_4 = (\sum_{i=1}^n a_i^4)^{\frac{1}{4}}$ ，定义关于 v, w 的二元函数 $\frac{1}{4}(\|v+w\|_4^2 - \|v-w\|_4^2)$. 这个二元函数是否满足内积定义中的对称性、双线性、正定性？

◀ 满足内积定义中的对称性、正定性，不满足双线性. ▶

4. 定义 $\|a\|_\infty$ 为所有分量中绝对值的最大值，定义关于 v, w 的二元函数 $\frac{1}{4}(\|v+w\|_\infty^2 - \|v-w\|_\infty^2)$. 这个二元函数是否满足内积定义中的对称性、双线性、正定性？此时，三角不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式是否仍然成立？

◀ 满足内积定义中的对称性、正定性，不满足双线性. Cauchy-Schwarz 不等式由练习 3.1.5.2 仍然成立，从而三角不等式也成立. ▶

练习 3.1.23. 将某个矩阵分解为平均值与细节的叠加，我们得到了可逆的图像压缩.

3.2. **正交矩阵和 QR 分解.**

练习 3.2.1. 求一个四阶正交矩阵，其中前两个列向量分别为：$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\2\end{bmatrix}$，$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix}$.

◀ 列向量为 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\2\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix}2\\1\\4\\0\end{bmatrix}$, $\frac{1}{3\sqrt{14}}\begin{bmatrix}2\\8\\-3\\7\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.2. 写出元素都是 0 或 1 的所有三阶正交矩阵.

◀ $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.3 (Hadamard 矩阵)**.** 给定 n 阶矩阵 A，如果 A 的元素都是 1 或 -1，且 $A^TA = nI_n$，则称 A 是一个 n 阶 Hadamard 矩阵．显然 Hadamard 是所有元素绝对值相同的正交矩阵的倍数．可以证明 Hadamard 矩阵的阶只能是 $1, 2$ 或 $4k, k = 1, 2, \cdots$. 然而是否存在 $4k$ 阶 Hadamard 矩阵，还是一个悬而未决的问题，称为 Hadamard 猜想．Hadamard 矩阵在信号处理中有应用.

练习 3.2.4. 1. 列举所有的 $1, 2$ 阶 Hadamard 矩阵.

◀ $\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$. ▶

2. 说明不存在 3 阶 Hadamard 矩阵.

◀ 两个元素均为 ±1 的奇数维向量不可能正交. ▶

3. 找出一个 4 阶 Hadamard 矩阵.

◀ $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$. ▶

4. 证明如果 A 是 Hadamard 矩阵，则 $\begin{bmatrix}A&A\\A&-A\end{bmatrix}$ 也是 Hadamard 矩阵．以此说明存在 2^n 阶 Hadamard 矩阵．提示：这与阅读 3.1.23 中的 Haar 小波基相关.

◀ 直接验证. ▶

练习 3.2.5. 证明，上三角矩阵是正交矩阵时，必是对角矩阵，且对角元素是 ±1.

◀ 这是由于其列向量构成单位正交基. (推论: 若 A, B 为满足 $A^TA = B^TB$ 的上三角阵,则 $(AB^{-1})^T(AB^{-1}) = I$，这说明 $A = diag(\pm1, \cdots, \pm1)B$. 若进一步有 A, B 对角元非负，则 $A = B$.) ▶

练习 3.2.6. 证明，分块上三角矩阵 $\begin{bmatrix}c&a^T\\0&Q\end{bmatrix}$ 是正交矩阵时，必有 $c = \pm1$, $a = 0$, Q 是正交矩阵.

◀ 由第一列是单位向量，$c = \pm1$. 由第一列与其他列正交，$a = 0$. 再由 $\begin{bmatrix}\pm1&0\\0&Q\end{bmatrix}$ 正交得到 Q 正交. ▶

练习 3.2.7. 对标准基 $e_1, \cdots, e_n$, 显然 $\sum_{i=1}^n e_ie_i^T = I_n$. 对任意标准正交基 $q_1, \cdots, q_n$, 求证 $\sum_{i=1}^n q_iq_i^T = I_n$.

◀ 注意 $\begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$ 为正交矩阵以及 $\sum_{i=1}^n q_i q_i^T = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$. ▶

练习 3.2.8. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两组标准正交基，证明存在正交矩阵 Q, 使得 $Qa_i = b_i$, $1 \le i \le n$.

