§3.3. Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

3.3.1. Phát lớn hơn thu: $\left(\text{tức là } \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$

Khi thực hiện vận chuyển xong cho các trạm thu thì các phát còn tồn kho một lượng tổng cộng là $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Bài toán đặt ra là nên để trạm phát nào phải chịu tồn kho và tồn bao nhiêu thì tổng chi phí vận chuyển sẽ là thấp nhất.

Để giải quyết bài toán này ta thêm trạm thu thứ $n+1$ (gọi là trạm thu giả) với nhu cầu nhận về tượng trưng là $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, cước phí từ các trạm phát đến trạm thu giả là $c_{i,n+1} = 0$ $\forall\ i = \overline{1,m}$. Khi đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát. Áp dụng phương pháp dã biết ta tìm được phương án tối ưu của bài toán cân bằng, từ đó suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc: trạm phát nào phân hàng cho trạm thu giả thì trạm phát đó phải chịu tồn hàng.

* **<u>Chú ý 3.3.1</u>** : Nếu dùng phương pháp cước phí nhỏ nhất ta nên ưu tiên các ô thực trước đã, cuối cùng mới cân đối cho các ô giả.

* Ví dụ 3.3.1: Cho bài toán vận tải:

P \ T	100	120	90
120	10	9,5	14
120	8,5	8	10
130	12	9	12

a/ Viết dạng toán học của bài toán.
b/ Tìm phương án vận chuyển tối ưu.

* **<u>Giải</u>** : a/ - Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^{m} a_i = 370$; $\sum_{j=1}^{n} b_j = 310$, như vậy phát lớn hơn thu. Vì vậy các trạm thu được nhận đủ hàng, các trạm phát phải chịu tồn hàng.

- Gọi x_{ij} là lượng hàng từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j $\left(i = \overline{1,3}\ ;\ j = \overline{1,3}\right)$. Khi đó ta có mô hình toán học sau:

Tìm ma trận $\left(x_{ij}\right)_{3\times 3}$ sao cho:

$$f(X) = 10x_{11} + 9{,}5x_{12} + 14x_{13} + 8{,}5x_{21} + 8x_{22} + 10x_{23} + 12x_{31} + 9x_{32} + 12x_{33} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 120 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 130 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 90 \\ x_{ij} \ge 0\ \ \forall\ i = \overline{1,3}\ ;\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

b/ - Thêm trạm thu giả B_4 với nhu cầu nhận về tượng trưng là $b_4 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_j =$

$= 370 - 310 = 60$ đơn vị hàng, cước phí $c_{i4} = 0 \ \forall \ i = \overline{1,3}$. Khi đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát sau đây:

P \ T	100	120	90	60
120	10 $\boxed{100}$	9,5 /	14 /	0 $\boxed{20}$
120	8,5 /	8 $\boxed{120}$	10 /	0 /
130	12 /	9 /	12 $\boxed{90}$	0 $\boxed{40}$

- Tìm phương án cực biên ban đầu:

Dùng phương pháp cước phí nhỏ nhất, ta được phương án cực biên như ở bảng bên.

- Xác định tập ô cơ sở: Phương án cực biên ban đầu có 5 ô chọn, thiếu một ô so với hạng của bài toán cân bằng. Ta phải lấy thêm một ô loại bổ sung vào tập hợp 5 ô chọn cho đủ 6 ô không chứa vòng.

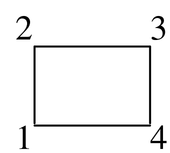
Lấy chẳng hạn ô (2,3) làm ô bổ sung, ta được tập ô cơ sở ban đầu là
$\mathscr{S}_1 = \{(1,1); (1,4); (2,2); (2,3); (3,3); (3,4)\}$.

- Xây dựng hệ thống thế vị: Dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall \ (i, j) \in \mathscr{S}_1$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng sau:

10 $\boxed{100}$	9,5 (0,5)	14 –	0 $\boxed{20}$	$u_1 = 0$
8,5 –	8 $\boxed{120}$	10 $\boxed{0}$	0 –	$u_2 = -2$
12 –	9 (1)	12 $\boxed{90}$	0 $\boxed{40}$	$u_3 = 0$
$v_1 = 10$	$v_2 = 10$	$v_3 = 12$	$v_4 = 0$	

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall \ (i, j) \notin \mathscr{S}_1$, ta thấy tập ô cơ sở $\mathscr{S}_1$ có hai ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (1,2) và (3,2).

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (3,2) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là



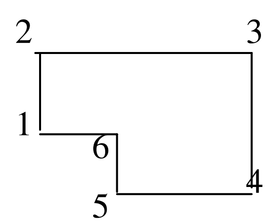
Lượng hàng điều chỉnh tối đa là $q_0 = \min\{x_{22}; x_{33}\} = \min\{120; 90\} = 90$.

- Điều chỉnh 90 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ hai sau đây:

10 $\boxed{100}$	9,5 –	14 –	0 $\boxed{20}$	$u_1 = 0$
8,5 (0,5)	8 $\boxed{30}$	10 $\boxed{90}$	0 –	$u_2 = -1$
12 –	9 $\boxed{90}$	12 –	0 $\boxed{40}$	$u_3 = 0$
$v_1 = 10$	$v_2 = 9$	$v_3 = 11$	$v_4 = 0$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_2$ có một ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là ô (2,1).

Lấy ô (2,1) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là
$q_0 = \min\{x_{11}; x_{34}; x_{22}\} = \min\{100; 40; 30\} = 30$.

Điều chỉnh 30 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ ta được phương cực biên thứ 3 sau:

10 70	9,5 –	14 –	0 50	$u_1 = 0$
8,5 30	8 –	10 90	0 –	$u_2 = -1,5$
12 –	9 120	12 –	0 10	$u_3 = 0$
$v_1 = 10$	$v_2 = 9$	$v_3 = 11,5$	$v_4 = 0$	

$\Delta_{ij} \le 0 \ \forall\, (i,j) \notin \mathcal{S}_3$, vì vậy phương án cực biên thứ 3 là phương án tối ưu của bài toán cân bằng:

$$\overline{X}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 70 & 0 & 0 & 50 \\ 30 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \text{phương án tối ưu của bài toán gốc là } X^* = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 90 \\ 0 & 120 & 0 \end{pmatrix},$$ theo phương án này thì trạm phát A_1 phải chịu tồn kho 50 đơn vị hàng; trạm phát A_3 phải chịu tồn kho 10 đơn vị hàng và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất: $f_{min} = 10.70 + 8,5.30 + 10.90 + 9.120 = 2935$ đơn vị giá trị.

3.3.2. Phát ít hơn thu: $\left(\text{tức là } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$

Khi vận chuyển hết hàng từ các trạm phát đến các trạm thu theo nhu cầu của các trạm thu thì các trạm thu còn thiếu một lượng hàng tổng cộng so với nhu cầu là $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Bài toán đặt ra là nên để trạm thu nào phải chịu thiếu hàng vào thiếu bao nhiêu thì tổng chi phí vận chuyển sẽ là nhỏ nhất.

Để giải quyết bài toán này, ta thêm trạm phát giả A_{m+1} với lượng hàng tượng trưng cần chuyển đi là $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, cước phí từ trạm phát giả đến các trạm thu là $c_{m+1,j} = 0 \ \forall\, j = \overline{1,n}$. Khi đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát.

Áp dụng phương pháp đã biết ta tìm được phương án tối ưu của bài toán cân bằng, từ đó suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc: Trạm thu nào nhận hàng của trạm phát giả thì trạm thu đó phải chịu thiếu hàng.

* **Ví dụ 3.3.2**: Cho bài toán vận tải:

P \ T	110	90	110
80	15	17	14
60	12	10	11
100	20	16	21

a/ Viết dạng toán học của bài toán.

b/ Tìm phương án vận chuyển tối ưu.

c/ Chứng minh bài toán có vô số phương án tối ưu. Tìm một phương án tối ưu không cực biên của bài toán.

* **<u>Giải</u>**: a/ - Kiểm tra điều kiện cân bằng: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 240;\ \sum_{j=1}^{3} b_j = 310$. Như vậy phát ít hơn thu, do đó các trạm phát tiêu thụ hết hàng, các trạm thu phải chịu thiếu hàng.

- Gọi x_{ij} là lượng hàng từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j $\left(i = \overline{1,3}\,;\ j = \overline{1,3}\right)$. Khi đó ta có mô hình toán học sau:

Tìm ma trận $(x_{ij})_{3\times 3}$ sao cho:

$$
\begin{array}{l}
f(X) = 15x_{11} + 17x_{12} + 14x_{13} + 12x_{21} + 10x_{22} + 11x_{23} + 20x_{31} + 16x_{32} + 21x_{33} \to \min \\
\begin{array}{rcl}
x_{11} + x_{12} + x_{13} & = & 80 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} & = & 60 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} & = & 100 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} & \le & 110 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} & \le & 90 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} & \le & 110 \\
x_{ij} \ge 0 \quad \forall\, i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3} & &
\end{array}
\end{array}
$$

b/ Thêm trạm phát giả A_4 với lượng hàng tượng trưng cần chuyển đi là $a_4 = \sum_{j=1}^{3} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i =$ 310 – 240 =70 đơn vị hàng, cước phí từ trạm phát giả đến các trạm thu là $c_{4j} = 0 \quad \forall\, j = \overline{1,3}$. Khi đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát sau đây:

P \ T	110	90	110
80	15 /	17 /	14 [80]
60	12 /	10 [60]	11 /
100	20 [70]	16 [30]	21 /
70	0 [40]	0 /	0 [30]

- Tìm phương án cực biên ban đầu: Dùng phương pháp "cước phí nhỏ nhất", ta được phương án cực biên như ở bảng bên.

