复变函数引论
开卷习题解答

2019010485　自 91　刘祖炎
liuzuyan19@mails.tsinghua.edu.cn
（周三班）

2021 年 3 月 11 日

1.(10) 设 z_1、z_2、z_3 是复平面上三个相异的点且不共线。用 z_1、z_2、z_3 表示出 $\Delta_{z_1z_2z_3}$ 的外接圆圆心 z_0，并证明：当 $z_0 = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$ 时，$\Delta_{z_1z_2z_3}$ 是正 Δ 且求出外接圆半径 r。

证明. 设 $z_1(x_1, y_1),\quad z_2(x_2, y_2),\quad z_3(x_3, y_3),\quad z_0(x, y)$

根据复数的性质，有：

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2},\quad y = \frac{z-\bar{z}}{2} \tag{1}$$

根据外接圆的性质：

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = (x-x_3)^2 + (y-y^3)^2 \tag{2}$$

整理得：

$$\begin{cases} 2(x_2-x_1)x + 2(y_2-y_1)y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 \\ 2(x_3-x_2)x + 2(y_3-y_2)y = x_3^2 + y_3^2 - x_2^2 - y_2^2 \end{cases} \tag{3}$$

令：

$$\begin{cases} A_1 = 2(x_2-x_1), & A_2 = 2(x_3-x_2) \\ B_1 = 2(y_2-y_1), & B_2 = 2(y_3-y_2) \\ C_1 = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2, & C_2 = x_3^2 + y_3^2 - x_2^2 - y_2^2 \end{cases} \tag{4}$$

即：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases} \tag{5}$$

由克莱姆法则，求解方程 (??)：

$$\begin{cases} x = \frac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \\ y = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \end{cases} \tag{6}$$

代入，整理得：

$$\begin{cases} x = \frac{(x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2)(y_3-y_2)-(x_3^2+y_3^2-x_2^2-y_2^2)(y_2-y_1)}{2(x_2-x_1)(y_3-y_2)-2(x_3-x_2)(y_2-y_1)} \\ y = \frac{(x_3^2+y_3^2-x_2^2-y_2^2)(x_2-x_1)-(x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2)(x_3-x_2)}{2(x_2-x_1)(y_3-y_2)-2(x_3-x_2)(y_2-y_1)} \end{cases} \tag{7}$$

式 (**??**) 即为用 z_1, z_2, z_3 的坐标值表示 z_0 的表达式。

若需利用 z_1, z_2, z_3 直接表示，则需做进一步变换。

将 z_0 表示为 $z_0 = x + iy$ 的形式：

$$\begin{aligned} z_0 = \frac{(x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2)(y_3-y_2)-(x_3^2+y_3^2-x_2^2-y_2^2)(y_2-y_1)}{2(x_2-x_1)(y_3-y_2)-2(x_3-x_2)(y_2-y_1)} + \\ \frac{(x_3^2+y_3^2-x_2^2-y_2^2)(x_2-x_1)-(x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2)(x_3-x_2)}{2(x_2-x_1)(y_3-y_2)-2(x_3-x_2)(y_2-y_1)}\mathrm{i} \end{aligned} \tag{8}$$

分子、分母同乘 i，整理得：

$$z_0 = \frac{(x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2)(y_3 i + x_3 - y_2 i - x_2) + (x_3^2+y_3^2-x_2^2-y_2^2)(y_1 i + x_1 - y_2 i - x_2)}{[2(x_2-x_1)(y_3-y_2)-2(x_3-x_2)(y_2-y_1)]\mathrm{i}} \tag{9}$$

利用 z_1, z_2, z_3 表示式 (**??**)，有：

$$z_0 = \frac{(z_2-z_1)|z_3|^2 + (z_3-z_2)|z_1|^2 + (z_1-z_3)|z_2|^2}{2Im(z_1 * z_2 + z_2 * z_3 + z_3 * z_1)} \tag{10}$$

其中，$z_1 * z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathrm{i}$

下证明：

$$z_0 = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} \implies z_0\text{为重心}$$

在坐标系中，由定比分点，可求得重心坐标：

$$G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$$

因此：

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{x_1+x_2+x_3}{3} + \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\mathrm{i} \\ &= \frac{x_1+y_1\mathrm{i}+x_2+y_2\mathrm{i}+x_3+y_3\mathrm{i}}{3} \\ &= \frac{z_1+z_2+z_3}{3} \end{aligned} \tag{11}$$

而重心与外心重合时，由三角形中线、垂直平分线的性质，可推出 $\Delta_{z_1z_2z_3}$ 三边相等，因而 $\Delta_{z_1z_2z_3}$ 是正三角形。

在正三角形中，有外接圆半径：

$$R = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{3}} = \frac{|z_2-z_3|}{\sqrt{3}} = \frac{|z_3-z_1|}{\sqrt{3}} \tag{12}$$

其中，$|z_1-z_2| = |z_2-z_3| = |z_3-z_1|$ 表示三角形的三边。

□

4.(20)$D_n = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 是复平面上 n 个相异点构成的点集，并满足 $|z_k| = r > 0, k = 1, 2, \cdots, n$。令 $f_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-z_k) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}z + (-1)^n\sigma_n$，证明：当 $n \geq 3$ 时，D_n 构成正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件是 $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = 0$（$m = \frac{n-1}{2}$，$n$ 为奇数，$m = \frac{n}{2}$，n 为偶数）。并证明：m 不能被更小的正整数所代替。

证明. I.

首先，利用与习题 1 相同的方法证明命题：$f_n(z)$ 为分圆多项式的充要条件是 D_n 构成正 n 边形的 n 个顶点。

必要性：

设 $f_n(z)$ 是分圆多项式，则 $f_n(z) = z^n + (-1)^n\sigma_n$。

这时 $f(z) = 0$ 当且仅当 $z^n = (-1)^{n-1}\sigma_n$，即：

$$z = z_k = |\sigma_n|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{arg((-1)^{n-1}\sigma_n)+2(k-1)\pi}{n}}, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{13}$$

由此：

$$|z_k| = |\sigma_n|^{\frac{1}{n}}, \quad arg(z_{k+1}) - arg(z_k) = arg(\frac{z_{k+1}}{z_k}) = \frac{2\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{14}$$

即点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 构成圆内接正 n 边形的 n 个顶点，必要性得证。

充分性：

设 $f_n(z)$ 的 n 个零点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 构成圆内接正 n 边形的 n 个顶点，则 $z_k = re^{i\theta_k}$，这里 $\theta_k = \frac{\phi_0+2(k-1)\pi}{n}, k = 1, 2, \cdots, n$，且 ϕ_0 是实常数。

令 $g_n(z) = z^n + (-1)^n \prod_{k=1}^{n} z_k$，则有：

$$\begin{aligned}
g(z_k) &= z_k^n + (-1)^n r^n e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k} \\
&= z_k^n + (-1)^n r^n e^{i(n\phi_0 + \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1))} \\
&= z_k^n + (-1)^n r^n e^{i(n\phi_0+(n-1)\pi)} \\
&= z_k^n + (-1)^n r^n (-1)^{n-1} e^{i(n\phi_0)} \\
&= z_k^n - r^n e^{i(n\phi_0)} \\
&= r^n e^{i(n\theta_k)} - r^n e^{i(n\phi_0)} \\
&= r^n e^{i(n\phi_0+2(k-1)\pi)} - r^n e^{i(n\phi_0)} \\
&= r^n e^{i(n\phi_0)} - r^n e^{i(n\phi_0)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

即 $g(z_k) = 0, k = 1, 2, \cdots, n$。由于 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均为 n 次多项式，且均为首一多项式，因而 $f(z) \equiv g(z)$。充分性得证。

II.

