

第1章 有限元方法

力学问题往往可以用微分方程的定解问题来描述。由于问题的复杂性，相当多的微分方程难以找到以显式表达的解析解，需要通过各种近似方法获得其数值解。有限元方法就是一种借助电子计算机获得微分方程数值解的近似方法。

有限元方法的起源，一般追溯到 Courant 在 1943 年发表的论文 (R. Courant, "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations", *Bulletin of the American Mathematics Society*, 49:1-23, 1943); 而有限元方法的实际应用和发展, 则始于 1950 年代的航空工业。1956 年, Turner 等人用 3 结点三角形对机翼表面建模, 获得足够精确的机翼刚度特性数据以进行动力学分析 (M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23:805-824, 1956)。“有限元”(Finite Element)一词是 1960 年由 Clough 提出的 (R. W. Clough, "The Finite Element in Plane Stress Analysis", *Proceedings of 2nd Conference on Electronic Computation*, 1960)。此后, 有限元方法便迅速地发展起来, 各种新型单元不断涌现, 到了 1960 年代后期, 开始出现用途广泛的有限元分析计算机程序。有限元方法的应用范围逐渐扩展到工程分析的各个角落 (并不仅仅限于力学分析), 成为大型、复杂工程结构力学分析的强有力手段, 特别是工程结构的静力学和动力学分析。

本章介绍有限元方法的基本思想、基本理论和有限元分析的基本实现步骤。受到课时的限制, 本章试图针对弹性力学平面问题的有限元方法给出基本完整的描述; 仅在确有必要的前提下, 对于其它力学问题的有限元方法作简要介绍。由于弹性力学中的平面应力问题与平面应变问题所对应的微分方程相似, 如果不加以专门说明, 本章所讨论的对象默认为平面应力问题。

1.1 弹性力学平面问题的变分法

用有限元方法获得微分方程的近似解, 涉及到一些以积分形式出现的所谓“弱形式”。对于弹性力学平面问题而言, 弹性力学教程中的最小势能原理(极小势能原理)所对应的变分式即可直接用于有限元方法。本节仅对弹性力学平面应力问题的变分法作一回顾。

1.1.1 弹性力学平面应力问题的微分方程与边界条件

对于图 1-1 所示的平面弹性体, 其位移、应力函数由如下几组微分方程所决定:

(1) 几何方程

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1-1)$$

其中, $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 分别是弹性体内部任意一点沿 x 、 y 轴的位移分量。

(2) 平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

这里， X 、 Y 是弹性体所受的体积力密度。

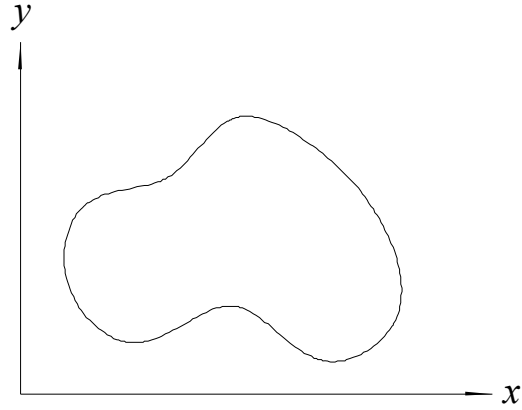


图 1-1

(3) 物理方程

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (1-3a)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1-3b)$$

对于各向同性线弹性材料，平面应力问题的弹性矩阵为

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (1-3c)$$

E 是材料的弹性模量， μ 是泊松比。平面应力问题在 z 方向的补充方程是

$$\varepsilon_z = -\mu(\sigma_x + \sigma_y)/E \quad (1-3d)$$

在弹性力学中，最常用的边界条件有如下两种：

(1) 在给定位移的边界 Γ_u 上，

$$\begin{cases} u = \bar{u} \\ v = \bar{v} \end{cases} \quad (1-4)$$

\bar{u} 、 \bar{v} 为边界点的位移分量。

(2) 在给定应力的边界 Γ_σ 上，

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{xy} = \bar{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = \bar{Y} \end{cases} \quad (1-5)$$

(l, m) 为边界法线的方向余弦， \bar{X} 、 \bar{Y} 为边界点的应力分量。

用位移法求解弹性力学平面应力问题的拉密(Lame)方程为

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + X = 0 \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + Y = 0 \end{cases} \quad (1-6)$$

