Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Đức Nghĩa
Tối ưu hóa (Quy hoạch tuyến tính và rời rạc). NXB Giáo dục 1999
2. Bùi Minh Trí
Quy hoạch toán học. NXB Khoa học kỹ thuật 1999
3. Bùi Minh Trí
Tối ưu hóa.Tập 1,2. NXB Khoa học kỹ thuật 2005
4. Bùi Minh Trí
Bài tập tối ưu hóa. NXB Khoa học kỹ thuật 2005
5. Phí Mạnh Ban
Quy hoạch tuyến tính. NXB Đại học sư phạm 2005
6. Phí Mạnh Ban
Bài tập quy hoạch tuyến tính. NXB Đại học sư phạm 2004
7. Trần Vũ Thiệu
Giáo trình Tối ưu tuyến tính. NXB ĐHQG Hà Nội 2004
8. Phạm Trí Cao
Tối ưu hóa. ĐH Kinh tế thành phố Hồ Chí Minh 2005
9. Phạm Trí Cao
Bài tập tối ưu hóa. ĐH Kinh tế thành phố Hồ Chí Minh 2005
10. PGS. TS Bùi Thế Tâm
Giải các bài toán tối ưu trên Excel. Phòng tối ưu và điều khiển. Viện Toán học
11. Hoàng Tụy
Lý thuyết tối ưu (Bài giảng lớp cao học). Viện toán học 2003
12. PGS.TS Nguyễn Nhật lệ
Tối ưu hóa ứng dụng. NXB Khoa học kỹ thuật 2001
13. Lê Mưu Dũng
Nhập môn các phương pháp tối ưu. NXB Khoa học kỹ thuật 1998
14. Phan Quốc Khánh – Trần Huệ Nương
Quy Hoạch Tuyến Tính. Nhà xuất bản Giáo Dục
15. Đặng Văn Uyên
Quy hoạch tuyến tính. NXB Giáo dục 1998

Mục lục

Chương 1

Mô hình bài toán tối ưu

1. PHÂN LỚP BÀI TOÁN

1.1. Nghiên cứu ban đầu

* Biểu diễn bài toán:

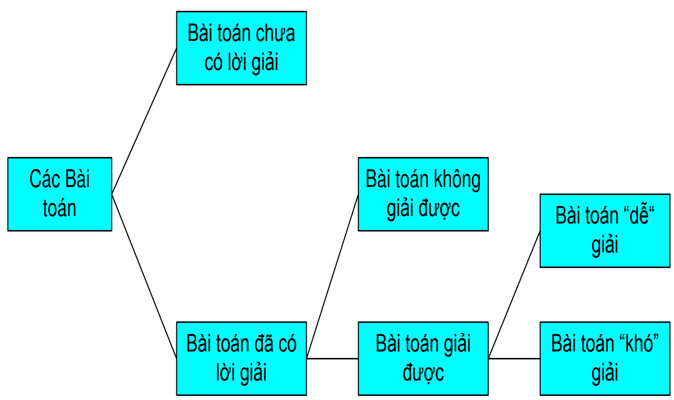
Input: Thông tin đầu vào

Output: Kết quả đầu ra

1.2. Phân lớp bài toán.

Tại sao phải phân lớp bài toán?

Lợi ích của việc phân lớp ? **Để liệu sức mình** !



Bài toán chia thành 2 loại:

- Bài toán đã có lời giải:
- Bài toán chưa có lời giải (*Open Problem*).

Bài toán đã có lời giải được chia thành 2 loại.

- Bài toán không thể giải được.
- Bài toán có thể giải được

Bài toán có thể giải được chia thành 2 loại.

- Bài toán thực tế giải được: BT trị được, BT "dễ" (*Easy*).
- Bài toán thực tế khó giải được: BT bất trị được (*Interactability*), BT "khó" (*Hard*).

Bài toán thực tế khó giải được: 2 loại.

- Bài toán thực tế khó giải: "Khó vừa phải" (*Binary Hard*).

- Bài toán thực tế khó giải: “Rất khó” (*Unary Hard*).

→ Chú ý: Cần phân biệt giữa “*không thể giải*” và “*khó giải*” (“bất trị”).

1.3. Phân lớp bài toán theo độ phức tạp của thuật toán

1.3.1 Lớp bài toán P, NP.

1). Với một bài toán, có hai khả năng xảy ra: Đã có lời giải. Chưa có lời giải.

2). Với bài toán đã có lời giải, có hai trường hợp xảy ra:

- Giải được bằng thuật toán.

- Không giải được bằng thuật toán.

3). Với bài toán giải được bởi thuật toán cũng chia thành hai loại:

+ Thực tế giải được: “Dễ giải”.

Được hiểu là thuật toán được xử lý trong thời gian đủ nhanh, thực tế cho phép, đó là thuật toán có độ phức tạp thời gian đa thức.

+ Thực tế khó giải: “Khó giải”.

Được hiểu là thuật toán phải xử lý trong nhiều thời gian, thực tế khó chấp nhận, đó là thuật toán có độ phức tạp thời gian là trên đa thức (hàm mũ).

P : là lớp bài toán giải được bằng thuật toán đơn định, đa thức (*Polynomial*).

NP : là lớp bài toán giải được bằng thuật toán không đơn định, đa thức.

$\Rightarrow$ P $\subset$ NP.

→ Chú ý: Hiện nay người ta chưa biết **P ≠ NP.**

1.3.2 Lớp bài toán NP- Hard, NP- Complete.

1.3.2.1. Các khái niệm.

a. Khái niệm "Dẫn về được".

Bài toán B được gọi là "*Dẫn về được*" bài toán A một cách *đa thức*, ký hiệu: $B \propto A$. Nếu có thuật toán đơn định đa thức để giải bài toán A thì → cũng có thuật toán đơn định đa thức để giải bài toán B.

Nghĩa là: Bài toán A "khó hơn" bài toán B, hay B "dễ" hơn A.

- B được diễn đạt bằng ngôn ngữ của bài toán A. (Tức là: B là trường hợp riêng của A).

- Giải được A → Giải được B.

→ Chú ý: Quan hệ $\propto$ có tính chất bắc cầu, tl: $C \propto B$ và $B \propto A$ → $C \propto A$.

b. Khái niệm "Khó tương đương".

Bài toán A gọi là “khó tương đương” bài toán B, ký hiệu $A \sim B$, nếu : $A \propto B$ và $B \propto A$

1.3.2.2. Bài toán NP- Hard.

* Bài toán A được gọi là *NP - hard* (NP- khó) nếu $\forall$ L $\in$ NP đều là L $\propto$ A.

* Lớp bài toán NP - hard bao gồm tất cả những bài toán NP - hard.

Bài toán NP – hard có thể nằm *trong* hoặc *ngoài* lớp NP.

1.3.2.3. Bài toán NP- Complete.

a. Khái niệm Bài toán NP- Complete.

* Bài toán A được gọi là NP - Complete (NP- đầy đủ) nếu A là *NP – Hard* và A$\in$ NP. Tóm lại: *Bài toán NP – Complete là bài toán NP - hard nằm trong lớp NP.*

* Lớp bài toán NP - Complete bao gồm tất cả những bài toán NP - Complete.

Lớp NP – Complete là có thực, vì Cook và Karp đã chỉ ra BT đầu tiên thuộc lớp này.

Đó là bài toán "thỏa được": SATISFYABILITY.

b. Chứng minh bài toán là NP – Hard.

<u>Cách 1:</u> Theo định nghĩa

* Bài toán A được gọi là NP - hard (NP- khó) nếu $\forall$ L $\in$ NP đều là L $\propto$ A.

+ Chứng minh theo định nghĩa gặp nhiều khó khăn vì phải chứng minh: Mọi bài toán trong NP đều "dễ hơn" A.

+ Theo cách 1, năm 1971 Cook và Karp đã chỉ ra BT đầu tiên thuộc lớp NP - hard.

Đó là bài toán "thoả được" (*Satisfyability*).

<u>Cách 2</u>

+ Để chứng minh bài toán A là NP – hard, trong thực tế người ta thường dựa vào bài toán B nào đó đã được biết là NP - Hard và chứng minh rằng B $\propto$ A.

Theo tính chất bắc cầu của quan hệ "dẫn về", A thoả mãn định nghĩa NP – hard.

Theo cách hiểu trực quan: B đã "khó" thì A càng "khó".

2. GIỚI THIỆU VỀ BÀI TOÁN TỐI ƯU

Bài toán tối ưu bắt nguồn từ những nghiên cứu của nhà toán học Nga nổi tiếng, Viện sỹ Kantorovich L.V. trong một loạt các công trình về bài toán lập kế hoạch sản xuất được công bố năm 1938. Năm 1947 nhà toán học Mỹ Dantzig đã nghiên cứu và đề xuất phương pháp đơn hình (*Simplex Method*) để giải bài toán tối ưu tuyến tính. Năm 1952 phương pháp đơn hình đã được cài đặt và chạy trên máy tính điện tử ở Mỹ.

Có thể tạm định nghĩa tối ưu hóa là lĩnh vực toán học nghiên cứu các bài toán tối ưu mà hàm mục tiêu (*vấn đề được quan tâm*) và các ràng buộc (*điều kiện của bài toán*) đều là hàm và các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính. Đây chỉ là một định nghĩa mơ hồ, bài toán quy hoạch tuyến tính sẽ được xác định rõ ràng hơn thông qua các mô hình và ví dụ.

2.1 Xây dựng mô hình toán học cho một số vấn đề thực tế

Các bước nghiên cứu và ứng dụng một bài toán quy hoạch tuyến tính (QHTT) điển hình là như sau:

Bước 1: *Xác định vấn đề cần giải quyết, thu thập dữ liệu.*

Xây dựng mô hình định tính cho vấn đề đặt ra, tức là xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng nhất và xác lập các qui luật mà chúng phải tuân theo. Thông thường bước này nằm ngoài phạm vi của toán học

Bước 2: *Lập mô hình toán học.*

Xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học cho mô hình định tính. Như vậy, mô hình toán học là trừu tượng hóa dưới dạng ngôn ngữ toán học của hiện tượng thực tế, cần phải được xây dựng sao cho việc phân tích nó cho phép ta hiểu được bản chất của hiện tượng. Mô hình toán học thiết lập mối quan hệ giữa các biến số và các tham số điều khiển hiện tượng.

Trong bước này, một việc rất quan trọng là cần phải xác định hàm mục tiêu, tức là một đặc trưng bằng số mà giá trị càng lớn (càng nhỏ) của nó tương ứng với tình huống càng tốt hơn đối với người cần nhận quyết định. Bước thứ 2 bắt đầu đòi hỏi những kiến thức toán học nhất định.

Như vậy, sau hai bước đầu ta đã phát biểu được bài toán cần giải.

Bước 3: *Xây dựng các thuật toán để giải bài toán đã mô hình hoá bằng ngôn ngữ thuận lợi cho việc lập trình cho máy tính.*

Các thuật toán tối ưu hóa là một trong những công cụ đắc lực để giải quyết các bài toán đặt ra. Cần nhấn mạnh rằng, thông thường các bài toán thực tế có kích thước rất lớn, vì thế, để giải chúng cần phải sử dụng đến máy tính điện tử.

Bước 4: *Tính toán thử và điều chỉnh mô hình nếu cần.*

Trong bước này cần kiểm chứng lại các kết quả tính toán thu được trong bước 3. Trong bước này cần phải xác lập mức độ phù hợp của mô hình lý thuyết với vấn đề thực tế mà nó mô tả. Để thực hiện bước này, có thể làm thực nghiệm hoặc áp dụng phương pháp phân tích chuyên gia.

Ở đây có 2 khả năng:

Khả năng 1: Các kết quả tính toán phù hợp với thực tế. Khi đó có thể áp dụng nó vào việc giải quyết vấn đề thực tế đặt ra. Trong trường hợp mô hình cần được sử dụng nhiều lần, sẽ xuất hiện vấn đề xây dựng hệ thống phần mềm đảm bảo giao diện thuận tiện giữa người sử dụng và máy tính, không đòi hỏi người sử dụng phải có trình độ chuyên môn cao về toán học.

Khả năng 2: Các kết quả tính toán không phù hợp với thực tế. Trong trường hợp này cần phải xem xét các nguyên nhân của nó. Nguyên nhân đầu tiên có thể do các kết quả tính toán trong bước 3 là chưa có đủ độ chính xác cần thiết. Khi đó cần phải xem lại các thuật toán cũng như các chương trình tính toán trong bước này.

Một nguyên nhân khác rất có thể là do mô hình xây dựng chưa phản ảnh được đầy đủ hiện tượng thực tế. Nếu vậy cần phải rà soát lại bước 1, trong việc xây dựng mô hình định tính có yếu tố hoặc quy luật nào bị bỏ sót không? Cuối cùng cần phải xem xét hoặc xây dựng lại mô hình toán học ở bước 2. Như vậy, trong trường hợp kết quả tính toán không phù hợp với thực tế chúng ta cần phải quay lại kiểm tra tất cả các bước thực hiện trước đó, và rất có thể sẽ phải lặp đi lặp lại nhiều lần cho đến khi kết quả tính toán phù hợp với thực tế.

Bước 5: *Áp dụng giải các bài toán thực tế.*

2.2 Một số mô hình thực tế

Mô hình hóa là một lính vực nghiên cứu lí thuyết riêng, đòi hỏi trước tiên là sự hiểu biết những kiến thức trong lĩnh vực của đối tượng cần mô phỏng.

Trong mục này ta xét vài mô hình truyền thống của tối ưu hóa để minh họa cho việc xây dựng mô hình toán học cho các bài toán có nội dung kinh tế, kỹ thuật.

2.2.1 Bài toán vốn đầu tư

Người ta cần có một lượng (tối thiểu) chất dinh dưỡng i=1,2,..,m do các thức ăn j=1,2,...,n cung cấp.

Giả sử :

+ a_{ij} là số lượng chất dinh dưỡng loại i có trong 1 đơn vị thức ăn loại j

  (i=1,2,...,m) và (j=1,2,..., n)

+ b_i là nhu cầu tối thiểu về loại dinh dưỡng i

+ c_j là giá mua một đơn vị thức ăn loại j

Vấn đề đặt ra là phải mua các loại thức ăn như thế nào để tổng chi phí bỏ ra ít nhất mà vẫn đáp ứng được yêu cầu về dinh dưỡng. Vấn đề được giải quyết theo mô hình sau đây:

+ Gọi $x_j \geq 0$ (j= 1,2,...,n) là số lượng thức ăn thứ j cần mua

Tổng chi phí cho việc mua thức ăn là:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_n x_n$$

Vì chi phí bỏ ra để mua thức ăn phải là thấp nhất nên yêu cầu cần được thỏa mãn là:

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_n x_n$$

Lượng dinh dưỡng i thu được từ thức ăn 1 là : $a_{i1} x_1$ (i=1→m)

Lượng dinh dưỡng i thu được từ thức ăn 2 là : $a_{i2}x_2$

....

Lượng dinh dưỡng i thu được từ thức ăn n là : $a_{in}x_n$

Vậy lượng dinh dưỡng thứ i thu được từ các loại thức ăn là:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n \qquad (i=1\to m)$$

Khi đó theo yêu cầu của bài toán ta có mô hình toán sau đây:

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

2.2.2 Bài toán lập kế hoạch sản xuất

2.2.2.1 Ví dụ

Một cơ sở sản xuất dự định sản xuất 2 loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II, III. Số lượng đơn vị dự trữ của từng loại nguyên liệu và số lượng đơn vị từng loại nguyên liệu cần dùng để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng dưới đây:

Loại nguyên liệu	Nguyên liệu dự trữ	Số lượng đơn vị nguyên liệu cần cùngcho việc sản xuất một đơn vị sản phẩm	
		A	B
I	18	2	3
II	30	5	4
III	25	1	6

Hãy lập kế hoạch sản xuất, tức là tính xem cần sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm mỗi loại để tiền lãi thu được là lớn nhất, biết rằng bán một đơn vị sản phẩm A thu lãi 3 trăm nghìn đồng, bán một đơn vị sản phẩm B thi lãi 2 trăm nghìn đồng.

Ta xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên:

Gọi x và y theo thứ tự là số lượng đơn vị sản phầm A và B cần sản xuất theo kế hoạch. Khi đó tiền lãi thu được sẽ là:

$$z = 3x + 2y$$

Do nguyên liệu dự trữ có hạn nên x và y phải chịu những ràng buộc nào đó, cụ thể là:

$2x + 3y \le 18$ (ràng buộc về nguyên liệu I)

$5x + 4y \le 30$ (ràng buộc về nguyên liệu II)

$x + 6y \le 25$ (ràng buộc về nguyên liệu III)

Ngoài ra còn có các ràng buộc rất tự nhiên nữa là $x \ge 0, y \ge 0$ vì số đơn vị sản phẩm không thể âm.

Bằng ngôn ngữ toán học bài toán trên có thể được phát biểu như sau:

Tìm x và y sao cho tại đó biểu thức z = 3x + 2y đạt giá trị lớn nhất với các ràng buộc:

$$\begin{cases} 2x + 3y \le 18 \\ 5x + 4y \le 30 \\ x + 6y \le 25 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

2.2.2.2 Mô hình của bài toán lập kế hoạch sản xuất

Từ m loại nguyên liệu hiện có người ta muốn sản xuất n loại sản phẩm.

Giả sử :

+ a_{ij} là lượng nguyên liệu loại i dùng để sản xuất 1 sản phẩm loại j (i=1,2,...,m) và (j=1,2,..., n)
+ b_i là số lượng nguyên liệu loại i hiện có
+ c_j là lợi nhuận thu được từ việc bán một đơn vị sản phẩm loại j

Vấn đề đặt ra là phải sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu sao cho tổng lợi nhuận thu được từ việc bán các sản phẩm lớn nhất trong điều kiện nguyên liệu hiện có.

Gọi $x_j \ge 0$ là số lượng sản phẩm thứ j sẽ sản xuất (j=1,2,...,n)

Tổng lợi nhuận thu được từ việc bán các sản phẩm là:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Vì yêu cầu lợi nhuận thu được cao nhất nên ta cần có :

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

+ Lượng nguyên liệu thứ i=1→m dùng để sản xuất sản phẩm thứ 1 là $a_{i1}x_1$

+ Lượng nguyên liệu thứ i=1→m dùng để sản xuất sản phẩm thứ 2 là $a_{i2}x_2$

+ ....

+ Lượng nguyên liệu thứ i=1→m dùng để sản xuất sản phẩm thứ n là $a_{in}x_n$

Vậy lượng nguyên liệu thứ i dùng để sản xuất là các sản phẩm là:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n$$

Vì lượng nguyên liệu thứ i=1→m dùng để sản xuất các loại sản phẩm không thể vượt quá lượng được cung cấp là b_i nên:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \le b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

Vậy theo yêu cầu của bài toán ta có mô hình sau đây:

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \ = c_1x_1+c_2x_2+\ldots\ldots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0 \quad (j=1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

2.2.3 Bài toán vận tải

2.2.3.1 Ví dụ

Có một loại hàng cần được vận chuyển từ hai kho (trạm phát) P_1 và P_2 tới ba nơi tiêu thụ (trạm thu) là T_1, T_2, T_3. Bảng dưới đây cho biết số lượng hành cần vận chuyển đii ở mỗi kho và số lượng hàng cần nhận ở mỗi nơi tiêu thụ và cước phí vận chuyển một đơn vị hành từ mỗi kho tới nơi tiêu thụ tương ứng.

Trạm phát	**Trạm thu**			**Lượng phát**
	T_1	**T_2**	**T_3**	
P_1	5	2	3	**30**
P_2	2	1	1	**75**
Lượng thu	**35**	**25**	**45**	

Hãy lập kế hoạch vận chuyển thỏa mãn mọi yêu cầu thu phát sao cho chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Nếu kí hiệu x_{ij} (I = 1, 2 và j = 1, 2, 3) là lượng hành cần vận chuyển từ kho P_i đến nơi tiêu thụ T_j thì mô hình toán học của bài toán vận tải sẽ là:

Tìm các số x_{ij} (I = 1, 2 và j = 1, 2, 3) sao cho tại đó biểu thức:

$$5x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+2x_{21}+x_{22}+x_{23}\rightarrow\min$$ với các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} & = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} & = 75 \\ x_{11} + x_{21} & = 35 \\ x_{12} + x_{22} & = 25 \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1,\ 2 \text{ và } j=1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

2.2.3.2 Mô hình bài toán vận tải

Người ta cần vận chuyển hàng hoá từ m kho đến n cửa hàng bán lẻ.

+ Lượng hàng hoá ở kho i là s_i (i=1,2,...,m)
+ Nhu cầu hàng hoá của cửa hàng j là d_j (j=1,2,...,n).
+ Cước vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ kho i đến của hàng j là $c_{ij} \geq 0$ đồng.

Giả sử rằng tổng hàng hoá có ở các kho và tổng nhu cầu hàng hoá ở các cửa hàng là bằng nhau, tức là:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Bài toán đặt ra là lập kế hoạch vận chuyển để tiền cước là nhỏ nhất, với điều kiện là mỗi cửa hàng đều nhận đủ hàng và mỗi kho đều trao hết hàng.

Gọi $x_{ij} \geq 0$ là lượng hàng hoá phải vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j. Cước vận chuyển chuyển hàng hoá i đến tất cả các kho j là:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Cước vận chuyển tất cả hàng hoá đến tất cả kho sẽ là:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Theo yêu cầu của bài toán ta có mô hình toán sau đây:

$$\boxed{\begin{aligned} & \min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ & \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & (j = 1,2,\ldots,n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m) & (j = 1,1,\ldots,n) \end{cases} \end{aligned}}$$

2.2.4 Bài toán cắt vật liệu

Trong thực tế, ta thường phải cắt những vật liệu dài (như thanh thép, ống nước, băng giấy…) có độ tài cho trước thành những đoạn ngắn hơn với số lượng nhất định để sử dụng. Nên cắ như thế nào cho tốn ít vật liệu nhất?

2.2.4.1 Ví dụ

Một phân xưởng sản xuất thép có những thanh thép nguyên dài 3.8 mét. Cần cắt thành ba loại đoạn ngắn hơn là T_1, T_2, T_3 với độ dài tương ứng là 1.8 mét, 1.4 mét và 1.0 mét. Có tất cả 5 mẫu cắt khác nhau (cho trong bảng).

Hỏi cần phải cắt theo mỗi mẫu bao nhiêu thanh thép nguyên để vừa đủ số lượng các đoạn T_1, T_2, T_3 mà phân xưởng cần sao cho tổng phần thép thừa là nhỏ nhất?

Loại đoạn cần	Mẫu cắt					Số đoạn cần có
	I	II	III	IV	V	
T_1 dài 1.8 mét	2	0	1	0	1	400
T_2 dài 1.4 mét	0	2	0	0	1	400
T_3 dài 1.0 mét	0	1	2	3	0	1300

2.2.4.2 Mô hình bài toán cắt vật liệu

Gọi x_i (j = 1,…,5) là số thanh thép nguyên cần cắt theo mẫu j. Số đoạn T_1 thu được là $2x_1 + x_3 + x_5$. Phân xưởng cần có 400 đoạn loại T_1. Vì thế, các biến số cần phải thỏa mãn là:

$$2x_1 + x_3 + x_5 = 400$$

Tương tự, để thu được số đoạn T_2, T_3 phân xưởng cần, các biến số phải thỏa mãn:

$$2x_2 + x_5 = 400$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1300$$

Tổng số thép thừa là: $f = 0.2x_1 + 0.8x_4 + 0.6x_5$ (mét).

Bài toán trên được phát biểu như sau:

Tìm các biến số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sao cho:

$$f = 0.2x_1 + 0.8x_4 + 0.6x_5 \to \min$$

Thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_5 = 400 \\ 2x_2 + x_5 = 400 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1300 \\ x_j \ge 0 \ (\forall j = 1..5) \end{cases}$$

3. BÀI TOÁN TỐI ƯU DẠNG CHUẨN TẮC, DẠNG CHÍNH TẮC

3.1 Bài toán tối ưu dạng tổng quát

3.1.1 Dạng tổng quát

Tổng quát những bài toán tối ưu cụ thể trên, một bài toán tối ưu là một mô hình toán tìm cực tiểu (*min*) hoặc cực đại (*max*) của hàm mục tiêu tuyến tính với các ràng buộc là bất đẳng thức và đẳng thức tuyến tính.

