CHƯƠNG III

BÀI TOÁN VẬN TẢI

§ 3.1 Khái niệm bài toán vận tải và tính chất của nó

3.1.1. Khái niệm bài toán vận tải

a/ Nội dung bài toán: Giả sử cần vận chuyển một loại hàng hoá từ m cơ sở sản xuất loại hàng đó : A_1 , A_2,. . . , A_m (gọi là các trạm phát) với lượng hàng cần chuyển đi lần lượt là a_1, a_2, . . . , a_m (đơn vị hàng) đến n nơi tiêu thụ loại hàng đó: B_1, B_2, . . . , B_n (gọi là các trạm thu) với nhu cầu nhận về lần lượt là b_1, b_2, . . . , b_n (đơn vị hàng). Giả thiết rằng $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (tức là tổng khả năng cung cấp bằng tổng nhu cầu tiêu thụ). Cước phí vận chuyển 1 đơn vị hàng từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j là c_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$.

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho các trạm phát tiêu thụ hết hàng, các trạm thu được nhận đủ hàng, đồng thời tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

b/ Mô hình toán học của bài toán:

Gọi x_{ij} là lượng hàng từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ khi đó ta có:

- Tổng chi phí vận chuyển là $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$
- Tổng lượng hàng từ trạm phát A_i đến các trạm thu là $\sum_{j=1}^{n} x_{ij},\ i = \overline{1,m}$.
- Tổng lượng hàng mà trạm thu B_j nhận được từ các trạm phát là $\sum_{i=1}^{m} x_{ij},\ j = \overline{1,n}$.

Vì $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ nên khi các trạm phát chuyển hết hàng cho các trạm thu theo nhu cầu của chúng thì các trạm thu cũng nhận đủ hàng so với nhu cầu. Theo bài ra ta có mô hình toán học sau đây:

Tìm ma trận $X = \left(x_{ij}\right)_{m\times n}$ sao cho: $f(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$ (3.1.1)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall\ i = \overline{1,m} \tag{3.1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall\ j = \overline{1,n} \tag{3.1.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \tag{3.1.4}$$

trong đó $c_{ij} \geq 0;\ a_i > 0;\ b_j > 0$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ là những hằng số thoả mãn

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = k \tag{3.1.5}$$

* Định nghĩa 3.1.1: Mô hình toán học (3.1.1) – (3.1.4); với điều kiện (3.1.5) được gọi là bài toán vận tải cân bằng thu phát.

Vì bài toán vận tải (3.1.1) – (3.1.4) cũng là bài toán quy hoạch tuyến tính nên ta vẫn dùng các khái niệm : phương án, phương án cực biên , phương án tối ưu như trước.

* Chú ý 3.1.1: – Nếu $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (tức là tổng khả năng cung cấp lớn hơn tổng nhu cầu tiêu thụ) thì các trạm phát phải chịu tồn hàng, các trạm thu được nhận đủ hàng. Khi đó các ràng buộc (3.1.2) trở thành: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad \forall\ i = \overline{1,m} \qquad (2')$

– Nếu $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (tức là tổng khả năng cung cấp nhỏ hơn tổng nhu cầu tiêu thụ) thì các trạm thu phải chịu thiếu hàng so với nhu cầu, các trạm phát tiêu thụ hết hàng. Khi đó các ràng buộc (3.1.3) trở thành $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_j \quad \forall\ j = \overline{1,n} \qquad (3')$.

Các mô hình toán học $(1),(2'),(3),(4)$ và $(1),(2),(3'),(4)$ được gọi là bài toán vận tải không cân bằng thu phát.

c/ **Dạng bảng của bài toán vận tải**: Ta biểu diễn bài toán vận tải dưới dạng một bảng hình chữ nhật mà phần chính gồm có m dòng và n cột: mỗi trạm phát A_i được diểu diễn trên dòng thứ i ($i = \overline{1,m}$); mỗi trạm thu B_j được biểu diễn trên cột thứ j ($j = \overline{1,n}$)

Ứng với mỗi cặp trạm phát A_i và trạm thu B_j là một ô ở dòng thứ i và cột thứ j , ký hiệu là ô (i,j). Ở ô (i,j), cước phí c_{ij} đặt ở góc tây-bắc, lượng hàng x_{ij} đặt ở góc đông-nam.

* Định nghĩa 3.1.2: Nếu trạm phát A_i chuyển hàng cho trạm thu B_j (tức là $x_{ij} > 0$) thì ô (i,j) được gọi là ô chọn.

Nếu trạm phát A_i không chuyển hàng cho trạm thu B_j (tức là $x_{ij} = 0$) thì ô (i,j) được gọi là ô loại.