◀ $Qa_i = b_i$, $1 \le i \le n$ 等价于 $Q \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$. $Q = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{-1}$ 为两个正交矩阵之积故正交. ▶

练习 3.2.9. 设 $a_1, \cdots, a_s$ 和 $b_1, \cdots, b_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个向量组，证明，存在正交矩阵 Q, 使得 $Qa_i = b_i$, $1 \le i \le s$, 当且仅当 $a_i^T a_j = b_i^T b_j$, $1 \le i, j \le s$.

◀ $\Rightarrow$: $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix}^T Q^T Q \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix}$.

$\Leftarrow$: $Qa_i = b_i$, $1 \le i \le s$ 等价于 $Q \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_s \end{bmatrix}$. 注意同时对 $a_1, \cdots, a_s$ 和 $b_1, \cdots, b_s$ 做同样的初等变换 (对应以可逆阵右乘于 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_s \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_s \end{bmatrix}$) 不改变题目中的两个条件. 通过做适当的初等变换，可以设 $a_1, \cdots, a_s$ 和 $b_1, \cdots, b_s$ 仅有前 $t < n$ 个向量非 0. 此时可以使用 QR 分解: $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_t \end{bmatrix} = Q_1 \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix} = Q_2 \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 Q_1, Q_2 是 n 阶正交阵, R_1, R_2 为 t 阶对角元非负的上三角阵. 由 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix}$ 我们有 $R_1^T R_1 = R_2^T R_2$, 由 R_1, R_2 为对角元非负的上三角阵我们有 $R_1 = R_2$. 故 $Q_2^{-1} Q_1 \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.10. 回顾命题 3.2.4，设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，考虑下列放松的条件.

1. A 在一组基上保距，即如果对 $1 \le i \le n$，$\|Ae_i\| = \|e_i\|$，那么 A 是否一定是正交矩阵？

◀ 不一定. ▶

2. A 在一组基上保内积，即如果对 $1 \le i, j \le n$，Aa_i 与 Aa_j 的内积等于 a_i 与 a_j 的内积，那么 A 是否一定是正交矩阵?

◀ 是的. $a_i^T A^T A a_j = a_i^T a_j$, $1 \le i, j \le n$ 即 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T A^T A \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, 即 $A^T A = I$. ▶

练习 3.2.11. 设 $H_v := I_n - 2vv^T$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上反射变换的表示矩阵，Q 是 n 阶正交矩阵，证明 $Q^{-1} H_v Q$ 也是某个反射变换的表示矩阵.

◀ $Q^{-1} H_v Q = H_{Q^{-1}v}$. 将 v 扩充成一组标准正交基 $v_1 = v, v_2, \cdots, v_n$, 考察其在 $Q^{-1}v_1, \cdots, Q^{-1}v_n$ 上的作用. ▶

练习 3.2.12. 计算 QR 分解.

1. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ & & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.13. 设向量组 $v_1, \cdots, v_k$ 线性无关，首先令 q_1 为与 v_1 平行的单位向量，然后令 q_2 为二维子空间 $span(v_1, v_2)$ 中垂直于直线 $span(v_1)$ 的单位向量，再令 q_3 为三维子空间 $span(v_1, v_2, v_3)$ 中垂直于平面 $span(v_1, v_2)$ 的单位向量，以此类推．这样得到的 $q_1, \cdots, q_k$ 与 Gram-Schmidt 正交化得到的结果是否一致？如果有区别的话，区别在哪里？从 QR 分解的角度如何解释？

◀ 每个 q_i 可能相差数乘 ± 1. 这里相当于不要求 R 的对角元均为正数的 QR 分解 (故不唯一.) ▶

练习 3.2.14 (QR 分解的其他理解)**.** 考虑 $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}$ 的列向量围成的平行四边形.

1. 通过列变换，把第一列的若干倍加到第二列，使得平行四边形变成长方形．这对应着 A 右乘哪个矩阵？

◀ $\begin{bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{bmatrix}$. ▶

2. 通过旋转和反射，把平行四边形的第一条边变到 x_1 轴正半轴上，第二条边变到 x_1x_2 平面中 $x_2 > 0$ 的那一半．这对应着 A 左乘哪个正交矩阵？

◀ $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$. ▶

练习 3.2.15. 证明命题 3.2.6.

命题 3.2.6: 给定 $\mathbb{R}^n$ 中向量 x, y，满足 $\|x\| = \|y\|$，则存在反射 H_v，其中 $v = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, 使得 $H_v(x) = y$.

