**一.绪论**

模型误差:数学模型与实际问题之间出现的误差

观测误差:温度\长度等参量观测产生的误差

截断误差/方法误差:近似解与精确解之间的误差

舍入误差/计算误差/存储误差:计算机字长有限

**误差与有效数字**:  
:绝对误差,相对误差

有效数字带来的误差:

多元函数误差估计

**数值计算基本原则:**

1.选择数值稳定性好的公式；2.防止被除数远>除数;3.防止相近的数相减;4.防止大数吃小数;5.简化计算步骤。算法的数值稳定性:在计算中舍入误差不增长。

病态问题:输入数据微小扰动,输出相对误差很大。

问题本身固有不受算法影响.相对误差比值

迭代法:,忽略高阶小量,表示后带回

**二.插值**

**多项式插值模型**

定理:在[a,b]上满足的插值多项式存在唯一

证明:a系数组成范德蒙德行列式A,互异

**拉格朗日插值**

****

其中，线性插值基函数

令

**插值余项(方法误差):**

插值余项:

*令*

**均差与牛顿插值**

一阶:

二阶:

K:

**牛顿插值公式**



**插值余项**:

当选用附近插值节点

**等距节点的牛顿插值公式**

前插

后插

**埃尔米特插值**

,

个方程个未知数存在且唯一

构造法:

**

误差余项:

**分段低次插值**

分段线性插值:把[a,b]分为n个子区间,分别在区间上进行线性插值，

分段埃尔米特插值:两点三次埃尔米特

**三次样条插值:**插值函数二次可导,均分为n个区间,每个区间内求三次多项式,共4n个未知量。已知区间左右原\一阶导\二阶导,加2个边界条件。求解思路:假定，由埃米尔特,利用和边界条件来求。插值误差:

**三.最佳逼近**

**维尔斯特拉斯定理:** 在上连续，则存在多项式使得两者差的绝对值小于任意常数

**最佳一致逼近：**，若存在,则称为最佳一致逼近

**切比雪夫定理:**是的最佳一致逼近，则与在上至少有n+2个正负详见的偏差点

推论1：若,则存在唯一使得

推论2：若是最佳一致逼近，则是的插值多项式。

计算方法：依据正负相间、距离相等列方程组求解

**切比雪夫多项式：**

**用法**:先归到[-1,1]，是仅比高1次的多项式,

对应系数相等求解。

定义：

性质1：

性质2：是n次多项式，首项系数为，奇偶性与n一致

性质3：在,，轮流取最大值1和最小值-1

性质4：上有n个零点

性质5：切比雪夫多项式在带权正交

**最小零偏差多项式定理:**

与零偏差最小，且

**拉格朗日插值函数余项的极小化:**寻找最佳一致逼近多项式=寻找插值节点；,当插值节点时,为最小零偏差多项式,

**区间变换**;

**最佳平方逼近：**

权函数

*,*

**定义**:设有

最佳平方逼近，

**最佳平方逼近的求解：**

令

均方误差

**按正交多项式展开:**

是正交多项式组,

均方误差

**按切比雪夫多项式展开**

,

,

误差:

既可以看作的n次最佳平方逼近多项式,也可以看作它的近似最佳一直逼近多项式

**按勒让得多项式展开:**

首项系数

记首项系数为1的勒让得多项式为

权函数

奇次奇,偶次偶；n次多项式有n个零点；在所有最高次系数为1的n次多项式中与零函数平方误差最小

平方误差

**曲线拟合:**

对已知的在中求使

根据规律确定和权函数,求解

其中

**四.数值积分与微分**

梯形公式

矩形公式

其中,截断误差

**代数精度**:若关于次数的多项式，均能准确成立，那么该公式至少具有m次代数精度

具有形式的求积公式如果具有次代数精度，那么它一定是插值型,即

**牛顿-柯特斯公式**(用插值函数替代)

将区间平分n份，区间长度



*令*

则

**一阶梯形公式**:

**二阶辛普生公式**:，四阶柯特斯公式

时,C出现负值，渐趋无界,不适用

**精度**:阶数n为偶数时，牛顿-柯特斯公式至少有n+1次代数精度

**截断误差:**

梯形公式:,



所以 

辛普生公式

由于辛甫生具有三次代数精度,构造两点三次插值多项式H(x)