Dạng tổng quát của một bài toán tối ưu là:

$$\min/\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i \in I_1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & (i \in I_2) \qquad (\mathrm{II}) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i & (i \in I_3) \end{cases} \\ \begin{cases} x_j \ge 0 & (j \in J_1) \\ x_j \le 0 & (j \in J_2) \qquad (\mathrm{III}) \\ x_j \text{ tùy ý} & (j \in J_3) \end{cases} \end{cases}$$

Trong đó :

(I) **Hàm mục tiêu**

Là một tổ hợp tuyến tính của các biến số, biểu thị một đại lượng nào đó mà ta cần phải quan tâm của bài toán.

(II) **Các ràng buộc của bài toán** (các ràng buộc cưỡng bức)

Là các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính n biến số, sinh ra từ điều kiện của bài toán

(III) **Các các hạn chế về dấu của các biến số** (Các ràng buộc tự nhiên)

Người ta thường trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính dưới dạng ma trận như sau:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Gọi a_i (i=1→m) là dòng thứ i của ma trận A, ta có:

$$\text{min/max} \quad z(x) = c^T x \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a_i x = b_i & (i \in I_1) \\ a_i x \le b_i & (i \in I_2) \\ a_i x \ge b_i & (i \in I_3) \end{cases} & \text{(II)} \\ \begin{cases} x_j \ge 0 & (j \in J_1) \\ x_j \le 0 & (j \in J_2) \\ x_j \text{ tùy ý} & (j \in J_3) \end{cases} & \text{(III)} \end{cases}$$

Người ta gọi:

+ A là ma trận hệ số các ràng buộc.
+ c là vectơ chi phí (c^T là chuyển vị của c)
+ b là vectơ giới hạn các ràng buộc.

3.1.2 Phân loại bài toán tối ưu

a. Theo X_j

+ $X_j = \{x_j : -h_j \le x_j \le h_j\}$ với $h_j = +\infty,\ -h_j = -\infty$ → *Bài toán tối ưu liên tục.*
+ X_j là những tập rời rạc → *Bài toán tối ưu rời rạc.*
+ X_j là tập số nguyên → *Bài toán quy hoạch nguyên.*

b. Theo hàm f(x) cần lấy g(x)

+ Các hàm f(x), $g_i(x)$ là các hàm tuyến tính → *Bài toán tối ưu tuyến tính*
+ Các hàm f(x), $g_i(x)$ không là các hàm tuyến tính (phi tuyến) → *Bài toán tối ưu phi tuyến.*
+ Nếu các tham số xác định f(x), $g_i(x)$ là các hằng số → *Bài toán tối ưu tất định*. Ngược lại các tham số là các đại lượng ngẫu nhiên → *Bài toán tối ưu ngẫu nhiên*.
+ Nếu các tham số X_j độc lập với thời gian → *Bài toán tối ưu tĩnh*. Ngược lại X_j phụ thuộc vào thời gian → *Bài toán tối ưu động*.

→ Chúng ta chỉ nghiên cứu lớp bài toán tối ưu tuyến tính liên tục, tất định và tĩnh; lớp bài toán tối ưu rời rạc.

3.2 Bài toán tối ưu dạng chính tắc và chuẩn tắc

3.2.1 Bài toán tối ưu dạng chính tắc

Bài toán tối ưu chính tắc là bài toán tối ưu mà trong đó các ràng buộc chỉ có dấu = và các biến số đều không âm. Tức là:

$$\min/\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1,2,\ldots,m) \qquad \text{(II)} \\ x_j \ge 0 & (j = 1,2,\ldots,n) \qquad \text{(III)} \end{cases} \qquad (m \le n)$$

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} Ax = b & \text{(II)} \\ x \ge 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

3.2.2 Bài toán tối ưu dạng chuẩn tắc

Bài toán tối ưu chuẩn tắc là bài toán tối ưu mà trong đó các ràng buộc chỉ có dấu "$\ge$" và các biến số đều không âm. Tức là:

$$\min/\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i & (i = 1,2,\ldots,m) \qquad \text{(II)} \\ x_j \ge 0 & (j = 1,2,\ldots,n) \qquad \text{(III)} \end{cases} \qquad (m \le n)$$

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} Ax \ge b & \text{(II)} \\ x \ge 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

2.3.3 Biến đổi bài toán tối ưu tổng quát về dạng chính tắc hoặc chuẩn tắc

Người ta có thể biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát thành bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc nhờ các quy tắc sau đây:

+ Đưa ràng buộc bất đẳng thức dạng "$\le$" về dạng "$\ge$" bằng cách nhân 2 vế với -1

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge -b_i$$

+ Đưa ràng buộc "=" về dạng "$\ge$". Khi đó:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge -b_i \end{cases}$$

+ Đưa ràng buộc dạng "≥" về dạng "=" thì người ta trừ vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geq 0$ để được dấu "="

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

Nếu $(x_1, x_2, ...x_n, x_{n+i})$ là nghiệm của hệ thì $(x_1, x_2, ...x_n)$ là nghiệm của bất phương trình xuất phát.

+ Đưa ràng buộc dạng "≤" về dạng "=" thì người ta cộng vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geq 0$ để được dấu "=".

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

+ Các biến phụ chỉ là những đại lượng giúp ta biến các ràng buộc dạng bất đẳng thức thành đẳng thức, nó phải không ảnh hưởng gì đến hàm mục tiêu nên không xuất hiện trong hàm mục tiêu.

+ Nếu biến $x_j \leq 0$ thì ta đặt $x_j = - x'_j$ với $x'_j \geq 0$ rồi thay vào bài toán.

+ Nếu biến x_j là tuỳ ý (không có điều kiện về dấu) thì ta đặt có thể đưa về hiệu của hai biến không âm:

$$x_j = x_j^+ - x_j^- \text{ với } x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$$

+ Trong trường hợp trong số các ràng buộc có dòng mà vế phải của dòng đó là giá trị âm thì đổi dấu cả hai vế để được vế phải là một giá trị không âm.

+ Chuyển đổi bài toán min về bài toán max như sau:

$$\max \{ f(x) : x \in D \}$$

Tương đương với bài toán:

$$\min \{ -f(x) : x \in D \}$$

Nghĩa là lời giải của bài toán này cũng là lời giải của bài toán kia và ngược lại.

$$f(\bar{x}) = \min_{x \in X} f(x) \Leftrightarrow -f(\bar{x}) = \max_{x \in X} [-f(x)]$$

Trong đó $\bar{x}$ là phương án tối ưu.

Dựa vào các phép biến đổi trên mà người ta có thể nói rằng bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc là bài toán quy hoạch tuyến tính mà trong đó các ràng buộc chỉ có dấu "=" , vế phải và các biến số đều không âm.

Ví dụ: Biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây về dạng chính tắc :

$$\min\ z(x) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \le 7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \ge -1 \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1, x_5 \ge 0 \\ x_4 \le 0 \\ x_2, x_3 \text{ tùy ý} \end{cases} \end{cases}$$

Tiến hành các thay thế sau:

$$\begin{aligned} x_4 &= -x'_4 && (x'_4 \ge 0) \\ x_2 &= x'_2 - x''_2 && (x'_2, x''_2 \ge 0) \\ x_3 &= x'_3 - x''_3 && (x'_3, x''_3 \ge 0) \end{aligned}$$

Ta được:

$$\min\ z(x) = 2x_1 - (x'_2 - x''_2) + 2(x'_3 - x''_3) - x'_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - 2(x'_2 - x''_2) + (x'_3 - x''_3) - 2x'_4 + x_5 + x_6 = 7 \\ (x'_2 - x''_2) + 2(x'_3 - x''_3) + x_4 - x_7 = -1 \\ 2(x'_3 - x''_3) - x'_4 + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + (x'_2 - x''_2) - 2(x'_3 - x''_3) - x'_4 = 20 \end{cases}$$

$$x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x'_2, x''_2, x'_3, x''_3, x'_4 \ge 0$$

Hay

$$\min\ z(x) = 2x_1 - (x'_2 - x''_2) + 2(x'_3 - x''_3) - x'_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - 2(x'_2 - x''_2) + (x'_3 - x''_3) - 2x'_4 + x_5 + x_6 = 7 \\ -(x'_2 - x''_2) - 2(x'_3 - x''_3) - x_4 + x_7 = 1 \\ 2(x'_3 - x''_3) - x'_4 + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + (x'_2 - x''_2) - 2(x'_3 - x''_3) - x'_4 = 20 \end{cases}$$

$$x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x'_2, x''_2, x'_3, x''_3, x'_4 \ge 0$$

Bài tập chương 1

1. Một xí nghiệp có thể sử dụng tối đa 510 giờ máy cán, 360 giờ máy tiện và 150 giờ máy mài để chế tại ba loại sản phẩm A, B và C. Để chế tạo một đơn vị sản phẩm A cần 9 giờ máy cán, 5 giờ máy tiện, 3 giờ máy mài; một đơn vị sản phẩm B cần 3 giờ máy cán, 4 giờ máy tiện; một đơn vị sản phẩm C cần 5 giờ máy cán, 3 giờ máy tiện, 2 giờ máy mài. Mỗi sản phẩm A trị giá 48 nghìn đồng, mỗi sản phẩm B trị giá 16 nghìn đồng và mỗi sản phẩm C trị giá 27 nghìn đồng. Vấn đề đặt ra là xí nghiệp cần chế tạo bao nhiêu đơn vị sản phẩm mỗi loại để tổng số giá trị sản phẩm xí nghiệp thu được là lớn nhất với điều kiện không dùng quá số giờ hiện có của mỗi loại máy.

   a) Lập mô hình bài toán tối ưu tuyến tính cho vấn đề trên

   b) Đưa bài toán tối ưu tuyến tính thu được về dạng chính tắc

2. Một trại chăn nuôi gia súc cần mua 3 loại thức ăn tổng hợp T_1, T_2, T_3. Theo công thức chế biến thì:

   – Trong 1 kg T1 có 3 đơn vị dinh dưỡng D1, 1 đơn vị dinh dưỡng D2

   – Trong 1 kg T2 có 4 đơn vị dinh dưỡng D1, 2 đơn vị dinh dưỡng D2

   – Trong 1 kg T3 có 2 đơn vị dinh dưỡng D1, 3 đơn vị dinh dưỡng D2

   Cho biết giá mua 1 kg T1 là 15 nghìn đồng, 1 kg T2 là 12 nghìn đồng, 1 kg T3 là 10 nghìn đồng và mỗi bữa ăn cho gia súc cần tối thiểu 160 đơn vị dinh dưỡng D1 và 140 đơn vị dinh dưỡng D2. Vấn đề là tìm sô lượng kg T_1, T_2, T_3 cần mua để chi phí mua thức ăn cho một bữa của gia xúc là ít nhất.

   a) Lập mô hình bài toán tối ưu tuyến tính cho vấn đề trên

   b) Đưa bài toán tối ưu tuyến tính thu được về dạng chính tắc

3. Một nhà máy cán thép có thể sản xuất 2 loại sản phẩm thép tấm và thép cuộn. Nếu chỉ sản xuất một loại sản phẩm thì nhà máy chỉ có thể sản xuất 200 tấn thép tấm hoặc 140 tấn thép cuộn trong một giờ. Lợi nhuận thu được khi bán một tấn thép tấm là 25USD, một tấn thép cuộn là 30USD. Nhà máy làm việc 40 giờ trong một tuần và thị trường tiêu thụ tối đa là 6000 tấn thép tấm và 4000 tấn thép cuộn. Vấn đề đặt ra là nhà máy cần sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu trong một tuần để đạt lợi nhuận cao nhất. Hãy trình bày bài toán tối ưu cho vấn đề trên.

4. Một xưởng làm cửa sắt có những thanh thép dài 12 mét, cần cắt thành 8 đoạn dài 4 mét, 5 đoạn dài 5 mét và 3 đoạn dài 7 mét. Có 5 mẫu cắt như sau:

   - Mẫu 1: 3 đoạn 4 mét, không thừa

   - Mẫu 2: 1 đoạn 4 mét và 1 đoạn 5 mét, thừa 3 mét

   - Mẫu 3: 1 đoạn 4 mét và 1 đoạn 7 mét, thừa 1 mét

   - Mẫu 4: 2 đoạn 5 mét, thừa 2 mét

- Mẫu 5: 1 đoạn 5 mét và 1 đoạn 7 mét, không thừa

Lập bài toán tối ưu tuyến tính để tìm các mẫu cắt tiết kiệm nhất.

5. Có 3 người cùng phải đi một quảng đường dài 10km mà chỉ có một chiếc xe đạp một chỗ ngồi. Tốc độ đi bộ của người thứ nhất là 4km/h, người thứ hai là 2km/h, người thứ ba là 2km/h. Tốc độ đi xe đạp của người thứ nhất là 16km/h, người thứ hai là 12km/h, người thứ ba là 12km/h. Vấn đề đặt ra là làm sao để thời gian người cuối cùng đến đích là ngắn nhất. Hãy trình bày bài toán tối ưu cho vấn đề trên.

6. Một nhà máy sản xuất ba loại thịt : bò, lợn và cừu với lượng sản xuất mỗi ngày là 480 tấn thịt bò, 400 tấn thịt lợn, 230 tấn thịt cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt có thể nấu chín để bán là 420 tấn trong giờ và 250 tấn ngoài giờ. Lợi nhuận thu được từ việc bán một tấn mỗi loại thịt được cho trong bảng sau đây:

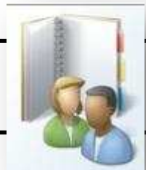
	Tươi	Nấu chín trong giờ	Nấu chín ngoài giờ
Bò	8	14	11
Lợn	4	12	7
Cừu	4	13	9

Hãy trình bày bài toán tối ưu để nhà máy sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất.

7. Một xưởng mộc làm bàn và ghế. Một công nhân làm xong một cái bàn phải mất 2 giờ, một cái ghế phải mất 30 phút. Khách hàng thường mua nhiều nhất là 4 ghế kèm theo 1 bàn do đó tỷ lệ sản xuất giữa ghế và bàn nhiều nhất là 4:1. Giá bán một cái bàn là 135USD, một cái ghế là 50USD. Hãy trình bày bài toán tối ưu để xưởng mộc sản xuất đạt doanh thu cao nhất, biết rằng xưởng có 4 công nhân đều làm việc 8 giờ mỗi ngày.

8. Một nhà máy sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một cái mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp 2 lần thời gian làm ra một cái kiểu thứ hai. Nếu sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì nhà máy làm được 500 cái mỗi ngày. Hàng ngày, thị trường tiêu thụ nhiều nhất là 150 cái mũ kiểu thứ nhất và 200 cái kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một cái mũ kiểu thứ nhất là 8USD, một cái mũ thứ hai là 5USD. Hãy trình bày bài toán tối ưu để nhà máy sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất.

9. Trong hai tuần một con gà mái đẻ được 12 trứng hoặc ấp được 4 trứng nở ra gà con. Sau 8 tuần thì bán tất cả gà con và trứng với giá 0,6USD một gà và 0,1USD một trứng. Hãy trình bày bài toán tối ưu bố trí 100 gà mái đẻ trứng hoặc ấp trứng sao cho doanh thu là nhiều nhất.



Chương 2

Tập phương án của bài toán tối ưu

1. MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ ĐỊNH NGHĨA

Bài toán tối ưu dạng chính tắc:

$$\langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max / \min$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Chúng ta thường hay sử dụng cách viết dưới dạng ma trận - vectơ của bài toán.

Ký hiệu:

- c là vectơ hệ số hàm mục tiêu
- b là vectơ điều kiện
- A là ma trận ràng buộc
- Ax = b gọi là hệ ràng buộc cơ bản
- $x \geq 0$ gọi là ràng buộc dấu (day ràng buộc trực tiếp) của bài toán tối ưu chính tắc.
- Kí hiệu $A_j = \{a_{ij} : i \in I\}$ là vectơ cột thứ j ($j \in J$) của ma trận A.
- Hệ ràng buộc cơ bản có thể viết thành: $\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b$
- Vectơ n chiều x thoả mãn tất cả các ràng buộc của bài toán được gọi là ***phương án chấp nhận được*** (***lời giải chấp nhận được***). Tập

  $$D = \{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

- Tất cả các phương án chấp nhận được của bài toán được gọi là ***miền chấp nhận được*** hay ***miền ràng buộc*** của bài toán.
- Phương án chấp nhận được x* đem lại giá trị lớn nhất cho hàm mục tiêu, tức là:

  $$f(x) \leq c' x^*, \forall x \in D$$

được gọi là phương án tối ưu, còn giá trị $f^* = cx^*$ - giá trị tối ưu của bài toán.

2. PHƯƠNG ÁN CƠ SỞ CHẤP NHẬN ĐƯỢC

Khái niệm phương án cơ sở chấp nhận được giữ một vai trò quan trọng trong thuật toán đơn hình giải bài toán tối ưu.

2.1 Định nghĩa

Xét bài toán tối ưu dạng chính tắc, giả thiết rằng hạng của ma trận A là m (Rank (A) = m), tức là ràng buộc cơ bản Ax = b gồm m phương trình độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 2.1. Ta gọi cơ sở của ma trận A là một bộ gồm m vectơ cột độc lập tuyến tính $B = \{A_{j1}, A_{j2}, ..., A_{jm}\}$ của nó.

Giả sử $B = A(I, J_B)$, trong đó $J_B = \{j_1, ..., j_m\}$ là một cơ sở của ma trận A. Khi đó vectơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ thoả mãn:

$$x_j = 0,\ j \in J_N = J / J_B$$

Khi đó:

+ Các biến $x_j,\ j \in J_B$ được gọi là các biến cơ sở (các biến có giá trị khác 0)

+ Các biến $x_j,\ j \in J_N$ - các biến phi cơ sở (các biến có giá trị bằng 0)

Cách xác định các biến cơ sở

1. Chọn một cơ sở B của ma trận A
2. Đặt $x_N = 0$.
3. Xác định x_B từ hệ phương trình $B.x_B = b$

<u>Ví dụ:</u> Xét bài toán tối ưu tuyến tính sau:

$$6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 4x_5 - 3x_6 + 12x_7 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_3 + x_6 = 3 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ x_j \ge 0;\ \forall j = 1..7 \end{cases}$$

Xét cơ sở $B = \{A_4, A_5, A_6, A_7\} = E_4$. Phương án cơ sở tương ứng với nó là $x = (0,0,0,4,2,3,6)$. Một cơ sở khác của A là $\overline{B} = \{A_2, A_5, A_6, A_7\}$ với phương án cơ sở tương ứng là $\overline{x} = (0,4,0,0,2,3,-6)$. Có thể nhận thấy x là phương án chấp nhận được còn $\overline{x}$ không là phương án chấp nhận được (vì $x_7 = -6 < 0$)

Định nghĩa 2.2. Phương án cơ sở được gọi là ***phương án cơ sở chấp nhận được*** (lời giải cơ sở chấp nhận được) nếu như nó là phương án chấp nhận được.

Mệnh đề 2.1. Giả sử $\bar{x}$ là phương án cơ sở chấp nhận được của bài toán tối ưu tuyến tính tương ứng với cơ sở B. Khi đó tìm được vectơ $\bar{c}$ sao cho x là phương án tối ưu duy nhất của bài toán.

$$\max/\min \left\{\bar{c}x : Ax = b,\ x \geq 0\right\}$$

2.2 Sự tồn tại phương án cơ sở chấp nhận được

Mệnh đề 2.2. Phương án chấp nhận được x là phương án cơ sở chấp nhận được khi mà chỉ khi tập các vectơ cột của ma trận A ứng với các thành phần khác không của nó tạo thành một hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Định lí 2.1 *Giả sử bài toán tối ưu tuyến tính dạng chính tắc có phương án chấp nhận được. Khi đó nó có ít nhất một phương án cơ sở chấp nhận được.*

2.3 Tiêu chuẩn tối ưu

Định nghĩa 2.3. Phương án cơ sở chấp nhận được x được gọi là không thoái hóa (không suy biến) nếu như tất cả các thành phần cơ sở của nó là khác không.

3.KHÁI NIỆM LỒI VÀ CÁC TÍNH CHẤT

3.1 Tổ hợp lồi

Định nghĩa 3.1 Cho m điểm x^i trong không gian R^n. Điểm x được gọi là tổ hợp lồi của các điểm x^i nếu:
$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$$

Trong đó: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$.

- Khi x là tổ hợp lồi của 2 điểm x^1, x^2 người ta thường viết :

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

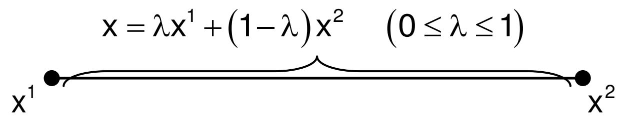
Nếu $0 < \lambda < 1$ thì x được gọi là tổ hợp lồi thật sự.

- **Đoạn thẳng:** Tập hợp tất cả các tổ tổ hợp lồi của 2 điểm bất kỳ $x^1, x^2 \in R^n$ được gọi là đoạn thẳng nối x^1 và x^2.

Ký hiệu:

$$\delta_{x^1x^2} = \left\{x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2,\ \ \lambda \in [0,1]\right\}$$

Khi đó x^1, x^2 được gọi là các đầu mút của đoạn thẳng theo thứ tự $\lambda = 1$ và $\lambda = 0$. Mỗi điểm của đoạn thẳng mà không phải là đầu mút được gọi là điểm trong của đoạn thẳng ấy.



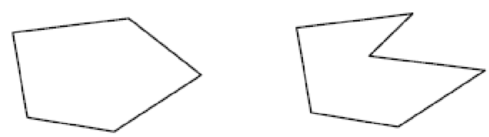
Định lí 3.1: (*Tính chất bắc cầu của tổ hợp lồi***)**

Nếu x là tổ hợp lồi của các điểm $x^j \left(j = \overline{1..m}\right)$ *và mỗi điểm* x^j *đó lại là tổ hợp lồi của các điểm* $y^i \left(i = \overline{1..k}\right)$ *thì x cũng là tổ hợp lồi của các điểm* $y^i \left(i = \overline{1..k}\right)$.

3.2. Tập hợp lồi

Tập con S của R^n được gọi là tập hợp lồi khi S chứa toàn bộ đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của S. (nếu như chứa 2 điểm nào thì nó chứa cả đoạn thẳng nối 2 điểm ấy).

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \ \forall x, y, \lambda \in [0,1]$$

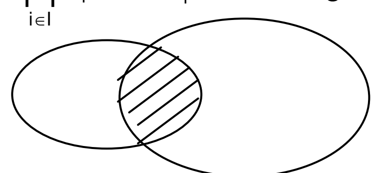


a) Tập lồi b) Tập không lồi

Tập hợp rỗng và tập hợp chỉ có một phần tử được xem là tập hợp lồi.

Định lý 3.2: *Giao của một số bất kỳ các tập hợp lồi là một tập hợp lồi.*

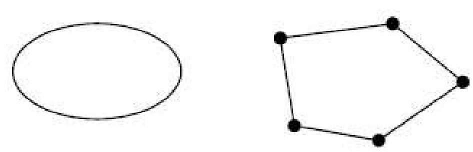
$$X = \bigcap_{i \in I} X_i \text{ với } X_i \rightarrow X \text{ cũng lồi.}$$



Định lý 3.3: *Nếu S là một tập hợp lồi thì S chứa mọi tổ hợp lồi của một họ điểm bất kỳ trong S.*

3.3 Điểm cực biên của một tập hợp lồi

Điểm x^0 trong tập lồi $S \subset R^n$ được gọi là điểm cực biên nếu không thể biểu diễn được x^0 dưới dạng tổ hợp lồi thật sự của hai điểm phân biệt x^1, x^2 của S sao cho: $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ với $0 \le \lambda \le 1$.