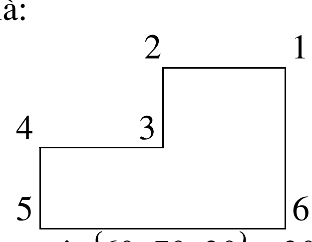
- Xác định tập ô cơ sở: phương án cực biên ban đầu có 6 ô chọn, số ô chọn đúng bằng hạng của bài toán cân bằng, do đó phương án cực biên ban đầu là phương án cực biên không suy biến. Vì vậy tập ô cơ sở duy nhất của phương án chính là tập ô chọn (kí hiệu là $\mathcal{S}_1$).

- Xây dựng hệ thống thế vị: Dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall\, (i,j) \in \mathcal{S}_1$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng sau:

P \ T	110	90	110	
80	15 –	17 –	14 [80]	$u_1 = 14$
60	12 (2)	10 [60]	11 (3)	$u_2 = 14$
100	20 [70]	16 [30]	21 –	$u_3 = 20$
70	0 [40]	0 –	0 [30]	$u_4 = 0$
	$v_1 = 0$	$v_2 =$ -4	$v_3 = 0$	

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall\, (i,j) \notin \mathcal{S}_1$, ta thấy tập ô cơ sở $\mathcal{S}_1$ có hai ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (2,1) và (2,3).

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (2,3) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



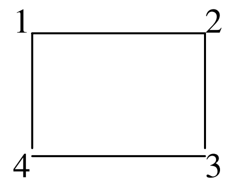
Lượng hàng điều chỉnh tối đa là $q_0 = \min\{x_{22}; x_{31}; x_{43}\} = \min\{60; 70; 30\} = 30$.

Điều chỉnh 30 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ hai như ở bảng sau:

15 (2)	17 –	14 $\boxed{80}$	$u_1 = 17$
12 (2)	10 $\boxed{30}$	11 $\boxed{30}$	$u_2 = 14$
20 $\boxed{40}$	16 $\boxed{60}$	21 –	$u_3 = 20$
0 $\boxed{70}$	0 –	0 –	$u_4 = 0$
$v_1 = 0$	$v_2 = -4$	$v_3 = -3$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_2$ có hai ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là ô (1,1) và ô (2,1).

Lấy ô (2,1) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là $q_0 = \min\{x_{22}; x_{31}\} = \min\{30; 40\} = 30$.

Điều chỉnh 30 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ ba sau đây:

15 =	17 –	14 $\boxed{80}$	$u_1 = 15$
12 $\boxed{30}$	10 –	11 $\boxed{30}$	$u_2 = 12$
20 $\boxed{10}$	16 $\boxed{90}$	21 –	$u_3 = 20$
0 $\boxed{70}$	0 –	0 –	$u_4 = 0$
$v_1 = 0$	$v_2 = -4$	$v_3 = -1$	

$\Delta_{ij} \le 0 \ \forall (i,j) \notin \mathscr{S}_3$, vì vậy phương án cực biên thứ 3 là phương án tối ưu của bài toán cân bằng:

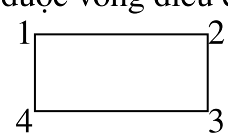
$$\overline{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 30 & 0 & 30 \\ 10 & 90 & 0 \\ 70 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{phương án tối ưu của bài toán}$$

gốc là $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 30 & 0 & 30 \\ 10 & 90 & 0 \end{pmatrix}$. Theo phương án này thì trạm thu B_1 phải chịu thiếu 70 đơn vị hàng và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất:

$f_{min} = 14.80 + 12.30 + 11.30 + 20.10 + 16.90 = 3450$ đơn vị giá trị.

c/ Ở bảng tối ưu của bài toán cân bằng, trong số các ô ngoài cơ sở có ô $(1,1)$ mà $\Delta_{11} = 0$. Lấy ô $(1,1)$ làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh như trong bảng sau:

15 =	17 –	14 $\boxed{80}$
12 $\boxed{30}$	10 –	11 $\boxed{30}$
20 $\boxed{10}$	16 $\boxed{90}$	21 –
0 $\boxed{70}$	0 –	0 –



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là $q_0 = \min\{x_{13}; x_{21}\} = \min\{80; 30\} = 30$

Theo bản chất kinh tế của số kiểm tra Δ_{ij}: nếu ta điều chỉnh một lượng hàng $q \in [0, q_0] = [0, 30]$ bất kỳ từ các ô chẵn sang các ô lẻ thì phương án mới thu được có tổng chi phí vận chuyển không đổi so với f_{min}. Vì vậy bài toán có vô số phương án tối ưu dạng:

$$\overline{X}(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 80-q \\ 30-q & 0 & 30+q \\ 10 & 90 & 0 \\ 70 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \forall\, q \in [0, 30] \Rightarrow \text{bài toán gốc có vô số phương án tối ưu dạng}$$

$$X(q)=\begin{pmatrix} q & 0 & 80-q \\ 30-q & 0 & 30+q \\ 10 & 90 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall\ q\in[0,30]$$

Với mọi $q\in(0,30)$ thì $X(q)$ là phương án tối ưu không cực biên của bài toán, chẳng hạn với $q=10$ ta được

$X(10)=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 70 \\ 20 & 0 & 40 \\ 10 & 90 & 0 \end{pmatrix}$ là một phương án tối ưu không cực biên của bài toán.

3.3.3 Phá vòng: Ứng với mỗi phương án không cực biên của một bài toán vận tải là ít nhất hai phương án cực biên, trong đó một phương án cực biên tương ứng tốt hơn, một phương án cực biên tương ứng xấu hơn.

Muốn tìm một phương án cực biên tương ứng tốt hơn của phương án không cực biên X của bài toán vận tải cân bằng thu phát, ta xét vòng tạo bởi các ô chọn của phương án X (vòng đó bao giờ cũng tồn tại)

Tách các ô của vòng thành hai nhóm ô xen kẽ nhau (*alternately*), nghĩa là nếu một ô là của nhóm này thì ô tiếp theo trên vòng phải là của nhóm kia.

Điều chỉnh một lượng hàng tối đa từ nhóm các ô có tổng cước phí lớn sang nhóm các ô có tổng cước phí nhỏ, khi đó phương án mới thu được X' có số ô chọn giảm được ít nhất là 1 so với phương án X.

Nếu X' là phương án cực biên thì nó chính là phương án cực biên tương ứng tốt hơn của phương án không cực biên X.

Nếu X' là phương án không cực biên thì ta lại khảo sát nó như đã khảo sát với X. Sau một số hữu hạn bước lập ta thu được phương án cực biên tương ứng tốt hơn của phương án không cực biên X. Các công việc như trên gọi là phá vòng.

* Ví dụ 3.3.3: Cho bài toán vận tải.

P \ T	20	75	110	70	45
90	20	19	15	16	8
80	13	11	12	14	9
50	12	10	11	6	13
100	24	18	18	19	7

a/ Chứng tỏ rằng ma trận $X_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 42 & 28 & 20 \\ 12 & 43 & 0 & 0 & 25 \\ 8 & 0 & 0 & 42 & 0 \\ 0 & 32 & 68 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là phương án không cực biên của bài toán đã cho.

b/ Xuất phát từ X_0, tìm lời giải của bài toán.

c/ Chứng minh bài toán có vô số phương án tối ưu. Tìm phương án tối ưu cực biên thứ hai.

<u>Giải</u>: a/

* Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát:

$\sum_{i=1}^{4} a_i = 320$; $\sum_{j=1}^{5} b_j = 320$, như vậy bài toán đã cân bằng thu phát $\Rightarrow$ các trạm phát tiêu thụ hết hàng, các trạm thu được nhận đủ hàng.

Ma trận X_0 có $\sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 90 = a_1 \Rightarrow$ trạm phát A_1 tiêu thụ hết hàng.

$\sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 80 = a_2 \Rightarrow$ trạm phát A_2 tiêu thụ hết hàng.

$\sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 50 = a_3 \Rightarrow$ trạm phát A_3 tiêu thụ hết hàng.

$\sum_{j=1}^{5} x_{4j} = 100 = a_4 \Rightarrow$ trạm phát A_4 tiêu thụ hết hàng.

$\sum_{i=1}^{4} x_{i1} = 20 = b_1 \Rightarrow$ trạm thu B_1 nhận đủ hàng.

$\sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 75 = b_2 \Rightarrow$ trạm thu B_2 nhận đủ hàng.

$\sum_{i=1}^{4} x_{i3} = 110 = b_3 \Rightarrow$ trạm thu B_3 nhận đủ hàng.

$\sum_{i=1}^{4} x_{i4} = 70 = b_4 \Rightarrow$ trạm thu B_4 nhận đủ hàng.

$\sum_{i=1}^{4} x_{i5} = 45 = b_5 \Rightarrow$ trạm thu B_3 nhận đủ hàng.

$$x_{ij} \geq 0 \ \ \forall \ i = \overline{1,4}\ ; \ \ j = \overline{1,5}$$

Như vậy X_0 là phương án của bài toán vận tải đã cho.

Các ô chọn của phương án X_0 có chứa vòng chẳng hạn

$V_1 = \{(1,3); (1,5); (2,5); (2,2); (4,2); (4,3)\}$ Vì vậy phương án X_0 không phải phương án cực biên của bài toán.

b/ Tách các ô của vòng trên làm 2 nhóm ô xen kẽ nhau:

nhóm 1: $V_1' = \{(1,3); (2,5); (4,2)\}$, nhóm này có tổng cước phí là 42,

nhóm 2: $V_1'' = \{(1,5); (2,2); (4,3)\}$, nhóm này có tổng cước phí là 37. Như vậy nhóm 2 tốt hơn nhóm 1. Điều chỉnh một lượng hàng tối đa từ các ô của nhóm 1 sang các ô của nhóm 2 là $q_0 = \min\{x_{13}, x_{25}, x_{42}\} = \min\{42; 25; 32\} = 25$, ta được phương án mới là:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 17 & 28 & 45 \\ 12 & 68 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 42 & 0 \\ 0 & 7 & 93 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Các ô chọn của phương án X_1 có chứa vòng chẳng hạn $V_2 = \{(1,3); (1,4); (3,4); (3,1); (2,1); (2,2); (4,2); (4,3)\} \Rightarrow$ phương án X_1 không phải phương án cực biên của bài toán.