◀ 简单计算即得. ▶

练习 3.2.16. 证明任意 n 阶正交矩阵可以表示成不多于 n 个反射的乘积.

◀ 注意我们可以对一组单位正交基中的向量依次做 (可能的) 反射得到另一组单位正交基中的向量使得每次反射保持前面的向量不变. ▶

练习 3.2.17 (保角变换)**.** 设可逆矩阵 A 对应的线性变换保持向量之间的角度不变.

1. 对 A 进行 QR 分解，证明 R 也保持向量之间的角度不变.

◀ 这是因为 Q 保持向量之间的角度不变以及 $R = Q^{-1}A$ 为两个保角变换的复合. ▶

2. 证明 R 为对角矩阵.

◀ R 保持向量之间的角度不变说明两两正交的向量 $e_1,\cdots,e_n$ 在 R 作用下的像 $Re_1,\cdots,Re_n$ 仍然两两正交. 由于上三角阵 $R=\begin{bmatrix} r_{11} & * & \cdots & * \\ & r_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & r_{nn}\end{bmatrix}$ 的第 1 列 Re_1 与其余列正交,我们得到 $R=\begin{bmatrix} r_{11} & & & & \\ & r_{22} & * & \cdots & * \\ & & r_{33} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & r_{nn}\end{bmatrix}$.

由 R 的第 2 列与其余列正交，我们得到 $R=\begin{bmatrix} r_{11} & & & & & \\ & r_{22} & & & & \\ & & r_{33} & * & \cdots & * \\ & & & r_{44} & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & * \\ & & & & & r_{nn}\end{bmatrix}$. 对第 $3,\cdots,n-1$ 列做同样论证,我们得到 R 为对角矩阵. ▶

3. 证明 $R=kI_n$，这里 k 为常数．由此得到，A 必是某个正交矩阵的倍数.

◀ R 不改变 e_i 与 $e_1+\cdots+e_n$ 间的夹角，即 $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{e_i^T(e_1+\cdots+e_n)}{\|e_i\|\|e_1+\cdots+e_n\|}=\frac{e_i^TR^TR(e_1+\cdots+e_n)}{\|Re_i\|\|R(e_1+\cdots+e_n)\|}$ =(由 Re_i 垂直于 Re_j) $\frac{e_i^TR^TRe_i}{\|Re_i\|\|R(e_1+\cdots+e_n)\|}=\frac{\|Re_i\|}{\|R(e_1+\cdots+e_n)\|}$, 故 R 的所有对角元相等. ▶

练习 3.2.18. 设 $a_1,\cdots,a_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 m 个向量，定义矩阵 $G(a_1,\cdots,a_m):=\begin{bmatrix} a_1^Ta_1 & \cdots & a_1^Ta_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^Ta_1 & \cdots & a_m^Ta_m\end{bmatrix}$, 称为 $a_1,\cdots,a_m$ 的 Gram 矩阵．证明，

1. $a_1,\cdots,a_m$ 是标准正交向量组当且仅当 $G(a_1,\cdots,a_m)=I_m$.

◀ $a_1,\cdots,a_m$ 是标准正交向量组当且仅当 $a_i^Ta_j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$. ▶

2. Gram 矩阵 $G=G(a_1,\cdots,a_m)$ 是 m 阶对称矩阵，且对任意 $x\in\mathbb{R}^m$，都有 $x^TGx\geq 0$.

◀ 注意 $\begin{bmatrix} a_1^Ta_1 & \cdots & a_1^Ta_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^Ta_1 & \cdots & a_m^Ta_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_m\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_m\end{bmatrix}$. ▶

3. $a_1,\cdots,a_m$ 线性无关当且仅当 $G=G(a_1,\cdots,a_m)$ 可逆,也等价于对任意非零向量 $x\in\mathbb{R}^m$,都有 $x^TGx>0$.

◀ $a_1,\cdots,a_m$ 线性无关当且仅当 $\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_m\end{bmatrix}$ 可逆. ▶

3.3. 正交投影.

练习 3.3.1. 设 M 是下列齐次线性方程组的解空间: $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0,\\ 3x_1+2x_2-2x_4=0,\\ 3x_1+x_2+9x_3-x_4=0,\end{cases}$

分别求 M 和 $M^\perp$ 的一组标准正交基.

