CHƯƠNG I

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH VÀ THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

§1.1. Đại cương về bài toán quy hoạch tuyến tính

1.1.1. Các ví dụ thực tiễn dẫn tới bài toán quy hoạch tuyến tính

a- Bài toán lập kế hoạch sản xuất

* **Nội dung bài toán**: Một đơn vị sản xuất có 3 loại nguyên vật liệu khác nhau dùng để sản xuất 4 loại sản phẩm. Lượng nguyên vật liệu mỗi loại mà đơn vị có và định mức về nguyên vật liệu mỗi loại cho việc sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại cùng với giá bán một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

NVL \ SP	SP 1	SP 2	SP 3	SP 4	Trữ lượng NVL
NVL 1	4	3	5	3	44.000
NVL 2	3	4	6	5	50.000
NVL3	5	2	4	3	41.000
Giá bán (1000đ)	11	6,5	10	7	

Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho phù hợp với điều kiện hạn chế về nguyên vật liệu đồng thời tổng doanh thu khi bán các sản phẩm sản xuất ra được là cao nhất.

* **Mô hình toán học của bài toán:**

Gọi x_j là số sản phẩm thứ j cần sản xuất $(j = \overline{1,4})$ khi đó:

Tổng thu nhập là $11x_1 + 6{,}5x_2 + 10x_3 + 7x_4$ $(1000^đ)$

Tổng lượng nguyên vật liệu loại 1 cần huy động là $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4$

Tổng lượng nguyên vật liệu loại 2 cần huy động là $3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4$

Tổng lượng nguyên vật liệu loại 3 cần huy động là $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4$

Theo bài ra ta có mô hình toán học sau đây:

Tìm véctơ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sao cho:

$$
\begin{aligned}
f(X) &= 11x_1 + 6{,}5x_2 + 10x_3 + 7x_4 \to \max \\
&4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 44.000 \\
&3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \le 50.000 \\
&5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 41.000 \\
&x_j \ge 0 \quad \forall j = \overline{1,4}
\end{aligned}
$$

Mô hình toán học này được gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính.

Phương án sản xuất có tổng thu nhập cao nhất là lời giải của bài toán này.

b- Bài toán phân công lao động

* **Nội dung bài toán**: Một phân xưởng có 4 dây chuyền sản xuất khác nhau có thể sản xuất 3 loại sản phẩm. Lượng sản phẩm mỗi loại sản xuất ra được khi sử dụng một dây chuyền sản xuất mỗi loại trong một giờ và chi phí sản xuất ở dây chuyền đó sau một giờ hoạt động cùng với nhu cầu tối thiểu về các sản phẩm được cho trong bảng sau:

http://www.ebook.edu.vn

Sản phẩm	Dây chuyền sản xuất				Nhu cầu tối thiểu
	1	2	3	4	
S.P 1	2	3	1	1	1.600
S.P 2	1	2	3	4	2.200
S.P 3	3	1	4	5	2.000
Chi phí (1000đ)	10	5	13	16	

Hãy bố trí thời gian cho các dây chuyền sản xuất sao cho thoả mãn nhu cầu tối thiểu về các sản phẩm đồng thời tổng chi phí sản xuất là thấp nhất .

*** Mô hình toán học của bài toán:**

Gọi x_j là thời gian (giờ) áp dụng dây chuyền sản xuất thứ j $(j=\overline{1,4})$ khi đó ta có:

✍Tổng chi phí sản xuất : $10x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 16x_4$ (1000đ)

✍Tổng lượng sản phẩm 1 sản xuất ra là : $2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4$

✍Tổng lượng sản phẩm 2 sản xuất ra là : $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

✍Tổng lượng sản phẩm 3 sản xuất ra là : $3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4$

Theo bài ra ta có mô hình toán học sau đây:

Tìm véc tơ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sao cho :

$$\begin{aligned} f(X) = 10x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 16x_4 &\to \min \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &\ge 1.600 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &\ge 2.200 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 &\ge 2.000 \\ x_j \ge 0 \ \ \forall\, j &= \overline{1,4} \end{aligned}$$

Mô hình toán học này cũng được gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính.

1.1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

* **Định nghĩa 1.1.1**: Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát được cho như sau:

Tìm véc tơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \ \text{(hoặc max)} \qquad (1.1.1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \forall\, i = \overline{1,p} \qquad (2a) \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \forall\, i = \overline{p+1,q} \qquad (2b) \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \forall\, i = \overline{q+1,m} \qquad (2c) \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.2)$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,k}\right);\ x_j \le 0 \ \left(j = \overline{k+1,r}\right) \qquad (1.1.3)$$

trong đó p, q, m, k, r, n là những chỉ số nguyên thỏa mãn: $0 \le p \le q \le m$; $0 \le k \le r \le n$.

$x_j \ \left(j = \overline{1,n}\right)$ là những biến số (hoặc ẩn số), các hệ số $c_j, a_{ij}, b_i \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ là những hằng số (hoặc tham số). Hàm số f(X) = $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ được gọi là hàm mục tiêu.

Hệ các phương trình và bất phương trình (2) và (3) được gọi là hệ ràng buộc của bài toán, các ràng buộc (2) được gọi là các ràng buộc chính, các ràng buộc (2a) và (2b) được gọi là các ràng buộc về bất phương trình, các ràng buộc (2c) gọi là các ràng buộc về phương trình của bài toán,các ràng buộc (3) gọi là các ràng buộc về dấu của bài toán.

http://www.ebook.edu.vn

* **Định nghĩa 1.1.2**: Véctơ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn hệ ràng buộc (2), (3) được gọi là một *phương án* (alternative) của bài toán.

Ký hiệu tập hợp các phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính là $\mathfrak{D}$. Có 3 khả năng xảy ra đối với $\mathfrak{D}$:

- Bài toán (1), (2), (3) có vô số phương án, tức là tập $\mathfrak{D}$ có vô số phần tử.

- Bài toán (1), (2), (3) chỉ có một phương án, tức là tập $\mathfrak{D}$ chỉ có một phần tử.

- Bài toán (1), (2), (3) không có phương án nào, tức là tập $\mathfrak{D} = \varnothing$.

* **Định nghĩa 1.1.3**: Phương án X^* của bài toán (1), (2), (3) được gọi là *phương án tối ưu* của bài toán nếu:

$f(X^*) \le f(X)$ với $\forall X \in \mathfrak{D}$ đối với bài toán có $f(X) \to \min$ hoặc

$f(X^*) \ge f(X)$ với $\forall X \in \mathfrak{D}$ đối với bài toán có $f(X) \to \max$.

Ký hiệu tập các phương án tối ưu của một bài toán quy hoạch tuyến tính là $\mathfrak{D}^*$. Cũng có ba khả năng xảy ra như sau:

- Tập $\mathfrak{D}^*$ chỉ có một phần tử, tức là bài toán chỉ có một phương án tối ưu.

- Tập $\mathfrak{D}^*$ không có phần tử nào, tức là bài toán không có phương án tối ưu

- Tập $\mathfrak{D}^*$ có vô số phần tử, tức là bài toán có vô số phương án tối ưu.

* **Định nghĩa 1.1.4**: Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu thì bài toán được gọi là bài toán *giải được* (hay bài toán có *lời giải*) và phương án tối ưu của bài toán còn được gọi là lời giải của bài toán. Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính không có phương án tối ưu thì bài toán được gọi là bài toán *không giải được* (hay là bài toán không có *lời giải*).

* **Định nghĩa 1.1.5**: Phương án X_0 của bài toán quy hoạch tuyến tính (1), (2), (3) được gọi là phương án cực biên nếu không thể tìm được 2 phương án khác nhau X' và X'' của bài toán sao cho $X_0 = \dfrac{X' + X''}{2}$.

Nếu tồn tại 2 phương án khác nhau X' và X'' của bài toán sao cho: $X_0 = \dfrac{X' + X''}{2}$ thì phương án X_0 không phải phương án cực biên của bài toán (hay X_0 là phương án không cực biên của bài toán).