Tách các ô của vòng này làm hai nhóm ô xen kẽ nhau: nhóm 1: $V_2' = \{(1,3); (3,4); (2,1); (4,2)\}$, nhóm này có tổng cước phí là 52;

nhóm 2: $V_2'' = \{(1,4); (3,1); (2,2), (4,3)\}$, nhóm này có tổng cước phí là 57.

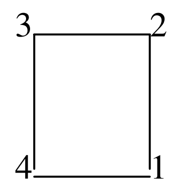
Như vậy nhóm 1 tốt hơn nhóm 2. Điều chỉnh một lượng hàng tối đa từ các ô của nhóm 2 sang các ô của nhóm 1 là $q_0 = \min\{x_{14}, x_{31}, x_{22}, x_{43}\} = \min\{28; 8; 68; 93\} = 8$, ta được phương án thứ ba là: $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 & 20 & 45 \\ 20 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 15 & 85 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Các ô chọn của phương án X_2 không chứa vòng $\Rightarrow$ phương án X_2 là phương án cực biên của bài toán và do đó nó là phương án cực biên tương ứng tốt hơn của phương án không cực biên X_0.

Phương án cực biên X_2 có 8 ô chọn, số ô chọn đúng bằng hạng của bài toán. Vì vậy phương án cực biên X_2 là phương án cực biên không suy biến $\Rightarrow$ tập ô cơ sở duy nhất của phương án chính là tập các ô chọn (ký hiệu là $\mathscr{S}_1$).

Nhập các số liệu của phương án cực biên X_2 vào bảng và giải tiếp như thông thường:

20 –	19 –	15 $\boxed{25}$	16 $\boxed{20}$	8 $\boxed{45}$	$u_1 = \mathbf{0}$
13 $\boxed{20}$	11 $\boxed{60}$	12 –	14 –	9 –	$u_2 = \mathbf{-4}$
12 –	10 –	11 –	6 $\boxed{50}$	13 –	$u_3 = \mathbf{-10}$
24 –	18 $\boxed{15}$	18 $\boxed{85}$	19 =	7 (4)	$u_4 = \mathbf{3}$
$v_1 = \mathbf{17}$	$v_2 = \mathbf{15}$	$v_3 = \mathbf{15}$	$v_4 = \mathbf{16}$	$v_5 = \mathbf{8}$	



Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_1$ có 1 ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là ô (4,5).

Lấy ô (4,5) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:

Lượng hàng điều chỉnh tối đa: $q_0 = \min\{x_{15}, x_{43}\} = \min\{45\ ;\ 85\} = 45$.

Điều chỉnh 45 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ hai sau đây:

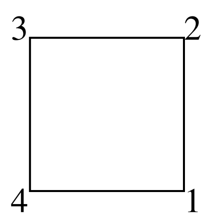
20 –	19 –	15 $\boxed{70}$	16 $\boxed{20}$	8 ×	$u_1 = \mathbf{0}$
13 $\boxed{20}$	11 $\boxed{60}$	12 –	14 –	9 –	$u_2 = \mathbf{-4}$
12 –	10 –	11 –	6 $\boxed{50}$	13 –	$u_3 = \mathbf{-10}$
24 –	18 $\boxed{15}$	18 $\boxed{40}$	19 =	7 $\boxed{45}$	$u_4 = \mathbf{3}$
$v_1 = \mathbf{17}$	$v_2 = \mathbf{15}$	$v_3 = \mathbf{15}$	$v_4 = \mathbf{16}$	$v_5 = \mathbf{4}$	

$\Delta_{ij} \le 0 \ \ \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S}_2 \quad \Rightarrow$ phương án cực biên thứ hai là phương án tối ưu của bài toán:

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 70 & 20 & 0 \\ 20 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 15 & 40 & 0 & 45 \end{pmatrix}$$

và $f_{min} = 3895$

c/ Ở tập ô cơ sở tối ưu, trong số các ô ngoài cơ sở, có ô $(4,4)$ mà $\Delta_{44} = 0$. Lấy ô $(4,4)$ làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



Lượng hàng điều chỉnh tối đa: $q_0 = \min\{40\ ;\ 20\} = 20 > 0$

Vì vậy bài toán có vô số phương án tối ưu.

Tập phương án tối ưu của bài toán:

$$X(q)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 70+q & 20-q & 0 \\ 20 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 15 & 40-q & q & 45 \end{pmatrix} \ \forall\, q\in[0,20] \ \Rightarrow\ X(20)=X_2^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \\ 20 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 15 & 20 & 20 & 45 \end{pmatrix}$$ là phương án tối ưu cực biên thứ hai của bài toán.

§3.4 Bài toán phân phối

3.4.1.Định nghĩa bài toán phân phối

Bài toán phân phối là bài toán quy hoạch tuyến tính có hệ ràng buộc giống như hệ ràng buộc của bài toán vận tải nhưng có yêu cầu cực đại hoá hàm mục tiêu.

Ở bài toán phân phối, ta sử dụng thuật ngữ "năng suất" thay cho thuật ngữ "cước phí", thuật ngữ "tổng doanh thu" thay cho thuật ngữ "tổng chi phí".

3.4.2.Cách giải bài toán phân phối:

* Kiểm tra điều kiện cân bằng và xử lý.
* Tìm phương án cực biên ban đầu:

a/ Phương pháp "năng suất cao nhất".

Trên bảng năng suất, tìm ô có năng suất cao nhất và phân vào ô đó một lượng hàng lớn nhất có thể được. Khi đó cũng sẽ có ít nhất một trong hai: dòng hoặc cột chứa ô đó đã thoả mãn nhu cầu. Xoá bỏ dòng hay cột đó đi và lặp lại thuật toán trên cho các ô còn lại, sau một số hữu hạn bước, ta thu được phương án cực biên của bài toán.

b/ Phương pháp Fogels.

Tính chênh lệch năng suất giữa hai ô có năng suất cao nhất của mỗi dòng và mỗi cột. Xét dòng hay cột có chênh lệch lớn nhất và phân vào ô có năng suất cao nhất của dòng hay cột đó (tiêu thức một) một lượng hàng lớn nhất có thể được, khi đó cũng sẽ có ít nhất một dòng hay cột thoả mãn nhu cầu, xoá bỏ dòng hay cột đó đi và tính lại chênh lệch năng suất cho các cột hay dòng còn lại. Lặp lại công việc trên sau một số hữu hạn bước lặp, ta thu được phương án cực biên của bài toán.

Nếu có nhiều dòng hay cột cùng có tiêu thức một như nhau, ta vẫn xét các ô có năng suất cao nhất của mỗi dòng hay cột đó và ưu tiên ô nào nằm trên cột hay dòng còn lại chứa nó có chênh lệch lớn nhất (tiêu thức hai).

Nếu lại có nhiều ô cùng tiêu thức hai như nhau thì ta xét trong chúng, ô nào có năng suất cao nhất (tiêu thức ba).

Nếu lại có nhiều ô cùng tiêu thức ba như nhau thì ta ưu tiên ô nào trong chúng có lượng hàng tối đa phân vào là lớn nhất.

* Xác định tập ô cơ sở.
* Lập hệ thống thế vị.
* Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Giả sử $\mathscr{S}$ là tập ô cơ sở của phương án cực biên X_0 của bài toán phân phối cân bằng thu phát:

- Nếu $\Delta_{ij}\geq 0\ \forall\,(i,j)\notin\mathscr{S}$ thì phương án cực biên X_0 là phương án tối ưu của bài toán phân phối đã cho. Tập ô cơ sở $\mathscr{S}$ như vậy được gọi là tập ô cơ sở tối ưu của bài toán phân phối đã cho.

- Nếu tồn tại (dù chỉ một) ô $(i,j)\notin\mathscr{S}$ có $\Delta_{ij}<0$ thì ta chưa kết luận được gì về phương án cực biên X_0. Tập ô cơ sở $\mathscr{S}$ như vậy không phải tập ô cơ sở tối ưu của bài toán (nếu phương án cực biên X_0 là phương án cực biên không suy biến thì trong trường hợp này, ta khẳng định được phương án X_0 không phải phương án tối ưu của bài toán).

* Điều chỉnh phương án: Nếu tồn tại ô $(i,j) \notin \mathscr{S}$ có $\Delta_{ij} < 0$ thì ta chọn ô (k,r) có $\Delta_{kr} = \min\{\Delta_{ij} < 0\}$ làm ô điều chỉnh. Các công việc còn lại giống như ở bài toán vận tải.

*Ví dụ3.4.1: Cho bài toán phân phối:

P \ T	100	200	150	140
150	17	19	14	12
200	23	15	16	10
200	18	20	19	19
150	24	19	13	18

a/ Tìm phương án tối ưu của bài toán phân phối này:

b/ Xét xem ma trận: $X = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 95 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 140 \\ 0 & 150 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có phải phương án cực biên tối ưu của bài toán phân phối đã cho hay không ?