◀ 可以求出 M 的一组基，正交化后扩充为一组标准正交基，以得到 M 和 $M^\perp$ 的一组标准正交基. 以 QR 分解描述如下: 设 $A^T=Q_1R_1=\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_1\\ 0\end{bmatrix}$, 则 $A=R_1^TQ_1^T$. 由 $AQ_2=0$ 以及维数原因, $M=N(A)$ 对应矩阵 Q_2, 即 M 的一组标准正交基为 Q_2 的各列. $M^\perp=N(A)^\perp=C(A^T)$ 对应矩阵 Q_1R_1 或 Q_1, 即 $M^\perp$ 的一组标准

正交基为 Q_1 的各列. 本题解得 $Q_1=\begin{bmatrix}0.51639778 & 0.51847585\\0.25819889 & 0.41478068\\0.77459667 & -0.62217102\\-0.25819889 & -0.41478068\end{bmatrix}$, $Q_2=\begin{bmatrix}0.59881455 & 0.32548004\\-0.11142809 & -0.86537512\\-0.09980243 & -0.05424667\\0.78679374 & -0.37715506\end{bmatrix}$(精确到小数点后 8 位). ►

练习 3.3.2. 设 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 $a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ 生成子空间 $M=span(a_1,a_2)$, 求 $M^\perp$ 的一组标准正交基.

◄ 对 $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 进行 QR 分解得 $Q=\begin{bmatrix}0.57735027 & -0.25819889 & 0.77389339 & -0.03300021\\0.57735027 & 0.51639778 & -0.28256137 & -0.56582601\\0.00000000 & 0.77459667 & 0.28256137 & 0.56582601\\0.57735027 & -0.25819889 & -0.49133203 & 0.59882622\end{bmatrix}$. $M^\perp$ 的一组标准正交基由 Q 的后两列给出. ►

练习 3.3.3. 1. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 4\\6 & 3\\5 & 1\end{bmatrix}$，求两个矩阵列空间的交集中的一个非零向量；由此判断两个列空间是否正交.

◄ 注意 $C(A)\cap C(B)=N(A^T)^\perp\cap N(B^T)^\perp=(N(A^T)+N(B^T))^\perp$，计算出零空间 $N(A^T)$ 和 $N(B^T)$ 的一组基，即可求出 $C(A)\cap C(B)$。本题计算得 $N(A^T)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $N(B^T)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}3\\-5\\3\end{bmatrix}$, $N(A^T)+N(B^T)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\-5\\3\end{bmatrix}$. $C(A)\cap C(B)=(N(A^T)+N(B^T))^\perp$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}5\\6\\5\end{bmatrix}$. 由两个子空间交集非空，这两个子空间不正交. ►

2. 求标准正交基 v_1,v_2,v_3, 使得 $v_1\in R(A)\cap R(B)$, $v_1,v_2\in R(A)$, 且 $v_1,v_3\in R(B)$.

◄ $v_1=\frac{1}{\sqrt{86}}\begin{bmatrix}5\\6\\5\end{bmatrix}$, $v_2=\frac{1}{\sqrt{43}}\begin{bmatrix}3\\-5\\3\end{bmatrix}$, $v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. ►

3. 求一组向量 x,y, 使得 $Ax=By$, 并计算 $\begin{bmatrix}A & -B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

◄ $Ax=By\in R(A)\cap R(B)=span(v_1)$. 解方程 $Ax=By=v_1$ 得 $x=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}A & -B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=Ax-By=0$. ►

4. 求 $\begin{bmatrix}A & -B\end{bmatrix}$ 零空间的一组基，并求所有的 x,y, 满足 $Ax=By$.

◄ $rank(\begin{bmatrix}A & -B\end{bmatrix})=3$, 故零空间维数为 1, 一组基为 $\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix}$. 所有的 x,y 即为上一问给出的一组 x,y 的某个倍数. ►

练习 3.3.4. 1. $\mathbb{R}^5$ 中的两个三维子空间是否可能正交？

◀ 正交子空间的交平凡，由维数原因知这不可能. ▶

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$, 则 $R(A)$ 和 $N(A)$ 是否正交？是否互为正交补空间？

◀ 否. ▶

练习 3.3.5. 设 6 阶方阵 A 满足 $A^3 = 0$，它的秩最大为多少？举例说明. 在 A, A^2 的行空间、列空间、零空间和左零空间之中，哪些相互正交？

◀ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ 时取到最大秩 4. 例子自举. ▶

练习 3.3.6. 设 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $M = span(a_1, \cdots, a_s)$, 证明，$M^\perp = \{b \in \mathbb{R}^n | b^T a_i = 0, 1 \le i \le s\}$.