再根据 I，证明 $f_n(z)$ 为分圆多项式的充要条件是 $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = 0$。其中：

$$\begin{cases} m = \frac{n-1}{2}, \text{n 为奇数} \\ m = \frac{n}{2}, \text{n 为偶数} \end{cases} \tag{16}$$

由 I，必要性显然成立。

下证充分性：

根据 n 次方程的韦达定理，即：

对复数域 C 上的多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^n - 1 + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

有：

$$(-1)^k \frac{a_k}{a_0} = \sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_k &= \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_k}, \quad k=1,2,\cdots,m \\
\sigma_{n-k} &= \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{n-k}\le n} z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_{n-k}} \\
&\quad (n-k=m,m+1,\cdots,n,\text{n 为偶数}), \quad (n-k=m+1,m+2,\cdots,n,\text{n 为奇数}) \\
\sigma_{n-k} &= z_1z_2\cdots z_n \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \frac{1}{z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_k}} \\
&= \frac{= z_1z_2\cdots z_n}{r^{2k}} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \overline{z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_k}}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

由式 (**??**) 可知，当 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_m=0$ 时，$\sigma_{m+1}=\sigma m+2=\cdots=\sigma n=0$

故 $f_n(z)$ 为分圆多项式。

III.

根据 I、II，条件 (1)：$f_n(z)$ 为分圆多项式、条件 (2)：D_n 构成正 n 边形的 n 个顶点、条件 (3)：$\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_m=0$ 等价，故原命题完毕。

下证明 m 不能被更小的正整数所代替。

若取 $m_0<m$，则由于根与系数的对应关系，可知 $\sigma_{m_0+1}\neq 0$，故 $f_n(z)$ 不为分圆多项式，则 D_n 不构成正 n 边形的 n 个顶点。

□

5.(10)$f(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n(n\geq 3)$，给出 D_n 构成某一个正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件并给出证明，同时求出外接圆圆心及半径 r。

证明. D_n 构成某一个正 n 多边形的 n 个顶点的充要条件是 $f(z)$ 可以表示为 $f(z)=(z-z_0)^n+a_n(n\geq 3)$，其中，$z_0$ 为外接圆圆心，$r=|z_k-z_0|$ 为外接圆半径。

充分性：

由于：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \prod_{k=1}^{n}(z-z_k) \\
&= \prod_{k=1}^{n}(z-z_0+z_0-z_k) \\
&= (z-z_0)^n+a_n
\end{aligned}
\tag{18}
$$

故：

$$
a_n=\prod_{k=1}^{n}(z_0-z_k) \tag{19}
$$

这时 $f(z)=0$ 当且仅当 $(z-z_0)^n=-a_n$，即：

$$
z_k-z_0=|a_n|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{arg(-a_n)+2(k-1)\pi}{n}}, \quad k=1,2,\cdots,n \tag{20}
$$

由此：

$$
|z|=|z_0|+|a_n|^{\frac{1}{n}}
$$

$$
arg(z_{k+1}-z_0)-arg(z_k-z_0)=arg(\frac{z_{k+1}-z_0}{z_k-z_0})=\frac{2\pi}{n}, \quad k=1,2,\cdots,n-1 \tag{21}
$$

即点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 构成圆内接正 n 边形的 n 个顶点。

外接圆半径 $r=|z_k-z_0|=|a_n|^{\frac{1}{n}}$。

充分性得证。

必要性：

设 $f(z)$ 的 n 个零点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 构成圆内接正 n 边形的 n 个顶点，设 z_0 为外接圆圆心，$|z_k-z_0|=r$ 为外接圆半径。

则 $z_k-z_0=re^{i\theta_k}$，这里 $\theta_k=\frac{\phi_0+2(k-1)\pi}{n},k=1,2,\cdots,n$，且 ϕ_0 是实常数。

令 $g(z)=(z-z_0)^n+(-1)^n\prod_{k=1}^{n}(z_k-z_0)$，则有：

$$\begin{aligned}
g(z_k)&=(z_k-z_0)^n+(-1)^n r^n e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k}\\
&=(z_k-z_0)^n+(-1)^n r^n e^{i(n\phi_0+\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1))}\\
&=(z_k-z_0)^n+(-1)^n r^n e^{i(n\phi_0+(n-1)\pi)}\\
&=(z_k-z_0)^n+(-1)^n r^n(-1)^{n-1}e^{i(n\phi_0)}\\
&=(z_k-z_0)^n-r^n e^{i(n\phi_0)}\\
&=r^n e^{i(n\theta_k)}-r^n e^{i(n\phi_0)}\\
&=r^n e^{i(n\phi_0+2(k-1)\pi)}-r^n e^{i(n\phi_0)}\\
&=r^n e^{i(n\phi_0)}-r^n e^{i(n\phi_0)}\\
&=0
\end{aligned}\tag{22}$$

即 $g(z_k)=0,k=1,2,\cdots,n$。由于 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均为 n 次多项式，且均为首一多项式，因而 $f(z)\equiv g(z)$。必要性得证。

□

6.(30) 利用

$$\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}),\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-\frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2})$$

证明：

(1)

$$\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}-\frac{\zeta(2n-2)}{3!\pi^{2n-2}}+\frac{\zeta(2n-4)}{5!\pi^{2n-4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2)}{(2n-1)!\pi^2}+\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=0,n\geq 2$$

$(\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$，$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z})$

(2)

$$\frac{2^{2n}-1}{\pi^{2n}}\zeta(2n)-\frac{2^{2n-2}-1}{2!\pi^{2n-2}}\zeta(2n-2)+\frac{2^{2n-4}-1}{4!\pi^{2n-4}}\zeta(2n-4)+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2^2-1)}{(2n-2)!\pi^2}\zeta(2)+\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0$$

$n=1,2,3,\cdots$

(3) 令 $a_n=\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}},n=1,2,\cdots$。证明：$(n+\frac{1}{2})a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}a_k,n\geq 2(a_1=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6})$，并求出 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 的分数表达式。

证明. I.

由题给公式：

$$\sin(z) = z\prod_{i=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}) \tag{23}$$

对式 (??) 两边取对数，得：

$$\ln\sin z - \ln z = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}) \tag{24}$$

根据：

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}, \quad |z|<1$$

令 $a_n = \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$，式 (??) 可变换为：

$$\begin{aligned}\ln\sin z - \ln z &= -\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{nk^{2n}\pi^{2n}} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}})\frac{z^{2n}}{n\pi^{2n}} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)z^{2n}}{n\pi^{2n}} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n z^{2n}}{n}, \quad (a_n = \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}})\end{aligned} \tag{25}$$

对式 (??) 两边求导并整理，得：

$$\begin{aligned}\cot z - \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}a_n z^{2n-1} = 0 \\ 2\sin z\sum_{n=1}^{+\infty}a_n z_{2n} - \sin z + z\cos z = 0\end{aligned} \tag{26}$$

根据题给条件，$\sin z$、$\cos z$ 满足：

$$\begin{aligned}\sin z &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\end{aligned} \tag{27}$$

将式 (??) 代入式 (??)，得：

$$2(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!})(\sum_{n=1}^{+\infty}a_n z^{2n}) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n)!} = 0 \tag{28}$$

式 (??) 的三个和式中，z^{2n+1} 项的系数分别为：

$$a_n - \frac{a_{n-1}}{3!} + \frac{a_{n-2}}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}a_1}{(2n-1)!}, \quad -\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

因此，考虑 z^{2n+1} 项的系数，并还原为要证式，可得：

$$
\begin{gathered}
a^n - \frac{a_{n-1}}{3!} + \frac{a_{n-2}}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n a_1}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = 0 \\
\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} - \frac{\zeta(2n-2)}{3!\pi^{2n-2}} + \frac{\zeta(2n-4)}{5!\pi^{2n-4}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\zeta(2)}{(2n-1)!\pi^2} + \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = 0
\end{gathered} \tag{29}
$$

II.