Về mặt hình học, định nghĩa trên được phát biểu như sau:

Điểm X_0 của tập hợp các phương án $\mathfrak{D}$ được gọi là điểm cực biên của $\mathfrak{D}$ nếu không thể tìm được hai điểm khác nhau X' và X'' của $\mathfrak{D}$ để cho X_0 là điểm giữa của đoạn thẳng nối hai điểm X' và X''.

* **Định nghĩa 1.1.6**: Nếu phương án X của một bài toán quy hoạch tuyến tính làm thoả mãn với dấu đẳng thức thì phương án X được gọi là làm thoả mãn *chặt* ràng buộc tương ứng.

Nếu phương án X làm cho một ràng buộc nào đó thoả mãn với dấu bất đẳng thức thực sự thì phương án X được gọi là thoả mãn *lỏng* ràng buộc tương ứng.

Người ta đã chứng minh rằng:

Phương án X_0 của bài toán quy hoạch tuyến tính (1), (2), (3) là phương án cực biên khi và chỉ khi phương án X_0 làm thỏa mãn không ít hơn n ràng buộc chặt, trong đó phải có n ràng buộc chặt độc lập tuyến tính (n là số biến của bài toán).

Nếu phương án X_0 của bài toán (1), (2), (3) làm thỏa mãn ít hơn n ràng buộc chặt (hoặc

http://www.ebook.edu.vn

nếu nó làm thỏa mãn không ít hơn n ràng buộc chặt nhưng không có n ràng buộc nào độc lập tuyến tính) thì phương án X_0 không phải cực biên của bài toán (hay X_0 là phương án không cực biên của bài toán)

Trong thực hành, các mệnh đề trên thường được sử dụng như một định nghĩa của phương án cực biên và phương án không cực biên.

* **Định nghĩa 1.1.7**: Nếu một phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính (1), (2), (3) làm thỏa mãn đúng n ràng buộc chặt thì phương án cực biên đó được gọi là phương án cực biên không suy biến.

Nếu một phương án cực biên của bài toán trên làm thỏa mãn nhiều hơn n ràng buộc chặt thì phương án cực biên đó gọi là phương án cực biên suy biến

* **Định nghĩa 1.1.8**: Nếu mọi phương án cực biên của một bài toán quy hoạch tuyến tính đều là những phương án cực biên không suy biến thì bài toán đó được gọi là bài toán không suy biến.

* **Chú ý 1.1.1**: Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính chỉ có một phương án thì phương án duy nhất đó vừa là phương án cực biên vừa là phương án tối ưu của bài toán.

* **Định nghĩa 1.1.9**: Nếu một phương án của một bài toán quy hoạch tuyến tính vừa là phương án cực biên vừa là phương án tối ưu thì phương án đó được gọi là phương án cực biên tối ưu (hay là phương án tối ưu cực biên).

* **Ví dụ 1.1.1**: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(X)= 8x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 - x_4 \geq 14 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 8 \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 \leq -7 \\ x_1 \geq 0 ;\ x_2 \leq 0 ;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Xét xem véc tơ $X_0 = (0, -1, 6, -2)$ có phải là phương án cực biên của bài toán đã cho hay không?

- Thay X_0 vào hệ ràng buộc của bài toán ta được:

$$\begin{array}{llr} 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 14 = vp & & (1) \\ x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 8 = vp & & (2) \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = -7 = vp & & (3) \\ x_1 = 0 & & (4) \\ x_2 = -1 < 0 & & (5) \\ x_3 = 6 > 0 & & (6) \end{array}$$

Như vậy X_0 là phương án của bài toán

- Phương án X_0 làm thỏa mãn 4 ràng buộc chặt là (1), (2), (3), (4). Số ràng buộc chặt đúng bằng số biến của bài toán và định thức của ma trận các hệ số ứng với hệ 4 ràng buộc chặt (1), (2), (3), (4) là:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-\left(0.0.3 + 2.(-2).7 + (-1).(-4).1 - (-1).0.7 - 2.(-4).3 - 0.(-2).1\right) = 28 - 4 - 24 = 0$$

suy ra hệ 4 ràng buộc chặt (1) (2) (3) (4) là hệ ràng buộc chặt phụ thuộc tuyến tính, do đó phương án X_0 không phải phương án cực biên của bài toán.

Vẫn hỏi như vậy với véctơ $X' = (4, 0, 0, -2)$

- Thay X' vào hệ ràng buộc của bài toán ta được

$$\begin{array}{llr} 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 14 = vp & & (1) \\ x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 8 = vp & & (2) \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = -10 < vp = -7 & & (3) \\ x_1 = 4 > 0 & & (4) \\ x_2 = 0 & & (5) \\ x_3 = 0 & & (6) \end{array}$$

http://www.ebook.edu.vn

Như vậy X' là phương án của bài toán.

- Phương án X' làm thoả mãn 4 ràng buộc chặt là (1), (2), (5), (6). Số ràng buộc chặt đúng bằng số biến của bài toán và định thức của ma trận các hệ số ứng với hệ 4 ràng buộc chặt trên là

$D' = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ suy ra hệ 4 ràng buộc chặt (1), (2), (5), (6) là hệ ràng buộc chặt độc lập tuyến tính, do đó phương án X' là phương án cực biên của bài toán.

Vẫn vậy với vectơ $X'' = (0, 0, 5, -4)$

- Thay X'' vào hệ ràng buộc của bài toán ta được

$$\begin{array}{lcccl} 3x_1 + 2x_3 - x_4 & = & 14 & = \text{vp} & (1) \\ x_1 - 4x_2 - 2x_4 & = & 8 & = \text{vp} & (2) \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 & = & -7 & = \text{vp} & (3) \\ x_1 & & & = 0 & (4) \\ x_2 & & & = 0 & (5) \\ x_3 & = & 5 & > 0 & (6) \end{array}$$

Như vậy X'' là phương án của bài toán.

- Phương án X'' làm thỏa mãn 5 ràng buộc chặt là (1), (2), (3), (4), (5), số ràng buộc chặt nhiều hơn số biến của bài toán. Xét 4 ràng buộc chặt nào đó trong số 5 ràng buộc chặt trên, chẳng hạn (2), (3), (4), (5). Định thức của ma trận các hệ số ứng với hệ 4 ràng buộc chặt (2), (3), (4), (5) là: $D'' = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ suy ra hệ 4 ràng buộc chặt (2), (3), (4), (5) là hệ ràng buộc chặt độc lập tuyến tính, do đó phương án X'' là phương án cực biên của bài toán.

Cuối cùng vẫn hỏi như trên, xét véctơ $\tilde{X} = (6, 0, 0, -1)$.

- Thay $\tilde{X}$ vào hệ ràng buộc của bài toán, ta được:

$$\begin{array}{lcll} 3x_1 + 2x_3 - x_4 & = & 19 > \text{vp} = 14 & (1) \\ x_1 - 4x_2 - 2x_4 & = & 8 = \text{vp} & (2) \\ -x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 & = & -9 < \text{vp} = -7 & (3) \\ x_1 & = & 6 > 0 & (4) \\ x_2 & = & 0 & (5) \\ x_3 & = & 0 & (6) \end{array}$$

Như vậy $\tilde{X}$ là phương án của bài toán

- Phương án $\tilde{X}$ làm thỏa mãn 3 ràng buộc chặt là (2), (5), (6). Số ràng buộc chặt ít hơn số biến của bài toán, do đó phương án $\tilde{X}$ không phải phương án cực biên của bài toán.

http://www.ebook.edu.vn

Trong số hai phương án cực biên trên thì phương án cực biên X' là phương án cực biên không suy biến, phương án cực biên X'' là phương án cực biên suy biến.

* **Định nghĩa 1.1.10**: Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc được cho như sau:

Tìm véc tơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min \text{ (hoặc max)} \quad (1.1.4)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (1.1.5)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}) \quad (1.1.6)$$

Nếu ký hiệu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ là ma trận cấp m×n gọi là ma trận ràng buộc của bài toán;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ là ma trận cấp $n \times 1$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ là ma trận cấp $m \times 1$; O là *ma trận không* cấp $n \times 1$; $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ là ma trận cấp $1 \times n$. Khi đó bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc (4), (5), (6) viết được dưới dạng ma trận sau:

$$f(X) = CX \to \min \text{ (hoặc max)} \quad (4')$$

$$AX = B \quad (5')$$

$$X \ge O \quad (6')$$

Ký hiệu $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ là véc tơ cột thứ j $(j = \overline{1,n})$ của ma trận ràng buộc A. Khi đó bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc viết được dưới dạng véc tơ sau đây:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \text{ (hoặc max)} \quad (4'')$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = B \quad (5'')$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (6'')$$

Ma trận ghép $\widetilde{A} = (A \,|\, B)$ được gọi là ma trận *bổ sung* (hay ma trận *mở rộng*) của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc (1.1.4) – (1.1.6).

