考场________ 姓名________ 准考证号________ 所属学校________

**********装**********订**********线**********

考生类别____________

第 32 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

北京物理学会编印　　　　2015 年 12 月 6 日

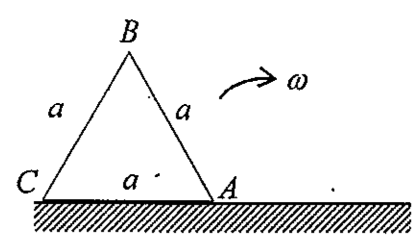
题号	一	二			
	1～10	11	12	13	14
分数					
阅卷人					

题号	三			总分
	15	16	17	
分数				
阅卷人				

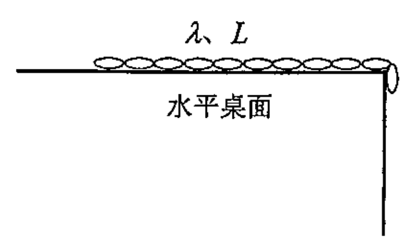
答题说明：前 14 题是必做题，满分是 120 分；文管组和农林医组只做必做题；除必做题外，非物理 B 组限做 15 题，满分 140 分；非物理 A 组限做 15、16 题，满分 160 分；物理组限做 15、17 题，满分 160 分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理。请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

一、填空题（必做，共 10 题，每题 2 空，每空 3 分，共 60 分）

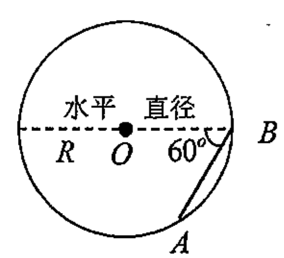
1.如图所示，每边长为 a 的正三角板在水平地面上，朝一个方向不停地作无滑动的翻滚，每次翻滚都是绕着图示右着地顶点（例如图中的 A 点）转动，转动角速度恒为常量 ω。当一条边（例如 AB 边）着地后，又会立即绕着新的右着地顶点（例如 B 点）继续作上述匀角速转动。如此继续下去，三角板的每一个顶点在翻滚的一个周期过程中，其曲线运动平均速率为__________。翻滚过程中，三角板内作匀速率曲线运动的点部位，其速率为_________。



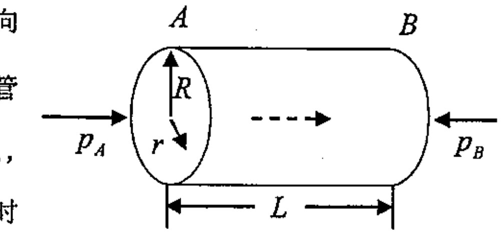
2.如图所示，质量线密度为 λ、长为 L 的匀质轻绳，绝大部分沿长度方向伸直地静放在水平桌面上，且与桌面侧棱垂直。仅有很少一部分绳段静止地垂直悬挂在桌子的侧面上，而后绳将从静止开始滑动，设系统处处无摩擦。当桌面侧面绳段长度达 l（取 $l<\frac{L}{2}$）时，软绳各部位运动速度大小为 $v=$_________，桌面侧棱给绳的支持力 $\bar{N}$ 的水平分量 $N_{\parallel}=$____________。



3.如图所示，在某竖直平面内有一个半径为 R 的固定圆环，一根长为 R、质量为 M 的均匀细杆 AB 静止在环内侧，与水平直径夹角为 $60°$。自由释放后，设杆的 A、B 端只能沿环内侧无摩擦地运动。当杆处于水平方位时，A 端运动速率 $v=$__________，A 端受环的作用力大小为 $N_A=$____________。

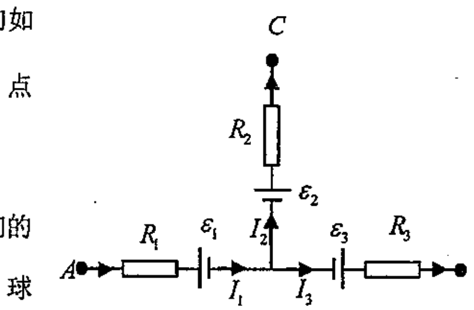


4.如图所示，黏度为 η 的流体在半径为 R 的水平管道内，沿轴方向稳定地分层流动，流体与管壁接触处的流速为零。取长为 L 的 AB 管道段，已知 A 端、B 端的外加水平压强分别为 p_A、p_B 常量，且 $p_A>p_B$，则管内流体流速的径向分布函数 $v(r)=$______________。将单位时间内流过管道截面的流体体积 Q_V 表述为 $Q_V=(p_A-p_B)/R_f$，称 R_f 为该流管的流阻，则 $R_f=$______________。

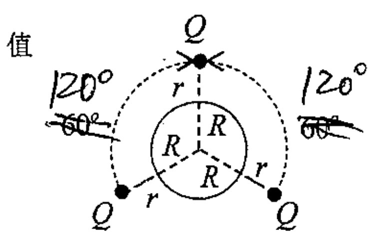


5.真实理想气体占据三维空间区域，每个分子都在作三维运动。设想一种被约束在二维空间区域内的理想气体，其中每个分子都在作二维运动。分子质量记为 m，此种气体处于温度为 T 的热平衡态时，分子的速度分布函数为 $F_2(\vec{v})=$________________，分子的速率分布函数为 $f_2(v)=$________________。

6.某直流电路中的部分电路，及其中直流电源、电阻参量和电流方向如图所示。电流 I_1、I_2、I_3 间的关系为________________，C 点到 B 点的电压 $U_{CB}=$____________________。



7.空间三个固定点电荷和一个半径为 R 的几何球面的球心共面，它们的方位如图所示。点电荷电量同为 Q，点电荷与球心相距同为 $r>R$，则 R 球面上的场强平均值 $\bar{\vec{E}}_{球面}=$__________________；R 球面上的电势平均值 $\bar{U}_{球面}=$______________。



8.自然界中尚未发现磁荷（磁单极子）的存在，真空电磁场方程组为

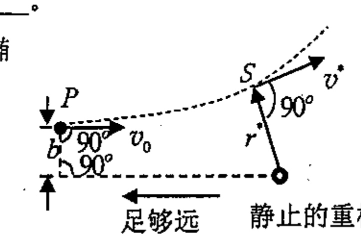
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V_S}\rho_e dV \quad (1) \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_{S_L}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \quad (2)$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=0 \quad (3) \qquad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\left(\iint_{S_L}(\vec{j}_e+\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot d\vec{s}\right) \quad (4)$$

