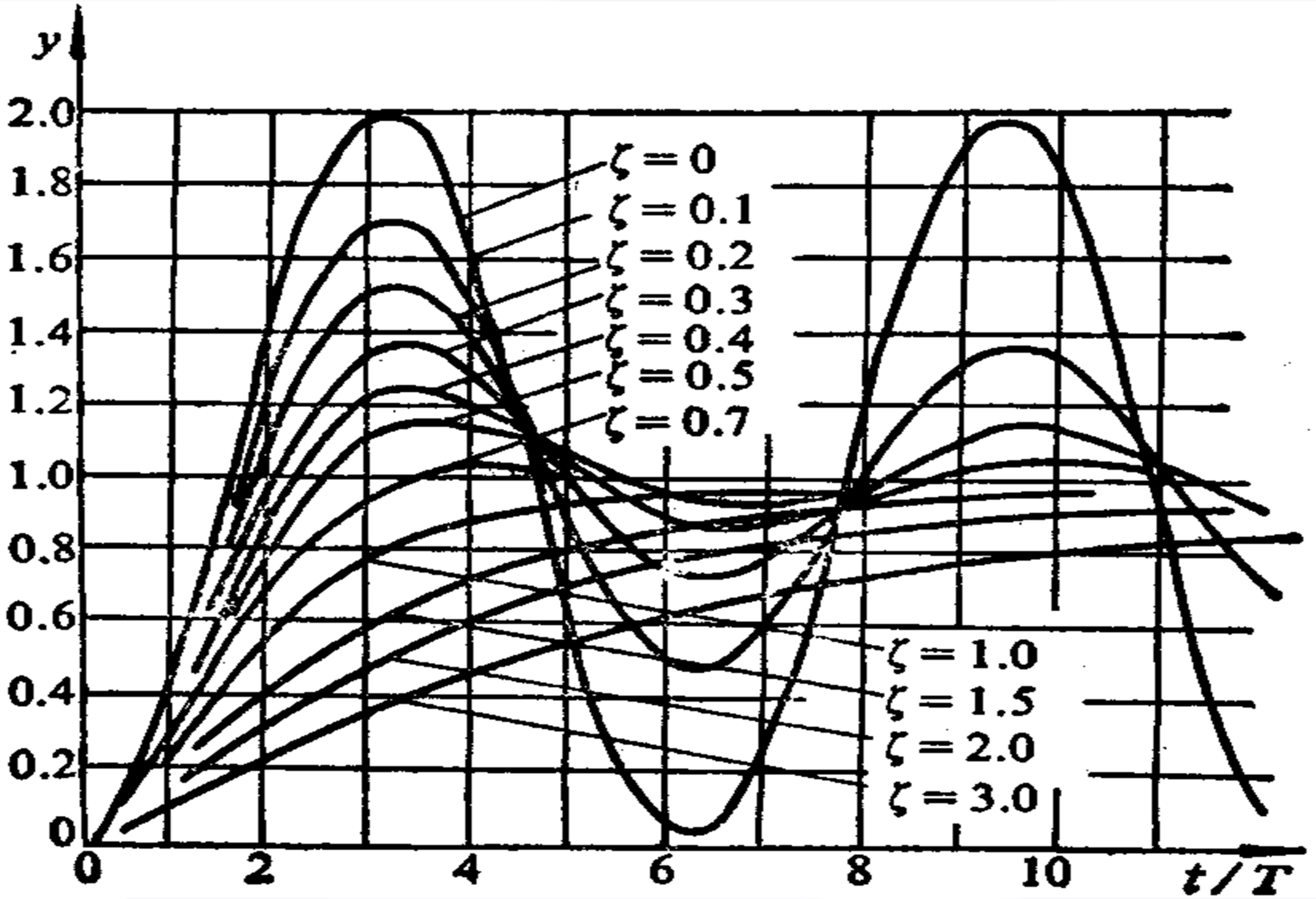
第三章：线性系统的时域分析

线性系统时域分析

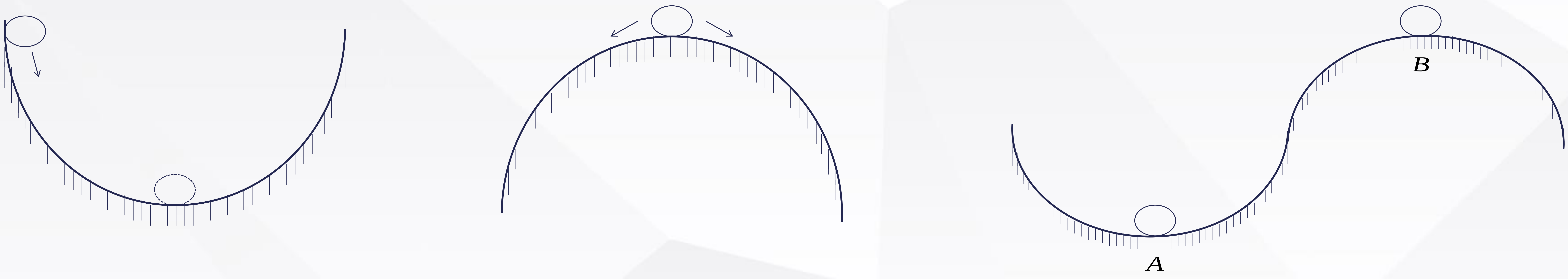
- 时域分析方法：在时域内直接分析的方法
  - 根据系统微分方程，求出系统的时间响应（计算大），依据响应来分析系统的性能，甚至找出系统结构、参数与性能之间的关系。
  - 设法从微分方程直接判断运动的主要特征比精确求解微分方程更实用。
    - 未必能精确解出微分方程，但能揭示运动的主要特征，提示影响运动的主要参数，从而指导改进对象的性能。
  - 性能指标：稳、快、准
  - 负反馈是实现控制的基本方法，不恰当的负反馈会导致系统不稳定，负反馈系统稳定但运动品质有优劣之分。

线性系统时域分析

- **学习内容：**
  - 线性系统的稳定性分析
  - 线性系统的静态误差计算
  - 控制系统的动态时间响应
  - 一阶系统、二阶系统、高阶系统的时域分析



运动的稳定性



稳定与不稳定运动示意图

运动的稳定性

随动系统是一个四阶微分方程，代入参数得

$$0.025\varphi^{(4)}+0.55\varphi^{(3)}+1.5\varphi''+\varphi'+\varphi=\psi$$

特征方程 $0.025s^4+0.55s^3+1.5s^2+s+1=0$

特征根 $s_1=-18.94,s_2=-2.61,s_{3,4}=-0.228\pm j0.871$

$\varphi(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}+Ce^{-0.228t}\sin(0.871t+\theta)+\varphi^*(t)$**(**$\varphi^*(t)$**为特解)**

A、B、C、θ **由初始条件求出**

当$t\to\infty$**，前三项**$\to$ 0，$\varphi(t)\to\varphi^*(t)$

若将k**（**k**为开环比例系数）增大10倍，重新解方程得：**

$s_1=-18.87$，$s_2=-4.13$，$s_{3,4}=0.501\pm j2.21$

运动的稳定性

从而， $\varphi(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Ce^{0.501t}\sin(2.21t + \theta) + \varphi^*(t)$

$\therefore$ 只要$C \neq 0$，当$t \to \infty, \varphi(t) \to \infty$，达不到$\varphi^*(t)$

可见$\varphi(t)$取决于特征根，组成$\varphi(t)$的分量，诸如$e^{\lambda_i t}$，称作运动模态。

结论：线性系统稳定的充分必要条件是特征方程的根必须具有负实部，即特征根都在s平面的左半平面。

对于非线性方程，在有些初始条件下解能达到一种确定的状态，称为稳定的运动，而在另一些初始条件下的解表现为不稳定的运动。所以，对一个非线性系统，不能笼统地称系统稳定与否，而只能说哪些状态是稳定的，哪些是不稳定的。

见教科书p184图3.2.1例

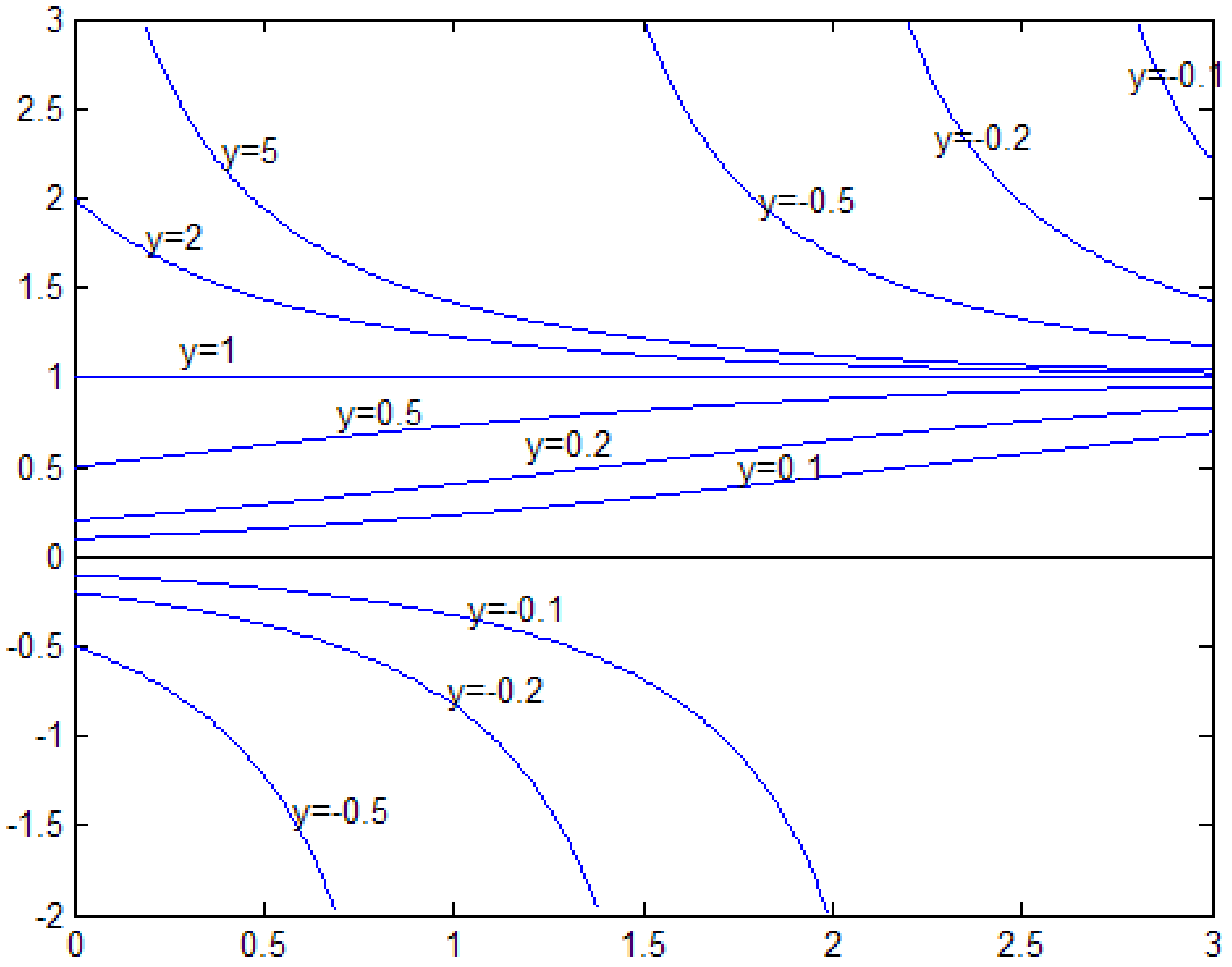
运动的稳定性

$$\frac{dy}{dt}+y(y-1)=0,\quad y(0)=y_0$$ 解析解为：$$y(t)=\frac{1}{1-(1-\frac{1}{y_0})e^{-t}}$$

不同初值y_0下解的曲线：

平衡态 $y=1$

平衡态$y=0$



$$y_0=1,\quad y(t)=1$$

$$y_0=2,\quad y(t)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-t}}$$

$$y_0=-0.5,\quad y(t)=\frac{1}{1-3e^{-t}}$$

稳定性的Lyapunov定义

数学知识：高阶微分方程可化成一阶微分方程组

$$a_3x^{(3)}+a_2x''+a_1x'+a_0x=u$$

设：$\begin{cases} x_1=x \\ x_2=x' \\ x_3=x'' \end{cases}$ 有：$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=x_3 \\ \dot{x}_3=\dfrac{1}{a_3}(-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3)+\dfrac{1}{a_3}u \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_3} & -\dfrac{a_1}{a_3} & -\dfrac{a_2}{a_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{a_3} \end{bmatrix}u$$

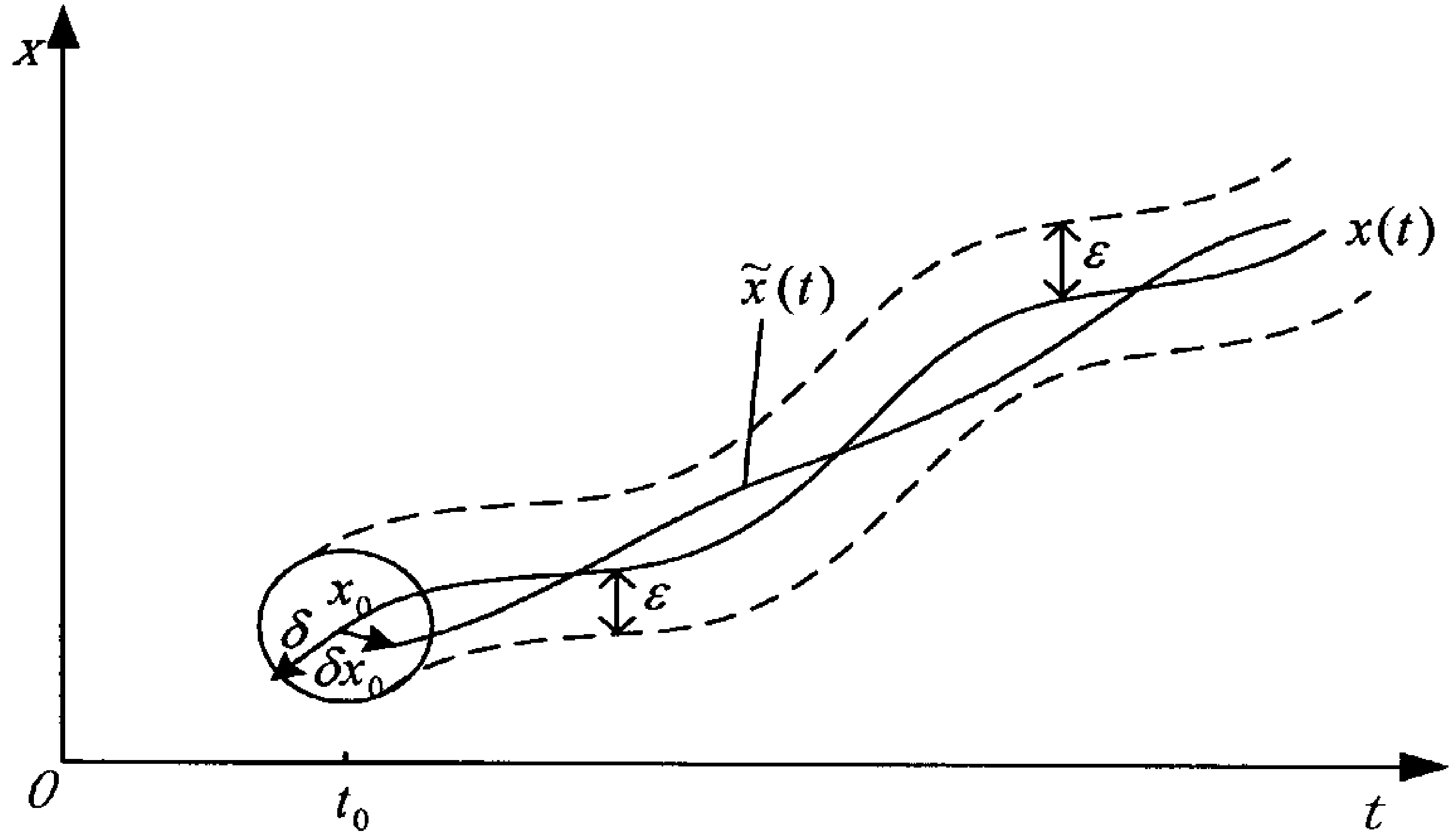
系统的变换可用状态向量在高维空间中的运动轨迹描述

稳定性的Lyapunov定义

1. Lyapunov稳定性定义

$$\dot{X} = f(X, t, u)$$

如果一个关于X的微分方程组，在初始条件$X(t_0) = X_0$下有解$X(t)$，且对于任意给定的正数$\varepsilon > 0$，总存在一个正数$\delta(\varepsilon)>0$，当初始条件X_0变为$\tilde{X}_0$时，只要$\|\tilde{X}_0 - X_0\| \le \delta$，其相应解$\tilde{X}(t)$在$t > t_0$的任何时刻都满足$\|\tilde{X}(t) - X(t)\| < \varepsilon$，则称解$X(t)$是稳定的。如果不存在这样的正数$\delta$，则称解$X(t)$是不稳定的。



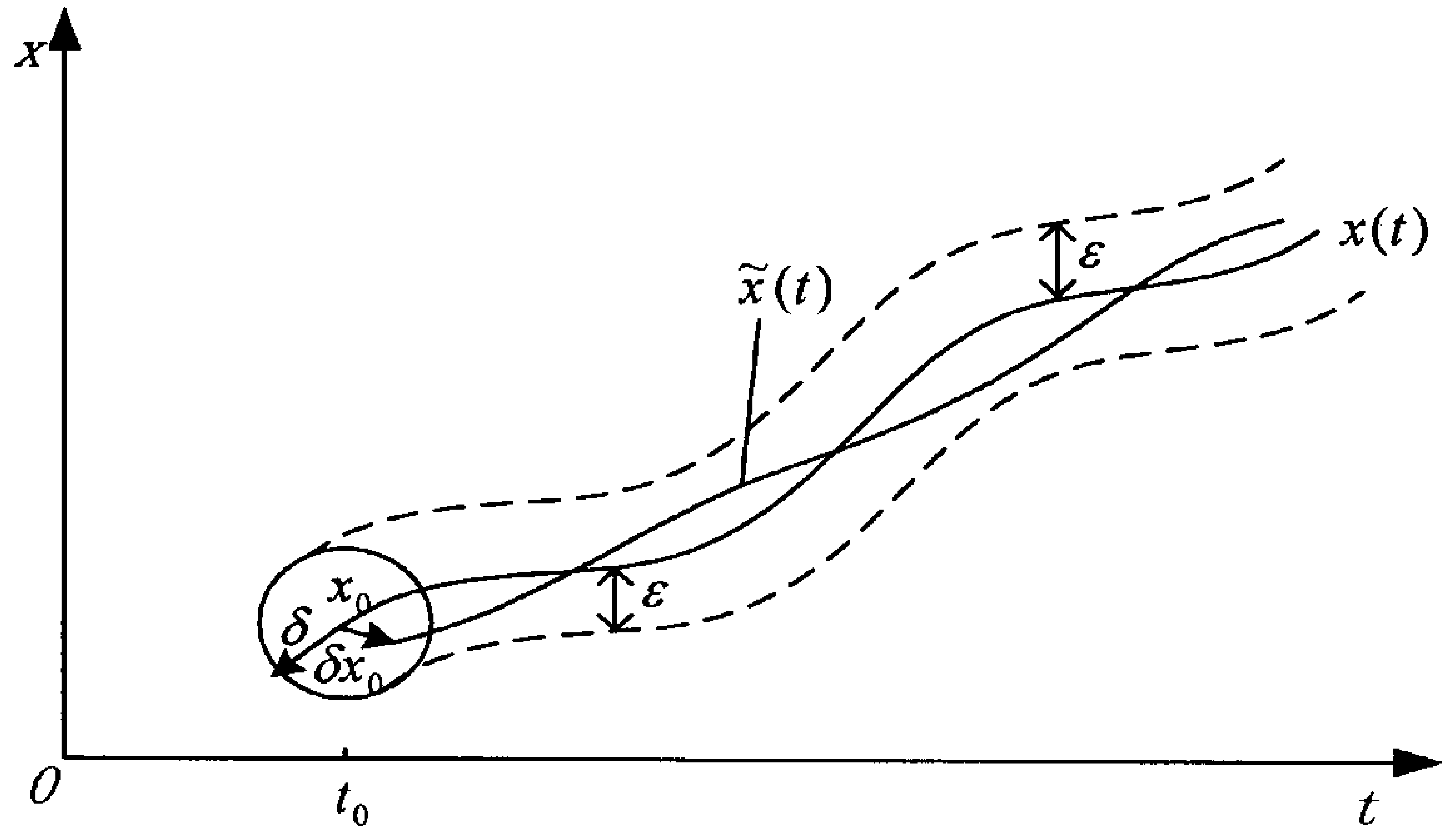
稳定性的Lyapunov定义

- **大范围稳定**

  δ任意大，即任意初始状态点都趋近稳定

- **渐进稳定**

  稳定，存在δ，$\tilde{x}(t)$随时间的增大无限趋于$x(t)$



例： $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$x(t) = a\sin(wt + \theta)$