* **Định nghĩa 1.1.11**: Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng *chuẩn tắc* được cho như sau:

Tìm véc tơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho: $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min$ (1.1.7)

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{array}\right\} \quad (1.1.8)$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (1.1.9)$$

http://www.ebook.edu.vn

Vẫn với các ký hiệu về ma trận như ở định nghĩa 1.1.10, bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc viết được dưới dạng ma trận sau:

$$f(X) = C.X \to \min$$
$$A.X \geq B$$
$$X \geq O$$

* **Định nghĩa 1.1.12**: Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng hoàn thiện là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc đặc biệt trong đó $b_i \geq 0\ \forall i = \overline{1, m}$ và ma trận ràng buộc A có đủ m véctơ cột đơn vị độc lập tuyến tính.

1.1.3. Tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính:

* **Định lý 1.1.1**: Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa được về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc.

Chứng minh: - Nếu gặp biến $x_j \leq 0$ thì ta đặt $x'_j = -x_j \geq 0$.

– Nếu gặp biến x_j không có ràng buộc gì về dấu thì ta coi nó như là hiệu của 2 biến không âm : $x_j = x'_j - x''_j$ với $x'_j \geq 0$ và $x''_j \geq 0$

Các biến x'_j và x''_j được sử dụng như trong 2 trường hợp trên được gọi là các biến phụ.

– Nếu gặp ràng buộc loại (2a) thì ta đặt biến mới $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0$, phép đặt này tương đương với $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$. Về mặt hình thức, ta đã thêm vào vế trái của (2a) một lượng không âm phù hợp để cho vế trái trở nên bằng vế phải.

– Nếu gặp ràng buộc loại (2b) thì ta đặt biến mới $x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \geq 0$, phép đặt này tương đương với $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$. Về mặt hình thức, ta đã bớt đi ở vế trái của (2b) một lượng không âm phù hợp để cho vế trái trở nên bằng vế phải.

Các biến mới x_{n+i} được sử dụng như hai trường hợp cuối gọi là các *biến bù*. □

Công việc chuyển bài toán không chính tắc về bài toán chính tắc được gọi là chính tắc hoá bài toán.

* **Định lý 1.1.2**: (Định lý về điều kiện đủ để bài toán quy hoạch tuyến tính giải được)

Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án và nếu hàm mục tiêu $f(X)$ bị chặn (chặn trên đối với bài toán max, chặn dưới đối với bài toán min) trong tập hợp $\mathcal{D}$ thì bài toán phải có phương án tối ưu.

* **Ví dụ 1.1.2**: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$f(X) = -3x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_1 + 5x_3 \leq 16$$
$$-2x_2 + 9x_3 \geq -3$$
$$-3x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,3}$$

Chứng minh bài toán này có lời giải.

* **Giải**: • Chứng tỏ bài toán có phương án:

Xét véc tơ $X_0 = (0, 0, 2)$, thay X_0 vào hệ ràng buộc của bài toán, ta được:

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 > vp = 1$ (thoả mãn lỏng)

$x_1 + 5x_3 = 10 < vp = 16$ (thoả mãn lỏng)

$-2x_2 + 9x_3 = 18 > vp = -3$ (thoả mãn lỏng)

$-3x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 = vp$ (thoả mãn chặt)

$x_j \geq 0\ \forall j$

http://www.ebook.edu.vn

Như vậy X_0 là phương án của bài toán, tức là bài toán có phương án.

• Chứng tỏ hàm mục tiêu f(X) bị chặn dưới: Ký hiệu $\mathcal{D}$ là tập hợp các phương án của bài toán.

Nhân hai vế của ràng buộc thứ hai với –1, ta được: $-x_1 - 5x_3 \ge -16$, cộng ràng buộc này với các ràng buộc thứ nhất và thứ tư, ta được: $-3x_1 - 3x_2 - x_3 \ge -9 \quad \forall\ X \in \mathcal{D}$ $\qquad (\spadesuit_1)$

Vì $x_j \ge 0\ \forall j$ nên $x_3 \ge -x_3 \Rightarrow -3x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -3x_1 - 3x_2 - x_3\ \forall\ X \in \mathcal{D}$ $\qquad (\spadesuit_2)$

Từ $(\spadesuit_1)$ và $(\spadesuit_2) \Rightarrow f(X) = -3x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -9\ \forall\ X \in \mathcal{D}$, tức là hàm mục tiêu f(X) bị chặn dưới trong $\mathcal{D}$. Theo định lý 1.1.2 thì bài toán phải có phương án tối ưu.

* **Ví dụ 1.1.3**: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$
\begin{aligned}
f(X) = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 &\to \min \\
2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\le 5 \\
3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &\le 8 \\
x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &\le 7 \\
x_j \ge 0\ \forall j &
\end{aligned}
$$

Chứng minh rằng bài toán có phương án nhưng không có phương án tối ưu.

* <u>**Giải**</u>: • Xét họ véc tơ phụ thuộc tham số $X(\beta) = (0, 2\beta, 0, \beta)\ \ \forall \beta$ tuỳ ý. Thay $X(\beta)$ vào hệ ràng buộc của bài toán, ta được:

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -5\beta \le 5 \Leftrightarrow \beta \ge -1$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2\beta \le 8 \Leftrightarrow \beta \ge -4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -\beta \le 7 \Leftrightarrow \beta \ge -7$$

$$x_j \ge 0\ \forall j = \overline{1,4} \Leftrightarrow \beta \ge 0$$

Kết hợp lại ta được $\beta \ge 0$. Như vậy với mọi $\beta \ge 0$ thì $X(\beta)$ là phương án của bài toán.

• Thay họ phương án $X(\beta)$ vào hàm mục tiêu f(X), ta được $f(X(\beta)) = -\beta\ \ \forall \beta$. Cho $\beta \to +\infty$ (khi đó $X(\beta)$ vẫn là phương án của bài toán) thì $f(X(\beta)) \to -\infty$, tức là hàm mục tiêu f(X) không bị chặn dưới trong tập hợp các phương án của bài toán.

Vì vậy bài toán không có phương án tối ưu nhưng vẫn có phương án.

* **Định lý 1.1.3**: Nếu hệ ràng buộc của một bài toán quy hoạch tuyến tính có hạng bằng số biến của bài toán và nếu bài toán có phương án thì phải có phương án cực biên.

* **Định lý 1.1.4**: Nếu hệ ràng buộc của một bài toán quy hoạch tuyến tính có hạng bằng số biến của bài toán và nếu bài toán có phương án tối ưu thì phải có phương án cực biên tối ưu.

* **Hệ quả 1.1.1**: Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì bài toán phải có phải có phương án cực biên tối ưu.

Theo định lý 1.1.1, muốn giải bài toán không chính tắc, ta chính tắc hoá bài toán rồi giải bài toán chính tắc:

Nếu bài toán chính tắc có phương án tối ưu thì bài toán gốc cũng có phương án tối ưu và phương án tối ưu của bài toán gốc có được từ phương án tối ưu của bài toán chính tắc bằng cách bỏ đi các biến bù và tính lại các biến gốc theo các biến phụ.

Nếu bài toán chính tắc có phương án nhưng không có phương án tối ưu thì bài toán gốc cũng có phương án nhưng không có phương án tối ưu.

Nếu bài toán chính tắc không có phương án thì bài toán gốc cũng không có phương án.

Do hệ quả 1.1.1, nếu bài toán chính tắc có phương án tối ưu thì ta chỉ cần tìm phương án tối ưu trong tập hợp các phương án cực biên là đủ. Nhưng do những tính chất đặc thù của phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc mà nhờ đó ta có được những tiêu chuẩn tối ưu rất dễ nhận biết.