自然界中若也有磁荷存在，则上述四个方程中需要修改的是方程___________（填写方程顺序号，有几个填几个）。自然界中若也有满足守恒定律的磁荷存在，且真空静止点磁荷 q_m 激发磁场满足“磁库伦定律”：$\vec{H}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m\vec{r}}{r^3}$，其中 $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ 是真空磁场强度。引入磁荷密度 ρ_m 和磁流密度 $\vec{j}_m$，则上一填空号内的方程需修改为____。

9.将行星绕太阳运动的动能与引力势能之和记为 E，则 $E<0$ 时行星轨道为椭圆，$E=0$ 时行星轨道为抛物线，$E>0$ 时行星轨道为双曲线。

α 粒子（氦核）P 的散射过程如图所示，静止重核的质子数为 Z。P 到达图中 S



所属学校________ 准考证号________ 姓名________ 考场________

******装******订******线******

点时与重核相距r^*，速度大小记为v^*。你能建立的两个联立后可求解r^*和v^*的方程为

________________、________________，其中m为P的质量。

10. 一水平细绳的一端固定于墙壁，另一端则使其在竖直方向上作小振幅的简谐振动，其振幅为A_0。若绳上形成驻波，并出现$(n+1)$个节点（包括绳在墙壁的固定点），各个波腹的振幅为$2A_0$，相邻两节点的间距均为d，则绳长的最短值为________________，最长值为________________。

二、计算题（必做，共4题，每题15分，共60分）

11.（15分）一肥皂膜的厚度为$0.550\mu m$，折射率为1.35，白光（波长范围为$4000\sim7000\mathring{A}$）垂直照射。问在反射光中哪些波长的光得到最大增强？哪些波长的光干涉相消？（保留两位有效数字即可）

12.（15分）电路如图1所示，开始时断路，电容器上无电量。$t=0$时合上电键K，设$\varepsilon\sim t$的关系如图2所示，且$T=RC$。引入时刻标记量$t_N=NT$，和该时刻电容器正极板上的电量标记量Q_N。

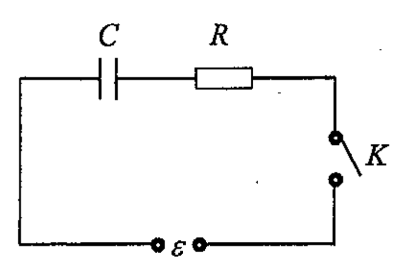


图1

（1）试求Q_1，答案中包含的参量只能是C与ε_0，下同；

（2）再求Q_2；

（3）最后求$\lim\limits_{N\to\infty}Q_N$。

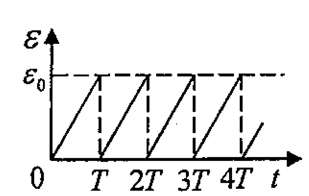
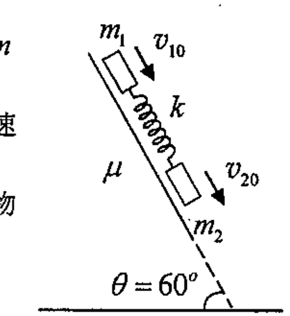


图2

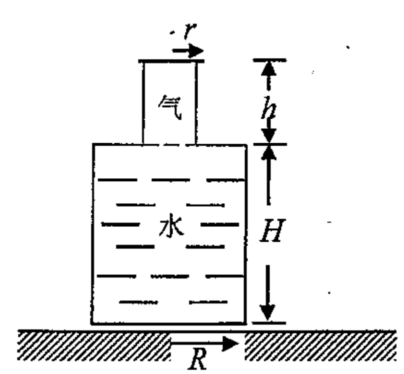
13.（15分）足够长的斜面上两个小物块$m_1=0.4kg$、$m_2=0.2kg$，它们由一根$k=0.6N/m$的轻质弹簧连接。物块与斜面间摩擦因数同为$\mu=0.10$，斜面倾角$\theta=60°$。开始时m_1下滑速度$v_{10}=0.50m/s$，m_2下滑速度$v_{20}=2.0m/s$，弹簧处于原长，试求弹簧再次处于原长时，两物块的相对运动速率。



14.（15 分）定量的水在 $t_0 = 0^{\circ}C$ 的体积若为 V_0，在定温 $t > 0^{\circ}C$ 时的体积则为

$$V = V_0(1+\alpha t)$$

称常量 α 为水的体膨胀系数。玻璃的体膨胀效应较小，故可略。



如图所示，在室温 $t = 27^{\circ}C$ 的水平桌面上直立着一个薄玻璃瓶。瓶的下部是半径为 R、高为 H 的封底圆筒形区域，其内充满水。瓶的上部是半径 $r < R$、高度 $h < H$ 的圆筒形区域，其内充满纯净水蒸气，上方有不漏气的瓶盖封顶。

今将题图所示的瓶直立地放进 $t_0 = 0^{\circ}C$ 的冰箱内，热平衡后尚未结冰前，瓶的上方区域内侧壁上出现一些水珠。

设上述已给的量均为已知量，且水在 $t_0 = 0^{\circ}\mathrm{C}$ 和在 $t = 27^{\circ}\mathrm{C}$ 的饱和水蒸气压强 p_0 和 p，以及水在

$t_0 = 0^{\circ}\mathrm{C}$ 的密度 ρ_0 也均为已知量。

（1）请给出水珠出现的原因。

（2）试求此时瓶内水蒸气占据的体积 $V_{气0}$。

（3）引入比例系数　$\beta = V_{气0}/V_{气}$　　$V_{气}$：$t = 27^{\circ}\mathrm{C}$ 初态水蒸气体积

取

$$\alpha = 1.5\times10^{-4}/^{\circ}\mathrm{C}$$

$$R = 2r，\quad H = 3h$$

$$p_0 = 6.1\times10^{2}Pa，\quad p = 36\times10^{2}Pa$$

水的摩尔质量 $\mu_{水} = 1.8\times10^{-2}kg/mol$

$0^{\circ}\mathrm{C}$ 时水的密度 $\rho_0 = 10^{3}kg/m^{3}$

普适气体常量 $R = 8.3J/K\cdot mol$

试求 β 数值，答案取到小数点后 2 位数字。

考场__________ 姓名__________ 准考证号__________ 所属学校__________

******装******订******线******装******订******线******

三、限做题（根据考生类别选做）

15.（20 分）方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad （辅助量 c=\sqrt{a^2-b^2}）$$

