TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI THUYẾT TRÌNH

<u>CHƯƠNG 4</u>: **ĐẠI SỐ BOOLE**

NỘI DUNG CHÍNH

- Đại số logic *B*
- Đại số Boole
- Hàm Boole
- Công thức đa thức tối thiểu
- Biểu đồ Karnaugh của hàm Boole
- Phương pháp Quine – McCluskey
- *Các cổng logic*

Đại số logic B

Trên tập logic **B** $=\{0, 1\}$ xét các phép toán logic

$\wedge$ (tích Boole) $x \wedge y$

$\vee$ (tổng Boole) $x \vee y$

$\neg$ (phép bù) $\neg x$

trong đó x, y $\in$ **B** gọi là các biến logic hoặc biến Boole.

Bảng giá trị Boole cho các phép toán logic

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1

Các hằng đẳng thức logic

1) Giao hoán
2) Kết hợp
3) Phân phối
4) Luật bù kép
5) De Morgan
6) Luỹ đẳng
7) Phần tử trung hoà
8) Phần tử bù
9) Luật thống trị
10) Luật hấp thu

Một số phép toán 2 – ngôi khác trên đại số logic B

1) Tổng modulo 2, x + y

2) Kéo theo $x \to y$

3) Tương đương $x \leftrightarrow y$

4) Vebb (NOR) $x \downarrow y$

5) Sheffer (NAND) $x \uparrow y$

Bảng giá trị Boole tương ứng

x	y	x+y	x→y	x↔y	x↓y	x↑y
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0

Đại số Boole

Định nghĩa:

Cho tập A có ít nhất 2 phần tử, trong đó có 2 phần tử đặc biệt được ký hiệu là 0 và 1. Trên A xét các phép toán 2 – ngôi $\wedge$ và $\vee$, và phép toán 1 – ngôi $'$

Ký hiệu là **(A, $\wedge$, $\vee$, $'$, 0, 1)**

Tập A cùng với các phép toán này được gọi là một đại số Boole nếu các phép toán này có tính chất:

1. Giao hoán
2. Kết hợp
3. Phân phối
4. Phần tử trung hoà
5. Phần tử bù

$\forall\, a, b \in A$:

$\forall\, a, b, c \in A$:

$\forall\, a, b$

$\forall\, a \in A$, tồn tại duy nhất phần tử bù $\bar{a}$ sao cho:

$$a \wedge \bar{a} = 0.$$
$$a \vee \bar{a} = 1.$$

Ví dụ:

Cho U là tập bất kỳ, trên A = $\mathcal{P}(U)$ (*tập các tập con của U*) xét phép $\wedge$ là phép $\cap$, phép $\vee$ là phép $\cup$, phép $'$ là phép lấy phần bù, phần tử 0 là tập rỗng $\varnothing$ còn phần tử 1 là tập U.

Khi đó $\mathcal{P}(U)$ là một đại số Boole.

Ví dụ:

Tích Descartes $A \times B$ của các đại số Boole A, B là một đại số Boole, trong đó:

$(a_1,b_1) \wedge (a_2,b_2) = (a_1 \wedge b_1,\ a_2 \wedge b_2)$,

$(a_1,b_1) \vee (a_2,b_2) = (a_1 \vee b_1,\ a_2 \vee b_2)$,

$(a, b)' = (a', b')$,

$(0,0)$ là phần tử 0 trong $A \times B$,

$(1,1)$ là phần tử 1 trong $A \times B$.

Đặc biệt, B^n là một đại số Boole.

Nếu không nói gì thêm, tất cả các tập được nói đến trong chương này đều là tập hữu hạn.

Nhắc lại: Một tập hữu hạn sắp thứ tự luôn luôn có phần tử tối tiểu/tối đại.

Trên một đại số Boole tổng quát chúng ta cũng có các hằng đẳng thức giống như các hằng đẳng thức đã xét trên đại số logic B.

1. Quy tắc đối ngẫu:

$$a \wedge 1 = a$$
$$a \vee 0 = a$$

2. Tính nuốt:

$$a \wedge 0 = 0$$
$$a \vee 1 = 1$$

3. Tính lũy đẳng:

$$a \wedge a = a$$
$$a \vee a = a$$

4. Hệ thức De Morgan:

$$\overline{(a \wedge b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$$
$$\overline{(a \vee b)} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

5. Tính hút:

$$a \wedge (a \vee b) = a$$
$$a \vee (a \wedge b) = a$$

6. Hệ thức bù kép:

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Hàm Boole

Định nghĩa:

Ánh xạ f: $B^n \to B$ gọi là một hàm Boole n biến.

Hàm đồng nhất bằng 1 ký hiệu là 1, hàm đồng nhất bằng 0 ký hiệu là 0. Tập tất cả các hàm Boole n – biến ký hiệu là F_n.

Cho f và g là hai hàm Boole n biến. Chúng ta có các định nghĩa như sau:

1) $(f \wedge g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \wedge g(x_1, \ldots, x_n)$

2) $(f \vee g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \vee g(x_1, \ldots, x_n)$

3) $f^{/}(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, x_n))^{/}$

với mọi $x_1, \ldots, x_n$.

Ta có F_n cùng các phép toán này lập thành một đại số Boole.

