

### Chủ đề 1. Công thức xác suất toàn phần và công thức xác suất Bayes

**Câu 1.** Có 3 vỏ ngoài giống nhau, hộp thứ nhất đựng 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm, hộp thứ hai đựng 15 sản phẩm trong đó có 10 chính phẩm, hộp thứ ba đựng 25 sản phẩm trong đó có 15 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm.

a) Tìm xác suất để lấy được chính phẩm.

b) Giả sử sản phẩm lấy ra là chính phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm này lấy ra từ hộp thứ hai.

$$\begin{array}{l} \text{Hộp 1: } 6^{\text{CP}} + 4^{\text{P}^2} \\ \text{Hộp 2: } 10^{\text{CP}} + 5^{\text{P}^2} \\ \text{Hộp 3: } 15^{\text{CP}} + 10^{\text{P}^2} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Hộp 1: } 6^{\text{CP}} + 4^{\text{P}^2} \\ \text{Hộp 2: } 10^{\text{CP}} + 5^{\text{P}^2} \\ \text{Hộp 3: } 15^{\text{CP}} + 10^{\text{P}^2} \end{array}} \right\} \rightarrow 1 \text{ hộp} \rightarrow 1 \text{ sp}^2$$

a) Xác định lấy được CP

Giả: A là b/c "lấy được CP" từ hộp"  
H<sub>i</sub> là b/c "lấy được hộp i" i = 1, 2, 3

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A/H_1) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} = \frac{6}{10}; \quad P(A/H_2) = \frac{10}{15}; \quad P(A/H_3) = \frac{15}{25}$$

$$\text{Áp dụng xđ: } P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) \\ = \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{10}{15} + \frac{1}{3} \times \frac{15}{25} =$$

### Chủ đề 1. Công thức xác suất toàn phần và công thức xác suất Bayes

**Câu 1.** Có 3 vỏ ngoài giống nhau, hộp thứ nhất đựng 10 sản phẩm, trong đó có 6 chính phẩm, hộp thứ hai đựng 15 sản phẩm trong đó có 10 chính phẩm, hộp thứ ba đựng 25 sản phẩm trong đó có 15 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm.

a) Tìm xác suất để lấy được chính phẩm.

b) Giả sử sản phẩm lấy ra là chính phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm này lấy ra từ hộp thứ hai.

$$\begin{array}{l} \text{Hộp 1: } 6^{\text{CP}} + 4^{\text{P}^2} \\ \text{Hộp 2: } 10^{\text{CP}} + 5^{\text{P}^2} \\ \text{Hộp 3: } 15^{\text{CP}} + 10^{\text{P}^2} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Hộp 1: } 6^{\text{CP}} + 4^{\text{P}^2} \\ \text{Hộp 2: } 10^{\text{CP}} + 5^{\text{P}^2} \\ \text{Hộp 3: } 15^{\text{CP}} + 10^{\text{P}^2} \end{array}} \right\} \rightarrow 1 \text{ hộp} \rightarrow 1 \text{ sp}^2$$

đi lấy được CP

$$P(A) = \sum_{i=1}^n \underbrace{P(H_i)} \cdot \underbrace{P(A/H_i)}$$

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)} \\ = \frac{P(H_j) \cdot P(A/H_j)}{P(A)}$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} \\ = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{10}{15}}{0.622} = 0.357$$

**Chủ đề 2. Tính xác suất của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn và xấp xỉ phân phối nhị thức bởi phân phối chuẩn**

**Câu 2.** Trong một đợt tuyển thi công chức ở một thành phố có 1000 người dự thi, với tỷ lệ đạt là 80%. Tính xác suất để:

- a) Có ít nhất 172 người không đạt.  $P(X \geq 172)$   
b) Có khoảng 170 người đến 180 người không đạt.

$$X \sim N(\mu; \sigma^2)$$

$$P(a < X < b) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > a) = 0.5 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X < a) = 0.5 + \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

a)  $X$  là số ng không đạt trong đợt thi

Bài toán thuộc mẫu lược đồ Bernoulli với  $n=1000$

$$\begin{cases} p = 1 - 0.8 = 0.2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X \sim B(1000; 0.2)$$