* Định nghĩa 3.1.3: Một dãy các ô được đánh số từ 1 đến hết sẽ được gọi là dây nếu chúng thoả mãn đồng thời cả hai điều kiện:

1. Hai ô liên tiếp nhau phải cùng trên một dòng hoặc cùng trên một cột.
2. Ba ô liên tiếp nhau không cùng trên một dòng và không cùng trên một cột.

* Định nghĩa 3.1.4: Một dây khép kín (tức là ô cuối cùng phải cùng cột hoặc cùng dòng với ô đầu tiên) được gọi là một vòng.

* Định nghĩa 3.1.5: Một tập hợp các ô nào đó được gọi là có chứa vòng nếu từ tập hợp các ô đó có thể trích ra được một số các ô tạo thành vòng.

* Nhận xét 3.1.1: Một vòng bao giờ cũng có một số chẵn các ô.

3.1.2. Tính chất của bài toán vận tải

* Định lý 3.1.1: Bài toán vận tải bao giờ cũng có phương án tối ưu.

* Chứng minh: - Chứng tỏ bài toán vận tải có phương án:

Xét ma trận $X = (x_{ij})_{m \times n}$ có $x_{ij} = \dfrac{a_i . b_j}{k} \quad \forall\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ (3.1.6) với k được cho trong (3.1.5) . Vì $a_i > 0$, $b_j > 0$ với $\forall\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ nên $k > 0 \Rightarrow x_{ij} > 0\ \forall\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ (như vậy X đã thoả mãn (3.1.4)).

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{a_i b_j}{k} = \dfrac{a_i}{k} \sum_{j=1}^{n} b_j = \dfrac{a_i}{k} k = a_i \quad \forall i = \overline{1,m}$ (như vậy X đã thoả mãn (3.1.2)).

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{a_i b_j}{k} = \dfrac{b_j}{k} \sum_{i=1}^{m} a_i = \dfrac{b_j}{k} k = b_j \quad \forall j = \overline{1,n}$ (như vậy X đã thoả mãn (3.1.3))

Vì vậy ma trận $X = (x_{ij})_{m \times n}$ xác định theo (3.1.6) là một phương án của bài toán vận tải (3.1.1) – (3.1.4), tức là bài toán vận tải (3.1.1) – (3.1.4) có phương án.

- Chứng tỏ hàm mục tiêu f(X) bị chặn dưới:

Vì $c_{ij} \geq 0$ và $x_{ij} \geq 0$ $\forall i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$ nên $f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq 0$ với mọi phương án X tuỳ ý của bài toán (3.1.1) – (3.1.4), tức là hàm mục tiêu f(X) bị chặn dưới trong tập hợp các phương án của bài toán, chẳng hạn bởi số 0 .

Theo định lý 1.1.2 thì bài toán vận tải (3.1.1) – (3.1.4) bao giờ cũng có phương án tối ưu.

* Định lý 3.1.2: Phương án X_0 của bài toán vận tải cân bằng thu phát là phương án cực biên khi và chỉ khi tập hợp các ô chọn của phương án không chứa vòng

* Hệ quả 3.1.1: Phương án X của bài toán vận tải cân bằng thu phát là phương án không cực biên khi và chỉ khi tập hợp các ô chọn của phương án có chứa vòng.

* Định lý 3.1.3: Trên một bảng cấp n×m, số ô nhiều nhất không chứa vòng là $m + n - 1$.

Từ đó suy ra m + n ô tuỳ ý (hoặc nhiều hơn) bao giờ cũng chứa vòng.

Từ định lý 3.1.2 & định lý 3.1.3 suy ra: Một phương án cực biên của bài toán (3.1.1) – (3.1.4) chỉ có không quá $m + n - 1$ ô chọn. Do đó mọi phương án của bài toán trên có m + n ô chọn (hoặc nhiều hơn) đều là phương án không cực biên.

* Hệ quả 3.1.2: Một phương án cực biên của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1.1) – (3.1.4) có đúng $m + n - 1$ ô chọn là phương án cực biên không suy biến. Một phương án cực biên của bài toán cân bằng thu phát trên có ít hơn $m + n - 1$ ô chọn là phương án cực biên suy biến.

* Định lý 3.1.4: Với mỗi phương án cực biên của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1.1) – (3.1.4) đều có tương ứng ít nhất là một tập hợp gồm $m + n - 1$ ô không chứa vòng, trong đó phải có các ô chọn của phương án.

* Định nghĩa 3.1.6: Mỗi tập hợp các ô như trong định lý 3.1.4 đều được gọi là tập ô cơ sở của phương án cực biên tương ứng.

Như vậy một phương án cực biên không suy biến chỉ có một tập ô cơ sở , đó là tập ô chọn của phương án.