Ngoài ra còn có:

$$f \le g \Leftrightarrow f \vee g = g \Leftrightarrow f \wedge g = f$$

trong đó $f \le g$ nếu

$f(x_1, \ldots, x_n) \le g(x_1, \ldots, x_n)$.

Cách thông thường nhất để xác định một hàm Boole là dùng bảng giá trị.

Hàm Boole 2 biến

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Ví dụ:

Xét kết quả f trong việc thông qua một quyết định dựa vào 3 phiếu bầu x, y, z

1. Mỗi phiếu chỉ lấy một trong hai giá trị:
   1 (tán thành) hoặc 0 (bác bỏ).
2. Kết quả f
   là 1 (thông qua quyết định) nếu được đa số phiếu tán thành.
   là 0 (không thông qua quyết định) nếu đa số phiếu bác bỏ.

Khi đó f là hàm Bool theo 3 biến x,y,x có bảng chân trị như sau:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Chúng ta cũng có thể xác định hàm Boole bằng một biểu thức Boole. Đó là một biểu thức gồm các biến Boole và các phép toán $\wedge$ (hội), $\vee$ (tuyển), $^{/}$ (phép lấy bù).

Mỗi biểu thức Boole cũng được xem như một hàm Boole.

Tích sơ cấp

Biến x gọi là biến Boole nếu x chỉ nhận một trong hai giá trị 0/1.

Giả sử x là một biến Boole. Khi đó ký hiệu $x^1 = x$, $x^0 = \neg x$.

Các phép toán trên hàm Boole:

- **Phép cộng Boole** ∨:

Với f, g $\in F_n$, ta định nghĩa tổng Boole của f và g:

$$\boldsymbol{f \vee g = f + g - fg}$$

$\forall\, x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in B_n,$

→ (f ∨ g)(x) = f(x) + g(x) – f(x)g(x)

- **Phép nhân Boole** $\wedge$:

Với f,g $\in F_n$, ta định nghĩa tích Boole của f và g:

$$\boldsymbol{f \wedge g = fg}$$

$\forall\, x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in B_n,$

$\rightarrow (f \wedge g)(x) = f(x)g(x)$

- **Phép lấy phần bù:**

$$\boldsymbol{\bar{f} = 1 - f}$$

Biểu thức Boole:

Là một biểu thức được tạo bởi các biến và các phép toán Boole.

VD: E= $(x \wedge y \wedge z) \vee (z \wedge \bar{y})$

Để dễ đọc hơn, người ta có thể viết:

$$E = xyz + z\bar{y}$$

Dạng nối rời chính tắc của hàm Boole:

Xét tập hợp các hàm Boole n biến F_n theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- Mỗi hàm Boole x_i hay $\bar{x}_i$ được gọi là một **từ đơn**.
- **Đơn thức** là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.
- **Từ tối tiểu (đơn thức tối tiểu)** là tích khác không của <u>đúng n từ đơn.</u>
- **Công thức đa thức** là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các đơn thức.
- **Dạng nối rời chính tắc** là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các <u>từ tối tiểu.</u>

VD: Xét hàm boole, với 3 biến: x, y, z

x, y, z, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ là các từ đơn.

xy, yz là đơn thức

xy$\bar{z}$ là từ tối tiểu

E= xy + yz là một công thức đa thức

Và F=xyz + $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ là một dạng nối rời chính tắc

Cho $f \in \mathrm{F}_n$, f có thể viết dưới dạng sau:

(*) $\boxed{\boldsymbol{f = u_1 \vee u_2 \vee u_3 \vee \ldots \vee u_i}}$

Với $\boldsymbol{u_i}$ là các đơn thức tối tiểu bậc n $(i = 1, \ldots, n)$.

(*) được gọi là dạng nối rời chính tắc của f.

<u>Ví dụ</u>: Trong F_4 có dạng biểu diễn sau đây:

$$f(x, y, z, t) = x\bar{y}\bar{z}t \ \vee \bar{x}yzt \ \vee xy\bar{z}\bar{t}$$

$\Rightarrow$ f có dạng nối rời chính tắc của hàm Bool.

Có 2 cách để xác định dạng nối rời chính tắc một hàm Bool:

❖ ***Cách 1***: **Bổ sung từ đơn còn thiếu vào các đơn thức.**

Bước 1: Khai triển hàm Bool thành tổng của các đơn thức.

Bước 2: Với mỗi đơn thức thu được ở bước 1, ta nhân đơn thức đó với các tổng dạng với x_i là những từ đơn bị thiếu trong đơn thức đó.

Bước 3: Tiếp tục khai triển hàm thu được ở bước 2 và loại bỏ những đơn thức bị trùng. Công thức đa thức thu được chính là dạng nối rời chính tắc của hàm Bool ban đầu.

Vídụ: Trong F_3 tìm dạng nối rời chính tắc

$$f(x,y,z) = \bar{x} \vee \bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

$$= \bar{x}(y \vee \bar{y}).(z \vee \bar{z}) \vee (\bar{x} \vee x)\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

$$= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

➔ f **có dạng nối rời chính tắc của hàm Bool.**

Cách2: Dùng bảng chân trị. Để ý đến các vector boole trong bảng chân trị mà tại đó $f = 1$

Tại đó Vector bool thứ n là $u_1, u_2,\ldots,u_n$ và $f(u_1, u_2,\ldots,u_n) = 1$

Ví dụ: Cho $f(x, y) = x \vee \bar{y}$.