的椭圆，其上任意一点 (x,y) 处的曲率半径为

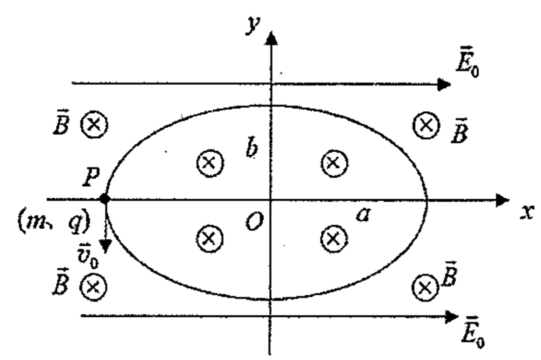
$$\rho=\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}\Big/\left(a^4b^4\right)$$

(x,y) 处椭圆切线与 X 轴夹角记为 $\phi\ (2\pi>\phi\geq 0)$。

如图所示，在 $O-xy$ 平面上有场强为 $\vec{E}_0$ 沿 X 轴方向的匀强电场，还有垂直向内的磁场，磁感应强度大小仅随 X 变化，且有

$$B=B(x)\begin{cases}=0 & x=-a\ 时\\ >0 & x>-a\ 时\end{cases}$$

在 $(x=-a,y=0)$ 处有一个质量为 m、电量 $q>0$ 的质点 P，初始时刻有沿 y 轴负方向的速度 v_0，而后其运动轨迹恰好为图中的椭圆。



（1）将前面给出的曲率半径改造为 X 的一元函数，即导出表述式

$$\rho=\rho(x)$$

再为前面给出的 ϕ 角导出 $\sin\phi$ 随 X 变化的一元函数，即导出表述式

$$\sin\phi \sim x$$

（2）试求题图中的 v_0 值。

（3）导出函数 $B(x)$。

16.（20 分）玩具章鱼保罗有一个轴对称的身体和八条腿，身体质量近似等于八条腿质量之和。开始时将保罗静立在水平桌面上如图 1 所示，后因扰动滑到在地如图 2 所示。本题欲讨论保罗在滑到过程中，腿的着地点是否会从桌面跳起？如果不会跳起，那么腿和身体几乎能一起与地面发生碰撞；若为弹性碰撞，那么保罗能否又恢复到初始状态，形成周期运动？

如图 3 所示，将保罗八条腿合并后，模型化为一根长 l、质量 m 的均匀细杆，下端点 A 可沿桌面不妨设为朝左运动。保罗的身体模型化为质量也是 m 的小圆柱体，通过小而轻的轴承连接在杆的上端点 B，侧面贴在假想的竖直固定轨道上

图 1

图 2

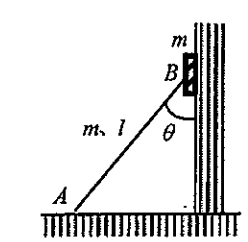


图 3

考场________姓名________准考证号________所属学校________

平动且不会离开该轨道。初态静止，杆与竖直轨道间夹角θ_0非常小，随后杆倾斜下滑，过程态已在图 3 中示出。再设，系统处处无摩擦。

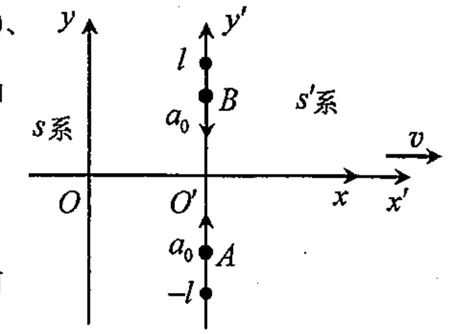
（1）近似取$\theta_0=0$，先后导出B端下行加速度a_B以及A端受桌面支持力N随倾角θ变化的函数关系，进而给出$\theta=45°$时对应的N值。

（2）假设上述过程中A端始终不会离开桌面，此后杆连同B端小柱体一起与桌面发生弹性碰撞，碰撞前后瞬间动能相同，碰撞时间记为未知量Δt。设碰撞前，若某处相对桌面的速度大小为v，则该处单位质量物质受到桌面竖直向上的平均碰撞力f与v成正比，比例系数记为未知量α。再将碰撞过程中细杆与小柱体之间通过轴承在竖直方向上的平均相互作用力大小记为未知量N_B，碰后瞬间细杆中心点C的竖直向上速度大小记为未知量v_C，细杆绕C点旋转角速度大小记为未知量ω。

（2.1）试求v_C、ω、$\alpha\Delta t$和$N_B\Delta t$。

（2.2）若章鱼保罗（即杆与小柱体构成的系统）的运动具有周期性，忽略碰撞时间Δt，取$\theta=1°$，导出周期T的积分表达式，再利用数值积分公式$\int_{1°}^{90°}\sqrt{\dfrac{3\sin^2\theta+1}{1-\cos\theta}}d\theta=7.82$给出只含参量$l$、$g$（重力加速度）的$T$的表达式。

17.(20分)惯性系S、s'的坐标原点O、O'重合时取为$t=0$、$t'=0$，此时两个静质量同为m_0的质点A、B分别在s'系y'轴上的$y'=-l$、$y'=l$两处，从静止开始以相同大小的匀加速度a_0各自朝着O'运动。某个$t'>0$时刻的系统位形如图所示。最终，A、B在O'处碰撞，碰后成为一个大质点，碰撞过程中无任何形式能量耗散。已知S、s'系相对速度大小为$v=\frac{3}{5}c$，$a_0=9c^2/(50l)$。



（1）试求大质点在s'系中的质量M'；

（2）再求A、B碰前，A相对S系的加速度大小a，以及碰后大质点在S系中的质量M。

（3）与B碰前，A在s'系中的速度记为u_y'，受力记为F_y'；A在S系中沿y轴方向受力记为F_y。试导出$F_y'\sim u_y'$关系式和$F_y\sim F_y'$关系式，推导过程中不可利用$v=\frac{3c}{5}$和$a_0=9c^2/(50l)$，因此推导过程也适用于$v\neq\frac{3}{5}c$和$a_0\neq 9c^2/(50l)$。

（4）再将A在S系中沿y轴方向速度记为u_y，沿X轴方向受力记为F_x，试导出$F_x\sim\{u_y,F_y\}$关系式，推导过程中不可利用$v=\frac{3}{5}c$和$a_0=9c^2/(50l)$。

（5）按题文取$v=\frac{3}{5}c$，$a_0=9c^2/(50l)$，计算A在与B相碰前的全过程中F_y'在s'系作功W'，F_y在S系作功W_y和F_x在S系作功W_x。

第 32 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷
参考答案
2015.12.