Một phương án cực biên suy biến có nhiều tập ô cơ sở. Muốn tìm tập ô cơ sở của phương án cực biên suy biến, ta lấy thêm một số ô loại bổ sung vào tập ô chọn của phương án cho đủ $m + n - 1$ ô, tập $m + n - 1$ ô nào không chứa vòng thì tập $m + n - 1$ ô đó là một tập ô cơ sở của phương án cực biên suy biến tương ứng. Các ô mới thêm vào như vậy được gọi là ô bổ sung.

Với tất cả các lý do trên nên ta gọi $m + n - 1$ là hạng của bài toán vận tải cân bằng thu phát tương ứng.

* Định lý 3.1.5: Với mỗi tập ô cơ sở của một phương án cực biên của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1.1) – (3.1.4), một ô ngoài cơ sở bất kỳ bao giờ cũng tạo với một số ô cơ sở một vòng duy nhất.

* Chứng minh: Ô ngoài cơ sở (i,j) cùng với $m + n - 1$ ô của tập ô cơ sở cho ta m + n ô, theo định lý 3.1.3 thì m + n ô này bao giờ cũng chứa vòng, ta chứng minh tiếp vòng tạo thành này là duy nhất.

Phản chứng: Giả sử ngược lại ô ngoài cơ sở (i,j) tạo với một số ô cơ sở hai vòng nào đó, chẳng hạn

Vòng thứ nhất gồm các ô $\{(i, j); (i, j_1); (i_1, j_1), (i_1, j)\}$; vòng thứ hai gồm các ô $\{(i, j), (i_2, j), (i_2, j_2), (i, j_2)\}$, ở hai vòng này, chỉ trừ ô (i,j), còn lại đều là những ô cơ sở. Ta nhận thấy các ô cơ sở $\{(i, j_1); (i_1, j_1), (i_1, j), (i_2, j), (i_2, j_2), (i, j_2)\}$ đã tạo thành một vòng, điều này mâu thuẫn với định lý 3.1.4 và định nghĩa 3.1.6. Mâu thuẫn đó chứng tỏ với mỗi tập ô cơ sở của một phương án cực biên của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1.1) – (3.1.4), một ô ngoài cơ sở bất kỳ bao giờ cũng tạo với một số ô cơ sở một vòng duy nhất.

* Chú ý 3.1.2: Một phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1.1) – (3.1.4) có $m+n-1$ ô chọn (hoặc ít hơn) không hẳn là phương án cực biên .

§ 3.2. Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải cân bằng thu phát

3.2.1. Phương pháp tìm phương án cực biên ban đầu

a/ Phương pháp "cước phí nhỏ nhất": Trên bảng vận tải, ta tìm ô có cước phí nhỏ nhất, phân vào ô đó một lượng hàng lớn nhất có thể được. Khi đó sẽ có ít nhất một dòng hay cột thoả mãn nhu cầu (tức là trạm phát hoặc trạm thu tương ứng đã tiêu thụ hết hàng hoặc đã nhận đủ hàng so với nhu cầu), xoá bỏ dòng hay cột đó đi và lặp lại công việc này đối với các ô còn lại, sau một số hữu hạn bước lặp ta thu được phương án cực biên của bài toán.

* Ví dụ 3.2.1: Cho bài toán vận tải:

P \ T	**150**	**120**	**120**	**100**	**120**
180	16	12	9	5	12
120	13	10	8	8	9
160	14	10	12	7	15
150	16	11	10	6	15

Tìm phương án cực biên của bài toán trên bằng phương pháp "cước phí nhỏ nhất"

* Giải:

Trên bảng vận tải, ta thấy ô $(1,4)$ có cước phí nhhỏ nhất là $c_{14}=5$. Phân vào ô đó một lượng hàng lớn nhất có thể được là $x_{14}=100$, khi đó trạm thu B_4 nhận đủ hàng, trạm thu A_1 còn 80 đơn vị hàng. Xoá bỏ cột 4 đi, lặp lại công việc trên sau một số hữu hạn bước lặp, ta thu được phương án cực biên của bài toán như ở bảng sau:

P \ T	**150**	**120**	**120**	**100**	**120**
180	16 /	12 /	9 /	5 [100]	12 [80]
120	13 /	10 /	8 [120]	8 /	9 /
160	14 [40]	10 [120]	12 /	7 /	15 /
150	16 [110]	11 /	10 /	6 /	15 [40]

Như vậy phương án cực biên thu được theo phương pháp cước phí nhỏ nhất là:

$$X_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 & 80 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 40 & 120 & 0 & 0 & 0 \\ 110 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

Theo phương án này thì tổng chi phí vận chuyển là:

$f(X_0)=5.100+12.80+8.120+14.40+10.120+16.110+15.40=6540$ đơn vị giá trị.

b- Phương pháp Fogels:

Trên bảng vận tải, ta tính chênh lệch cước phí giữa 2 ô có cước phí nhỏ nhất của mỗi dòng và mỗi cột. Xét dòng hay cột có chênh lệch lớn nhất và phân vào ô có cước phí nhỏ nhất của dòng hay cột đó (tiêu thức một) một lượng hàng lớn nhất có thể được, khi đó cũng sẽ có ít nhất một dòng hay cột thoả mãn nhu cầu, xoá bỏ dòng hay cột đó đi và tính lại chênh lệch cước phí cho các cột hay dòng còn lại. Lặp lại công việc trên sau một số hữu hạn bước lặp, ta thu được phương án cực biên của bài toán.

Nếu có nhiều dòng hay cột cùng có chênh lệch lớn nhất như nhau, ta vẫn xét các ô có cước phí nhỏ nhất của mỗi dòng hay cột đó và ưu tiên ô nào nằm trên cột hay dòng còn lại chứa nó có chênh lệch lớn nhất (tiêu thức hai).

Nếu lại có nhiều ô cùng tiêu thức hai như nhau thì ta xét trong chúng, ô nào có cước phí nhỏ nhất (tiêu thức ba)

Nếu lại có nhiều ô cùng tiêu thức ba như nhau thì ta ưu tiên ô nào có lượng hàng tối đa phân vào đó là lớn nhất.

* Ví dụ 3.2.2: Trở lại bài toán vận tải trên. Tìm phương án cực biên của bài toán bằng phương pháp Foghen

P \ T	**150**	**120**	**120**	**100**	**120**	
180	16 /	12 /	9 $\boxed{80}$	5 $\boxed{100}$	12 /	4,3,3×
120	13 /	10 /	8 /	8 /	9 $\boxed{120}$	0,1×
160	14 $\boxed{150}$	10 $\boxed{10}$	12 /	7 /	15 /	3,2,2,2
150	16 /	11 $\boxed{110}$	10 $\boxed{40}$	6 /	15 /	4,1,1,1
	1,2,2×	0,1,1	1,1,2×	1×	3×	

Như vậy phương án cực biên tìm được theo phương pháp Foghen là:

$$X'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 150 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 110 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Theo phương án này thì tổng chi phí vận chuyển là

$$f(X'_0) = 9.80 + 5.100 + 9.120 + 14.150 + 10.10 + 11.110 + 10.40 = 6110 < f(X_0) = 6540$$

$\Rightarrow$ phương án X'_0 tốt hơn phương án X_0.

Phương án cực biên X'_0 có 7 ô chọn, thiếu 1 ô so với hạng của bài toán cân bằng. Ta phải lấy thêm một ô loại bổ sung vào tập hợp 7 ô chọn cho đủ 8 ô không chứa vòng. Lấy chẳng hạn ô (2,3), ta được tập ô cơ sở: $\mathscr{S} = \{(1,3);(1,4);(2,3);(2,5);(3,1);(3,2);(4,2)(4,3)\}$.

3.2.2. Tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án của bài toán vận tải:

a/ Viết lại bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1.1) – (3.1.4) dưới dạng tường minh:

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min$$

$$\begin{array}{l}
x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots + x_{1n} = a_1 \\
x_{21} + x_{22} + \ldots\ldots + x_{2n} = a_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{m1} + x_{m2} + \ldots\ldots\ldots + x_{mn} = a_m \\
x_{11} + x_{21} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_{m1} = b_1 \\
x_{12} + x_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_{m2} = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_{mn} = b_n \\
x_{ij} \ge 0 \quad \forall \ i = \overline{1,m}\ ; \ j = \overline{1,n}
\end{array}$$

b/ Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải:

Ứng với mỗi trạm phát A_i là biến đối ngẫu $u_i \left(i=\overline{1,m}\right)$; ứng với mỗi trạm thu B_j là biến đối ngẫu $v_j \left(j=\overline{1,n}\right)$. Khi đó ta được bài toán đối ngẫu:

Tìm hệ thống số $\{U,V\}=\left\{u_i, v_j \middle| \; i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right\}$ sao cho:

$$\begin{cases} g(U,V)=\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max \qquad (3.2.1) \\ u_1+v_1 \le c_{11},\ u_1+v_2 \le c_{12},\ \ldots,\ u_1+v_n \le c_{1n} \\ u_2+v_1 \le c_{21},\ u_2+v_2 \le c_{22},\ \ldots,\ u_2+v_n \le c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m+v_1 \le c_{m1},\ u_m+v_2 \le c_{m2},\ \ldots,\ u_m+v_n \le c_{mn} \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

Hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu được biết gọn lại là:

$u_i + v_j \le c_{ij} \quad \forall\ i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}$ (3.2.2)

Các cặp điều kiện đối ngẫu:

$x_{ij} \ge 0$ và $u_i + v_j \le c_{ij} \quad \forall\ i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}$ (3.2.3)

c/ Tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát:

Giả sử $X=\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$ là phương án của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1.1) – (3.1.4). Theo định lý đối ngẫu thứ hai, ta có tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án của bài toán vận tải như sau;

* Định lý 3.2.1: Phương án $X=\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$ của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1.1) – (3.1.4) là phương án tối ưu khi và chỉ khi tồn tại hệ thống $m+n$ số $\{U,V\}=\left\{u_i, v_j \middle| \; i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right\}$ sao cho:

- $u_i + v_j \le c_{ij} \quad \forall\ i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}$ (3.2.4)
- $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall\ x_{ij} > 0$ (3.2.5)

d/ Áp dụng tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án cực biên của bài toán vận tải:

Giả sử X_0 là phương án cực biên của bài toán vận tải cân bằng thu phát (3.1.1) – (3.1.4) với tập ô cơ sở $\mathscr{S}$. Khi đó ta xây dựng hệ thống số $\left\{u_i, v_j \middle| \; i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right\}$ theo công thức

$u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall\ (i,j)\in\mathscr{S}$ (3.2.6).

* Định nghĩa 3.2.1: Mỗi nghiệm của hệ phương trình (3.2.6) được gọi là hệ thống thế vị của tập ô cơ sở $\mathscr{S}$. Các số u_i được gọi là thế vị của dòng i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, các số v_j được gọi là thế vị của cột j $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Vì tập $\mathscr{S}$ chỉ gồm $m+n-1$ ô không chứa vòng nên (3.2.6) gồm $m+n-1$ phương trình độc lập tuyến tính với $m+n$ ẩn. Do đó hệ phương trình (3.2.6) có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số. Cho bất cứ ẩn nào làm tham số cũng được và cho tham số nhận một giá trị cụ thể nào đó, số 0 chẳng hạn, ta được một nghiệm riêng của hệ phương trình (3.2.6), đó chính là hệ thống thế vị của tập ô cơ sở $\mathscr{S}$. Tính $\Delta_{ij}= u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall\ (i,j)\notin\mathscr{S}$ (3.2.7):

* Nếu $\Delta_{ij}\le 0 \quad \forall\ (i,j)\notin\mathscr{S}$ (3.2.8) thì phương án cực biên X_0 là phương án tối ưu cực biên

của bài toán.

* Nếu $\exists\ \Delta_{ij} > 0$ thì ta chưa kết luận được gì về phương án cực biên X_0 (nếu phương án cực biên X_0 là phương án cực biên không suy biến thì trong trường hợp này, ta khẳng định được phương án X_0 không phải phương án tối ưu của bài toán).

* Định nghĩa 3.2.2: Tập ô cơ sở $\mathscr{S}$ thoả mãn điều kiện (3.2.8) được gọi là tập ô cơ sở tối ưu của bài toán. Nếu tồn tại ô $(i,j) \notin \mathscr{S}$ có $\Delta_{ij} > 0$ thì tập ô cơ sở $\mathscr{S}$ không phải tập ô cơ sở tối ưu của bài toán.

*** 3.2.3. Điều chỉnh phương án:**

a/ Bản chất kinh tế của số kiểm tra Δ_{ij}:

Giả sử $\mathscr{S}$ là tập ô cơ sở của phương án cực biên X_0 của bài toán vận tải cân bằng thu phát. Xét ô ngoài cơ sở (i,j), ô này cùng với một số ô cơ sở tạo thành một vòng duy nhất, giả sử vòng đó là: $V = \{(i,j); (i_1,j); (i_1,j_1); (i_2,j_1); \ldots; (i_p,j_p); (i,j_p)\}$, đánh số các ô của vòng V bắt đầu từ ô ngoài cơ sở (i,j) mang số 1, theo một chiều nhất định và theo thứ tự tăng dần đến hết. Vòng V được gọi là vòng điều chỉnh, ô (i,j) được gọi là ô điều chỉnh. Ký hiệu tập các ô mang số lẻ (gọi là các ô lẻ) là V_L, tập các ô mang số chẵn (gọi là các ô chẵn) là V_C. Lấy tổng cước phí các ô chẵn trừ tổng cước phí các ô lẻ, ta được:

$T = \sum_{(i,j)\in V_C} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in V_L} c_{ij} = -c_{ij} + c_{i_1 j} - c_{i_1 j_1} + c_{i_2 j_1} - \cdots - c_{i_p j_p} + c_{i j_p}$, trong tổng này, các số hạng từ thứ hai trở đi là cước phí của các ô cơ sở, thay chúng bởi (3.2.6), ta được:

$T = -c_{ij} + u_{i_1} + v_j - u_{i_1} - v_{j_1} + u_{i_2} + v_{j_1} - \cdots - u_{i_p} - v_{j_p} + u_i + v_{j_p} = u_i + v_j - c_{ij} = \Delta_{ij} \quad \forall$ ô ngoài cơ sở (i,j). Như vậy, ta đã chứng minh được định lý về bản chất kinh tế **của số kiểm tra** Δ_{ij}:

* Định lý 3.2.2: - Nếu $\Delta_{ij} > 0$ thì trên vòng điều chỉnh với ô điều chỉnh (i,j) tổng cước phí các ô chẵn lớn hơn tổng cước phí các ô lẻ một lượng là Δ_{ij}.

- Nếu $\Delta_{ij} = 0$ thì tổng cước phí các ô chẵn bằng tổng cước phí các ô lẻ.

- Nếu $\Delta_{ij} < 0$ thì tổng cước phí các ô chẵn nhỏ hơn tổng cước phí các ô lẻ một lượng là $|\Delta_{ij}| = -\Delta_{ij}$.

Từ định lý trên suy ra trên vòng điều chỉnh với ô điều chỉnh (i,j), nếu ta chuyển một đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ thì tổng chi phí vận chuyển sẽ:

- giảm được một lượng là Δ_{ij} nếu $\Delta_{ij} > 0$;
- không thay đổi nếu $\Delta_{ij} = 0$;
- tăng một lượng là $|\Delta_{ij}|$ nếu $\Delta_{ij} < 0$.

b/ Điều chỉnh phương án: Nếu tồn tại ô ngoài cơ sở (i,j) có $\Delta_{ij} > 0$ thì ta chọn ô (k,r) nào đó trong số các ô (i,j) có $\Delta_{ij} > 0$ làm ô điều chỉnh (thông thường ta chọn ô (k,r) có $\Delta_{kr} = \max\{\Delta_{ij} > 0\}$, tuy nhiên điều đó không quan trọng).

Theo bản chất kinh tế của số kiểm tra Δ_{ij}, nếu ta điều chỉnh một lượng hàng càng lớn từ các ô chẵn sang các ô lẻ thì tổng chi phí vận chuyển sẽ giảm được càng nhiều. Tuy nhiên lượng hàng điều chỉnh từ các ô chẵn sang các ô lẻ không thể quá lớn được, lượng hàng điều chỉnh tối đa từ các ô chẵn sang các ô lẻ là $q_0 = \min\{x_{ij} \mid \forall\ (i,j) \in V_C\}$. (3.2.9)

Khi điều chỉnh q_0 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ thì phương án mới thu được X' là phương án cực biên với tổng chi phí vận chuyển là

$$f(X') = f(X_0) - q_0.\Delta_{kr}. \qquad (3.2.10)$$

Giả sử $q_0 = x_{ps}$, khi đó tập ô cơ sở của phương án cực biên mới X' là $\mathscr{S} = \mathscr{S} \cup (k,r) \setminus (p,s)$

Theo công thức (3.2.10) thì $f(X') \le f(X_0)$, tức là phương án cực biên mới thu được X' không xấu hơn phương án cực biên cũ X_0. Khảo sát phương án cực biên mới X' như đã khảo sát phương án cực biên cũ X_0, nếu bài toán là không suy biến thì chỉ sau một số hữu hạn hạn bước lặp, ta thu được phương án tối ưu của bài toán.

* Chú ý 3.2.1: Nếu có nhiều ô (k,r) cùng có $\Delta_{kr} > 0$ lớn nhất như nhau thì ta chọn ô nào cho vòng điều chỉnh với cực tiểu q_0 là lớn nhất.

* Chú ý 3.2.2: Nếu cực tiểu q_0 đạt tại nhiều ô chẵn khác nhau thì sau khi điều chỉnh q_0 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, phương án cực biên mới thu được có nhiều ô chẵn cùng hết hàng và như vậy chúng trở thành các ô loại, trong khi đó ta chỉ có thêm không quá một ô chọn mới là ô điều chỉnh cũ. Vì vậy phương án cực biên mới thu được là phương án cực biên suy biến. Ta có thể xử lý theo một trong hai cách sau:

- Cách thứ nhất là chỉ bỏ đi một ô trong số các ô chẵn đã hết hàng, các ô khác vẫn giữ lại trong tập ô cơ sở mới (chúng có vai trò như ô bổ sung).
- Cách thứ hai là bỏ đi tất cả các ô chẵn đã hết hàng và chọn ô bổ sung mới.