◀ 由定义即得. ▶

练习 3.3.7. 对向量组 $\{v_1, \cdots, v_k\}$，定义 $\{v_1, \cdots, v_k\}^\perp$ 为与这些向量都正交的向量所构成的子集.

1. 证明 $\{v_1, \cdots, v_k\}^\perp$ 是一个子空间.

◀ 验证其包含 0 且对数乘和加法封闭. ▶

2. 构造矩阵 A, 使得 $N(A) = \{v_1, \cdots, v_k\}^\perp$.

◀ $A = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix}^T$. ▶

3. 证明 $(\{v_1, \cdots, v_k\}^\perp)^\perp = span(v_1, \cdots, v_k)$.

◀ $(\{v_1, \cdots, v_k\}^\perp)^\perp = (N(A))^\perp = R(A^T) = R(\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix}) = span(v_1, \cdots, v_k)$. ▶

练习 3.3.8. 集合运算有 De Morgan 定律：对给定集合的两个子集 X, Y，$X \cap Y$ 的补集等于 X 的补集与 Y 的补集的并集；$X \cup Y$ 的补集等于 X 的补集与 Y 的补集的交集. 子空间是否也有类似的法则呢？设 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间 M, N，不妨设存在矩阵 A, B，使得 $M = R(A), N = R(B)$.

1. $M + N$ 是哪个矩阵的列空间？因此，$(M + N)^\perp$ 是该矩阵的什么空间？

◀ $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$. 左零空间. ▶

2. $M^\perp, N^\perp, M^\perp \cap N^\perp$ 分别是哪个矩阵的零空间？

◀ $A^T, B^T, \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix}$. ▶

3. 证明 De Morgan 定律的子空间版本：$(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$, $(M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp$.

◀ 由上，我们有 $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$. 以 $M^\perp$, $N^\perp$ 代入再取正交补得 $(M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp$. (也可以直接证明两边互相包含.) ▶

练习 3.3.9. 设 $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $M = span(a_1, a_2)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的的子空间，求 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 在 M 上的正交投影.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{11}{9} \\ \frac{7}{9} \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.10. 设 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中的直线：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

求 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 在直线 L 上的正交投影.

◀ 解得直线的一个方向向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. b 在这个方向上的正交投影为 $\begin{bmatrix} \frac{2}{13} \\ -\frac{8}{13} \\ \frac{6}{13} \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.11. 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中由方程 $x_1 - x_2 + x_3$ 决定的平面，求 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 在平面 M 上的正交投影，并求 b 到平面 M 的距离.

◀ 平面的一个法向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. b 在平面 M 上的正交投影为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$. b 到平面 M 的距离为 $\sqrt{\frac{14}{3}}$. ▶

练习 3.3.12. 将下列问题中的 x 分解成 $N(A)$ 与 $R(A^T)$ 中向量的和.

1. $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. ▶

2. $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. ▶

3. $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{14}{3} \\ \frac{28}{3} \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.13. 证明命题 3.3.12.

命题 3.3.12: 给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 M 和向量 a，而 $a_1 = P_M(a)$ 为 a 在 M 上的正交投影，则 $\|a - a_1\| = min_{x \in M} \|a - x\|$.

◀ 证明与命题 3.1.7 的证明类似. ▶

练习 3.3.14. 说明满足下列条件的矩阵是否存在，如果存在，举例说明.

1. $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix} \in R(A)$，$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in N(A)$.

◀ 例：$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\2 & -3 & 1\\-3 & 5 & 2\end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix} \in R(A^T)$，$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in N(A)$.

◀ 不存在，因为行空间的 $\begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}$ 与列空间的 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 不正交. ▶

3. $Ax = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 有解，且 A 的左零空间包含 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

◀ 不存在，因为列空间与左零空间不正交. ▶

4. A 不是零矩阵，且 A 的每一行的转置垂直于 A 的每一列.

◀ A 的每一行的转置垂直于 A 的每一列等价于 $A^2 = 0$。例：$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$. ▶

5. A 非零，且 $R(A) = N(A)$.

◀ 例：$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$. ▶

6. A 的所有列向量的和是零向量，且所有行向量的和是分量均为 1 的向量.

◀ 不存在。从列的角度看，矩阵内所有元素和是零。从行的角度看，矩阵的元素和不是零，矛盾. ▶

7. A, B 均为非零的正交投影矩阵，且 $A + B$ 仍是正交投影矩阵.

◀ 例：$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = I$. (实际上只要两个投影的像彼此正交即可.) ▶

