问题二答案：比赛规则问题及提示

问题：甲、乙两人进行某项比赛，设每局比赛甲胜的概率为 p，乙胜的概率为 q (q=1-p)，且比赛独立进行，求在下列比赛规则下甲获胜的概率：

（1）2n+1 局 n+1 胜制。

（2）谁先胜 n 局谁获胜。

（3）甲在乙胜m局之前先胜 n 局则甲获胜，乙在甲胜 n 局之前先胜m局则乙获胜。

（4）谁比对方多胜 2 局谁获胜。

（5）谁比对方多胜 n 局谁获胜。

（6）甲比乙多胜 n 局甲获胜，乙比甲多胜m局乙获胜。

（7）谁先胜 n 局谁获胜，但如果出现 n-1 比 n-1，则这以后谁比对方多胜m局谁就获胜。

（8）谁先胜 n 局谁获胜，但如果出现 n-1 比 n-1，则比赛重新开始。

结论 *A*：进行某种独立重复的试验，每次试验成功的概率为 p（0<p<1)，失败的概率为 q (q=1-p)，问在m次失败之前取得 n 次成功的概率是多少？

答案：$p=\sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{k} p^{k} q^{n+m-1-k}=\sum_{k=n}^{n+m-1} C_{k-1}^{n-1} p^{n} q^{k-n}$

简要解答：(1)(2) 为 (3) 的特例，而 (3) 即为结论 A 的问题。故

(1) $p_1=\sum_{k=n+1}^{2n+1} C_{k-1}^{n} p^{n+1} q^{k-n-1}$；

(2) $p_2=\sum_{k=n}^{2n-1} C_{k-1}^{n-1} p^{n} q^{k-n}$；

(3) $p_3=\sum_{k=n}^{n+m-1} C_{k-1}^{n-1} p^{n} q^{k-n}$；

(4) 以前两局中甲胜几局为“条件”分析，用全概率公式即得

$$p_4=\frac{p^2}{1-2pq}$$

(5) 首步分析法，考虑 $q_j=P$(甲已经比乙多胜 n-j 局时甲获胜)，$j=0,1,2,\cdots 2n$

用首步分析法列出 q_j 的差分方程来求解。

$$q_j=pq_{j-1}+qq_{j+1}$$
$$q_0=1;\quad q_{2n}=0$$

$$p_5=q_n=\begin{cases}\dfrac{p^n}{p^n+q^n}, & p\neq q\\ \dfrac{1}{2}, & p=q\end{cases}$$

（6）类似（5）

$$p_6=\begin{cases}\dfrac{p^n(q^m-p^m)}{q^{n+m}-p^{n+m}}, & p\neq q\\ \dfrac{m}{m+n}, & p=q\end{cases}$$

（7）甲可能在出现 n-1 比 n-1 之前获胜，也可能在出现 n-1 比 n-1 之后获胜，故

$$p_7=\sum_{k=n}^{2n-2}C_{k-1}^{n-1}p^nq^{k-n}+C_{2n-2}^{n-1}p^{n-1}q^{n-1}\frac{p^m}{q^m+p^m}$$

（8）分三种“情况”讨论，

$A=\{$在前 $k(n\leq k\leq 2n-2)$ 局中甲胜 n 局$\}$

$B=\{$出现 n-1 比 n-1$\}$

$C=\{$在前 $k(n\leq k\leq 2n-2)$ 局中乙胜 n 局$\}$

$P(A)=\sum_{k=n}^{2n-2}C_{k-1}^{n-1}p^nq^{k-n}$ ， $P(B)=C_{2n-2}^{n-1}p^{n-1}q^{n-1}$

用全概率公式可推得

$$p_8=\frac{P(A)}{1-P(B)}=\frac{\sum_{k=n}^{2n-2}C_{k-1}^{n-1}p^nq^{k-n}}{1-C_{2n-2}^{n-1}p^{n-1}q^{n-1}}$$