由题给公式：

$$
\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2}) \tag{30}
$$

对式 (??) 两边取对数，得：

$$
\ln \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2}) \tag{31}
$$

根据：

$$
\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1
$$

对 (??) 进行变换：

$$
\begin{aligned}
\ln \cos z &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2})^k}{k} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{k(n+\frac{1}{2})^{2k} \pi^{2k}} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k} 2^{2k}}{k(2n+1)^{2k} \pi^{2k}} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}}) \frac{z^{2k} 2^{2k}}{k \pi^{2k}}
\end{aligned} \tag{32}
$$

根据式 (??)：

$$
\begin{aligned}
\ln \sin z - \ln z &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{k n^{2k} \pi^{2k}} \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k} 2^{2k}}{k(2n)^{2k} \pi^{2k}} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} (\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{2k}}) \frac{z^{2k} 2^{2k}}{k \pi^{2k}}
\end{aligned} \tag{33}
$$

将式 (??)、(??) 相加，由于 (??) 含有 $\zeta(2k)$ 的奇数次幂项，(??) 含有 $\zeta(2k)$ 的偶数次幂项，故相加后构成 $\zeta(2k)$。

与 I 同理，令 $a_n = \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$，相加后的结果为：

$$
\begin{aligned}
\ln\cos z+\ln\sin z-\ln z &= -\sum_{k=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}})\frac{z^{2k}2^{2k}}{k\pi^{2k}} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)z^{2k}2^{2k}}{k\pi^{2k}} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k z^{2k}2^{2k}}{k}, \quad (a_k=\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}})
\end{aligned} \tag{34}
$$

将式 (??) 代入式 (??)，可得：

$$
\ln\cos z=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k z^{2k}(2^{2k}-1)}{k} \tag{35}
$$

对式 (??) 两边求导，并整理后得：

$$
\begin{aligned}
-\tan z &= -2\sum_{k=1}^{+\infty}a_k z^{2k-1}(2^{2k}-1) \\
\cos z\sum_{k=1}^{+\infty}a_k z^{2k-1}(2^{2k}-1)-\frac{1}{2}\sin z &= 0
\end{aligned} \tag{36}
$$

由于 $\sin z$、$\cos z$ 满足式 (??)，代入式 (??)，有：

$$
\sum_{k=1}^{+\infty}a_k z^{2k-1}(2^{2k}-1)(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!})-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)!}=0 \tag{37}
$$

与 I 同理，在式 (??) 中考虑 z^{2n-1} 项的系数，可得等式：

$$
(2^{2n}-1)a_n-\frac{(2^{2n-2}-1)a_{n-1}}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2^2-1)}{(2n-2)!}a_1+\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0 \tag{38}
$$

式 (??) 即为：

$$
\frac{2^{2n}-1}{\pi^{2n}}\zeta(2n)-\frac{2^{2n-2}-1}{2!\pi^{2n-2}}\zeta(2n-2)+\frac{2^{2n-4}-1}{4!\pi^{2n-4}}\zeta(2n-4)+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2^2-1)}{(2n-2)!\pi^2}\zeta(2)+\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0 \tag{39}
$$

III.

根据式 (??)

$$
\frac{z\cos z}{\sin z}=1-2\sum_{k=1}^{+\infty}a^k z^{2k} \tag{40}
$$

对式 (??) 两边求导，并整理可得：

$$
\frac{z\cos z}{\sin z}-\frac{z^2\cos^2 z}{\sin^2 z}=-4k\sum_{k=1}^{+\infty}a^k z^{2k} \tag{41}
$$

再将式 (??) 代入式 (??)，有：

$$
1-2\sum_{k=1}^{+\infty}a_k z^{2k}-(1-2\sum_{k=1}^{+\infty}a_k z^{2k})^2-z^2=-4k\sum_{k=1}^{+\infty}a_k z^{2k} \tag{42}
$$

与 I、II 同理，考虑 z^{2n} 项的系数：

$n=1$ 时，考虑 z^2 项，易得 $a_1=\frac{1}{6}$

$n>1$ 时，可整理得：

$$-2a_n+4a_n-4\sum k=1^{n-1}a_{n-k}a_k=-4na_n$$
$$(n+\frac{1}{2})=\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}a_k \tag{43}$$

根据式 (??) 递推计算 $a_1\sim a_6$，可得：

$$\begin{aligned} a_1&=\frac{1}{6}\\ a_2&=\frac{1}{90}\\ a_3&=\frac{1}{945}\\ a_4&=\frac{1}{9450}\\ a_5&=\frac{1}{93555}\\ a_6&=\frac{691}{638512875} \end{aligned} \tag{44}$$

□

7.(10) 证明：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)}=\ln\frac{2\pi}{e},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)2^{2n}}=\ln\frac{\pi}{e}$$

证明．由题 6：

$$\sin(\pi z)=\pi z\prod_{i=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) \tag{45}$$

取对数：

$$\ln\sin\pi z=\ln\pi z+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-\frac{z^2}{n^2}) \tag{46}$$

等式两边求导：

$$\begin{aligned} \pi\cot\pi z&=\frac{1}{z}-2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(1-\frac{z^2}{n^2})}\\ &=\frac{1}{z}-2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}}\\ &=\frac{1}{z}-2\sum_{k=1}^{+\infty}z^{2k-1}\zeta(2k) \end{aligned} \tag{47}$$

对 (??) 两侧积分：

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{k}z^{2k}=\ln|z|-\ln|\sin\pi z|+C \tag{48}$$

令 $z\to 0^+$，有：

$$
\begin{aligned}
C &= \lim_{x\to 0^+} \ln|\frac{\sin \pi z}{z}| \\
&= \ln \pi
\end{aligned} \tag{49}
$$

对 (??) 再次积分：

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{k(2k+1)} z^{2k+1} = \int \ln|\pi z| \mathrm{d}z - \int \ln|\sin \pi z| \mathrm{d}z \\
\int \ln|\pi z| \mathrm{d}z = z\ln|\pi z| - z \\
\int \ln|\sin \pi z| \mathrm{d}z = \frac{1}{\pi} \int \ln|\sin t| \mathrm{d}t, \quad (t = \pi z)
\end{gathered} \tag{50}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\int \ln \sin t \mathrm{d}t &= t \ln \sin t - \int t \cot t \mathrm{d}t \\
&= t \ln \sin t - \int \mathrm{i}t \frac{e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}}{e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}} \mathrm{d}t \\
&= t \ln \sin t - \int \mathrm{i}t \mathrm{d}t - \int \frac{2\mathrm{i}te^{-\mathrm{i}t}}{e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}} \mathrm{d}t \\
&= t \ln \sin t - \frac{1}{2}\mathrm{i}t^2 + 2\mathrm{i} \int \frac{t}{1 - e^{2\mathrm{i}t}} \mathrm{d}t \\
&= t \ln \sin t - \frac{1}{2}\mathrm{i}t^2 + 2\mathrm{i} \int t \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2int} \mathrm{d}t \\
&= t \ln \sin t + \frac{1}{2}\mathrm{i}t^2 + 2\mathrm{i} \sum_{n=1}^{+\infty} \int te^{2int} \mathrm{d}t \\
&= t \ln \sin t + \frac{1}{2}\mathrm{i}t^2 - t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2int}}{n} + \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2int}}{n^2} \\
&= t \ln \sin t + \frac{1}{2}\mathrm{i}t^2 - t \ln(1 - e^{2int}) + \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2int}}{n^2}
\end{aligned} \tag{51}
$$

由式 (??)、(??) 整理可得：

$$
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{k(2k+1)} z^{2k+1} = -z - \frac{\mathrm{i}(\pi^2 z^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2in\pi z}}{n^2})}{2\pi} + z \ln(\frac{\pi z(1 - e^{2\pi \mathrm{i} z})}{\sin \pi z}) + C \tag{52}
$$

令式 (??) 中 $z \to 0$，有：

$$
C = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi i}{12} \tag{53}
$$

再令式 (??) 中 $z \to 1$，有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{k(2k+1)} &= -1 - \frac{\pi \mathrm{i}}{2} - \frac{\pi \mathrm{i}}{12} + \frac{\pi \mathrm{i}}{12} + \lim_{x\to 1} \ln(\frac{\pi z(1 - e^{2\pi \mathrm{i} z})}{\sin \pi z}) \\
&= -1 - \frac{\pi \mathrm{i}}{2} + \ln 2\pi + \frac{\pi \mathrm{i}}{2} \\
&= \ln \frac{2\pi}{e}
\end{aligned} \tag{54}
$$