* Giải: a/ - Kiểm tra điều kiện cân bằng: $\sum_{i=1}^{4} a_i = 700$; $\sum_{j=1}^{4} b_j = 590$, như vậy phát lớn hơn thu. Ta phải thêm trạm thu giả B_5 với nhu cầu nhận về tượng trưng là $\sum_{i=1}^{4} a_i - \sum_{j=1}^{4} b_j = 700 - 590 =$ $= 110$, năng suất $c_{i5} = 0 \ \forall \ i = \overline{1,4}$. Khi đó ta được bài toán phân phối cân bằng thu phát sau đây:

P \ T	100	200	150	140	110
150	17	19	14	12	0
200	23	15	16	10	0
200	18	20	19	19	0
150	24	19	13	18	0

* Tìm phương án cực biên ban đầu:

Dùng phương pháp Fogels, ta được phương án cực biên như ở bảng sau:

P \ T	100	200	150	140	110	
150	17 /	19 $\boxed{150}$	14 /	12 /	0 /	2,5×
200	23 $\boxed{100}$	15 $\boxed{50}$	16 /	10 /	0 $\boxed{50}$	7,1,5
200	18 /	20 /	19 $\boxed{150}$	19 $\boxed{50}$	0 /	1,1,1
150	24 /	19 /	13 /	18 $\boxed{90}$	0 $\boxed{60}$	5,1,1
	1×	1,1×	3,3×	1,1		

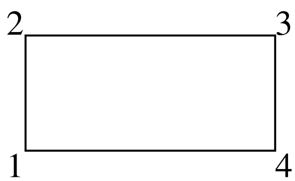
* Xác định tập ô cơ sở: phương án cực biên ban đầu có 8 ô chọn, số ô chọn đúng bằng hạng của bài toán cân bằng. Do đó tập ô cơ sở duy nhất của phương án chính là tập ô chọn.

- Xây dựng hệ thống thế vị: Dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall\ (i,j) \in \mathscr{S}_1$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng sau:

17 +	19 $\boxed{150}$	14 +	12 +	0 +	$u_1 = 4$
23 $\boxed{100}$	15 $\boxed{50}$	16 +	10 +	0 $\boxed{50}$	$u_2 = 0$
18 +	20 (-4)	19 $\boxed{150}$	19 $\boxed{50}$	0 +	$u_3 = 1$
24 (-1)	19 (-4)	13 +	18 $\boxed{90}$	0 $\boxed{60}$	$u_4 = 0$
$v_1 = 23$	$v_2 = 15$	$v_3 = 18$	$v_4 = 18$	$v_5 = 0$	

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S}_1$, ta thấy tập ô cơ sở $\mathscr{S}_1$ có ba ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (3,2), (4,1) và (4,2).

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (4,2) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là

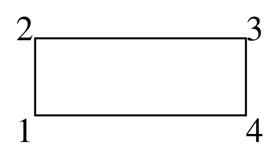
$q_0 = \min\{x_{22}; x_{45}\} = \min\{50; 60\} = 50$

Điều chỉnh 50 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ hai sau đây:

17 +	19 $\boxed{150}$	14 +	12 +	0 =	$u_1 = 0$
23 $\boxed{100}$	15 +	16 +	10 +	0 $\boxed{100}$	$u_2 = 0$
18 +	20 =	19 $\boxed{150}$	19 $\boxed{50}$	0 +	$u_3 = 1$
24 (-1)	19 $\boxed{50}$	13 +	18 $\boxed{90}$	0 $\boxed{10}$	$u_4 = 0$
$v_1 = 23$	$v_2 = 19$	$v_3 = 18$	$v_4 = 18$	$v_5 = 0$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_2$ có một ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là ô (4,1).

Lấy ô (4,1) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



Lượng hàng điều chỉnh tối đa $q_0 = \min\{x_{21}; x_{45}\} = \min\{100; 10\} = 10$.

Điều chỉnh 10 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ ba sau đây:

17 +	19 $\boxed{150}$	14 +	12 +	0 +	$u_1 = 1$
23 $\boxed{90}$	15 +	16 +	10 +	0 $\boxed{110}$	$u_2 = 0$
18 +	20 =	19 $\boxed{150}$	19 $\boxed{50}$	0 +	$u_3 = 2$
24 $\boxed{10}$	19 $\boxed{50}$	13 +	18 $\boxed{90}$	0 +	$u_4 = 1$
$v_1 = 23$	$v_2 = 18$	$v_3 = 17$	$v_4 = 17$	$v_5 = 0$	

$\Delta_{ij} \geq 0 \ \forall \ (i, j) \notin \mathscr{S}_3 \Rightarrow$ phương án cực biên thứ ba là phương án tối ưu của bài toán cân bằng:

$$\overline{X}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 150 & 50 & 0 \\ 10 & 50 & 0 & 90 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ phương án tối ưu của bài toán gốc là $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 50 \\ 10 & 50 & 0 & 90 \end{pmatrix}$

theo phương án này thì trạm phát A_2 phải tồn kho 110 đơn vị hàng và tổng doanh thu là cao nhất: $f_{max} = 19.150 + 23.90 + 19.150 + 19.50 + 24.10 + 19.50 + 18.90 = 11530$ đơn vị giá trị.

b/ Vì phát lớn hơn thu nên các trạm thu được nhận đủ hàng, các trạm phát phải chịu tồn hàng. Ma trận X đã cho có

$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 50 < a_1 = 150$ tức là trạm phát A_1 tồn kho 100 đơn vị hàng (1)

$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 195 < a_2 = 200$ (trạm phát A_2 tồn kho 5 đơn vị hàng) (2)

$\sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 195 < a_3 = 200$ (trạm phát A_3 tồn kho 5 đơn vị hàng) (3)

$\sum_{j=1}^{4} x_{4j} = 150 = a_4$ (trạm phát A_4 tiêu thụ hết hàng) (4)

$\sum_{i=1}^{4} x_{i1} = 100 = b_1$ (trạm thu B_1 nhận đủ hàng) (5)

$\sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 200 = b_2$ (trạm thu B_2 nhận đủ hàng) (6)

$\sum_{i=1}^{4} x_{i3} = 150 = b_3$ (trạm thu B_3 nhận đủ hàng) (7)

$\sum_{i=1}^{4} x_{i4} = 140 = b_4$ (trạm thu B_4 nhận đủ hàng) (8)

$x_{ij} \geq 0 \ \forall \ i = \overline{1,4}; \ j = \overline{1,4}$ (9)

Như vậy ma trận X đã cho là phương án của bài toán

Phương án X đã cho làm thoả mãn 15 ràng buộc chặt là (4), (5), (6), (7), (8) và $x_{11} = x_{13} = x_{14} = x_{22} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{43} = x_{44} = 0$, số ràng buộc chặt ít hơn số biến của bài toán. Vì vậy phương án X không phải là phương án cực biên của bài toán phân phối đã cho. Ứng với phương án đã cho thì tổng doanh thu là

$f(X) = 50.19 + 100.23 + 95.16 + 55.19 + 140.19 + 150.19 = 11325 < f_{max} = 11530 \Rightarrow$ phương án X không phải phương án tối ưu của bài toán.

* **Ví vụ 3.4.2**: Cho bài toán phân phối:

P \ T	25	10	18	22	23
35	29	23	19	14	15
28	24	23	20	15	12
10	26	24	17	23	21
25	30	25	18	29	29

a/ Tìm phương án tối ưu của bài toán phân phối đã cho.

b/ Phương án tối ưu tìm được có duy nhất không? Nếu không duy nhất, hãy tìm một phương án tối ưu không cực biên.

* **<u>Giải</u>**: a/ - Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^{4} a_i = 98$; $\sum_{j=1}^{5} b_j = 98$ như vậy bài toán đã cân bằng thu phát.

- Tìm phương án cực biên ban đầu: Dùng phương pháp “năng suất cao nhất”, ta được phương án cực biên như ở bảng sau:

P \ T	25	10	18	22	23
35	29 /	23 /	19 /	14 $\boxed{12}$	15 $\boxed{23}$
28	24 /	23 /	20 $\boxed{18}$	15 $\boxed{10}$	12 /
10	26 /	24 $\boxed{10}$	17 /	23 /	21 /
25	30 $\boxed{25}$	25 /	18 /	29 /	29 /

- Xác định tập ô cơ sở: Phương án cực biên ban đầu có 6 ô chọn, thiếu hai ô so với hạng của bài toán cân bằng. Ta phải lấy thêm hai ô loại bổ sung vào tập hợp 6 ô chọn cho đủ 8 ô không chứa vòng. Lấy chẳng hạn các ô (1,1) và (1,2) làm ô bổ sung, ta được tập ô cơ sở:

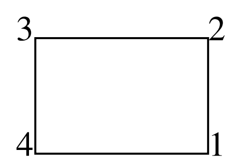
$\mathcal{S}_1 = \{(1,1); (1,2); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (3,2); (4,1)\}$.

- Xây dựng hệ thống thế vị: Dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall\ (i, j) \in \mathcal{S}_1$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng sau:

29 $\boxed{0}$	23 $\boxed{0}$	19 =	14 $\boxed{12}$	15 $\boxed{23}$	$u_1 = 0$
24 +	23 +	20 $\boxed{18}$	15 $\boxed{10}$	12 +	$u_2 = 1$
26 +	24 $\boxed{10}$	17 +	23 (-8)	21 (-5)	$u_3 = 1$
30 $\boxed{25}$	25 (-1)	18 +	29 (-14)	29 (-13)	$u_4 = 1$
$v_1 = 29$	$v_2 = 23$	$v_3 = 19$	$v_4 = 14$	$v_5 = 15$	

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall\ (i, j) \notin \mathcal{S}_1$, ta thấy tập ô cơ sở $\mathcal{S}_1$ có năm ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (3,4), (3,5), (4,2), (4,4) và (4,5).

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (4,4) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là



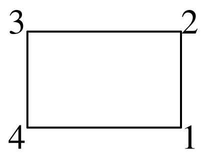
Lượng hàng điều chỉnh tối đa là: $q_0 = \min\{x_{14}; x_{41}\} = \min\{12; 25\} = 12$.