**复化求积公式**

将[a,b]等分，在每个区间上使用低阶牛顿-柯特斯公式

**复化梯形**



，所以,二阶收敛

**复化辛普生**



*,，*,四阶收敛

复化柯特斯公式,六阶收敛

**龙贝格算法和外推加速法**

**复化梯形公式的递推化**

即，

**龙贝格算法**

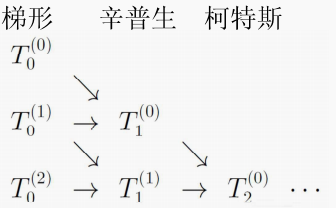
事后估计法:用的误差判断的误差

辛甫生公式:

复化辛甫生公式：

柯特斯公式6阶收敛

龙贝格公式,8阶收敛



**李察逊外推加速法**

表示二分k次的复化梯形公式

表示的m次加速结果

,每加速

一次收敛速度提高2阶。

**高斯求积公式**（插值节点可不等距）

如果选择,使具有2n+1次代数精度,该公式为高斯公式,为高斯点.本质上个未知参数对应个方程，一定是插值型。

**

当为次多项式时,,此时为次的多项式,且与正交。

若与所有次多项式正交,那么求积公式具有2n+1次代数精度高斯公式。

为次多项式,令则

取勒让德多项式,为次多项式,，而是正交多项式组

**高斯-勒让得公式:**取为的零点，有2n+1次代数精度。

**区间变换**:对于令

是零点,插值基函数的积分

**余项**:

构造次多项式满足

由

对于高斯-勒让德公式

**带权的高斯公式**

其中

高斯-切比雪夫:,取，插值节点为的零点,,

**数值微分**

用均差来近似导数,向前-向后-中间差商:

向前

向后

中间

用插值多项式近似即,等距离插值节点

误差

，

节点处误差

两点公式：

三点公式:中间差商公式

**五.常微分方程数值解**

数值积分法

数值微分法

**欧拉法**

**向前差商**

局部截断误差



累计误差

(这是近似结果)

记，则方法误差、舍入误差推导如下:

方法误差

舍入误差

**向后差商** 

隐性公式,另算

局部截断误差

**欧拉两步公式**

局部截断误差

累计误差

**改进欧拉法**

**梯形公式法**

移项使等式左边为y\_n+1右边为y\_n/x\_n/x\_n+1

**改进欧拉法**预测

校正

局部截断误差

记

方法累计误差



舍入累计误差



**龙格-库塔法**

在[]上多取几点,计算近似斜率,加权平均作区间平均斜率

通用公式

**二阶龙格库塔**

若要具有二阶精度

局部截断误差

**四阶龙格库塔**,四阶代数精度

**线性多步法**用插值多项式

**显性公式**

m=1时

**隐性公式**,

m=1时

截断误差积分公式误差

,显性

隐性 ,

,显性

隐性 ,

显性公式用于预测,隐性公式用于校正

**使用泰勒展开构造线性多步公式**

例

在处展开右侧各项，为了有更多的对应项，让系数相等来解。

**辛普生公式**,

**方程组与高阶方程**

一阶方程组:改写成，之后套用公式

高阶方程组:设化为一阶方程组

**边值问题的数值解法**:已知,求离散点的值,找离最近的近似或插值。例:,有。

**极值定理**:

y正最大值只可能

负最小值只可能;，方程解存在且唯一

**六.方程求根**

**迭代法**,核心是构造,可选

**收敛性**

1.设连续函数在上满足收敛。

2.设是的根,如果①在附近连续②,那么在附近具有局部收敛性。

例:如果求,构造,先确定区间,推出a范围,再根据的限制缩小范围/先利用求a范围,再找小邻域。

**收敛速度/误差分析**

,p阶收敛

满足定理1时,，,令有

事前估计:,通过事前估计预估K;