Với tất cả những lý do trên nên ta sẽ đi sâu nghiên cứu điều kiện và tính chất của phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc.

http://www.ebook.edu.vn

§ 1.2. Phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

1.2.1 Điều kiện và tính chất của phương án cực biên

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$f(X) = CX \to \min \text{ (hoặc max)} \qquad (1.2.1)$$

$$AX = B \qquad (1.2.2)$$

$$X \geq O \qquad (1.2.3)$$

trong đó $A = (a_{ij})_{m\times n}$ được giả thiết có $\operatorname{rank}A = m < n$, giả thiết này không làm mất tính tổng quát của vấn đề. Vì nếu gặp bài toán có $\operatorname{rank}A \neq \operatorname{rank}\widetilde{A}$ thì hệ phương trình (1.2.2) vô nghiệm, bài toán không có gì để làm, nên ta chỉ quan tâm đến trường hợp $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}\widetilde{A}$, khi đó $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}\widetilde{A} \leq m$. Nếu $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}\widetilde{A} < m$ thì ta có thể bỏ đi một số phương trình trong (1.2.2) mà véc tơ dòng tương ứng với chúng của ma trận A biểu diễn tuyến tính được qua các véc tơ dòng còn lại. Còn lại chỉ là $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}\widetilde{A} = m \leq n$, nếu $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}\widetilde{A} = m = n$ thì hệ phương trình (1.2.2) có duy nhất nghiệm, khi đó bài toán chỉ có thể có một phương án hoặc không có phương án nào, cũng không có gì để làm. Cuối cùng chỉ còn $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}\widetilde{A} = m < n$, điều đó tương đương với $\operatorname{rank}A = m < n$.

Ta biết rằng một phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính trên chính là một nghiệm không âm của hệ phương trình tuyến tính (1.2.2) . Ta sẽ đặc biệt quan tâm đến các thành phần dương của phương án.

* **Định lý 1.2.1**: Phương án X_0 của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là phương án cực biên khi và chỉ khi hệ vectơ cột của ma trận ràng buộc A ứng với các thành phần dương của phương án lập thành hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

* **Ví dụ 1.2.1**: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} f(X) = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &\to \min \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 9x_4 - 3x_5 &= 7 \\ x_j \geq 0 \ \forall j = \overline{1,5} \end{aligned}$$

Xét xem vectơ X_0 = (4, 5, 0, 0, 0) có phải phương án cực biên của bài toán đã cho hay không?

- Thay X_0 vào hệ ràng buộc của bài toán ta được

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 &= 13 = vp \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 1 = vp \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 9x_4 - 3x_5 &= 7 = vp \\ x_j \geq 0 \ \forall j = \overline{1,5} \end{aligned}$$

Vậy X_0 là phương án của bài toán.

- Phương án X_0 có 2 thành phần dương là x_1 và x_2. Hệ véc tơ cột của ma trận ràng buộc A ứng với các thành phần dương của X_0 là: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, hệ véc tơ này có số véc

http://www.ebook.edu.vn

tơ ít hơn số chiều (số véc tơ là 2). Xét định thức con cấp 2 nào đó trích ra từ hệ vectơ trên, chẳng hạn định thức con cấp 2 tạo bởi 2 thành phần đầu là: $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ suy ra $\text{rank}\{A_1, A_2\} = 2 =$ số véc tơ của hệ, vì vậy hệ véc tơ $\{A_1, A_2\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Theo định lý 1.2.1 thì phương án X_0 là phương án cực biên của bài toán.

Cũng hỏi như vậy với vectơ $X' = (2, 8, 0, 1, 0)$

- Thay X' vào hệ ràng buộc của bài toán ta được:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 &= 13 = vp \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 1 = vp \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 9x_4 - 3x_5 &= 7 = vp \\ x_j \geq 0 \ \forall j &= \overline{1,5} \end{aligned}$$

Như vậy X' là phương án của bài toán

- Phương án X' có 3 thành phần dương là x_1, x_2, x_4. Hệ vectơ cột của ma trận ràng buộc A ứng với các thành phần dương của phương án X' là $\{A_1, A_2, A_4\}$, hệ vectơ này có số vectơ bằng số chiều và định thức của ma trận tạo bởi chúng là:

$D' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} =$ 18 + 1 - 15 - 3 + 9 - 10 = 0 suy ra hệ véc tơ $\{A_1, A_2, A_4\}$ là hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy phương án X' không phải là phương án cực biên của bài toán.

Vẫn vậy xét véc tơ $X'' = (4, 0, 1, 0, 2)$

- Thay X'' vào hệ ràng buộc của bài toán ta được

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 &= 13 = vp \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 1 = vp \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 9x_4 - 3x_5 &= 7 = vp \\ x_j \geq 0 \ \forall j &= \overline{1,5} \end{aligned}$$

Như vậy X'' là phương án của bài toán.

- Phương án X'' có 3 thành phần dương là x_1, x_3, x_5. Hệ véctơ cột của ma trận ràng buộc A ứng với các thành phần dương của X'' là $\{A_1, A_3, A_5\}$, hệ vectơ này có số vectơ bằng số chiều và định thức của ma trận tạo bởi chúng là:

$D'' = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 6 - 3 - 9 - 4 + 3 = -25 \neq 0$ suy ra hệ véc tơ $\{A_1, A_3, A_5\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính, do đó phương án X'' là phương án cực biên của bài toán .

Ta biết rằng mọi hệ vectơ có số véctơ nhiều hơn số chiều đều là hệ véctơ phụ thuộc tuyến tính nên ta có:

* **Hệ quả 1.2.1**: Số các thành phần dương của một phương án cực biên của bài toán chính tắc (1.2.1 - 1.2.3) không vượt quá m (m là hạng của ma trận ràng buộc của bài toán).

* **Hệ quả 1.2.2**: Một phương án cực biên của bài toán (1.2.1 - 1.2.3) có số thành phần dương đúng bằng m thì phương án cực biên đó là phương án cực biên không suy biến.

Một phương án cực biên của bài toán trên có số thành phần dương ít hơn m thì phương án cực biên đó là phương án cực biên suy biến.

Chẳng hạn, theo phép giải đối với phương án X'' thì ma trận ràng buộc A của bài toán có $\text{rank}A = 3$, tức là m =3 $\Rightarrow$ phương án cực biên X'' là phương án cực biên không suy biến, còn phương án cực biên X_0 là phương án cực biên suy biến.

http://www.ebook.edu.vn

* **Chú ý 1.2.1**: Một phương án của bài toán (1.2.1 - 1.2.3) có số thành phần dương không vượt quá m không hẳn là phương án cực biên.

1.2.2. Cơ sở của phương án cực biên của bài toán chính tắc

* **Định lý 1.2.2**: Với mỗi phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc (1.2.1 - 1.2.3) đều có một hệ con gồm m véc tơ cột độc lập tuyến tính của ma trận ràng buộc A, trong đó phải có các véc tơ cột ứng với các thành phần dương của phương án.

* **Định nghĩa 1.2.1**: Mỗi hệ con gồm m véc tơ cột như trong định lý 1.2.2 đều được gọi là một *cơ sở* của phương án cực biên tương ứng.

Như vậy một phương án cực biên không suy biến chỉ có một cơ sở, đó là hệ véc tơ cột ứng với các thành dương của phương án. Chẳng hạn phương án cực biên không suy biến X'' ở ví dụ trên chỉ có một cơ sở, đó là hệ véc tơ $\{A_1, A_3, A_5\}$. Ta nói và viết tắt là phương án X'' là phương án cực biên với cơ sở $J = \{1,3,5\}$.

Một phương án cực biên suy biến có thể có nhiều cơ sở. Muốn tìm một cơ sở của phương án cực biên suy biến, ta bổ sung thêm một số véc tơ cột ứng với các thành phần = 0 của phương án vào hệ véc tơ cột ứng với các thành phần dương của phương án cho đủ m vectơ cột: hệ m véc tơ nào là độc lập tuyến tính thì hệ m véc tơ đó là cơ sở của phương án cực biên suy biến đã cho.