因此：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)}=\ln\frac{2\pi}{e} \tag{55}$$

再令式 (??) 中 $z=\frac{1}{2}$，有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{k(2k+1)2^{2k}}&=-\frac{1}{2}-\frac{\pi\mathrm{i}}{8}+\frac{\pi\mathrm{i}}{24}+\frac{\pi\mathrm{i}}{12}+\frac{1}{2}\ln(\frac{\pi}{2}(1-e^{\pi\mathrm{i}}))\\&=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{56}$$

因此：

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)2^{2n}}=\ln\frac{\pi}{e} \tag{57}$$

□

8.(10) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内处处可导，在 $|z|\le 1$ 内连续。若 $f(e^{i\theta})\in R,\theta\in[0,2\pi]$，证明：$f(z)\equiv f(0)\in R,\forall z:|z|\le 1$

证明. 考虑积分曲线 $C:|z|=1=e^{i\theta}$，由于 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内处处可导，在 $|z|\le 1$ 内连续，故由柯西高阶导数公式：

$$\begin{aligned}f^{(k)}(0)&=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z,\quad (k\ge 1)\\&=\frac{k!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta(n+1)}}\mathrm{d}e^{i\theta}\\&=\frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{ik\theta}}\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{58}$$

由于 $f(e^{i\theta})\in R$，故 $f(e^{i\theta})=\overline{f(e^{i\theta})}$。

对式 (??) 取共轭，有：

$$\begin{aligned}\overline{f^{(k)}(0)}&=\frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{\overline{e^{ik\theta}}}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{k!}{2\pi i}\oint_C f(z)z^{n-1}\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{59}$$

由于 $f(z)z^{n-1}$ 在 C 内解析

故 $\overline{f^{(k)}(0)}=0,\quad f^{(k)}(0)=0,\quad \forall k\ge 1$

对于 $\forall|z|<1$，$f(z)$ 有泰勒展开式：

$$f(z)=f(0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)z^k\quad\equiv f(0) \tag{60}$$

由 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 内的连续性，当 $|z|\le 1$ 时，$f(z)\equiv f(0)$。

由于 $f(e^{i\theta})\in R$，故 $f(z)\in R$

□

9.(10) 设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 内处处可导，且 $f(z)$ 不是常数，若 $|f(z_0)|=max|f(z)|$，证明:

(1)$|z_0|=1$

(2)$f'(z_0)\ne 0$

证明. I.

根据最大模原理，I 显然成立。

最大模原理即：设 $f(z)$ 在有界区域 D 内处处可导，在 D 的边界 ∂D 上连续，则 $\underset{z\in\bar{D}}{max}|f(z)| = \underset{z\in\partial D}{max}|f(z)|$，这里 $\bar{D} = D \cup \partial D$。

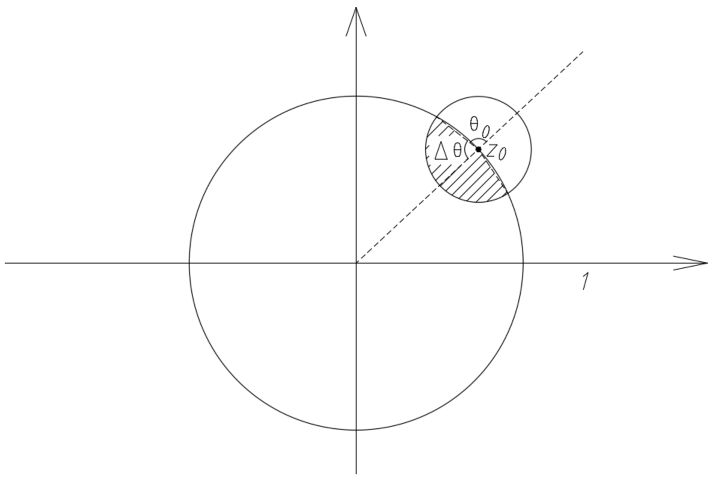
因此，由于 $f(z)$ 不是常数，$f(z)$ 的最大值必然在 $|z_0| = 1$ 处取得。

II.

利用反证法，假设 $f'(z_0) = 0$

由于 $f(z)$ 不为常数，故可以找到 $n > 1$，满足 $f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$，而 $f^{(n)}(z_0) \neq 0$

考虑如下图所示的区域：



记 $D_\delta = \{z||z - z_0| < \delta\}$ 表示 z_0 周围的环域，$D = \{z||z - z_0| < \delta, |z| \leq 1\}$ 表示 D_δ 中有定义的部分（即图中阴影部分）。

考虑 D 边界上：$z = z_0 + \delta e^{i\theta}$，其中 $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\Delta\theta]$。

由于 δ 可取充分小，则由几何性质可知 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$。

在 z 点处泰勒展开，由于前 $(n-1)$ 阶导数均为 0，故有：

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\delta^n e^{in\theta} + \cdots \\ &= f(z_0) + e^{in\theta}(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\delta^n + \cdots) \end{aligned} \tag{61}$$

其中，记 $(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\delta^n + \cdots) = k$。

设 $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\alpha}$，$k = |k|e^{i(\alpha+\beta)}$。

其中，β 表示 $f(z_0)$ 与 k 的夹角，不妨设 $\beta \in (-\pi, \pi]$。

则：

$$f(z) = |f(z_0)|e^{i\alpha} + |k|e^{i(n\theta+\alpha+\beta)} \tag{62}$$

下证当 k 取得任意角度时，都可以找到 θ，使 $|f(z)| > |f(z_0)|$：

I. 若 $\beta \in (-\pi, \pi)$

要证对 $\forall\beta$，都可以找到 θ，使得 $n\theta + \beta = 2N\pi$, (n 为正整数)

由于 $n > 2$ 时，$n\theta$ 可以取遍 2π 周期，故此时显然存在 θ, β 满足条件。

$n = 2$ 时，由于 $\pi < 2\theta < 3\pi$，故当 δ 充分小时，存在 θ, β 满足条件。

故式 (??) 可变换为：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= |f(z_0)|e^{i\alpha} + |k|e^{i(n\theta+\alpha+\beta)} \\
&= |f(z_0)|e^{i\alpha} + |k|e^{i(\alpha+2N\pi)} \\
&= (|f(z_0)| + |k|)e^{i\alpha}
\end{aligned} \tag{63}
$$

上式说明 $|f(z)| > |f(z_0)|$，与 $f(z_0)$ 是最大模矛盾。

II. 若 $\beta = \pi$

可以取到 $f(z_0)$ 与 k 的夹角为锐角，则此时，由几何关系可知：

$|f(z)| > |f(z_0)|$ 仍成立，与 $f(z_0)$ 是最大模矛盾。

综上可知，总能找到 z，满足 $|f(z)| > |f(z_0)|$，与最大模原理矛盾。故假设不成立，因而 $f'(z_0) = 0$。

□

10.(10)（利用 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z), |z| < 1$）

令 $f_k(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n^k}, g_k(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \sin n\theta}{n^k}$，这里 $r \in (0,1], \theta \in [0, 2\pi]$，给出 $k = 1,2,3$ 时 $f_k(r,\theta), g_k(r,\theta)$ 的积分或有限形式。

再令 $r \to 1^-$，求出 $f_k(1,\theta), g_k(1,\theta)$ 的积分及有限形式的最简形式。

证明. $k = 1$ 时，由于：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n} + i\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \sin n\theta}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n e^{in\theta}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}
\end{aligned} \tag{64}
$$