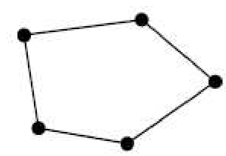
Như vậy, x^0 là điểm cực biên của S khi mà chỉ khi đẳng thức $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ với $x^1, x^2 \in S$ và $0 \le \lambda \le 1$ chỉ xảy ra với $x^0 = x^1 = x^2$.

Trong R^2 nếu tập hợp lồi là một đoạn thẳng thì 2 đầu mút là các điểm cực biên, nếu tập hợp lồi là một hình tam giác thì ba đỉnh của hình tam giác là các điểm cực biên.

3.4 Đa diện lồi và tập lồi đa diện

3.4.1. Đa diện lồi

Tập hợp S tất cả các tổ hợp của các điểm $x^1, x^2, \ldots, x^m$ cho trước được gọi là đa diện lồi sinh ra bởi các điểm đó.



Đa diện lồi là một tập hợp lồi.

Trong đa diện lồi người ta có thể loại bỏ dần các điểm là tổ hợp của các điểm còn lại. Khi đó người ta thu được một hệ các điểm, giả sử là $y^1, y^2, \ldots, y^p$ $(p \leq m)$. Các điểm này chính là các điểm cực biên của đa diện lồi, chúng sinh ra đa diện lồi đó.

Số điểm cực biên của đa diện lồi là hữu hạn.

3.4.2. Siêu phẳng - Nửa không gian

$A = [\,a_{ij}\,]_{m.n}$ là ma trận cấp m*n

A_i (i=1, 2,..., m) là hàng thứ i của A

Siêu phẳng trong R^n là tập các điểm $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ thỏa mãn: $A_i x = b_i$

<u>Ví dụ:</u> Trong R^2 một siêu phẳng được xác định bởi phương trình: $ax_1 + bx_2 = c$

Nửa không gian trong R^n là tập các điểm $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ thỏa mãn:

$$A_i x \geq b_i$$

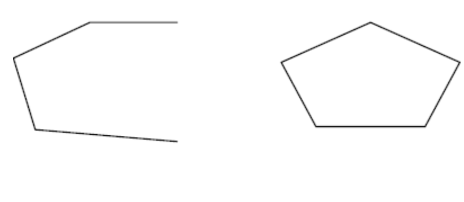
<u>Ví dụ</u>: Trong R^2 một nửa không gian được xác định bởi phương trình:

$$ax_1 + bx_2 \geq c \text{ hay } ax_1 + bx_2 \leq c$$

Siêu phẳng và nửa không gian đều là các tập hợp lồi.

3.4.3. Tập lồi đa diện

Giao của một số hữu hạn các nửa không gian trong R^n được gọi là tập lồi đa diện.



Tập lồi đa diện là một tập hợp lồi.

Nếu tập lồi đa diện không rỗng và giới nội thì đó là một đa diện lồi.

4. ĐẶC ĐIỂM CỦA TẬP PHƯƠNG ÁN

Định lí 4.1: *Tập hợp các phương án của một bài toán tối ưu là một tập lồi đa diện.*

Nếu tập hợp lồi đa diện này không rỗng và giới nội thì đó là một đa diện lồi, số điểm cực biên của nó là hữu hạn.

Định lí 4.2: *Tập hợp các phương án tối ưu của một quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.*

Xét bài toán tối ưu chính tắc:

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} Ax = b & \text{(II)} \\ x \geq 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Giả sử $A=[a_{ij}]_{m.n}$ có cấp m.n, $m \leq n$, rank(A)=m.

Gọi A^j (j=1,2,...,n) cột thứ j của ma trận A, bài toán tối ưu chính tắc trên có thể viết:

$$\min/\max \ z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_nA^n = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Gọi $S = \left\{ x = \left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]^T \geq 0 / \ x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_nA^n = b \right\}$ là tập các phương án của bài toán.

$$x^0 = \left[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right]^T \in S \text{ là một phương án khác 0.}$$

Định lý 4.3. *Điều kiện cần và đủ để x^0 là phương án cực biên (điểm cực biên của S) là các cột A^j ứng với x_j^0 >0 là độc lập tuyến tính.*

Hệ quả 4.1:

- Số phương án cực biên của một bài toán tối ưu chính tắc là hữu hạn. Số thành phần lớn hơn 0 của một phương án cực biên tối đa là bằng m.
- Khi số thành phần lớn hơn 0 của một phương án cực biên bằng đúng m thì phương án đó được gọi là một phương án cơ sở.

Định lý 4.4. *Nếu tập các phương án của một bài toán tối ưu chính tắc không rỗng thì bài toán đó có ít nhất một phương án cực biên.*

Bổ đề: Nếu:

$\bar{x}$ là một phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

x^1, x^2 là các phương án của quy hoạch tuyến tính.

$\overline{x}$ là tổ hợp lồi thực sự của x^1, x^2

thì x^1, x^2 cũng là phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

Định lý 4.5. *Nếu bài toán tối ưu chính tắc có phương án tối ưu thì thì sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.*

<u>Ví dụ:</u> xét bài toán tối ưu chính tắc sau: max $z(x) = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Với hệ $A^1 A^2$ ta tính được $x^1 = \left[\ \frac{13}{3},\ -\frac{1}{10},\ 0\ \right]^T$

Với hệ $A^1 A^3$ ta tính được $x^2 = [\ 1,\ 0,\ 1\ ]^T$

Với hệ $A^2 A^3$ ta tính được $x_3 = \left[\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{13}{3}\ \right]^T$

Cho lần lượt các giá trị x^1, x^2, x^3 bằng 0 rồi thay thế vào hệ ràng buộc ta có được kết quả như trên. Vì các thành phần của phương án cực biên là > 0 nên ta chi xét x^2 và x^3. Khi đó thay giá trị các x^2, x^3 vào hàm mục tiêu ta có:

$z(x^2) = 2*1 + 3*0 = 2$

$z(x^3) = 2*0 + 3*1/3 = 1$

Vậy $x^2 = [1,\ 0,\ 1]^T$ là một phương án tối ưu.

Định lý 4.6. *Điều kiện cần và đủ để một bài toán tối ưu có phương án tối ưu là tập các phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn.*

Định lý 4.7. *Nếu tập các phương án của một bài toán tối ưu không rỗng và là một đa diện lồi thì bài toán tối ưu đó sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.*

5. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

5.1 Nội dung phương pháp

Không giảm tổng quát, giả sử bài toán tối ưu có dạng:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \mathrm{Min}(\mathrm{Max})$$

Các ràng buộc: $D = \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 \le b_j \\ x_i, x_j, .. \ge 0 \end{cases}$

Nhận xét:

+ Tập phương án của bài toán tối ưu nằm trong góc phần tư thứ nhất x_1Ox_2

+ Mỗi bất phương trình $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$, $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 \leq b_j$ đều được xác định thông qua các phương trình đường thẳng tương ứng là $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ và $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = b_j$ với miền xác định nằm về một phía của đường thẳng ứng với bất đẳng thức.

+ Tập phương án là một đa giác lồi hoặc một đa giác trải ra vô tận (đa giác không đóng).

+ Quỹ tích các điểm (x_1, x_2) tại đó hàm mục tiêu f nhận giá trị xác định $c_1x_1 + c_2x_2 = z$ đường thẳng này vuông góc với véc tơ $c(c_1, c_2)$ gọi là **đường mức**. Với mỗi giá trị z thay đổi ta có họ các đường mức song song.

+ Khi ta di chuyển đường mức theo một phương thức nào đó sẽ dẫn đến sự thay đổi giá trị của hàm mục tiêu.

Thuật toán

- **Bước 1:** Biểu diễn tập các phương án trên mặt phẳng tọa độ.
- **Bước 2:** Nếu tập phương án $D = \phi$ thì kết thúc, ngược lại sang bước 3.
- **Bước 3:**
  + Vẽ đường mức $c_1x_1 + c_2x_2 = z$ với một giá trị z cố định (giá trị z tùy ý)
  + Xác định hướng tăng hoặc giảm của đường mức (dựa trên phương pháp xác định miền dấu trong mặt phẳng)
  + Chọn $x'(x_1', x_2')$, tính giá trị $c_1x_1' + c_2x_2' = z'$.
  + So sánh z, z':
    – Nếu z < z' → hướng di chuyển làm tăng giá trị hàm mục tiêu
    – Nếu z > z' → hướng di chuyển làm giảm giá trị hàm mục tiêu
- **Bước 4:** Di chuyển đường mức theo hướng tăng hoặc giảm gặp vị trí tới hạn là giao điểm của nó với đường mức ta có được giá trị z là phương án tối ưu. Nhận xét: khi đường mức chia không gian thành một tập hay nằm về một phía thì ta thu được phương án tối ưu.

Nhận xét: Phương pháp đồ thị giải các bài toán 2 ẩn tiện lợi và có thể mở rộng để giải với bài toán nhiều hơn hai ẩn bằng cách chuyển các ẩn còn lại về biểu diễn thông qua 2 ẩn.

5.2 Ví dụ

<u>Ví dụ 1:</u> Xét bài toán tối ưu sau:

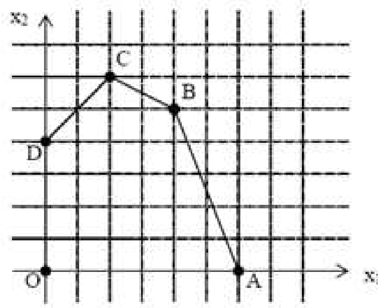
$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Giải: A,B,C,D,O là các điểm cực biên. Giá trị hàm mục tiêu tại đó là:

z(A)=3.6+2.0=18 z(B)=3.4+2.5=22

z(C)=3.2+2.6=18 z(D)=3.0+2.8=8

z(O)=3.0+2.0=0



Phương án tối ưu của bài toán đạt được tại B: $x_1 = 4, x_2 = 5$

Ví dụ 2: Giải bài toán tối ưu sau: $21x_1 + 24x_2 \to \max$

$$D = \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 33 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 80 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Giải: Vẽ đồ thị lần lượt các hàm số trong mặt phẳng x_1Ox_2 trong góc phần tư thứ nhất và xác định các miền không gian tương ứng xác định D.

* Vẽ đường thẳng:

- $3x_1 + x_2 = 33$
  - Chọn $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 33$ Điểm (0, 33)
  - Chọn $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 11$ Điểm (11, 0)
- $x_1 + x_2 = 13$
  - Chọn $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 13$ Điểm (0, 13)
  - Chọn $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 13$ Điểm (13, 0)

- $5x_1 + 8x_2 = 80$
  - Chọn $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 10$ Điểm (0, 10)
  - Chọn $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 16$ Điểm (16, 0)

* Vẽ đường mức với giá trị chọn z = 168

- $21x_1 + 24x_2 = 168$
  - Chọn $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 7$ Điểm (0, 7)
  - Chọn $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 8$ Điểm (8, 0)

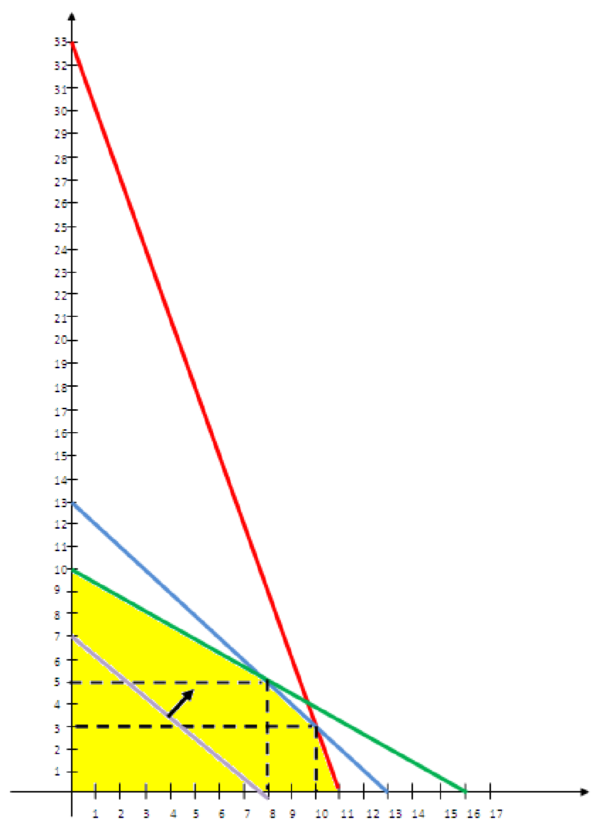
Phương án tối ưu: x* = (8, 5)

$x_1 = 8,\ x_2 = 5$ $\qquad f_{max} = 21.8 + 24.5 = 288$

Kiểm tra bằng đại số như sau: x* là giao điểm của hai đường thẳng:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 = 80 \\ x_1 + x_2 = 13 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $3x_2 = 15 \rightarrow x_2 = 5,\ x_1 = 8$



Biểu diễn các đường thẳng trên mặt phẳng x_1Ox_2

Ví dụ 3 $f(x) = -2x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 & (2) \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 & (3) \\ x_1 \ge 0 & (4) \\ x_2 \ge 0 & (5) \end{cases}$$

Hãy giải bài toán bằng phương pháp đồ thị.

Kết quả: $x^* = (x_1, x_2) = \left(\frac{45}{11}, \frac{8}{11}\right)$, $f^* = -\frac{82}{11}$

Bài tập chương 2

Giải những bài toán tối ưu sau đây bằng phương pháp hình học:

a)- $\max z = x_1 - x_2$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

b)- $\min w = -x_1 + x_2$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \le 0 \end{cases}$$

c)- $\max z = 5x_1 + 6x_2$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \text{ tuy ý} \end{cases}$$

d)- $\min \ w = -2x_1 - x_2$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

e)- $\max \ z = 3x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

f)- $\max \ z = 3x_1 - 4x_2$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -4 \\ 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_2 \le 6 \\ x_1 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

g)- $\min/\max \ z(x) = 4x_1 + 3x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge -12 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 3x_1 - x_2 \le 14 \\ x_1 + 4x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0$

Chương 3

Phương pháp đơn hình

1. ĐƯỜNG LỐI CHUNG VÀ CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

Phương pháp đơn hình được xây dựng dựa trên hai nhận xét sau:

- Nếu bài toán tối ưu có phương án tối ưu thì có ít nhất một đỉnh của D là phương án tối ưu. (Với D là tập các ràng buộc tự nhiên và ràng buộc bắt buộc của bài toán)
- Đa diện lồi D có một số hữu hạn đỉnh.

Thuật toán gồm 2 giai đoạn:

- **Giai đoạn I:** Trước hết tìm một phương án cực biên (tức tìm một đỉnh)
- **Giai đoạn II**: Kiểm tra điều kiện tối ưu đối với phương án đó:
  - + Nếu điều kiện tối ưu được thỏa mãn thì phương án đó là tối ưu. Nếu không ta chuyển sang tìm phương án cực biên mới sao cho cải tiến giá trị hàm mục tiêu đạt giá trị min/max.
  - + Kiểm tra điều kiện tối ưu đối với phương án mới.

Chúng ta thực hiện một dãy các thủ tục như vậy cho đến khi nhận được phương án tối ưu hoặc đến tình huống không có phương án tối ưu.

Với mỗi véctơ phi cơ sở $A_k = (z_{1k}, z_{2k,\dots,} z_{mk})^T$ tính ước lượng:

$$\Delta_k = \sum_{j\in J} z_{jk} c_j - c_k$$

Định lý 1.1 *(Tiêu chuẩn tối ưu)***:**

Nếu các ước lượng của phương án cực biên $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *thỏa mãn* $\Delta_k \geq 0$ *với mọi* $k \notin J$ *thì x là phương án tối ưu của bài toán tối ưu.*

2. THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH DẠNG BẢNG

Không làm giảm tính tổng quát, ta xét bài toán tối ưu dạng chính tắc

$$\langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó: A là ma trận có kích thước m x n, b là véctơ có kích thước m x 1.

Thuật toán của phương pháp đơn hình được thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm một phương án cực biên xuất phát x và cơ sở của nó $\{A_j,\ j \in J\}$ với J là tập các chỉ số cơ sở.

Bước 2:

a. Xác định các hệ số z_{jk} bởi hệ:

$$A_k = \sum_{j \in J} z_{jk} A_j$$

b. Đối với mỗi $k \notin J$, tính các ước lượng:

$$\Delta_k = \sum_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k$$

Bước 3:

a. Nếu $(\forall k \notin J)\ \Delta_k \geq 0 \Rightarrow$ x là phương án tối ưu. Dừng thuật toán

b. Ngược lại, sang bước 4

Bước 4:

a. Nếu $(\exists k \notin J)\ \Delta_k < 0,\ z_{jk} \leq 0, \forall j \in J \Rightarrow$ bài toán tối không có nghiệm tối ưu (z không bị chặn trên).

Dừng thuật toán.

b. Đối với mỗi $k \notin J$ sao cho $\Delta_k < 0$, tồn tại $j \in J : z_{jk} > 0 \Rightarrow$ chọn:

$$\Delta_s = \min\{\Delta_k \,|\, \Delta_k < 0\}$$

Đưa véc tơ A_s vào cơ sở.

Xác định:

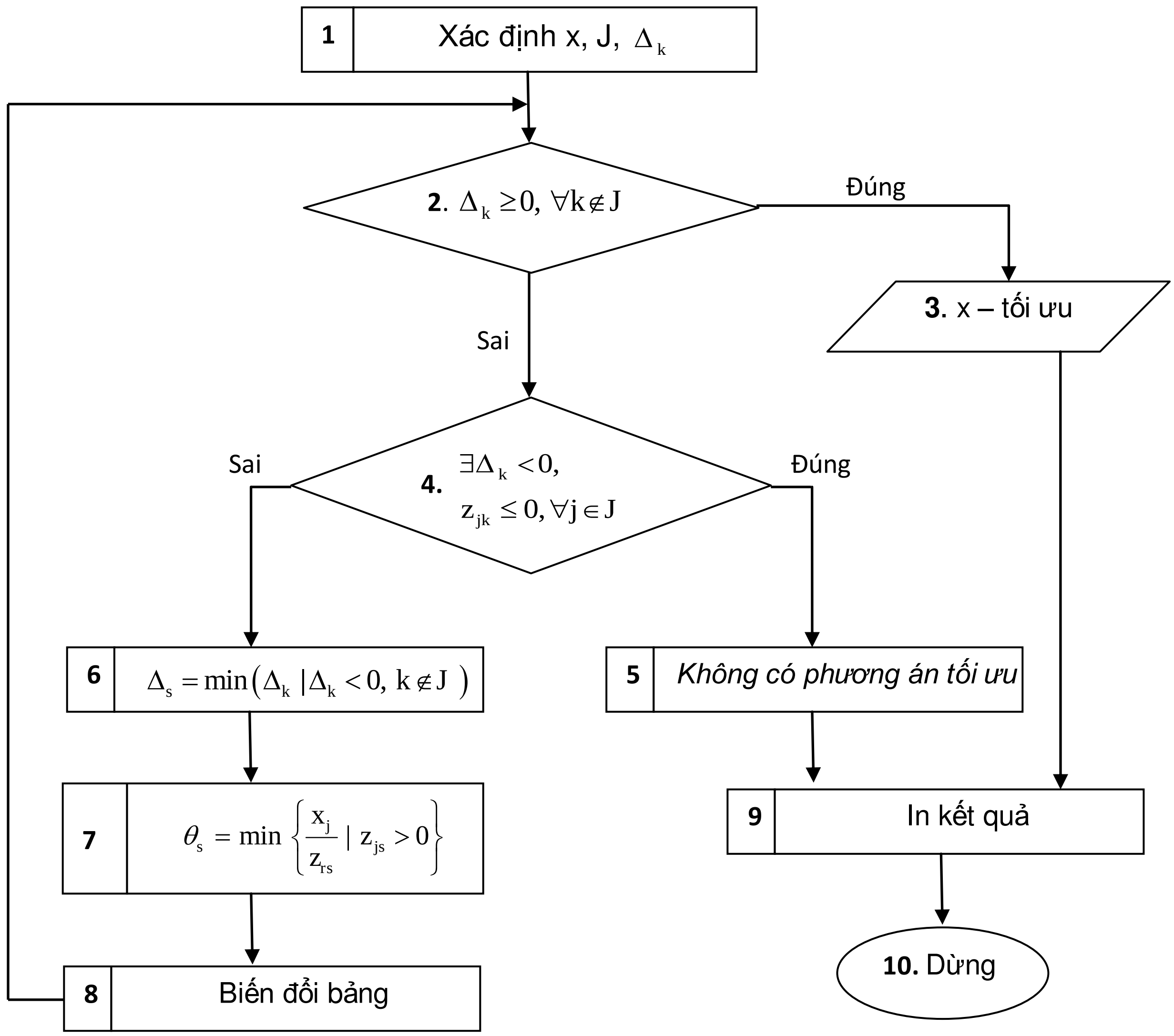
$$\theta_s = \min\left\{\frac{x_j}{z_{rs}} \,|\, z_{js} > 0\right\} = \frac{x_r}{z_{rs}}$$

Đưa véc tơ A_r ra khỏi cơ sở.

→ Ta được phương án cực biên mới x' với cơ sở $J' = J \setminus \{r\} \cup \{s\}$.

Quay trở lại bước 2.

Thuật toán đơn hình được diễn tả theo sơ đồ khối như hình vẽ sau:



Hình 2.1: Lưu đồ thuật toán đơn hình

2.1 Bảng đơn hình

Để dễ tính toán, người ta thực hiện thủ tục đơn hình theo bảng sau gọi là bảng đơn hình:

C_j	Cơ sở	Phương án	C_1	C_2	...	C_j	...	C_r	...	C_m	...	C_k	...	C_s	...
			A_1	A_2	...	A_j	...	A_r	...	A_m	...	A_k	...	A_s	...
C_1	A_1	x_1	1	0	...	0	...	0	...	0	...	z_{1k}	...	z_{1s}	...
C_2	A_2	x_2	0	1	...	0	...	0	...	0	...	z_{2k}	...	z_{2s}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
C_j	A_j	x_j	0	0	...	1	...	0	...	0	...	z_{jk}	...	z_{js}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
C_r	A_r	x_r	0	0	...	0	...	1	...	0	...	z_{rk}	...	z_{rs}	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
C_m	A_m	x_m	0	0	...	0	...	0	...	1	...	z_{mk}	...	z_{ms}	...

		f	0	0	…	0	…	0	…	0	…	Δ_k	…	Δ_s	…

- Nếu tất cả các số trong dòng cuối (trừ f) đều ≥ 0, nghĩa là $\Delta_k \geq 0, \forall k$ khi đó x là phương án tối ưu.
- Nếu dòng cuối (trừ f) có những số âm thì xem thử có cột cắt dòng cuối cùng ở một số âm mà mọi số trong cột đó đều ≤ 0 hay không?
  - + Nếu có thì bài toán không có phương án tối ưu.
  - + Nếu không thì chọn cột s sao cho:

$$\Delta_s = \min\left\{\Delta_k \mid \Delta_k < 0\right\}$$

Rồi chọn trong số các dòng cắt cột s ở những số dương dòng r mà tỷ số;

$$\theta_s = \min\left\{\frac{x_j}{z_{rs}} \mid z_{js} > 0\right\} = \frac{x_r}{z_{rs}}$$

Cột **s** gọi là **cột xoay** . Véc tơ A_s được đưa vào cơ sở.

Dòng **r** gọi là **dòng xoay**. Véc tơ A_r được đưa ra khỏi cơ sở.

Phần tử $z_{rs} > 0$ là giao của cột xoay và dòng xoay gọi là **phần tử trục**.

Các phần tử z_{js}, $j \neq s$ gọi là **phần tử xoay**.

Ta thu được bảng đơn hình mới từ bảng đơn hình cũ bằng cách thay c_r, A_r trong dòng xoay bằng c_s, A_s. Sau đó thực hiện phép biến đổi dưới đây:

1. Chia mỗi phần tử ở dòng xoay cho phần tử trục (được số 1 ở vị trí trục), kết quả thu được là dòng chính.
2. Lấy mỗi dòng khác trừ đi tích của dòng chính nhân với phần tử xoay tương ứng (được số 0 ở mọi vị trí của cột xoay).
3. **Dòng mới = Dòng cũ tương ứng – Dòng chính x phần tử xoay**

Lưu ý rằng sau phép xoay thì ở vị trí Δ_s ta thu được số 0 vì lúc này A_s trở thành véc tơ định vị cơ sở, nghĩa là ta đã làm mất đi số âm nhỏ nhất ở dòng cuối cùng của bảng cũ.