临界稳定但不是渐近稳定

工程上通常要求系统具有大范围渐近稳定性。

稳定性的Lyapunov定义

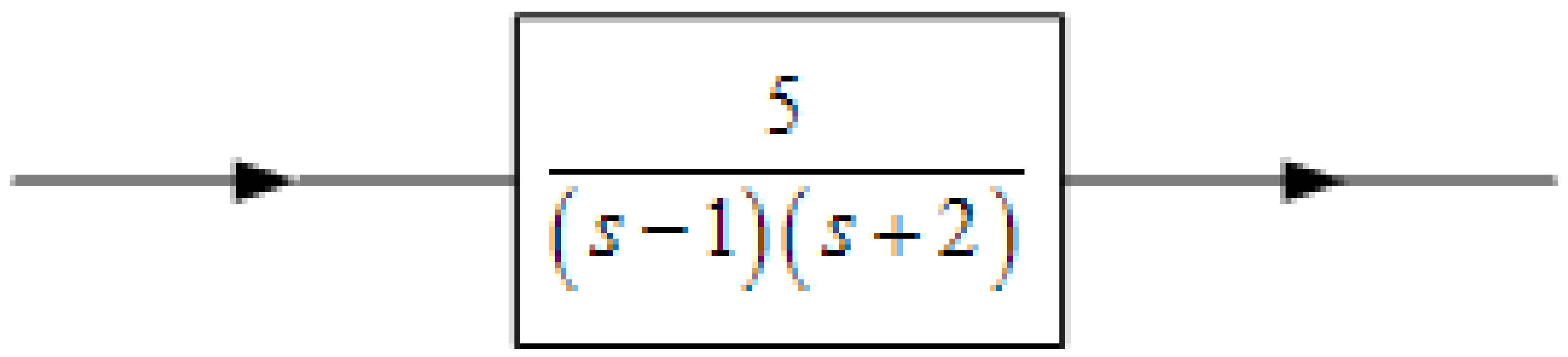
Lyapunov第一方法（见教科书P190）

- 若线性化后系统特征方程的所有根均位于复平面的左半平面，则原系统的运动不但是稳定的而且是渐近稳定的。线性化过程中被忽略的高阶项不会影响系统的稳定性。
- 若线性化后系统特征方程只要有一个根位于复平面的右半平面，则原系统的运动就是不稳定的。被忽略的高阶项不会改变系统的不稳定性。
- 若线性化后系统特征方程的根都不位于复平面的右半平面，但有一些位于虚轴上，则不能根据线性化后的系统来判断原系统的运动的稳定性，必须分析原非线性系统才能确定。

一般而言，Lyapunov第一方法只适用于无穷小范围内的稳定性判断。

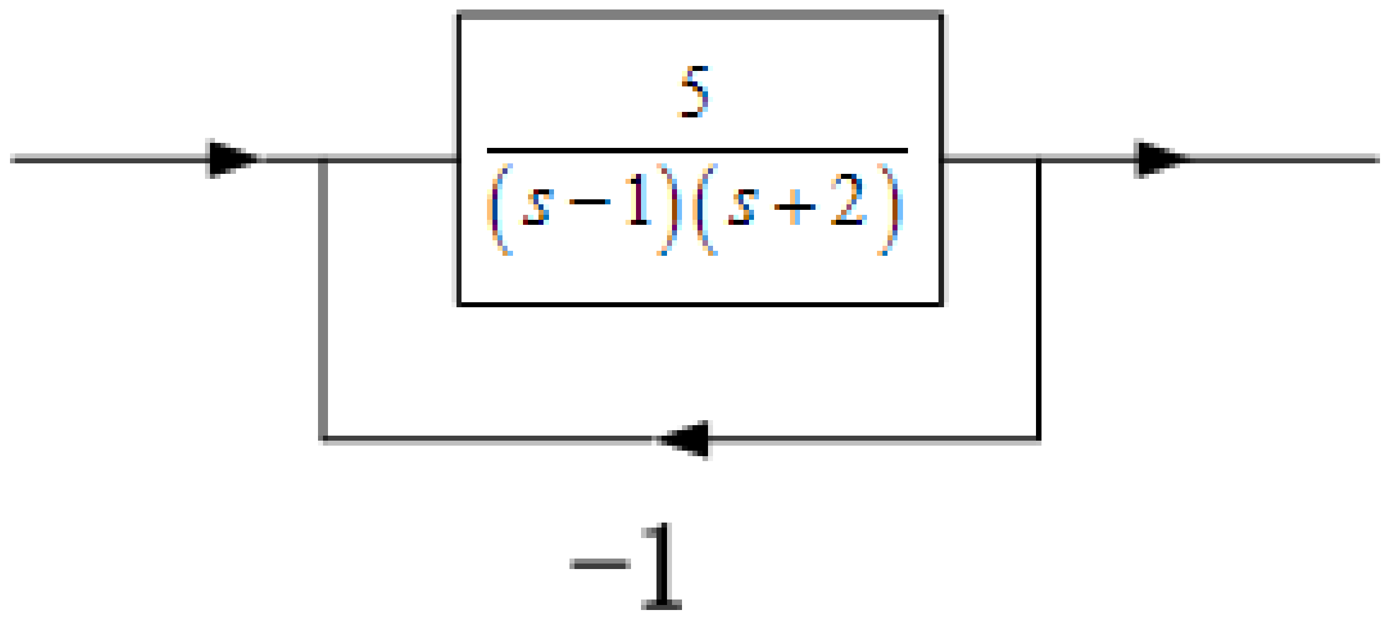
负反馈是实现稳定的基本方法

开环不稳定系统闭环可能稳定



极点为1和-2，存在正根，不稳定。

加反馈后



$G(s)=\frac{5}{s^2+s+3}$，**极点为** $\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}$，**实部小于0，稳定。**

稳定性的代数判据

根据微分方程的特征方程的系数，不解方程来判断是否有右半平面的根。

Routh和Hurwitz分别独立提出了稳定性判据，其功能是判断一个代数多项式有几个根位于复数平面的右半面。

例1：特征方程

$$2s^6+5s^5+3s^4+4s^3+6s^2+14s+7=0$$

构造Routh表，如下：

Routh判据

例1 特征方程 $2s^6+5s^5+3s^4+4s^3+6s^2+14s+7=0$

s^6	s^6: 2	s^4: 3	s^2: 6	s^0: 7
s^5	s^5: 5	s^3: 4	s^1: 14	
s^4	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 4\end{vmatrix}=\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 6\\5 & 14\end{vmatrix}=\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 7\\5 & 0\end{vmatrix}=7$	
s^3	$\frac{18}{7}$	-11		
s^2	$\frac{115}{18}$	7		
s^1	$-\frac{1589}{115}$			
s^0	7			

$$\frac{18}{7}=-\frac{5}{7}\begin{vmatrix}5 & 4\\ \frac{7}{5} & \frac{2}{5}\end{vmatrix}$$

Routh判据

例1 特征方程 $2s^6+5s^5+3s^4+4s^3+6s^2+14s+7=0$

s^6	$s^6: 2$	$s^4: 3$	$s^2: 6$	$s^0: 7$
s^5	$s^5: 5$	$s^3: 4$	$s^1: 14$	
s^4	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 4\end{vmatrix}=\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 6\\5 & 14\end{vmatrix}=\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 7\\5 & 0\end{vmatrix}=7$	
s^3	$\frac{18}{7}$	-11		
s^2	$\frac{115}{18}$	7		
s^1	$-\frac{1589}{115}$			
s^0	7			

一次变号

二次变号

- 第一列系数全为正是系统稳定的充分必要条件。
- 出现负号说明有右半平面根，变号的次数对应于右半平面根的个数。

Routh判据

例2 特征方程 $s^4+5s^3+10s^2+20s+24=0$

- 第一列系数出现0，用小正数 ϵ 代替。
- ϵ>0时判断符号
- 若ϵ 处上下元素符号相同，表示有一对纯虚根；不相同则表示一次变号。

s^4	1	10	24
s^3	5	20	
s^2	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}1 & 10\\5 & 20\end{vmatrix}=6$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}1 & 24\\5 & 0\end{vmatrix}=24$	
s^1	$-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}5 & 20\\6 & 24\end{vmatrix}=0(\epsilon)$		
s^0	$-\frac{1}{\epsilon}\begin{vmatrix}6 & 24\\\epsilon & 0\end{vmatrix}=24$		

此例解得根为 $\pm 2j,-2,-3$

Routh判据

例3 特征方程 $s^3-3s+2=0$

s^3	1	-3
s^2	$0(\epsilon)$	2
s^1	$-\frac{1}{\epsilon}\begin{vmatrix}1 & -3\\ \epsilon & 2\end{vmatrix}=-3-\frac{2}{\epsilon}$	
s^0	2	

一次变号

二次变号

此例解得根为

$1, 1, -2$

两次变号，说明有两个根在右半平面。

Routh判据

例4 特征方程 $s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$

s^5	1	24	−25
s^4	2	48	−50
s^3	$0(8)$	$0(96)$	
s^2	24	−50	
s^1	112.7		
s^0	−50		

出现全零行时构造辅助多项式 $2s^4+48s^2-50$，**以求导所得** $8s^3+96s$ **代替全零行**

Routh判据

例4　特征方程　$s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$

s^5	1	24	−25
s^4	2		−50
s^3	0(8)	0(96)	
s^2	24		
s^1	112.7		
s^0	−50		

0上下同号说明有一对纯虚根

出现全0行说明有一对大小相等原点对称的根(由辅助多项式$2s^4+48s^2-50$解出)

一次变号说明有一个正实根

$\pm 1,\quad \pm 5j, -2$

关于稳定的必要条件

若特征方程的根全部为负实数或实部为负的共轭复数，则特征方程一定可以分解成如下一些因式的乘积：

$$(s+\alpha)\text{，}(s+\beta+j\gamma)(s+\beta-j\gamma) \qquad \alpha,\beta,\gamma>0$$

$$(s+\alpha)\text{，}(s^2+2\beta s+\beta^2+\gamma^2)$$

可见，特征方程全部系数必为正（幂次不缺项）。

结论：特征**方程系数全为正是系统稳定的必要条件（但不充分）。**

一、二、三阶系统稳定的充要条件

用Routh判据来分析一、二、三阶系统，得到稳定的充要条件：

$\boldsymbol{a_1 s + a_0 = 0,}$ $\boldsymbol{a_1 > 0, a_0 > 0}$

$\boldsymbol{a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,}$ $\boldsymbol{a_2, a_1, a_0 > 0}$

$\boldsymbol{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,}$ $\boldsymbol{a_3, a_2, a_1, a_0 > 0}$，**且**$\boldsymbol{a_2 a_1 > a_3 a_0}$

参数稳定性和参数稳定域

系统开环传递函数一般可表示为如下形式：

$$G\ (s)=\frac{k(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^{\gamma}(T_1 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

系统参数集中体现在k(开环比例系数)和Ti，是影响系统稳定的主要因素。

- **一般情况下，k过大不利于稳定（有些特殊情况，条件稳定）**
- **增大时间常数，不利于稳定**
- **增多时间常数，不利于稳定**

参数稳定性和参数稳定域

单参数稳定域

设单位负反馈系统的开环传递函数如下：

$$G_{开}(s) = \frac{k(\frac{1}{3}s+1)}{s(s+1)(2s+1)}$$

试确定闭环系统稳定对应的k的范围。

首先列出特征方程： $1 + G_{开}(s) = 0$

即 $s(s+1)(2s+1) + k\left(\frac{1}{3}s+1\right) = 0,\qquad 2s^3+3s^2+\left(1+\frac{1}{3}k\right)s+k=0$

根据Routh判据 $\begin{cases} k>0 \\ 3\left(1+\frac{1}{3}k\right) > 2k \end{cases}$ $\therefore 0<k<3$**是**k**的稳定范围。**

参数稳定性和参数稳定域

双参数稳定域

$$G_{开}(s)=\frac{k(\tau s+1)}{s(s+1)(2s+1)}\qquad k,\tau>0$$

特征方程： $2s^3+3s^2+(1+k\tau)s+k=0$

$$3(1+k\tau)>2k$$

$$\tau>\frac{2}{3}-\frac{1}{k}$$

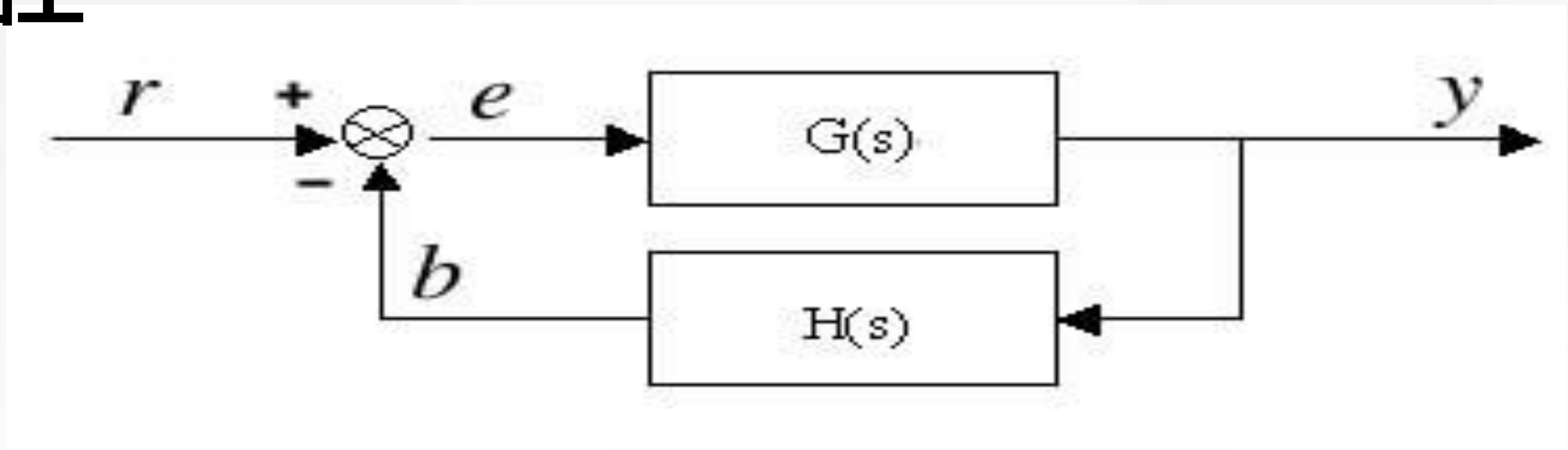
进而，可画出$\tau-k$的关系曲线。

静态误差

1. 误差和静态误差定义

误差： $e_y = y_{要求值} - y_{实际值}$ 静态误差： $e_y(t \to \infty)$

在框图上



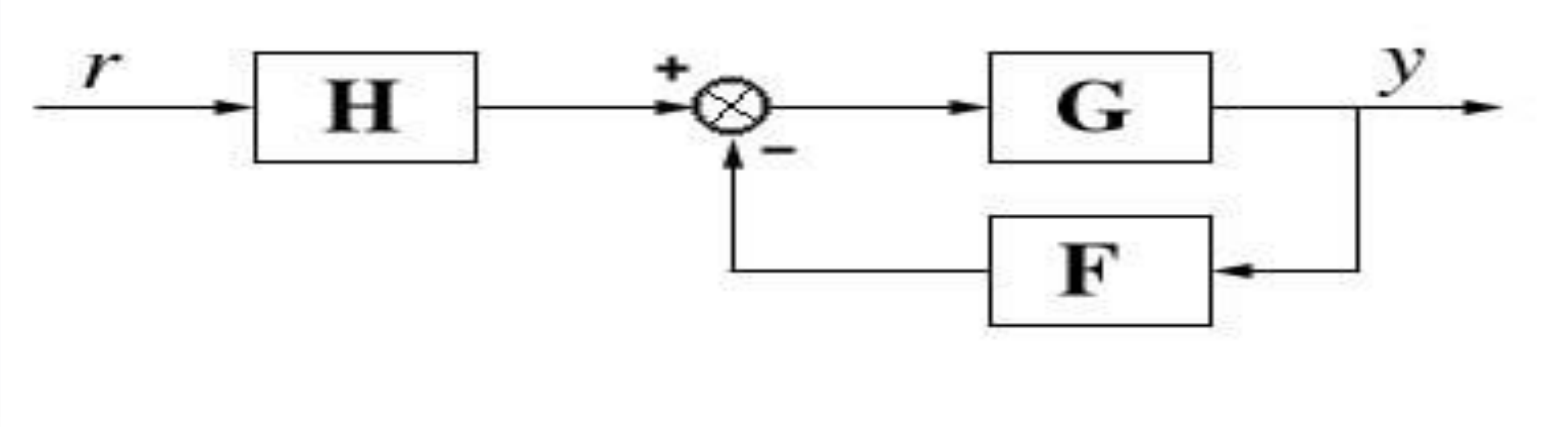
$b = yH$ 反映y的实际值， r体现对y的要求值

$\therefore e = r - yH$

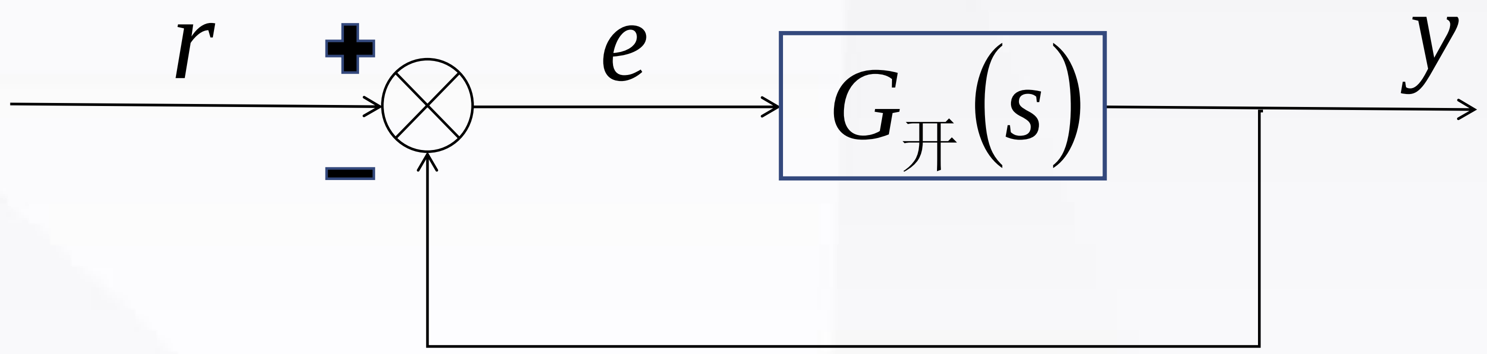
静差表示系统的静态精度，只有稳定系统才讨论静差。

静态误差

对于有些复杂情况，从框图上找不到e，　要求$e=\mathrm{r}-y$



可进行框图变换



1. 先求出　$\frac{y}{r}=\frac{HG}{1+GF}$

2. 求出对应的$G_{开}(s)$，即求出对应于闭环传递函数($G_{闭}=y/r$)