Tìm biểu thức dạng nối rời chính tắc của f

Lập bảng chân trị của f

x	**y**	$\mathbf{x \vee \bar{y}}$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Các thể hiện làm cho $\boldsymbol{f = 1}$ là $\mathbf{00, 10, 11}$

→ lập được các từ tối tiểu tương ứng.

Vậy dạng nối rời chính tắc của f là $f(x, y) = \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y} \vee xy$

Công thức đa thức tối tiểu:

1. Đơn giản hơn:

Cho hai công thức đa thức của một hàm Boole:

$$F = m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee \ldots\ldots.. m_k$$

$$G = M_1 \vee M_2 \vee M_3 \vee \ldots\ldots.. M_l$$

Ta nói rằng công thức F *đơn giản hơn* công thức G nếu tồn tại đơn ánh h:

$\{1,2,\ldots,k\} \rightarrow \{1,2,\ldots,l\}$ sao cho với mọi $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ thì số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của $M_{h(i)}$

2. Đơn giản như nhau

Nếu F đơn giản hơn G và G đơn giản hơn F thì ta nói F và G *đơn giản như nhau.*

Ví dụ:

$$f = \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \qquad (F_1)$$

$$f = \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{z}\bar{t} \vee \bar{y}zt \qquad (F_2)$$

$f \in F_4$ có 3 dạng đa thức

f(x,y,z,t): $f_1 = x\overline{y}\,\overline{t} \vee \bar{x}yz \vee x\,\overline{z}\,\bar{t} \vee xyz$ (1)

: $f_2 = x\overline{y}\,\overline{t} \vee \bar{x}yz \vee xy\,\overline{z} \vee yzt$ (2)

: $f_3 = x\overline{y}\,\overline{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}yz\overline{t} \vee xy\,\overline{z} \vee yzt$

(3)

(1) và (2) đơn giản như nhau

Vì $\begin{cases} p = q = 4 \\ \deg(u_j) = \deg(v_j) = 3 \end{cases}$

(2) đơn giản hơn (3) hay (3) phức tạp hơn (2)

Vì $\begin{cases} p = 4 < q = 5 \\ \deg(u_j) \leq \deg(v_j) \end{cases}$

Ví dụ 2:

$g \in F_4$ có 2 dạng đa thức:

$g(x,y,z,t)$: $g_1 = x\bar{y}z \vee z\bar{t} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z}t$ (1)

: $g_2 = z\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t$ (2)

Ta thấy: $\begin{cases} p = q = 4 \\ d(u_1) > d(v_1);\ d(u_2) < d(v_2) \end{cases}$

Nên cần phải hoán vị

(2) ⇔ $x\,\bar{y}zt \vee z\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t$ (2 ') (q '= 4)

Ta thấy:

(1) đơn giản hơn(2')

vì $\begin{cases} p = q' = 4 \\ \deg(u_j) \leq \deg(w_j) \end{cases}$

3. Công thức đa thức tối tiểu:

Công thức F của hàm Boole f được gọi là

Công thức đa thức tối tiểu

nếu với bất kỳ công thức G của f mà đơn giản hơn F thì F và G đơn giản như nhau.

Bản đồ Karnaugh

- Sử dụng bảng Karnaugh là phương pháp xác định công thức đa thức tối tiểu.
- Quy tắc gom nhóm:

- Gom các tiểu hạng mang biểu diễn là số 1.

- Khi gom 2^n Ô kế cận sẽ loại được n biến. Những biến bị loại là những biến khi ta đi vòng qua các ô kế cận mà giá trị của chúng thay đổi.

- Các vòng phải được gom sao cho số ô có thể vào trong vòng là lớn nhất và để đạt được điều đó, thường ta phải gom cả những ô đã gom vào trong các vòng khác.

- Vòng gom phải là 1 hình chữ nhật.

Karnaugh 2 biến

- Đối với hàm Boole 2 biến x, y :
- Bảng karnaugh 2 biến có 4 ô vuông, trong đó:
  - ✓ Ô được đánh số 1 để biểu diễn tiểu hạng có mặt trong hàm.
  - ✓ Các ô được cho là liền nhau nếu các tiểu hạng mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau 1 biến.

	y	$\bar{y}$
x		
$\bar{x}$		

Karnaugh 2 biến

Vd1: Tìm bảng Karnaugh cho F = $xy + x\bar{y}$

F	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$		

Vd2: Tìm bảng Karnaugh cho: A = $xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

A	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	1

Gom nhóm:

- Từ bảng Karnaugh → Tổ hợp các tiểu hạng mang biểu diễn là số 1.
- Các tổ hợp được gom phải là khối khả dĩ lớn nhất và số ô là 2^n , với n = 1, 2.

Ví dụ: F = $xy + x\bar{y}$

F	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$		

Ví dụ: $B = xy + \bar{x}y + \bar{x}\,\bar{y}$

B	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	1

$\rightarrow B = y + \bar{x}$

karnaugh 3 biến

- Bảng karnaugh 3 biến là 1 hình chữ nhật chia thành 8 ô.

	yz	$y\bar{z}$	$y\bar{z}$	
x				
$\bar{x}$				

- Sau khi có bảng Karnaugh, ta bắt đầu gom nhóm các tiểu hạng.
- Quy tắc tương tự Bảng Karnaugh 2 biến.