1. $\frac{2}{3}\omega a$，$\frac{\sqrt{3}}{3}\omega a$。

2. $\sqrt{\frac{g}{L}}l$，$\lambda\frac{g}{L}(L-2l)l$。

3. $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{5}}\sqrt{Rg}$，$\frac{19}{10\sqrt{3}}Mg$。

4. $\frac{p_A-p_B}{4\eta L}\left(R^2-r^2\right)$，$8\eta L/\pi R^4$。

5. $\frac{m}{2\pi kT}e^{-m\left(v_x^2+v_y^2\right)/2kT}$，$2\pi v\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)e^{-mv^2/2kT}$。

6. $I_1=I_2+I_3$，$-I_2R_2+I_3R_3+\varepsilon_2-\varepsilon_3$。

7. 0，$\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$。

8.（2）和（3），$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_{S_L}\left(\vec{j}_m+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{s}$（2）和 $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=\iiint_{V_S}\rho_m dV$（3）。

9. $mr^*v^*=mbv_0$，$\frac{1}{2}mv^{*2}+\frac{Ze^2}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 r^*}=\frac{1}{2}mv_0^2$。2 （或 $\frac{1}{2}mv^{*2}+2k\frac{Ze^2}{r^*}=\frac{1}{2}mv_0^2$） $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

10. $(n+\frac{1}{6})d$，$(n+\frac{5}{6})d$。

解：因绳子只形成驻波，若取绳子在墙上的固定端为原点，则驻波各点的振幅 $A(x)$ 为

$$A(x)=2A_0\left|\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|$$、

式中 λ 为波长，有 $\lambda=2d$

设振动端与最接近的节点之间的距离为 b，若改取该节点为坐标原点，则因振动端的振幅为 A，利用上式可得

$$A_0=2A_0\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}b\right)\Rightarrow\frac{2\pi}{\lambda}b=\begin{cases}\pi/6\\ \text{或}5\pi/6\end{cases}\Rightarrow b=\begin{cases}d/6\\ \text{或}5d/6\end{cases}$$

故绳长为

$$L=nd+b=\begin{cases}(n+\frac{1}{6})d\\ \text{或}(n+\frac{5}{6})d\end{cases}$$

11.（15 分）

解：肥皂膜反射光相干叠加获最大增强的条件是

$$\text{光程差}\ \delta=2nh+\frac{\lambda}{2}=k\lambda\Rightarrow k=\frac{2nh}{\lambda}+\frac{1}{2}\qquad（4 分）$$

其中 $n=1.35$，$h=0.550\mu m$，再将 $4000\mathring{A}$、$7000\mathring{A}$ 代入，分别计算得 $k=4.2$、$k=2.6$。据此可知得到增强的光波长分别为

$$\Rightarrow\lambda_1=\left.\frac{2nh}{k_1-\frac{1}{2}}\right|_{k_1=4}=424nm,\quad\Rightarrow\lambda_2=\left.\frac{2nh}{k_2-\frac{1}{2}}\right|_{k_2=3}=594nm\qquad（4 分）$$

反射光干涉相消的条件是

$$\text{光程差}\ \delta=2nh+\frac{\lambda}{2}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda\Rightarrow k=\frac{2nh}{\lambda}\qquad（4 分）$$

得　　$4000\mathring{A}$ 对应 $k=3.7$、$7000\mathring{A}$ 对应 $k=2.1$

反射光干涉相消的光波波长为

$$\lambda=\left.\frac{2nh}{k}\right|_{k=3}=495nm\qquad（3 分）$$

12.（15 分）

解：（1）$t=0$ 合上电键 K 后，电容充电的暂态过程方程为

$$iR+\frac{Q}{C}=\varepsilon\qquad i=\frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{CR}=\frac{\varepsilon}{R}\qquad\Rightarrow\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{T}=\frac{C\varepsilon}{T}$$

$t=0$ 到 $t=T$ 有

$$\varepsilon=\varepsilon_0\frac{t}{T}\qquad\Rightarrow\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{T}=\frac{C\varepsilon_0 t}{T^2}\qquad t=0\ \text{时}\ Q=0$$

解得该时间段内有

$$Q(t)=C\varepsilon_0\left(\frac{t}{T}-1\right)+C\varepsilon_0e^{-t/T}$$

得　　$Q_1=C\varepsilon_0/e$　　（6 分）

（2）$t=T$ 到 $t=2T$ 时间段内，因初始条件改取为 $t=T$ 时 $Q=Q_1$，故改取时间参量 $t'=t-T$

则（1）问解答中最后的微分方程改述为

$$\frac{dQ}{dt'}+\frac{Q}{T}=\frac{C\varepsilon_0 t'}{T^2}\qquad t'=0\ \text{时}\ Q=\frac{C\varepsilon_0}{e}$$

解得该时间段内有

$$Q(t')=C\varepsilon_0\left(\frac{t'}{T}-1\right)+C\varepsilon_0\left(e^{-1}+1\right)e^{-t'/T}$$

取 $t'=T$，即得 $$Q_2=C\varepsilon_0\frac{e^{-1}+1}{e}$$ （5 分）

（3）将上述求解过程继续下去，不难得到 $t_N=NT$ 时有

$$Q_N=C\varepsilon_0\left\{\cdots\left\{\left[\left(e^{-1}+1\right)e^{-1}+1\right]e^{-1}+1\right\}e^{-1}+\cdots\right\}$$

$$=C\varepsilon_0\left(e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-N}\right)=C\varepsilon_0e^{-1}\left(1+e^{-1}+\cdots+e^{-N+1}\right)$$

$$\Rightarrow Q_N=\frac{1-e^{-N}}{e-1}C\varepsilon_0$$

得 $$\lim_{N\to\infty}Q_N={C\varepsilon_0}\Big/{e-1}$$ （4 分）

13.（15 分）

解：本题中若两物块始终沿斜面向下运动，所受摩擦力恒向上，质心下滑加速度为定值，质心作匀加速直线运动，在质心系中两物块相对质心运动是连续的单一简谐运动。弹簧为原长的初态与弹簧第一次恢复到原长的末态，两物块相对速度方向相反，大小不变（同为 $1.50m/s$）。

可是解题开始时，不能预知两物块必定始终沿斜面下滑，考虑到这一因素，作答如下。

（补充说明：

m_1 下滑初速度 $v_{10}=0.50m/s$ 小于 m_2 下滑初速度 $v_{20}=2.0m/s$，开始时弹簧伸长，为 m_1、m_2 分别提供向下和向上拉力。这样的拉力会使 m_1 下滑加速度大于 m_2 下滑加速度，m_1 继续下滑，其下滑速度向 m_2 下滑速度靠近（注意，开始时拉力较小，m_2 下滑加速度必定为正，下滑速度也在增大）。随着弹簧继续伸长，m_1 下滑速度越来越接近 m_2 的下滑速度。当 m_1 下滑速度等于 m_2 下滑速度时，弹簧伸长量达最大值。既然此时 m_1 是下滑，m_2 也必定是下滑，故两者所受摩擦力均为向上。如果此时弹簧拉力早已大到使 m_2 加速度向上，那么以后运动过程中尽管弹簧长度要回缩，但也有可能使 m_2 运动速度从向下改变为向上，m_2 所受摩擦力也会反向。