　的单位负反馈的开环传递函数 $G_{开}(s)$

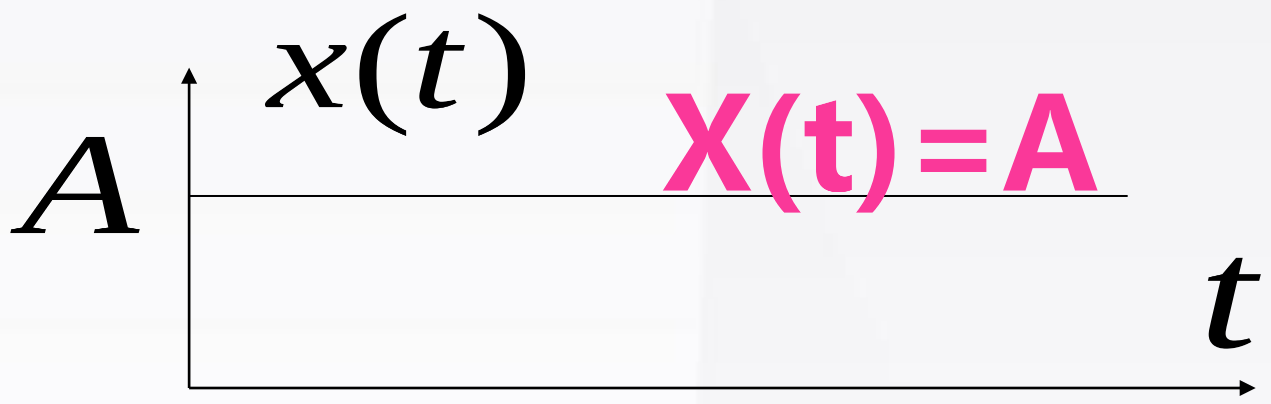
即　$\frac{G_{开}}{1+G_{开}}=\frac{y}{r}=G_{闭}$　　所以，$G_{开}=\frac{G_{闭}}{1-G_{闭}}=\frac{GH}{1+GF-GH}$

静态误差

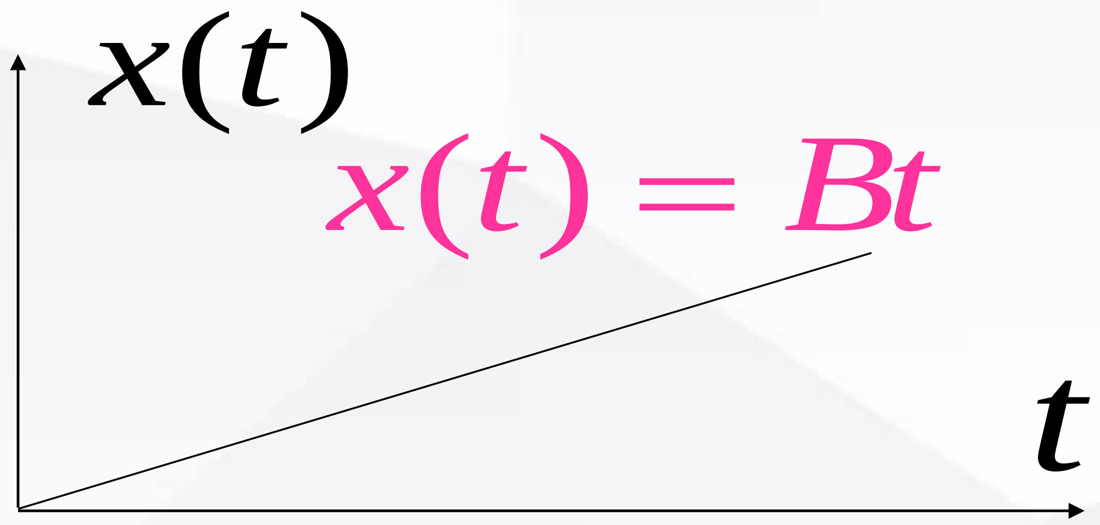
2、静差与输入

静差与输入信号有关，规定如下典型输入信号：

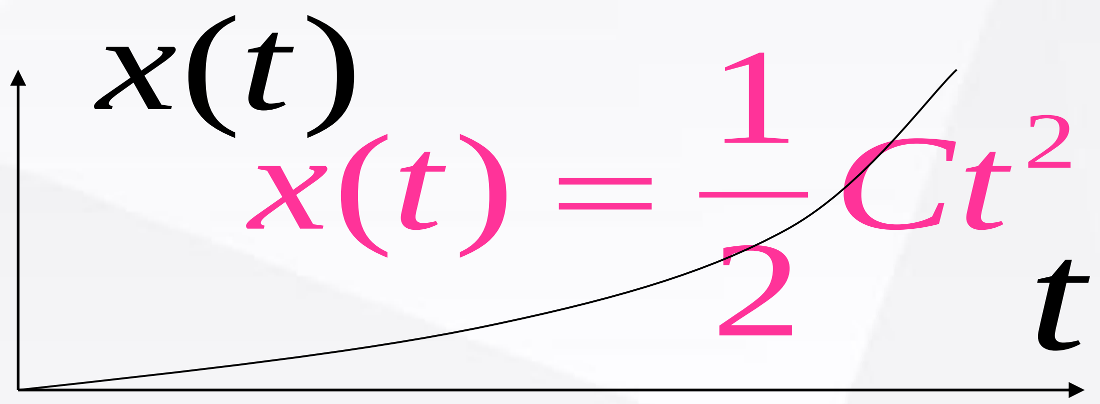
阶跃 $1(t) \to \dfrac{1}{s}$



斜坡 $t \to \dfrac{1}{s^2}$

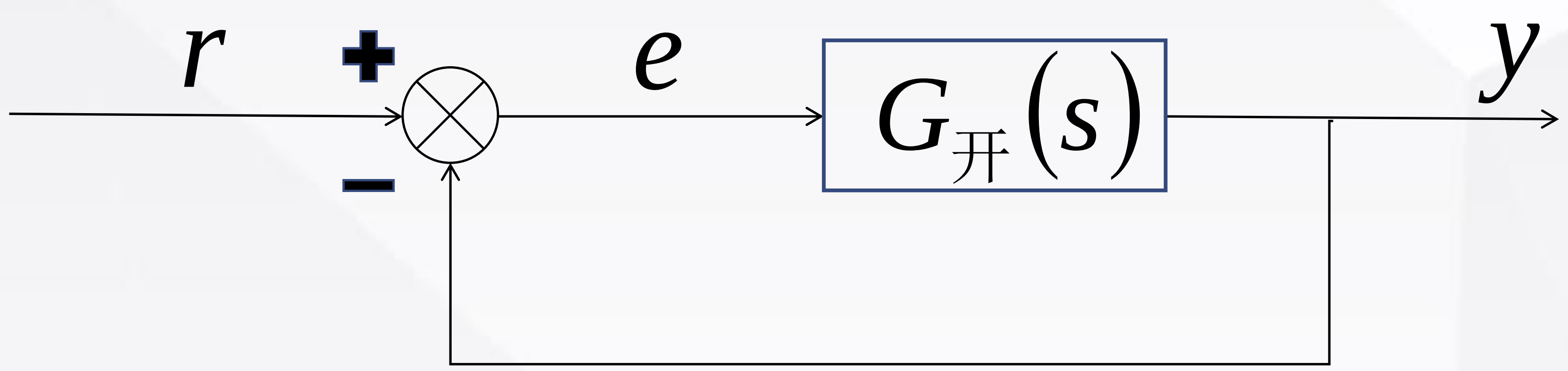


加速度 $\dfrac{1}{2}t^2 \to \dfrac{1}{s^3}$



静态误差的计算

针对一般情况



$$\frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1}{1+G_{开}(s)} \qquad \therefore e(s) = \frac{1}{1+G_{开}(s)} r(s)$$

可见，误差与 $G_{开}(s)$和输入$r(s)$有关。

静态误差可用Laplace 变换的终值定理求得： $e(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} se(s) = e_{st}$

系统在三种典型输入信号下的静差

$$r(s)=\frac{1}{s}\quad e_{st}=\lim_{s\to 0}se(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+G_{开}(s)}\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G_{开}(s)}$$

$$r(s)=\frac{1}{s^2}\quad e_{st}=\lim_{s\to 0}se(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+G_{开}(s)}\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG_{开}(s)}$$

$$r(s)=\frac{1}{s^3}\quad e_{st}=\lim_{s\to 0}se(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+G_{开}(s)}\frac{1}{s^3}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G_{开}(s)}$$

定义误差系数

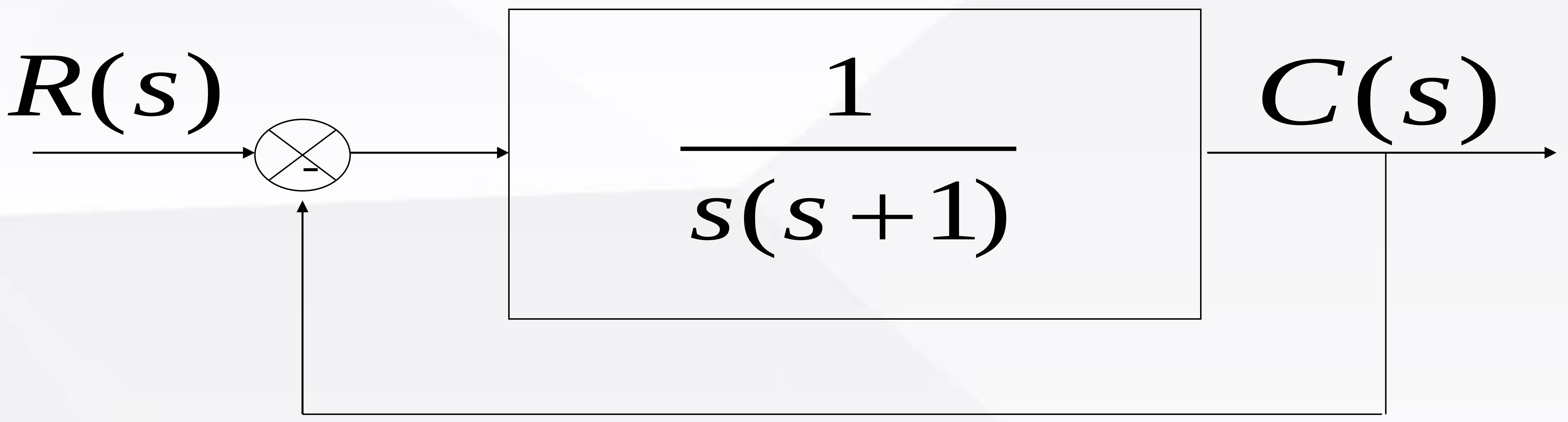
$k_p=\lim_{s\to 0}G_{开}(s)$ **位置误差系数** $k_v=\lim_{s\to 0}sG_{开}(s)$ **速度误差系数**

$k_a=\lim_{s\to 0}s^2G_{开}(s)$ **加速度误差系数**

三种典型输入下的静态误差分别为：

$$e_{st}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+k_p} & \text{阶跃输入}\\[2ex] \dfrac{1}{k_v} & \text{斜坡输入}\\[2ex] \dfrac{1}{k_a} & \text{加速度输入}\end{cases}$$

静态误差举例



某系统在三种典型输入信号下的误差

阶跃输入　　斜坡输入　　加速度输入

系统类型与静差的关系

前面定义了误差系数，导出了在特定输入信号的作用下，静差与误差系数的关系，而误差系数与系统的开环传递函数有关，即与系统的参数和结构有关。

问题：开环传递函数的结构如何影响闭环系统的静差?

设 $$G_{开}(s)=\frac{k(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^{\gamma}(T_1 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$ （$\gamma=0,1,2$ 分别称为0型，1型，2型系统）

对0型系统：

$$\begin{cases} k_p=\lim\limits_{s\to 0}G_{开}(s)=k & \text{阶跃输入下的静态误差} \quad e_{st}=1/(1+k) \\ k_v=\lim\limits_{s\to 0}sG_{开}(s)=0 & \text{斜坡输入下的静态误差} \quad e_{st}=1/k_v=\infty \\ k_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G_{开}(s)=0 & \text{加速度输入下的静态误差} \quad e_{st}=1/k_a=\infty \end{cases}$$

系统类型与静差的关系

对1型系统：

$$\begin{cases} k_p = \infty & \text{阶跃输入下的静态误差} \quad e_{st} = 0 \\ k_v = k & \text{斜坡输入下的静态误差} \quad e_{st} = 1/k \\ k_a = 0 & \text{加速度输入下的静态误差} \quad e_{st} = \infty \end{cases}$$

对2型系统：

$$\begin{cases} k_p = \infty & \text{阶跃输入下的静态误差} \quad e_{st} = 0 \\ k_v = \infty & \text{斜坡输入下的静态误差} \quad e_{st} = 0 \\ k_a = k & \text{加速度输入下的静态误差} \quad e_{st} = 1/k \end{cases}$$

系统类型与静差的关系

汇总表：

类型 \ 静差 \ 输入	阶跃	斜坡	加速度
0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I	0	$\frac{1}{K}$	∞
II	0	0	$\frac{1}{K}$

提醒：系统稳定是讨论静差的前提。

静态误差的物理解释

初始条件：平衡位置 h_0，阀门开度 l_0

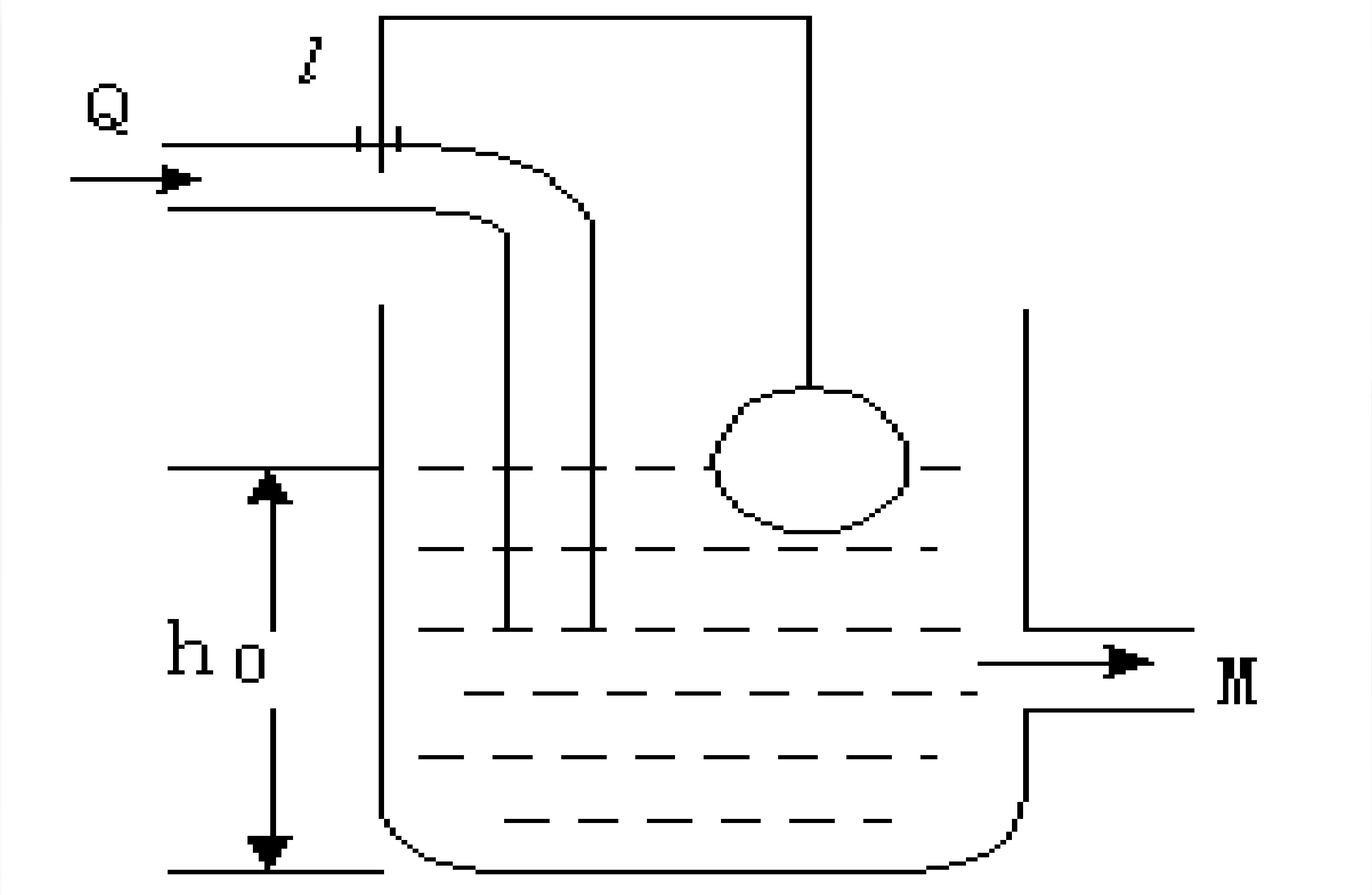
进水 Q_0，出水 M_0

当M增大，水位h降低，l变大，从而Q变大，h回升，

当达到新的平衡，此时 $h_1 ?= h_0$

如果要保证 $Q_1 > Q_0$

就必须使得 $l_1 > l_0, \therefore h_1 < h_0$



有差系统

静态误差的物理解释

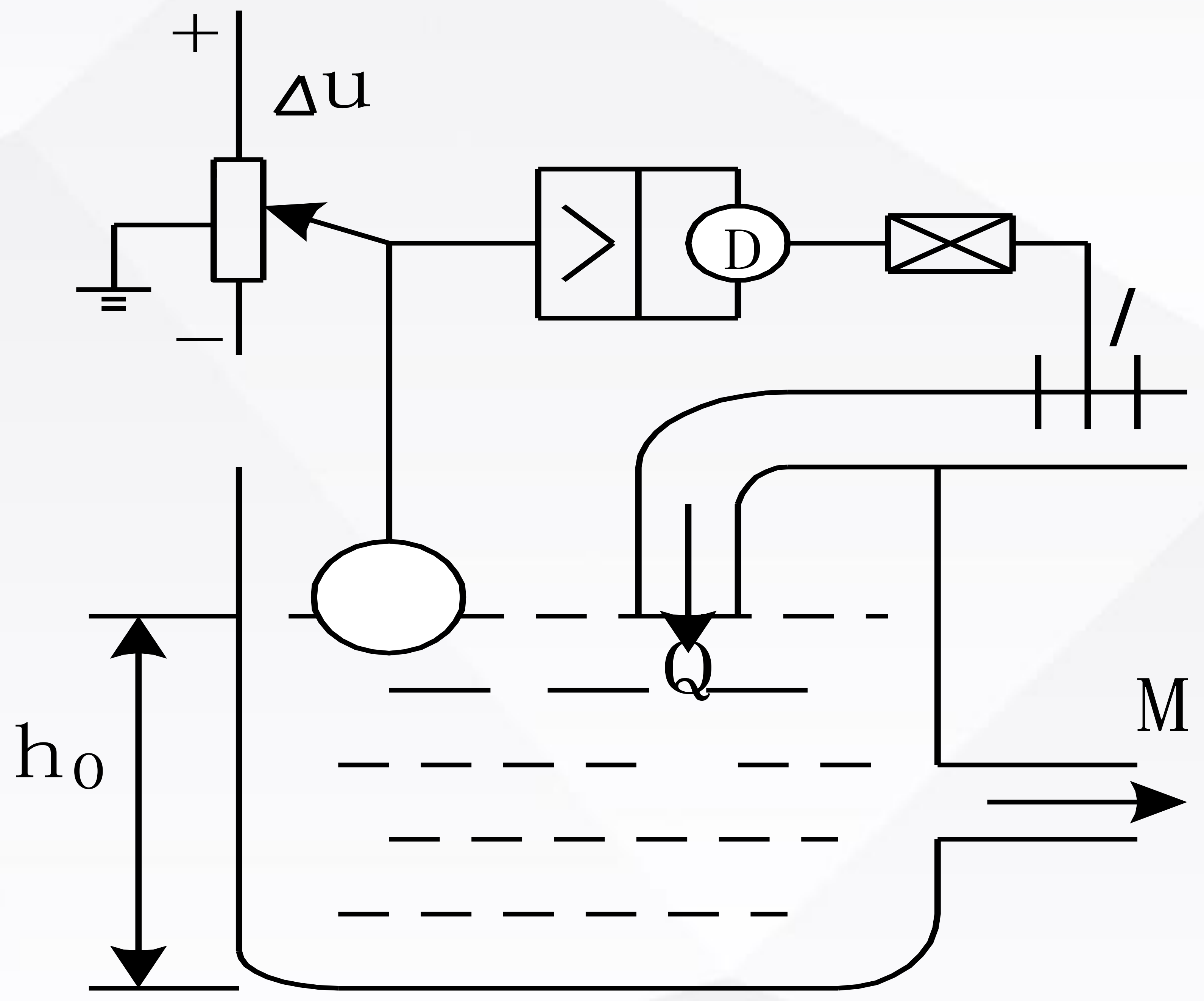
初始状态： $h = h_0, \Delta u = 0, l = l_0, M_0 = Q_0$