* Chú ý 3.2.3: Nếu gặp phương án cực biên suy biến thì có thể cực tiểu $q_0 = 0$, khi đó ta vẫn tiến hành như thông thường: ô bổ sung chuyển từ vị trí cũ sang vị trí của ô điều chỉnh. Phương án cực biên mới thu được vẫn giống hệt phương án cực biên cũ, chỉ có tập ô cơ sở là thay đổi.

* Chú ý 3.2.4: Trong trường hợp $q_0 > 0$, nếu ta điều chỉnh một lượng hàng $q \in (0, q_0)$ thì phương án mới thu được không phải là phương án cực biên.

* Ví dụ 3.2.3: Khảo sát tính tối ưu của tập ô cơ sở $\mathscr{S}$ của phương án cực biên X'_0 ở ví dụ 3.2.2.

* <u>Giải</u>:

16 –	12 –	9 [80]	5 [100]	12 –	$u_1 = 0$
13 =	10 –	8 [0]	8 –	9 [120]	$u_2 = -1$
14 [150]	10 [10]	12 –	7 –	15 –	$u_3 = 0$
16 –	11 [110]	10 [40]	6 =	15 –	$u_4 = 1$
$v_1 = 14$	$v_2 = 10$	$v_3 = 9$	$v_4 = 5$	$v_5 = 10$	

Dùng công thức: $u_i + v_j = c_{ij}\ \ \forall\ (i,j) \in \mathscr{S}$ và cho $u_1 = 0$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng bên.

Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}\ \ \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S}$, ta thấy $\Delta_{ij} \le 0\ \ \forall\ (i,j) \notin \mathscr{S} \Rightarrow$ phương án cực biên X'_0 là phương án tối ưu của bài toán với $f_{min} = 6110$ đơn vị giá trị.

* Ví dụ 3.2.4: Cho bài toán vận tải (như ở trang sau)

a/ Tìm phương án vận chuyển tối ưu.

b/ Giảm cước phí c_{42} xuống còn $c'_{42} = 14$, chứng minh rằng bài toán có vô số phương án tối ưu.

Tìm phương án tối ưu mà trạm phát A_2 chuyển cho trạm thu B_1 một lượng hàng là 45 đơn vị, phương án đó có phải phương án cực biên hay không?

P \ T	51	54	60	45	80
50	10	11	10	9	8
90	12	12	5	13	11
70	19	18	6	14	15
80	18	17	7	15	12

* **Giải**:

- Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^{4} a_i = 290$; $\sum_{j=1}^{4} b_j = 290$, như vậy bài toán đã cân bằng thu phát.

- Tìm phương án cực biên ban đầu: Dùng phương pháp Phô ghen, ta được phương án cực biên như ở bảng sau:

P \ T	51	54	60	45	80	
50	10 $\boxed{5}$	11 /	10 /	9 $\boxed{45}$	8 /	1,1,2,1×
90	12 $\boxed{46}$	12 $\boxed{44}$	5 /	13 /	11 /	6,1,1,0
70	19 /	18 $\boxed{10}$	6 $\boxed{60}$	14 /	15 /	8,1,3,1
80	18 /	17 /	7 /	15 /	12 $\boxed{80}$	5,3,5×
	2,2,7×	1,1,6×	1×	4×	3×	

- Xác định tập ô cơ sở: Phương án cực biên ban đầu có 7 ô chọn, thiếu một ô so với hạng của bài toán. Ta phải lấy thêm một ô loại bổ sung vào tập hợp 7 ô chọn cho đủ 8 ô không chứa vòng. Lấy chẳng hạn ô (3,5) làm ô bổ sung, ta được tập ô cơ sở:

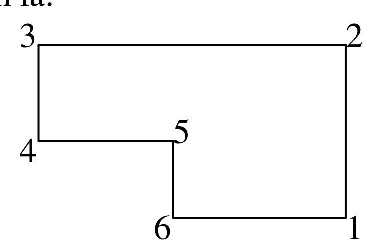
$\mathscr{S}_1 = \{(1,1); (1,4); (2,1); (2,2); (3,2); (3,3); (3,5); (4,5)\}$.