VD: Dùng bảng Karnaugh 3 biến để rút gọn tổng các tích sau

$$xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1	1	1	

$\rightarrow \bar{z} + \bar{x}y$

Karnaugh 4 biến

- Bảng gồm 16 ô vuông như sau:

	yz	$y\bar{z}$	yz	$\bar{y}z$
ωx				
ωx				
$\omega\bar{x}$				

VD: Dùng bảng Karnaugh 4 biến để rút gọn hàm sau:

D = $\boldsymbol{\omega xyz + \omega xy\bar{z} + \omega x\bar{y}z + \omega\bar{x}y\bar{z} + \omega\bar{x}\bar{y}z + \bar{\omega}\bar{x}yz + \bar{\omega}\bar{x}\bar{y}z + \bar{\omega}x\bar{y}z}$

D	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
ωx	1	1		1
$\omega\bar{x}$		1		1
$\bar{\omega}\bar{x}$	1			1
$\bar{\omega}x$				1

$\rightarrow$ D $= \omega xy + \omega xz + \omega y\bar{z} + \bar{\omega}\bar{x}z + \bar{y}z$

Phủ tối tiểu của một tập

- Việc tìm tất cả các tổng chuẩn tắc không dư thừa của hàm Boole f, từ các tsc tối đại của f, là một vấn đề khá phức tạp.
- Trước hết, chúng ta xét bài toán tìm phủ tối tiểu của một tập như sau.

Phủ của tập X

Cho $S = \{X_1, \ldots, X_n\}$ là họ các tập con của X. S gọi là phủ của X nếu $X = \cup X_i$.

Phủ tối tiểu của X

Giả sử S là một phủ của X. S gọi là phủ tối tiểu của X nếu với mọi i, $S \backslash X_i$ không phủ X.

Ví dụ

X = {a, b, c, d}

A = {a,b} B = {c,d}

C = {a,d} D = {b,c}

{A, B, C, D} phủ không tối tiểu.

{A, B}, {C, D} là các phủ tối tiểu.

{A, C, D} phủ không tối tiểu.

{B, D} không phủ.

Thuật toán tìm công thức đa thức tối tiểu

Gồm 5 bước:

Bước 1: Vẽ biểu đồ karnaugh của f.

Bước 2: Xác định tất cả các tế bào lớn của kar(f).

Bước 3: Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn.

Ta nhất thiết phải chọn tế bào lớn T khi tồn tại một ô của kar(f) mà ô này chỉ nằm trong tế bào lớn T và không nằm trong bất kỳ tế bào lớn nào khác.

Bước 4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn:

- Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 đã phủ được kar(f) thì ta có duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).
- Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 chưa phủ được kar(f) thì:
  - Xét một ô chưa bị phủ, sẽ có ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này, ta chọn một trong các tế bào lớn này. Cứ tiếp tục như thế ta sẽ tìm được tất cả các phủ gồm các tế bào lớn của kar(f).
  - Loại bỏ các phủ không tối tiểu, ta tìm được tất cả các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).

Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối tiểu của f.

- Từ các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f) tìm được ở bước 4 ta xác định được các công thức đa thức tương ứng của f.
- Loại bỏ các công thức đa thức mà có một công thức đa thức nào đó thực sự đơn giản hơn chúng.
- Các công thức đa thức còn lại chính là các công thức đa thức tối tiểu của f.

Ví dụ 1

Tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm f:

f (x,y,z,t) = xyzt ∨ x$\bar{y}$ ∨ x$\bar{z}$ ∨ yz ∨ xy$\bar{z}$ ∨ xy$\bar{t}$

B1: Bảng Kar(f)

f (x,y,z,t) = xyzt ∨ x$\bar{y}$ ∨ x$\bar{z}$ ∨ yz ∨ xy$\bar{z}$ ∨ xy$\bar{t}$

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$	1	1	1	
zt	1	1	1	
$\bar{z}t$	1	1		
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		

B2: Xác định tất cả các tế bào lớn của f.

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$	1	1	1	
zt	1	1	1	
$\bar{z}t$	1	1		
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		

B3: Chọn tế bào lớn nhất thiết phải chọn:
(Vì chúng chứa các các ô không nằm trong tế bào nào khác – *minh hoạ với ô vàng*)

+ chọn tế bào lớn thứ 1: x
+ chọn tế bào lớn thứ 2: yz

B4: Xác định họ phủ của các tế bào lớn:

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$	1	1	1	
zt	1	1	1	
$\bar{z}t$	1	1		
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		

Ta thấy các tế bào chọn ở bước 3 đã phủ hết bảng →đây là họ phủ tối thiểu gồm các tế bào

Kar(f): x ∨ yz

B5: Ứng với họ phủ tối thiểu của tế bào lớn tìm được ta được duy nhất 1 công thức đa thức tối tiểu của f:

→ f = x ∨ yz

Ví dụ 2

Tìm các công thức đa thức tối thiểu của hàm f:

$$f(x,y,z,t) = \bar{y}zt \vee \overline{yzt} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$

B1: Bảng Kar(f)

$$f(x,y,z,t) = \bar{y}zt \vee \overline{yzt} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$			1	1
zt	1	1		1
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$	1	1	1	1

B2: Xác định các tế bào lớn

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$			1	1
zt	1	1		1
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$	1	1	1	1