* **Ví dụ 1.2.2**: Tìm tất cả các cơ sở của phương án cực biên suy biến X_0 ở ví dụ trên.

- Bổ sung thêm véc tơ cột A_3 vào hệ vectơ $\{A_1, A_2\}$ ta được hệ véc tơ $\{A_1, A_2, A_3\}$, định thức của ma trận tạo bởi hệ véc tơ này là

$$D'' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3-1+3+1+2 = 10 \neq 0$$ suy ra hệ vectơ $\{A_1, A_2, A_3\}$ là hệ véctơ độc lập tuyến tính do đó hệ này là một cơ sở của phương án cực biên suy biến X_0.

- Bổ sung thêm A_4 vào hệ véctơ $\{A_1, A_2\}$, ta được hệ véctơ $\{A_1, A_2, A_4\}$, hệ véc tơ này như đã khảo sát là hệ véctơ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy hệ véctơ $\{A_1, A_2, A_4\}$ không phải là cơ sở của phương án cực biên suy biến X_0.

- Bổ sung thêm véctơ A_5 vào hệ véctơ $\{A_1, A_2\}$, ta được hệ véctơ $\{A_1, A_2, A_5\}$, định thức của ma trận tạo bởi hệ véctơ này là:

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6+6+3-9-3+4 = -5 \neq 0$$ suy ra hệ véctơ $\{A_1, A_2, A_5\}$ là hệ độc lập tuyến tính do đó hệ này cũng là một cơ sở của phương án cực biên suy biến X_0.

Như vậy phương án cực biên suy biến X_0 có 2 cơ sở là $J_1 = \{1, 2, 3\}$, $J_2 = \{1, 2, 5\}$.

1.2.3. Biểu diễn các véctơ ngoài cơ sở theo các vectơ cơ sở

Muốn tìm phép biểu diễn các véctơ ngoài cơ sở theo các véctơ cơ sở, ta xuất phát từ ma trận ràng buộc A, dùng các phép khử toàn phần, đưa ma trận A về dạng mà trong đó các véctơ cơ sở trở thành các véctơ đơn vị. Khi đó các thành phần trên các cột ứng với các véctơ ngoài cơ sở chính là các hệ số biểu diễn của véctơ ngoài cơ sở tương ứng theo các véctơ cơ sở

* **Ví dụ 1.2.3**: Trở lại ví dụ 1.2.2 với cơ sở $J_2 = \{1, 2, 5\}$ của phương án cực biên X_0.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & (1) & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 9 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & -6 & -1 \\ (5) & 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & (-1) \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to$$

http://www.ebook.edu.vn

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = Z \Rightarrow \begin{cases} A_3 = 5A_2 - 2A_5 \\ A_4 = -3A_2 + 2A_1 \end{cases}$$, có thể thử kết quả như sau:

$$5A_2 - 2A_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_3 \ ; \quad -3A_2 + 2A_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = A_4 .$$

Qui tắc khử toàn phần : Trong phép khử toàn phần, phần tử $a'_{ij} \neq 0$ ở bảng trước trở thành số 1 của véctơ đơn vị $A'_j = E_i$ ở bảng sau được gọi là phần tử trục, dòng i được gọi là dòng chuẩn, cột j được gọi là cột xoay.

Dòng chuẩn chia cho phần tử trục, cột xoay trở thành cột đơn vị. Đối với các phần tử không nằm trên dòng chuẩn và không nằm trên cột xoay thì chúng được tính theo qui tắc sau (gọi là qui tắc hình chữ nhật):

Phần tử phải tính bằng tích 2 phần tử trên đường chéo qua trục trừ tích 2 phần tử trên đường chéo không qua trục, được bao nhiêu chia cho phần tử trục.

Dòng chuẩn có số 0 nào thì cột chứa số 0 đó giữ nguyên, cột xoay có số 0 nào thì dòng chứa số 0 đó cũng giữ nguyên.

* Quy ước: hệ số biểu diễn của véctơ ngoài cơ sở A_k theo véctơ cơ sở A_j ký hiệu là z_{jk} $\forall j \in J$ và $k \notin J$. Theo đó, ở ví dụ trên thì: $z_{13} = 0; z_{23} = 5; z_{53} = -2; z_{14} = 2; z_{24} = -3; z_{54} = 0$.

§1.3 Thuật toán đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

1.3.1 Cơ sở lý luận của thuật toán đơn hình:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$\begin{cases} f(X) = CX \to \min & (1.3.1) \\ AX = B & (1.3.2) \\ X \geq O & (1.3.3) \end{cases}$$

trong đó $A = (a_{ij})_{m \times n}$ được giả thiết có $\operatorname{rank} A = m < n$.

Giả sử $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$ là phương án cực biên với cơ sở J, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ là phương án tuỳ ý của bài toán. Khi đó ta luôn có:

$$x_j = x_{0j} - \sum_{k \notin J} z_{jk} x_k \quad \forall j \in J \qquad (1.3.4)$$

trong đó z_{jk} được xác định bởi biểu diễn $A_k = \sum_{j \in J} z_{jk} A_j \quad \forall k \notin J$ (1.3.5)

Đặt $\Delta_k = \sum_{j \in J} c_j z_{jk} - c_k \ \forall k \notin J$ (1.3.6)

khi đó ta có: $f(X) = f(X_0) - \sum_{k \notin J} \Delta_k x_k \ \forall X \in \mathfrak{D}$ (1.3.7)

Ta xét các trường hợp có thể xảy ra như sau:

* **Trường hợp 1**: (Định lý 1.3.1 về tiêu chuẩn tối ưu cho một phương án cực biên).

Nếu tồn tại cơ sở J của phương án cực biên X_0 có $\Delta_k \leq 0 \ \forall k \notin J$ thì phương án X_0 là phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính (1.3.1 – 1.3.3).

Số Δ_k như vậy được gọi là ước lượng kiểm tra của biến thứ k (hay là của véctơ cột A_k).

http://www.ebook.edu.vn

* **Trường hợp 2**: Nếu tồn tại cơ sở J của phương án cực biên X_0 có $\Delta_k > 0$ thì chưa kết luận được gì về phương án cực biên X_0 (nếu X_0 là phương án cực biên không suy biến thì trong trường hợp này ta khẳng định được phương án X_0 không phải là phương án tối ưu của bài toán). Đến đây ta xét hai trường hợp nhỏ như sau:

\- **Trường hợp 2a**: (Định lý 1.3.2: về dấu hiệu không giải được của bài toán).

Nếu tồn tại cơ sở J của phương án cực biên X_0 có $\Delta_k > 0, k \notin J$ và trong số các $\Delta_k > 0$ tồn tại $\Delta_s > 0$ mà $z_{js} \le 0\ \forall j \in J$ thì bài toán không có phương án tối ưu.

\- **Trường hợp 2b**: (Về cải tiến phương án) Nếu gặp cơ sở J của phương án cực biên X_0 của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có $\Delta_k > 0$ và với $\forall\ \Delta_k > 0$ đều $\exists z_{jk} > 0$ thì ta xây dựng phương án cực biên mới X' như sau:

Lấy $\Delta_s > 0$ nào đó trong số các $\Delta_k > 0$ (thông thường ta chọn $\Delta_s = \max\{\Delta_k > 0\}$, tuy nhiên điều đó không quan trọng). Với $\Delta_s > 0$ cũng phải tồn tại $z_{js} > 0$.

Thực hiện các phép chia x_{0j} cho $z_{js} > 0$ rồi lấy cực tiểu:

$$\theta_0 = \min\left\{ \frac{x_{0j}}{z_{js}} \,\middle|\, \forall z_{js} > 0 \right\} \tag{1.3.8}$$

Nếu cực tiểu θ_0 đạt được tại chỉ số r , tức là: $\theta_0 = \frac{x_{0r}}{z_{rs}}$ thì ta đưa A_r ra khỏi cơ sở cũ, cho A_s vào thay thế vị trí của A_r lập nên cơ sở mới của phương án cực biên mới X'. Khi đó ta có:

$$f(X') = f(X_0) - \theta_0 \Delta_s \tag{1.3.9}$$

Như vậy cơ sở mới $J' = J \setminus \{r\} \cup \{s\}$.