8. A, B 均为正交投影矩阵，但 $A + B$ 并不是正交投影矩阵.

◀ 例：$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$，然而它的平方不等于自己（实际上只要两个投影的像彼此不正交即可）. ▶

9. A, B, C 均为非对角的三阶正交投影矩阵，且 $A + B + C = I_3$.

◀ 例：任取标准正交基，比如 $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, w = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$，令 $A = uu^T, B = vv^T, C = ww^T$. ▶

练习 3.3.15. 下列说法中，哪些正确？

1. A 的所有行的转置与 A^{-1} 的所有行的转置两两正交.

◀ 这等价于 $A(A^{-1})^T = I$. 错误. ▶

2. A 的所有行的转置与 A^{-1} 的所有列两两正交.

◀ 这等价于 $A(A^{-1}) = I$. 正确. ▶

3. A 的所有列与 A^{-1} 的所有行的转置两两正交.

◀ 这等价于 $A^{-1}A=I$. 正确. ▶

4. A 的所有列与 A^{-1} 的所有列两两正交.

◀ 这等价于 $A^{-1}A^T=I$. 错误. ▶

5. 如果向量 v 与 w 正交，则 $v^Tx=0$ 与 $w^Tx=0$ 的解集互相正交.

◀ 错误. ▶

6. 如果 A 是正交投影矩阵，则 A 的第 k 列的长度的平方等于 A 的第 k 个对角元素.

◀ 错误. ▶

7. 如果 A, B 是正交投影矩阵，则 $AB=BA$ 当且仅当 AB 也是正交投影矩阵.

◀ 正确. ▶

8. 如果 A, B 是正交投影矩阵，则 $A+B$ 是正交投影矩阵当且仅当 $R(A), R(B)$ 互相正交.

◀ 正确. ▶

练习 3.3.16. 如果矩阵 A 的列向量线性无关，那么向 $R(A)$ 的正交投影矩阵为 $A(A^TA)^{-1}A^T$. 试分析以下化简中可能出现的问题: $A(A^TA)^{-1}A^T=AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T=I_nI_n$.

1. 证明 $(A^TA)^{-1}=A^{-1}(A^T)^{-1}$ 并不一定总成立.

◀ A^{-1} 不存在时，右边没有意义. ▶

2. 当 A 满足什么条件时，上式一定成立？试分析此时正交投影矩阵等于 I_n 的原因.

◀ A 可逆. 此时 $R(A)$ 为全空间，故投影为恒等映射. ▶

练习 3.3.17. 设 $A=\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$.

1. 求向 A 的列空间的正交投影矩阵 P_1.

◀ 列空间的一组标准正交基为 $\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}$。$P_1=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}^T$。▶

2. 求向 A 的行空间的正交投影矩阵 P_2.

◀ 行空间的一组标准正交基为 $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$。$P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$。▶

3. 计算 P_1AP_2.

◀ 注意 $A=15\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$。$P_1AP_2=15\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}^T=A$。(注意向 A 的列空间投影的矩阵 P_1 作用在 A 的列空间上自然是恒等映射，同理 P_2 也是.) ▶

练习 3.3.18. 给定 $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{bmatrix}$. 设 P_1 是关于 A 的第一列的正交投影矩阵，P_2 是关于 A 的正交投影矩阵，计算 P_2P_1.

◀ $P_2P_1=P_1$. ▶

练习 3.3.19. 一个 n 阶方阵 P 是关于 A 的正交投影矩阵，当且仅当对任意向量 $x\in\mathbb{R}^n$，都有 $Px\in R(A)$, $x-P(x)\in N(A^T)$.

◀ 由定义即得. ▶

练习 3.3.20. 当 A 分别为对称矩阵、反对称矩阵、正交矩阵或上三角矩阵时，判断 $R(A)$ 和 $N(A)$ 是否互为正交补．证明或给出反例．

◀ $R(A) = N(A)^\perp \iff R(A) = R(A^T)$. A 为对称矩阵，反对称矩阵或正交矩阵时这显然成立. A 为上三角矩阵时有反例 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.21. 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $M_1, M_2, \mathbb{R}^n$ 中的子空间 N_1, N_2.

1. 是否一定存在矩阵 A，使得 $R(A) = M_1, N(A^T) = M_2, R(A^T) = N_1, N(A) = N_2$?

◀ 不一定. 若这四个子空间是某个矩阵 A 对应的四个子空间，则必有 M_1, M_2 互为正交补，N_1, N_2 互为正交补，且 $dim(M_1) = dim(N_1)$. ▶

2. 如果不一定存在，那么当四个子空间满足什么条件时，这样的矩阵才一定存在？

◀ M_1, M_2 互为正交补，N_1, N_2 互为正交补，且 $dim(M_1) = dim(N_1)$.