下面的解答中发现弹簧最大伸长时，m_2 所受合力仍是向下，以后弹簧长度回缩过程中，m_2 加速度和速度也始终向下，所受摩擦力仍然向上。）

第一阶段：弹簧伸长 （10 分）

将弹簧拉力大小记为 f，则 m_1、m_2 沿斜面向下加速度（带正负号）分别为

$$a_1=g\sin\theta-\mu g\cos\theta+\frac{f}{m_1}$$

$$a_2=g\sin\theta-\mu g\cos\theta-\frac{f}{m_2}$$

m_1 相对 m_2 的向下加速度为

$$a_1-a_2=\frac{f}{m_1}+\frac{f}{m_2},\quad f=kx,\quad x\text{：弹簧伸长量}$$

得 $$\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}kx=\frac{dv_1}{dt}-\frac{dv_2}{dt}=\frac{d(v_1-v_2)}{dt}=-\frac{d(v_2-v_1)}{dt}$$

dt 时间内弹簧伸长量为 $$dx=(v_2-v_1)dt$$

引入 $$v^*=v_2-v_1=\frac{dx}{dt}$$

即有 $$\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}kx=-\frac{d^2x}{dt^2}\Rightarrow\ddot{x}+\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}kx=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}+\omega^2x=0\\ \omega=\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{m_1m_2}k}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}/s\simeq2.12/s\end{cases}\qquad x\sim t\text{：简谐振动}$$

利用初条件 $t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0^*=1.50m/s$，得

$$x=A\cos\omega t,\quad A={v_0^*}\Big/{\omega}=\frac{\sqrt{2}}{2}m$$

（这一结果表明，弹簧伸长量最大时，$f=kA=0.3\sqrt{2}N\simeq0.424N$，$m_2$ 所受向下合力

$$m_2g\sin\theta-\mu m_2g\cos\theta-f\simeq1.175N>0$$

此时合力向下，a_2 仍是向下，故弹簧回缩时，m_2 所受合力仍向下，继续下行，摩擦力仍向上。）

第二阶段：弹簧回缩 （5 分）

过程中 $x\le A$，$f\le kA$

$$a_1=g\sin\theta-\mu g\cos\theta+\frac{f}{m_1}>a_2$$

$$a_2=g\sin\theta-\mu g\cos\theta-\frac{f}{m_2}\ge g\sin\theta-\mu g\cos\theta-\frac{kA}{m_2}\simeq5.9m/s^2$$

这表明 m_1、m_2 始终下行，摩擦力方向不变。此阶段动力学方程与第一阶段相同，弹簧相对原长的伸长量 x 随时间 t 的变化关系仍是简谐振动关系。当弹簧回复到原长时，$x=0$，m_1 相对 m_2 的速度 $v_e^*=dx/dt$ 与第一阶段初态时相对速度 v_0^* 方向相反，大小相同，即为

$$v_e^*=-v_0^*=-1.50m/s$$

$$\Rightarrow\left|v_e^*\right|=1.50m/s$$

14.（15 分）

解：（1）瓶上方内壁的水珠是瓶从 $t=27^{o}C$ 环境移入 $t_0=0^{o}C$ 的冰箱时，瓶内部分（饱和）水蒸气凝结而成。　　　（3 分）

（2）瓶内水蒸气都是饱和水蒸气。为简化，将 $t_0=0^{o}C$ 时上方区域水珠全部等效移动到下方水区域内。室温 $t>0^{o}C$ 时水的密度为

$$\rho=\rho_0\big/1+\alpha t$$

列方程组

气：初态　$pV_{气}=\nu RT$，$V_{气}=h\pi r^2$，$T=300K$；ν 为未知量　　（1）

末态　$p_0V_{气0}=(\nu-\Delta\nu)RT_0$，$T_0=273K$；$V_{气0}$、$\Delta\nu$ 为未知量（2）

水：初态　$M=\rho V_{水}=\dfrac{\rho_0}{1+\alpha t}V_{水}$，$V_{水}=H\pi R^2$；$M$ 为未知量　　（3）

末态　$M_0=M+\Delta\nu\mu_{水}$；M_0 为未知量　　（4）

体积总和不变：$\dfrac{M_0}{\rho_0}+V_{气0}=V_{水}+V_{气}$　　（5）

由（1）、（2）式可得

$$p_0V_{气0}=\nu RT_0-\Delta\nu RT_0=pV_{气}\frac{T_0}{T}-\Delta\nu RT_0\Rightarrow\Delta\nu=\frac{pV_{气}}{RT}-\frac{p_0V_{气0}}{RT_0}\qquad(6)$$

由（3）、（4）、（6）式可得

$$M_0=\frac{\rho_0}{1+\alpha t}V_{水}+\frac{pV_{气}}{RT}\mu_{水}-\frac{p_0V_{气0}}{RT_0}\mu_{水}$$

代入（5）式可得

$$\frac{V_{水}}{1+\alpha t}+\frac{pV_{气}}{RT\rho_0}\mu_{水}+\left(1-\frac{p_0\mu_{水}}{RT_0\rho_0}\right)V_{气0}=V_{水}+V_{气}$$

即解得

$$\begin{cases}V_{气0}=\left[\left(1-\dfrac{1}{1+\alpha t}\right)V_{水}+\left(1-\dfrac{p\mu_{水}}{RT\rho_0}\right)V_{气}\right]\Big/\left(1-\dfrac{p_0\mu_{水}}{RT_0\rho_0}\right)\\ V_{水}=H\pi R^2,V_{气}=h\pi r^2\end{cases}\qquad(7)\quad（9 分）$$

（3）由所给数据可得

$$\frac{1}{1+\alpha t}=0.996,\quad\frac{p\mu_{水}}{RT\rho_0}=2.567\times10^{-5},\quad\frac{p_0\mu_{水}}{RT_0\rho_0}=0.484\times10^{-5}$$

$$V_{水}=3h\pi(2r)^2=12h\pi r^2=12V_{气}$$

一起代入（7）式，可算得

$$V_{气0}=1.048V_{气}=\beta V_{气}\Rightarrow\beta=1.048\qquad（3 分）$$

15.（20 分）

解：（1）由　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x^2$

得　$b^4x^2+a^4y^2=b^4x^2+a^4b^2-a^2b^2x^2=a^4b^2-b^2x^2(a^2-b^2)$

$$\Rightarrow b^4x^2+a^4y^2=b^2(a^4-c^2x^2)$$

$$\Rightarrow\rho=\left[b^2(a^4-c^2x^2)\right]^{\frac{3}{2}}\Big/a^4b^4$$

即　$$\rho=(a^4-c^2x^2)^{\frac{3}{2}}\Big/a^4b\qquad（4 分）$$

再由　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\dfrac{2xdx}{a^2}+\dfrac{2ydy}{b^2}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$