Toàn thể phép biến đổi trên gọi là phép xoay quanh trục z_{rs}. Sau khi thực hiện phép xoay ta có một phương án mới và một cơ sở mới. Nếu chưa đạt yêu cầu nghĩa là còn $\Delta_k < 0$ thì ta lại tiếp tục quá trình.

2.2 Ví dụ

<u>Ví dụ 1:</u> Giải bài toán tối ưu dạng chuẩn tắc bằng phương pháp hình học & phương pháp đơn hình.

$$f(x) = x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 22 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a. Giải bằng phương pháp hình học

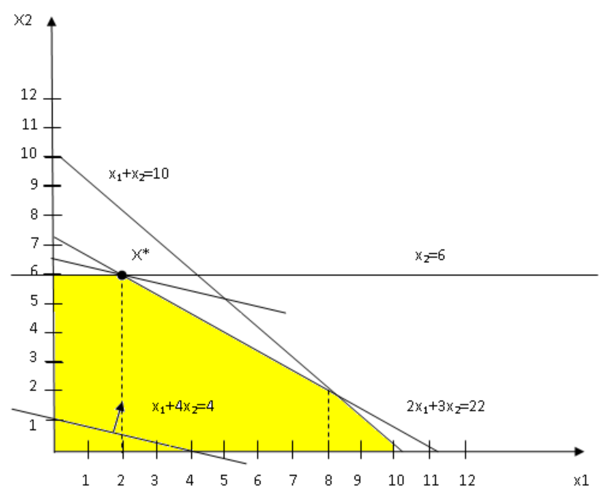
+ Giải phương trình:

- $2x_1 + 3x_2 = 22$. Cho $x_1 = 0 \to x_2 = \frac{22}{7} = 7\frac{1}{3}$; $x_2 = 0 \to x_1 = 11$
- $x_1 + x_2 = 10$. Cho $x_1 = 0 \to x_2 = 10$; $x_2 = 0 \to x_1 = 10$
- $x_2 = 6$

+ Phương trình đường mức:

- $x_1 + 4x_2 = 4$. Cho $x_1 = 0 \to x_2 = 1$; $x_2 = 6 \to x_1 = 4$

+ Vẽ đồ thị. Ta có phương án tối ưu là: $x_1 = 2, x_2 = 6 \Rightarrow f_{max} = 2 + 4 * 6 = 26$



b. Giải bằng phương pháp đơn hình

Ta thêm vào 3 biến phụ: $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$

Bài toán dạng chính tắc là:

$$f(x) = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 22 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1..5} \end{cases}$$

Ta có phương án cực biên xuất phát là:

$x_1 = x_2 = 0$ là các biến phi cơ sở

$x_3 = 22,\ x_4 = 10,\ x_5 = 6$ là các biến cơ sở

Với các vectơ cơ sở là: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lập bảng đơn hình:

C_j	Cơ sở	Phương án	1	4	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	22	2	3	1	0	0	
0	A_4	10	1	1	0	1	0	s= 2
0	A_5	6	0	$\boxed{1}$	0	0	1	r =5
		f=0	**-1**	**-4**	**0**	**0**	**0**	
C_j	Cơ sở	Phương án	1	4	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	4	$\boxed{2}$	0	1	0	-3	
0	A_4	4	1	0	0	1	-1	s= 1
4	A_2	6	0	**1**	0	0	1	r =3
		f=0	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	
C_j	Cơ sở	Phương án	1	4	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	A_1	2	1	0	1/2	0	-3/2	
0	A_4	2	0	0	-1/2	1	2	
4	A_2	6	0	**1**	0	0	1	
		f=0	**0**	**0**	**1/2**	**0**	**5/2**	

Phương án tối ưu là: $x_1 = 2, x_2 = 6,\ x_4 = 2 \Rightarrow f_{max} = 2 + 4*6 = 26$

<u>Ví dụ 2:</u> Giải bài toán tối ưu sau: $21x_1 + 24x_2 \to \max$

$$D = \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 33 \\ x_1 + x_2 \le 13 \\ 5x_1 + 8x_2 \le 80 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách đưa vào 3 biến phụ $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$. Bài toán ở dạng chính tắc tương ứng là:

$$21x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

$$D = \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 33 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_5 = 80 \\ x_j \ge 0,\ j = 1..5 \end{cases}$$

Ta có phương án cực biên xuất phát:

$x_3 = 33, x_4 = 13, x_5 = 80$ là các biến cơ sở

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

với $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ là các véc tơ cơ sở

Ta lập bảng đơn hình sau:

C_j	Cơ sở	Phương án	21	24	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	33	3	1	1	0	0	
0	A_4	13	1	1	0	1	0	s= 2
0	A_5	80	5	**8**	0	0	1	r =5
		f=0	**-21**	**-24**	**0**	**0**	**0**	

Tính: f = 0*33 + 0*13 + 0*80 = 0

Tính: $\Delta_k = \sum_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k$

3*0 + 1*0+ 5*0 – 21 = -21; 1*0 + 1*0+ 8*0 – 24 = -24

1*0 + 0*0 + 0*0 – 0 = 0; 1*0 + 0*0 + 0*0 – 0 = 0

Tìm: $\Delta_s = \min\{\Delta_k | \Delta_k < 0\}$. $\theta_s = \min\left\{\frac{x_j}{z_{rs}} | z_{js} > 0\right\} = \frac{x_r}{z_{rs}}$

Ta có s = 2, r = 5.

Chia dòng xoay cho phần tử trục

C_j	Cơ sở	Phương án	21	24	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	33	3	1	1	0	0	
0	A_4	13	1	1	0	1	0	s= 2
0	A_5	10	5/8	**1**	0	0	1/8	r =5
		f=0	**-21**	**-24**	**0**	**0**	**0**	

Thay A_5 bằng A_2. Các dòng khác thực hiện biến đổi quay quanh phần tử trục chính.

C_j	Cơ sở	Phương án	21	24	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	23	19/8	0	1	0	-1/8	
0	A_4	3	3/8	0	0	1	-1/8	
24	A_2	10	5/8	**1**	0	0	1/8	
		f=240	**-6**	**0**	**0**	**0**	**3**	

Cột phương án biến đổi: 33 → 33 – 10*1 = 23; 13 → 13 – 10*1 = 3;

Cột A1: 3 → 3 – 5/8 * 1 = 19/8; 1 → 1 – 5/8 * 1 = 3/8

Cột A_2: 1 → 1 – 1* 1 = 0; 1 → 1 – 1* 1 = 0

Cột A_3: 1 → 1 – 0* 0 =1 0 → 0 – 0* 0 = 0

Cột A_4: ..

C_j	Cơ sở	Phương án	21	24	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	33	3	1	1	0	0	
0	A_4	13	1	1	0	1	0	s= 2
0	A_5	80	5	$\boxed{8}$	0	0	1	r =5
		f=0	**-21**	**-24**	**0**	**0**	**0**	
C_j	Cơ sở	Phương án	21	24	0	0	0	

			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	23	19/8	0	1	0	-1/8	
0	A_4	3	$\boxed{3/8}$	0	0	1	-1/8	
24	A_2	10	5/8	**1**	0	0	1/8	
		f=240	**-6**	**0**	**0**	**0**	**3**	
C_j	**Cơ sở**	**Phương án**	**21**	**24**	**0**	**0**	**0**	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	23	19/8	0	1	0	-1/8	
0	A_4	3	3/8	0	0	1	-1/8	
24	A_2	10	5/8	**1**	0	0	1/8	
		f=240	**-6**	**0**	**0**	**0**	**3**	
C_j	**Cơ sở**	**Phương án**	**21**	**24**	**0**	**0**	**0**	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	4	0	0	1	-19/3	2/3	
21	A_1	8	1	0	0	8/3	-1/3	S=2
24	A_2	5	0	**1**	0	-5/3	1/3	R=4
		f=288	**0**	**0**	**0**	**16**	**1**	

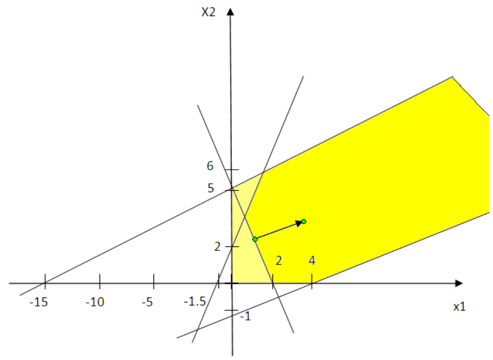
Vậy phương án tối ưu là: $x_1=8$, $x_2 = 5$; $x_3=4$; f=288.

<u>Ví dụ 3:</u> Giải bài toán tối ưu bằng phương pháp hình học và đơn hình $18x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

$$D=\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 - 4x_2 \le 4 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i. Phương pháp hình học

- $-4x_1 + 3x_2 = 6$. Cho $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 2$; $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$
- $-x_1 + 3x_2 = 15$. Cho $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 5$; $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -15$
- $x_1 - 4x_2 = 4$. Cho $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = -1$; $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 4$



Đường mức: $18x_1 + 6x_2 = 36$. Cho $x_1 = 0 \to x_2 = 6$; $x_2 = 0 \to x_1 = 2$

→ Hàm mục tiêu không bị chặn → Bài toán không có phương án tối ưu.

ii. Phương pháp đơn hình

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách đưa vào 3 biến phụ $x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$. Bài toán ở dạng chính tắc tương ứng là:

$$18x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

$$D = \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 & = 6 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 & = 15 \\ x_1 - 4x_2 \qquad\quad + x_5 & = 4 \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1..5} \end{cases}$$

Ta có phương án cực biên xuất phát:

$x_1 = x_2 = 0$ là các biến phi cơ sở

$x_3 = 6,\ x_4 = 15,\ x_5 = 4$ là các biến cơ sở

Với các vectơ cơ sở là: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lập bảng đơn hình:

C_j	**Cơ sở**	**Phương án**	**18**	**6**	**0**	**0**	**0**	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	6	-4	3	1	0	0	
0	A_4	15	-1	3	0	1	0	s= 1
0	A_5	4	$\boxed{1}$	-4	0	0	1	r =5
		f=0	-18	-6	**0**	**0**	**0**	

C_j	Cơ sở	Phương án	18	6	0	0	0	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_3	6	-4	-13	1	0	4	
0	A_4	19	-1	1	0	1	1	
18	A_1	4	1	-4	0	0	1	
		f=0	**0**	**-78**	**0**	**0**	**0**	

Vì $\Delta_2<0$ mà tất cả các phần tử trong cột A_2 tất cả đều âm nên hàm mục tiêu không bị chặn → Bài toán không có phương án tối ưu.

3. TÍNH HỮU HẠN CỦA THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

3.1 Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình

Định nghĩa 3.1: Thuật toán giải bài toán tối ưu hóa được gọi là hữu hạn nếu như nó cho phép sau một số hữu hạn phép tính tìm được phương án tối ưu của bài toán.

Do mỗi bước lặp của thuật toán đơn hình có thể thực hiện xong sau một số hữu hạn phép tính, để chứng minh tính hữu hạn của thuật toán đơn hình ta phải chứng minh rằng nó phải kết thúc sau hữu hạn bước lặp.

Định nghĩa 3.2: Bài toán tối ưu tuyến tính được gọi là không thoái hóa nếu như tất cả các phương án cơ sở chấp nhận được của nó là không thoái hóa, trong trường hợp ngược lại bài toán được gọi là thoái hóa.

Định lý 3.1: *Giả sử bài toán tối ưu tuyến tính là không thoái hóa và có phương án tối ưu. Khi đó với mọi phương án cơ sở chấp nhận được xuất phát thuật toán đơn hình là hữu hạn.*

Chứng minh:

Giả sử x^1 là phương án cơ sở chấp nhận được xuất phát. Trong quá trình thực hiện thuật toán đơn hình ta sẽ xây dựng được dãy x^k, B_k, k=1, 2, . . . các phương án cơ sở chấp nhận được và cơ sở tương ứng với chúng của bài toán. Do bài toán là không thoái hóa nên mỗi phương án cơ sở chấp nhận được x^k là không thoái hóa, do đó ở mỗi bước lặp, khi chuyển từ phương án cơ sở chấp nhận được x^k sang phương án cơ sở chấp nhận được x^{k+1} hàm mục tiêu sẽ giảm thực sự. Do

$$c'x^k = c'_{B_k}x_{B_k} = c'_{B_k}B_k^{-1}b$$

nên trong quá trình thực hiện thuật toán không có cơ sở nào bị lặp lại. Mặt khác, ma trận A chỉ có một số hữu hạn cơ sở (số cơ sở của A không vượt quá C_n^m), vì thế, sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ xây dựng được phương án cơ sở chấp nhận được $x^{k_o}, k_o < +\infty$, mà tại đó tiêu chuẩn tối ưu được thực hiện. Định lý được chứng minh.

Trong chứng minh định lý 3.1 ta phải sử dụng giả thiết về tính không thoái hóa của bài toán tối ưu tuyến tính. Trong trường hợp bài toán là thoái hóa, tính hữu hạn của thuật toán không được bảo đảm nữa, và rất có thể xảy ra một hiện tượng đáng ngại là hiện tượng xoay vòng, mà ta sẽ mô tả trong mục dưới đây.

3.2 Hiện tượng xoay vòng

Trong mô tả của thuật toán đơn hình ta chú ý đến hai điểm quan trọng cần được làm chính xác thêm trước khi thực hiện thuật toán :

1) Về việc chọn cột xoay: Trong trường hợp có nhiều cột có ước lượng dương cần chọn cột nào làm cột xoay ?

2) Về việc chọn dòng xoay: Trong trường hợp giá trị

$$\theta_0 = \min\{x_i / x_{ij_0} : x_{ij_0} > 0, i \in J_B\}$$

đạt ở nhiều chỉ số khác nhau cần chọn dòng nào làm dòng xoay ?

Thuật toán đơn hình sẽ hoàn toàn xác định nếu như chúng ta xác định 2 qui tắc nói trên. Có thể đề nghị nhiều qui tắc chọn dòng xoay, cột xoay khác nhau. Trước hết ta nói về cách chọn cột xoay. Có thể sử dụng một trong những qui tắc sau :

i) *Tụt nhanh nhất* : $\Delta_{j_0} = \max\{\Delta_{j_0} : \Delta_{j_0} > 0\}$. Khi đó chuyển sang phương án cơ sở chấp nhận được tiếp theo giá trị hàm mục tiêu sẽ giảm đi $\theta_0\Delta_{j_0}$.

ii) *Chọn theo nguyên tắc giảm nhiều nhất* : Chọn cột xoay là cột A_{j_0} ứng với giá trị $\theta_0\Delta_{j_0}$ lớn nhất.

iii) *Chọn theo nguyên tắc chỉ số nhỏ nhất* : Trong số các cột có ước lượng dương chọn cột có trị số nhỏ nhất làm cột xoay.

iv) *Chọn theo nguyên tắc ngẫu nhiên*: Chọn cột xoay một cách ngẫu nhiên trong số các cột có ước lượng dương.

Để chọn dòng xoay có thể sử dụng một trong những qui tắc sau :

i) *Chọn chỉ số nhỏ nhất :* Trong số các dòng có thể chọn làm dòng xoay hãy chọn dòng có chỉ số nhỏ nhất.

ii) *Chọn theo phương pháp cực tiểu từ vựng* (sẽ trình bày ở mục tiếp theo).

iii) *Chọn theo nguyên tắc ngẫu nhiên:* Chọn dòng xoay một cách ngẫu nhiên trong số các dòng có thể chọn làm dòng xoay.

Thông thường, dòng xoay được chọn theo qui tắc i) và để giải các bài toán cở vừa và nhỏ người ta sử dụng qui tắc chọn cột xoay i), còn đối với các bài toán cở lớn có thể sử dụng qui tắc iii).

Rõ ràng mỗi qui tắc chọn dòng xoay, cột xoay sẽ đòi hỏi một khối lượng tính toán khác nhau để thực hiện chúng. Mặt khác, các cách chọn dòng xoay, cột xoay khác nhau cũng dẫn đến những thuật toán có hiệu quả khác nhau. Chẳng hạn theo thực nghiệm tính toán thì cách chọn cột xoay theo qui tắc ii) thường đòi hỏi thời gian tính toán nhiều hơn khoảng từ 3 đến 5 lần so với cách chọn cột xoay theo qui tắc i).

Trong trường hợp bài toán là không thoái hóa việc chọn dòng xoay, cột xoay không ảnh hưởng đến tính hữu hạn của thuật toán đơn hình. Tuy nhiên, nếu bài toán là thóai hóa thì có khả năng ở một bước lặp nào đó thuật toán sẽ làm việc với phương án cơ sở chấp nhận được thoái hóa và khi chọn dòng xoay có thể sẽ gặp tình huống $\theta_0 = 0$ và trong trường hợp này khi chuyển sang phương án cơ sở chấp nhận được tiếp theo giá trị hàm mục tiêu sẽ không thay đổi. Hơn thế nữa, tình huống nói trên có thể lặp lại một số lần và tồi tệ hơn sau một số lần lặp như vậy thuật toán sẽ quay trở về với một cơ sở mà trước đó đã xét qua. Khi đó chu trình này sẽ lặp đi lặp lại vô hạn lần nếu như các qui tắc chọn dòng xoay và cột xoay là cố định. Hiện tượng vừa mô tả được gọi là hiện tượng xoay vòng.

Ví dụ: Xét bài toán tối ưu tuyến tính sau

$$4x_1 - 6x_5 - 5x_6 + 64x_7 \to \min,$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_4 - 2x_5 - x_6 + 12x_7 = 0,$$

$$+ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - x_5 - \frac{1}{6}x_6 + \frac{2}{3}x_7 = 0,$$

$$+ x_3 - x_5 + x_6 - 9x_7 = 2,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, \ldots, 7.$$

Thuật toán đơn hình bắt đầu từ phương án cơ sở chấp nhận được $\overline{x'} = (0, 0, 2, 0, 0, 0, 0)$ với cơ sở tương ứng là $B = \{A_1, A_2, A_3\}$, trong đó sử dụng qui tắc chọn dòng xoay theo i) và chọn cột xoay theo i), sau 6 phép biến đổi đơn hình sẽ quay về làm việc với cơ sở xuất phát.

3.3 Các biện pháp chống xoay vòng

Hiện nay có rất nhiều biện pháp chống xoay vòng, trong mục này ta trình bày hai biện pháp quan trọng nhất. Trước hết cần lưu ý rằng hiện tương xoay vòng chỉ có thể xảy ra trong thuật toán đơn hình với những qui tắc chọn dòng xoay, cột xoay nhất định. Vì vậy một trong những hướng cải tiến thuật toán đơn hình nhằm khắc phục xoay vòng là tìm những qui tắc chọn dòng xoay, cột xoay sao cho trong quá trình thực hiện thuật toán không có cơ sở nào bị lặp lại. Phương án từ vựng và phương án Bland là hai phương pháp như vậy.

3.3.1 Phương pháp từ vựng

Định nghĩa 3.3: Véc tơ $v \in R^n$ gọi là từ vựng dương và có ký hiệu là $v >_l 0$, nếu thành phần khác không đầu tiên của nó là dương. Véc tơ $v \in R^n$ gọi là từ vựng âm và ký hiệu là $v <_l 0$, nếu $-v >_l 0$.

Giả sử $v, w \in R^n$, ta nói v là từ vựng lớn hơn w và viết là $v >_l w$, nếu $v - w >_l 0$. Tương tự như vậy có thể đưa vào khái niệm từ vựng nhỏ hơn, từ vựng bằng.

Giả sử $z^1, z^2, \ldots, z^k$ là các véc tơ R^n. Véc tơ z^s $(1 \le s \le k)$ được gọi là cực tiểu từ vựng (cực đại từ vựng) của các véc tơ $z^1, z^2, \ldots, z^k$, nếu

$$z^s <_l z^j \ (z^s >_l z^j),\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Khi đó ta sẽ viết là

$$z^s = \text{lex - min}\{ z^j : j = 1, 2, \ldots, k \}$$

$$z^s = \text{lex - max}\{ z^j : j = 1, 2, \ldots, k \}$$

<u>Ví dụ</u>: Cho 4 véc tơ

$z^1 = (1/4, 1, 1/4, 3/4)'$,

$z^2 = (2, 1, 10, 1)'$,

$z^3 = (1/4, 1, 1/12, 1/6)'$,

$z^4 = (2, 1, 5, -4)'$,

Khi đó $z^s = \text{lex - min}\{z^j : j = 1, 2, 3, 4\}$,

$z^s = \text{lex - max}\{z^j : j = 1, 2, 3, 4\}$.

Qui tắc cực tiểu từ vựng chọn dòng xoay. Chú ý rằng trong thuật toán đơn hình dòng xoay cần chọn là dòng mà tại đó đạt giá trị.

$$\theta_0 = \min\{x_i / x_{ij_0} : x_{ij_0} > 0, i \in J_B\}$$

Trong trường hợp có nhiều chỉ số dòng i cùng đạt cực tiểu trong biểu thức trên ta chọn dòng xoay là dòng i_0 mà tại đó

$$z^i/x_{i_0j_0} = \text{lex - min}\{ z^j / x_{i_0j_0} : x_{i_0j_0} > 0\} \qquad (1.1)$$

trong đó $z^i = (x_i, x_{i1}, \ldots, x_{ij_0}, x_{in})$, $(i = 1, \ldots, m)$ - dòng thứ i của bảng đơn hình. Nghiã là khi có nhiều dòng có thể chọn làm dòng xoay ta sẽ chọn dòng xoay là dòng cực tiểu từ vựng. Qui tắc (1.1) được gọi là qui tắc cực tiểu từ vựng.

Chú ý rằng việc chọn dòng xoay theo qui tắc cực tiểu từ vựng sẽ là đơn trị, vì nếu có hai dòng cực tiểu từ vựng thì suy ra **rank** A < m.

Ký hiệu z_i $(i = 1, \ldots, m)$ - dòng thứ i của bảng đơn hình :

$$z^i = (z_i, z_{i1}, \ldots, z_{ij_0}, z_{in}) = (x_i, x_{i1}, \ldots, x_{ij_0}, x_{in}), \quad (i = 1, \ldots, m)$$

còn $z^0 = (z_{00}, z_{01}, \ldots, z_{0n}) = (f(x), \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ là dòng ước lượng.

Định lý 3.1: *Giả sử ở bảng đơn hình xuất phát ta có :*

$$z^i >_l 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

và trong thuật toán đơn hình ta sử dụng các qui tắc sau đây để chọn dòng xoay, cột xoay :

a) Cột xoay s được chọn tùy ý trong số các cột có ước lượng dương ($z_{0s} = \Delta_s > 0$) ;

b) Dòng xoay $i_0 = r$ được chọn theo qui tắc cực tiểu từ vựng :

$$z^r/z_{rs} = lex - min\{z^i/z_{is} : z_{is} > 0\}$$

Khi đó trong quá trình thực hiện thuật toán đơn hình các dòng này sẽ luôn là từ vựng dương còn dòng ước lượng z^0 sẽ là từ vựng giảm ngặt và thuật toán đơn hình sẽ dừng sau hữu hạn bước.

Chứng minh: Trước hết ta chỉ ra rằng các dòng z^i , i =1, 2, . . ., m, sẽ là từ vựng dương sau mỗi phép biến đổi đơn hình. Ở dòng xoay r ta có $\bar{z}^r = \frac{1}{z_{rs}} z^r$, trong đó $z_{rs} > 0$ - phần tử xoay. Vì vậy, nếu $z^r >_l 0$ thì $\bar{z}^r >_l 0$.

Bây giờ, xét $i \neq r$. Khi đó nếu $z_{is} > 0$ thì từ qui tắc từ vựng suy ra :

$$\bar{z}^i = z^i - \frac{z_{is}}{z_{rs}} z^r = z_{is} \left(\frac{1}{z_{is}} z^i - \frac{1}{z_{rs}} z^r \right) >_l 0$$

còn nếu $z_{is} \leq 0$ thì $\bar{z}^i = z^i - \frac{z_{is}}{z_{rs}} z^r = z^i + \frac{|z_{is}|}{z_{rs}} z^r >_l 0$.