根据题给条件：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} &= -\ln(1-z) \\
&= -\ln(1-re^{i\theta}) \\
&= -\ln(1-r\cos\theta - ir\sin\theta) \\
&= -\ln|1-r\cos\theta - ir\sin\theta| - iArg(1-r\cos\theta - ir\sin\theta) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta + r^2) + i\arctan(\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}), \quad \theta \in [0, 2\pi)
\end{aligned} \tag{65}
$$

比较实部与虚部，有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n} &= -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta + r^2) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \sin n\theta}{n} &= \arctan(\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta})
\end{aligned} \tag{66}
$$

令 $r \to 1^-$，可求得：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} &= -\ln 2\sin\frac{\theta}{2} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} &= \frac{\pi-\theta}{2}
\end{aligned} \tag{67}
$$

$k=2$ 时，同理：

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n} \\ &= -\frac{\ln(1-z)}{z} \end{aligned} \tag{68}$$

以 r 为起始点做积分，有：

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) - f(r) &= -\int_r^{re^{i\theta}} \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\theta \frac{\ln(1-re^{is})ire^{is}}{re^{is}}\mathrm{d}s \\ &= -i\int_0^\theta \ln(1-r\cos s - ir\sin s)\mathrm{d}s \\ &= -\frac{i}{2}\int_0^\theta \ln(1-2r\cos s + r^2)\mathrm{d}s - \int_0^\theta \arctan(\frac{r\sin s}{1-r\cos s})\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{69}$$

比较实部与虚部，有：

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n\cos n\theta}{n^2} &= f(r) - \int_0^\theta \arctan(\frac{r\sin s}{1-r\cos s})\mathrm{d}s \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n\sin n\theta}{n^2} &= -\frac{1}{2}\int_0^\theta \ln(1-2r\cos s + r^2)\mathrm{d}s \\ (f(r) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n^2}) \end{aligned} \tag{70}$$

令 $r \to 1^-$，可求得：

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\theta(2\pi-\theta)}{4} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2} &= -\int_0^\theta \ln(2\sin\frac{t}{2})\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{71}$$

□

11.(10)

$$I_{r,m,n} = \oint \frac{z^m e^{\frac{1}{z}}}{(r+z)^n}\mathrm{d}z$$

这里 $r \neq 0, \quad m,n \in N$（正整数）

证明. 首先进行换元变换：

$$\begin{aligned} I_{r,m,n} &= \oint \frac{(\frac{z}{r})^m e^{\frac{r}{z}} e^{\frac{1}{r}}}{r^n(1+\frac{z}{r})^n}\mathrm{d}z \\ &= \frac{e^{\frac{1}{r}}\frac{1}{r^m}}{r^n}\oint \frac{((\frac{z}{r})^m e^{\frac{r}{z}})}{(1+\frac{z}{r})^n}\mathrm{d}z \\ &= \frac{e^{\frac{1}{r}}}{r^{m+n-1}}\oint \frac{t^m e^{\frac{1}{t}}}{(1+t)^n}\mathrm{d}t \quad (t = \frac{z}{r}) \end{aligned} \tag{72}$$

考虑积分：

$$I_{1,m,n} = \oint \frac{z^m e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)^n} \mathrm{d}z$$

再次换元：

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = t, \quad \mathrm{d}z = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t, \quad z = re^{i\theta} \\ t = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \end{aligned} \tag{73}$$

原积分可变换为：

$$\begin{aligned} I_{1,m,n} &= \oint \frac{t^n e^t}{t^{m+2}(1+t)^n} \mathrm{d}t \\ &= \oint \frac{e^t}{(1+t)^n t^{m+2-n}} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{74}$$

I. 若 $m+2-n \leq 0$，由 Cauchy-Goursat 定理易知：

$$I_{1,m,n} = 0$$

$$I_{r,m,n} = 0$$

II. 若 $m+2-n \geq 1$：

$$I_{1,m,n} = \frac{2\pi i}{(m+1-n)!} f^{m+1-n}(0), \quad f(t) = \frac{e^t}{(1+t)^n} \tag{75}$$

将 $f(t)$ 展开：

$$\begin{aligned} f(t) &= (\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!})[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}(-t)^k] \\ &= (\sum_{j=0}^{+\infty} a_j t^j)(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k \\ c_k &= \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j, \quad k = 0, 1, 2 \cdots \end{aligned} \tag{76}$$

其中：

$$\begin{aligned} & a_j = \frac{1}{j}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \\ & b_k = \mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}(-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \\ & c_0 = a_0 b_0 = 1 \\ & c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(k-j)!}(-1)^j \mathrm{C}_{n+j-1}^{n-1}, \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{77}$$

令 $k = m+1-n$，比较系数可得：

$$\frac{1}{(m+1-n)!} f^{m+1-n}(0) = c_{m+1-n} \tag{78}$$

因此：

$$\begin{aligned} I_{1,m,n} &= c_{m+1-n}\cdot 2\pi i \\ &= 2\pi i\sum_{j=0}^{m+1-n}\frac{1}{(m+1-n-j)!}(-1)^j\mathrm{C}_{n+j-1}^{n-1} \\ I_{r,m,n} &= \frac{e^{\frac{1}{r}}}{r^{m+n-1}}\cdot I_{1,m,n} \\ &= \frac{2\pi i e^{\frac{1}{r}}}{r^{m+n-1}}\sum_{j=0}^{m+1-n}\frac{(-1)^j\mathrm{C}_{n+j-1}^{n-1}}{(m+1-n-j)!} \end{aligned} \tag{79}$$

□

12.(10)

设 $\Delta_{z_1z_2z_3}$ 的面积为 S，$|z|=R>|r|$

证明 $S=\frac{1}{2}|Im(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3)|$，这里 $Im(z)=y$，若 $z=x+iy,\quad x,y\in R$

证明. 设三角形的三个顶点分别为：

$$z_1=(x_1,y_1),\quad z_2=(x_2,y_2),\quad z_3=(x_3,y_3)$$

计算等号左边，三角形的面积可表示为：

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3| \end{aligned} \tag{80}$$

另一方面，计算等号右边：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|Im(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3)| \\ &= \frac{1}{2}|Im((x_1-y_1i)(x_2+y_2i)+(x_1+y_1i)(x_3-y_3i)+(x_2-y_2i)(x_3+y_3i))| \\ &= \frac{1}{2}|Im(Re+(x_1y_2-x_2y_1-x_1y_3+x_3y_1-x_3y_2+x_2y_3)i)| \\ &= \frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1-x_1y_3+x_3y_1-x_3y_2+x_2y_3| \end{aligned} \tag{81}$$

显然，(**??**)=(**??**)，等号左边、右边相等。

□

13.(10) 证明 $\Delta_{z_1z_2z_3}$ 构成正 Δ 的充要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$

证明. I. 必要性

正三角形满足：

$$\begin{aligned} \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} &= e^{\frac{\pi}{3}i} \\ \frac{z_2-z_3}{z_1-z_2} &= e^{\frac{2\pi}{3}i} \end{aligned} \tag{82}$$

从而：

$$
\begin{aligned}
(z_1-z_2)^2(1+(\frac{z_2-z_3}{z_1-z_2})^2+(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2})^2) &= (z_1-z_2)^2(1+(e^{\frac{\pi}{3}i})^2+(e^{\frac{2\pi}{3}i})^2) \\
&= 0 \\
&= (z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_1-z_3)^2 \\
&= 2(z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_1z_3)
\end{aligned} \tag{83}
$$

即：

$$
z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 \tag{84}
$$

II. 充分性

由

$$
z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 \tag{85}
$$

可得：

$$
(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_1-z_3)^2=0 \tag{86}
$$

$$
\begin{aligned}
(z_2-z_3)^2 &= (z_2-z_1)(z_3-z_1) \\
(z_1-z_2)^2 &= (z_1-z_3)(z_3-z_2) \\
(z_1-z_3)^2 &= (z_3-z_2)(z_2-z_1)
\end{aligned} \tag{87}
$$