Theo (1.3.8) thì $\theta_0 \ge 0$ (vì $x_{0j} \ge 0\ \forall j \in J$ và $z_{js} > 0$), theo giả thiết thì $\Delta_s > 0$ vì vậy $f(X') \le f(X_0)$, tức là phương án cực biên mới X' không xấu hơn phương án cực biên cũ X_0.

Khảo sát phương án cực biên mới X' như đã khảo sát phương án cực biên X_0, nếu không xảy ra hiện tượng xoay vòng thì sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ thu được phương án cực biên tối ưu của bài toán (trường hợp 1) hoặc phát hiện bài toán không có phương án tối ưu (trường hợp 2a).

* **<u>Chú ý 1.3.1</u>**: Các số liệu đặc trưng của cơ sở mới J' bao gồm x'_j, z'_{jk}, Δ'_k & $f(X')$ được tính từ các số liệu đặc trưng tương ứng của cơ sở cũ J bao gồm x_{0j}, z_{jk}, Δ_k & $f(X_0)$ nhờ phép khử toàn phần thực hiện trên ma trận ghép $\begin{pmatrix} X_{0J} & Z \\ f(X_0) & \Delta \end{pmatrix}$ với phần tử trục là z_{rs}, trong đó X_{0J} là ma trận cấp $m \times 1$ mà các phần tử của nó là $x_{0j}\ \forall j \in J$ và được sắp xếp sao cho nếu $A_j = E_i$ thì x_{0j} xếp ở dòng thứ i, $i = \overline{1, m}$; Δ là ma trận cấp $1 \times n$ mà các phần tử của nó là Δ_k (k mở rộng cho từ 1 đến n : $\Delta_k = 0\ \forall k \in J$).

Ma trận ghép như trên được gọi là bảng đơn hình. Thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính đề cập đến trong mục này được gọi là thuật toán đơn hình.

* **Chú ý 1.3.2**: Nếu có nhiều $\Delta_s > 0$ lớn nhất như nhau thì ta ưu tiên chỉ số nào có cực tiểu θ_0 lớn hơn.

* **Chú ý 1.3.3**: Nếu cực tiểu θ_0 đạt tại nhiều chỉ số khác nhau thì ta loại một trong các véctơ tương ứng ra khỏi cơ sở cũ, phương án cực biên mới thu được là phương án cực biên suy biến.

* **Chú ý 1.3.4**: Nếu gặp phương án cực biên suy biến thì có thể cực tiểu $\theta_0 = 0$. Khi đó ta vẫn tiến hành như thông thường, phương án cực biên mới thu được vẫn giống hệt phương án cực biên cũ, chỉ có cơ sở là thay đổi.

http://www.ebook.edu.vn

* **Ví dụ 1.3.1**: Trở lại ví dụ 1.2.3. Xuất phát từ cơ sở J_2, Tìm câu trả lời của bài toán.

✍ **<u>Giải</u>**: Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình:

A_j	C_J	X_J	1	-2	1	1	-3	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_2	-2	5	0	1	5	-3	0	
A_5	-3	0	0	0	-2	0	1	
A_1	1	4	1	0	0	(2)	0	$2=\theta_0$
		-6	0	0	-5	|-7|	0	s = 4, r =1
A_2	-2	11	3/2	1	5	0	0	
A_5	-3	0	0	0	-2	0	1	
A_4	1	2	1/2	0	0	1	0	
		-20	-7/2	0	-5	0	0	Δ

Ở bảng đơn hình số 2 có $\Delta_k \le 0\ \forall k$ suy ra phương án cực biên ở bảng 2 là phương án tối ưu của bài toán: $X^* = (0, 11, 0, 2, 0)$ với $f_{min} = -20$

* **<u>Chú ý 1.3.5</u>**: Nếu gặp bài toán có yêu cầu cực đại hóa hàm mục tiêu thì ta khảo sát phương án cực biên X_0 theo các dấu hiệu trực tiếp dành cho bài toán max sau đây:

- Trường hợp 1: Nếu tồn tại cơ sở J của phương án cực biên X_0 có $\Delta_k \ge 0\ \forall k$ thì phương án cực biên X_0 là phương án tối ưu của bài toán.

- Trường hợp 2: Nếu tồn tại cơ sở J của phương án cực biên X_0 có $\Delta_k < 0$ thì ta chưa kết luận được gì về phương án cực biên X_0 (nếu phương án X_0 là phương án cực biên không suy biến thì trong trường hợp này ta khẳng định được phương án X_0 không phải phương án tối ưu của bài toán). Đến đây ta xét 2 trường hợp nhỏ như sau:

+ Trường hợp 2a: Trong số các $\Delta_k < 0$, tồn tại $\Delta_s < 0$ mà $z_{js} \le 0\ \forall j \in J$ thì ta kết luận được bài toán không có phương án tối ưu.

+ Trường hợp 2b: Với $\forall\ \Delta_k < 0$ đều tồn tại $z_{jk} > 0$, thì ta thực hiện việc chuyển sang cơ sở mới như sau:

Chọn $\Delta_s < 0$ nào đó trong số các $\Delta_k < 0$ (thường ta chọn $\Delta_s = \min\{\Delta_k < 0\}$, tuy nhiên điều đó cũng không quan trọng). Với chỉ số s ta vẫn tìm cực tiểu θ_0 như (1.3.8), nếu cực tiểu này đạt tại r thì vẫn đưa A_r ra khỏi cơ sở cũ và cho A_s vào thay thế vị trí của A_r lập nên cơ sở mới của phương án cực biên mới. Vẫn lặp lại như trước, cuối cùng ta tìm được phương án tối ưu của bài toán hoặc phát hiện bài toán không có phương án tối ưu.

* **Định nghĩa 1.3.1**: Cơ sở J như ở các trường hợp 1 của hai bài toán min và max trên được gọi là cơ sở tối ưu của bài toán tương ứng.

* **Định nghĩa 1.3.2**: Nếu $\Delta_s > 0$ thì $f(X(\theta_0)) \le f(X_0)$, tức là $f(X(\theta_0))$ không tăng so với $f(X_0)$. Khi đó phương Z_s theo cơ sở J có $\Delta_s > 0$ như vậy được gọi là *phương giảm* tại điểm X_0.

Nếu $\Delta_s < 0$ thì $f(X(\theta_0)) \ge f(X_0)$, tức là $f(X(\theta_0))$ không giảm so với $f(X_0)$. Khi đó phương Z_s theo cơ sở J có $\Delta_s < 0$ như thế được gọi là *phương tăng* tại điểm X_0.

* **Ví dụ 1.3.2**: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$
\begin{aligned}
f(X) = 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 &\to \max \\
x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= 2 \\
- x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 6 \\
x_2 + x_3 + 3x_4 &\ge 5 \\
x_j \ge 0\ (j = \overline{1,4})&
\end{aligned}
$$

a/ Chứng minh rằng $X_0 = (0, 10/3, 0, 14/3)$ là phương án cực biên của bài toán.

b/ Xuất phát từ X_0 tìm lời giải của bài toán bằng phương pháp đơn hình.

✍ **<u>Giải</u>**: a/ + Thay X_0 vào hệ ràng buộc của bài toán ta được:

http://www.ebook.edu.vn

$$\begin{array}{lr}
x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 = vp & (1)\\
-x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 = vp & (2)\\
x_2 + x_3 + 3x_4 = 52/3 > vp = 5 & (3)\\
x_1 = 0 & (4)\\
x_2 = 10/3 > 0 & (5)\\
x_3 = 0 & (6)\\
x_4 = 14/3 > 0 & (7)
\end{array}$$

Như vậy X_0 là phương án của bài toán.

