1. $\max \quad z = 11x_1 + 4x_2$

s.t. $\quad -x_1 + 2x_2 \le 4$

$5x_1 + 2x_2 \le 16$

$2x_1 - x_2 \le 4$

$x_1、x_2 \ge 0$，且均整数

$\Rightarrow$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 16$

$2x_1 - x_2 + x_5 = 4$

$x_1, \cdots x_5 \ge 0$

$x_1、x_2$ 整数

单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	-1	2	1	0	0	4
x_4	5	2	0	1	0	16
x_5	2	-1	0	0	1	4
	11	4	0	0	0	z

x_1进基，x_5出基：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	6
x_4	0	$\frac{9}{2}$	0	1	$-\frac{5}{2}$	6
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
	0	$\frac{19}{2}$	0	0	$-\frac{11}{2}$	$z-22$

x_2进基，x_4出基：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	4
x_2	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{3} = 2+\frac{2}{3}$
	0	0	0	$-\frac{19}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$z-\frac{104}{3}$

利用第三行构造割平面约束:

$$-\frac{1}{9}x_4 - \frac{2}{9}x_5 \leqslant -\frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}x_4 + \frac{2}{9}x_5 - x_6 = \frac{2}{3}$$

$$x_6 \geqslant 0$$

单纯形表增加一行，变为:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	4
x_2	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{9}$	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{8}{3}$
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	1	$-\frac{2}{3}$
	0	0	0	$-\frac{19}{9}$	$-\frac{2}{9}$	0	$z-\frac{104}{3}$

x_6出基，x_5进基

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	-1	0	6	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	3
x_1	1	0	0	0	0	1	2
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{9}{2}$	3
	0	0	0	-2	0	-1	$z-34$

$\therefore$ 最优解 $(x_1^*, x_2^*)^T=(2,3)^T$，最优值 $z^*=34$

2- $\max \quad z=3x_1+2x_2$

s.t. $\quad 2x_1+3x_2\leq 14 \quad$ ①

$x_1+0.5x_2\leq 4.5 \quad$ ②

$x_1, x_2 \geq 0$ 且为整数

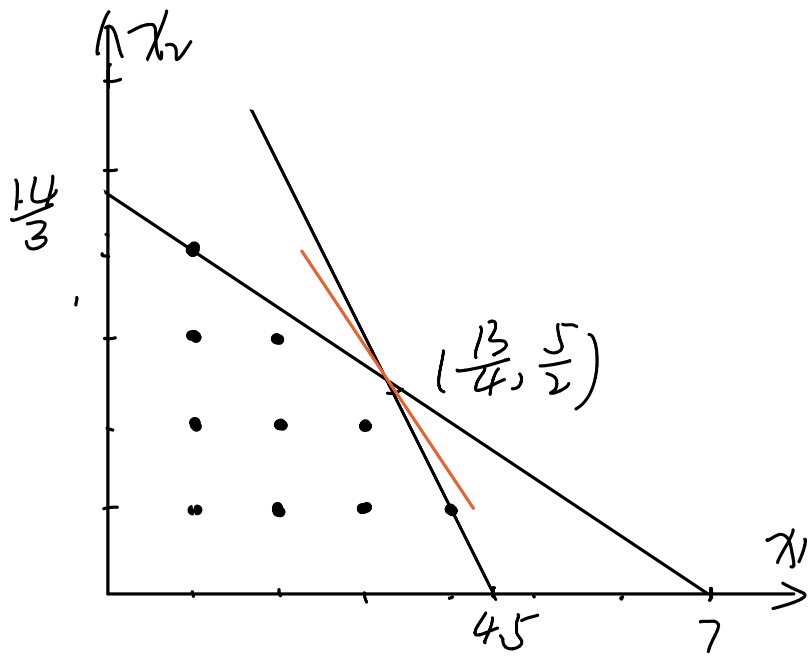
1° 先求松弛问题最优解：

① $\times \frac{1}{4}$ + ② $\times \frac{5}{2}$：

$$3x_1+2x_2\leq 14\times\frac{1}{4}+4.5\times\frac{5}{2}=\frac{59}{4}$$

$\therefore X^*=(\frac{13}{4}, \frac{5}{2})^T$，$z^*=\frac{59}{4}$

2° 按x_1分支:



$$\begin{cases} \max \quad z = 3x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad\quad x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad\quad x_1 \le 3 \\ \text{最优解 } X^* = (3, \frac{8}{3})^T, \ z^* = \frac{43}{3} \end{cases}$$