由式 (**??**)、(**??**)，可得：

$$
(z_1-z_2)^2+(z_2-z_1)(z_3-z_1)+(z_1-z_3)^2=0 \tag{88}
$$

解一元二次方程 (**??**)，可得：

$$
\begin{aligned}
z_2-z_1 &= (z_3-z_1)e^{\frac{\pi}{3}i} \\
\text{或} z_2-z_1 &= (z_3-z_1)e^{-\frac{\pi}{3}i}
\end{aligned} \tag{89}
$$

因而 z_2-z_1 与 z_3-z_1 模长相等，辐角相差 $\frac{\pi}{3}$。

故 $\Delta_{z_1z_2z_3}$ 为正三角形。

□

14.(10)

$$
I_1=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+r^{2n}}\mathrm{d}x
$$

这里 $r>0, m$ 是非负整数,$n\in N, m\le n-1$

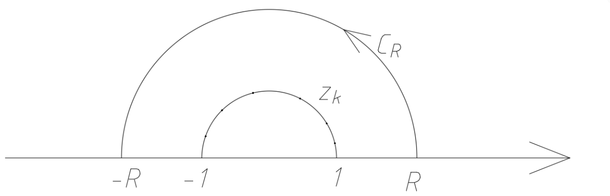
证明. 首先进行换元：

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+r^{2n}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{(\frac{x}{r})^{2m}r^{2m+1}}{((\frac{x}{r})^{2n}+1)r^{2n}}\mathrm{d}(\frac{x}{r}) \\
&= (\frac{1}{r})^{2n-2m-1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2m}}{t^{2n}+1}\mathrm{d}t, \quad (t=\frac{x}{r})
\end{aligned} \tag{90}
$$

考虑换元后的积分：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{2m}}{t^{2n}+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{t^{2n}+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{t^{2m}}{t^{2n}+1}\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{91}
$$

由于 $f(z)=\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}$ 在实轴上无孤立奇点，且 $2n-2m\geq 2$，故积分存在。



取如图所示的积分路线，由实轴和半圆弧 C_R（原点为中心，半径为 R）构成，取 $R>1$，C_R 包含 $f(z)$ 的所有位于上半平面的极点。这样，有：

$$
\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty}[\int_{-R}^{R}\frac{t^{2m}}{1+t^{2n}}\mathrm{d}t + \int_{C_R}\frac{z^{2m}}{1+z^{2m}}\mathrm{d}z]
\tag{92}
$$

由于：

$$
\begin{aligned}
|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z| &= |\int_{C_R} zf(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}| \\
&\leq \int_C |zf(z)|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|} \leq max|zf(z)|\int_{C_R}\frac{|\mathrm{d}z|}{z} \\
&= max|zf(z)|\frac{1}{R}\int_{C_R}\int_{C_R}|\mathrm{d}z| = max|zf(z)|\frac{\pi R}{R} \\
&= \pi max|zf(z)| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0
\end{aligned}
\tag{93}
$$

因而：

$$
\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}\mathrm{d}z \to 0
$$

由留数定理：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\oint_C f(z)\mathrm{d}z \\
&= \pi i\sum Res[\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}, z_k]
\end{aligned}
\tag{94}
$$

$f(z)=\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}$ 在上半平面的奇点满足：

$$
z^{2n} = -1 = e^{\pi i} = e^{(2k+1)\pi i} z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}, \quad k=0,1,\cdots,n-1
\tag{95}
$$

其中，注意到 $z_k^{2n-1} = -z_k^{-1}$，从而：

$$
\begin{aligned}
Res[\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}, z_k] &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{2m}}{2nz^{2n-1}}|_{z=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} z^{2m-1}|_{z=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} e^{\frac{(2k+1)(2m+1)\pi i}{2n}} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} (e^{(\frac{2m+1}{2n})^{\pi i}})^{2k+1} (\text{构成等比数列}) \quad = -\frac{1}{n} \frac{e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i}}{1-e^{\frac{2m+1}{n}\pi i}} \\
&= \frac{1}{2ni \sin\frac{2m+1}{2n}}
\end{aligned} \tag{96}
$$

因而：

$$
\begin{aligned}
I &= \pi i \frac{1}{2ni\sin\frac{2m+1}{2n}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{2m+1}{2n}}
\end{aligned} \tag{97}
$$

$$
I_1 = (\frac{1}{r})^{2n-2m-1} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{2m+1}{2n}} \tag{98}
$$

□

15.(10)

$$
I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+r^2)^n} \mathrm{d}x
$$

这里 $r > 0, m$ 是非负整数,$n \in N, m \leq n-1$

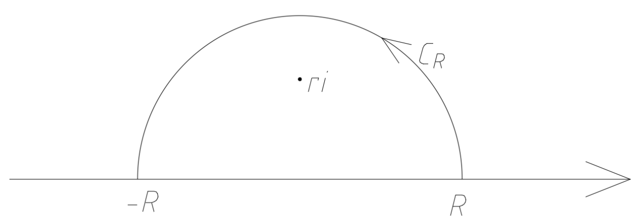
证明.

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+r^2)^n} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+r^2)^n} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x^{2m}}{(x^2+r^2)^n} \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{99}
$$

由于 $f(z) = \frac{z^{2m}}{(z^2+r^2)^n}$ 在实轴上无孤立奇点，且 $2n-2m \geq 2$，故积分存在。
由于：

$$
f(z) = \frac{z^{2m}}{(z^2+r^2)^n} = \frac{z^{2m}}{(x-ri)^n(x+ri)^n} \tag{100}
$$

故 $f(z)$ 在上半平面有 n 级极点 $z = ri$



取如图所示的积分路线，由实轴和半圆弧 C_R（原点为中心，半径为 R）构成，取 $R > r$，C_R 包含 $f(z)$ 的所有位于上半平面的极点。这样，有：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty}[\int_{-R}^{R} \frac{x^{2m}}{(x^2+r^2)^n}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{z^{2m}}{(z^2+r^2)^n}\mathrm{d}z] \tag{101}$$

与题 14 同理，由于 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$，故

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{z^{2m}}{(z^2+r^2)^n}\mathrm{d}z \to 0$$

由留数定理：

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\oint_C f(z)\mathrm{d}z \\ &= \pi i Res[\frac{z^{2m}}{(z^2+r^2)^n}, ri] \\ &= \pi i \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to ri}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\frac{z^{2m}}{(z+ri)^n} \end{aligned} \tag{102}$$

其中，考虑 $n-1$ 阶导数，由莱布尼茨高阶导数公式展开，有：

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}z^{2m}(z+ri)^{-n}|_{z=ri} \\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}[\frac{\mathrm{d}^{n-1-k}}{\mathrm{d}z^{n-1-k}}(z^{2m})\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(z+ri)^{-n}] \\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}(2m)\cdots(2m-n+k+2)z^{2m-n+1+k}(z+ri)^{-n-k}(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1) \\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}(2m)\cdots(2m-n+k+2)n\cdots(n+k-1)(-1)^k(ri)^{2m-n+1+k}(2ri)^{-n-k} \\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}(n-k-1)!\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}k!(2^{-n-k})(ri)^{2m-2n+1}(-1)^k \end{aligned} \tag{103}$$

注意到 $n-1>2m$ 时，z^{2m} 项求 $\geq 2m+1$ 阶导数后为零，故上式在此时应修正为：

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}z^{2m}(z+ri)^{-n}|_{z=ri} \\ &=\sum_{k=n-1-2m}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}(n-k-1)!\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}k!(2^{-n-k})(ri)^{2m-2n+1}(-1)^k \end{aligned} \tag{104}$$

因而，$n-1\leq 2m$ 时：

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\pi i}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}(n-k-1)!\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}k!(2^{-n-k})(ri)^{2m-2n+1}(-1)^k \\ &= \frac{\pi}{r^{2n-2m-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}(-1)^k(i)^{2m-2n+2}}{2^{n+k}} \\ &= \frac{\pi}{r^{2n-2m-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}(-1)^{k+m-n+1}}{2^{n+k}} \end{aligned} \tag{105}$$