Điều chỉnh 12 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ hai sau đây:

29 / $\boxed{12}$	23 / $\boxed{0}$	19 / =	14 / ×	15 / $\boxed{23}$	$u_1 = 0$
24 / +	23 / +	20 / $\boxed{18}$	15 / $\boxed{10}$	12 / +	$u_2 = -13$
26 / +	24 / $\boxed{10}$	17 / +	23 / (-8)	21 / (-5)	$u_3 = 1$
30 / $\boxed{13}$	25 / (-1)	18 / +	29 / $\boxed{12}$	29 / (-13)	$u_4 = 1$
$v_1 = 29$	$v_2 = 23$	$v_3 = 33$	$v_4 = 28$	$v_5 = 15$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_2$ có bốn ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (3,4), (3,5), (4,2) và (4,5).

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (4,5) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là

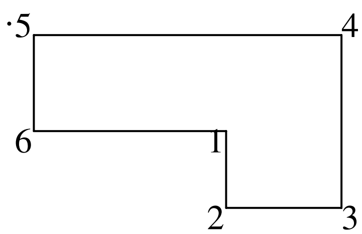


Lượng hàng điều chỉnh tối đa là: $q_0 = \min\{x_{15}; x_{41}\} = \min\{23; 13\} = 13$. Điều chỉnh 13 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ ta được phương án cực biên thứ hai sau đây:

29 / $\boxed{25}$	23 / $\boxed{0}$	19 / +	14 / +	15 / $\boxed{10}$	$u_1 = 0$
24 / +	23 / =	20 / $\boxed{18}$	15 / $\boxed{10}$	12 / +	$u_2 = 0$
26 / +	24 / $\boxed{10}$	17 / +	23 / (-7)	21 / (-5)	$u_3 = 1$
30 / ×	25 / +	18 / +	29 / $\boxed{12}$	29 / $\boxed{13}$	$u_4 = 14$
$v_1 = 29$	$v_2 = 23$	$v_3 = 20$	$v_4 = 15$	$v_5 = 15$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_3$ có hai ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (3,4) và (3,5).

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (3,4) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là:
$q_0 = \min\{x_{44}; x_{15}; x_{32}\} = \min\{12; 10; 10\} = 10$.

Điều chỉnh 10 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ tư sau đây:

29 / $\boxed{25}$	23 / $\boxed{10}$	19 / +	14 / +	15 / $\boxed{0}$	$u_1 = 0$
24 / +	23 / =	20 / $\boxed{18}$	15 / $\boxed{10}$	12 / +	$u_2 = 0$
26 / +	24 / ×	17 / +	23 / $\boxed{10}$	21 / +	$u_3 = 8$
30	25 / +	18 / +	29 / $\boxed{2}$	29 / $\boxed{23}$	$u_4 = 14$
$v_1 = 29$	$v_2 = 23$	$v_3 = 20$	$v_4 = 15$	$v_5 = 15$	

$\Delta_{ij} \ge 0 \ \forall (i,j) \notin \mathscr{S}_4 \Rightarrow$ phương án cực biên thứ tư là phương án tối ưu của bài toán:

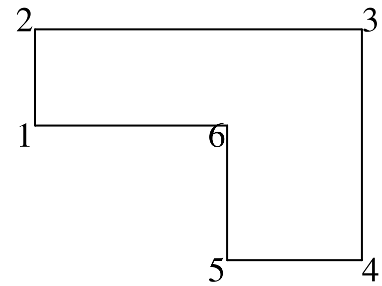
$$X^* = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 23 \end{pmatrix}$$

Theo phương án này thì tổng doanh thu là cao nhất:

$f_{max} = f(X^*) = 29.25 + 23.10 + 20.18 + 15.10 + 23.10 + 29.2 + 29.23 = 2420$ đơn vị giá trị.

b/ Ở bảng tối ưu, trong số các ô ngoài cơ sở có ô (2,2) mà $\Delta_{22} = 0$. Nếu lấy ô (2,2) làm ô điều chỉnh thì ta được vòng điều chỉnh như ở bảng sau:

29 $\boxed{25}$	23 $\boxed{10}$	19 +	14 +	15 $\boxed{0}$	$u_1 = 0$
24 +	23 =	20 $\boxed{18}$	15 $\boxed{10}$	12 +	$u_2 = 0$
26 +	24 ×	17 +	23 $\boxed{10}$	21 +	$u_3 = 8$
30	25 +	18 +	29 $\boxed{2}$	29 $\boxed{23}$	$u_4 = 14$
$v_1 = 29$	$v_2 = 23$	$v_3 = 20$	$v_4 = 15$	$v_5 = 15$	



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là $q_0 = \min\{x_{12}; x_{45}; x_{23}\} = \min\{10; 23; 10\} = 10 > 0$. Vì vậy bài toán có vô số phương án tối ưu dạng:

$$X(q) = \begin{pmatrix} 25 & 10-q & 0 & 0 & q \\ 0 & q & 18 & 10-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+q & 23-q \end{pmatrix} \quad \forall q \in [0, q_0] = [0,10]$$

$\forall\ q \in (0,10)$ thì $X(q)$ là phương án tối ưu không cực biên của bài toán, chẳng hạn với $q = 4$, ta được $X(4) = \begin{pmatrix} 25 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 19 \end{pmatrix}$ là một phương án tối ưu không cực biên của bài toán.

* **Ví vụ 3.4.3**: Cho bài toán phân phối:

P \ T	65	90	75	105
70	2	7	3	4
65	15	17	12	10
95	7	13	8	7
50	5	10	11	9
55	6	9	5	7

a/ Chứng tỏ rằng ma trận $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 0 & 30 \\ 40 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 50 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \\ 25 & 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$ là phương án không cực biên của bài toán đã cho.

b/ Xuất phát từ X_0, tìm phương án tối ưu của bài toán. Phương án tối ưu tìm được có duy nhất không?

Giải: a/ * Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát:

$\sum_{i=1}^{5} a_i = 335$; $\sum_{j=1}^{4} b_j = 335$, như vậy bài toán đã cân bằng thu phát $\Rightarrow$ các trạm phát tiêu thụ hết hàng, các trạm thu được nhận đủ hàng.

Ma trận X_0 có $\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 70 = a_1 \Rightarrow$ trạm phát A_1 tiêu thụ hết hàng.

$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 65 = a_2 \Rightarrow$ trạm phát A_2 tiêu thụ hết hàng.

$\sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 95 = a_3 \Rightarrow$ trạm phát A_3 tiêu thụ hết hàng.

$\sum_{j=1}^{4} x_{4j} = 50 = a_4 \Rightarrow$ trạm phát A_4 tiêu thụ hết hàng.

$\sum_{j=1}^{4} x_{5j} = 55 = a_5 \Rightarrow$ trạm phát A_4 tiêu thụ hết hàng.

$\sum_{i=1}^{5} x_{i1} = 65 = b_1 \Rightarrow$ trạm thu B_1 nhận đủ hàng.

$\sum_{i=1}^{5} x_{i2} = 90 = b_2 \Rightarrow$ trạm thu B_2 nhận đủ hàng.

$\sum_{i=1}^{5} x_{i3} = 75 = b_3 \Rightarrow$ trạm thu B_3 nhận đủ hàng.

$\sum_{i=1}^{5} x_{i4} = 105 = b_4 \Rightarrow$ trạm thu B_4 nhận đủ hàng.

$$x_{ij} \geq 0 \ \forall\ i = \overline{1,5}\ ;\ j = \overline{1,4}$$

Như vậy X_0 là phương án của bài toán phân phối đã cho.

Các ô chọn của phương án X_0 có chứa vòng chẳng hạn

$V = \{(1,2); (1,4); (2,4); (2,1); (5,1); (5,3); (3,3); (3,2)\}$ Vì vậy phương án X_0 không phải phương án cực biên của bài toán.

b/ Tách các ô của vòng trên làm 2 nhóm ô xen kẽ nhau (*alternately*):

nhóm 1: $V' = \{(1,2); (2,4); (5,1); (3,3)\}$, nhóm này có tổng năng suất là 31,

nhóm 2: $V'' = \{(1,4); (2,1); (5,3); (3,2)\}$, nhóm này có tổng năng suất là 37. Như vậy nhóm 2 tốt hơn nhóm 1. Điều chỉnh một lượng hàng tối đa từ các ô của nhóm 1 sang các ô của nhóm 2 là $q_0 = \min\{x_{12}, x_{24}, x_{51}, x_{33}\} = \min\{40; 25; 25, 45\} = 25$, ta được phương án mới:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 55 \\ 65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 55 & 0 \end{pmatrix},$$

các ô chọn của phương án này không chứa vòng$\Rightarrow$ phương án X_1 là phương án cực biên của bài toán và do đó nó là phương án cực biên tương ứng tốt hơn của phương án không cực biên X_0.

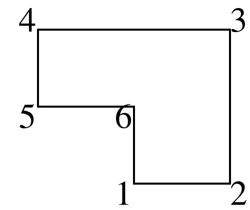
Phương án cực biên X_1 có 7 ô chọn, thiếu một ô so với hạng của bài toán cân bằng. Ta phải lấy thêm một ô loại bổ sung vào tập hợp 7 ô chọn cho đủ 8 ô không chứa vòng. Lấy chẳng hạn ô $(2,2)$ làm ô bổ sung, ta được tập ô cơ sở $\mathscr{S}_1 = \{(1,2); (1,4); (2,1); (2,2); (3,2); (3,3); (4,4); (5,3)\}$.

Dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \ \forall\ (i,j) \in \mathscr{S}_1$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng sau:

2 / +	7 / $\boxed{15}$	3 / (-1)	4 / $\boxed{55}$	$u_1 = 7$
15 / $\boxed{65}$	17 / $\boxed{0}$	12 / =	10 / +	$u_2 = 17$
7 / +	13 / $\boxed{75}$	8 / $\boxed{20}$	7 / +	$u_3 = 13$
5 / +	10 / +	11 / (-4)	9 / $\boxed{50}$	$u_4 = 12$
6 / +	9 / +	5 / $\boxed{55}$	7 / =	$u_5 = 10$
$v_1 = -2$	$v_2 = 0$	$v_3 = -5$	$v_4 = -3$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_1$ có 2 ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (1,3) và (4,3).

Lấy ô (4,3) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



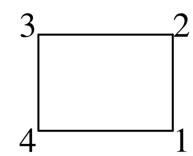
Lượng hàng điều chỉnh tối đa: $q_0 = \min\{x_{12}; x_{33}; x_{44}\} = \min\{15; 20; 50\} = 15$.

Điều chỉnh 15 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ hai sau đây:

2 / +	7 / +	3 / +	4 / $\boxed{70}$	$u_1 = 11$
15 / $\boxed{65}$	17 / $\boxed{0}$	12 / =	10 / =	$u_2 = 17$
7 / +	13 / $\boxed{90}$	8 / $\boxed{5}$	7 / (-1)	$u_3 = 13$
5 / +	10 / +	11 / $\boxed{15}$	9 / $\boxed{35}$	$u_4 = 16$
6 / +	9 / +	5 / $\boxed{55}$	7 / (-4)	$u_5 = 10$
$v_1 = -2$	$v_2 = 0$	$v_3 = -5$	$v_4 = -7$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_2$ có 2 ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (3,4) và (5,4).

Lấy ô (5,4) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



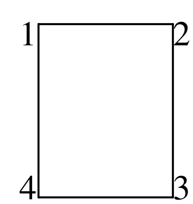
Lượng hàng điều chỉnh tối đa: $q_0 = \min\{x_{44}; x_{53}\} = \min\{35; 55\} = 35$.

Điều chỉnh 35 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ ba sau:

2 / +	7 / =	3 / (-1)	4 / $\boxed{70}$	$u_1 = 7$
15 / $\boxed{65}$	17 / $\boxed{0}$	12 / =	10 / +	$u_2 = 17$
7 / +	13 / $\boxed{90}$	8 / $\boxed{5}$	7 / +	$u_3 = 13$
5 / +	10 / +	11 / $\boxed{50}$	9 / +	$u_4 = 16$
6 / +	9 / +	5 / $\boxed{20}$	7 / $\boxed{35}$	$u_5 = 10$
$v_1 = -2$	$v_2 = 0$	$v_3 = -5$	$v_4 = -3$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_3$ có 1 ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là ô (1,3).

Lấy ô (1,3) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



Lượng hàng điều chỉnh tối đa $q_0 = \min\{x_{14}; x_{53}\} = \min\{70; 20\} = 20$.

Điều chỉnh 20 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ tư sau:

2 +	7 +	3 $\boxed{20}$	4 $\boxed{50}$	$u_1 = 8$
15 $\boxed{65}$	17 $\boxed{0}$	12 =	10 +	$u_2 = 17$
7 +	13 $\boxed{90}$	8 $\boxed{5}$	7 +	$u_3 = 13$
5 +	10 +	11 $\boxed{50}$	9 +	$u_4 = 16$
6 +	9 +	5 +	7 $\boxed{55}$	$u_4 = 11$
$v_1 = -2$	$v_2 = 0$	$v_3 = -5$	$v_4 = -4$	

$\Delta_{ij} \geq 0 \ \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S}_4 \Rightarrow$ phương án cực biên thứ tư là phương án tối ưu của bài toán phân phối đã cho

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 50 \\ 65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \end{pmatrix}$$

Theo phương án này thì $f_{max} = f(X^*) = 3380$ đơn vị giá trị.

Ở bảng tối ưu, nếu chọn ô bổ sung là (5,1) thì ta được cơ sở tối ưu $\mathscr{S}_5$ mà $\Delta_{ij} > 0 \ \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S}_5$. Vì vậy phương án tối ưu tìm được là duy nhất.

§3.5. Bài toán ô cấm

Trong sản xuất, lưu thông hàng hoá ta thường gặp tình huống nơi sản xuất có nhiều loại hàng. Do nhu cầu tiêu thụ hoặc do đặc tính của hàng hoá mà trạm thu B_j nào đó không thể nhận loại hàng $\mathscr{H}$ của trạm phát A_i nào đó, khi đó ô (i,j) được gọi là ô cấm đối với loại hàng $\mathscr{H}$ (hay là ô (i,j) bị cấm vận đối với loại hàng $\mathscr{H}$). Muốn tìm phương án tối ưu trong điều kiện như vậy, ta làm cho cước phí vận chuyển loại hàng $\mathscr{H}$ từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j trở nên rất lớn. Khi đó trong phương án vận chuyển tối ưu sẽ không có loại hàng $\mathscr{H}$ từ A_i đến B_j (vì nếu có thì tổng chi phí vận chuyển sẽ trở nên rất lớn, điều đó mâu thuẫn với mục tiêu cực tiểu hoá tổng chi phí vận chuyển). Trên bảng vận tải, ta cho cước phí $c_{ij} = M > 0$ đủ lớn.

* **<u>Chú ý 3.5.1</u>**: Nếu gặp bài toán có phát lớn hơn thu (tình huống xảy ra là các trạm phát phải chịu tồn hàng) mà trạm phát A_i nào đó phải được ưu tiên tiêu thụ hết hàng. Muốn tìm phương án tối ưu trong điều kiện như vậy, thì ta phải cấm vận ở ô giả thứ i (vì như ta biết: trạm phát nào phân hàng cho trạm thu giả thì trạm phát đó phải chịu tồn hàng, muốn cho trạm phát A_i được tiêu thụ hết hàng thì ta phải dùng biện pháp đảm bảo không cho hàng rơi vào ô giả thứ i): cho cước phí $c_{i,n+1} = M > 0$ đủ lớn.

* **<u>Chú ý 3.5.2</u>**: Nếu gặp bài toán có phát ít hơn thu (tình huống xảy ra là các trạm thu phải chịu thiếu hàng) mà trạm thu B_j nào đó phải được ưu tiên nhận đủ hàng. Muốn tìm phương án tối ưu trong điều kiện như vậy, thì ta phải cấm vận ở ô giả thứ j (vì như ta biết: trạm thu nào nhận hàng của trạm phát giả thì trạm thu đó phải chịu thiếu hàng, muốn cho trạm thu B_j được nhận đủ hàng thì ta phải dùng biện pháp đảm bảo không cho hàng rơi vào ô giả thứ j): cho cước phí $c_{m+1,j} = M > 0$ đủ lớn.

* **<u>Chú ý 3.5.3</u>**: Nếu gặp bài toán phân phối có ô cấm (i,j) thì ta cho năng suất $c_{ij} = -M$, trong đó M vẫn là số dương đủ lớn.

* **Ví dụ 3.5.1**: Trở lại ví dụ 3.3.1 với điều kiện trạm phát A_1 phải được ưu tiên tiêu thụ hết hàng.

a/ Viết dạng toán học của bài toán.

b/ Tìm phương án vận chuyển tối ưu.

* **<u>Giải</u>**: a/ Vẫn kiểm tra điều kiện cân bằng như trước, ta thấy phát lớn hơn thu. Vì vậy các trạm thu được nhận đủ hàng, các trạm phát phải chịu tồn hàng, nhưng riêng trạm phát A_1 phải được ưu tiên tiêu thụ hết hàng.

- Vẫn gọi x_{ij} như trước. Khi đó ta có mô hình toán học sau:

Tìm ma trận $(x_{ij})_{3\times 3}$ sao cho:

$$f(X) = 10x_{11} + 9,5x_{12} + 14x_{13} + 8,5x_{21} + 8x_{22} + 10x_{23} + 12x_{31} + 9x_{32} + 12x_{33} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 120 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 130 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 90 \\ x_{ij} \ge 0 \ \forall\, i = \overline{1,3}\,;\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

b/ - Vẫn thêm trạm thu giả B_4 như ở ví dụ 10.1, nhưng cước phí $c_{i4} = 0 \ \forall\, i \ne 1$, $c_{14} = M > 0$ đủ lớn. Khi đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát sau đây:

P \ T	100	120	90	60
120	10	9,5	14	M
120	8,5	8	10	0
130	12	9	12	0

- Tìm phương án cực biên ban đầu: Dùng phương pháp Fogels, ta được phương án cực biên như ở bảng sau:

P \ T	100	120	90	60	
120	10 [100]	9,5 [20]	14 /	M /	0,5;0,5;0,5
120	8,5 /	8 [30]	10 [90]	0 /	8;0,5;0,5
130	12 /	9 [70]	12 /	0 [60]	9;3×
	1,5;1,5	1;1,5	2;4×	0×	

- Xác định tập ô cơ sở: phương án cực biên ban đầu có 6 ô chọn, số ô chọn đúng bằng hạng của bài toán cân bằng, do đó phương án cực biên ban đầu là phương án cực biên không suy biến. Vì vậy tập ô cơ sở duy nhất của phương án chính là tập ô chọn của phương án (ký hiệu là $\mathscr{S}$).

