6.1 判断下列函数的定号性。

（a）

（b）

（c）

解：

（a）有正、负特征值，所以该函数不定号

（b）特征值均为负，所以此函数负定。

（c） 特征值均为正值，所以此函数为正定函数。

6.2 判断下列系统在原点处是否大范围渐近稳定，说明理由。

（a） （b）

解：

（a）令，可得原点为该系统的唯一平衡点；

在原点处进行线性化可得矩阵对应的特征值分别为：有正的特征值，所以该系统在原点处不是渐近稳定的，不是大范围渐近稳定。

（b）令可得原点不是该系统的唯一平衡点，所以原点处不能大范围渐近稳定。

6.3 判断下列系统在原点处的稳定性。

（a）

（b）

解：

（a） 令可得到系统的状态空间表达式如下

由状态空间方程可知原点为系统的唯一平衡点。

可以构造一个李雅普诺夫函数为，

所以该系统在原点处是稳定的。

（b）令可得到系统的状态空间表达式如下

由状态空间方程可知原点为系统的唯一平衡点。

可取，则对应的，沿轨线不恒为零，所以该系统在原点处是渐近稳定的。

6.4 判断下述系统在原点处的稳定性。

其中，为连续函数，与同号，且，。

解：令可得到系统的状态空间表达式如下

由状态空间方程可知原点为系统的唯一平衡点。

根据题设条件，构造一个李雅普诺夫函数为：。根据题设条件，该函数正定；则，所以系统在原点处渐近稳定。若当时，，则系统在原点处为大范围渐近稳定性。

6.5 判断下述系统在原点处的稳定性。

其中，，，。

解：利用克拉索夫斯基方法来解题。根据题意，原点是系统的一个平衡点；对应的雅可比矩阵为：，则为负定矩阵，所以是渐近稳定的。当时，有，所以原点是大范围渐近稳定的。

6.6 用克拉索夫斯基方法确定参数a和b的取值范围，保证下述系统在原点处大范围渐稳。

解：原点是系统的平衡点，系统对应的雅可比矩阵为

，

所以要求

负定，

可解出。

6.7 用变量梯度法判断下述系统在原点处的稳定性。

解：原点是系统唯一的平衡点；

设梯度向量

计算导函数

可以取，得

为负定函数，积分得为正定函数，检查可知满足梯度条件。是该系统的李雅普诺夫函数，因负定，所以原点是渐近稳定的。因,故该系统在原点处是大范围渐近稳定的。

6.8 判断下述系统在原点处的稳定性。

解：原点是系统的唯一平衡点。

在原点处对该状态方程进行线性化可得矩阵，其特征值分别为所以该系统在原点处渐近稳定。但不能根据线性化结果判断大范围渐近稳定性。

考虑如下函数：

其中和分别是和的偶正定函数。则

选取和满足

即

则

因此

故该系统在原点处大范围渐近稳定性。