当M升为 M_1**，h下降，** $\Delta u > 0$**，电动机动作，**

提高 l, l_0升为l_1, Q升为Q_1

直到 $Q_1 = M_1$**达到新平衡**

此时 $h_1 ?= h_0$



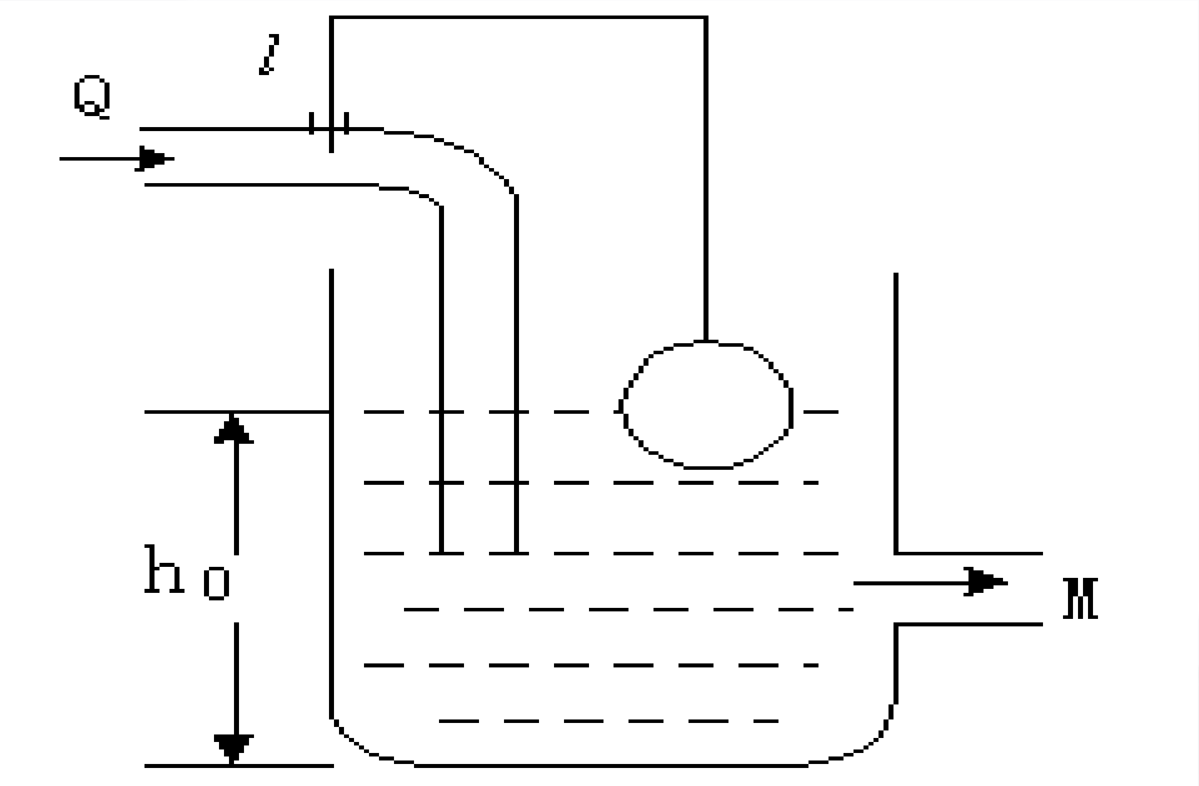
试想：只要 $h_1 \neq h_0, \Delta u \neq 0,$ **电动机就转，阀门就动作（不是开大就是关小），**

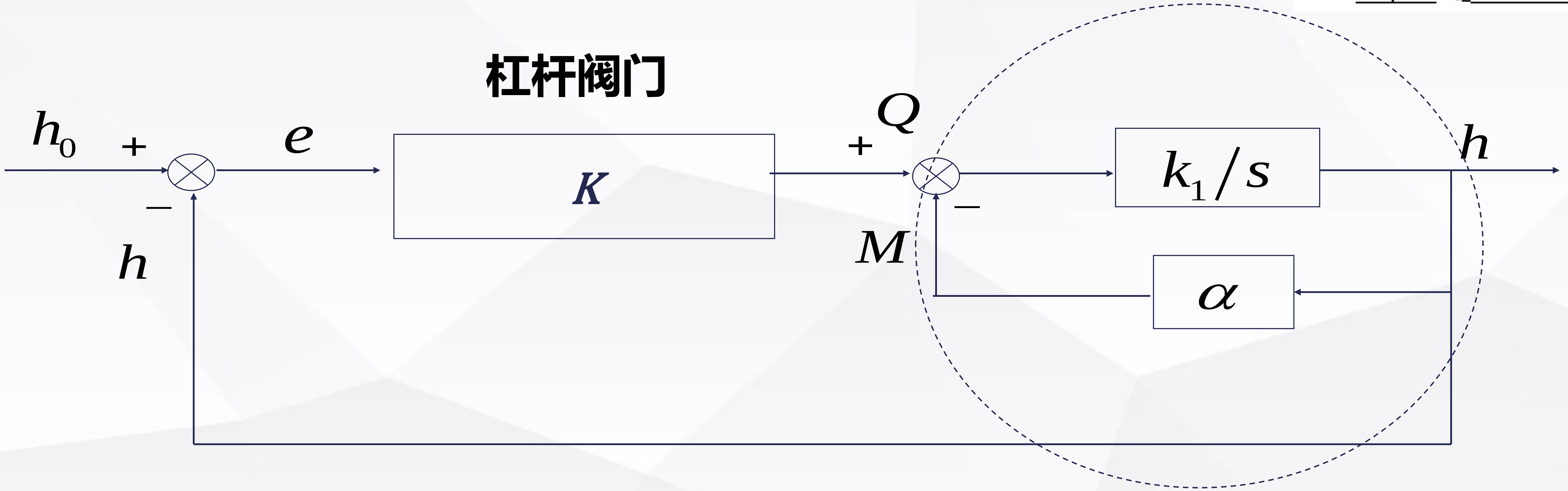
直到 $h = h_0$ **，达到新平衡。**

无差系统

静态误差理论解释

数学模型

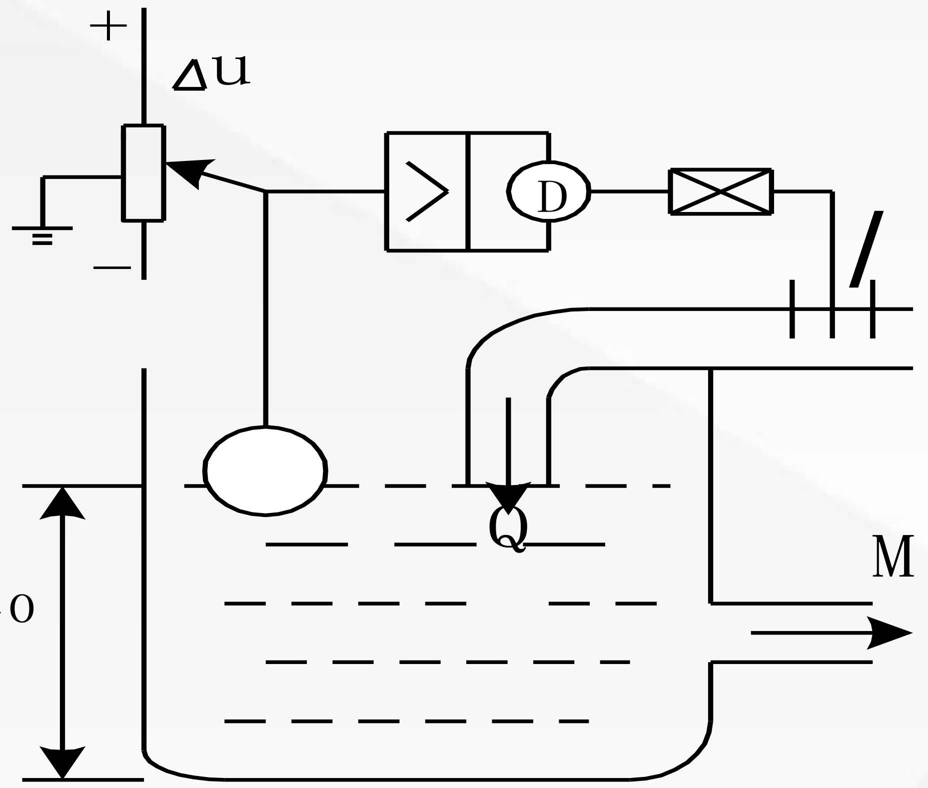




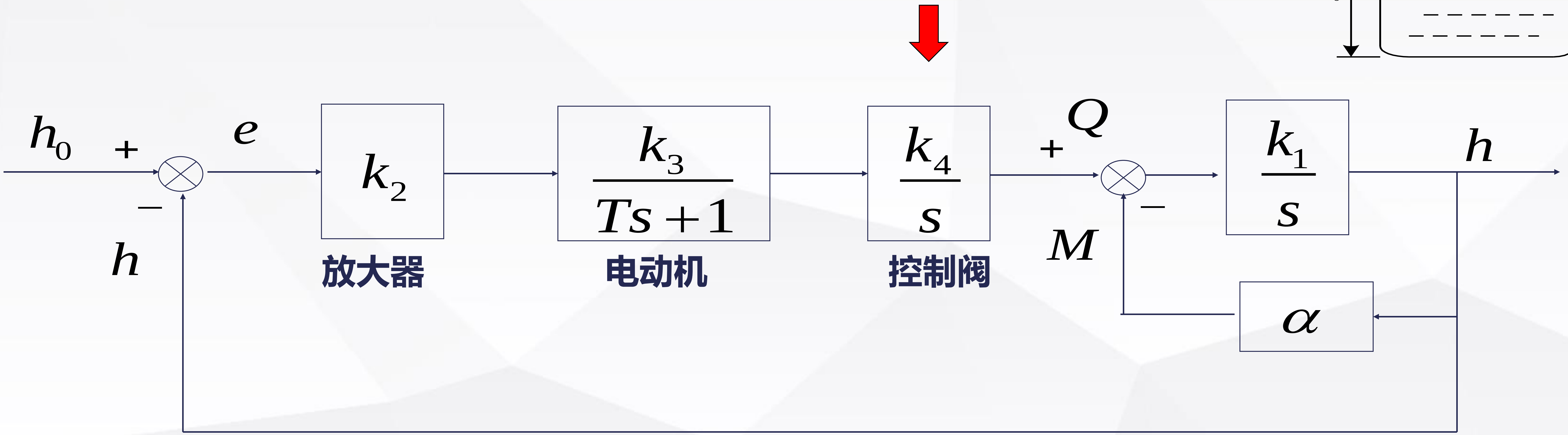
水箱模型

0型系统

静态误差理论解释



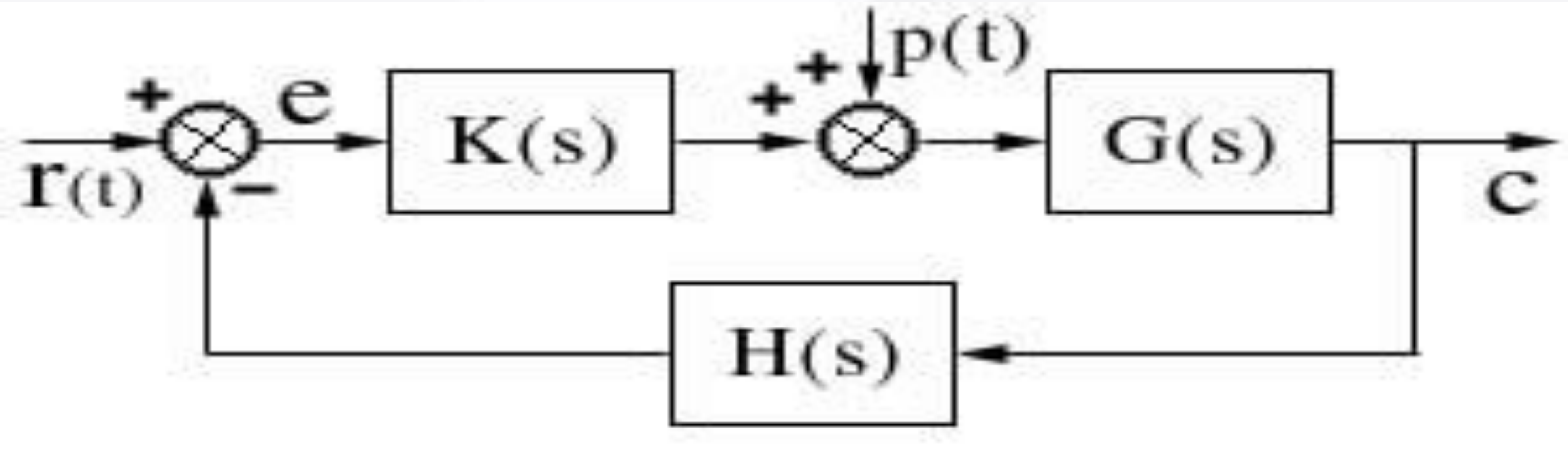
电动机在把速度信号变为位置信号时多了一个积分环节



1型系统

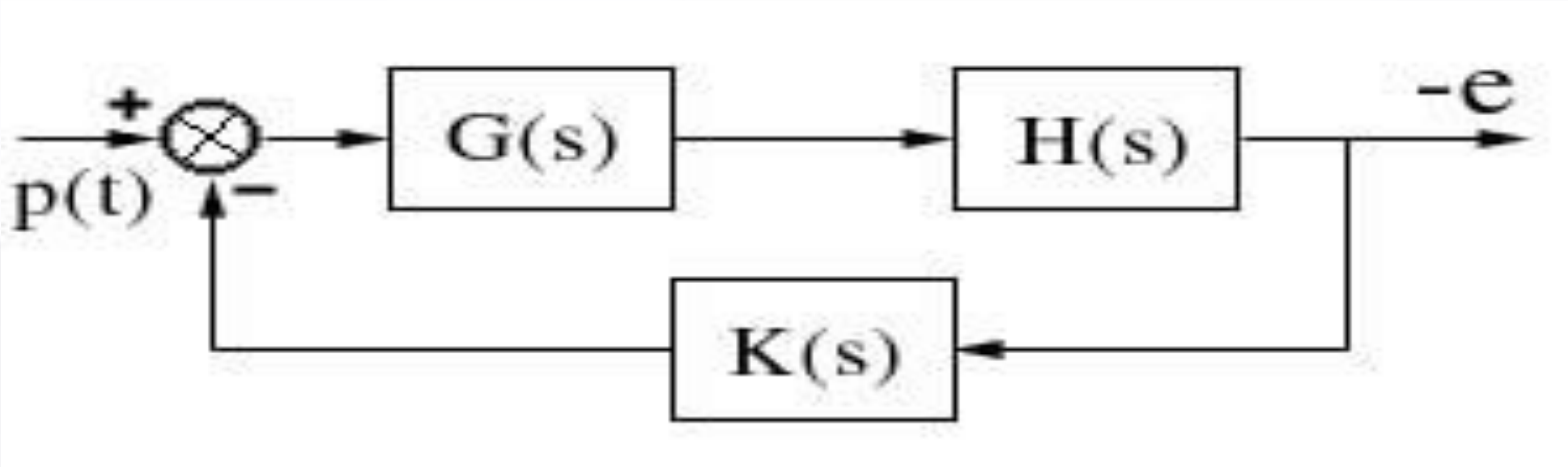
扰动引起的静差

扰动P(t)也是一种输入，系统静差由两部分组成，是由r(t)引起的静差和由p(t)引起的静差的代数和。



1. 由r(t)引起的误差，可根据r(t)的性质和$G_{开}(s)$求得对应输入静差，此时p(t)=0。

2. 由p(t)引起的误差，令r(t)=0，框图变换得：



$$\frac{e(s)}{p(s)} = -\frac{GH}{1+GHK}$$

在已知p(t)下，求出对应的扰动静差。

扰动引起的静差

试分析 K(s)含积分和K(s)不含积分两种情况下的阶跃扰动静差：

$$e_{st}=\lim_{s\to 0} se(s)=-\lim_{s\to 0}\frac{GH}{1+GHK}$$

●K(s)含积分 $K=\dfrac{k_1}{s(\cdots)(\cdots)}$ **即扰动作用点之前（左）含积分，**

对阶跃扰动无静差

$$e_{st}=-\lim_{s\to 0}\frac{GH}{1+GH\dfrac{k_1}{s(\cdots)(\cdots)}}=-\lim_{s\to 0}\frac{sGH(\cdots)(\cdots)}{s(\cdots)(\cdots)+k_1GH}=0$$

●K(s)不含积分 $K=\dfrac{k_1}{(\cdots)(\cdots)}$

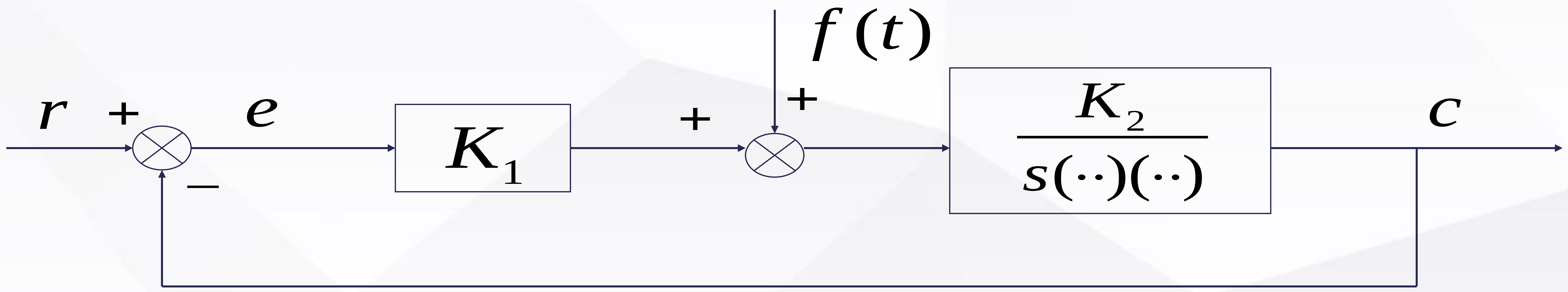
$$e_{st}=\begin{cases}-\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\dfrac{k_2}{(\cdots)(\cdots)}}{1+\left(\dfrac{k_2}{(\cdots)(\cdots)}\right)\dfrac{k_1}{(\cdots)(\cdots)}}=-\dfrac{k_2}{1+k_1k_2}\approx-\dfrac{1}{k_1} & \left(GH\text{不含积分，}GH=\dfrac{k_2}{(\cdots)(\cdots)}\right)\\[2ex] -\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\dfrac{k_2}{s(\cdots)(\cdots)}}{1+\left(\dfrac{k_2}{s(\cdots)(\cdots)}\right)\dfrac{k_1}{(\cdots)(\cdots)}}=-\dfrac{1}{k_1} & \left(GH\text{含积分，}GH=\dfrac{k_2}{s(\cdots)(\cdots)}\right)\end{cases}$$

扰动引起的静差

练习题：求以下3题的静差 $e = r - c$

1）第一种情况：r(t)=1(t), f(t)=1(t)

第二种情况：r(t)=t, f(t)=1(t)