+ Tế bào lớn thứ 1: $\bar{x}\bar{t}$
+ Tbào lớn thứ 2: $\bar{x}\bar{y}z$
+ Tế bào lớn thứ 3: $\bar{y}zt$
+ Tế bào lớn thú 4: xzt
+ Tế bào lớn thứ 5: $\bar{z}\bar{t}$

B3: Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$			1	1
zt	1	1		1
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$	1	1	1	1

Có 3 ô chỉ nằm trong 1 tế bào lớn

Các tế bào lớn nhất thiết phải chọn là

$$\bar{x}\bar{t} + xzt + \bar{z}\bar{t}$$

B4: Xác định họ phủ tối thiểu của các tế bào lớn:

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$			1	1
zt	1	1		1
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$	1	1	1	1

Ta có họ phủ : $\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee xzt$

Ta thấy còn **một ô** chưa được phủ và ô đó nằm ở 1 trong 2 tế bào lớn.

Ta có 2 cách chọn:

- Cách chọn thứ 1: $\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{x}\bar{y}z$
- Cách chọn thứ 2: $\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{y}zt$

B5: Xác định công thức đa thức cực tiểu:

Ta thấy 2 công thức *đơn giản như nhau* cho nên công thức đa thức tối thiểu của hàm f là:

$$\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{t} \vee \text{xzt} \vee \overline{xy}\text{z}$$

$$\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{t} \vee \text{xzt} \vee \bar{y}\text{zt}$$

Phương pháp Quine-McCluskey

Về cơ bản, phương pháp Quine-McCluskey có hai phần. Phần đầu là tìm các số hạng là ứng viên để đưa vào khai triển cực tiểu của hàm Boole như dưới dạng chuẩn tắc tuyển. Phần thứ hai là xác định xem trong số các ứng viên đó, các số hạng nào là thực sự dùng được.

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn:

Bước 1: Viết vào cột thứ nhất các biểu diễn của các nguyên nhân hạng n của hàm Boole *F*. Các biểu diễn được chia thành từng nhóm, các biểu diễn trong mỗi nhóm có số các ký hiệu 1 bằng nhau và các nhóm xếp theo thứ tự số các ký hiệu 1 tăng dần.

Bước 2: Lần lượt thực hiện tất cả các phép dán các biểu diễn trong nhóm i với các biểu diễn trong nhóm i+1 (i=1, 2, …). Biểu diễn nào tham gia ít nhất một phép dán sẽ được ghi nhận một dấu * bên cạnh. Kết quả dán được ghi vào cột tiếp theo.

Bước 3: Lặp lại Bước 2 cho cột kế tiếp cho đến khi không thu thêm được cột nào mới. Khi đó tất cả các biểu diễn không có dấu * sẽ cho ta tất cả các nguyên nhân nguyên tố của *F*.

VD1: Tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của các hàm Boole:

$F_1 = \overline{w}\overline{x}\overline{y}z + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{w}\overline{x}yz + w\overline{x}\overline{y}z + w\overline{x}yz + \overline{w}xyz + wxyz$

0001*	0-01* 00-1* -001*	0 – – 1 – 0 – 1 – – 1 1
0101* 0011* 1001*	01-1* -011* 0-11* 10-1*	
1011* 0111* 1111*	1-11* -111*	

Từ các bảng trên ta có dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của F_1

$F_1 = \overline{w}z + \overline{x}z + yz$

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu:

Bước 1: Phát hiện tất cả các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Bước 2: Xoá tất cả các cột được phủ bởi các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Bước 3: Trong bảng còn lại, xoá nốt những dòng không còn dấu + và sau đó nếu có hai cột giống nhau thì xoá bớt một cột.

Bước 4: Sau các bước trên, tìm một hệ S các nguyên nhân nguyên tố với số biến ít nhất phủ các cột còn lại.

VD 3:Tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của các hàm Boole cho trong VD1

$F_1 = \overline{wxy}z + \overline{w}x\overline{y}z + \overline{wx}yz + w\overline{xy}z + w\overline{x}yz + \overline{w}xyz + wxyz$

=>$F_1 = \overline{w}z + \bar{x}z + yz$

	$\overline{wxy}z$	$\overline{w}x\overline{y}z$	$\overline{wx}yz$	$\bar{y}z$	$w\bar{x}yz$	wx	wxyz
$\overline{w}z$	+	+	+			+	
WZ	+		+	+	+		
yz			+		+	+	+

dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của F_1 là:

$F_1 = \overline{w}z + \bar{x}z + yz$

Các cổng logic

1. Các phép toán ở đại số boole

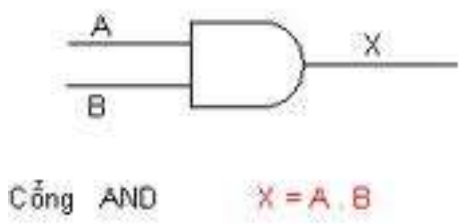
- Phép **cộng** thể hiện qua hàm **OR**
- Phép **nhân** thể hiện qua hàm **AND**
- Phép **phủ định** thể hiện qua hàm **NOT**

Các phép tính trên khi áp dụng cho logic 0 và 1

HOẶC (OR)	VÀ (AND)	KHÔNG (NOT)
$0+0=0$	$0.0=0$	$\bar{0}=1$
$0+1=1$	$0.1=0$	$\bar{1}=0$
$1+0=1$	$1.0=0$	
$1+1=1$	$1.1=1$	