$n-1>2m$ 时：

$$I_2 = \frac{\pi}{r^{2n-2m-1}}\sum_{k=n-1-2m}^{n-1}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}(-1)^{k+m-n+1}}{2^{n+k}} \tag{106}$$

□

16.(10)

$$I_3=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m-1}\sin kx}{(x^2+r_1^2)^n(x^2+r_2^2)^n}\mathrm{d}x$$

这里 $r_1>0,r_2>0,k>0,\quad m,n\in N,m\leq 2n$

证明. 与题 17 同理：

$$\begin{aligned}I_3&=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m-1}\sin kx}{(x^2+r_1^2)^n(x^2+r_2^2)^n}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m-1}\sin kx}{(x^2+r_1^2)^n(x^2+r_2^2)^n}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}Im[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m-1}e^{ikx}}{(x^2+r_1^2)^n(x^2+r_2^2)^n}\mathrm{d}x]\end{aligned}\tag{107}$$

由奇偶性，可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m-1}\cos kx}{(x^2+r_1^2)^n(x^2+r_2^2)^n}\mathrm{d}x=0$$

故：

$$I_3=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m-1}e^{ikx}}{(x^2+r_1^2)^n(x^2+r_2^2)^n}\mathrm{d}x\tag{108}$$

与题 17 同理，$f(z)=\frac{z^{2m-1}e^{ikz}}{(z^2+r_1^2)^n(z^2+r_2^2)^n}$ 有两个 n 级极点 $x=r_1i,x=r_2i$，由留数定理可得：

$$I_3=\pi i(Res[f(z),r_1i]+Res[f(z),r_2i])\tag{109}$$

其中，利用式 (**??**)，由莱布尼茨高阶导数公式展开，可求出：

$$\begin{aligned}\pi iRes[f(z),r_1i]&=\frac{\pi}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(\frac{z^{2m-1}}{(z+r_1)^n(z^2+r_2^2)^n})e^{ikz}\\&=\pi\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(ik)^te^{-kr_1}}{t!}[\sum_{l=0}^{n-1-t}\frac{(2^l)(r_1)^{2m-2n+2t+3l}(i)^{2m-2n+2t+l-1}\mathrm{C}_{n-1-k+l}^{n-1-k}}{(r_2^2-r_1^2)^{n-t+l}}\\&(\sum_{j=0}^{n-1-l-t}\frac{\mathrm{C}_{2m-1}^{n-l-1-j-t}\mathrm{C}_{n-1-l-j-t}^{n-1-l-t}(-1)^j}{2^{n-l+j-t}})]\\&=\pi e^{-kr_1}\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(ik)^t}{t!}[\sum_{l=0}^{n-1-t}\frac{(2^l)(r_1)^{2m-2n+2t+3l}(i)^{2m-2n+2t+l-1}\mathrm{C}_{n-1-k+l}^{n-1-k}}{(r_2^2-r_1^2)^{n-t+l}}\\&(\sum_{j=0}^{n-1-l-t}\frac{\mathrm{C}_{2m-1}^{n-l-1-j-t}\mathrm{C}_{n-1-l-j-t}^{n-1-l-t}(-1)^j}{2^{n-l+j-t}})]\end{aligned}\tag{110}$$

类似地：

$$\begin{aligned}\pi iRes[f(z),r_2i]&=\pi e^{-kr_2}\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(ik)^t}{t!}[\sum_{l=0}^{n-1-t}\frac{(2^l)(r_2)^{2m-2n+2t+3l}(i)^{2m-2n+2t+l-1}\mathrm{C}_{n-1-k+l}^{n-1-k}}{(r_1^2-r_2^2)^{n-t+l}}\\&(\sum_{j=0}^{n-1-l-t}\frac{\mathrm{C}_{2m-1}^{n-l-1-j-t}\mathrm{C}_{n-1-l-j-t}^{n-1-l-t}(-1)^j}{2^{n-l+j-t}})]\end{aligned}\tag{111}$$

由式 (**??**)、(**??**) 即可求得 $I_3=(\textbf{??})+(\textbf{??})$

□

17.(10)

$$I_4=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}\cos kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\mathrm{d}x$$

这里 $a>0,b>0,c>0,k>0$,m 是非负整数，$(m=0,1,2)$

证明. 由于：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos kx\mathrm{d}x+i\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin kx\mathrm{d}x$$

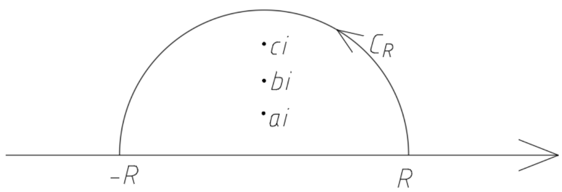
故：

$$\begin{aligned}I_4&=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}\cos kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}\cos kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}Re[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}e^{ikx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\mathrm{d}x]\end{aligned}\tag{112}$$

考虑积分：

$$I=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}e^{ikx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\mathrm{d}x\tag{113}$$

由于分母至少比分子高一次，且 $f(z)=\frac{z^{2m}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)(z^2+c^2)}$ 在实轴上没有孤立奇点，故积分存在。



取如图所示的积分路线，由实轴和半圆弧 C_R（原点为中心，半径为 R）构成，取 $R>max(a,b,c)$，C_R 包含 $f(z)$ 的所有位于上半平面的极点。这样，有：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{R\to+\infty}[\int_{-R}^{R}f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)e^{ikz}\mathrm{d}z]\tag{114}$$

对于充分大的 $|z|$，有：$|f(z)|<\frac{2}{|z|}$

因此，在半径充分大的 C_R 上，有：

$$\begin{aligned}&|\int_{C_R}f(z)e^{kiz}\mathrm{d}z\le\int_{C_R}|f(z)||e^{kiz}|\mathrm{d}s<\frac{2}{R}\int_{C_R}e^{-ky}\mathrm{d}s\\&=2\int_0^{\pi}e^{-kR\sin\theta}\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-kR\sin\theta}\mathrm{d}\theta\le4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-kR(2\theta/\pi)}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{kR}(1-e^{-kR})\xrightarrow[R\to\infty]{}0\end{aligned}\tag{115}$$

故

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)e^{ikz}\mathrm{d}z\to0$$

由于 $f(z)$ 有三个一级极点 $z=ai,z=bi,z=ci$，由留数定理：

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\oint_C f(z)e^{ikz}\mathrm{d}z\\&=\pi i(Res[f(z)e^{ikz},ai]+Res[f(z)e^{ikz},bi]+Res[f(z)e^{ikz},ci])\\&=\pi i(\frac{x^{2m}e^{ikz}}{(z+ai)(z^2+b^2)(z^2+c^2)}|_{z=ai}+\frac{x^{2m}e^{ikz}}{(z^2+a^2)(z+bi)(z^2+c^2)}|_{z=bi}+\frac{x^{2m}e^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)(z+ci)}|_{z=ci})\end{aligned}\tag{116}$$

其中：

$$\begin{aligned}\pi i\frac{x^{2m}e^{ikz}}{(z+ai)(z^2+b^2)(z^2+c^2)}|_{z=ai}&=\pi i\frac{(ai)^{2m}e^{ikai}}{2ai(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\\&=\pi i\frac{(ai)^{2m-1}e^{-ak}}{2(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\\&=\frac{\pi e^{-ak}a^{2m-1}(-1)^m}{2(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\end{aligned}\tag{117}$$

同理，

$$I=(-1)^m\pi(\frac{e^{-ak}a^{2m-1}}{2(b^2-a^2)(c^2-a^2)}+\frac{e^{-bk}b^{2m-1}}{2(a^2-b^2)(c^2-b^2)}+\frac{e^{-ck}c^{2m-1}}{2(a^2-c^2)(b^2-c^2)})\tag{118}$$

$$\begin{aligned}I_4&=Re[I]=I\\&=(-1)^m\pi(\frac{e^{-ak}a^{2m-1}}{2(b^2-a^2)(c^2-a^2)}+\frac{e^{-bk}b^{2m-1}}{2(a^2-b^2)(c^2-b^2)}+\frac{e^{-ck}c^{2m-1}}{2(a^2-c^2)(b^2-c^2)})\end{aligned}\tag{119}$$