Vì  $n=1000$  khá lớn  
 $\begin{cases} p = 0.2 \text{ không gần } 0 \text{ và } 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow X \approx N(np; npq) \quad \begin{cases} np = 200 \\ npq = 160 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X \geq 172) \approx 0.5 - \Phi\left(\frac{172 - 200}{\sqrt{160}}\right) \approx 0.5 - \Phi(-2.21)$$

$$= 0.5 + \Phi(2.21)$$

$$= 0.5 + 0.4864 = \boxed{0.9864}$$

$$a) P(170 \leq X \leq 180) = \Phi\left(\frac{180 - 200}{\sqrt{160}}\right) - \Phi\left(\frac{170 - 200}{\sqrt{160}}\right) =$$

$$\approx \Phi(-1.58) - \Phi(-2.37)$$

$$= \Phi(2.37) - \Phi(1.58)$$

$$\approx 0.4911 - 0.4429 = 0.0482$$

**Chủ đề 3. Biến ngẫu nhiên hai chiều (Tính kỳ vọng, phương sai)**

**Câu 3.** Cho bảng phân phối đồng thời của **X** và **Y**

<b>X \ Y</b>	1	6	8
2	0,05	0,1	a
5	0,1	0,05	0,02
10	0,2	0,2	0,1

a) Tìm a.

b) Tính  $E(3X - 4Y)$

c) Tính  $V(-3X + 5)$

$$a) \quad a = 1 - (0,05 + 0,1 + 0,1 + 0,2 + \dots) = \boxed{0,18}$$

$$b) \quad E(3X - 4Y) = 3 \underline{E(X)} - 4 \underline{E(Y)}$$

B1: Lập bảng  $p^1$  của thành phần X

X có tập gtn:  $\{2, 5, 10\}$

$$P(X=2) = 0,05 + 0,1 + 0,18 = 0,33$$

$$P(X=5) = 0,1 + 0,05 + 0,02 = 0,17$$

$$P(X=10) = 1 - P(X=2) - P(X=5) = 0,5$$

$$\Rightarrow \text{X có bảng } p^1 \text{ xs: } \begin{array}{c|ccc} X & 2 & 5 & 10 \\ \hline P & 0,33 & 0,17 & 0,5 \end{array}$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum x_i p_i = 6,51$$

$$\sum_{i,j} P(X=x_i, Y=y_j) = 1$$

B2: Lập bảng  $p^2$  của thành phần

σ tập gtn:  $\{1, 6, 8\}$

$$P(Y=1) = 0,35$$

$$P(Y=6) = 0,35$$

$$P(Y=8) = 0,3$$

$$\Rightarrow \text{Y có bảng } p^2 \text{ xs} \quad \begin{array}{c|ccc} Y & 1 & 6 & 8 \\ \hline P & 0,35 & 0,35 & 0,3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E(Y) = \sum y_i p_i = 4,85$$

$$\Rightarrow E(3X - 4Y) = 3 \times 6,51 - 4 \times 4,85 = \boxed{0,13}$$

c) Tìm  $V(-3X + 5) = (-3)^2 V(X) + V(5) = 9V(X)$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 55,57$$

$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 55,57 - 6,51^2 = \boxed{13,1899}$$

ƯL  $\mu$ :  $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$  (Th1, 2)  $\Rightarrow$  KTC đx của  $\mu$ :  $(\bar{X} \pm u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s'} \sqrt{n}$  (Th2)  $\Rightarrow$  KTC đx của  $\mu$ :  $(\bar{X} \pm t_{\alpha/2}^{(n-1)} \frac{s'}{\sqrt{n}})$

ƯL  $p$ :  $U = \frac{f - p}{\sqrt{pq}} \sqrt{n} \Rightarrow$  KTC đx của  $p$ :  $(f \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}})$

**Chủ đề 4. Tìm khoảng ước lượng đối xứng của xác suất  $p$  trong phân phối nhị thức ( $n \geq 100$ ) và kỳ vọng trong phân phối chuẩn (phương sai chưa biết)**

**Câu 4.** Để khảo sát **chỉ tiêu  $X$**  của một loại sản phẩm, người ta quan sát một mẫu và có kết quả như sau:

<b>X(cm)</b>	11 - 15	15 - 19	19 - 23	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39
Số sản phẩm	8	9	20	16	16	13	18

a) Hãy **ước lượng** giá trị **trung bình** của chỉ tiêu  $X$  với độ tin cậy 95%.

b) Những sản phẩm có chỉ tiêu  $X$  từ 19 trở xuống gọi là sản phẩm loại B. Hãy ước lượng **giá trị trung bình** của chỉ tiêu  $X$  những sản phẩm loại B với độ tin cậy 99% **nếu  $X$  có phân phối chuẩn.**

a)  $\gamma = 0,95$ ,  $ƯL \mu = E(X)$

Chọn TC:  $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$

KTC đx của  $\mu$ :

$[\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

**Bảng tần mẫu**

$X$	13	17	21	25	29	31	35
$n_i$	8	9	20	...	...	...	...