得　$\tan\phi=-b^2x/a^2y$

考虑到　取第 III 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时：$2\pi>\phi\ge\frac{3}{2}\pi$　　$\sin\phi<0$

取第 IV 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时：$\frac{\pi}{2}>\phi\ge0$　　$\sin\phi>0$

取第 I 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时：$\pi>\phi\ge\frac{\pi}{2}$　　$\sin\phi>0$

取第 II 象限 $\frac{1}{4}$ 椭圆时：$\frac{3\pi}{2}>\phi\ge\pi$　　$\sin\phi<0$

故取

$$\sin\phi=b^2x\Big/\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}\begin{cases}>0 & 取第IV、I象限\frac{1}{4}椭圆时x>0\\<0 & 取第II、III象限\frac{1}{4}椭圆时x<0\end{cases}$$

或改述为

$$\sin\phi=bx\Big/\sqrt{a^4-c^2x^2}\qquad（4 分）$$

（2）初位置处，有

$$mv_0^2=\rho qE_0=b^2qE_0/a\Rightarrow v_0=b\sqrt{qE_0/ma}\qquad（2 分）$$

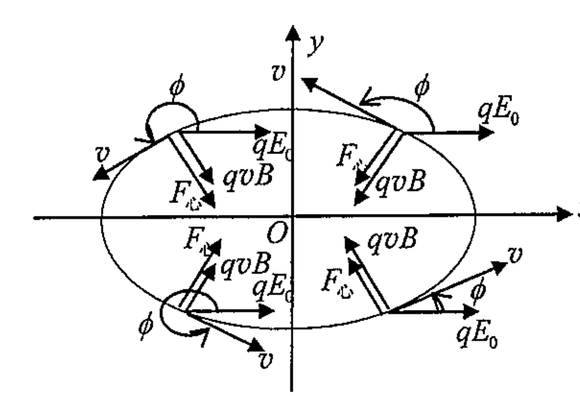
（3）参考题解图，有

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2+qE_0(a+x)$$

$$mv^2=mv_0^2+2qE_0(a+x)$$

$$=\frac{b^2qE_0}{a}+2qE_0(a+x)$$

$$=qE_0\left[\frac{b^2}{a}+2(a+x)\right]$$



题解图

$$\frac{mv^2}{\rho}=F_{心}=qvB-qE_0\sin\phi$$

得

$$B=\frac{1}{v}\left(E_0\sin\phi+\frac{mv^2}{q\rho}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{qE_0}{m}\left[\frac{b^2}{a}+2(a+x)\right]}}\left\{\frac{E_0bx}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}+\frac{a^4bE_0\left[\frac{b^2}{a}+2(a+x)\right]}{(a^4-c^2x^2)^{3/2}}\right\}$$

$$\Rightarrow B=\frac{\sqrt{mE_0}\,b}{\sqrt{q\left[\frac{b^2}{a}+2(a+x)\right]}\sqrt{a^4-c^2x^2}}\left\{x+\frac{a^4\left[\frac{b^2}{a}+2(a+x)\right]}{a^4-c^2x^2}\right\}$$ （10分）

16.（20分）

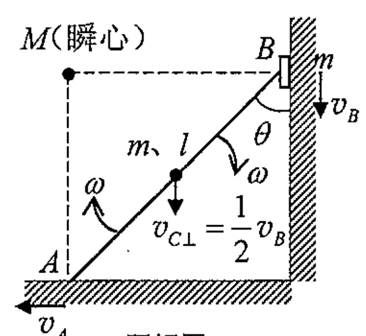
解：（1）下滑过程态及相应的参量如题解图1所示，有

$v_B=\omega l\sin\theta\Rightarrow\omega=v_B/l\sin\theta$

$E_{K杆}=\frac{1}{2}I_M\omega^2$，$I_M=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ml^2$

$E_{K柱}=\frac{1}{2}mv_B^2$

$E_K=E_{K杆}+E_{K柱}=\frac{1}{2}mv_B^2\left(1+\frac{1}{3\sin^2\theta}\right)$



题解图 1

$v_B\sim\theta$ 的确定：

$$mgl(1-\cos\theta)+mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_B^2\left(1+\frac{1}{3\sin^2\theta}\right)$$

$$\Rightarrow v_B^2=9gl\frac{\sin^2\theta(1-\cos\theta)}{3\sin^2\theta+1}$$

$a_B\sim\theta$ 的确定：

$$2v_Ba_B=\frac{\left[2\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^3\theta\right](3\sin^2\theta+1)-\sin^2\theta(1-\cos\theta)6\sin\theta\cos\theta}{\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}\cdot\omega\cdot 9gl$$

$$=\frac{\left[2\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta\right](3\sin^2\theta+1)-6\sin^2\theta\cos\theta(1-\cos\theta)}{\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}\cdot 9gv_B$$

$$=\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta(3\sin^2\theta+1)}{\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}\cdot 9gv_B$$

$$\Rightarrow a_B=\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta(3\sin^2\theta+1)}{\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}\cdot\frac{9}{2}g$$

$N\sim\theta$ 的确定：

$$P_\perp=mv_B+mv_{C\perp}\Big|_{v_{C\perp}=\frac{1}{2}v_B}=\frac{3}{2}mv_B$$

$$2mg-N=\frac{dP_\perp}{dt}=\frac{3}{2}ma_B$$

$$\Rightarrow N=2mg-\frac{3}{2}ma_B=2mg-\frac{27}{4}mg\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta(3\sin^2\theta+1)}{\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}$$

$$=\frac{8\left(3\sin^2\theta+1\right)^2-27\cdot\left[2\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta(3\sin^2\theta+1)\right]}{4\cdot\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}mg$$

$$\Rightarrow N=\frac{29-9\sin^4\theta-54\cos\theta+33\cos^2\theta}{4\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}mg$$

$$或=\frac{62-42\sin^2\theta+9\sin^2\theta\cos^2\theta-54\cos\theta}{4\left(3\sin^2\theta+1\right)^2}mg$$ （5分）

