|  |
| --- |
| **清华大学本科生考试试题专用纸**  考试课程 微积分A1 A卷 2021年11月07日 8:00-10:00  系名 班级 姓名 学号  **一、填空题（每个空3分，共10题）（请将答案直接填写在答题卡相应横线上！）**   1. 。   答案：  解析：本题考查数列的极限。  。   1. 。   答案：  解析：本题考查函数极限、洛必达法则。  当时，分子、分母的极限均为0。故。   1. 。   答案：  解析：本题考查常用极限、洛必达法则。  。   1. 设，则的间断点为 。   答案：  解析：本题考查函数的极限、函数的连续和间断。  设。则。  ①当时，，。  ②当时，，。  ③当时，，。  因此，。有可去间断点。   1. 已知可导，且，，则 。   答案：  解析：本题考查函数的极限，导数的定义。  设，则。  错解：由于，当时，分子、分母的极限均为0。  。  错误原因：在处不一定连续。   1. 设，则 。   答案：  解析：本题考查微分的计算。  由得  故，代入即可。   1. 曲线在点的切线方程为 。   答案：  解析：本题考查导数的几何意义。  由得，时，故过点的切线方程为。   1. 设二阶可导，记，则 。   答案：3  解析：本题考查函数的极限，导数的定义。     1. 。   答案：  解析：本题考查函数的极限、泰勒公式。    而，故原极限等于。   1. 设为正整数，，则 。   答案：  解析：本题考查高阶导数。  ，，，，……，归纳可知（）。故。  **二、解答题（每题10分，共7题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）**   1. 设。   （Ⅰ）求值，使得为可导函数；  （Ⅱ）此时是否为二阶可导函数？写出理由。  （Ⅰ）解 由题可知，，。  要使为可导函数，只需，即。  （Ⅱ）解 当时，，  。  因为，所以此时不是二阶可导函数。   1. 求。   解 当时，分子、分母的极限均为0。且。     1. 设，其反函数满足在，求，。   解 由得，  又，故。    故。   1. 已知曳物线的参数方程为，其中，。为曳物线上一点，为曳物线在的切线，设与轴的交点为，求证线段长度为常数。   证明 由题可知，，。  设点对应的参数为，则切线斜率，故切线倾斜角。  所以，为常数。   1. 求，的值，使得函数当时达到可能的最高阶无穷小量，并求此无穷小量的阶。   解 在处的带皮亚诺余项的6阶泰勒展开式为    令，。解得，。  此时在处，。  故，时，函数在时达到最高阶无穷小量，阶数为6。   1. （Ⅰ）设，证明数列收敛；   （Ⅱ）设，求。  （Ⅰ）证明 首先证明不等式。  由两边取对数得，，即。  由均值不等式，  两边取倒数得。即数列单调递减。又因为，故。  两边取对数得。因此原不等式成立。  因为，所以单调递减。  因为，所以，  即，有下界0。  所以数列收敛。  （Ⅱ）解 由（Ⅰ）知，数列收敛。设。则。故。    所以  （注：不能利用代入得到答案，因为没有证明该泰勒级数的和函数仍是）   1. （Ⅰ）设在点可导，令，证明：；   （Ⅱ）求。  （Ⅰ）证明 由题可知，    （注：不能在此处直接取极限得到答案）  因为在点可导，所以，，使得当时，有    取，则当时，有。  故，  因此当时，，  即，存在，使得时，    因为，所以取极限可知当充分大时，    所以。  （Ⅱ）解 设，。。由（Ⅰ）知，    所以。 |