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \\ s'^2 = \frac{1}{n-1} (\sum n_i x_i^2 - n \bar{x}^2) = \Rightarrow s' = \end{cases}$$

$$\gamma = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$$

$$\Rightarrow \bar{x} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s'}{\sqrt{n}} = \dots = [ \quad ] \Rightarrow \mu \in [ \quad ; \quad ]$$

KL:

**Chủ đề 4. Tìm khoảng ước lượng đối xứng của xác suất p trong phân phối nhị thức ( $n \geq 100$ ) và kỳ vọng trong phân phối chuẩn (phương sai chưa biết)**

**Câu 4.** Để khảo sát **chỉ tiêu X** của một loại sản phẩm, người ta quan sát một mẫu và có kết quả như sau:

X(cm)	11 - 15	15 - 19	19 - 23	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39
Số sản phẩm	8	9	20	16	16	13	18

a) Hãy ước lượng giá trị trung bình của chỉ tiêu X với độ tin cậy 95%.

b) Những sản phẩm có chỉ tiêu X từ 19 trở xuống gọi là sản phẩm loại B.

Hãy ước lượng **giá trị trung bình** của chỉ tiêu X những sản phẩm loại B với độ tin cậy 99% **nếu X có phân phối chuẩn.**

b) bảng tần số

X	13	17
$n_i$	8	9

Vì  $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

$\sigma$  chưa biết,  $n = 17 < 30$   
 $\rightarrow$  bt theo hkh 2

Chọn ttc  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{s'} \sqrt{n}$

$$\Rightarrow \text{KTC của } \mu: \left[ \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{s'}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{s'}{\sqrt{n}} \right]$$

X	13	17
$n_i$	8	9

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \frac{1}{17} (13 \times 8 + 17 \times 9) = 15,11$$

$$s'^2 = \frac{1}{n-1} (\sum n_i x_i^2 - n \bar{x}^2) = \frac{1}{16} (8 \times 13^2 + 9 \times 17^2 - 17 \times 15,11^2)$$

$$\gamma = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} = t_{0.005}^{(16)} = 2,9208$$

$\Rightarrow \dots$

**Câu 5.** Để đánh giá trữ lượng cá trong hồ, người ta đánh bắt  $\frac{M}{n_A}$  2000 con cá, đánh dấu rồi thả xuống hồ. Sau đó bắt lại  $\frac{n}{N}$  400 con thì thấy có 80 con có dấu. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng trữ lượng cá hiện có trong hồ.

$$p = \frac{M}{N}$$

$$\Rightarrow N = \frac{M}{p}$$

ƯLp Chọn TK:  $U = \frac{f - p}{\sqrt{pq}} \sqrt{n}$

KTC dx của q:  $\left[ f - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}; f + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} \right]$

Thên mẫu, ta có:  $f_{tn} = \frac{n_A}{n} = \frac{80}{400} = 0,2$ ;  $pq \approx f_{tn}(1 - f_{tn}) = 0,16$

$\gamma = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow u_{\alpha/2} = u_{0,025} = 1,96$

$\Rightarrow f_{tn} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f_{tn}(1 - f_{tn})}{n}} = \begin{bmatrix} 0,2392 \\ 0,1608 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow p \in [0,1608; 0,2392] \Rightarrow N \in \left[ \frac{M}{0,2392}; \frac{M}{0,1608} \right], M = 2000$

$\Rightarrow N \in [..; ..]$

KL

**Câu 6.** Định mức thời gian hoàn thành một sản phẩm là 14 phút. Có cần thay đổi định mức không, nếu theo dõi thời gian hoàn thành sản phẩm ở 25 công nhân, ta thu được bảng số liệu sau:

Thời gian sản xuất một sản phẩm (phút)	Số công nhân
10 - 12	2
12 - 14	6
14 - 16	10
16 - 18	4
18 - 20	3

**Yêu cầu kết luận** với mức ý nghĩa  $\alpha = 0,05$  biết rằng thời gian

hoàn thành một sản phẩm là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn.

KL:

$\alpha = 0,05, \begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

TKKĐ:  $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s'^2/n}}$

$\alpha = 0,05 \Rightarrow t_{\alpha/2}^{(n-1)} = \dots$

$\Rightarrow K_\alpha = \{t_{tn}: |t_{tn}| > \dots\}$

$t_{tn} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s'} \sqrt{n}$

$t_{tn} \notin K_\alpha \rightarrow \text{kl.}$