1.1.2 最小势能原理与位移变分法

弹性力学平面应力问题的最小势能原理：在给定的外力作用下，在满足位移边界条件的所有可能位移中间，实际存在的一组位移使总势能取得最小值。

记弹性体的弹性变形能为

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (1-7)$$

外力势能为

$$V = - \iiint_V \{X\}^T \{u\} dV - \iint_{\Gamma_\sigma} \{\bar{X}\} \{u\} d\Gamma \quad (1-8a)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}; \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{X}\} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} \quad (1-8b)$$

则最小势能原理可以表示为

$$\delta(U + V) = 0 \quad (1-9)$$

平面问题的近似解可以通过位移变分法获得。取试探位移函数如下：

$$\begin{cases} u(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{r=1}^m A_r \phi_r(x, y) \\ v(x, y) = v_0(x, y) + \sum_{s=1}^n B_s \psi_s(x, y) \end{cases} \quad (1-10)$$

其中， $u_0(x, y)$ 、 $v_0(x, y)$ 为预设函数，它们满足位移边界条件； $\phi_r(x, y)$ 、 $\psi_s(x, y)$ 为选定的基函数，它们满足零边界条件； A_r 、 B_s 待求系数。这样， $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 总是能够满足位移边界条件，位移的变分仅由系数 A_r 、 B_s 的变分来实现。将(1-10)代入(1-7)和(1-8a)算出 U 和 V ，然后利用(1-9)式可得到关于 A_r 和 B_s 的线性方程组，求解之即得一组近似解。这种方法称为里兹(Ritz)法。当构造的位移函数既满足位移边界条件又满足应力边界条件时，称为伽辽金(Galerkin)法。

例 1.1 如图 1-2 所示，设有边长为 2m 的正方形薄板，左、右、底边固定，顶边受到的分布载荷为

$$q(x) = -q_0(1 - x^2)$$

已知材料的弹性模量为 E ，泊松比 $\mu = 0.25$ ，试用里兹法确定一组近似位移函数。

解：由于函数 $\phi_0(x, y) = (1 - x^2)y$ 满足全部位移边界条件，不妨取基函数为

$$\phi_1(x, y) = \psi_1(x, y) = \phi_0(x, y)$$

则位移函数可以表示为

$$u(x, y) = A_1(1 - x^2)y, \quad v(x, y) = B_1(1 - x^2)y$$

分别代入(1-7)及(1-8a)，得到

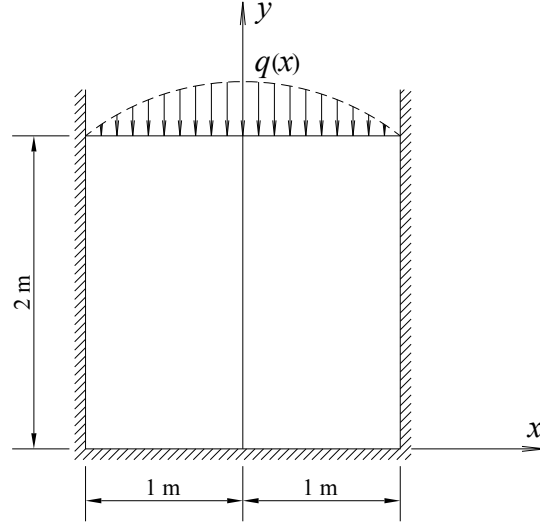


图 1-2

$$U = E \left(\frac{2848}{675} A_1^2 + \frac{64}{25} B_1^2 \right)$$

$$V = \frac{32}{15} q_0 B_1$$

根据最小势能原理，得到方程组

$$E \begin{pmatrix} \frac{5696}{675} & 0 \\ 0 & \frac{128}{25} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = -q_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{32}{15} \end{Bmatrix}$$

求解得到，

$$A_1 = 0, \quad B_1 = -\frac{5q_0}{12E}$$

于是，位移的近似解为

$$\begin{cases} u(x, y) = 0 \\ v(x, y) = -\frac{5q_0(1-x^2)y}{12E} \end{cases} \quad (1-11)$$

如果取

$$\phi_1(x, y) = \psi_1(x, y) = \phi_0(x, y)$$

$$\phi_2(x, y) = \psi_2(x, y) = x\phi_0(x, y)$$

$$\phi_3(x, y) = \psi_3(x, y) = y\phi_0(x, y)$$

$$u(x, y) = \sum_{r=1}^3 A_r \phi_r(x, y), \quad v(x, y) = \sum_{s=1}^3 B_s \psi_s(x, y)$$