Vậy z^i luôn là từ vựng dương sau mỗi phép biến đổi đơn hình. Véc tơ z^0 sau phép biến đổi đơn hình sẽ trở thành

$$\bar{z}^0 = z^o - \frac{z_{0s}}{z_{rs}} z^r = z^0 + \frac{|z_{0s}|}{z_{rs}} z^r ,$$

mặt khác, do $z_{0s} > 0$ và $z^r >_l 0$, nên từ đó suy ra $\bar{z}^0 <_l z^0$.

Như vậy sau mỗi phép biến đổi đơn hình dòng ước lượng là từ vựng giảm ngặt và từ đó suy ra trong quá trình thực hiện thuật toán đơn hình không có dòng ước lượng nào bị lặp lại. Do mỗi dòng ước lượng được xác định duy nhất bởi cơ sở tương ứng, nên từ đó suy ra trong quá trình thực hiện thuật toán đơn hình cũng không có cơ sở nào bị lặp lại. Vây thuật toán đơn hình là hữu hạn. Định lý đã được chứng minh.

Chú ý : Nếu như cơ sở xuất phát là $B = \{A_1, \ldots, A_m\}$ thì bảng đơn hình xuất phát sẽ thỏa mãn điều kiện của định lý 3.1. Vì vậy, trong trường hợp tổng quát, để có bảng đơn hình xuất phát thỏa mãn điều kiện của định lý 3.1, ta có thể đánh số lại các biến nếu như điều đó là cần thiết.

3.3.2 Qui tắc Bland

Qui tắc cực tiểu từ vựng đòi hỏi một khối lượng tính toán phụ không nhỏ khi tiến hành chọn dòng xoay. Qui tắc rất đơn giản sau đây được Bland chứng minh là đảm bảo không có xoay vòng khi thực hiện thuật toán đơn hình.

Qui tắc Bland (1976): Khi có nhiều cột (dòng) có thể chọn làm cột xoay (dòng xoay) ta luôn chọn cột (dòng) có chỉ số nhỏ nhất trong số chúng.

Chú ý : Tuy rằng đại đa số các bài toán tối ưu tuyến tính thực tế là thóai hóa, thế nhưng theo kinh nghiệm tính toán thì hiện tượng xoay vòng không bao giờ xảy ra. Vì vậy, trong hầu hết các chương trình tính toán của tối ưu tuyến tính người ta không cài đặt các biện pháp chống xoay vòng

4. THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH HAI PHA

Thuật toán đơn hình 2 pha là sự kết hợp của phương pháp đơn hình với cách giải 2 pha. Có thể tóm tắt cách giãi bằng phương pháp 2 pha như sau:

Bằng những phép biến đổi tương đương ta biến đổi ma trận điều kiện về ma trận cuối cùng mà có số vec-tơ đơn vị đúng bằng số điều kiện. Trong quá trình biến đổi sẽ xuất hiện một số biến phụ và một số biến giả, số biến giả này đúng bằng số điều kiện.

Pha 1 sẽ giãi ứng với cơ sở là những biến giả, sau đó sẽ tiếp tục giãi quyết bằng pha 2.

4.1 Mô tả thuật toán

Thuật toán đơn hình bình thường để giải bài toán sau:

$$\min \{ c'x : Ax = b, x \geq 0 \} \qquad (1.2)$$

Không giảm tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng

$$b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (1.3)$$

(nếu có $b_i < 0$ chỉ cần nhân hai vế của phương trình tương ứng với -1).

Theo các thông số của bài toán (1.3) ta xây dựng bài toán phụ thuộc sau đây

$$e'x_u \to \min, \; Ax + x_u = b, \; x \geq 0, \; x_u \geq 0 \qquad (1.4)$$

trong đó $x_u = x(J_u)$, $J_u = \{ n + 1, \ldots, n + m\}$ là m - vétơ các biến giả, e = (1, 1, . . ., 1) - m - véc tơ có các thành phần đều bằng 1.

Bổ đề sau đây cho thấy mối liên hệ giữa bài toán (1.2) và bài toán (1.4).

Bổ đề 1 : *Bài toán (1.2) có phương án chấp nhận được khi và chỉ khi thành phần x^*_u trong phương án tối ưu (x^*, x^*_u) của bài toán (1.4) là bằng không.*

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử x^* là phương án chấp nhận được của bài toán (1.2). Khi đó rõ ràng $(x^*, x^*_u = 0)$ là phương án chấp nhận được của bài toán (1.4). Mặt khác, do $e'x^*_u = 0 \leq e'x_u$, với mọi (x, x_u) là phương án chấp nhận được của bài toán (1.27) nên (x^*, x^*_u) là phương án tối ưu của nó.

Điều kiện đủ : Rõ ràng $(x^*, x^*_u = 0)$ là phương án tối ưu của bài toán (1.4) thì x^* là phương án chấp nhận được của bài toán (1.2). Bổ đề được chứng minh.

Đối với bài toán (1.4) ta có ngay một phương án cơ sở chấp nhận được của nó là $x(J) = 0$, $x(J_u) = b$ với cơ sở tương ứng

$$B = \{A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}\},$$

trong đó ký hiệu A_j, $j \in J_u$ là véc tơ cột trong ma trận ràng buộc của bài toán (1.4) tương ứng với biến giả x_j, $j \in J_u$. Vì vậy ta có thể áp dụng thuật toán đơn hình để giải bài toán (1.4) bằng thuật toán đơn hình được gọi là pha thứ nhất của thuật toán đơn hình hai pha giải bài toán (1.2), và bài toán (1.4) còn được gọi là bài toán ở pha thứ nhất.

Kết thúc pha thứ nhất ta sẽ xây dựng được phương án cơ sở chấp nhận được tối ưu (x^*, x^*_u) với cơ sở tương ứng là $B^* = \{A_j : j \in J^*_B\}$ của bài toán (1.4).

Có thể xảy ra một trong 3 khả năng sau:

i) $x^*_u \neq 0$;

ii) $x^*_u = 0$ và ma trận B^* không chứa các cột ứng với biến giả, tức là nó chứa toàn cột của ma trận ràng buộc của bài toán (1.2):

$$B^* = \{A_j : j \in J^*_B\}, J^*_B \cap J_u = f.$$

iii) $x^*_u = 0$ và ma trận B^* có chứa cột ứng với biến giả, tức là

$$B^* = \{A_j : j \in J^*_B\}, J^*_B \cap J_u \neq f.$$

Ta sẽ xét từng trường hợp một.

i) $x^*_u \neq 0$, thì theo bổ đề 1, bài toán (1.2) là không có phương án chấp nhận được, thuật toán kết thúc.

ii) Trong trường hợp này x^* là phương án cơ sở chấp nhận được của bài toán (1.2) với cơ sở tương ứng là B^*. Bắt đầu từ nó ta có thể tiến hành thuật toán đơn hình để giải bài toán (1.2). Giai đoạn này gọi là pha thứ hai của thuật toán đơn hình hai pha và toàn bộ thủ tục vừa trình bày được gọi là thuật toán đơn hình hai pha để giải bài toán tối ưu (1.2).

iii) Ký hiệu x_{i_*}, $i_* \in J^*_B \cap J_u$ là một thành phần biến giả trong phương án cơ sở chấp nhận được tối ưu (x^*, x^*_u) của bài toán (1.4).

Ký hiệu x_{i_*j}, $j \in J \cup J_u$ là các phần tử của dòng i_* trong bảng đơn hình tương ứng với phương án tối ưu (x^*, x^*_u) của bài toán (1.4).

Nếu tìm được chỉ số $j_* \in J \setminus J^*_B$ sao cho $x_{i_* j_*} \neq 0$ thì thực hiện một phép biến đổi bảng đơn hình với phần tử xoay được chọn là $x_{i_* j_*}$ ta sẽ đưa được thành phần biến giả x_{i_*} ra khỏi cơ sở và thay vào chỗ của nó là biến x_{j_*}

Nếu $x_{i_* j} = 0$, $j \in J \setminus J^*_B$, thì điều đó có nghiã là phương trình tương ứng với nó trong hệ phương trình tuyến tính Ax = b là hệ quả của các phương trình còn lại. Khi đó từ bảng đơn hình tương ứng với phương án tối ưu (x^*, x^*_u) của bài toán (1.4) ta có thể xóa bỏ dòng nói trên và đồng thời xóa bỏ luôn cột ứng với biến giả x_{i_*} .

Trong cả hai trường hợp vừa nêu ta đều loại bỏ được biến giả x_{i_*} khỏi cơ sở.

Lần lượt điểm diện tất cả các thành phần biến giả trong cơ sở, tức là đi đến trường hợp ii), đồng thời trong quá trình này ta cũng sẽ loại được tất cả các ràng buộc phụ thuộc tuyến tính trong hệ Ax = b. Khi đó ta có thể bắt đầu pha thứ hai của thuật toán đơn hình hai pha.

Như vậy, thuật toán đơn hình hai pha áp dụng để giải bài toán (1.2) sẽ cho phép :

1) hoặc là xác định được rằng bài toán không có phương án chấp nhận được;

2) hoặc là xác định được tính không bị chặn dưới của hàm mục tiêu của bài toán ;

3) hoặc là xác định được phương án cơ sở tối ưu của bài toán ;

đồng thời trong quá trình thực hiện thuật toán ta cũng loại được tất cả các ràng buộc phụ thuộc tuyến tính.

Từ kết quả làm việc của thuật toán đơn hình hai pha ta có thể chứng minh các định lý quan trọng sau đây:

Định lý 4.1: *Nếu bài toán tối ưu có phương án tối ưu thì cũng có phương án tối ưu cơ sở.*

Chứng minh: Giả sử bài toán tối ưu là có phương án tối ưu. Khi đó, thuật toán đơn hình hai pha áp dụng để giải bài toán đặt ra chỉ có thể kết thúc ở tình huống 3), tức là thu được phương án cơ sở tối ưu củ nó.

Định lý 4.2: *Điều kiện cần và đủ để bài toán tối ưu có phương án tối ưu là hàm mục tiêu của nó bị chặn dưới trên miền ràng buộc khác rỗng.*

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử x^* là phương án tối ưu của bài toán. Khi đó, $f(x) \geq f^*(x)$, $\forall x \in D$, tức là hàm mục tiêu của bài toán là bị chặn dưới.

Điều kiện đủ: Nếu hàm mục tiêu của bài toán là bị chặn dưới trên miền ràng buộc khác rỗng, thì áp dụng thuật toán đơn hình hai pha để giải ta chỉ có thể kết thúc thuật toán ở tình huống 3), tức là tìm được phương án tối ưu của nó.

4.2 Ví dụ.

Giải bài toán tối ưu tuyến tính sau đây bằng thuật toán đơn hình hai pha

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$

Bài toán phụ tương ứng có dạng

$$x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_7 = 8,$$

$$x_1 + x_2 + x_8 = 2,$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_9 = 3,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 9.$$

Phương án cơ sở chấp nhận được của bài toán phụ là

$$(x, x_u) = (0, 0, 0, 0, 0, 5, 8, 2, 3)$$

với cơ sở tương ứng là B $= E_4$ - ma trận đơn vị cấp 4.

Cơ sở **gồm toàn các biến giả**, ta **bắt đầu pha thứ nhất** của thuật toán đơn hình hai pha. Các kết quả tính toán của pha thứ nhất được ghi vào bảng 1.1 sau:

Bảng 1.1: Bảng đơn hình pha 1

C_j	Cơ sở	Phương án	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	
1	A_6	5	1	1	1	1	1	1	0	0	0	
1	A_7	8	1	1	2	2	2	0	1	0	0	R = 3
1	A_8	2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	S = 9
1	A_9	3	0	0	**1***	1	1	0	0	0	1	
$\Delta = (Z_j\text{-}C_j)$		**f = 18**	3	3	**4***	4	4	0	0	0	0	
1	A_6	2	**1***	1	0	0	0	1	0	0	-1	
1	A_7	2	1	1	0	0	0	0	1	0	-2	R=1
1	A_8	2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	S=6
0	A_3	3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	

		f = 6	**3***	3	0	0	0	0	0	0	-4	
C_j	**Cơ sở**	**Phương án**	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	
0	A_1	2	1	1	0	0	0	1	0	0	-1	
1	A_7	0	0	0	1	1	1	-1	1	0	-1	
1	A_8	0	0	0	1	1	1	-1	0	1	1	
0	A_3	3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	
		f = 0	0	0	0	0	0	-3	0	0	-1	

Pha thứ nhất của thuật toán được kết thúc ở tình huống iii). Xóa bỏ khỏi bảng đơn hình các dòng ứng với biến giả x_7, x_8 và các cột ứng với các biến này ta tiếp tục thực hiện pha thứ hai của thuật toán. Các kết quả tính toán trong pha thứ hai được tiếp tục trong bảng 2

Bảng 1.2: Bảng đơn hình pha 2

C_j	**Cơ sở**	**Phương án**	2	1	1	0	0	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
2	A_1	2	1	**1***	0	0	0	R=2
1	A_3	3	0	0	1	1	1	S=1
$\Delta = (Z_j - C_j)$		**f = 7**	0	**1***	0	1	1	
1	A_2	2	1	1	0	0	0	R=4
1	A_3	3	0	0	1	**1***	1	S=3
		f = 5	-1	0	0	**1***	1	
1	A_2	2	1	1	0	0	0	
0	A_4	3	0	0	1	1	1	
		f = 2	-1	0	-1	0	0	

Phương án tối ưu : $x^* = (0,\ 2,\ 0, 3,\ 0)$. Giá trị tối ưu $f^* = 2$

5. THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH HAI PHA CẢI BIÊN

5.1 Mô tả thuật toán

Thuật toán đơn hình 2 pha cải biên thực chất là thuật toán đơn hình 2 pha nhưng nhằm để giảm số cột của ma trận tính toán ban đầu, cũng như giảm khối lượng tính toán, thay vì chọn các biến cơ sở ban đầu toàn là những biến giả, ta sẽ chọn ra trong những biến phụ nào là vec-tơ đơn vị làm một biến cơ sở, và như vậy sẽ giảm số biến giả, thậm chí có thể sẽ không có biến giả.

Cho ví dụ ràng buộc $5x_1 + 3x_2 < 1$ thay vì biến đổi qua 2 giai đoạn:

+ Để biến dấu "<" thành dấu "=" ta thêm vào biến phụ x_3

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \qquad (1)$$

+ Để có một biến cơ sở ta lại phải thêm vào biến giả x4

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \qquad (2)$$

và x_4 là một biến cơ sở, nhưng thực tế ta chỉ cần qua một giai đoạn biến đổi (1), ta chọn luôn x_3 là biến cơ sở.

Nhận xét:

+ Với những ràng buộc "<", ta luôn có một biến cơ sở là biến phụ của ràng buộc đó.
+ Với những ràng buộc "=" hoặc ">", bắt buộc biến cơ sở là biến giả của ràng buộc đó.

Và như vậy: với thuật toán đơn hình 2 pha cải biên thì không phải lúc nào cũng bắt đầu bằng pha 1, mà có thể bỏ qua và chuyển thẳng sang pha 2 khi ma trận không có biến giả (tức là toàn những ràng buộc "<").

5.2 Ví dụ

Tìm *min* dạng tuyến tính : $f(x) = -2x_1 + x_2 - x_3$ với những ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1..3 \end{cases}$$

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc nhờ các biến phụ x_4 và x_5

$$f(x) = -2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1..5 \end{cases}$$

Ma trận cuả hệ số ràng buộc:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A chỉ chứa một vectơ đơn vị A_4. Để có ma trận đơn vị hạng 3 ta thêm vào ma trận A thêm 2 véctơ đơn vị: $A_6 = (0, 1, 0)$ và $A_7 = (0, 0, 1)$ bằng cách thêm vào vế trái các ràng buộc trên hai biến giả x_6 và x_7 như sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1..7 \end{cases}$$

Hàm mục tiêu của bài toán trở thành:

$$f(x) = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_6 + x_7 \rightarrow min$$

Pha 1 gồm **1 biến phụ và 2 biến giả.** Bảng đơn hình pha 1 như sau:

Bảng 1.3: Bảng đơn hình pha 1

c_j	Cơ sở	Phương án	0	0	0	0	0	1	1	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
0	A_4	8	1	-1	2	1	0	0	0	R=2
1	A_6	4	2	2	-1	0	0	1	0	S=7
1	A_7	1	-1	**1***	1	0	-1	0	1	
$\Delta = (Z_j\text{-}C_j)$		**F=5**	1	**3***	0	0	-1	0	0	
0	A_4	9	0	0	3	1	-1	-1	0	R=1
1	A_6	2	**4***	0	-3	0	0	2	1	S=6
0	A_2	1	-1	1	1	0	0	-1	0	
		F=2	**4***	0	-3	0	2	0	-3	
0	A_4	9	0	0	3	1	-1	0	1	
0	A_1	$1/2$	1	0	$-3/4$	0	$1/2$	$1/4$	$-1/2$	
0	A_2	$3/2$	0	1	$1/4$	0	$-1/2$	$1/4$	$1/2$	
		F=0	0	0	0	0	0	-1	-1	

Pha thứ nhất của thuật toán được kết thúc ở tình huống ii). Xóa bỏ khỏi bảng đơn hình các cột ứng với biến giả x_5, x_6 và tiếp tục thực hiện pha thứ hai của thuật toán. Các kết quả tính toán trong pha thứ hai được tiếp tục trong bảng đơn hình pha 2

Bảng 1.4: Bảng đơn hình pha 2

c_j	Cơ sở	Phương án	-2	1	-1	0	0	θ
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	A_4	9	0	0	**3***	1	-1	R=3
-2	A_1	1/2	1	0	-3/4	0	1/2	S=4
1	A_2	3/2	0	1	1/4	0	-1/2	
$\Delta = (Z_j\text{-}C_j)$			0	0	**11/4***	0	-3/2	
-1	A_3	3	0	0	1	1/3	-1/3	
-2	A_1	11/4	1	0	0	1/4	1/4	
1	A_2	3/4	0	1	0	-1/12	-5/12	
$\Delta = (Z_j\text{-}C_j)$			0	0	0	-11/12	-7/2	

Phương án tối ưu : $x^* = (11/4,\ 3/4,\ 3)$. Giá trị tối ưu $f^* = -31/4$

6. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH THUẾ (M – PHƯƠNG PHÁP)

Đưa vào các biến phụ trong bài toán tối ưu dạng chuẩn để chuyển về dạng chính tắc.

6.1 Mô tả thuật toán

$$\begin{aligned} & c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ \ i = 1..m \qquad \qquad (P) \\ & x_j \ge 0, \ \ j = 1..n \end{aligned}$$

Ta đưa vào m biến "**giả tạo**" khác với biến phụ:

$$x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} \ge 0$$

Và một số M > 0 rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh với nó. Ta chuyển bài toán (P) về bài toán (M) sau đây:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - ... - Mx_{n+m} \to \max$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+k} = b_j, \ \ i = \overline{1..m} \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1..m+n} \end{cases} \qquad (M)$$

Khi đưa M > 0 rất lớn vào chẳng khác ta "đánh thuế rất nặng" vào các biến giả tạo dương tương ứng khiến cho trong phương án tối ưu (nếu có) thì các biến "giả tạo" bằng 0 tất cả.

Khi đó bài toán M sau khi chuyển đổi được gọi là ***bài toán đánh thuế***.

Giải bài toán (M) bằng phương pháp đơn hình.

Tình huống 1: Bài toán (M) có phương án tối ưu dạng $(x^*, 0, 0, ..., 0)$ khi đó x* là phương án tối ưu của bài toán ban đầu (P) (với tất cả các biến "giả tạo" đều bằng 0)

Tình huống 2: Bài toán (M) có phương án tối ưu (x, y) trong đó vectơ $y \ne 0$ → còn biến "giả tạo" dương. Khi đó bào toán (P) không có phương án → không có phương án tối ưu.

Chú ý 1: Vì các hệ số hàm mục tiêu của bài toán (M) phụ thuộc tuyến tính vào M, mà $\Delta_k = \sum z_{jk}c_j - c_k \Rightarrow \Delta_k$ phụ thuộc tuyến tính vào các hệ số hàm mục tiêu Δ_k → phụ thuộc tuyến tính vào M.

Phân tích Δ_k thành hai thành phần: $\Delta_k = \delta_k + \eta_k M$

- Nếu $\eta_k > 0$ → $\Delta_k > 0$
- Nếu $\eta_k < 0$ → $\Delta_k < 0$

Do đó dòng cuối của bảng được tách thành 2 dòng:

- Dòng 1: ghi δ_k
- Dòng 2: ghi η_k (được ưu tiên xét trước)

- Nếu $\Delta_k < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_k < 0, & \text{và } \delta_k \text{ bât ky} \\ \eta_k = 0, & \delta_k < 0 \end{cases}$

Để so sánh các Δ_{k1}, Δ_{k2} ta phải xét xem:

$$\Delta_{k1} < \Delta_{k2} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_{k1} < \eta_{k2} \text{ và } \delta_{k1}, \delta_{k2} \text{ tùy ý} \\ \eta_{k1} = \eta_{k2} \text{ và } \delta_{k1} < \delta_{k2} \end{cases}$$

Chú ý 2: Khi một biến giả tạo x_{n+k} đã bị đẩy ra khỏi cơ sở (trở nên bằng 0) thì từ đó về sau nó không thể quay lại cơ sở → không thể trở lại dương được nữa. Dó đó A_{n+k} sẽ không quay lại được → ta không cần tính gì ở biến đó nữa → xoá cột đó đi.

Chú ý 3: Nếu gặp ràng buộc $\sum a_{ij}x_j \geq b_i, b_i > 0$ thì trước hết ta phải trừ vế trái cho một biến phụ y_i mà không cộng nữa. Sau đó thêm vào biến giả tạo $x_{n+i} \geq 0$ và ràng buộc đó trở thành:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i + x_{n+i} = b_i$$

Trên hàm mục tiêu: $\overline{f} = f + 0.y_i - Mx_{n+i}$

6.2 Ví dụ

<u>Ví dụ 1.</u> Giải bài toán tối ưu sau bằng phương pháp đơn hình

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1..4} \end{cases}$$

Giải

Đưa vào 3 biến giả tạo không âm x_5, x_6, x_7, ta có bài toán tương đương sau:

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6 - Mx_7 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_6 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 7 \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1..7} \end{cases}$$

Trong đó M>0 là số rất lớn.

Ta có phương án xuất phát: $x = (0, 0, 0, 0, 2, 6, 7)$

Với các biến cơ sở là: $x_5 = 2, x_6 = 6, x_7 = 7$

Các vectơ cơ sở xuất phát là:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta có bảng đơn hình (phần dưới được chia thành 2 dòng):

$$\Delta_1 = \delta_1 + \eta_1 M = -2 - 4M$$

C_j	Cơ sở	Phương án	**2**	**1**	**-1**	**-1**	**- M**	**- M**	**- M**
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
- M	A_5	2	$\boxed{1}$	-1	2	-1	1	0	0
- M	A_6	6	2	1	- 3	1	0	1	0
- M	A_7	7	1	1	1	1	0	0	1
		δ_k	-2	-1	1	1	0	0	0
		η_k	- 4	-1	0	-1	0	0	0

C_j	Cơ sở	Phương án	**2**	**1**	**-1**	**-1**	**- M**	**- M**	**- M**
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	A_1	2	1	-1	2	-1		0	0
- M	A_6	2	0	$\boxed{3}$	- 7	3		1	0
- M	A_7	5	0	2	-1	2		0	1
		δ_k	0	-3	5	-1		0	0
		η_k	0	-5	8	-5		0	0

C_j	Cơ sở	Phương án	**2**	**1**	**-1**	**-1**	**- M**	**- M**	**- M**
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	A_1	8/3	1	0	-1/3	0			0
1	A_2	2/3	0	1	- 7/3	1			0
- M	A_7	11/3	0	0	$\boxed{11/3}$	0			1
		δ_k	0	0	-2	2			0
		η_k	0	0	-11/3	0			0

C_j	Cơ sở	Phương án	**2**	**1**	**-1**	**-1**	**- M**	**- M**	**- M**
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	A_1	3	1	0	0	0			
1	A_2	3	0	1	0	1			
- 1	A_3	1	0	0	1	0			
		δ_k	0	0	0	2			
		η_k	0	0	0	0			
		f=8							

Ví dụ 2. Giải bài toán tối ưu sau bằng phương pháp đơn hình

$$-3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1..4} \end{cases}$$

Giải

Đưa bài toán trên về bài toán max tương đương:

$$3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1..4} \end{cases}$$

Đưa vào 3 biến giả tạo không âm x_5, x_6, x_7, ta có bài toán tương đương sau:

$$3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - Mx_5 - Mx_6 - Mx_7 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_6 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 6 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1..7} \end{cases}$$

Trong đó M>0 là số rất lớn.