扰动引起的静差

解：

1.判稳：系统稳定（假设）

2.由r(t)引起的误差， 令p(t)=0

1 型系统，静态误差可查表

$$r(t)=1(t),\ e_{r1}=0;\qquad r(t)=t,\ e_{r2}=\frac{1}{K1K2}$$

3.由p(t)引起的误差，令r(t)=0

扰动作用点之前不含积分，扰动作用点之后含有积分，对阶跃扰动的静态误差

$$e_f=-\frac{1}{K1}$$

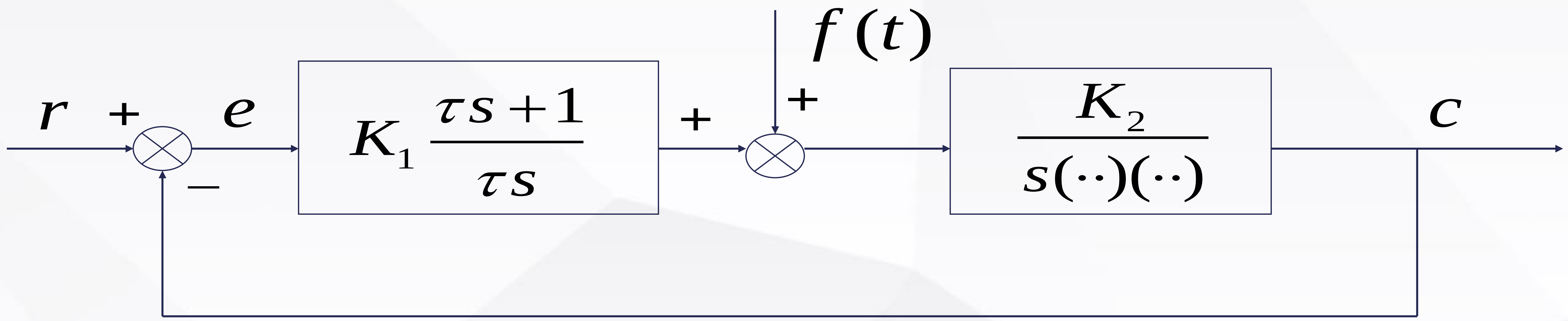
第一种情况：r(t)=1(t), f(t)=1(t) $e_{st}=-\dfrac{1}{K1}$

第二种情况：r(t)=t, f(t)=1(t) $e_{st}=\dfrac{1}{\mathrm{K1K2}}-\dfrac{1}{K1}$

扰动引起的静差

2）第一种情况：r(t)=1(t), f(t)=1(t)

第二种情况：r(t)=t, f(t)=1(t)



扰动引起的静差

解:

1. 判稳：系统稳定（假设）

2. 由r(t)引起的误差，令p(t)=0

2 型系统，静态误差可查表

$r(t)=1(t),\ e_{r1}=0$

$r(t)=t,\ e_{r2}=0$

3. 由p(t)引起的误差，令r(t)=0

$f(t)=1(t)$, **扰动作用点之前含有积分，对阶跃扰动无静差** $e_{stf}=0$

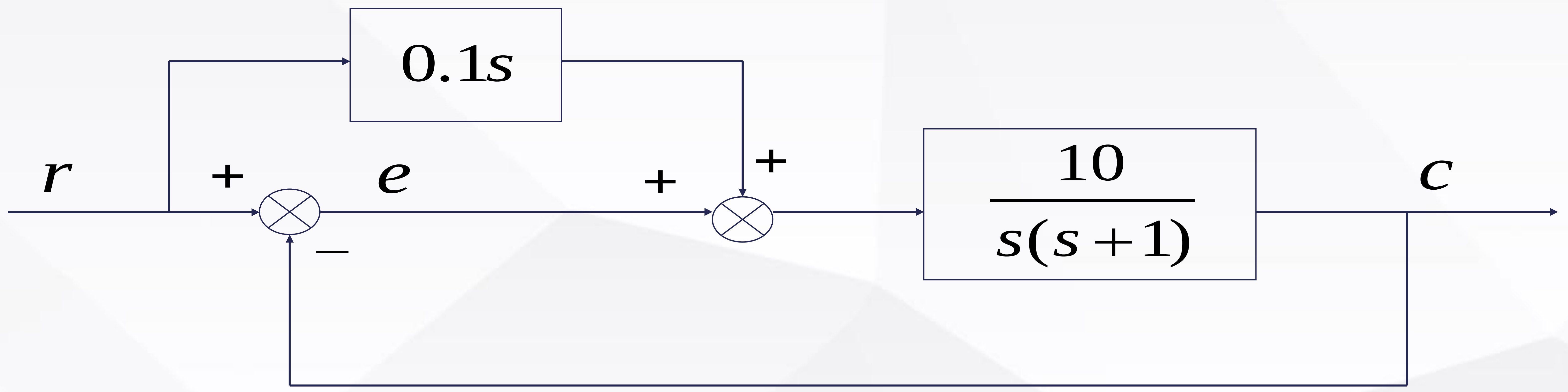
所以：第一种情况：r(t)=1(t), f(t)=1(t) $e_{st}=0$

第二种情况：r(t)=t, f(t)=1(t) $e_{st}=0$

扰动引起的静差

3）第一种情况：r(t)=1(t)

第二种情况：r(t)=t



扰动引起的静差

解：

$$G_{闭}(s)=\frac{s+10}{10+s(s+1)}$$

等效开环传递函数： $G_{开}(s)=\dfrac{s+10}{s^2}$

2 型系统，对阶跃信号和斜坡信号的稳态误差均为0。

所以：第一种情况：r(t)=1(t), $e_{st}=0$

第二种情况：r(t)=t, $e_{st}=0$

扰动引起的静差

答案:	r(t)=1(t), f(t)=1(t)	r(t)=t, f(t)=1(t)
1)	$-1/K_1$	$1/K_1K_2 - 1/K_1$
2)	0	0
3)	0	0

二阶系统阶跃响应的动态性能指标

1. t_r 上升时间

$y(t)$ 第一次达到 y(∞)的时间

2. t_d 延迟时间

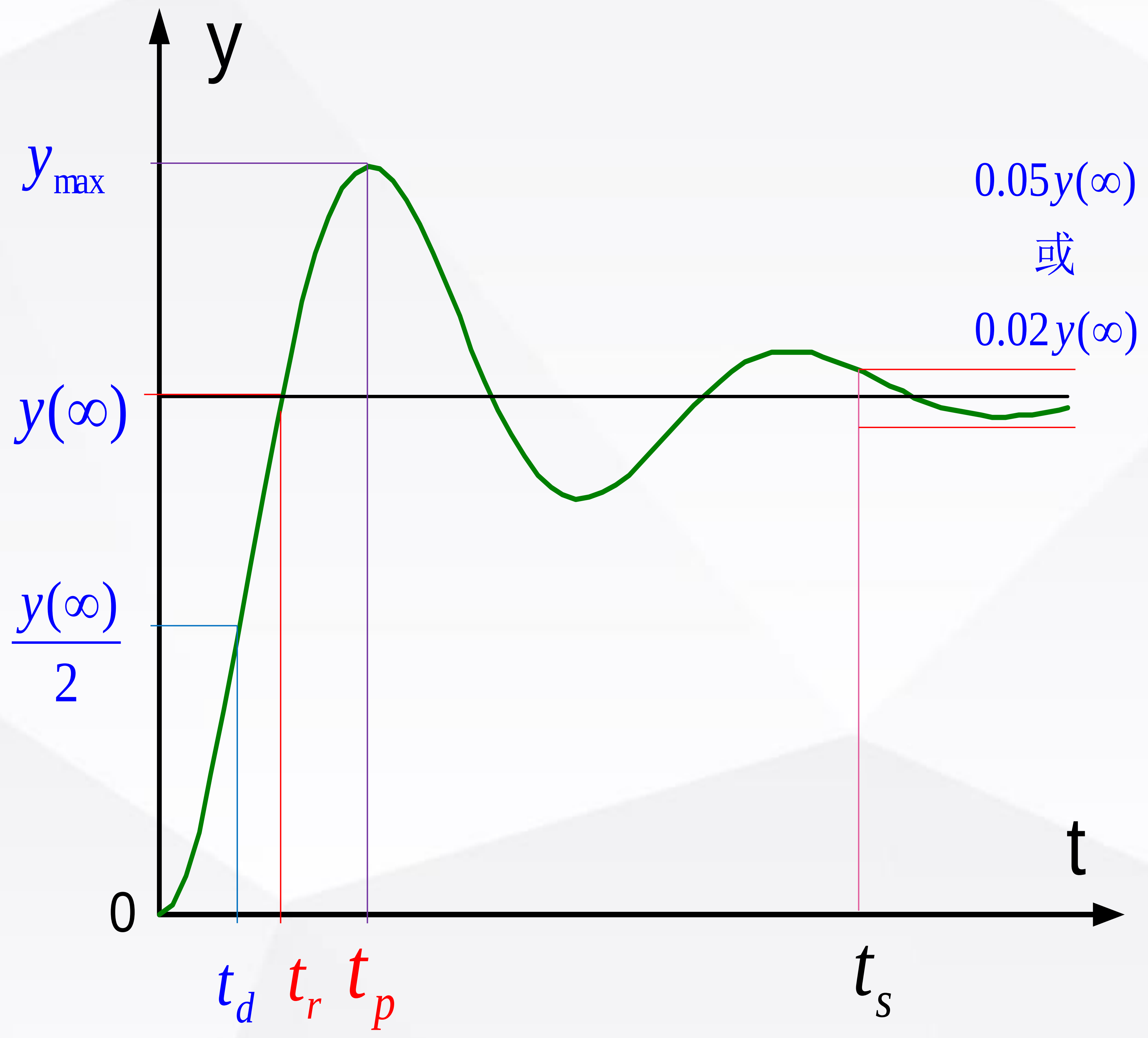
$y(t)$ 达到 y(∞)一半的时间

3. t_s 过渡过程时间

$y(t)$ 达到 $y(\infty) \pm 5\%$或$\pm 2\%$的时间

4. t_p 峰值时间

$y(t)$ 达到 y_{max}的时间



二阶系统阶跃响应的动态性能指标

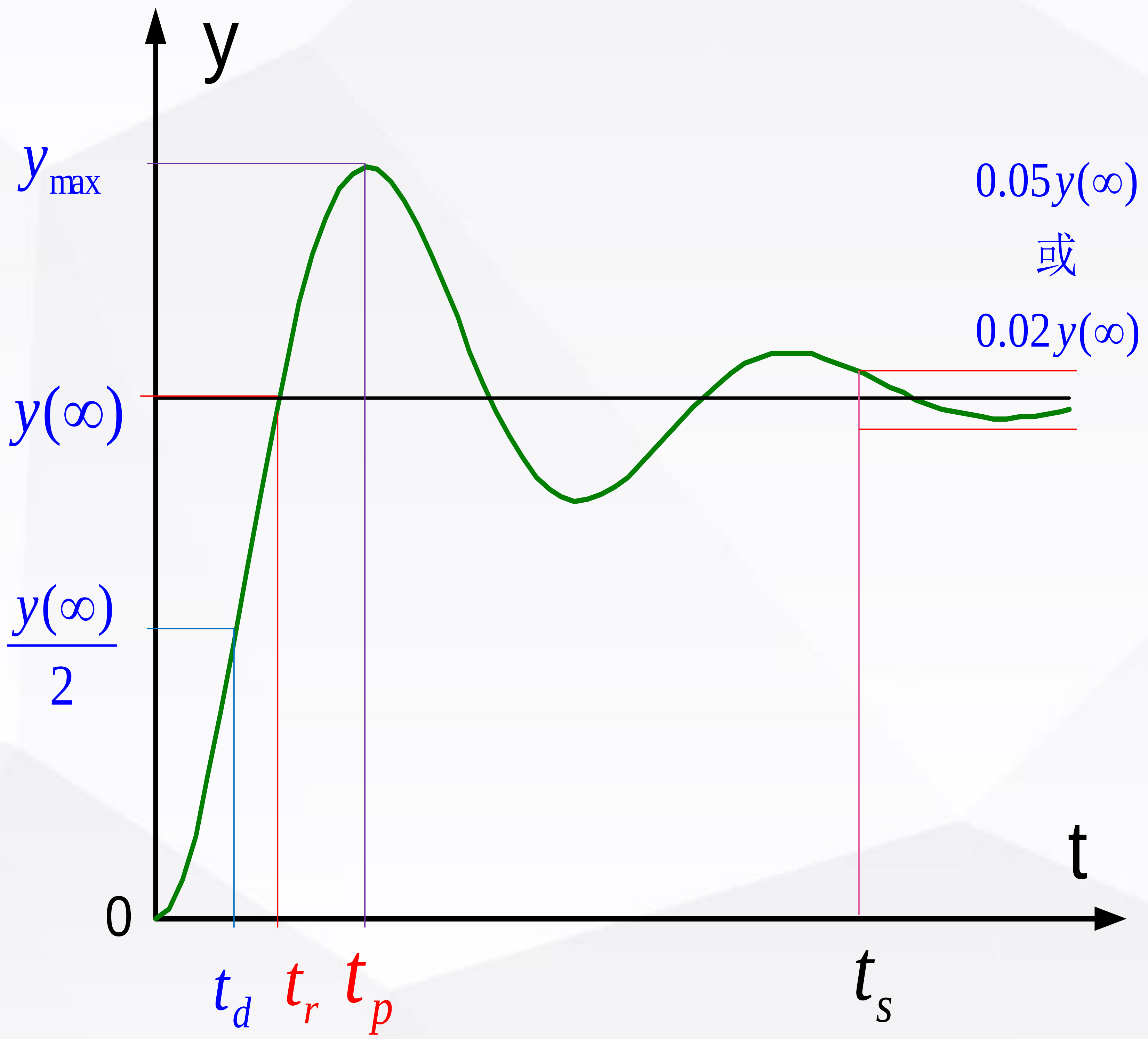
5. 超调量

$$\sigma = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

6. 振荡次数

7. 误差积分指标

$$\int_0^\infty e^2(t)dt,\ \int_0^\infty te^2(t)dt,\ \int_0^\infty |e(t)|\,dt$$



零初值和单位阶跃输入下，系统误差的某个函数的积分值，越小越好。

最主要指标是：过渡过程时间和超调量

二阶系统的运动

典型二阶系统

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta T\frac{dy}{dt}+y=v$$

T 时间常数，ζ 阻尼系数

另一种形式：

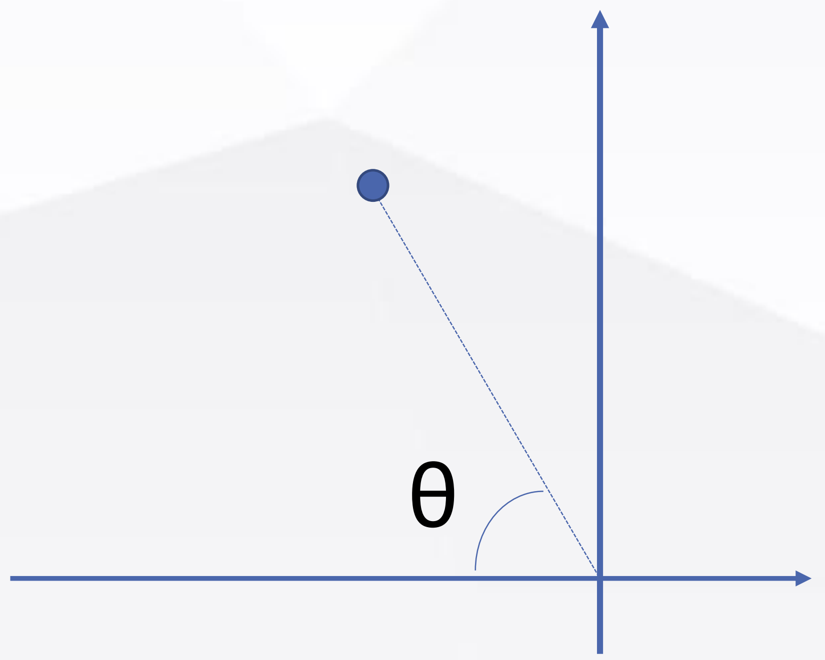
$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt}+{\omega_n}^2y={\omega_n}^2v$$

$\omega_n=\frac{1}{T}$ 无阻尼自振角频率

在零初始条件下，解此方程有以下几种情况：

(1) $0\le\zeta<1, s_{1,2}=-\frac{\zeta}{T}\pm j\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}\ (=-\omega_n\zeta\pm j\omega_d)$

（ ω_d 是阻尼振荡角频率 ）



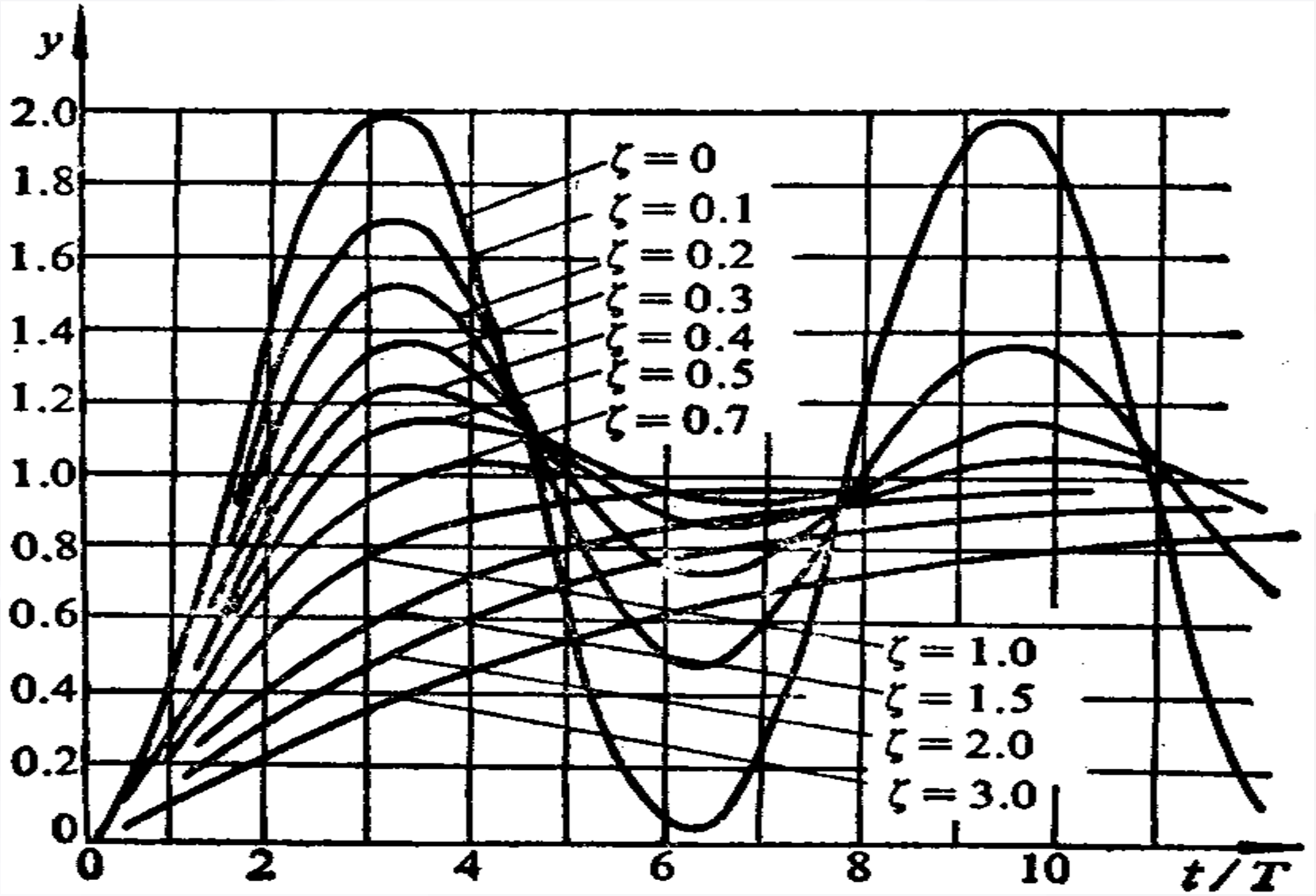
cos(θ)=ζ

二阶系统的阶跃响应

$y(t)$ 的单位阶跃响应：

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta}{T}t}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}t+\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

曲线如图



二阶系统的阶跃响应

(2) $\zeta = 1$，两个相等的负实根，$s_{1,2} = -\frac{1}{T}, y(t) = 1 - (1 + \frac{t}{T})e^{-\frac{t}{T}}$

(3) $\zeta > 1$，两个不相等的负实根，$s_{1,2} = -\frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}$

$y(t) = 1 + a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}$

$y(t)$单调趋近于1

分析：

(1) ζ 的作用：

$0 < \zeta < 1$，欠阻尼； $\zeta = 0$，无阻尼，带振荡性

$\zeta = 1$， 临界阻尼； $\zeta > 1$，过阻尼

(2) t/T 总在一起， T是响应的时间尺度，曲线展宽或压缩。

二阶系统阶跃响应的动态指标

性能指标：

(1) t_r, $y(t_r)=1$

$$y(t_r)=1=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta}{T}t_r}\sin(\omega_d t_r+\theta)$$

即 $sin(\omega_d t_r+\theta)=0\rightarrow\omega_d t_r+\theta=\pi$ $\quad t_r=\dfrac{\pi-\theta}{\omega_d}$