+ Phương án X_0 làm thỏa mãn 4 ràng buộc chặt là (1), (2), (4), (6). Số ràng buộc chặt đúng bằng số biến của bài toán và định thức của ma trận các hệ số ứng với hệ 4 ràng buộc chặt trên là: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ suy ra hệ 4 ràng buộc chặt (1), (2), (4), (6) là hệ ràng buộc chặt độc lập tuyến tính, do đó phương án X_0 là phương án cực biên của bài toán, hơn nữa X_0 là phương án cực biên không suy biến.

b/ + Chính tắc hóa bài toán:

Đặt $x_5 = 6 + x_2 - x_3 - 2x_4 \geq 0$

$x_6 = x_2 + x_3 + 3x_4 - 5 \geq 0$

Khi đó ta được bài toán chính tắc sau đây:

$$\begin{aligned}
f(X) &= 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 \to \max\\
&x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 2\\
&-x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6\\
&x_2 + x_3 + 3x_4 - x_6 = 5\\
&x_j \geq 0 ;\ j = \overline{1,6}
\end{aligned}$$

Ứng với phương án X_0 bài toán gốc thì các biến bù $x_5 = 0$; $x_6 = 37/3$. Vậy phương án $\overline{X}_0$ của bài toán chính tắc ứng với phương án X_0 của bài toán gốc là $\overline{X}_0 = (0, 10/3, 0, 14/3, 0, 37/3)$, phương án này cũng là phương án cực biên của bài toán chính tắc với cơ sở $\{A_2, A_4, A_6\}$.

+ Tìm các hệ số biểu diễn z_{jk}:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & (3) & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 & 1 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 1 & -7/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 5/3 & 0 & -16/3 & 0 & 7/3 & 1 \end{pmatrix} = Z$$

• Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình:

A_j	C_J	X_J	2	-1	-5	4	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_4	4	14/3	1/3	0	-2/3	1	2/3	0	14
A_2	-1	10/3	(2/3)	1	-7/3	0	1/3	0	$5 = \theta_0$
A_6	0	37/3	5/3	0	-16/3	0	7/3	1	37/5
		46/3	$\lvert -4/3 \rvert$	0	14/3	0	7/3	0	s = 1, r =2
A_4	4	3	0	-1/2	1/2	1	1/2	0	
A_1	2	5	1	3/2	-7/2	0	1/2	0	
A_6	0	4	0	-5/2	1/2	0	3/2	1	
		22	0	2	0	0	3	0	

Ở bảng đơn hình số 2 có $\Delta_k \geq 0\ \forall k$, vì vậy phương án cực biên thứ hai là phương án tối

http://www.ebook.edu.vn

ưu của bài toán chính tắc: $\overline{X}^* = (5, 0, 0, 3, 0, 4)$ suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc là $X^* = (5, 0, 0, 3)$ với $f_{max} = 22$.

* **Ví dụ 1.3.3**: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(X) = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \le 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 \ge 1 \\ x_j \ge 0 \ \forall j = \overline{1,5} \end{cases}$$

a/ Chứng minh rằng $X_0 = (0, 0, 3/4, 1/4, 0)$ là phương án cực biên của bài toán.

b/ Xuất phát từ X_0, tìm câu trả lời của bài toán.

✍ **Giải**: a/ • Thay X_0 vào hệ ràng buộc của bài toán, ta được:

$$\begin{array}{lll}
2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = -3/4 < vp = 2 & & (1) \\
-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 = vp & & (2) \\
5x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 1 = vp & & (3) \\
x_1 = 0 & & (4) \\
x_2 = 0 & & (5) \\
x_3 = 3/4 > 0 & & (6) \\
x_4 = 1/4 > 0 & & (7) \\
x_5 = 0 & & (8)
\end{array}$$

Như vậy X_0 là phương án của bài toán.

• Phương án X_0 làm thỏa mãn 5 ràng buộc chặt là (2), (3), (4), (5), (8). Số ràng buộc chặt đúng bằng số biến của bài toán và định thức của ma trận các hệ số ứng với hệ 5 ràng buộc chặt trên là: $D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{5+5+4+2+3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \ne 0$ suy ra hệ 5 ràng buộc chặt trên là hệ ràng buộc chặt độc lập tuyến tính, do đó phương án X_0 là phương án cực biên của bài toán, hơn nữa nó là phương án cực biên không suy biến.

b/ • Chính tắc hoá bài toán: Đặt $x_6 = 2 - 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 \ge 0$; $x_7 = 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 - 1 \ge 0$. Khi đó ta được bài toán quy hoạch tuyến dạng chính tắc sau đây:

$$f(X) = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 + x_6 = 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 - x_7 = 1 \\ x_j \ge 0 \ \forall j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Ứng với phương án X_0 bài toán gốc thì các biến bù $x_6 = 11/4$; $x_7 = 0$. Như vậy phương án $\overline{X}_0$ của bài toán chính tắc ứng với phương án X_0 của bài toán gốc là $\overline{X}_0 = (0, 0, 3/4, 1/4, 0, 11/4, 0)$, phương án này cũng là phương án cực biên của bài toán chính tắc với cơ sở $\{A_3, A_4, A_6\}$.

• Tìm các hệ số biểu diễn z_{jk}:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & (1) & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & -2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & (-4) & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

http://www.ebook.edu.vn

$$\to \begin{pmatrix} 11/4 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1 & -1/4 \\ 3/4 & -3/4 & 1 & 0 & -5/4 & 0 & -1/4 \\ -7/4 & -1/4 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = Z$$

* Nhập các số liệu đặc trưng vào bảng đơn hình

A_J	C_J	X_J	1	-1	2	1	-5	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
A_6	0	11/4	11/4	1/4	0	0	-1/4	1	-1/4	
A_3	2	3/4	3/4	-3/4	1	0	-5/4	0	-1/4	
A_4	1	1/4	-7/4	-1/4	0	1	(1/4)	0	1/4	$1=\theta_0$
		7/4	-5/4	-3/4	0	0	$\lvert 11/4 \rvert$	0	-1/4	
A_6	0	3	1	0	0	1	0	1	0	
A_3	2	2	-8	-2	1	5	0	0	1	
A_5	-5	1	-7	-1	0	4	1	0	1	
		-1	18	2	0	-11	0	0	-3	

Trong số các $\Delta_k > 0$, có $\Delta_2 > 0$ mà $z_{j2} \le 0 \ \forall j \in J$, do đó bài toán không có phương án tối ưu.

c/ Câu hỏi bổ sung: Hãy chỉ ra một họ phương án mà trên đó hàm mục tiêu $f(X) \to -\infty$.

♣ Cho $x_2 = \alpha \ge 0$; $x_1 = x_4 = x_7 = 0$, từ bảng đơn hình số 2 suy ra:

$x_3(\alpha) = x'_3 - \alpha.z_{32} = 2 + 2\alpha$; $x_5(\alpha) = x'_5 - \alpha.z_{52} = 1 + \alpha$; $x_6(\alpha) = x'_6 - \alpha.z_{62} = 3$, ta được $\overline{X(\alpha)} = (0,\ \alpha\ ,\ 2+2\alpha\ ,\ 0,\ 1+\alpha\ ,\ 3,\ 0)$ là phương án của bài toán chính tắc với mọi $\alpha \ge 0$ suy ra $X(\alpha) = (0,\ \alpha,\ 2+2\alpha,\ 0,\ 1+\alpha)$ là phương án của bài toán gốc với mọi $\alpha \ge 0$, trên họ này, $f(X(\alpha)) = f(X') - \alpha.\Delta_2 = -2\alpha - 1$ (theo công thức (1.3.7)). Rõ ràng $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} f(X(\alpha)) = -\infty$.

1.3.2 Tập phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

* **Định lý 1.3.3**: Nếu tồn tại cơ sở J của phương án cực biên tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có $\Delta_k < 0 \ \forall\ k \notin J$ (đối với bài toán min) hoặc $\Delta_k > 0 \ \forall k \notin J$ (đối với bài toán max) thì bài toán chỉ có một phương án tối ưu.

* **Hệ quả 1.3.1**: Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có vô số phương án tối ưu thì ở mọi cơ sở tối ưu J đều tồn tại $k \notin J$ sao cho $\Delta_k = 0$.

Điều ngược lại không hẳn đúng.

* **Định lý 1.3.4**: Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính có hai phương án tối ưu khác nhau thì bài toán có vô số phương án tối ưu.