Ta có phương án xuất phát:

$$x = (0, 0, 0, 0, 2, 9, 6)$$

Với các biến cơ sở là:

$$x_5 = 2, x_6 = 9, x_7 = 6$$

Các vectơ cơ sở xuất phát là: $A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ta có bảng đơn hình (phần dưới được chia thành 2 dòng):

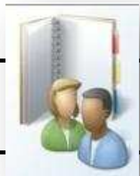
C_j	Cơ sở	Phương án	3	-1	-3	1	- M	- M	- M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
- M	A_5	2	1	2	-1	1	1	0	0
- M	A_6	9	2	-6	3	3	0	1	0
- M	A_7	6	1	-1	1	-1	0	0	1
		δ_k	-3	1	3	1	0	0	0
		η_k	- 4	5	-3	-3	0	0	0

C_j	Cơ sở	Phương án	3	-1	-3	1	- M	- M	- M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
3	A_1	2	1	2	-1	1		0	0
- M	A_6	5	0	-10	5	1		1	0
- M	A_7	4	0	-3	2	-2		0	1
		δ_k	0	7	0	2		0	0
		η_k	0	13	-7	1		0	0

C_j	Cơ sở	Phương án	3	-1	-3	1	- M	- M	- M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
3	A_1	3	1	0	0	6/5			0
-3	A_3	1	0	-2	1	1/5			0
- M	A_7	2	0	1	0	-12/5			1
		δ_k	0	7	0	2			0
		η_k	0	-1	0	12/5			0

C_j	Cơ sở	Phương án	3	-1	-3	1	- M	- M	- M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
3	A_1	3	1	0	0	6/5			
-3	A_3	5	0	0	1	-23/5			
- 1	A_2	2	0	1	0	-12/5			
		δ_k	0	0	0	94/5			
		η_k	0	0	0	0			

$$f_{max} = 3*3 - 3*5 - 1*2 = -8 \qquad \rightarrow f_{min} = 8$$



Chương 4

Lý thuyết đối ngẫu và bài toán tối ưu đối ngẫu

Với mọi bài toán tối ưu, ta có thể thiết lập tương ứng cho nó một bài toán khác gọi là bài toán đối ngẫu của nó. Khái niệm đối ngẫu là một trong các khái niệm cơ bản của tối ưu hóa.

Trong nhiều trường hợp để có được những kết luận chấp nhận được cho một trong các bài toán tối ưu thì việc nghiên cứu bài toán đối ngẫu của nó tỏ ra thuận tiện hơn. Hơn nữa, khi phân tích song song một cặp bài toán đối ngẫu ta có thể thu được những kết luận hay cả về toán học lẫn kinh tế.

J. Von Neumann đã xây dựng mô hình bài toán tối ưu đối ngẫu và một số định lý đối ngẫu vào năm 1947 dựa vào các kết quả của lý thuyết trò chơi, nhưng đến tận năm 1951 các kết quả này mới được công bố bởi một số nhà toán học khác như Gale, Kuhn, Tucker.

Để giải quyết bài toán đối ngẫu, nhà toán học C.E. Lemke đã đưa ra phương pháp đơn hình đối ngẫu vào năm 1954.

1. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

Xét bài toán tối ưu dạng chuẩn

$$(P): \langle c, x\rangle \rightarrow \min \qquad\qquad (P^*): \langle b, y\rangle \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} Ax \ge b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} A'y \ge c \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Xét bài toán tối ưu dạng chính tắc

$$(P): \langle c, x\rangle \rightarrow \min \qquad\qquad (P^*): \langle b, y\rangle \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad A'y \le c$$

2. QUI TẮC CHUYỂN BÀI TOÁN TỐI ƯU TỔNG QUÁT SANG BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

2.1 Qui tắc chuyển đổi

Trong trường hợp bài toán tối ưu tuyến tính tổng quát, những quy tắc sau đây được áp dụng để xây dựng bài toán đối ngẫu tương ứng

Bài toán gốc		Bài toán đối ngẫu
• **Hàm mục tiêu**		
Max	←→	Min
• **Biến đối ngẫu**		
Mỗi ràng buộc	←→	Một biến đối ngẫu
• **Cho phí đối ngẫu và giới hạn ràng buộc**		
Chi phí đối ngẫu	←→	Giới hạn ràng buộc
• **Ma trận ràng buộc**		
Ma trận ràng buộc	←→	Ma trận chuyển vị
• **Chiều của ràng buộc và dấu của biến**		
Ràng buộc trong bài toán max **có dấu " $\le$"**	←→	Biến đối ngẫu trong bài toán min **có dấu " $\ge$"** (trái chiều)
Ràng buộc trong bài toán max **có dấu "="**	←→	Biến đối ngẫu trong bài toán min **có dấu tùy ý**
Ràng buộc trong bài toán max **có dấu " $\ge$"**	←→	Biến đối ngẫu trong bài toán min **có dấu " $\le$"** (trái chiều)
Biến của bài toán max **có dấu " $\ge$0"**	←→	Ràng buộc đối ngẫu của bài toán min **có dầu " $\ge$"** (cùng chiều)
Biến của bài toán max **có dấu tùy ý**	←→	Ràng buộc đối ngẫu của bài toán min **có dầu "="**
Biến của bài toán max **có dấu " $\le$0"**		Ràng buộc đối ngẫu của bài toán min **có dấu " $\le$0"** (cùng chiều)

Xét các ràng buộc dạng ma trận của một bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát như sau :

$$a_i^T \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \le \\ \ge \end{matrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\uparrow A_j$$

Ký hiệu: A_i^T là dòng thứ I (i=1..m)

A_j là cột thứ j (j=1..n)

Khi đó, mối liên hệ giữa hai bài toán đối ngẫu có thể được trình bày như sau:

$z(x) = c^T x \rightarrow \min$	$w(y) = y^T b \rightarrow \max$	Ràng buộc / Dấu
$a_i^T x = b_i$ $a_i^T x \le b_i$ $a_i^T x \ge b_i$	y_i tự do $y_i \le 0$ $y_i \ge 0$	Cùng chiều
$x_j \ge 0$ $x_j \le 0$ x_j tự do	$y^T A_j \le c_j$ $y^T A_j \ge c_j$ $y^T A_j = c_j$	Trái chiều

GỐC min			ĐỐI NGẪU max
Ràng buộc chung	>= <= =	>=0 <=0 tùy ý	Ràng buộc biến
Ràng buộc biến	>=0 <=0 tùy ý	<= >= =	Ràng buộc chung
ĐỐI NGẪU *min*			*GỐC* *max*

Cách nhớ:

- *Bài toán gốc **min**, ràng buộc chung cùng dấu, ràng buộc biến trái dấu*
- *Bài toán gốc **max**, ràng buộc chung trái dấu, ràng buộc biến cùng dấu*

2.2 Ví dụ

Ví dụ 1. Bài toán gốc (P)

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 7 \\ -x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 8x_4 = -2 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \le 0, x_3, x_4 \text{tùy ý} \end{cases}$$

Viết dưới dạng ma trận ta có:

$$f(x) = (1,-2,0,3).(x_1,x_2,x_3,x_4) \to \min$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ge \\ \le \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \le 0, x_3, x_4 \text{tùy ý}$$

Các biến đổi như sau:

$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 7$	$\leftrightarrow$	$y_1 \ge 0$
$-x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 1$	$\leftrightarrow$	$y_2 \le 0$
$5x_1 + 7x_2 + x_3 + 8x_4 = -2$	$\leftrightarrow$	y_3 tùy ý
$x_1 \ge 0$	$\leftrightarrow$	$y_1 + 5y_3 \le 1$
$x_2 \le 0$	$\leftrightarrow$	$3y_1 - y_2 + 7y_3 \ge -2$
x_3 tùy ý	$\leftrightarrow$	$4y_1 + 2y_2 + y_3 = 0$
x_4 tùy ý	$\leftrightarrow$	$y_1 + 6y_2 + 8y_3 = 3$

Bài toán đối ngẫu tương ứng là

$$f^*(y) = 7y_1 + y_2 - 2y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 \quad\quad + y_3 \le 1 \\ 3y_1 - y_2 + 7y_3 \ge -2 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + 6y_2 + 8y_3 = 3 \\ y_1 \ge 0; y_2 \le 0,\ y_3 \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Bài toán gốc (P)

$$f(x) = (1,-1,2).(x_1, x_2, x_3) \to \max$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ge \\ \le \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \le 0, x_3 \text{ tùy ý}$$

Bài toán đối ngẫu tương ứng là:

$$f^*(y) = (6,4,-2).(y_1, y_2, y_3) \to \min$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ge \\ \le \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 \le 0;\ y_2 \ge 0, y_3 \text{ tùy ý}$$

2.3 Ý nghĩa kinh tế của bài toán đối ngẫu

Xét bài toán lập kế hoạch sản xuất: Một xí nghiệp có số lượng gỗ (B1) và axits (B2) tương ứng là 5000 m^3, 90 tấn (các yếu tố sản xuất khác có số lượng lớn). Xí nghiệp có thể sản xuất ra 3 loại giấy A_1, A_2, A_3. Mức tiêu hao các loại nguyên liệu (yếu tố sản xuất) để sản xuất ra 1 tấn giấy thành phẩm như sau:

Nguyên liệu	Sản phẩm		
	A_1	A_2	A_3
Gỗ (m^3)	1	3	2
Axít (kg)	20	30	24

Giá bán 1 tấn giấy A_1, A_2, A_3 tương ứng là 9, 12 và 10 triệu đồng (giả sử các sản phẩm sản xuất ra đều có thể tiêu thụ được hết). Lập kế hoạch sản xuất tối ưu.

Gọi x_j là số tấn giấy loại A_j cần phải sản xuất. Ta có mô hình toán học sau:

Tìm (x_1, x_2, x_3) sao cho:

$$f(x) = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 5000 \\ 20x_1 + 30x_2 + 24x_3 \le 90000 \\ x_j \ge 0,\ j = 1..3 \end{cases}$$

Giả sử bây giờ có người muốn mua toàn bộ số lượng các yếu tốt sản xuất của xí nghiệp. Khi đó giá bán nên đặt là bao nhiêu?

Gọi y_i là giá bán 1 đơn vị yếu tố sản xuất loại B_i, i=1,2

Giá bán không thể âm nên $y_i \ge 0$

Ta có số tiền thu được khi bán các yếu tố sản xuất dùng để sản xuất ra 1 đơn vị sản phẩm loại A_j là:

Loại A_1: $y_1 + 20y_2$

Loại A_2: $3y_1 + 30y_2$

Loại A_3: $2y_1 + 24y_2$

Ta thấy có 2 ý tưởng sau:

- *Đối với người bán*: Giá bán các yếu tố sản xuất chỉ được chấp nhận khi số tiền thu được do bán các yếu tố sản xuất dùng để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại A_j phải không ít hơn số tiền thu được khi xí nghiệp sử dụng các yếu tố sản xuất đó để sản xuất ra 1 đơn vị sản phẩm loại A_j. Tức là:

$$y_1 + 20y_2 \ge 9;\ 3y_1 + 30y_2 \ge 12;\ 2y_1 + 24y_2 \ge 10$$

- *Đối với người mua:* Chỉ chấp nhận giá trị các yếu tố sản xuất khi tổng số tiền dùng để mua tất cả các yếu tố sản xuất là ít nhất. Tức là:

$$f^* = 5000y_1 + 90000y_2 \to \min$$

Tóm lại, ta có mô hình: Tìm (y_1,y_2) sao cho:

$$f^* = 5000y_1 + 90000y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 20y_2 \ge 9 \\ 3y_1 + 30y_2 \ge 12 \\ 3y_1 + 30y_2 \ge 12 \\ y_i \ge 0,\ i = 1,2 \end{cases}$$

3. CÁC ĐỊNH LÍ ĐỐI NGẪU

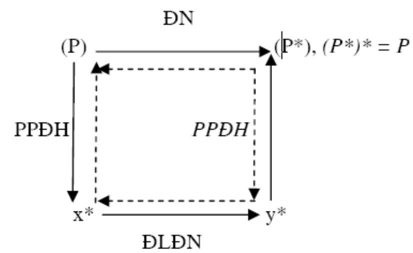
Ta thấy, bài toán đối ngẫu P* cũng là bài toán tối ưu tuyến tính. Do đó giải (P*) có 3 cách.

Cách 1: Dùng phương pháp đơn hình để giải trực tiếp (P*)

Cách 2: Giải bài toán (P) bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu. Ta được phương án tối ưu của bài toán gốc (P), đồng thời có luôn phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (P*) bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính.

Cách 3: Giải bài toán đối ngẫu (P*) bằng phương pháp đơn hình. Từ phương án tối ưu của (P*) ta suy ra phương án tối ưu x* của bài toán gốc (P)

Vấn đề đặt ra là từ phương án tối ưu x* của (P) làm thế nào để suy ra được phương án tối ưu y* của (P*). Vấn đề trên được giải quyết thông qua các định lí đối ngẫu.



Xét cặp bài toán đối ngẫu:

(P): $\underset{x \in X}{f(x)} = \langle c, x \rangle \to \min$ (P*): $\underset{y \in Y}{f^*(y)} = \langle b, y \rangle \to \max$

Với X là miền ràng buộc (tập phương án) của bài toán (P)

Y là miền ràng buộc (tập phương án) của bài toán (P*)

Định lí 3.1. (Định lí đối ngẫu yếu): *x là phương án của (P), y là phương án của (P*) thì:*

$$f(x) = \langle c, x \rangle \geq f^*(y) = \langle b, y \rangle$$

Hệ quả 3.1:

- Nếu $X \neq \varnothing$ và hàm mục tiêu f không bị chặn dưới trên miền X thì $Y = \varnothing$
- Nếu $Y \neq \varnothing$ và hàm mục tiêu f* không bị chặn trên trên miền Y thì $X = \varnothing$

Định lí 3.2. (Định lí đối mạnh):

- *Nếu (P) có phương án tối ưu là x* thì (P*) cũng có phương án tối ưu là y* và f(x*)=f*(y*)*
- *Nếu (P*) có phương án tối ưu là y* thì (P) cũng có phương án tối ưu là x* và f(x*)=f*(y*)*

Hệ quả 3.2: (P) và (P*) có phương án $\Leftrightarrow$ (P) và (P*) có phương án tối ưu. Và giá trị tối ưu của các hàm mục tiêu bằng nhau.

Nhận xét: từ định lí này ta dùng kết quả sau để kiểm tra phương án tối ưu

x là phương án của (P), y là phương án của (P) và f(x) = f*(y)* $\Leftrightarrow$ *x là phương án tối ưu của (P) và y là phương án tối ưu của (P*).*

Đối với cặp bài toán (P) và (P*) ta có các kết quả sau:

- Cả 2 bài toán cùng có phương án thì cả 2 bài toán cùng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của 2 hàm mục tiêu luôn bằng nhau.
- Chỉ 1 bài toán có phương án thì cả 2 bài toán cùng không có phương án tối ưu *(giả sử (P) có phương án thì f(x) không bị chặn dưới, hoặc (P*) có phương án thì f*(y) không bị chặn trên)*
- Cả 2 bài toán cùng không có phương án thì hiển nhiên chúng không có phương án tối ưu.

Ràng buộc chặt là ràng buộc xảy ra dấu "="

Ràng buộc lỏng là ràng buộc xảy ra dấu bất đẳng thức thực sự ">", "<"

Định lí 3.3 (Độ lệch bù yếu).

x, y* là phương án tối ưu của (P), (P*) $\Leftrightarrow$ x*, y* là phương án của (P), (P*) và thỏa mãn điều kiện: trong các cặp ràng buộc đối ngẫu, nếu ràng buộc này là lỏng thì ràng buộc chia là chặt.*

Hệ quả 3.3. Một ràng buộc là lỏng đối với một phương án tối ưu của bài toán này thì ràng buộc đối ngẫu với nó phải là chặt đối với mọi phương án tối ưu của bài toán kia.

Từ phương án tối ưu x và các cặp ràng buộc đối ngẫu, ta sẽ được hệ phương trình tuyến tính theo y (có các ẩn là $y_1, y_2, \ldots$). Kiểm tra: Nếu y là phương án của (P*) thì y sẽ là phương án tối ưu của (P*) và hai giá trị tối ưu sẽ bằng nhau $f^*_{max} = f_{min}$.

Chú ý: ràng buộc lỏng → ràng buộc chặt; ràng buộc chặt $\not\rightarrow$ ràng buộc chặt.

Ví dụ 1. $f(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ \geq \\ \leq \end{matrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1..4$$

a. Dùng phương pháp đơn hình giải bài toán (P)

b. Viết bài toán đối ngẫu (P*), tìm phương án tối ưu của (P*).

Giải:

a) Phương pháp đơn hình ta có phương án tối ưu của (P) là x* = (0, 14, 6, 5), $f_{max} = 54$

b) Bài toán đối ngẫu (P*) là: $f(y) = 50y_1 + 16y_2 + 23x_3 \to \min$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \geq \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y_2 \leq 0, y_3 \geq 0, y_1 \text{ tùy ý}$$

Ta có:

$$\begin{matrix} x_2 = 14 > 0 \\ x_3 = 6 > 0 \\ x_4 = 5 > 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 = 1 \\ 6y_1 + 2y_2 + y_3 = 4 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta có: $y_1 = 2, y_2 = \frac{-23}{5}, y_3 = \frac{6}{5}$. Vậy $y^* = (2, \frac{-23}{5}, \frac{6}{5})$. Kiểm tra y* là phương án tối ưu của (P*): Thử $y^* = (2, \frac{-23}{5}, \frac{6}{5})$ vào 3 ràng buộc còn lại $y_2 \leq 0, y_3 \geq 0$, $5y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 2$ thấy thỏa mãn → y* là phương án của (P*). Mà $f^*_{max} = f_{min}$ =54 → y* là phương án tối ưu duy nhất của (P*).

Ví dụ 2. $$f(x) = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \leq \\ \leq \end{matrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0;\ j = 1..4$$

a) Giải (P) bằng thuật toán đơn hình

b) Viết (P*) và giải (P*)

Giải

a) Áp dụng phương pháp đơn hình ta có phương án tối ưu của (P) là x =(4,0,2) và $f_{max} = 34$.

b) Bài toán đối ngẫu (P*) là $f^*(y) = 10y_1 + 8y_2 + 19y_3 \rightarrow \min$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \geq \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$y_i \geq 0;\ i = 1..3$$

Ta có:

$$\begin{matrix} 4 + 2.0 + 5.2 = 14 < 19 \\ x_1 = 4 > 0 \\ x_3 = 2 > 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 6 \\ y_1 + 2y_2 + 5y_3 = 5 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta có $y^* = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$. Kiểm tra ta có y* là phương án của (P*) nên là phương án tối ưu của (P*) và $f_{max} = 34$.

4. THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

Thực chất của phương pháp đơn hình đối ngẫu chính là áp dụng phương pháp đơn hình để giải bài toán đối ngẫu với phương án xuất phát là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu. Kết quả cuối cùng ta sẽ thu được là phương án tối ưu của bài toán gốc.

Không mất tính tổng quát, ta xét cặp bài toán tối ưu đối ngẫu sau:

(P): $\langle c, x\rangle \to \min$ $\qquad$ (P*): $\langle b, y\rangle \to \max$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad A'y \le c$$

Giả sử ta có một phương án cực biên y^0 không thoái hóa của bài toán (P*) với các ràng buộc độc lập tuyến tính: $\langle A_j, y^0\rangle = c_j,\ \ j \in J$. Và mặt khác: $\langle A_k, y^0\rangle < c_j,\ \ k \in J$. Trong đó $|J| = m$ và hệ $\{A_j \mid j \in J\}$ gọi là cơ sở đối ngẫu.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in J} x_j.A_j = b \\ x_k = 0, k \notin J \end{cases}$$

ta thu được một giả phương án của (P) tương ứng với cơ sở đối ngẫu J. Các biến x_j , $j \in J$ cũng được gọi là các biến cơ sở của giả phương án. Nếu tất cả các biến cơ sở của giả phương án x đều không âm thì x được gọi là phương án tối ưu của bài toán (P).

Bước 1: Xây dựng bảng đơn hình cho giả phương án x với cơ sở J:

$$\Delta_k \le 0, \quad \forall k \notin J$$

Bước 2: Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu cho giả phương án x:

a. Nếu $x_j \ge 0, \forall j \in J$ thì x là phương án tối ưu của bài toán (P). Thuật toán dừng.

b. Nếu $\exists x_j < 0,\ j \in J$ thì sang bước 3

Bước 3:

a. Nếu $\exists x_j < 0$ và $z_{jk} \ge 0, \forall k \notin J$ → Hàm mục tiêu cảu bài toán đối ngẫu (P*) không bị chặn trên → bài toán (P) không có phương án chấp nhận được. Thuật toán dừng.

b. Đối với mỗi $x_j < 0,\ j \in J$ tồn tại $k \notin J$ sao cho: $\quad z_{jk} < 0$

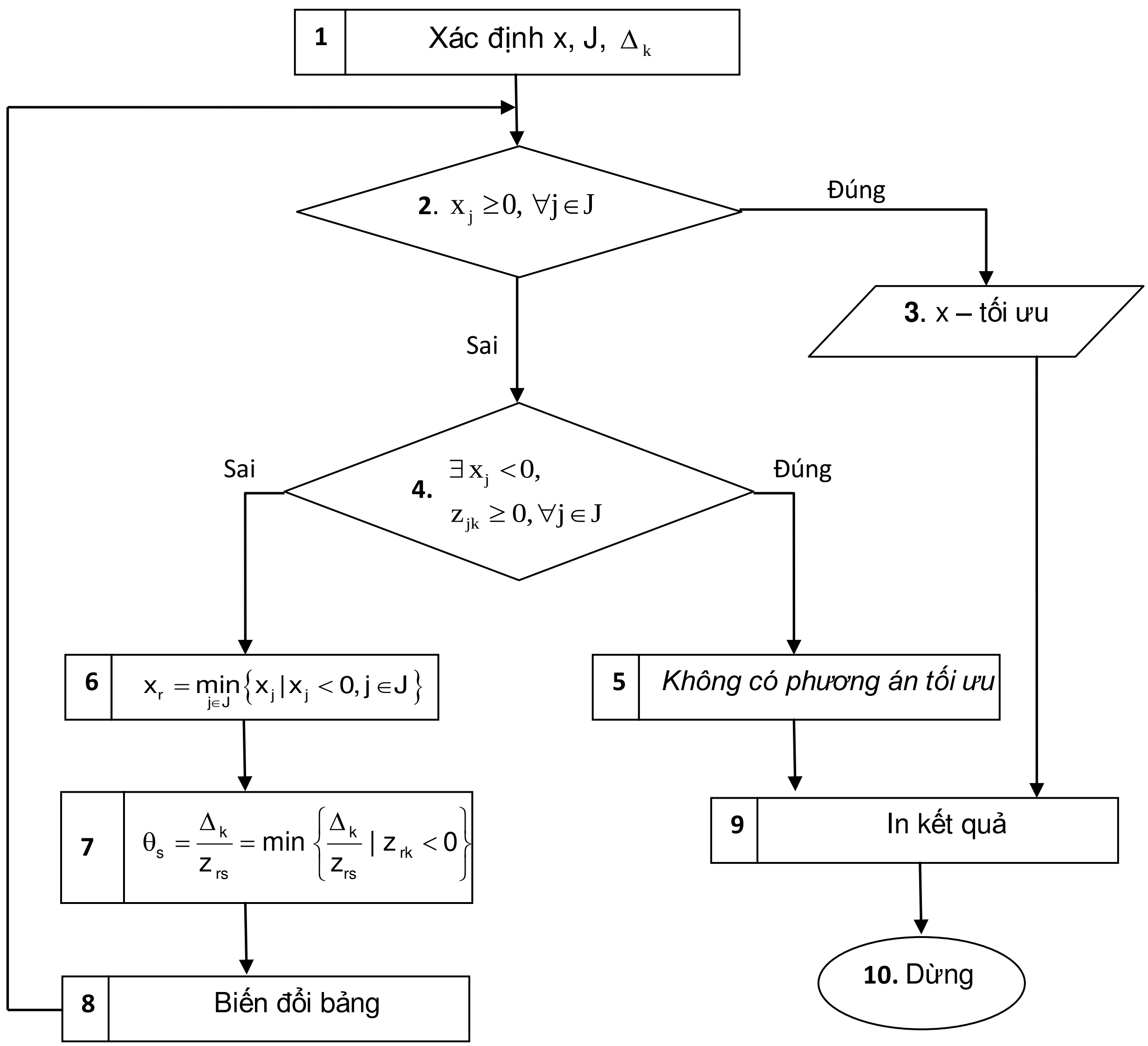
- Chọn $x_r = \min_{j \in J} \{ x_j \mid x_j < 0 \}$ Đưa vectơ A_r ra khỏi cơ sở J.

