问题一

问题 1：桥牌中的一手牌，其牌型分布为 4-3-3-3，4-4-3-2 和 5-4-2-2 的可能性哪个最大，哪个最小？

问题 2：某种牌子的促销产品中均包含一张卡片，k 张不同的卡片组成一套，假定取到任一特定卡片的机会等于取到任何其他卡片的机会，求消费者随机购买 $N > k$ 件促销产品时找到至少一整套卡片的概率。

问题 3：将 m 个球随机放入 n（n 不超过 m）个盒子中，在考虑球为可分辨和不可分辨这两种情况下，试分别求出 n 个盒子都有球的概率？

问题 4：一条绳子被任意割成两段，求较长的一段不小于较短的一段的 n 倍的概率。

问题 5：将一段长棍随机地分成三段，问这三段能搭成一个三角形的概率。

补充阅读与思考：

事件序列的极限

设$\{A_n\}$为样本空间Ω中的事件序列，

定义$\{A_n\}$的上极限为：$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega : \forall n \in N, \exists k \ge n, s.t. \omega \in A_k\}$；

$\{A_n\}$的下极限为：$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

（注：文字的表述方式见问题 6 的（1））

如果$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，则称事件序列$\{A_n\}$的极限存在，记为$\lim_{n\to\infty} A_n$，即

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

问题 6：试证明

（1）$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{\omega : \omega\text{属于无穷多个}A_n\};$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{\omega : \omega\text{属于几乎一切}A_n\} = \{\omega : \omega\text{不属于}A_n\text{中的有限个}\}$；

（2）$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$；

（3）$(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n)^c = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c$，$(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)^c = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c$；

（4）$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{若}\{A_n\}\text{单调增}; \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{若}\{A_n\}\text{单调减}. \end{cases}$

问题 7：设 $A_n=\begin{cases}B, & 若n=even;\\ C, & 若n=odd.\end{cases}$ 求集列$\{A_n\}$的上极限和下极限。

问题 8：设 $A_{2n-1}=(0,\frac{1}{n}), A_{2n}=(0,n), n=1,2,\cdots,$ 试求集列$\{A_n\}$的上极限和下极限.

有关排列组合的基本问题：

公式 1：n 个不同元素取 m 个的排列数为 A_n^m.

公式 2：n 个不同元素取 m 个的组合数为 C_n^m.

公式 3：{ k_1个a_1，k_2个$a_2,\cdots$，k_r个a_r 共 n 个元素所作的排列数}

={n 个不同的元素分成各含 k_1个，k_2个，$\cdots$，k_r个 的 r 个有序组的组合数}=$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$.

公式 4：{m 个不同的元素分成 n 个有序组（每组数目不限）的组合数}

={n 种元素允许任意重复取 m 个的排列数}=n^m.

公式 5：{m 个同样的元素分成 n 个有序组（每组数目不限）的组合数}

={n 种元素允许任意重复取 m 个的组合数}={不定方程$\sum_{i=1}^{n}x_i=m$的非负整数解的数目}

=$C_{m+n-1}^{n-1}=C_{m+n-1}^{m}$.

公式 6：n 个不同元素取 m 个的圆排列数为$\frac{A_n^m}{m}$.

统计物理中的三个不同模型的简介：

问题 9：

n 个质点落入 N 个盒子中（$n<N$），在以下三种假设下求

（1） 在某指定的 n 个盒子中各落入一个质点的概率 p;

（2） 在某 n 个盒子中各落入一个质点的概率 q.

假设 A:（Bolzman 模型）盒子和盒子看成是有区别的，质点和质点也看成是有区别的；

假设 B:（Bose-Einstein 模型）盒子之间看成是有区别的，质点之间看成是没有区别的，即不同的落法之间的区别仅在于落入各盒子中质点的数目，而不论落入那几个质点；

假设 C:（Fermi-Dirac 模型）盒子之间看成是有区别的，质点之间看成是没有区别，但每个盒子不得落入多于一个质点。

概率的连续性问题

问题 10：试证明以下结论。

结论：设 P 为定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的满足 $P(\Omega)=1$且具有有限可加性的非负实值集合函数，

则下列条件等价：

（1）P 具有可数可加性（即 P 为概率测度）；

（2）P 具有上连续性（见教材）；

（3）P 具有下连续性（见教材）；

（4）P 在 ϕ 处连续，即若 $A_n \in \mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，$A_n \supset A_{n+1}$ 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$，则 $\lim_{n\to\infty} P(A_n)=0$；

（5）P 具有连续性，即若 $A_n \in \mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$ 且 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在，则 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$.

示性函数问题

Ω 为一给定的非空集，$A \subset \Omega$，则称函数 $I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ 为集合 A 的示性函数。

问题 11：证明如下结论

结论：

（1）$A \subset B \Leftrightarrow I_A(x) \le I_B(x), \forall x \in \Omega$；

（2）$I_{\bigcup_i A_i}(x) = \max_i I_{A_i}(x), \forall x \in \Omega$；$I_{\bigcap_i A_i}(x) = \min_i I_{A_i}(x), \forall x \in \Omega$；

（3）$I_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} I_{A_n}(x)$，$I_{\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} I_{A_n}(x)$.

问题 12（Borel-Cantelli 引理）：若 $A_n \in \mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，**证明**

（1）**如果** $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$，**则** $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0$

（2）如果 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 相互独立，且 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$，则 $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 1$。

（Hint：利用 $1-x \le e^{-x}, x \ge 0$）