(2) t_p, 令 $\frac{\mathrm{dy}}{dt}=0$, 得 $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi T}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

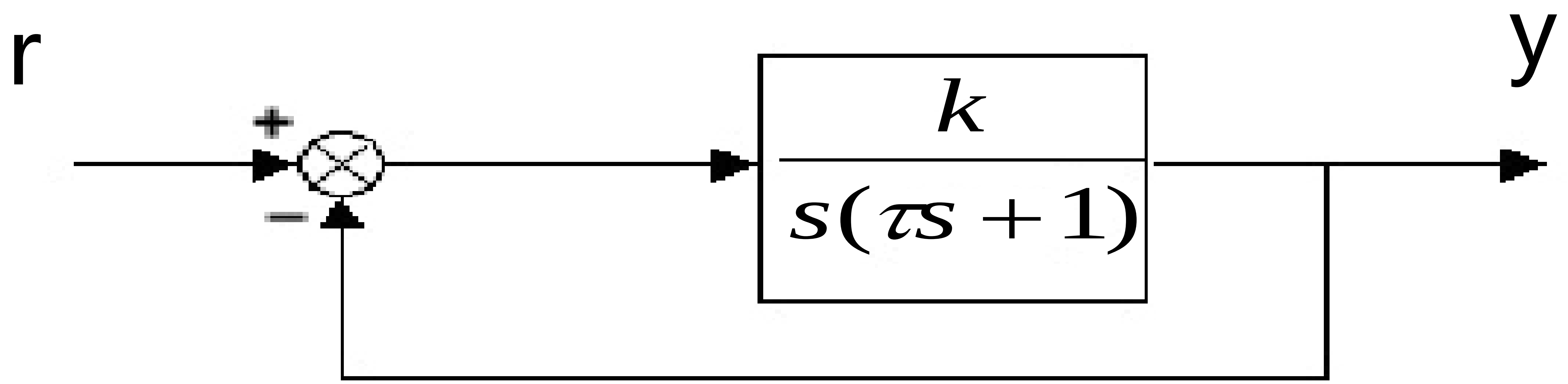
(3) 求σ, 将 $t=t_p$ 代入 y(t), 求出 $y_{\max}$, $y(\infty)=1$

$$\therefore\ \sigma=e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})}$$

(4) t_s 近似估计值， $t_s\approx\dfrac{3\sim4}{\zeta\omega_n}=\dfrac{3\sim4}{\zeta}T$（误差带5%~2%）

二阶系统阶跃响应的动态指标

课堂练习



$G_{闭} = \dfrac{1}{\tau/k\, s^2+s/k+1}$

当r(t)=1(t)，在以下三种不同 k,τ 参数下，试分析二阶系统的主要特征并画出阶跃输入下的y(t)曲线。

$1)k=1,\tau=1;\qquad (\zeta=0.5,\mathrm{T}=1,t_s=6)$

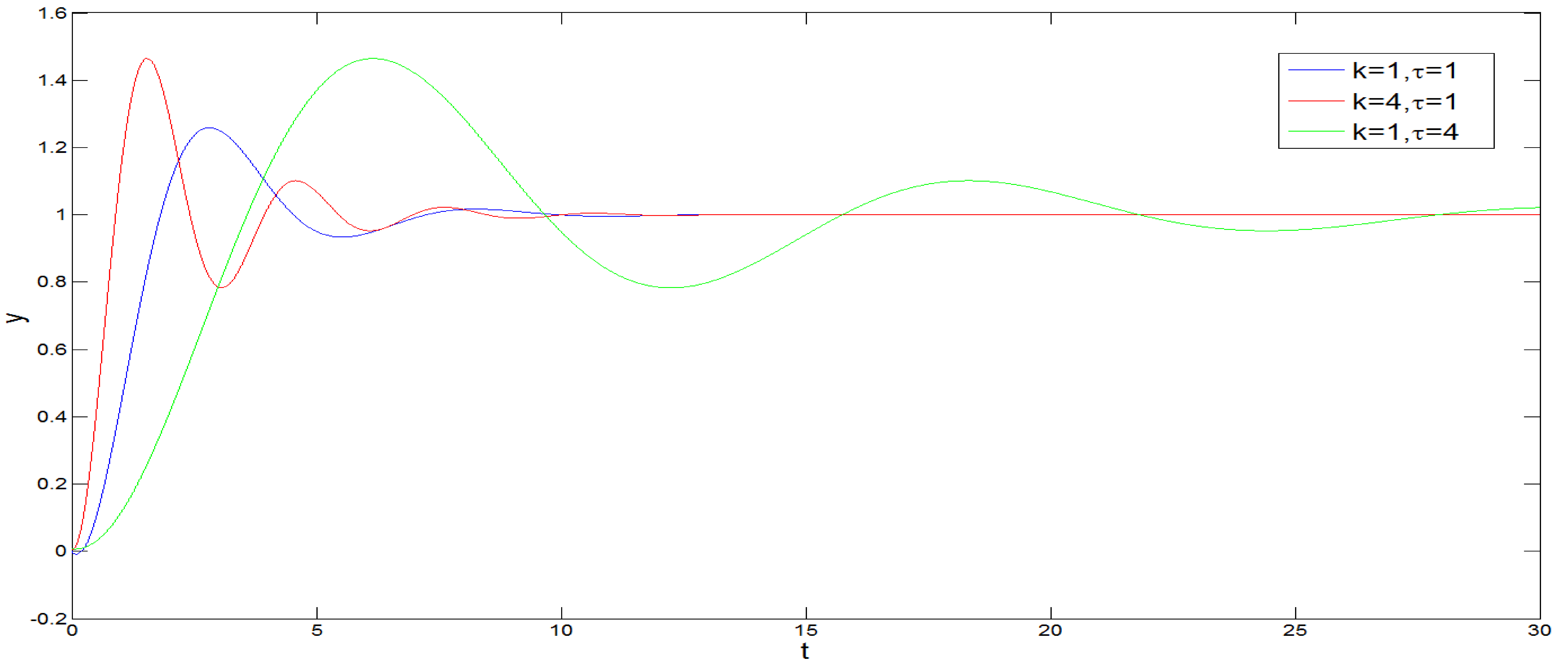
$2)k=4,\tau=1;\qquad (\zeta=0.25,\mathrm{T}=\dfrac{1}{2},t_s=6)$

$3)k=1,\tau=4;\qquad (\zeta=0.25,\mathrm{T}=2,t_s=24)$

$\tau/k\, s^2+s/k+1= T^2 s^2+2\xi T s+1 \quad T=\mathrm{sqrt}(\tau/k) \quad \xi=1/(2\mathrm{sqrt}(\tau k)) \quad t_s=3T/\xi=6\tau$

二阶系统阶跃响应的动态指标

阶跃响应曲线



二阶系统阶跃响应的动态指标

小结： 1）二阶系统 T,ζ 对动态性能的影响

$$\sigma = e^{-\left(\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}\right)} \qquad t_p = \frac{\pi T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

2）根据主要特征绘制阶跃响应曲线

高阶系统动态性能的近似

高阶系统的闭环传递函数如下：

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+a_0}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$-p_i\ (i=1,\cdots n)$ **系统的闭环极点**

$-z_j\ (j=1,\cdots m)$ **系统的闭环零点**

高阶系统动态性能的近似

在单位阶跃输入和零初始条件下，假设零极点都是实数且互不相同，则：

$r(s)=1/s$

$$y(s)=\frac{A_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s+p_i}$$

A_0, A_i**是相应于**$s=0, s=-p_i$ **极点处的留数**

$$A_0=[y(s)s]_{s=0}$$

从而，

$$y(t)=A_0+\sum_{i=1}^{n}A_ie^{-p_it}$$

$$A_i=[y(s)(s+p_i)]_{s=-p}$$

留数描述了该极点对应模态的运动在阶跃响应中所占比重。

高阶系统动态性能的近似

(1) 若某极点$-p_k$远离原点和其他零极点，此极点处的留数为：

$$A_k = y(s)(s+p_k)|_{s=-p_k}$$

$$= \frac{k(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{s(s+p_1)\cdots(s+p_k)\cdots(s+p_n)}(s+p_k)|_{s=-p_k}$$

$$= \frac{k(-p_k+z_1)\cdots(-p_k+z_m)}{(-p_k)(-p_k+p_1)\cdots(-p_k+p_n)} \approx \frac{k(p_k)^m}{(p_k)^n} \qquad n > m$$

$\Rightarrow$ A_k 很小

结论：远离原点的极点所对应的运动在阶跃响应中比重很小，可略去。

高阶系统动态性能的近似

(2) 若**零点$-z_r$**和**极点$-p_k$**很靠近，即$|-p_k+z_r|$ 很小，称这对零极点为**偶极子**。

此极点的留数

$$A_k=\frac{k(s+z_1)\cdots(s+z_r)\cdots(s+z_m)}{s(s+p_1)\cdots(s+p_k)\cdots(s+p_n)}(s+p_k)|_{s=-p_k}$$

$$=\frac{k(-p_k+z_1)\cdots(-p_k+z_r)\cdots(-p_k+z_m)}{(-p_k)(-p_k+p_1)\cdots(-p_k+p_n)} \qquad n>m$$

⇒ A_k 很小

结论：若有一零点与一极点相近，则该极点所对应的运动在阶跃响应中比重很小。

高阶系统动态性能的近似

(3) 闭环系统的主导极点

在分析高阶系统时，可将上述两种情况的极点化作次要因素而忽略。

主导极点：**稳定的闭环系统，忽略次要因素，离虚轴最近的极点。**

工程中，可忽略实部五倍开外的极点。

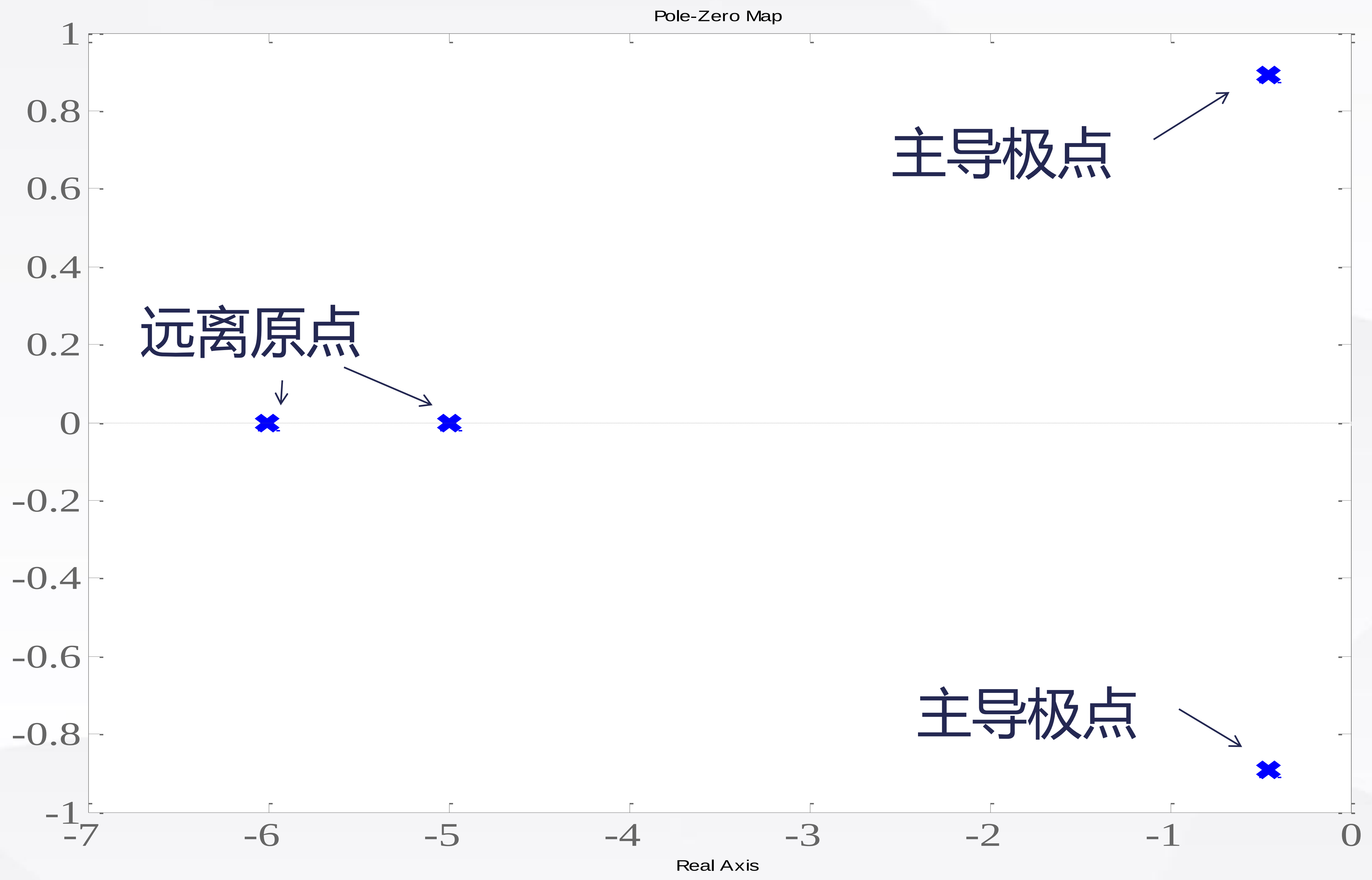
主导极点可以是一个、两个或者多个；可以是实数或者复数；**如果只有一对左半平面的共轭复极点符合要求，则该系统可近似为一个二阶系统，其动态特性由这对主导极点决定。**

高阶系统动态性能的近似

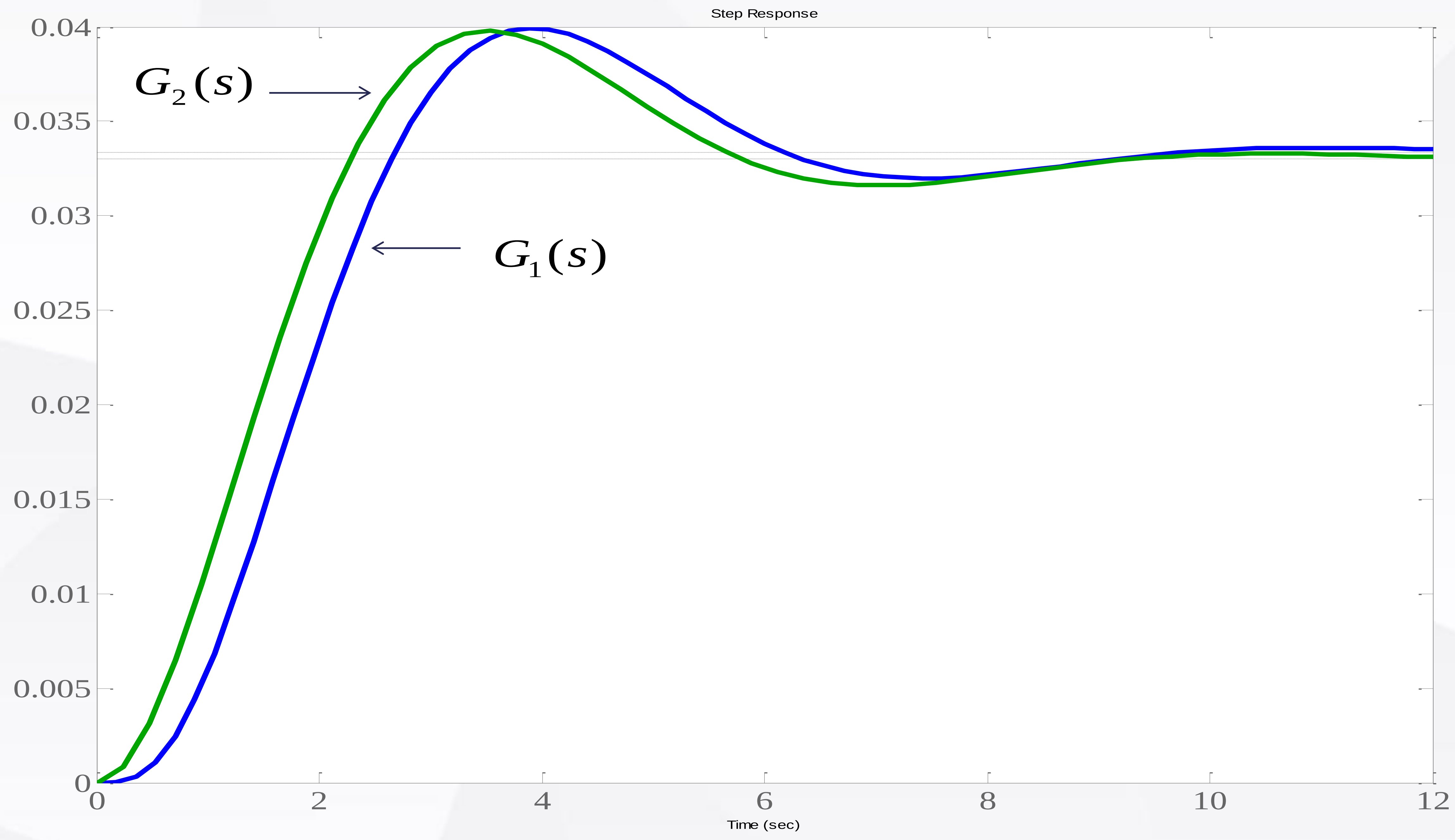
$$G_1(s) = \frac{1}{(s+5)(s+6)(s^2+0.9s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{0.033}{(s^2+0.9s+1)}$$