- Xác định: $\theta_s = \frac{\Delta_k}{z_{rs}} = \min \left\{ \frac{\Delta_k}{z_{rs}} \mid z_{rk} < 0 \right\}$ Đưa vectơ A_s vào cơ sở.

Ta được cơ sở mới $J' = J \setminus \{r\} \cup \{s\}$

Thực hiện phép biến đổi cơ sở với z_{rs} là phần tử trục, ta thu được phương án mới x' với cơ sở đối ngẫu $J' = J \setminus \{r\} \cup \{s\}$ quay lại bước 1.

Thuật toán đơn hình được diễn tả theo sơ đồ khối như hình vẽ sau:



Ví dụ 1 $f(x)= x_1 - x_1 \quad -2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_4 + x_5 - x_6 &= 2 \\ x_2 \quad + x_4 \quad\quad + x_6 &= 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9 \end{aligned}$$

$x_j \geq 0$, j=1, 2, 3…6

Giải

Bài toán đối ngẫu: $f^*(y) = 2y_1 + 12y_2 + 9y_3 \rightarrow \max$

$$\begin{aligned} y_1 &\leq 1 \\ y_2 &\leq -1 \\ y_3 &\leq 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 &\leq -2 \\ y_1 \quad + 4y_3 &\leq 2 \\ -y_1 + y_2 + 3y_3 &\leq -3 \end{aligned}$$

Ta dễ thấy một phương án cực biên: $y_1 = 1,\ y_2 = -1,\ y_3 = -1$

Với cơ sở A_1, A_2, A_4, vì rằng:

$$\langle A_1, y^0 \rangle = (1, 0, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1;$$

$$\langle A_2, y^0 \rangle = (0, 1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1;$$

$$\langle A_4, y^0 \rangle = (1, 1, 2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2$$

Để tìm giả phương án ta giải hệ $\sum_{j \in J} x_j . A_j = b$, Tức là:

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_4 = 2 \\ \quad x_2 + x_4 = 12 \\ \quad\quad 2x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{2} \\ x_2 = \dfrac{15}{2} \\ x_4 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Cần tìm các số z_{jk} từ hệ:

$$\sum_{j \in J} z_{jk}.A_j = A_k,\ k \notin J, k = 3, 5, 6$$

$$A_3 = (0, 0, 1)^t,\ A_5 = (1, 0, 4)^t,\ A_6 = (-1, 1, 1)^t$$

Kết quả cho trong bảng sau:

	Cơ sở	Giả phương án	1	-1	0	-2	2	-3	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_1	-5/2	1	0	-1/2	0	1	-5/2	R=1
-1	A_2	15/2	0	1	-1/2	0	-2	-1/2	S=6
-2	A_4	9/2	0	0	1/2	1	2	3/2	
		-19	**0**	**0**	**-1**	**0**	**-5**	**-2**	
-3	A_6	1	-2/5	0	1/5	0	2/5	1	
-1	A_2	8	-1/5	1	-2/5	0	-9/5	0	
-2	A_4	3	3/5	0	1/5	1	7/5	0	
		-17	-4/5	0	-3/5	0	-21/5	0	

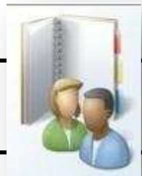
Ta kết thúc vì $x_j \geq 0,\ \forall j \in J$.

Vậy phương án tối ưu của bài toán đã cho là x^*=(0,8,0,9,0,1); f(x*)= -17.

5. Vấn đề phương án cực biên và cơ sở xuất phát

Để áp dụng thuật toán đơn hình đối ngẫu, trước tiên ta phải xác định được một phương án cực biên xuất phát cho nó.

- Nếu bài toán dạng chính tắc có một cơ sở gồm các vectơ $\{\pm e^i\}$, ta lập bảng đơn hình ứng với cơ sở này, nếu $\Delta_k \leq 0,\ \forall k \notin J$ thì ta lấy đó làm cơ sở đối ngẫu xuất phát và áp dụng thuật toán.
- Nếu biết một phương án cực biên y của bài toán đối ngẫu của bài toán dạng chính tắc, ta cần xác định cơ sở của y, tìm ma trận hệ số phân tích theo cơ sở này và lập bảng đơn hình tương ứng. Nếu $\Delta_k \leq 0,\ \forall k \notin J$ thì ta lấy nó làm cơ sở đối ngẫu xuất phát và áp dụng thuật toán.



Chương 5

Bài toán vận tải

Bài toán vận tải là một dạng đặc biệt của bài toán tối ưu, bởi vậy ta có thể dùng các phương pháp giải bài toán tối ưu để giải. Tuy nhiên do tính đặc thù của nó, người ta xây dựng các phương pháp giải riêng. Ta sẽ xét một số phương pháp giải bài toán vận tải.

1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN, SỰ TỒN TẠI CỦA NGHIỆM TỐI ƯU

1.1 Phát biểu bài toán

Có m địa điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ cùng sản xuất một loại hang hóa với các lượng hàng tương ứng là $a_1, a_2, ..., a_m$.

Có n nơi tiêu thụ loại hàng đó $B_1, B_2, ..., B_n$ với các yêu cầu tương ứng là $b_1, b_2, ..., b_n$.

Để đơn giản ta sẽ gọi A_i là điểm phát i, $i = \overline{1..m}$

B_j là điểm thu j, $j = \overline{1..n}$

Hàng có thể trở từ một điểm phát bất kỳ (i) đến một điểm thu bất kỳ (j).

Kí hiệu:

- c_{ij} là chi phí chuyên trở một đơn vị hàng từ điểm phát (i) đến điểm thu (j)
- x_{ij} là lượng hàng chuyên trở từ điểm phát (i) đến điểm thu (j)

Bài toán đặt ra là: *Xác định những đại lượng x_{ij} cho mọi con đường (i, j) sao cho tổng chi phí chuyên trở là nhỏ nhất với giả thiết là:* $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Tức là lượng hành phát ra bằng đúng lượng hàng yêu cầu ở các điểm thu (điều kiện cân bằng thu phát).

Dạng toán học của bài toán vận tải là:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = \overline{1..m} \qquad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = \overline{1..n} \qquad (1.3)$$

$$a_{i,} b_j > 0, \ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1.4)$$

Hệ ràng buộc (1.2), (1.3) có m+n phương trình, m*n ẩn, tuy nhiên do (1.4) nên bất kỳ phương trình nào trong m + n phương trình cũng là hệ của các phương trình còn lại và có thể bỏ đi.

Bài toán vận tải rõ ràng là bài toán tối ưu dạng chính tắc. Vì thế ta có thể giải nó bằng các thuật toán của bài toán tối ưu hóa chính tắc, tuy nhiên việc làm đó sẽ dẫn đến những chi phí tính toán không cần thiết. Do tính chất đặc thù của bài toán chúng ta sẽ sử dụng một cấu trúc đặc biệt cụ thể hơn so với bảng đơn hình để giải. Đưa vào các ký hiệu sau:

$$C = (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n}, c_{21}, c_{22}, ..., c_{2n}, ..., c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mn})^T$$

$$X = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn})^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & ...... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & 1 & ...... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ...... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & ...... & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & ...... & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 & 0 & ... & 0 & ...... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 1 & ...... & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = (a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n)$$

Ta có thể đưa bài toán vận tải về dạng ma trận:

$$f(X) = CX \to \min$$

$$\begin{cases} AX = B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Định nghĩa: Vectơ $X = (x_{ij})$ thỏa mãn tất cả các ràng buộc của bài toán vận tải được gọi là phương án.

Có nghĩa là: **Rank A = m + n - 1**

1.2 Sự tồn tại nghiệm tối ưu

Định lý 5.1: Điều kiện cần và đủ để bài toán vân tải có phương án tối ưu là tổng tất cả các lượng phát phải bằng tổng tất cả các lượng thu, nghĩa là:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2. TIÊU CHUẨN NHẬN BIẾT PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

2.1 Bảng vận tải

Lập một bảng T gồm m hàng và n cột. Tại các ô (i, j) ta ghi các số tương ứng cho trước vào góc ô và các lượng x_{ij} của phương án X.

	b_1	…	b_j	…	b_n
a_1	c_{11}	…	…	…	
…	…	…	…	…	…
a_i	c_{i1}	…	x_{ij} c_{ij}	…	
…	…	…	…	…	…
a_m	c_{n1}	…		…	

Một ô (i, j) mà $x_{ij} > 0$ được gọi là ô sử dụng.

Tập hợp các ô sử dụng sẽ tạo thành dây chuyền nếu các cặp ô sử dụng liền nhau được xếp trong một hàng hay trong một cột.

Ví dụ: $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_3), \ldots, (i_s, j_s), (i_s, j_{s+1})$

Hoặc: $(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_2), \ldots, (i_s, j_s), (i_{s+1}, j_s)$

Dây chuyền được gọi là khép kín hay là một chu trình nếu: $j_{s+1} = j_1$ hay $i_{s+1} = i_1$

2.2 Các định nghĩa và định lý

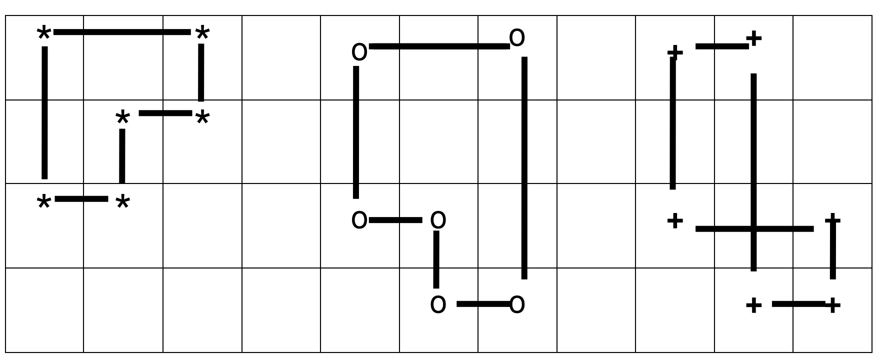
Định nghĩa: Một tập hợp được sắp thứ tự các ô của bảng vận tải được gọi là một chu trình nếu ngư nó thỏa mãn các tính chất sau:

i) Hai ô cạnh nhau nằm trong cùng một dòng hay môt cột;

ii) Không có ba ô nào năm trên cùng một dòng hay một cột;

iii) Ô đầu tiên nằm trong cùng một dòng hay cột với ô cuối cùng.

Một số dạng chu trình:



Gọi G là tập hợp các ô sử dụng:

$$G = \{(i, j) \mid x_{ij>0}\}, \quad |G| = m + n - 1$$

Một phương án X của bài toán vận tải đã cho được gọi là không thoái hóa nếu: $|G| = m + n - 1$, ngược lại thoái hóa nếu $|G| < m + n - 1$.

Định lý 5.2: *Hệ thống vectơ cột của bài toán vận tải là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi các ô tương ứng với các vectơ của hệ thống không tạo thành chu trình.*

Hệ quả: Vectơ X là phương án cực biên khi và chỉ khi tập các ô sử dụng tương ứng không lập thành chu trình.

Định lý 5.3: *Giả sử X là một phương án của bài toán vận tải và tập các ô sử dụng G lập thành chu trình thế thì bao giờ cũng có thể điều chỉnh được X để chuyển sang một phương án mới X' không xấu hơn mà tập G' không lập thành chu trình.*

3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM PHƯƠNG ÁN XUẤT PHÁT

3.1 Phương pháp góc Tây Bắc

Lập bảng vận tải T, quá trình xây dựng phương án xuất phát theo phương pháp góc Tây-Bắc được tiến hành như sau:

+ Bắt đầu từ ô ở góc trên bên trái của bảng T tức là ô (1,1) (nó nằm ở vị trí góc Tây bắc của bảng), tiến hành phân phối lượng hàng cần chuyển vào ô này.

$$x_{11} = \min(a_1, b_1)$$

các lượng thu phát còn lại là: $a_i' = a_i,\ i \neq 1;\ a_1' = a_1 - x_{11};$

$$b_j' = b_j,\ j \neq 1;\ b_1' = b_1 - x_{11};$$

+ Nếu $x_{11} = a_1 = \min(a_1, b_1)$ thì $a_1' = 0$. Khi đó xóa dòng thứ nhất của bảng T ta thu được bảng T' gồm m-1 dòng và n cột với các lượng phát và thu tương ứng là a_i', i=1..m; b_j',j=2..n.

+ Đối với bảng T' ta lại thực hiện thủ tục phân phối như là đã áp dụng đối với bảng T, tức là lại bắt đầu từ ô ở góc Tây bắc và phân phối lượng hàng vận chuyển vào ô này sao cho hoặc là chở hết hàng ở điểm phát, hoặc là thỏa mãn hết nhu cầu tiêu thụ của điểm thu tương ứng với nó.

Rõ ràng sau mỗi lần phân phối, ta sẽ xóa đi được 1 dòng (hay 1 cột) của bảng, nên sau đúng m + n - 1 lần phân phối, thủ tục trên phải kết thúc (do lần phân phối cuối cùng ta xóa đồng thời cả dòng và cột). Vì vậy, phương án xây dựng được theo phương pháp này sẽ có không quá m + n -1 thành phần khác 0.

Ví dụ 1: Xây dựng phương án cho bài toán vận tải theo phương pháp góc Tây bắc với số liệu cho trong bảng sau:

a_i \ b_j	**30**	**60**	**46**	**25**
50	30 4	20 7	12	7
70	5	40 9	30 6	1
41	8	2	16 9	25 1

Giá trị hàm mục tiêu thu được là: f(X) = 4*30 + 7*20 + 9*40 + 6*30 + 1*25 = 969.

3.2 Phương pháp cực tiểu cước phí

Trong phương pháp góc Tây bắc, khi tiến hành phân phối các lượng hàng vận chuyển ta luôn chọn ô ở góc Tây bắc mà không chú ý đến cước phí vận chuyển của các ô. Vì vậy, có thể đề xuất những phương pháp khác có chú ý đến cước phí vận chuyển với hy vọng tìm được phương án với chi phí vận chuyển nhỏ hơn. Các phương pháp dựa trên ý tưởng trên gọi là phương pháp cực tiểu cước phí.

3.2.1 Phương pháp cực tiểu cước phí theo dòng

Quá trình phân phối được thực hiện giống như phương pháp góc tây bắc, chỉ khác là ô được chọn để phân phối không phải là ô ở góc tây bắc mà là ô có cước phí nhỏ nhất trong dòng đầu tiên của bảng.

Ví dụ 2: Xây dựng phương án cho bài toán vận tải theo phương pháp cực tiểu cước phí theo dòng với số liệu cho trong bảng sau:

a_i \ b_j	**30**	**60**	**46**	**25**
50	30 4	20 7	12	7
70	5	9	45 6	25 1
41	8	40 2	1 9	1

Giá trị hàm mục tiêu thu được là: f(X) = 4*30 + 7*20 + 1*25 + 6*45 + 9*1+ 2*40 = 644.

3.2.2 Phương pháp cực tiểu cước phí theo cột

Quá trình phân phối được thực hiện giống như phương pháp góc tây bắc, chỉ khác là ô được chọn để phân phối không phải là ô ở góc tây bắc mà là ô có cước phí nhỏ nhất trong cột đầu tiên của bảng.

Ví dụ 3: Xây dựng phương án cho bài toán vận tải theo phương pháp cực tiểu cước phí theo dòng với số liệu cho trong bảng (như ví dụ 2). Tiến hành làm tương tự.

Giá trị hàm mục tiêu thu được là: f(X) = 4*30 + 2*41 + 7*19 + 6*46 + 1*24+ 7*1 = 642.

a_i \ b_j	**30**	**60**	**46**	**25**
50	30 / 4	19 / 7	12	1 / 7
70	5	9	46 / 6	24 / 1
41	8	41 / 2	9	1

3.2.3 Phương pháp cực tiểu cước phí toàn bảng

Quá trình phân phối và biến đổi bảng tương tự 2 phương pháp trên, chỉ khác là ô được chọn để phân phối là ô có cước phí nhỏ nhất trên toàn bảng.

Ví dụ 4: Xây dựng phương án cho bài toán vận tải theo phương pháp cực tiểu cước phí trên toàn bảng với số liệu cho trong bảng sau:

a_i \ b_j	**30**	**60**	**46**	**25**
50	30 / 4	19 / 7	1 / 12	7
70	5	9	45 / 6	25 / 1
41	8	41 / 2	9	1

Giá trị hàm mục tiêu thu được là: f(X) = 1*25 + 2*41 + 4*30 + 6*45 + 7*19+ 1*12 = 652.

3.3 Phương pháp Fôghen

Phương pháp này cho phương án cực biên khá tốt theo nghĩa khá gần với phương án tối ưu về giá trị hàm mục tiêu và chỉ cần sau một số ít bước lặp của thuật toán thế vị là có thể tìm được phương án tối ưu.

Giả sử $C = \left(c_{ij}\right)_{m*n}$ là ma trận cước phí của bài toán vận tải. Ta tiến hành như sau:

i) Đối với mỗi hàng và mỗi cột của C ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất trên hàng (cột) đó. Hiệu số này biểu thị lượng phạt tối thiểu phải chịu nếu ta phân sai lượng hàng vào ô có cước phí nhỏ nhất trên hàng (cột) đó.

ii) Chọn hàng hay cột có hiệu số này lớn nhất. Nếu có nhiều hàng (cột) như thế thì chọn một hàng (cột) bất kỳ trong số đó.

iii) Phân lượng hàng tối đa có thể vào ô có cước phí nhỏ nhất trên hàng (cột) đã chọn. Giả sử đó là ô (r, s) . Giảm lượng cung ở hàng r và lượng cầu ở cột s một số bằng lượng hàng đã phân phối. Việc này sẽ thỏa mãn một ràng buộc cung hay một ràng buộc cầu hoặc có thể là cả hai. Loại bỏ (không cần xét tiếp) ràng buộc đã thỏa mãn bằng cách đánh dấu chéo vào hàng hau cột tương ứng của ma trận cước phí. Nếu cả hai ràng buộc cung, cầu cùng thỏa mãn đồng thời thì chỉ loại bỏ một hàng (cột) mà thôi. Trong trường hợp này cả lượng cung và cầu còn lại của hàng (cột) đó đều trở thành 0.

iv) Lặp lại các thao tác trên cho tới khi chỉ còn lại một hàng hay một cột duy nhất. Và lượng hàng được xác định nhờ các lượng hàng đã phân trước đó.

Ví dụ 5: Xây dựng phương án cho bài toán vận tải theo phương pháp Fôghen với số liệu cho trong bảng sau:

b_j / a_i	30	60	46	25
50	30 4	19 7	12	1 7
70	5	9	46 6	24 1
41	8	41 2	9	1

Lập bảng

b_j / a_i	**30**	**60**	**46**	**25**	**Hiệu số**
50	4	7	12	7	3
70	5	9	6	1	4
41	8	2	9	1	1
Hiệu số	1	$\boxed{5}$	3	0	

Phân lượng hàng tối đa cho ô có cước phí nhỏ nhất trên cột 2 là Min {7, 9, 2} = 2 lượng hàng bằng Min{41, 60}=41. Loại dòng 3 vì đã phân hết hàng.

Lập bảng mới.

b_j / a_i	**30**	**19**	**46**	**25**	**Hiệu số**
50	4	7	12	7	3
70	5	9	6	1	4

0	8	2	9	1	x
Hiệu số	1	2	$\boxed{6}$	6	

Phân lượng hàng tối đa cho ô có cước phí nhỏ nhất trên cột 3 là min {46, 70} = 46 với chi phí min {6, 12} = 6. Loại bỏ cột 3.

a_i \ b_j	**30**	**19**	**0**	**25**	**Hiệu số**
50	4	7	12	7	3
24	5	9	6	1	4
0	8	2	9	1	x
Hiệu số	1	2	**x**	$\boxed{6}$	

Phân lượng hàng tối đa cho ô có cước phí nhỏ nhất trên cột 4 là min {24, 25} = 24 với chi phí min {1, 7} = 1. Loại bỏ dòng 2.

a_i \ b_j	**30**	**19**	**0**	**1**	**Hiệu số**
50	4	7	12	7	3
0	5	9	6	1	x
0	8	2	9	1	x
Hiệu số	4	$\boxed{7}$	**x**	7	

Phân lượng hàng tối đa cho ô có cước phí nhỏ nhất trên cột 2 là min {19, 50} = 19 với chi phí 7. Loại bỏ cột 2.

a_i \ b_j	**30**	**0**	**0**	**1**	**Hiệu số**
31	4	7	12	7	3
0	5	9	6	1	x
0	8	2	9	1	x
Hiệu số	4	**x**	**x**	$\boxed{7}$	

Phân lượng hàng tối đa cho ô có cước phí nhỏ nhất trên cột 4 là min {30, 30} = 30 với chi phí 4. Loại bỏ dòng 1, cột 1

a_i \ b_j	**30**	**0**	**0**	**0**	**Hiệu số**
30	4	7	12	7	3
0	5	9	6	1	x

0	8	2	9	1	x
Hiệu số	4	**x**	**x**	**x**	

Kết quả: f(X) = 2*41 + 6*46 + 1*24 + 7*19 + 7*1 + 4*30 = 642.

3.4 Phương pháp Larson R.E

Đây là phương pháp cải tiến phương pháp Fôghen được đưa ra năm 1972 tuy phức tạp so với tính toán bằng tay nhưng có thể tính toán nhanh chóng trên máy tính. Thay vì dùng các cước phí c_{ij} đã cho ta dùng các cước phí được chuẩn hóa xác định như sau:

$$c_{ij}' = c_{ij} - \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} c_{pj} - \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} c_{iq}$$

Điều này có nghĩa là mỗi phần tử c_{ij} bị trừ đi một lượng bằng trung bình các cước phí trên hàng và cột của nó. Sau đó ta áp dụng phương pháp Fôghen đối với ma trận C'.

4. TIÊU CHUẨN TỐI ƯU VÀ THUẬT TOÁN THẾ VỊ

4.1 Tiêu chuẩn tối ưu.

Định lý 5.4: *Phương án X của bài toán vận tải là tối ưu* $\Leftrightarrow$ *tồn tại các số* u_i *(i=1..n) và* v_j *(j=1..m) sao cho:*

1) $u_i + v_j \le c_{ij} \qquad \forall(i,j) \in T$

2) $u_i + v_j = c_{ij} \qquad$ *nếu* $x_{ij} > 0$

Các số u_i (i=1..n) và v_j (j=1..m) được gọi là các thế vị tương ứng với các điểm phát và điểm thu.