可算得$\theta=45^\circ$时，$N=0.2027mg$ （1分）

（2）杆落地前瞬间，相关运动学量为

B端竖直向下速度$v_{B0}=\frac{3}{2}\sqrt{gl}$

细杆中心点C的竖直向下速度$v_{C0}=\frac{1}{2}v_{B0}$

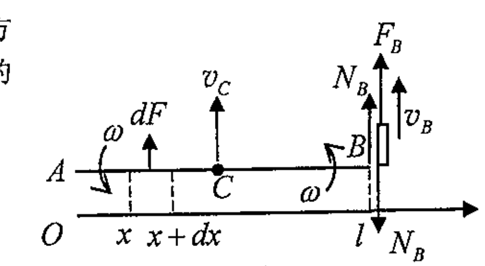
细杆绕C点旋转角速度$\omega_0=v_{B0}/l$

细杆中与A端相距x处的竖直向下速度$v_0(x)=\omega_0x=\frac{x}{l}v_{B0}$

（2.1）碰后运动学量以及与碰撞相关的竖直方向作用力，已在题解图2中示出，其中桌面提供的碰撞力都用字符F标记，且有

$F_B=fm=\alpha v_{B0}m$

$dF=fdm=\left[\alpha v_0(x)\right]\cdot\left(\frac{dx}{l}m\right)=\alpha v_{B0}\frac{m}{l^2}xdx$



题解图 2

下面将要列出的5个独立方程中含有5个独立未知量：

$\alpha\Delta t$，$N_B\Delta t$，v_B，v_C，ω

小柱体的动量方程：

$$F_B\Delta t-N_B\Delta t=m\left(v_B+v_{B0}\right)\Rightarrow mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)-N_B\Delta t=m\left(v_B+v_{B0}\right)$$

杆的动量方程：

$$\left(\int_0^l dF\right)\Delta t+N_B\Delta t=m\left(v_C+v_{C0}\right),\quad v_{C0}=\frac{1}{2}v_{B0},\ \int_0^l dF=\alpha v_{B0}\frac{m}{l^2}\int xdx=\frac{1}{2}\alpha v_{B0}m$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)+N_B\Delta t=m\left(v_C+\frac{1}{2}v_{B0}\right)$$

杆的质心参考系中杆的定轴转动方程：

$$\left[\int_0^l dF\bullet(x-\frac{l}{2})+N_B\bullet\frac{l}{2}\right]\Delta t=\left(I_C\beta\right)\Delta t=I_C\left(\omega+\omega_0\right),\quad I_C=\frac{1}{12}ml^2$$

$$\int_0^l dF\bullet(x-\frac{l}{2})=\int_0^l\left(\alpha v_{B0}\frac{m}{l^2}xdx\right)\bullet(x-\frac{l}{2})=\frac{1}{12}\alpha v_{B0}ml$$

$$\Rightarrow\frac{1}{12}mv_{B0}l\left(\alpha\Delta t\right)+\frac{l}{2}\left(N_B\Delta t\right)=\frac{1}{12}ml^2\left(\omega+\omega_0\right)$$

系统动能方程：

$$\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2=\frac{1}{2}mv_{B0}^2+\frac{1}{2}mv_{C0}^2+\frac{1}{2}I_C\omega_0^2\Big|_{I_C=\frac{1}{12}ml^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{24}ml^2\omega^2=\frac{2}{3}mv_{B0}^2$$

运动关联方程：

$$v_B=v_C+\omega\bullet\frac{l}{2}$$

小结：5 个独立方程如下

$$mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)-N_B\Delta t=m\left(v_B+v_{B0}\right)\tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)+N_B\Delta t=m\left(v_C+\frac{1}{2}v_{B0}\right)\tag{2}$$

$$\frac{1}{12}mv_{B0}l\left(\alpha\Delta t\right)+\frac{l}{2}\left(N_B\Delta t\right)=\frac{1}{12}ml^2\left(\omega+\omega_0\right)\tag{3}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{24}ml^2\omega^2=\frac{2}{3}mv_{B0}^2\tag{4}$$

$$v_B=v_C+\omega\bullet\frac{l}{2}\tag{5}$$

将（1）式所得 $\qquad N_B\Delta t=mv_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)-m\left(v_B+v_{B0}\right)$ （1）'

代入（2）、（3）式，再改写（4）、（5）式，得

$$\frac{3}{2}v_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)=v_C+v_B+\frac{3}{2}v_{B0}\tag{2'}$$

$$\frac{7}{6}v_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)-\left(v_B+v_{B0}\right)=\frac{1}{6}l\left(\omega+\omega_0\right)\tag{3'}$$

$$v_B^2+v_C^2+\frac{1}{12}l^2\omega^2=\frac{4}{3}v_{B0}^2\tag{4'}$$

$$v_C=v_B-\frac{1}{2}\omega l\tag{5'}$$

将（5）'式代入（2）'、（4）'式，保留（3）'式，得

$$\frac{3}{2}v_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)=2v_B-\frac{1}{2}\omega l+\frac{3}{2}v_{B0}\tag{2''}$$

$$\frac{7}{6}v_{B0}\left(\alpha\Delta t\right)=v_B+v_{B0}+\frac{1}{6}l\left(\omega+\omega_0\right)\tag{3''}$$

$$2v_B^2-\omega lv_B+\frac{1}{3}\omega^2l^2=\frac{4}{3}v_{B0}^2\tag{4''}$$

合并（2）"、（3）"式，消去 $\alpha\Delta t$，得

$$\frac{10}{21}v_B+\frac{1}{7}v_{B0}=\frac{10}{21}\omega l+\frac{1}{7}\omega_0 l\tag{6}$$

将 $v_{B0}=\omega_0 l$ 代入（6）式，得

$$v_B=\omega l\tag{7}$$

将（7）式代入（4）"式，得

$$v_B=v_{B0}\tag{8}$$

将（7）、（8）式代入（5）'式和（2）"式，得

$$v_C=\frac{1}{2}v_{B0}\tag{9}$$

$$\alpha\Delta t=2\tag{10}$$

再将（8）式、（10）式代入（1）'式，得

$$N_B\Delta t=0\tag{11}$$

本问所求量的解便分别为

$$v_C=\frac{1}{2}v_{B0}=\frac{3}{4}\sqrt{gl},\quad\omega=v_B/l=v_{B0}/l=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}},\quad\alpha\Delta t=2,\quad N_B\Delta t=0$$ （10 分）

（2.2）上问解答中已设碰后瞬间速度、角速度方向与碰前瞬间速度、角速度方向相反，推导结果所得

$$v_B=v_{B0},\quad v_C=\frac{1}{2}v_{B0}=v_{C0},\quad\omega=v_B/l=v_{B0}/l=\omega_0$$