满足上述条件时，为 M_1 选取一组基 $a_1, \ldots, a_r$，作为列向量构成矩阵 A。为 N_1 选取一组基 $b_1, \ldots, b_r$，作为列向量构成矩阵 B。我们断言 AB^T 即为所求：由于 A 列无关，因此 $AB^T x = 0$ 当且仅当 $B^T x = 0$ 当且仅当 $x \in N(B^T) = R(B)^\perp = N_1^\perp = N_2$，因此零空间正确。同理观察 BA^T，发现 AB^T 的左零空间也正确。由此易知其它子空间符合要求。▶

练习 3.3.22. 给定向量 $b_1, \cdots, b_m$, 不难确知其平均值 $x_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m b_i$. 再给出向量 b_{m+1}, 这 $m+1$ 个向量的平均值就是 $x_{m+1} = \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1} b_i$. 则 x_{m+1} 可以用 b_{m+1}, x_m, m 来表示: $x_{m+1} = x_m + \frac{1}{m+1}(b_{m+1} - x_m)$.

若给出向量组成的矩阵 $B_n = \begin{bmatrix} b_{m+1} & \cdots & b_{m+n} \end{bmatrix}$，如何用 B_n, x_m, m, n 来表示 $b_1, \cdots, b_{m+n}$ 这 $m+n$ 个向量的平均值 x_{m+n}？

◀ $x_{m+n} = \frac{1}{m+n}(mx_m + B_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix})$. ▶

练习 3.3.23. 一个方阵如果仅仅满足 $P^2 = P$，则称之为斜投影矩阵，其对应的线性变换称为斜投影. 给定一个 n 阶斜投影矩阵 P.

1. 证明 $I_n - P$ 也是 n 阶斜投影矩阵.

◀ $(I_n - P)^2 = I_n - 2P + P^2 = I_n - 2P + P = I_n - P$. ▶

2. 证明 $R(P) = N(I_n - P)$, $R(I_n - P) = N(P)$.

◀ 易见左边含于右边. 由秩不等式 $rank(P) + rank(I_n - P) \geq n$, 故两边相等. ▶

3. 对任意向量 $v \in \mathbb{R}^n$，是否一定存在分解 $v = v_1 + v_2$，满足 $v_1 \in R(P), v_2 \in R(I_n - P)$? 分解如果存在，是否唯一？

◀ $v = Pv + (I_n - P)v$. 若 $Pv_1 = (I_n - P)v_2$, 则 $Pv_1 = PPv_1 = P(I_n - P)v_2 = 0$, 故分解唯一. ▶

4. 构造一个二阶斜投影矩阵，但不是正交投影矩阵.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 3.3.24. 设平面上的四个点 $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ 分别是 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \end{bmatrix}$，利用最小二乘法求下列直线或曲线：

1. 求平行于 x 轴的直线 $y = b$ 使得 $\sum_{i=1}^4 |y_i - b|^2$ 最小.

◀ $b = 9$. ▶

2. 求经过原点的直线 $y = kx$ 使得 $\sum_{i=1}^4 |y_i - kx_i|^2$ 最小.

◀ $k=\frac{56}{13}$. ▶

3. 求直线 $y=kx+b$ 使得 $\sum_{i=1}^{4}|y_i-(kx_i+b)|^2$ 最小.

◀ $k=4, b=1$. ▶

4. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 使得 $\sum_{i=1}^{4}|y_i-(ax_i^2+bx_i+c)|^2$ 最小.

◀ $a=\frac{2}{3}, b=\frac{4}{3}, c=2$. ▶

4. 行列式

4.1. 引子.

4.2. 行列式函数.

练习 4.2.1. 计算下列行列式.

1. $\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&2&-1\\0&0&0&3\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&2&-1\\0&0&0&3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 2\cdot 3=-6$. ▶

2. $\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\0&1&4\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&5&-5\\0&1&4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}5&-5\\1&4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&-1\\1&4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&-1\\0&5\end{vmatrix}=5\cdot 1\cdot 5=25$. ▶

3. $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=160$. ▶

4. $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

◀ 沿第一列展开. $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x+y&x\\x&y\end{vmatrix}-y=\begin{vmatrix}y&x+y\\x&y\end{vmatrix}+(x+y)\begin{vmatrix}y&x+y\\x+y&x\end{vmatrix}=$ $x(xy+y^2-x^2)-y(y^2-x^2-xy)+(x+y)(xy-(x+y)^2)=-2x^3-2y^3$. ▶

5. $\begin{bmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{bmatrix}$.