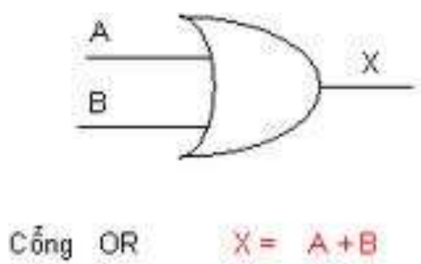
Các cổng cơ bản

Cổng AND



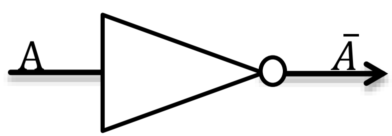
Đầu ra chỉ =1 khi tất cả ngõ vào =1

Cổng OR



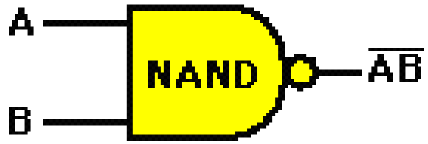
Đầu ra = 1 khi có 1 ngõ vào =1

Cổng NOT



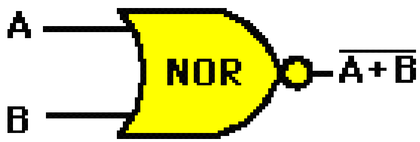
Bù của giá trị đầu vào

Cổng NAND



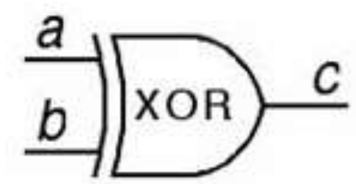