- Xây dựng hệ thống thế vị: Dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall\, (i,j) \in \mathscr{S}$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng sau:

10 [100]	9,5 [20]	14 –	M –	$u_1 = 0{,}5$
8,5 =	8 [30]	10 [90]	0 –	$u_2 = -1$
12 –	9 [70]	12 –	0 [60]	$u_3 = 0$
$v_1 = 9{,}5$	$v_2 = 9$	$v_3 = 11$	$v_4 = 0$	

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall\, (i,j) \notin \mathscr{S}$, ta thấy tập ô cơ sở $\mathscr{S}$ có $\Delta_{ij} \le 0 \quad \forall\, (i,j) \notin \mathscr{S}_3$, vì vậy phương án cực biên ban đầu là phương án tối ưu của bài toán cân bằng:

$$\overline{X}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 90 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 60 \end{array}\right) \Rightarrow \text{phương án tối ưu của bài toán gốc là } X^* = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 \\ 0 & 30 & 90 \\ 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}$$, theo phương án này thì trạm phát A_3 phải chịu tồn kho 60 đơn vị hàng và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất: $f_{min} = 10.100 + 9{,}5.20 + 8.30 + 10.90 + 9.70 = 2960$ đơn vị giá trị.

* **Ví dụ 3.5.2**: Trở lại ví dụ 3.3.2 với điều kiện trạm thu B_1 phải được ưu tiên nhận đủ hàng.

a/ Viết dạng toán học của bài toán.

b/ Tìm phương án vận chuyển tối ưu.

* **<u>Giải</u>**: a/ Vẫn kiểm tra điều kiện cân bằng như trước, ta thấy phát ít hơn thu. Vì vậy các trạm phát tiêu thụ hết hàng,các trạm thu phải chịu thiếu hàng so với nhu cầu, nhưng riêng trạm thu B_1 phải được nhận đủ hàng.

- Vẫn gọi x_{ij} là lượng hàng từ trạm thu phát A_i đến trạm thu B_j $\left(i = \overline{1,3}\,;\, j = \overline{1,3}\right)$. Khi đó ta có mô hình toán học sau:

Tìm ma trận $\left(x_{ij}\right)_{3\times 3}$ sao cho:

$$\begin{aligned}
f(X) = 15x_{11} + 17x_{12} + 14x_{13} + 12x_{21} + 10x_{22} + 11x_{23} + 20x_{31} + 16x_{32} + 21x_{33} &\to \min \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 80 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 60 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 100 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 110 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &\le 90 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &\le 110 \\
x_{ij} \ge 0 \quad \forall\, i = \overline{1,3}\,;\, j = \overline{1,3}&
\end{aligned}$$

b/ Vẫn thêm trạm phát giả A_4 với lượng hàng tượng trưng cần chuyển đi là $a_4 = \sum_{j=1}^{3} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i$ = 310 – 240 =70 đơn vị hàng, cước phí từ trạm phát giả đến các trạm thu là $c_{4j} = 0 \quad \forall\, j \ne 1,\ c_{41} = M > 0$ đủ lớn. Khi đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát sau đây:

P \ T	110	90	110
80	15	17	14
60	12	10	11
100	20	16	21
70	M	0	0

P \ T	110	90	110	
80	15 $\boxed{40}$	17 /	14 0 $\boxed{40}$	1,2×
60	12 /	10 $\boxed{60}$	11 /	1×
100	20 $\boxed{70}$	16 $\boxed{30}$	21 /	4,4
70	M /	0 /	0 0 $\boxed{70}$	0×
	3,3,5	10,6,1	11,3,7×	

- Tìm phương án cực biên ban đầu: Dùng phương pháp Fogels, ta được phương án cực biên như ở bảng sau:

- Xác định tập ô cơ sở: phương án cực biên ban đầu có 6 ô chọn, số ô chọn đúng bằng hạng của bài toán cân bằng, do đó phương án cực biên ban đầu là phương án cực biên không suy biến. Vì vậy tập ô cơ sở duy nhất của phương án chính là tập ô chọn của phương án (kí hiệu là $\mathscr{S}_1$).

- Xây dựng hệ thống thế vị: Dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \ \ \forall\ (i, j) \in \mathscr{S}_1$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng sau:

P \ T	110	90	110	
80	15 $\boxed{40}$	17 –	14 $\boxed{40}$	$u_1 = 14$
60	12 (2)	10 $\boxed{60}$	11 (2)	$u_2 = 13$
100	20 $\boxed{70}$	16 $\boxed{30}$	21 –	$u_3 = 19$
70	M –	0 –	0 $\boxed{70}$	$u_4 = 0$
	$v_1 = 1$	$v_2 = -3$	$v_3 = 0$	

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \ \ \forall\ (i, j) \notin \mathscr{S}_1$, ta thấy tập ô cơ sở $\mathscr{S}_1$ có hai ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (2,1) và (2,3).

- Điều chỉnh phương án: Lấy chẳng hạn ô (2,1) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:

1 2

4 3

Lượng hàng điều chỉnh tối đa là: $q_0 = \min\{x_{22}; x_{31}\} = \min\{60; 70\} = 60$.

Điều chỉnh 60 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ hai như ở bảng sau:

15 $\boxed{40}$	17 $-$	14 $\boxed{40}$	$u_1 = 14$
12 $\boxed{60}$	10 $-$	11 $=$	$u_2 = 11$
20 $\boxed{10}$	16 $\boxed{90}$	21 $-$	$u_3 = 19$
M $-$	0 $-$	0 $\boxed{70}$	$u_4 = 0$
$v_1 = 1$	$v_2 = -3$	$v_3 = 0$	

$\Delta_{ij} \le 0 \ \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S}_2$, vì vậy phương án cực biên thứ 3 là phương án tối ưu của bài toán cân bằng:

$$\overline{X}^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 40 \\ 60 & 0 & 0 \\ 10 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ phương án tối ưu của bài toán gốc là: $$X^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 40 \\ 60 & 0 & 0 \\ 10 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

Theo phương án này thì trạm thu B_1 phải chịu thiếu 70 đơn vị hàng và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất: $f_{min} = 15.40 + 14.40 + 12.60 + 20.10 + 16.90 = 3520$ đơn vị giá trị.

* **Ví dụ 3.5.3**: Cho bài toán vận tải

P \ T	60	50	100	60
60	8	10	7	10
80	20	11	17	17
90	19	13	16	18
90	15	10	13	14

a/ Tìm phương án tối ưu với điều kiện trạm phát A_2 không được chuyển hàng cho trạm thu B_2.

b/ Tìm phương án tối ưu không điều kiện. Chứng minh bài toán có vô số phương án tối ưu.

c/ Tìm phương án tối ưu với điều kiện trạm phát A_3 phả i được ưu tiên tiêu thụ hết hàng.

* **<u>Giải</u>**: a/ - Kiểm tra điều kiện cân bằng: $\sum_{i=1}^{4} a_i = 320$; $\sum_{j=1}^{4} b_j = 270$, như vậy phát lớn hơn thu.

Ta phải thêm trạm thu giả B_5 với nhu cầu nhận về tượng trưng là $b_5 = \sum_{i=1}^{4} a_i - \sum_{j=1}^{4} b_j = 320 - 270 = 50$ đơn vị hàng, cước phí $c_{i5} = 0 \ \forall\ i = \overline{1,4}$, theo bài ra ta cho $c_{22} = M > 0$ đủ lớn. Khi đó ta được bài toán vận tải cân bằng thu phát sau đây:

P \ T	60	50	100	60	50
60	8	10	7	10	0
80	20	M	17	17	0
90	19	13	16	18	0
90	15	10	13	14	0

- Tìm phương án cực biên ban đầu: Dùng phương pháp Fogels, ta được phương án cực biên như ở bảng sau:

P \ T	60	50	100	60	50	
60	8 $\boxed{60}$	10 /	7 /	10 /	0 /	7,1×
80	20 /	M /	17 /	17 $\boxed{30}$	0 $\boxed{50}$	17,0,0,0
90	19 /	13 /	16 $\boxed{60}$	18 $\boxed{30}$	0 /	13,3,3,2
90	15 /	10 $\boxed{50}$	13 $\boxed{40}$	14 /	0 /	10,3,3,1×
	7×	0,3×	6,3,1×	4,3,1	0×	

- Xác định tập ô cơ sở: Phương án cực biên ban đầu có 7 ô chọn, thiếu một ô so với hạng của bài toán cân bằng. Ta phải lấy thêm một ô loại bổ sung vào tập hợp 7 ô chọn cho đủ 8 ô không chứa vòng. Lấy chẳng hạn ô (1,3) làm ô bổ sung, ta được tập ô cơ sở

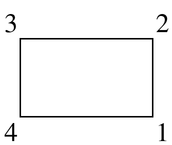
$$\mathscr{S}_1 = \{(1,1); (1,3); (2,4); (2,5); (3,3); (3,4); (4,2); (4,3)\}.$$

8 $\boxed{60}$	10 –	7 $\boxed{0}$	10 –	0 –	$u_1 = -8$
20 –	M –	17 –	17 $\boxed{30}$	0 $\boxed{50}$	$u_2 = 0$
19 –	13 =	16 $\boxed{60}$	18 $\boxed{30}$	0 (1)	$u_3 = 1$
15 –	10 $\boxed{50}$	13 $\boxed{40}$	14 (1)	0 –	$u_4 = -2$
$v_1 = 16$	$v_2 = 12$	$v_3 = 15$	$v_4 = 17$	$v_5 = 0$	

- Xây dựng hệ thống thế vị: Dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij}\ \ \forall\ (i,j) \in \mathscr{S}_1$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng bên.

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}\ \ \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S}_1$, ta thấy tập ô cơ sở $\mathscr{S}_1$ có hai ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là các ô: (3,5) và(4,4).

- Điều chỉnh phương án: Lấy chẳng hạn ô (3,5) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là: $q_0 = \min\{x_{25}; x_{34}\} = \min\{50; 30\} = 30$.