◀ 视 x,y 为形式变元,从而无需考虑可逆性. $\begin{bmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ & 1+x & 1 & 1 & 1\\ & 1 & 1-x & 1 & 1\\ & 1 & 1 & 1+y & 1\\ & 1 & 1 & 1 & 1-y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & & & \\ -1 & & -x & & \\ -1 & & & y & \\ -1 & & & & -y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y} & 1 & 1 & 1 & 1\\ & x & & & \\ & & -x & & \\ & & & y & \\ & & & & -y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ & x & & & \\ & & -x & & \\ & & & y & \\ & & & & -y\end{bmatrix} = x^2y^2$. (或：由行列式是各分量的多项式 (从而是各分量的连续函数)，又各分量是 x,y 的连续函数，故行列式是 x,y 的连续函数，从而对任意的 x,y 均有行列式的值为 x^2y^2.) ▶

练习 4.2.2. 设 A 是三阶方阵，$det(A)=5$，求下列矩阵 B 的行列式.

1. $B = 2A, -A, A^2, A^{-1}$.

◀ $40, -5, 25, \frac{1}{5}$. ▶

2. $B = \begin{bmatrix}a_1^T - a_3^T\\ a_2^T - a_1^T\\ a_3^T - a_2^T\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_1^T + a_3^T\\ a_2^T + a_1^T\\ a_3^T + a_2^T\end{bmatrix}$, 其中 $A = \begin{bmatrix}a_1^T\\ a_2^T\\ a_3^T\end{bmatrix}$.

◀ 第一个将前两行加到第三行后得到 0. 第二个后两行减去第一行后得到 $2det(A)$. ▶

练习 4.2.3. 设 $A_n = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -6 & 4\end{bmatrix} + nI_2$.

1. 求 A_0, A_1, A_2, A_3 的行列式.

◀ $2, 6, 12, 20$. ▶

2. 求 $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -6 & 4\end{bmatrix} + xI_2$ 的行列式，并将其写成 $(x+a)(x+b)$ 的形式.

◀ $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. ▶

3. 分别求 $A_0^2, A_0^2+I_2, A_0^2+3A_0+2I_2, A_0^3-2A_0^2+3A_0-4I_2$ 的行列式，并分析它们与 a,b 的关系.

◀ $4, 10, 72, -6$. 等于多项式在 a,b 处值的积. ▶

练习 4.2.4. 计算 $det(A)$.

1. $A = \Big[i+j\Big]_{n\times n}$.

◀ 其余行减去第一行. $|\Big[i+j\Big]| = \begin{vmatrix}2 & 3 & \cdots & n+1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1\end{vmatrix}$. $n=1,2$ 时行列式的值为 $2,-1$. $n\geq 3$ 时行列式的值为 0. ▶

2. $A=\begin{bmatrix}ij\end{bmatrix}_{n\times n}$.

◀ 每行每列提出公因数. $|\begin{bmatrix}ij\end{bmatrix}_{n\times n}|=\prod_{1,j=1}^{n}ij|\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}_{n\times n}|$. $n=1$ 时行列式的值为 1. $n\geq 2$ 时行列式的值为 0. ▶

练习 4.2.5. 计算 $\begin{vmatrix}1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1\\ -1 & & & 1\end{vmatrix}$.

◀ 依次将每行加到下一行. $\begin{vmatrix}1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1\\ -1 & & & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & -1\\ 0 & & & 0\end{vmatrix}=0$. ▶

练习 4.2.6. 计算 $\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & 1+x_1y_4\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & 1+x_2y_4\\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & 1+x_3y_4\\ 1+x_4y_1 & 1+x_4y_2 & 1+x_4y_3 & 1+x_4y_4\end{vmatrix}$.

◀ 注意矩阵为两个秩不大于 1 的矩阵之和，故其秩不大于 2. $n\geq 3$ 时行列式为 0. $n=1$ 时行列式为 $1+x_1y_1$. $n=2$ 时行列式为 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)$. ▶

练习 4.2.7. 计算 $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0\\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0\\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}a_{i,n+1-i}$. ▶

References

[1] 梁鑫, 田垠, 杨一龙, 线性代数入门.

School of the Gifted Young, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026, P.R. China
Email address: ya174952@mail.ustc.edu.cn