远离原点的极点所对应的运动占阶跃响应比重很小，可忽略。



零极点图



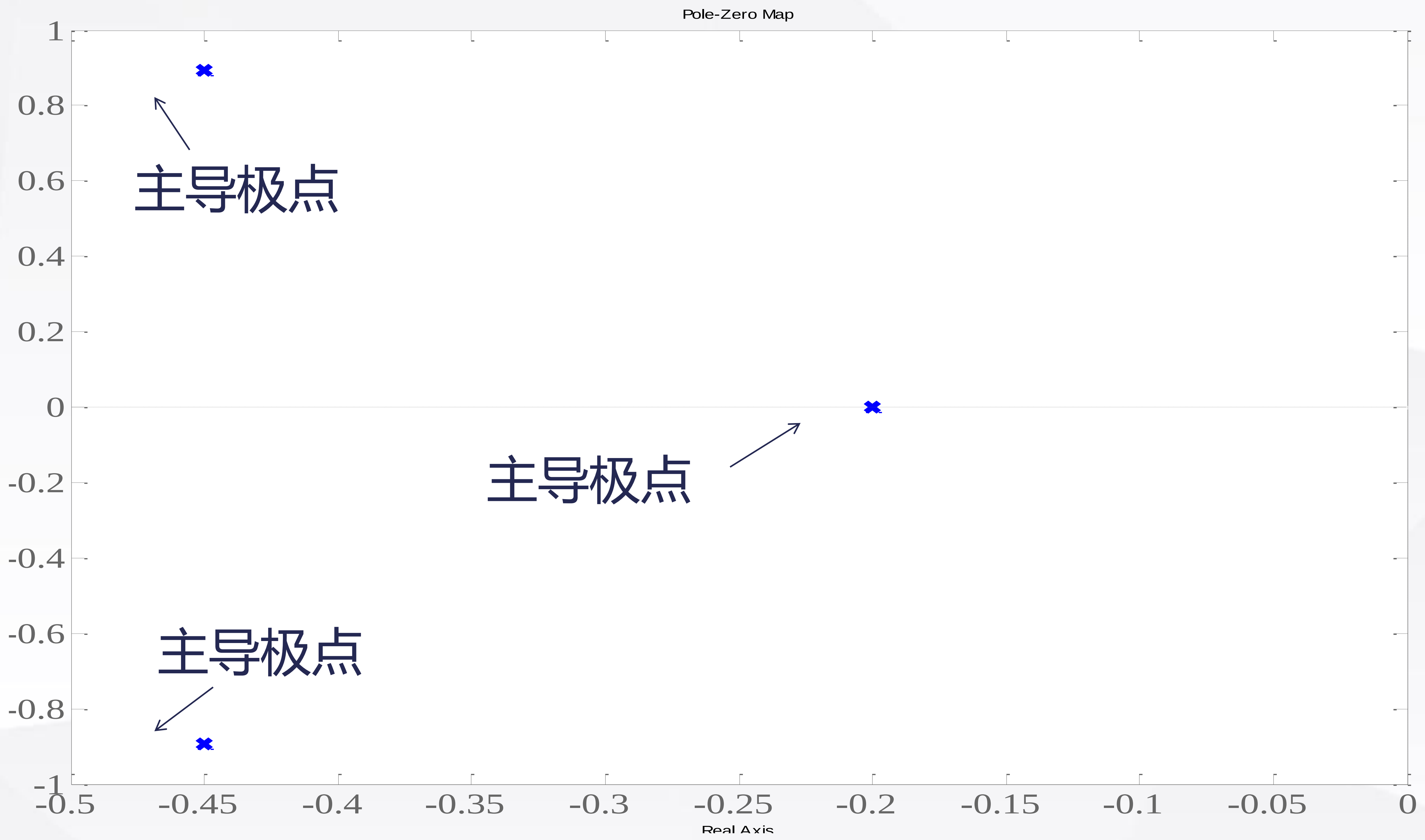
阶跃响应图

高阶系统动态性能的近似

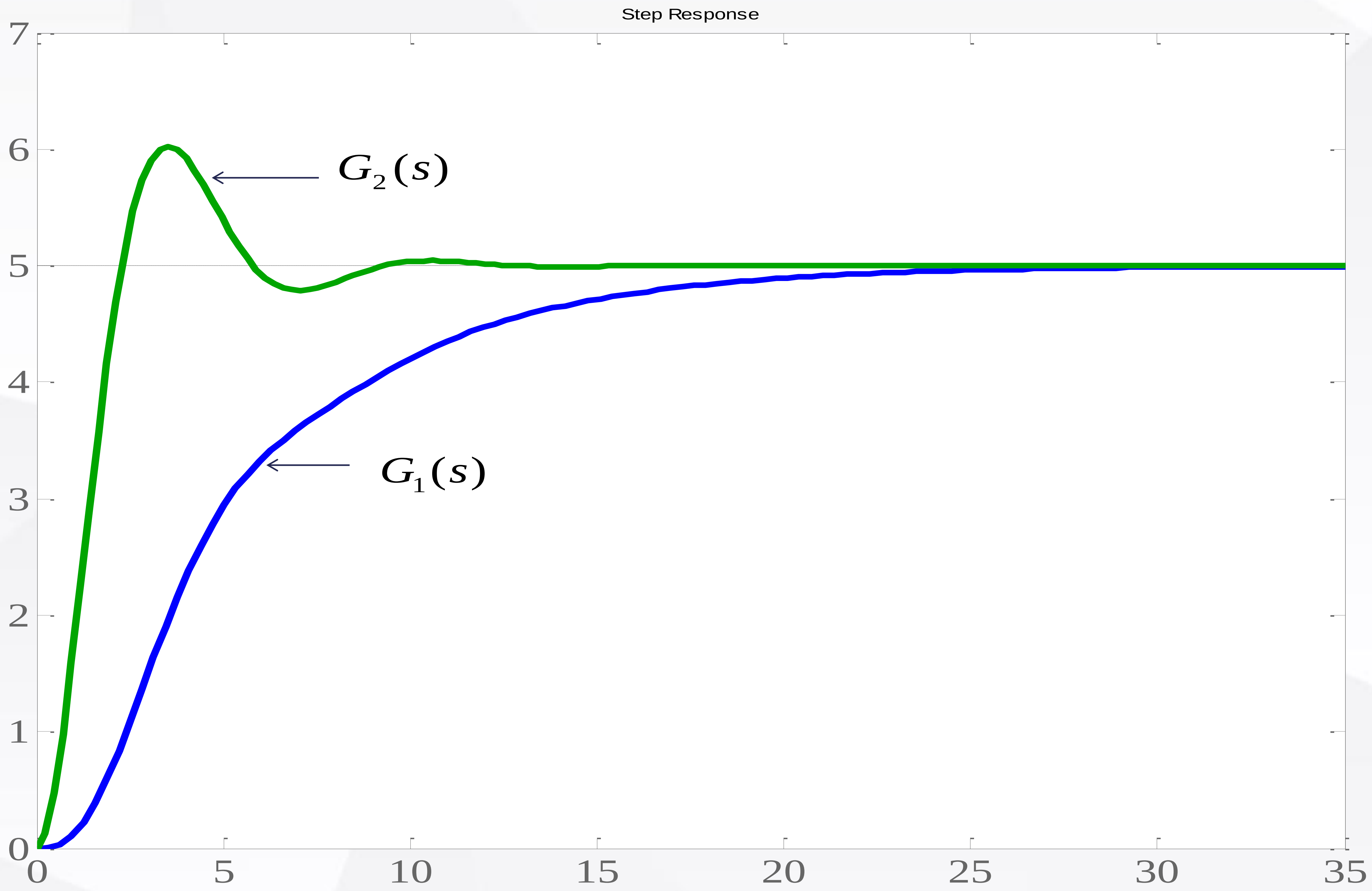
$$G_1(s)=\frac{1}{(s+0.2)(s^2+0.9s+1)}$$

$$G_2(s)=\frac{5}{(s^2+0.9s+1)}$$

靠近原点的极点不能忽略。



零极点图



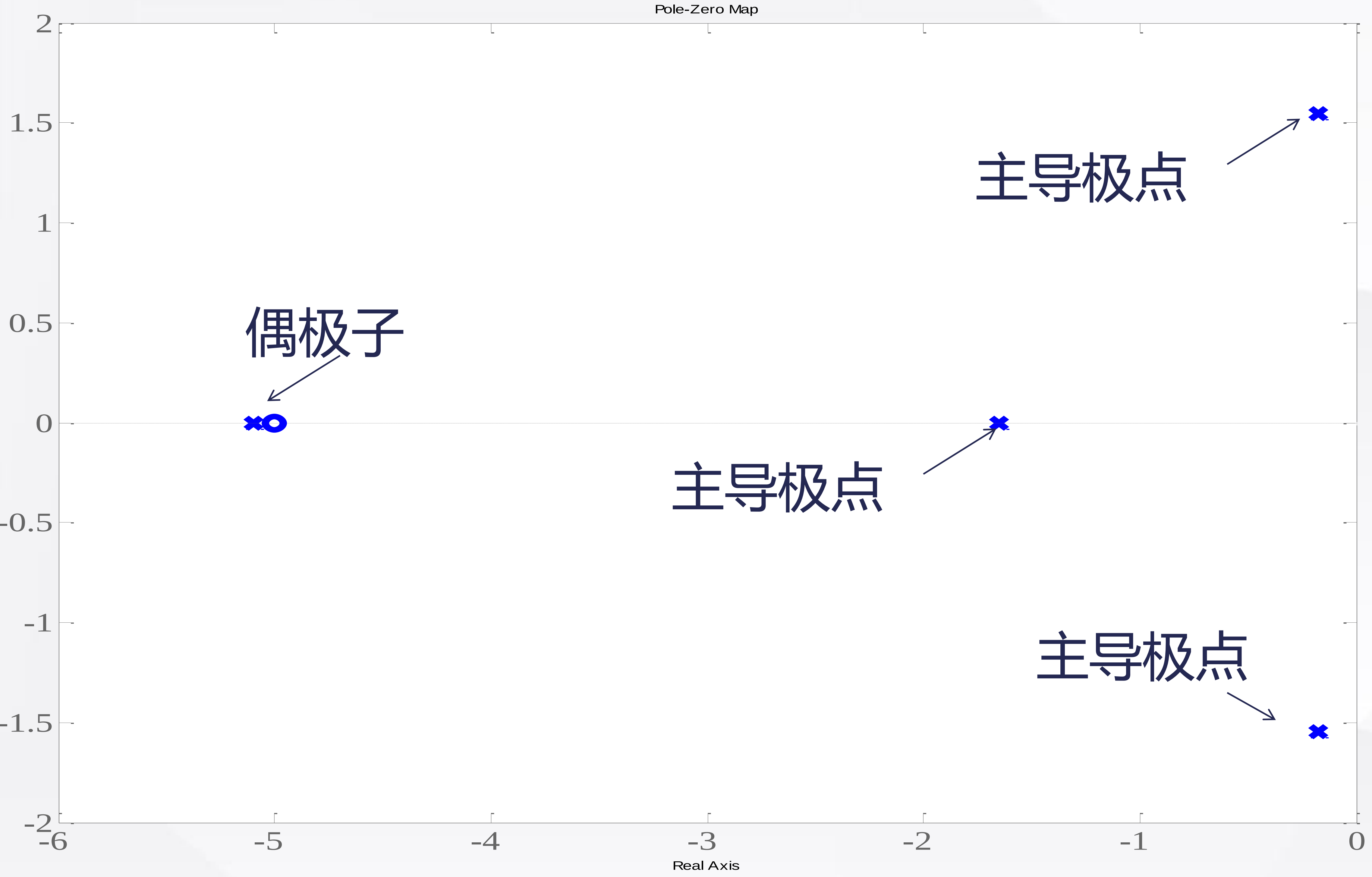
阶跃响应图

高阶系统动态性能的近似

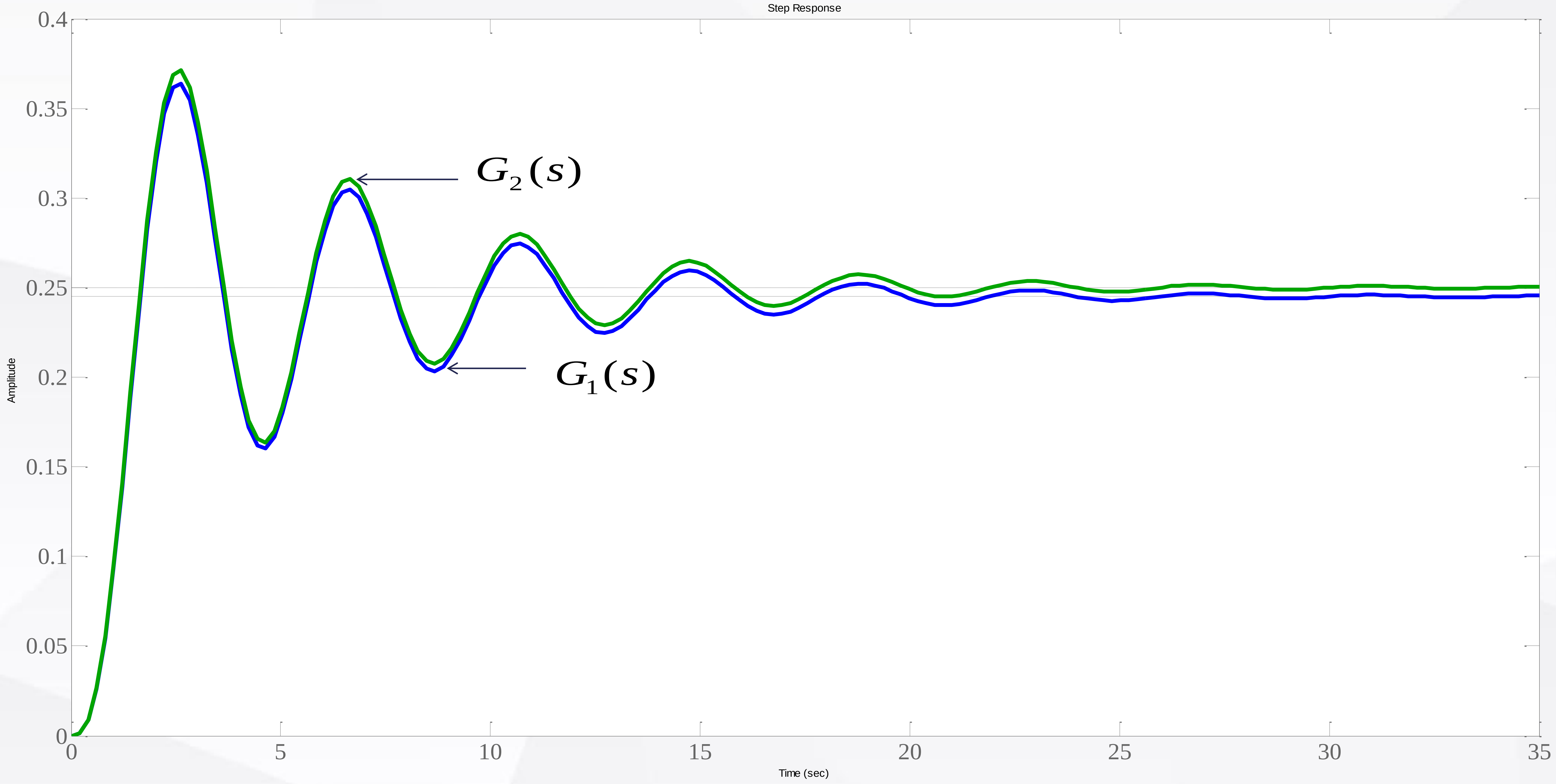
$$G_1(s)=\frac{s+5}{(s+5.1)(s^3+2s^2+3s+4)}$$