Chỉ = 0 khi tất cả ngõ vào =1

Cổng NOR



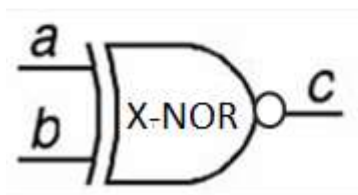
Chỉ = 1 khi tất cả ngõ vào =0

Cổng XOR



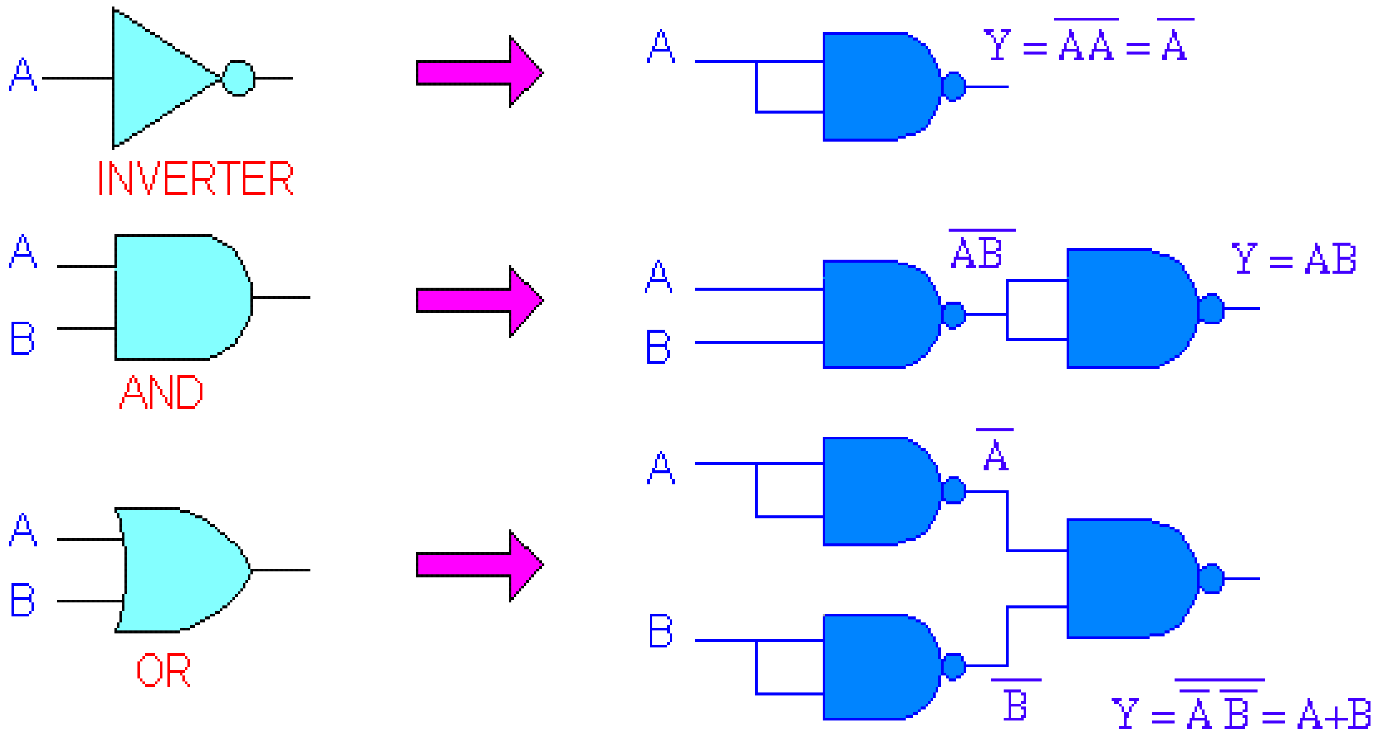
2 ngõ khác nhau thì =1

Cổng X-NOR

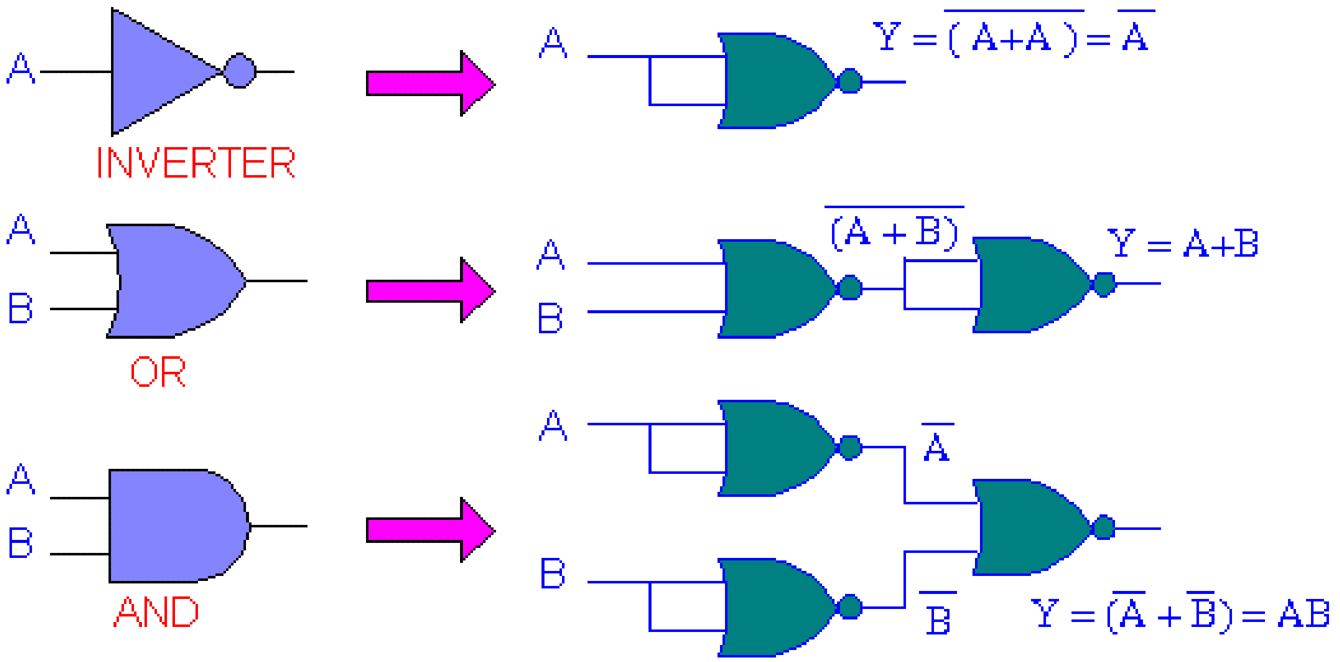


2 ngõ giống nhau thì =1

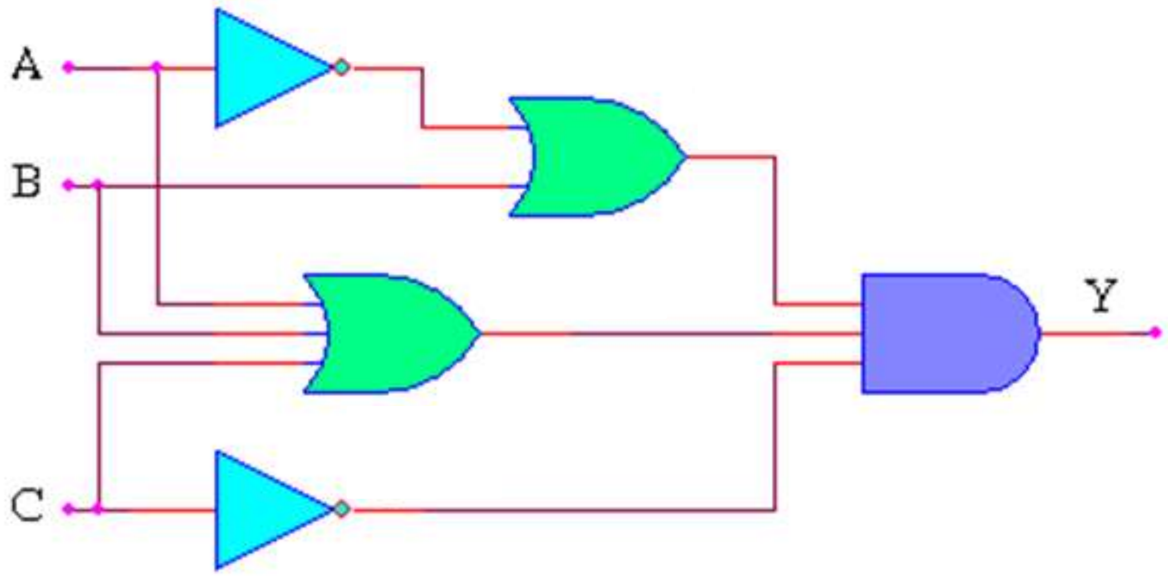
Sự chuyển đổi giữa các cổng cơ bản sang cổng NAND