□

18.(10)

$$I_5=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x$$

这里 $n\in N,a>0,\quad b,c\in R,ac-b^2>0,m\leq n-1,m$ 是非负整数

证明. 首先进行换元变换：

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})\\&=a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}]\\&=a(t^2+r^2)\\&(t=x+\frac{b}{2a},\quad r=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a})\end{aligned}\tag{120}$$

从而：

$$\begin{aligned}I_5&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-\frac{b}{2a})^{2m}}{a^n(t^2+r^2)^n}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a^nr^{2n-2m-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(u-\frac{b}{2ar})^{2m}}{(u^2+1)^n}\mathrm{d}u\\&(u=\frac{t}{r})\end{aligned}\tag{121}$$

考虑积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(u-\frac{b}{2ar})^{2m}}{(u^2+1)^n}\mathrm{d}u$$

在上半平面有 n 级极点 $u=i$，与题 15 求解方式同理，由留数定理，有：

$$\begin{aligned}I&=2\pi iRes[\frac{(z-\frac{b}{2ar})^{2m}}{(z^2+1)^n},i]\\&=2\pi i\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\frac{(z-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}})^{2m}}{(z+i)^n}\quad(2ar=\sqrt{4ac-b^2})\end{aligned}\tag{122}$$

同理，利用莱布尼茨高阶导数公式展开，有：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\frac{(z-\frac{b}{2ar})^{2m}}{(z+i)^n}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}[\frac{\mathrm{d}^{n-1-k}}{\mathrm{d}z^{n-1-k}}((z-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}})^{2m})\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(z+ri)^{-n}]\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}(n-k-1)!\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}k!(2i)^{-n-k}(i-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}})^{2m-n+1+k}(-1)^k\end{aligned}\tag{123}$$

注意到 $n-1>2m$ 时，$(z-\frac{b}{2ar})^{2m}$ 项求 $\geq 2m+1$ 阶导数后为零，故上式在此时应修正为：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-\frac{b}{2ar})^{2m}(z+ri)^{-n}|_{z=ri}\\&=\sum_{k=n-1-2m}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}(n-k-1)!\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}k!(2i)^{-n-k}(i-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}})^{2m-n+1+k}(-1)^k\end{aligned}\tag{124}$$

因而，$n-1\leq 2m$ 时，将阶乘与组合数相消，整理得：

$$\begin{aligned}I&=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}(n-k-1)!\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}k!(2i)^{-n-k}(i-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}})^{2m-n+1+k}(-1)^k\\&=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}(-1)^k(i-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}})^{2m-n+1+k}}{(2i)^{n+k}}\end{aligned}\tag{125}$$

故所求积分：

$$I_5=\frac{2\pi}{a^nr^{2n-2m-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}(-1)^k(i-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}})^{2m-n+1+k}}{(2i)^{n+k}}\tag{126}$$

$n-1\geq 2m$ 时：

$$I_5=\frac{2\pi}{a^nr^{2n-2m-1}}\sum_{k=n-1-2m}^{n-1}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}(-1)^k(i-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}})^{2m-n+1+k}}{(2i)^{n+k}}\quad=\frac{2\pi}{}\tag{127}$$

其中，$r=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

□

19.(10)

$$I_6=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n(x^2+b^2)^n}\mathrm{d}x$$

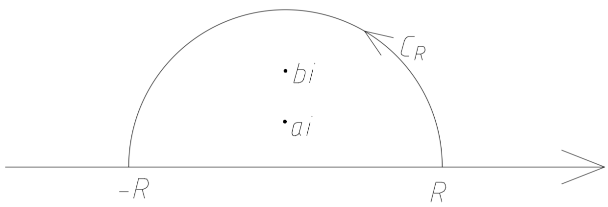
这里 $a>0,b>0,n\in N,m\leq 2n-1$,$m$ 是非负整数

证明.

$$
\begin{aligned}
I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n(x^2+b^2)^n}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n(x^2+b^2)^n}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} \frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n(x^2+b^2)^n}\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{128}
$$

由于 $f(z) = \frac{z^{2m}}{(z^2+a^2)^n(z^2+b^2)^n}$ 在实轴上无孤立奇点，且分母比分子至少高两次，故积分存在。

与题 15 同理，可求得 $f(z)$ 在上半平面有 n 级极点 $z = ai, z = bi$。



取如图所示的积分路线，由实轴和半圆弧 C_R（原点为中心，半径为 R）构成，取 $R > max(a,b)$，C_R 包含 $f(z)$ 的所有位于上半平面的极点。这样，有：

$$
\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to+\infty}[\int_{-R}^{R} \frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n(x^2+b^2)^n}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{z^{2m}}{(z^2+a^2)^n(z^2+b^2)^n}\mathrm{d}z] \tag{129}
$$

与题 14 同理：

$$
\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{z^{2m}}{(z^2+r^2)^n}\mathrm{d}z \to 0
$$

由留数定理：

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\oint_C f(z)\mathrm{d}z \\
&= \pi i(Res[\frac{z^{2m}}{(z^2+a^2)^n(z^2+b^2)^n}, ai] + Res[\frac{z^{2m}}{(z^2+a^2)^n(z^2+b^2)^n}, bi])
\end{aligned}
\tag{130}
$$

结合式 (**??**)，有：

$$
\begin{aligned}
&\pi i Res[f(z), ai] \\
&= \frac{\pi i}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(\frac{z^{2m}}{(z+ai)^n}\frac{1}{(z^2+b^2)^n}) \\
&= \frac{\pi i}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\frac{\mathrm{d}^{n-1-k}}{\mathrm{d}z^{n-1-k}}(\frac{z^{2m}}{(z+ai)^n})\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}((z^2+b^2)^{-n}) \\
&= \frac{\pi i}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\frac{(2ai)^k(-1)^k\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}(k!)}{(b^2-a^2)^{n+k}} \\
&(\sum_{j=0}^{n-1-k}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1-j}\mathrm{C}_{n-1-k}^{j}(n-k-1-j)!\mathrm{C}_{n-1-k-j}^{n-1-k}(j)!(ai)^{2m-2n+2k+1}(-1)^j}{2^{n-k+j}}) \\
&= \pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2^k)a^{2m-2n+3k+1}(i)^{2m-2n+k+2}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}}{(b^2-a^2)^{n+k}}(\sum_{j=0}^{n-1-k}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1-j}\mathrm{C}_{n-1-k+j}^{n-1-k}(-1)^j}{2^{n-k+j}}) \\
&= \pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2^k)a^{2m-2n+3k+1}(i)^{2m-2n+k}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}}{(a^2-b^2)^{n+k}}(\sum_{j=0}^{n-1-k}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1-j}\mathrm{C}_{n-1-k+j}^{n-1-k}(-1)^j}{2^{n-k+j}})
\end{aligned}
\tag{131}
$$

同理：

$$
\begin{aligned}
&\pi iRes[f(z),bi]\\
&=\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2^k)b^{2m-2n+3k+1}(i)^{2m-2n+k}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}}{(b^2-a^2)^{n+k}}(\sum_{j=0}^{n-1-k}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1-j}\mathrm{C}_{n-1-k+j}^{n-1-k}(-1)^j}{2^{n-k+j}})
\end{aligned} \tag{132}
$$

故：

$$
I_6=\pi\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{2^k(a^{2m-2n+3k+1}-b^{2m-2n+3k+1})(i)^{2m-2n+k}\mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1}}{(a^2-b^2)^{n+k}}(\sum_{j=0}^{n-1-k}\frac{\mathrm{C}_{2m}^{n-k-1-j}\mathrm{C}_{n-1-k+j}^{n-1-k}(-1)^j}{2^{n-k+j}})] \tag{133}
$$

□