Điều chỉnh 30 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ hai sau đây:

8 $\boxed{60}$	10 –	7 $\boxed{0}$	10 –	0 –	$u_1 = -9$
20 –	M –	17 –	17 $\boxed{60}$	0 $\boxed{20}$	$u_2 = 0$
19 –	13 =	16 $\boxed{60}$	18 –	0 $\boxed{30}$	$u_3 = 0$
15 –	10 $\boxed{50}$	13 $\boxed{40}$	14 =	0 –	$u_4 = -3$
$v_1 = 17$	$v_2 = 13$	$v_3 = 16$	$v_4 = 17$	$v_5 = 0$	

$\Delta_{ij} \le 0\ \ \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S}_2$, vì vậy phương án cực biên thứ hai là phương án tối ưu của bài toán cân bằng:

$$\overline{X}_a^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 20 \\ 0 & 0 & 60 & 0 & 30 \\ 0 & 50 & 40 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

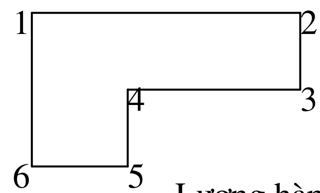
phương án tối ưu của bài toán gốc là:

$$X_a^* = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 50 & 40 & 0 \end{pmatrix}$$

Theo phương án này thì trạm phát A_2 phải tồn kho 20 đơn vị hàng, trạm phát A_3 phải tồn kho 30 đơn vị hàng và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất $f^a_{\min} = 8.60 + 17.60 + 16.60 + 10.50 + 13.40 = 3480$ đơn vị giá trị.

b/ Vẫn bài toán cân bằng như trước, nhưng cước phí $c_{22} = 11$. Lấy tập ô cơ sở $\mathscr{S}_2$ của phương án cực biên tối ưu ở câu a/ làm tập ô cơ sở ban đầu cho bài toán. Vì ô $(2,2) \notin \mathscr{S}_2$, nên hệ thống thế vị vẫn như trước, do vậy sự thay đổi của cước phí c_{22} chỉ làm ảnh hưởng đến Δ_{22}, khi đó $\Delta_{22} = 2 > 0$. Lấy ô (2,2) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:

8 $\boxed{60}$	10 –	7 $\boxed{0}$	10 –	0 –
20 –	11 (2)	17 –	17 $\boxed{60}$	0 $\boxed{20}$
19 –	13 =	16 $\boxed{60}$	18 –	0 $\boxed{30}$
15 –	10 $\boxed{50}$	13 $\boxed{40}$	14 =	0 –



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là:

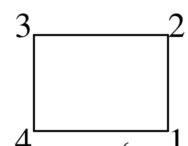
$$q_0 = \min\{x_{25};\, x_{33};\, x_{42}\} = \min\{20;\, 60;\, 50\} = 20$$

Điều chỉnh 20 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ ba sau đây:

8 $\boxed{60}$	10 –	7 $\boxed{0}$	10 =	0 –	$u_1 = -9$
20 –	11 $\boxed{20}$	17 –	17 $\boxed{60}$	0 –	$u_2 = -2$
19 –	13 =	16 $\boxed{40}$	18 (1)	0 $\boxed{50}$	$u_3 = 0$
15 –	10 $\boxed{30}$	13 $\boxed{60}$	14 (2)	0 –	$u_4 = -3$
$v_1 = 17$	$v_2 = 13$	$v_3 = 16$	$v_4 = 19$	$v_5 = 0$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_3$ có 2 ô vi phạm là các ô (3,4) và (4,4).

Lấy ô (4,4) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là:

$$q_0 = \min\{x_{24};\, x_{42}\} = \min\{60;\, 30\} = 30$$

Điều chỉnh 30 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ ta được phương án cực biên thứ tư sau đây:

8 $\boxed{60}$	10 –	7 $\boxed{0}$	10 –	0 –	$u_1 = -9$
20 –	11 $\boxed{50}$	17 –	17 $\boxed{30}$	0 =	$u_2 = 0$
19 –	13 –	16 $\boxed{40}$	18 –	0 $\boxed{50}$	$u_3 = 0$
15 –	10 –	13 $\boxed{60}$	14 $\boxed{30}$	0 –	$u_4 = -3$
$v_1 = 17$	$v_2 = 11$	$v_3 = 16$	$v_4 = 17$	$v_5 = 0$	

$\Delta_{ij} \le 0 \ \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S}_4$, vì vậy phương án cực biên thứ tư là phương án tối ưu của bài toán cân bằng:

$$\overline{X}_b^{\,*} = \left(\begin{array}{cccc|c} 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 60 & 30 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

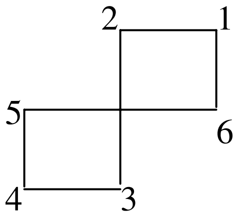
phương án tối ưu của bài toán gốc là:

$$X_b^{\,*} = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 30 \end{pmatrix}$$

Theo phương án này thì trạm phát A_3 phải tồn kho 50 đơn vị hàng và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất:

$f_{min}^{b} = 8.60 + 11.50 + 17.30 + 16.40 + 13.60 + 14.30 = 3380$ đơn vị giá trị.

- Ở bảng tối ưu, trong số các ô ngoài cơ sở có ô (2,5) mà $\Delta_{25} = 0$. Nếu lấy ô (2,5) làm ô điều chỉnh thì ta được vòng điều chỉnh như ở bảng trên.



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là:

$q_0 = \min\{x_{24}; x_{43}; x_{35}\} = \min\{30; 60; 50\} = 30 > 0$. Vì vậy bài toán cân bằng có vô số phương án tối ưu dạng:

$$\overline{X}(q) = \left(\begin{array}{cccc|c} 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 30-q & q \\ 0 & 0 & 40+q & 0 & 50-q \\ 0 & 0 & 60-q & 30+q & 0 \end{array}\right) \ \forall\, q \in [0, q_0] = [0,30] \Rightarrow$$ bài toán

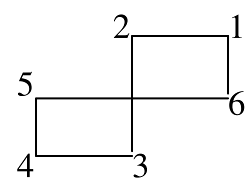
gốc có vô số phương án tối ưu dạng: $X(q) = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 30-q \\ 0 & 0 & 40+q & 0 \\ 0 & 0 & 60-q & 30+q \end{pmatrix} \ \forall\, q \in [0,30]$

c/ Lại bài toán cân bằng như ở ý b/, nhưng cước phí $c_{35} = M > 0$ đủ lớn. Lấy tập ô cơ sở $\mathscr{S}_4$ của phương án cực biên tối ưu ở câu b/ làm tập ô cơ sở ban đầu cho bài toán. Vì ô $(3,5) \in \mathscr{S}_4$, nên hệ thống thế vị thay đổi so với trước, tính lại hệ thống thế vị và $\Delta_{ij}\ \forall\,(i,j) \notin \mathscr{S}_4$, ta thấy tập ô cơ

8 60	10 –	7 0	10 –	0 (M–9)	$u_1 = -9$
20 –	11 50	17 –	17 30	0 (M)	$u_2 = 0$
19 –	13 –	16 40	18 –	M 50	$u_3 = 0$
15 –	10 –	13 60	14 30	0 (M–3)	$u_4 = -3$
$v_1 = 17$	$v_2 = 11$	$v_3 = 16$	$v_4 = 17$	$v_5 = M$	

sở $\mathscr{S}_4$ có 3 ô vi phạm là các ô (1,5); (2,5) và (4,5).

Lấy ô (2,5) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là



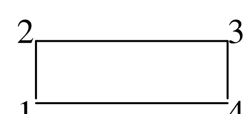
Lượng hàng điều chỉnh tối đa là: $q_0 = \min\{x_{24}; x_{43}; x_{35}\} = \min\{30; 60; 50\} = 30 > 0$.

Điều chỉnh 30 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ năm sau đây:

8 60	10 (M–8)	7 0	10 –	0 (M–9)	$u_1 = -9$
20 –	11 50	17 –	17	0 30	$u_2 = -M$
19 –	13 (M–2)	16 70	18 –	M 20	$u_3 = 0$
15 –	10 (M–2)	13 30	14 60	0 (M–3)	$u_4 = -3$
$v_1 = 17$	$v_2 = M+11$	$v_3 = 16$	$v_4 = 17$	$v_5 = M$	

Tập ô cơ sở $\mathscr{S}_5$ có 5 ô vi phạm là các ô (1,1); (1,5); (3.2); (4,2) và (4,5).

Lấy ô (3,2) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



Lượng hàng điều chỉnh tối đa là:

$q_0 = \min\{x_{22}; x_{35}\} = \min\{50; 20\} = 20$.

Điều chỉnh 30 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ sáu sau đây:

8 $\boxed{60}$	10 –	7 $\boxed{0}$	10 –	0 –	$u_1 = -7$
20 –	11 $\boxed{30}$	17 –	17 –	0 $\boxed{50}$	$u_2 = 0$
19 –	13 $\boxed{20}$	16 $\boxed{70}$	18 –	M –	$u_3 = 2$
15 –	10 =	13 $\boxed{30}$	14 $\boxed{60}$	0 –	$u_4 = -1$
$v_1 = 15$	$v_2 = 11$	$v_3 = 14$	$v_4 = 15$	$v_5 = 0$	

$\Delta_{ij} \le 0 \;\; \forall\, (i, j) \notin \mathscr{S}_6$, vì vậy phương án cực biên thứ sáu là phương án tối ưu của bài toán cân bằng:

$$\overline{X}_c^{\,*} = \left(\begin{array}{cccc|c} 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 60 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{phương án tối ưu của bài toán gốc là: } X_c^{\,*} = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 60 \end{pmatrix}$$

Theo phương án này thì trạm phát A_2 phải tồn kho 50 đơn vị hàng và tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất:

$f_{min} = 8.60 + 11.30 + 13.20 + 16.70 + 13.30 + 14.60 = 3420$ đơn vị giá trị.