$$G_2(s)=\frac{1}{(s^3+2s^2+3s+4)}$$

如果有一零点与一极点相近，则这个极点所对应的运动占阶跃响应的比重很小。



零极点图

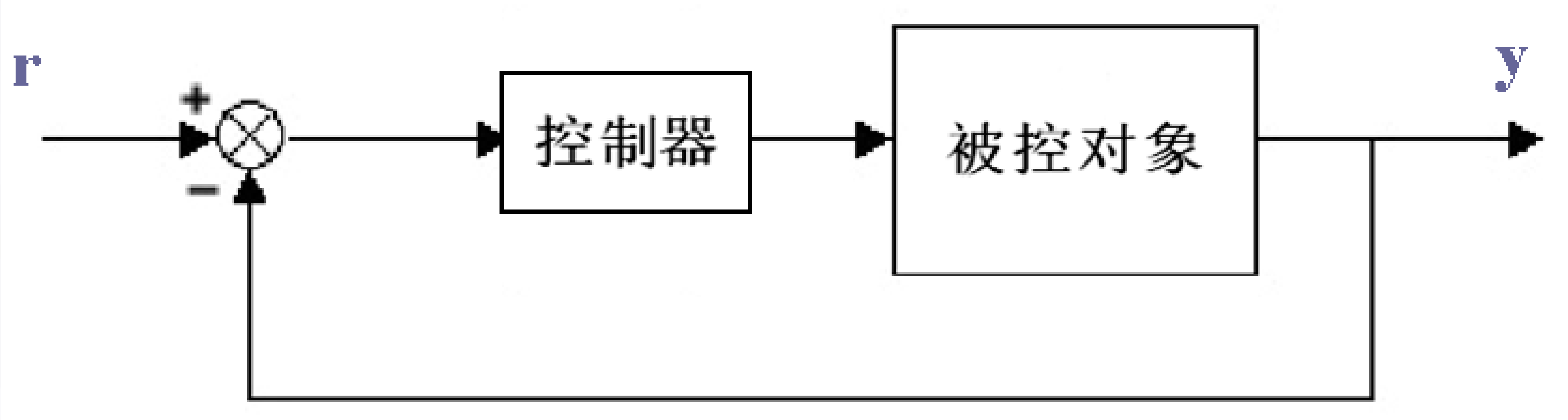


阶跃响应图

控制系统的校正

两种常用的校正方式：串联校正和局部反馈校正

1、串联校正



控制系统的校正

(1) $k(s)=k_p$（比例），设$G_g(s)=\frac{1}{Ts(Ts+2\zeta)}$

当$k_p=1$特征方程为：$T^2s^2+2\zeta Ts+1=0$

当$k_p\neq 1$特征方程为：$T^2s^2+2\zeta Ts+k_p=0$

$$T'=\frac{T}{\sqrt{k_p}},\ \zeta'=\frac{\zeta}{\sqrt{k_p}}$$

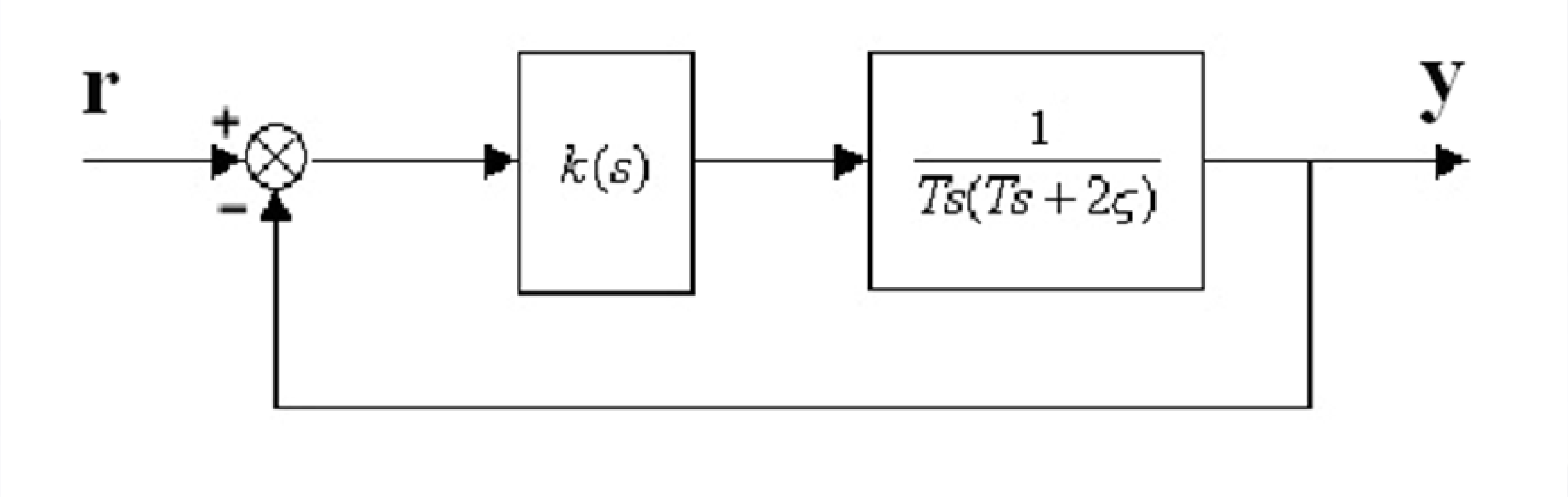
过渡过程时间不变

峰值时间变小

上升时间变小

超调量变大

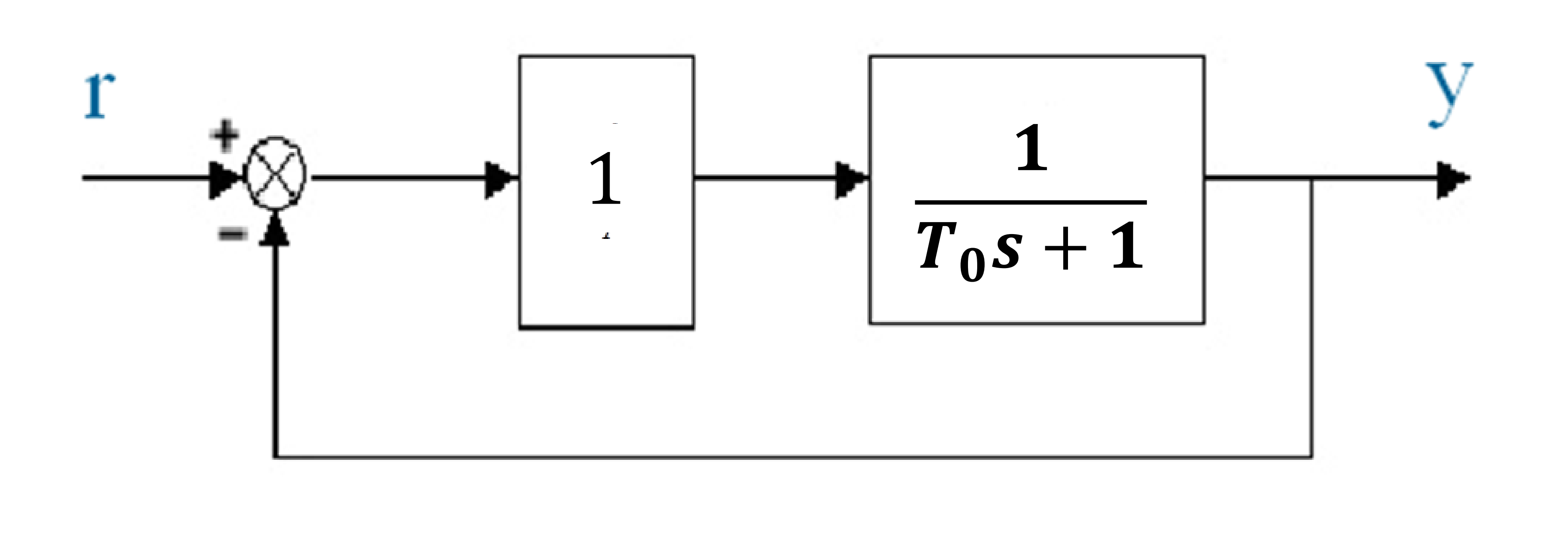
当k_p变大，T'变小，系统的响应快，但ζ'也变小，振荡加剧。



控制系统的校正

(2) $k(s) = \frac{1}{T_1 s}$ （积分校正）

如果 $G_g(s) = \frac{1}{T_0 s+1}$



特征方程为（不加积分）：$T_0 s + 1 + 1 = 0$

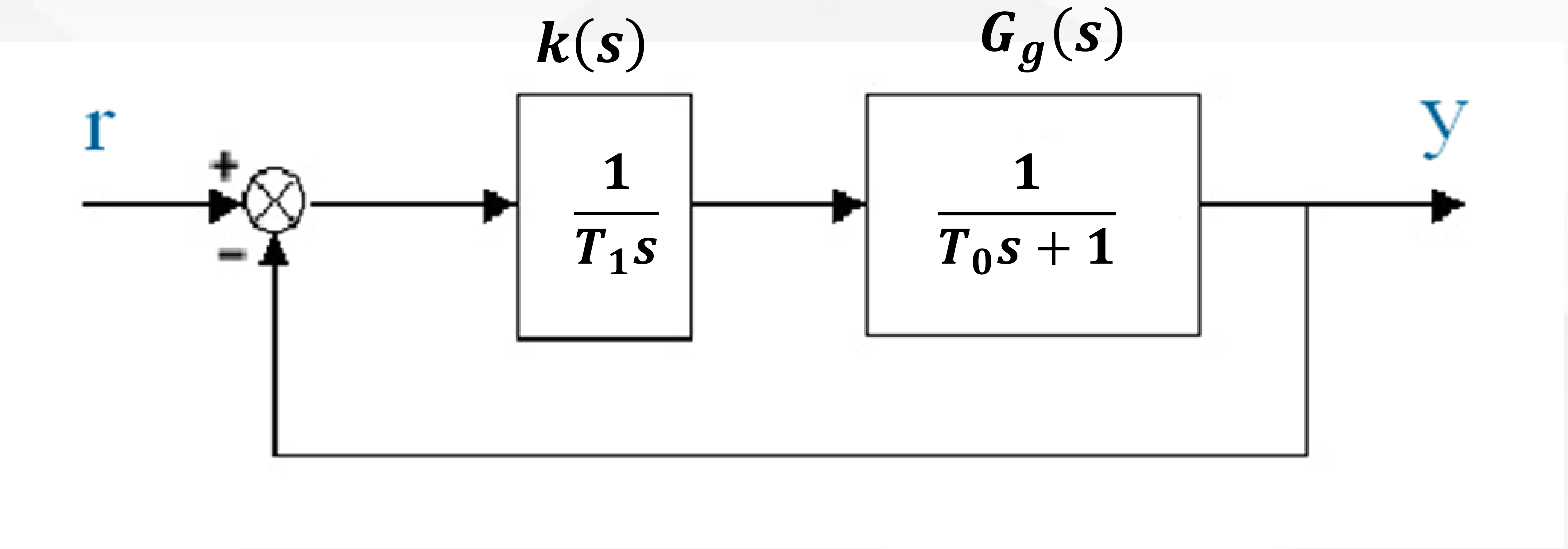
$$T' = \frac{T_0}{2}, t_s = 3T' = \frac{3T_0}{2}$$

有静差

控制系统的校正

如果$G_g(s)=\frac{1}{T_0s+1}$，$k(s)=\frac{1}{T_1s}$

特征方程 $T_1s(T_0s+1)+1=0$



$$T_1T_0s^2+T_1s+1=0$$

$$T'=\sqrt{T_1T_0},\zeta'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_1}{T_0}}$$

$t_s\approx\frac{3T'}{\zeta'}=6T_0$， 与不加积分比较，系统响应变慢。

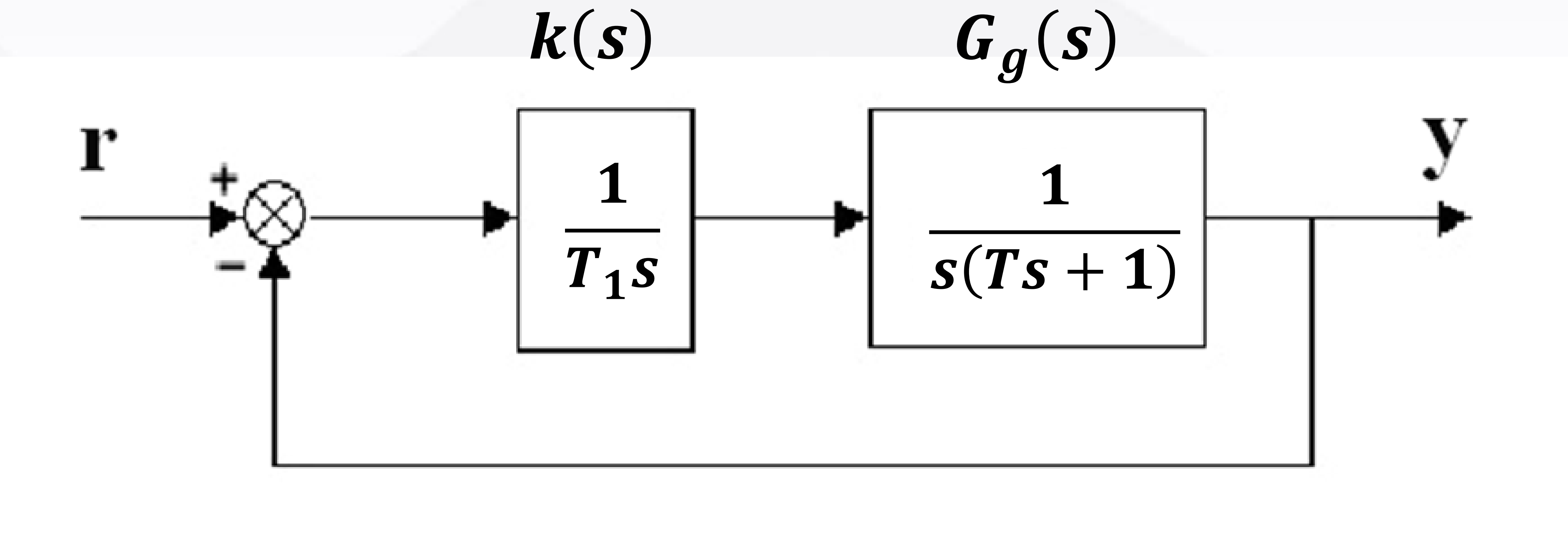
无静差

控制系统的校正

设 $G_g(s)=\frac{1}{s(Ts+1)}$， $G_{开}(s)=\frac{1}{T_1 s^2(Ts+1)}$

特征方程：$T_1Ts^3+T_1s^2+1=0$

显然，系统不稳定。



可见，加积分　　优点-对克服静差有利　（提高开环系统型次）

缺点-系统变慢，甚至于不稳定

控制系统的校正

(3) 将上述两者结合起来，控制器改为比例加积分

$$k(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_1 s}\right) = k_p \frac{T_1 s + 1}{T_1 s} \quad , \quad \text{设} \; G_g(s) = \frac{1}{T_0 s + 1}$$

$$G_{\text{闭}}(s) = \frac{k_p\,(T_1 s + 1)}{T_1 s(T_0 s + 1) + k_p\,(T_1 s + 1)} = \frac{k_p\,(T_1 s + 1)}{T_1 T_0 s^2 + \left(k_p + 1\right) T_1 s + k_p}$$

$$= \frac{T_1 s + 1}{\dfrac{T_1 T_0 s^2}{k_p} + \dfrac{k_p + 1}{k_p} T_1 s + 1} \xRightarrow{k_p \gg 1} \frac{T_1 s + 1}{\dfrac{T_1 T_0}{k_p} s^2 + T_1 s + 1}$$

$$\approx \frac{T_1 s + 1}{(T_1 s + 1)(\dfrac{T_0}{k_p} s + 1)} = \frac{1}{\dfrac{T_0}{k_p} s + 1}$$

控制系统的校正

比例加积分控制的优点：

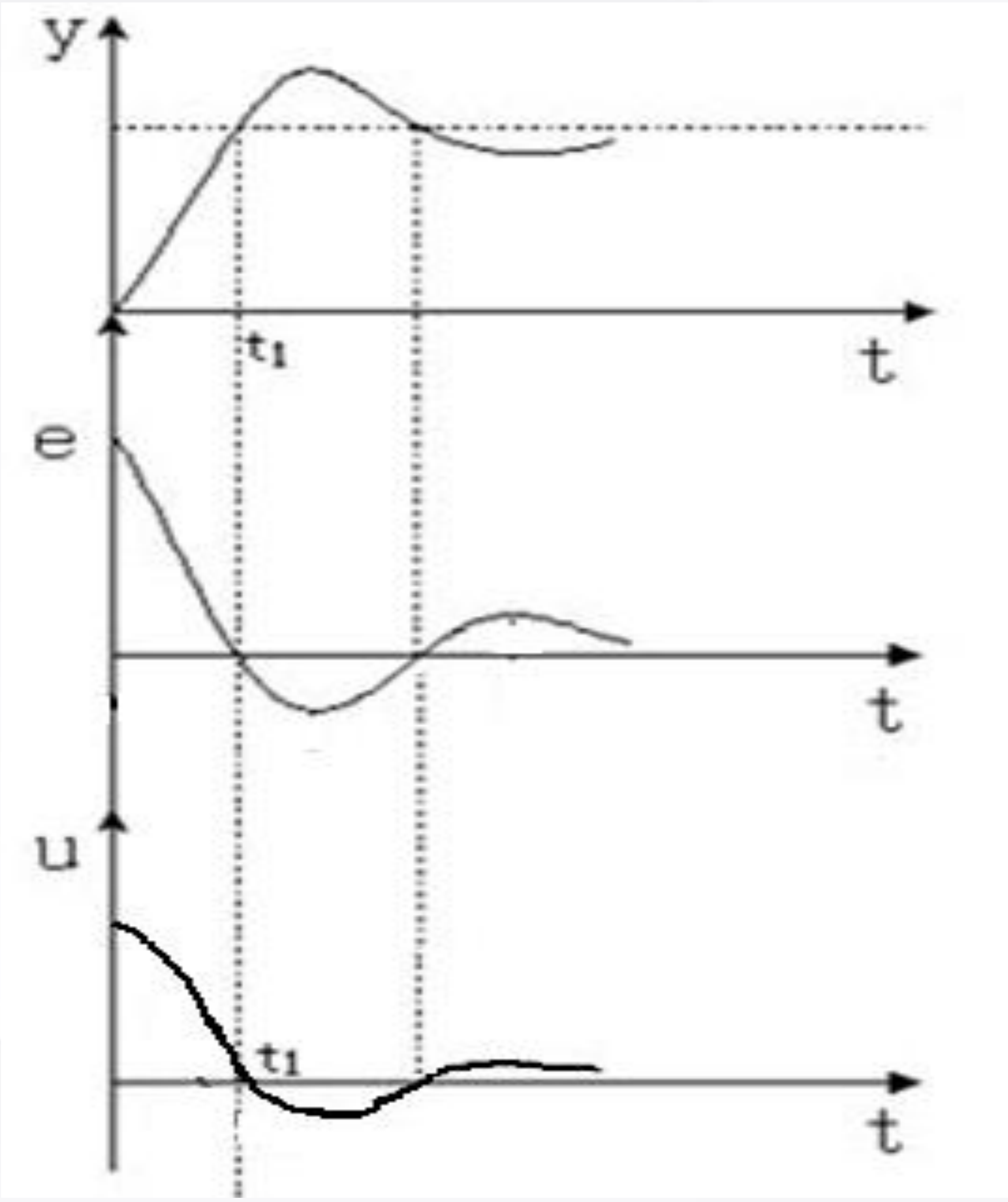
1）积分对克服静态误差有利

2）两个参数可调，适当选择可同时改善静差和动态性能。

滞后校正控制器

控制系统的校正

(4) 超调的控制



考虑比例控制器 $k(s) = k_p$

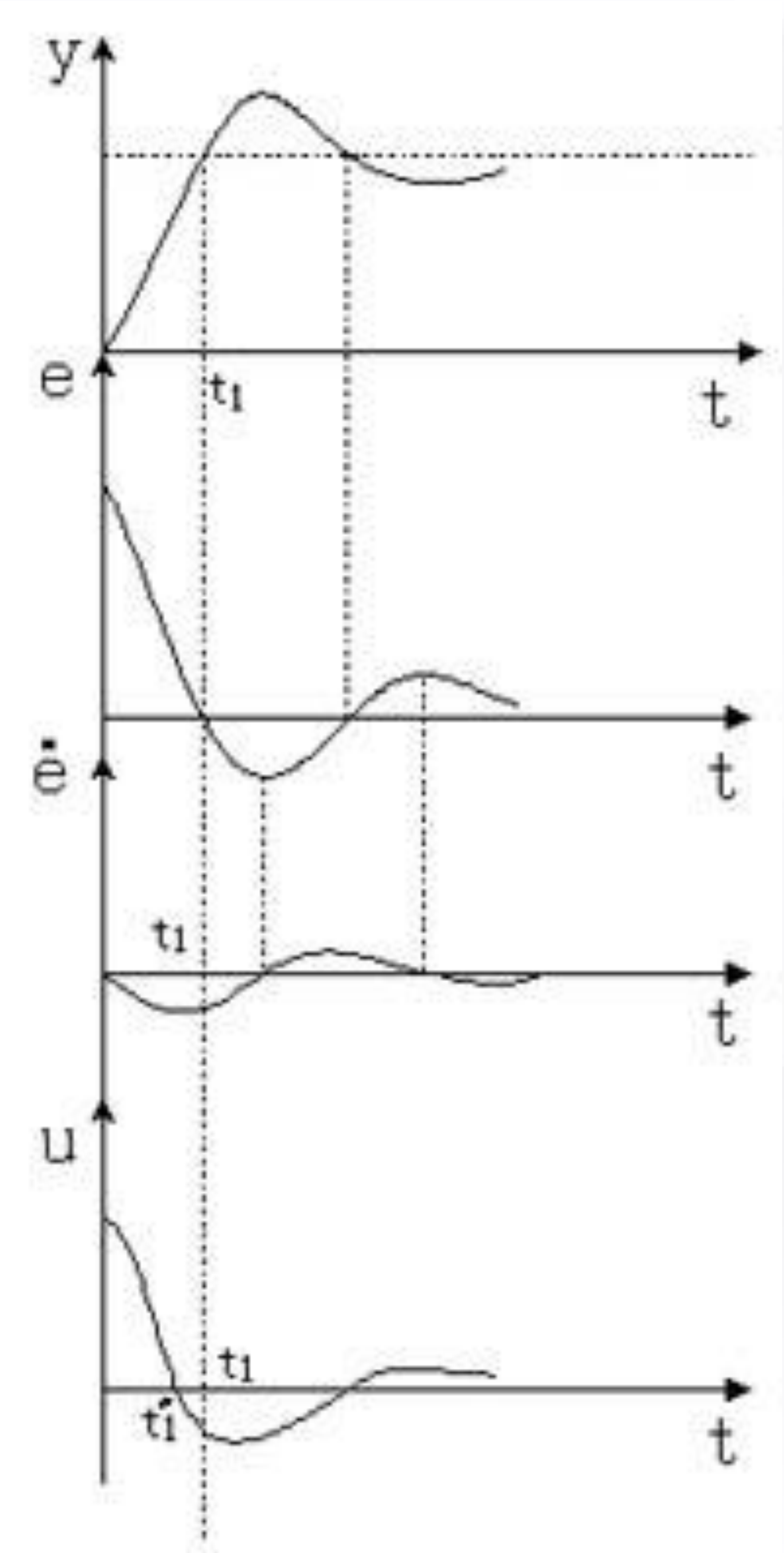
控制信号 $u(t) = k_p e(t)$

只要$y(t)<1, e(t)>0$,就产生使$y(t)$增大的控制作用，

当 $t = t_1, e = 0$ 时，$y(t)$还在增加，会出现超调现象

控制系统的校正

比例加微分



$$k(s) = k_p(1 + T_D s)$$

控制信号 $u(t) = k_p e(t) + k_p T_D \dfrac{de(t)}{dt}$

无微分作用只要$y(t)<1$, $e(t)>0$,就产生使$y(t)$增大的控制作用，当 $t = t_1, e = 0$ 时，y(t)还在增加，会出现过头现象。

增加微分作用后，$u(t)$ 在 $t = t_1{}' < t_1$ 时为零，在$t_1{}'$到t_1时段内 $u(t)<0$，抑制 $y(t)$ 的增加，类似提前制动。

微分控制可预测被控量的变化趋势，抑制超调，改善动态性能

超前校正控制器

控制系统的校正

(5) 比例加积分加微分 PID

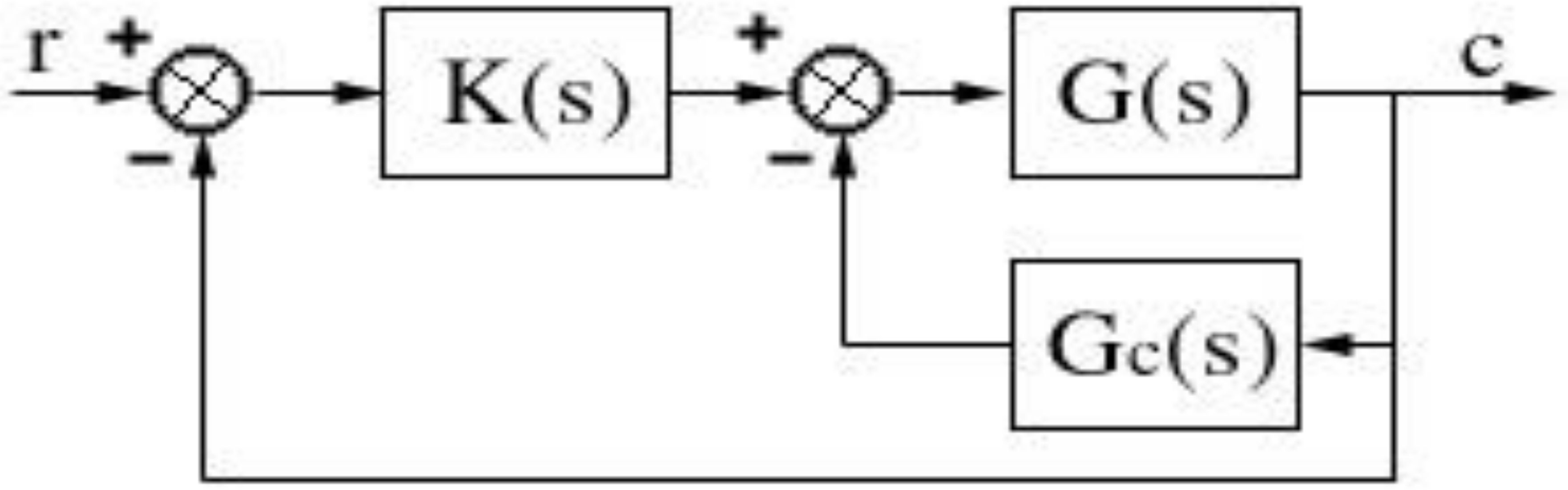
$$K(s) = K_p + \frac{1}{T_I s} + T_D s$$

超前滞后校正控制器

- **PID控制器综合了比例积分加微分的优点，兼顾控制系统的静态和动态性能**
- **参数具有明显的物理意义，直观易用**
- **工业应用广泛，是最常用的控制器**
- **实际应用有多种变型**

控制系统的校正

2、局部反馈校正



采用局部反馈改善局部特性，再配以串联校正

设 $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1},G_c(s)=k$

小闭环等效为 $$\frac{\dfrac{K}{Ts+1}}{1+\dfrac{Kk}{Ts+1}}=\frac{K}{Ts+1+kK}=\frac{\dfrac{K}{1+kK}}{\dfrac{T}{1+kK}s+1}$$ 当 $kK\gg 1$ 时 $\Rightarrow \dfrac{1}{k}$

当 G 中 T 较大时，采用局部反馈可减少惰性。