事后估计:是否小于阈值,通过时候估计调整K

**牛顿法**,二阶收敛

注:初始值要离近一些,可以用求一起始区间范围

**收敛性**1阶收敛

2阶收敛

在x\*处展开

一般非线性方程求根

牛顿法,。初始区间上有,所以,所以当时收敛。

**定理**,若在上不变号;()

那么牛顿迭代法收敛。

**牛顿下山法**

若,;否则,从1开始逐次减半尝试,直到。

**重根问题**

若是的多重根,分母,实际上*,*线性收敛

改良①令,须知道m,此时;②令则以为单根,对u做牛顿法。

**弦截法和抛物线法**

**弦截法**,用的根近似作为,相当于用代替

误差分析:

插值余项

所以 ,如果和在的邻域R:[]中,令则,取足够小,使,收敛,收敛速度则

假设

**抛物线法**用构造,把的根作为

其中,根式前与w同

**七.线性方程组的数值解Ax=b**

L主对角为0的下三角矩阵,U主对角为0的上三角矩阵,D对角阵

**高斯消去法**:A=LU，Ux=L^-1b

计算量:加减乘除，使用条件

或者各阶顺序主子式均不为0

**矩阵的三角分解**:若矩阵A的1到n-1阶顺序主子式不为0，A=LU

**直接法**:,即高斯消元

**追赶法**:三对角线方程组,第i行角标为i，从左到右为

L主对角线下次对角线,U主对角线1,上次对角线

**平方根法**:适用于对称正定矩阵,

三角分解

由分解唯一性故主对角矩阵,主对角线1,上三角;平方根法

改进平方根法

**范数**条件:矩阵范数:,称为与向量范数相容的矩阵范数。



列范数(列和的Max)与相容;

行范数(行和的Max)与相容;

与相容

**误差分析**

**扰动系数**带来的误差 

**舍入误差**事后估计法:如果为的一个近似解,为精确解,有,

所以

**条件数**，过大称A病态

**迭代法**:由

对角+下三角+上三角

**雅可比迭代法:**

**高斯-塞德尔迭代法(G-S)**

利用已计算出的来计算,

**迭代法的收敛性**

充要:越小收敛越快

充分:,是与向量相容的范数

充分:A时严格对角优势阵(每行中对角线元素最大)

充分:A正定对称,G-S收敛;

充要:A对称且对角线为正,Jacobi收敛

**构造法**:,注意使TA是上三角矩阵，甚至是对角形甚至对角线上的元在（0，2）中,使得||I-TA||<1

计算量:直接法迭代法

**逐次超松弛迭代法SOR**

收敛条件:且A正定对称

最佳值,是雅可比迭代矩阵

**迭代法事后估计法**

方法误差影响

舍入误差影响

**八.矩阵特征值求解**

瑞利商:

**特征值与特征向量**,即的根

是的特征值;是的特征值;若AB为相似矩阵(),AB特征值同；是的特征向量,则是A的特征向量

**幂法:**矩阵,是其线性无关的特征向量，特征值为,任取非零向量,假设,构造,后n-1项记作，则,收敛速度由决定。

实际计算时需要归一化处理防止λ大于1以至于溢出。

**反幂法：**特征向量特征值同幂法，则的特征值为：，对应特征为

**QR法：**非奇异矩阵,存在正交矩阵Q及上三角矩阵R,令，且当R对角线元素为正时，分解唯一。

令,则AB为相似矩阵，特征值相同，

设，特征值满足,特征向量构成的矩阵满足则本质上收敛域上三角矩阵，且在趋于无穷时，趋向于。