- Xây dựng hệ thống thế vị: Dùng công thức $u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall\, (i,j) \in \mathscr{S}_1$, ta được hệ thống thế vị như ở bảng sau:

10 $\boxed{5}$	11 –	10 –	9 $\boxed{45}$	8 –	$u_1 = -8$
12 $\boxed{46}$	12 $\boxed{44}$	5 –	13 –	11 =	$u_2 = -6$
19 –	18 $\boxed{10}$	6 $\boxed{60}$	14 (3)	15 $\boxed{0}$	$u_3 = 0$
18 –	17 –	7 –	15 –	12 $\boxed{80}$	$u_4 = -3$
$v_1 = 18$	$v_2 = 18$	$v_3 = 6$	$v_4 = 17$	$v_5 = 15$	

- Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu: Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall\, (i,j) \notin \mathscr{S}_1$, ta thấy tập ô cơ sở $\mathscr{S}_1$ có một ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là ô (3,4).

- Điều chỉnh phương án: Lấy ô (3,4) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là:



$\Rightarrow q_0 = \min\{x_{14}, x_{21}, x_{32}\} = \min\{45 ; 46 ; 10\} = 10$

Điều chỉnh 10 đơn vị hàng từ các ô chẵn sang các ô lẻ, ta được phương án cực biên thứ hai sau đây:

10 $\boxed{15}$	11 –	10 –	9 $\boxed{35}$	8 $\boxed{0}$	$u_1 = -5$
12 $\boxed{36}$	12 $\boxed{54}$	5 –	13 –	11 –	$u_2 = -3$
19 –	18 –	6 $\boxed{60}$	14 $\boxed{10}$	15 –	$u_3 = 0$
18 –	17 –	7 –	15 –	12 $\boxed{80}$	$u_4 = -1$
$v_1 = 15$	$v_2 = 15$	$v_3 = 6$	$v_4 = 14$	$v_5 = 13$	

Khi đó ô (3,2) hết hàng trở thành ô loại, ô (3,4) có hàng trở thành ô chọn. Ta thấy phương án cực biên mới có 7 ô chọn, thiếu một ô so với hạng của bài toán. Ta lấy thêm một ô loại bổ sung vào tập hợp 7 ô chọn cho đủ 8 ô không chứa vòng.

Lấy ô (1,5) làm ô bổ sung, ta được tập ô cơ sở $\mathscr{S}_2$ như ở bảng bên.

$\Delta_{ij} \le 0 \;\; \forall\, (i,j) \notin \mathscr{S}_2 \Rightarrow$ phương án cực biên thứ hai là phương án tối ưu của bài toán:

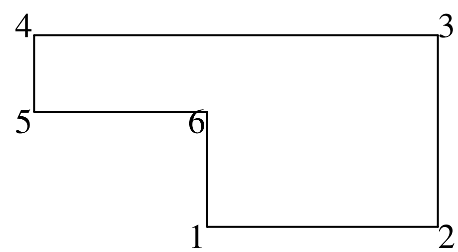
$$X^* = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 35 & 0 \\ 36 & 54 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$$

Theo phương án này thì tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất:

$f_{min} = 10.15 + 9.35 + 12.36 + 12.54 + 6.60 + 14.10 + 12.80 = 3005$ đơn vị giá trị.

b/ Khi giảm cước phí c_{42} xuống còn $c'_{42} = 14$ thì do ô $(4,2) \notin \mathscr{S}_2$ nên chỉ có Δ_{42} là thay đổi và khi đó $\Delta_{42} = 0$. Lấy ô (4,2) làm ô điều chỉnh, ta được vòng điều chỉnh là

10 $\boxed{15}$	11 –	10 –	9 $\boxed{35}$	8 $\boxed{0}$	$u_1 = -5$
12 $\boxed{36}$	12 $\boxed{54}$	5 –	13 –	11 –	$u_2 = -3$
19 –	18 –	6 $\boxed{60}$	14 $\boxed{10}$	15 –	$u_3 = 0$
18 –	14 =	7 –	15 –	12 $\boxed{80}$	$u_4 = -1$
$v_1 = 15$	$v_2 = 15$	$v_3 = 6$	$v_4 = 14$	$v_5 = 13$	



với $q_0 = \min\{x_{45}, x_{11}, x_{22}\} =$

$= \min\{80\,;\,15\,;\,54\} = 15 > 0$

Suy ra bài toán có vô số phương án tối ưu dạng

$$X(q) = \begin{pmatrix} 15-q & 0 & 0 & 35 & q \\ 36+q & 54-q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 10 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 80-q \end{pmatrix} \;\; \forall\, q \in [0, q_0] = [0, 15].$$

Cho $x_{21}(q) = 36 + q = 45 \Leftrightarrow q = 9$, ta được $X(9) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 35 & 9 \\ 45 & 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 10 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 71 \end{pmatrix}$ là phương án tối ưu của bài toán mà A_2 chuyển cho B_1 một lượng hàng là 45 đơn vị. Phương án đó không phải phương án cực biên (vì các ô chọn (1,1); (1,5); (4,5); (4,2); (2,2); (2,1) của phương án đã tạo thành vòng).