又显示，碰后瞬间速度、角速度大小与碰前瞬间速度、角速度大小相同。这意味着碰后运动为碰前运动的反演，故为周期性运动，

碰前运动周期 $T/2$，可由

$$dt=d\theta/\omega,\quad\omega=v_B/l\sin\theta,\quad v_B=3\sin\theta\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{3\sin^2\theta+1}gl}$$

得 $$\frac{T}{2}=\int_{\theta_0}^{90^\circ}dt=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\theta_0}^{90^\circ}\sqrt{\frac{3\sin^2\theta+1}{1-\cos\theta}}d\theta,\quad\theta_0=1^\circ$$

$$\Rightarrow T=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{1^\circ}^{90^\circ}\sqrt{\frac{3\sin^2\theta+1}{1-\cos\theta}}d\theta$$

数值积分，得

$$\int_{1^\circ}^{90^\circ}\sqrt{\frac{3\sin^2\theta+1}{1-\cos\theta}}d\theta=7.82$$

即有 $T=5.21\sqrt{\frac{l}{g}}$ （4分）

17.（20分）

解：（1）s' 系中，A、B 碰前瞬间速度大小同为

$$u'_{ye}=\sqrt{2a_0 l}=\frac{3}{5}c$$

质量同为

$$m'_e=m_0\Big/\sqrt{1-\frac{u'^2_{ye}}{c^2}}=\frac{5}{4}m_0$$

碰撞前后能量守恒，有

$$M'c^2=2m'_ec^2\Rightarrow M'=2m'_e$$

得 $M'=\frac{5}{2}m_0$ （2分）

（2）s' 系中，t' 时刻 A、B 速度大小同记为 u'_y，s 系中对应的 t 时刻 A、B 沿 y 轴速度大小同为

$$u_y=\sqrt{1-\beta^2}u'_y\Big/\left(1-\frac{v}{c^2}u'_x\right)\Big|_{u'_x=0}=\sqrt{1-\beta^2}u'_y$$

且有 $t=\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$

s 系中 A、B 加速度大小即为沿 y 轴方向加速度大小，有

$$a=\frac{du_y}{dt}=\sqrt{1-\beta^2}du'_y\Big/\frac{dt'+\frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big|_{dx'=0}=\left(1-\beta^2\right)\frac{du'_y}{dt'}$$

即得 $a=\left(1-\beta^2\right)a_0=\frac{16}{25}a_0$

在 s' 系中大质点静止，故有

$$M_0=M'=\frac{5}{2}m_0$$

s 系中大质点速度即为沿 x 轴方向的速度 v，静质量 M_0 不变，（动）质量即为

$$M=M_0\Big/\sqrt{1-\beta^2}，\sqrt{1-\beta^2}=\frac{4}{5}$$

得 $M=\frac{25}{8}m_0$ （4分）

（3）s' 系中

$$F'_y=\frac{d}{dt'}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2_y}{c^2}}}u'_y\right)=\frac{d}{du'_y}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2_y}{c^2}}}u'_y\right)\frac{du'_y}{dt'}$$

因 $du'_y/dt'=a_0$，得

$$F'_y=m_0a_0\Big/\left(1-\frac{u'^2_y}{c^2}\right)^{3/2}$$

s 系中 A 的速度平方值为

$$u^2=u_y^2+v^2，u_y^2=\left(1-\beta^2\right)u'^2_y$$

有

$$F_y=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0u_y}{\sqrt{1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}}}\right)=\frac{d}{du_y}\left(\frac{m_0u_y}{\sqrt{1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}}}\right)\frac{du_y}{dt}，\frac{du_y}{dt}=a=\left(1-\beta^2\right)a_0$$

$$=m_0\left[\left(1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}+\frac{u_y^2}{c^2}\right)\Big/\left(1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}\right)^{3/2}\right]\left(1-\beta^2\right)a_0$$

$$=\left(1-\beta^2\right)^2m_0a_0\Big/\left(1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

因

$$1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}=1-\frac{\left(1-\beta^2\right)u'^2_y}{c^2}-\beta^2=\left(1-\beta^2\right)\left(1-\frac{u'^2_y}{c^2}\right)$$

得

$$F_y=\sqrt{1-\beta^2}\,m_0a_0\Big/\left(1-\frac{u'^2_y}{c^2}\right)^{3/2}$$

即 $F_y=\sqrt{1-\beta^2}F'_y$ （4分）

（4）s 系中

$$F_x=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}}}\right)=m_0v\frac{d}{du_y}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}}}\right)\frac{du_y}{dt}，\frac{du_y}{dt}=\left(1-\beta^2\right)a_0$$

$$=m_0 v\left[\frac{u_y}{c^2}\Big/\left(1-\frac{u_y^2+v^2}{c^2}\right)^{3/2}\right](1-\beta^2)a_0$$

$$=\left[m_0\frac{vu_y}{c^2}\Big/(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{u_y'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right](1-\beta^2)a_0, \quad \frac{\sqrt{1-\beta^2}m_0 a_0}{\left(1-\frac{u_y'^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=F_y$$

$$=\frac{vu_y}{c^2}\frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta^2)F_y$$

即得

$$F_x=\frac{vu_y}{c^2}\frac{F_y}{1-\beta^2} \qquad （4 分）$$

（5）s' 系中 F_y' 作功 W' 等于 A 的能量增量，有

$$W'=m_e'c^2-m_0c^2=\frac{5}{4}m_0c^2-m_0c^2$$

$$\Rightarrow W'=\frac{1}{4}m_0c^2$$

s 系中 F_y 对 A 作功

$$W_y=\int_{-l}^{0}F_y dy, \quad F_y=\sqrt{1-\beta^2}F_y', \quad dy=dy'$$

$$\Rightarrow W_y=\sqrt{1-\beta^2}\int_{-l}^{0}F_y'dy'=\sqrt{1-\beta^2}W'$$

$$\Rightarrow W_y=\frac{1}{5}m_0c^2$$

s 系中 A 的能量增量为

$$\Delta E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u_{ye}^2+v^2}{c^2}}}-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad 1-\frac{u_{ye}^2+v^2}{c^2}=(1-\beta^2)\left(1-\frac{u_{ye}'^2}{c^2}\right)\Bigg|_{u_{ye}'=\frac{3}{5}c}$$

$$\Rightarrow \Delta E=\left(\frac{5}{4}\right)^2 m_0c^2-\frac{5}{4}m_0c^2=\frac{5}{16}m_0c^2$$

此增量等于 F_y 对 A 作功 W_y 与 F_x 对 A 作功 W_x 之和，即有

$$\Delta E=W_y+W_x \Rightarrow W_x=\Delta E-W_y=\frac{5}{16}m_0c^2-\frac{1}{5}m_0c^2$$

$$\Rightarrow W_x=\frac{9}{80}m_0c^2 \qquad （6 分）$$