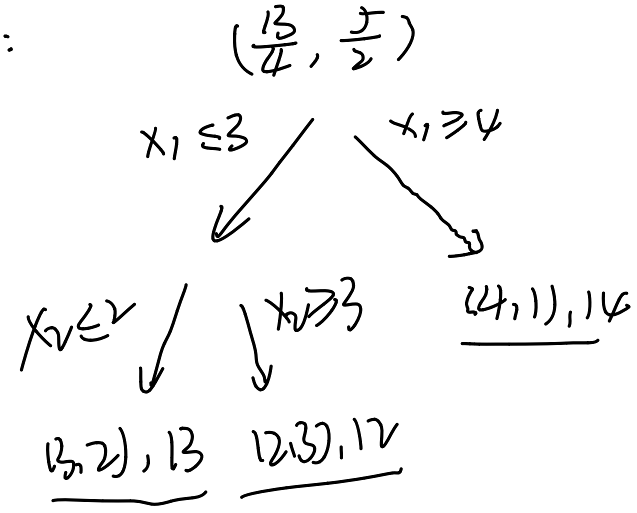
$$\begin{cases} \max \quad z = 3x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad\quad x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad\quad x_1 \ge 4 \\ \text{最优解 } X^* = (4, 1)^T, \ z^* = 14 \end{cases}$$

3° $x_1 \le 3$时,按x_2分枝:

$$\begin{cases} \max \quad z = 3x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad\quad x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad\quad x_1 \le 3, \ x_2 \le 2 \\ \text{最优解 } X^* = (3, 2)^T, \ z^* = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max \quad z = 3x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ \quad\quad x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad\quad x_1 \le 3, \ x_2 \ge 3 \\ \text{最优解 } X^* = (2, 3)^T, \ z^* = 12 \end{cases}$$

由分枝结果：



该问题最优解 $x^*=(4,1)^T$，最优值 $z^*=14$

3、引入0-1变量 y_1, y_2, y_3, y_4，则该问题表示为：

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \le 3 + M_1 y_1$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 1 + M_2 y_2$$

$$x_1 + x_2 \le 3 + M_3 y_3$$

$$x_1 - x_2 \le 1 + M_4 y_4$$

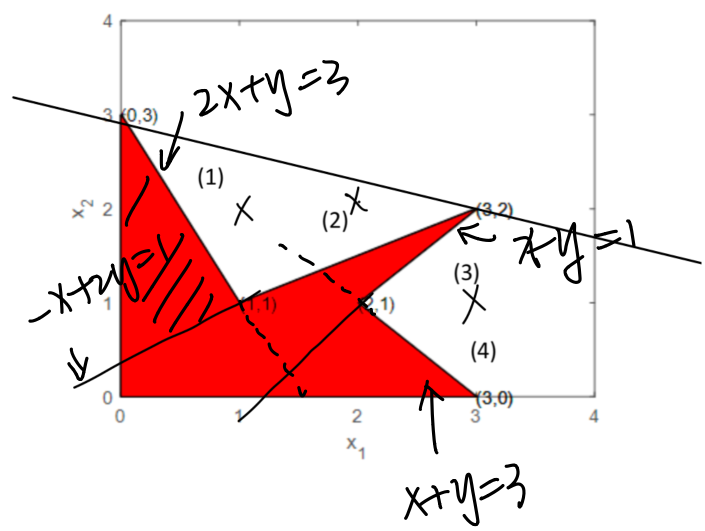
$$y_1 + y_2 \le 1$$

$$y_3 + y_4 \le 1$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,2$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i=1,2,3,4.$$

M_k, $k=1,2,3,4$ 是充分大的正数



注：用2个十字象限进行限制，各有一象限不可行即为Ω区域。