Giả sử X_1^* và X_2^* là hai phương án tối ưu khác nhau của một bài toán quy hoạch tuyến thì mọi véctơ có dạng $X(p,q) = \dfrac{pX_1^* + qX_2^*}{p+q}$ $\forall p > 0,\ q > 0$ đều là những phương án tối ưu của bài toán (hơn nữa chúng là những phương án tối ưu không cực biên); hoặc cũng vậy, mọi véc tơ có dạng $X(\alpha) = \alpha X_1^* + (1-\alpha)X_2^*$ $\forall\ \alpha \in [0,1]$ là phương án tối ưu của bài toán.

* **Hệ quả 1.3.2:** Nếu tồn tại cơ sở tối ưu J của phương án cực biên tối ưu $X^* = (x_{01}^*, x_{02}^*, ..., x_{0n}^*)$ của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có $\Delta_k = 0,\ k \notin J$ và nếu $z_{jk} \le 0 \ \ \forall\ j \in J$ thì bài toán có vô số phương án tối ưu dạng:

$$x_j(\alpha) = \begin{cases} \alpha \ge 0 & \text{nếu } j = k \notin J \\ 0 & \text{nếu } j \notin J \text{ và } j \ne k \\ x_{0j}^* - \alpha z_{jk} & \text{nếu } j \in J \end{cases} \qquad (1.3.10)$$

http://www.ebook.edu.vn

***Hệ quả 1.3.3:** Nếu tồn tại cơ sở tối ưu J của phương án cực biên tối ưu $X^* = (x^*_{01}, x^*_{02}, ..., x^*_{0n})$ của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có $\Delta_k = 0,\ k \notin J$ và nếu $\exists\ z_{jk} > 0$, đồng thời $\theta_0 = \min\left\{ \frac{x^*_{0j}}{z_{jk}} \middle| \forall z_{jk} > 0 \right\} > 0$ thì bài toán có vô số phương án tối ưu dạng

$$x_j(\alpha) = \begin{cases} \alpha \in [0, \theta_0] & \text{nếu } j = k \notin J \\ 0 & \text{nếu } j \notin J \text{ và } j \neq k \\ x^*_{0j} - \alpha z_{jk} & \text{nếu } j \in J \end{cases} \qquad (1.3.11)$$

* **Định nghĩa 1.3.3**: Các công thức (1.3.10) và (1.3.11) được gọi là tập phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc tương ứng.

Ví dụ 1.3.4: Trở lại ví dụ 1.3.2 hãy chứng minh bài toán có vô số phương án tối ưu. Tìm tập phương án tối ưu và tìm một phương án tối ưu không cực biên của bài toán.

✍ **Giải**: Cách 1: Trở lại bảng đơn hình tối ưu ở ví dụ 1.3.2:

A_J	C_J	X_J	2	-1	-5	4	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_4	4	3	0	-1/2	(1/2)	1	1/2	0	$6 = \theta_0$
A_1	2	5	1	3/2	-7/2	0	1/2	0	
A_6	0	4	0	-5/2	1/2	0	3/2	1	8
		22	0	2	$\lvert 0 \rvert$	0	3	0	

Trong số các Δ_k ngoài cơ sở của bảng tối ưu có $\Delta_3 = 0$ trên cột 3 lại có $\exists\ z_{j3} > 0$ đồng thời $\theta_0 = \min\left\{ \frac{x^*_{04}}{z_{43}}, \frac{x^*_{06}}{z_{63}} \right\} = \min\left\{ \frac{3}{1/2}, \frac{4}{1/2} \right\} = 6 > 0$, vì vậy bài toán có vô số phương án tối ưu.

Để tìm tập phương án tối ưu của bài toán, ta cho $x_3 = \alpha \in [0,6]$, $x_2 = x_5 = 0$, suy ra $x_1(\alpha) = x^*_{01} - \alpha.z_{13} = 5 + \frac{7\alpha}{2}$, $x_4(\alpha) = x^*_{04} - \alpha.z_{43} = 3 - \frac{\alpha}{2}$, $x_6(\alpha) = x^*_{06} - \alpha.z_{63} = 4 - \frac{\alpha}{2}$. Ta được $\overline{X}(\alpha) = \left(5 + \frac{7\alpha}{2},\ 0,\ \alpha\ ,\ 3 - \frac{\alpha}{2},\ 0,\ 4 - \frac{\alpha}{2}\right)$ là phương án tối ưu của bài toán chính tắc với mọi $\alpha \in [0,6]$, do đó $X(\alpha) = \left(5 + \frac{7\alpha}{2},\ 0,\ \alpha\ ,\ 3 - \frac{\alpha}{2}\right)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc với mọi $\alpha \in [0,6]$. Đó là tập phương án tối ưu của bài toán gốc.

Với mọi $\alpha \in (0,6)$ thì $X(\alpha)$ là phương án tối ưu không cực biên của bài toán, chẳng hạn với $\alpha = 4$, ta được $X(4) = (19, 0, 4, 1)$ là một phương án tối ưu như vậy.

Cách 2: Phương án tối ưu cực biên thứ nhất của bài toán là $X^*_1 = (5,0,0,3)$. Do tồn tại $z_{j3} > 0$ nên véc tơ cột A_3 đưa được vào cơ sở mới. Khi đó ta được cơ sở tối ưu thứ hai là:

A_J	C_J	X_J	2	-1	-5	4	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_3	-5	6	0	-1	1	2	1	0
A_1	2	26	1	-2	0	7	4	0
A_6	0	1	0	-2	0	-1	1	1
		22	0	2	0	0	3	0

Phương án tối ưu cực biên thứ hai là $X^*_2 = (26,0,6,0)$, rõ ràng phương án này khác với

http://www.ebook.edu.vn

phương án tối ưu cực biên thứ nhất. Bài toán có hai phương án tối ưu khác nhau nên bài toán có vô số phương án tối ưu.

Lấy chẳng hạn p =1, q = 2 $\Rightarrow$ $X_{(1,2)} = \dfrac{X_1^* + 2X_2^*}{3} = \dfrac{(5, 0, 0, 3) + 2\,(26, 0, 6, 0)}{3}$ = (19, 0, 4, 1)

là một phương án tối ưu không cực biên của bài toán.

Ví dụ tự làm: Cho bài toán quy hoạch quy hoạch tuyến tính:

$$f(X) = x_1 + 8x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 6$$

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 1$$

$$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 13$$

$$x_j \geq 0 \;\; \forall\; j = \overline{1,5}.$$

a/ Xét xem các vectơ $X_0 = (4, 0, 0, 3, 0)$; $X' = (2, 0, 5/2, 5/2, 0)$; $X'' = (0, 3, 0, 4, 2)$ có phải là những phương án cực biên của bài toán đã cho hay không?

Biểu diễn các vectơ ngoài cơ sở theo các vectơ cơ sở của phương án cực biên không suy biến.

§ 1.4 Phương pháp biến giả giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc không hoàn thiện .

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \min \qquad (1.4.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (1.4.2)$$

$$x_j \geq 0,\; j = \overline{1,n} \qquad (1.4.3)$$

Trong đó vẫn giả thiết ma trận ràng buộc A có rankA = m < n. Giả thiết thêm $b_i \geq 0$ $\forall$ $i = \overline{1,m}$, giả thiết này không làm mất tính tổng quát của vấn đề (vì nếu tồn tại $b_i < 0$ thì ta chỉ việc đổi dấu hai vế của phương trình thứ i).

Ta biết rằng muốn giải bài toán bằng phương pháp đơn hình ta phải có phương án cực biên ban đầu, nếu bài toán không cho phương án cực biên ban đầu thì ta phải tìm phương án cực biên ban đầu. Nhưng việc tìm phương án cực biên ban đầu chỉ dơn giản với bài toán quy hoạch tuyến tính dạng hoàn thiện.

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu một phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính không hoàn thiện thông qua câu trả lời của một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng hoàn thiện tương ứng:

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \cdots + Mx_{n+m} \rightarrow \min \qquad (1.4.4)$$

$$\left.\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & & & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & & & + x_{n+m} & = b_m \end{array}\right\} \qquad (1.4.5)$$

$$x_j \geq 0,\; j = \overline{1,n+m} \qquad (1.4.6)$$

trong đó M là số dương đủ lớn.

http://www.ebook.edu.vn