Sự chuyển đổi giữa các cổng cơ bản sang cổng NOR



VD: Viết lại biểu thức logic sau từ mạch logic:



Kết quả: Y = $(\bar{A} + B)(A + B + C)\bar{C}$

Các bước thiết kế logic tổng hợp:

- Bước 1: Đặt các biến cho ngõ vào và các hàm của ngõ ra tương ứng.
- Bước 2: Thiết lập bảng chân trị cho ngõ ra và ngõ vào
- Bước 3: Viết biểu thức logic liên hệ giữa ngõ ra và các ngõ vào.
- Bước 4: Tìm công thức đa thức tối tiểu của biểu thức logic vừa tìm được.
- Bước 5: Từ biểu thức logic rút gọn chuyển sang mạch logic tương ứng

Ví dụ:

Một ngôi nhà có 3 công tắc, người chủ nhà muốn bóng đèn sáng khi cả 3 công tắc đều hở, hoặc khi công tắc 1 và 2 đóng còn công tắc thứ 3 hở. Hãy thiết kế mạch logic thực hiện sao cho **số cổng là ít nhất.**

Giải:

- Bước 1:

Gọi 3 công tắc lần lượt là A, B, C.

Bóng đèn là Y.

Trạng thái công tắc đóng là logic 1, hở là 0.

Trạng thái đèn sáng là logic 1 và tắt là 0.

➢ Bước 2:

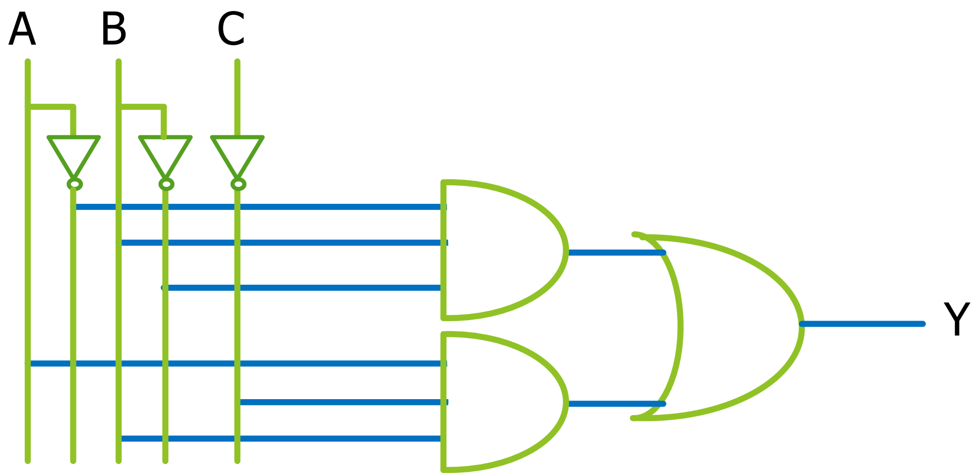
Từ yêu cầu bài toán ta có bảng chân trị:

Ngõ vào			Ngõ ra	
A	B	C	Y	
0	0	0	1	(sáng) → $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	(sáng) → $AB\overline{C}$
1	1	1	0	

- Bước 3: Từ bảng chân trị ta có biểu thức logic ngõ ra

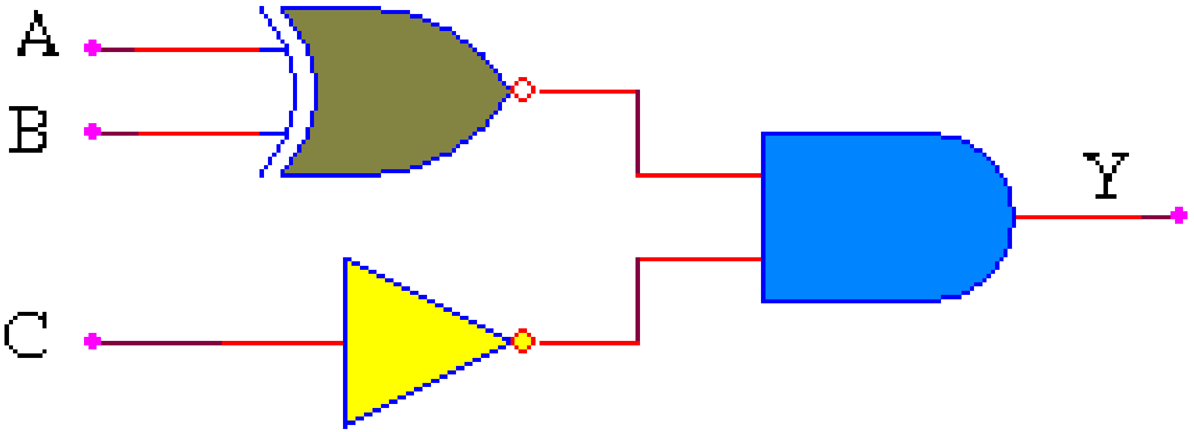
$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$

- Bước 4: Rút gọn biểu thức logic: $Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$
- Bước 5: Mạch logic tương ứng của biểu thức



- Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng cổng XOR cho bài toán như sau:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$
$$= (\bar{A}\bar{B} + AB)\bar{C}$$



CHÂN THÀNH CẢM ƠN CÔ
VÀ CÁC BẠN
ĐÃ LẮNG NGHE VÀ THEO DÕI