4.2 Thuật toán thế vị

Bước 1: Xác định phương án ban đầu

+ Kiểm tra điều kiện cân bằng thu phát, nếu không thực hiện biến đổi.
+ Tìm phương án xuất phát theo một trong các phương pháp đã trình bày ở trên.

Bước 2: Tìm các thế vị

+ Nếu các ô sử dụng G lập thành chu trình thì ta sử dụng Định lý 5.3 để phá vỡ chu trình, chuyển phương án xuất phát về phương án cực biên.
+ Xác định các hệ thống thế vị u_i (i=1..n) và v_j (j=1..m) theo Định lý 5.4. Vì giả thiết bài toán không thoái hóa nên tập các ô sử dụng $G = \{(i,j) \mid x_{ij} > 0\}$ có đúng m + n -1 ô, do đó có m + n -1 phương trình:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{với} \quad x_{ij} > 0$$

+ Để xác định m + n ẩn u_i (i=1..n) và v_j (j=1..m), như vậy sẽ có một u_i hoặc một v_j được xác định tùy ý và m + n -1 ẩn còn lại sẽ xác định duy nhất từ m + n -1 phương trình. Qui tắc:
  - Đầu tiên cho $u_{i_0} = 0$ (i_0 thường là dòng đầu tiên hoặc là dòng chứa một ô sử dụng).
  - Sau đó xác định các $v_j = c_{ij} - u_i$ cho cột cắt dòng i_0 ở một số ô sử dụng.
  - Tiếp đó xác định $u_i = c_{ij} - v_j$ cho dòng i cắt cột phân rã một số ô sử dụng.
  - Với qui tắc đó xác định tất cả các dòng và cột thuộc G

Bước 3: Tính các ước lượng

+ Với mọi $(i,j) \notin G$ ta xác định các ước lượng Δ_{ij} sau đây:

$$\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$$

+ Nếu $\Delta_{ij} \le 0, \forall (i,j)$ thì phương án đã có là phương án tối ưu.
+ Nếu $\Delta_{ij} > 0$ với ít nhất một ô (i,j) thì phương án đã có chưa tối ưu, ta có thể điều chỉnh để hạ giá trị hàm mục tiêu.

Bước 4: Điều chỉnh phương án

+ Giả sử ô vi phạm tiêu chuẩn tối ưu là (i*, j*) tức là $\Delta_{i^*j^*} > 0$ (nếu có nhiều ô vi phạm ta chọn ô ứng với Max $\{\Delta_{ij} > 0\}$ với hy vọng hàm mục tiêu giảm nhanh nhất).
+ Ô $(i^*, j^*) \notin G$ bây giờ ta thêm ô (i*, j*) vào tập G, khi đó cả thảy gồm m + n ô sử dụng. Ô (i*, j*) sẽ lập với các ô của G một chu trình K duy nhất.
+ Chia K thành 2 phần K^+ (tập các ô chẵn) và K^- (tập các ô lẻ). Coi ô (i*, j*) là ô chẵn, tức là $(i^*, j^*) \in K^+$.

Bước 5: Chuyển sang phương án mới

+ Xác định số $\theta = \min\{x_{ij} \mid (i,j) \in K^-\} = x_{i_s j_s} > 0$

$$x_{ij}' = \begin{cases} x_{ij} + \theta, & \text{nêu } (i,j) \in K^+ \\ x_{ij} - \theta, & \text{nêu } (i,j) \in K^- \\ x_{ij}, & \text{nêu } (i,j) \notin K \end{cases}$$

+ $x_{i_sj_s}' = x_{i_sj_s} - \theta = 0$ vì vậy ô $\left(i_s, j_s\right)$ bị loại, $x_{i^*j^*} = \theta$ do đó ô (i*, j*) sẽ trở thành ô sử dụng.

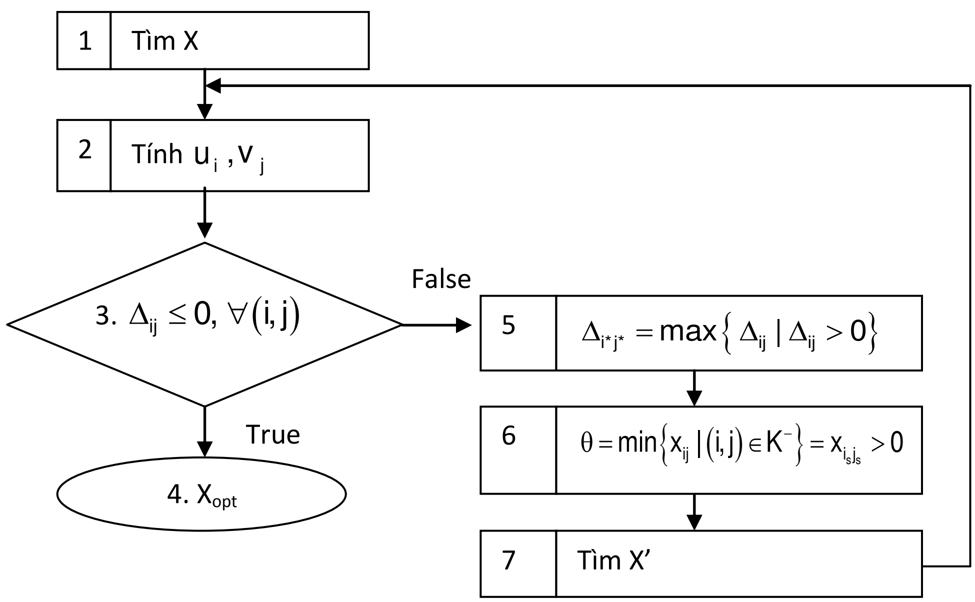
+ $G' = G \setminus \left(i_s, j_s\right) \cup \left(i^*, j^*\right)$ vẫn gồm m+ n – 1 ô sử dụng và không tạo thành chu trình. Quay lại bước 2.

Ta xác định hệ thống thế vị mới ứng với mỗi phương án X’ và G’. Tiếp tục quá trình trên đến khi nào xảy ra tình huống $\Delta_{ij} \le 0, \forall\left(i, j\right)$ thì nhận được phương án tối ưu.

Nếu bài toán không thoái hóa thì sau một số hữu hạn bước biến đổi sẽ có lời giải.

Chú ý: Nếu số ô sử dụng N < m + n -1 thì thêm vào (m+n-1) – N ô với $x_{ij} = 0$ sao cho không tạo thành chu trình.

Sơ đồ khối



Ví dụ 6: Giải bài toán vận tải với các số liệu cho trong bảng sau:

a_i \ b_j	**180**	**220**	**230**	**270**
250	10	4	15	7
350	20	19	9	14
300	18	9	3	8

5. TRƯỜNG HỢP KHÔNG CÂN BẰNG THU PHÁT

5.1 Tổng lượng phát lớn hơn tổng lượng thu: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Hàng thừa sẽ được thêm vào một điểm thu "ảo" thứ n+1 với lượng yêu cầu là: $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ với cước phí là $c_{i,n+1} = 0,\ \forall i = \overline{1..m}$.

Ta có bài toán tương ứng là:

$$\sum\sum c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1..n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1..m}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1..m},\ j = \overline{1..n+1}$$

$$\sum a_i = \sum b_j$$

5.2 Tổng lượng phát nhỏ hơn tổng lượng thu: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

Hàng thừa sẽ được thêm vào một điểm phát "ảo" thứ m+1 với lượng hàng bị thiếu là: $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ với cước phí là $c_{m+1,j} = 0,\ \forall j = \overline{1..n}$.

Ta có bài toán tương ứng là:

$$\sum\sum c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1..n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1..m+1}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1..m+1},\ j = \overline{1..n}$$

$$\sum a_i = \sum b_j$$

6. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 7: Giải bài toán vận tải với các số liệu cho trong bảng sau:

b_j / a_i	**185**	**195**	**200**	**310**
250	12	6	14	7
340	14	17	7	13
300	16	13	5	8

F = 195*6 + 55*7 + 185*14 + 155*7 + 45*5 + 255*8 = 7495

Ví dụ 8: Giải bài toán vận tải với các số liệu cho trong bảng sau:

b_j / a_i	**6**	**11**	**28**	**5**
10	8	9	9	10
15	7	0	20	8
25	10	2	5	15

F = 8*6 + 9*3 + 10*1 + 0*11 + 8*4 + 5*25 = 242

Ví dụ 9: Giải bài toán vận tải với các số liệu cho trong bảng sau:

b_j / a_i	**20**	**20**	**30**	**15**
15	5	1	3	4
25	2	4	6	7
45	5	3	4	8

F= 1*5+4*10+2*20+7*5+3*15+4*30=285

Ví dụ 10: Giải bài toán vận tải với các số liệu cho trong bảng sau:

b_j / a_i	**5**	**15**	**20**	**10**
10	2	1	2	3
25	6	0	4	2
15	1	4	8	2

F= 2*5 + 1*5 + 0*10 + 5*15 + 8*5 + 2*10 =150

Ví dụ 11: Giải bài toán vận tải với các số liệu cho trong bảng sau:

b_j / a_i	**25**	**40**	**20**	**10**
40	4	3	7	8
20	6	2	3	4
35	5	3	8	6

F=340

Chương 6

Giải bài toán tối ưu trên máy tính

1. GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU

Xét bài toán tối ưu:

$$
\begin{array}{l}
c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad = \quad f(x) \rightarrow \max / \min \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \quad Q \quad b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad Q \quad b_2 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \quad Q \quad b_m \\
x_j \begin{cases} \geq 0 \\ = \text{interger} \qquad\qquad j = 1, \ldots, n \\ = \text{binary (0 or 1)} \end{cases}
\end{array}
$$

trong đó Q là một trong các phép toán quan hệ ≥, ≤, = thứ tự các phép toán quan hệ trong các ràng buộc là tuỳ ý. Như vậy bài toán (1) có thể là bài toán tối ưu thông thường, tối ưu nguyên hay tối ưu boolean.

Cách bố trí dữ liệu cho trên bảng tính:

c[1]	c[2]	. . . . . .	c[n]	∑ c[j] x[j]	
a[1,1]	a[1,2]	. . . . . .	a[1,n]	∑ a[1,j] x[j]	b[1]
a[2,1]	a[2,2]	. . . . . .	a[2,n]	∑ a[2,j] x[j]	b[2]
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
a[m,1]	a[m,2]	. . . . . .	a[m,n]	∑ a[m,j] x[j]	b[m]
x[1]	x[2]	. . . . . .	x[n]		

Hàng cuối cùng là các giá trị ban đầu của các biến để các công thức của Excel hoạt động, có thể lấy giá trị của tất cả các biến bằng 1.

Xét bài toán:

$$
\begin{array}{l}
x_1 + 4x_2 + x_3 \quad \rightarrow \quad \min \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 20 \\
5x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 12 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\
-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1 \\
x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Các bước thực hiện để giải bài toán:

Bước 1. Nhập dữ liệu bài toán vào bảng tính dưới dạng sau:

	A	B	C	D	E	F
1		Bien 1	Bien 2	Bien 3	Gia tri ve trai	
2	Ham muc tieu	1	4	1		
3	Rang buoc 1	2	3	4		20
4	Rang buoc 2	5	-1	2		12
5	Rang buoc 3	1	2	-1		2
6	Rang buoc 4	-1	4	-2		1
7	Phuong an	1	1	1		
8						

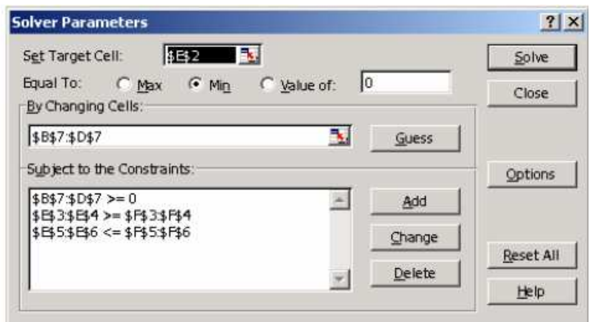
Phương án ban đầu X = (1, 1, 1), nó có thể không chấp nhận được.

Bước 2. Tính giá trị hàm mục tiêu tại ô E2 bằng công thức

= **SUMPRODOCT**($B$7:$D$7, B2:D2)

Hàm **Sumproduct** cho tích vô hướng của hai dãy ô. Copy công thức từ ô E2 sang dãy các ô E3:E6 nhằm tính giá trị vế trái của bốn ràng buộc bài toán (1).

Bước 3. Dùng lệnh **Tools** / **Solver**, xuất hiện hộp thoại **Solver Parameters**.



Mục ***Set Target Cell***: chọn ô đích (chứa giá trị hàm mục tiêu), có thể nháy vào biểu tượng của Excel bên phải hộp văn bản để xác định ô, trong ví dụ chọn ô E2.

Mục ***Equal To***: chọn Max nếu cực đại hàm mục tiêu, chọn Min nếu cực tiểu hàm mục tiêu, chọn **Value of** và nhập giá trị nếu muốn ô đích bằng một giá trị nhất định, trong ví dụ chọn Min.

Mục **By Changing cells**: chọn các ô chứa các biến của bài toán, ta chọn khối ô B7:D7.

Nháy nút **Add** để nhập tất cả các ràng buộc vào khung **Subject to the Constraints** (dòng đầu trong khung ứng với ràng buộc không âm trên các biến, dòng thứ hai ứng với hai ràng buộc đầu bài toán, dòng cuối ứng với 2 ràng buộc cuối. Khi nháy nút Add, hiện hộp thoại:

để chọn loại ràng buộc (>= = <= interger, binary), hộp văn bản **Constraint** để chọn giá trị ràng buộc (có thể là số hay giá trị trong các ô).

Sau khi nhập xong các ràng buộc, nháy vào nút Options, hiện hộp thoại **Solver Options**, đánh dấu kiểm vào mục **Assume Linear Model** (khẳng định mô hình của ta là tuyến tính).

Bước 4. Trong hộp thoại **Solver Parameters** nháy vào nút Solve để bắt đầu giải bài toán tối ưu. Giải xong bài toán xuất hiện hộp thoại **Solver Results**, chọn mục **Keep Solver Solution** (giữ lại lời giải), nháy OK, kết quả giải bài toán nằm ở các ô B7:D7. Kết quả ta được phương án tối ưu là X = (0.5 , 0 , 4.75), giá trị cực tiểu hàm mục tiêu là 5.25 ở ô E2.

	A	B	C	D	E	F
1		Bien 1	Bien 2	Bien 3	Gia tri ve trai	
2	Ham muc tieu	1	4	1	5.25	
3	Rang buoc 1	2	3	4	20	20
4	Rang buoc 2	5	-1	2	12	12
5	Rang buoc 3	1	2	-1	-4.25	2
6	Rang buoc 4	-1	4	-2	-10	1
7	Phuong an	0.5	0	4.75		

Ví dụ 2: $\max z(x) = 3x_1 + 2x_2$

$$x_1 - x_2 \geq -4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bước 1: Nhập dữ liệu

	A	B	C	D	E
1		Bien 1	Bien 2	Gia tri ve trai	
2	Ham muc tieu	3	2		
3	Rang buoc 1	1	-1		-4
4	Rang buoc 2	1	2		14
5	Rang buoc 3	5	2		30
6	Phuong an	1	1		
7					

Phương án ban đầu X = (1, 1)

Bước 2: Tính giá trị hàm mục tiêu tại ô D2 theo công thức

= SUMPRODUCT($B$6:$C$6,B2:C2)

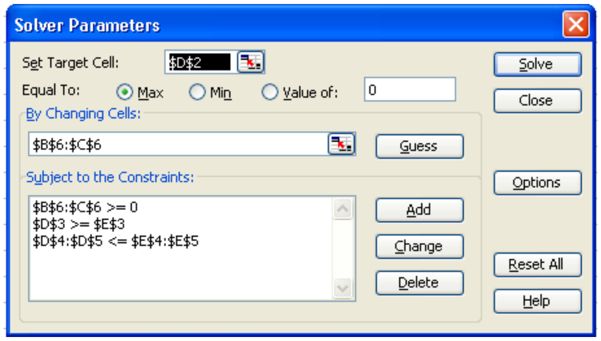
tương tự tính giá trị vế trái của 3 ràng buộc của bài toán

D2 | fx =SUMPRODUCT($B$6:$C$6,B2:C2)

	A	B	C	D	E	F
1		Bien 1	Bien 2	Gia tri ve trai		
2	Ham muc tieu	3	2	5		
3	Rang buoc 1	1	-1	0	-4	
4	Rang buoc 2	1	2	3	14	
5	Rang buoc 3	5	2	7	30	
6	Phuong an	1	1			
7						

Bước 3: Giải bài toán

Vào Tools chọn Solver nhập dữ liệu ta có



Bước 4: Nhấn Solver để giải

Kết quả được phương án tối ưu là x= (4, 5), giá trị cực đại hàm mục tiêu là 22 nằm ở ô D2

	A	B	C	D	E
1		Bien 1	Bien 2	Gia tri ve trai	
2	Ham muc tieu	3	2	22	
3	Rang buoc 1	1	-1	-1	-4
4	Rang buoc 2	1	2	14	14
5	Rang buoc 3	5	2	30	30
6	Phuong an	4	5		
7					

2. GIẢI BÀI TOÁN VẬN TẢI

Bài toán vận tải có dạng:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1..m} \qquad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1..n} \qquad (1.3)$$

$$a_i, b_j > 0, \ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1.4)$$

Cách bố trí dữ liệu trên bảng tính của bài toán vận tải

	Điểm thu 1	Điểm thu 2		Điểm thu n	Trị mục tiêu
Điểm phát 1	c[1,1]	c[1,2]	. . . . . .	c[1,n]	∑ c[i,j] x[i,j]
Điểm phát 2	c[2,1]	c[2,2]	. . . . . .	c[2,n]	
Điểm phát 3	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	
Điểm phát 4	c[m,1]	c[m,2]	. . . . . .	c[m,n]	

					Cộng hàng	Khả năng
Phương án	x[1,1]	x[1,2]	. . . . . .	x[1,n]	∑ x[1,j]	a[1]
	x[2,1]	x[2,2]	. . . . . .	x[2,n]	∑ x[2,j]	a[2]
	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
	x[m,1]	x[m,2]	. . . . . .	x[m,n]	∑ x[m,j]	a[m]
Cộng cột	∑ x[i,1]	∑ x[i,2]	. . . . . .	∑ x[i,n]		
Nhu cầu	b[1]	b[2]	. . . . . .	b[n]		

Ví dụ 1: Tìm phương án cực biên của bài toán vận tải có vectơ lượng phát và lượng thu theo thứ tự là a = (90, 100, 110), b = (50, 80, 95, 75) và ma trận cước phí c

$$c = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 16 & 3 \\ 5 & 10 & 6 & 8 \\ 4 & 12 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Xét bài toán vận tải có 3 điểm phát và 4 điểm thu được nhập vào bảng tính:

	A	B	C	D	E	F
1		Ma tran chi phi				
2	11	2	16	3		Ham muc tieu
3	5	10	6	8		91
4	4	12	5	9		
5						
6		Phuong an van chuyen			Tong hang	
7	1	1	1	1	4	90
8	1	1	1	1	4	100
9	1	1	1	1	4	110
10	3	3	3	3	Tong cot	
11	50	80	95	75		

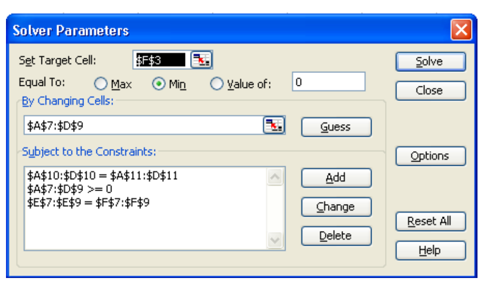
Khối A2:D4 là ma trận chi phí vận chuyển, khối A7:D9 là phương án vận chuyển (giá trị ban đầu cho tất cả bằng 1), khối F7:F9 là khả năng của 3 điểm phát, khối A11:D11 là nhu cầu của 4 điểm thu, khối E7:E9 là lượng hàng phát từ mỗi điểm phát i theo phương án X đã chọn, khối A10:D10 là lượng hàng nhận được tại mỗi điểm thu j theo phương án X. Giả sử rằng tổng lượng hàng có trong các kho bằng tổng nhu cầu của các nơi thiêu thụ.

Quá trình dùng Solver để giải bụi toán vận tải trên theo các bước:

Bước 1. Nhập chi phí vận chuyển vào các ô A2:D4, nhập khả năng của các điểm phát vào F7:F9, nhu cầu các điểm thu A11:D11, phương án ban đầu A7:D9.

Tính giá trị hàm mục tiêu trong ô F3 theo công thức = **Sumproduct** (A2:D4, A7:D9), hàm này tính tổng các tích của từng cặp phần tử trong hai khối ô. Tính lượng hàng phát của điểm phát 1 tại ô E7 theo công thức =SUM(A7:D7), tương tự tính được các ô E8:E9. Tính lượng hàng nhận được của điểm thu 1 tại ô A10 theo công thức = SUM(A7:A9), tương tự tính được các ô B10:D10.

Bước 2. Dùng lệnh Tools/ Solver với các lựa chọn hụm mục tiêu vụ các rụng buộc:



Bước 3. Trong hộp thoại Solver Options phải chọn Assume Linear Model. Cuối cùng ta nhận được giá trị tối ưu hàm mục tiêu bằng 1420, phương án vận chuyển tối ưu: x[1,2]= 80, x[2,3]= 35, x[2,4]= 65, x[3,1]= 50, x[3,3]= 60 trong bảng tính kết quả:

	A	B	C	D	E	F
1		Ma tran chi phi				
2	11	2	16	3		Ham muc tieu
3	5	10	6	8		1420
4	4	12	5	9		
5						
6		Phuong an van chuyen			Tong hang	
7	0	80	0	10	90	90
8	0	0	35	65	100	100
9	50	0	60	0	110	110
10	50	80	95	75	Tong cot	
11	50	80	95	75		

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm phương án cực biên của bài toán vận tải có vectơ lượng phát và lượng thu theo thứ tự là a = (105, 60, 85), b = (35, 48, 80, 95), ma trận cước phí c và phương án x

$$c = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & 9 \\ 11 & 3 & 8 & 5 \\ 20 & 12 & 10 & 12 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 35 & 25 & 0 & 45 \\ 0 & 15 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 50 \end{bmatrix}$$

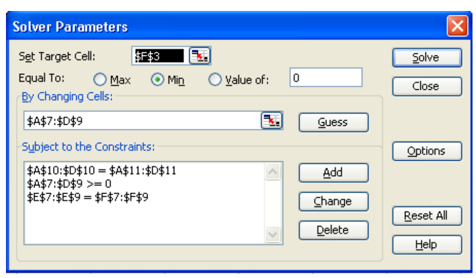
Hãy xây dựng phương án cực biên không xấu hơn x

Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu trong phương án x bằng 2075. Tính giá trị tối ưu?

Bước 1: Nhập dữ liệu và tính giá trị hàm mục tiêu, lượng hàng phát, lượng hàng thu như bảng tính

	A	B	C	D	E	F
1		Ma tran chi phi				
2	4	7	2	9		Ham muc tieu
3	11	3	8	5		103
4	20	12	10	12		
5						
6		Phuong an van chuyen			Tong hang	
7	1	1	1	1	4	105
8	1	1	1	1	4	60
9	1	1	1	1	4	85
10	3	3	3	3	Tong cot	
11	35	48	80	95		

Bước 2: Dùng lệnh Tools/ Solver với các lựa chọn hụm mục tiêu và các ràng buộc:



Bước 3: Cuối cùng giá trị tối ưu hàm mục tiêu bằng 1724, phương án vận chuyển tối ưu: x[1,1]= 35, x[1,2]= 48, x[1,3]= 22, x[2,4]= 60, x[3,3]= 58, x[3,4]= 27 trong bảng tính kết quả:

	A	B	C	D	E	F
1		Ma tran chi phi				
2	4	7	2	9		Ham muc tieu
3	11	3	8	5		1724
4	20	12	10	12		
5						
6		Phuong an van chuyen			Tong hang	
7	35	48	22	0	105	105
8	0	0	0	60	60	60
9	0	0	58	27	85	85
10	35	48	80	87	Tong cot	
11	35	48	80	95		
12						