得到的近似解是

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{315(1-x^2)xy}{163006} \cdot \frac{q_0}{E} \\ v(x, y) = -(1-x^2)y \left(\frac{11900}{81503} + \frac{51225y}{326012} \right) \cdot \frac{q_0}{E} \end{cases} \quad (1-12)$$

#

1.1.3 有限元方法的基本思想

把传统的位移变分法应用于一般的工程结构，至少存在如下三个方面的困难：

- (1) 由于结构形状和位移边界条件的复杂性，构造符合要求的位移基函数难度可能相当高；
- (2) 由于变分法涉及积分运算，在任意区域上的积分可能难以实现；
- (3) 由于问题的复杂性，究竟应该取多少项基函数才能保证近似解达到满意的精度，难以判断和评估。

这些困难，限制了位移变分法在工程中的应用。

有限元方法的基本做法，**首先**是对求解区域进行离散化处理。具体地说，就是把整个区域以点、线或面剖分为具有特定几何形状的小区域，使得构造近似位移函数和相关积分运算的难度同时降低。这些小区域称为单元。**其次**，为单元选择一个适当的位移函数。由于单元的尺度可以非常小，位移场在单元内的变化可能并不剧烈，因而选用比较简单的函数(例如，低次多项式)就可能取得较好的近似程度。不同单元的位移函数是相对独立的，当然也应满足必要的连续性条件。为了避免因单元间的位移连续性要求而引入的复杂的约束关系，可以在单元的关键点上定义待求位移，这些关键点称为(位移)结点。以结点位移表示的单元内任意点的位移函数，呈现出插值函数的形式，这就是所谓的“分片插值”。**随后**，变分原理所涉及的那些积分，可以通过单元逐个实现。选择一个典型单元作为研究对象，可以建立单元级方程，得到单元刚度矩阵和单元的等效结点力向量。**接着**，把所有单元的弹性变形能和外力势能集合起来，施加位移边界条件后进行整体分析，得到一组以结点位移为未知量的线性方程组，求解之即得到结点位移向量，从而得到各个单元位移函数的具体表达式。**最后**，解算出所需的其它量(例如，单元应变和应力函数)，即可完成分析。

结构离散、分片插值与局部化处理(单元级处理)，是有限元方法的基本构想。至于近似解精度的提高，可通过细致的结构剖分来实现。有限元方法特别适合通过计算机求解，具有显著的灵活性和普遍适用性。

值得说明的是，有限元方程的建立并不仅仅限于变分法。对于尚未找到或者不存在变分原理的问题，可以通过加权残值法得到建立有限元方程所需的弱形式，我们将在 1.4 节讨论。

1.2 平面问题的有限元方法(1) —— 三角形单元

连续体的离散化是有限元分析的第一步，也是建立有限元计算模型的基础。我们将所研究的平面弹性体划分为有限个互不重叠的三角形子区域(即单元)，这些子区域的并集是原来待分析区域的一个近似。如果近似程度不满足要求，可以通过更为细致的结构离散来弥补。由于一个三角形子区域由三个顶点唯一确定，我们暂时把这些顶点称为“形状结点”。为了分析的方便，我们为单元和形状结点分别编排序号。本节主要讨论基于三角形单元的有限元计算模型的建立与求解。

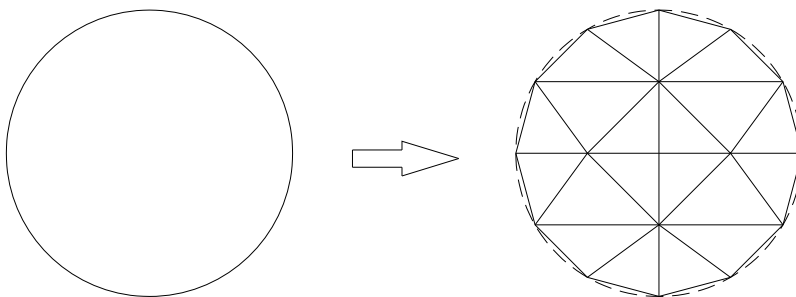


图 1-3 结构的三角形区域离散

1.2.1 3 结点三角形单元

取一个三角形单元作为研究对象，如图 1-4 所示。记该单元的编号为 e ，对应的三个形状结点编号为 i, j, m ，在直角坐标系中的坐标分别为 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ 。 P 为单元内任意一点，坐标是 (x, y) 。这里规定 $i \rightarrow j \rightarrow m$ 按逆时针方向排列。假定单元 e 是等厚度的，厚度为 h 。

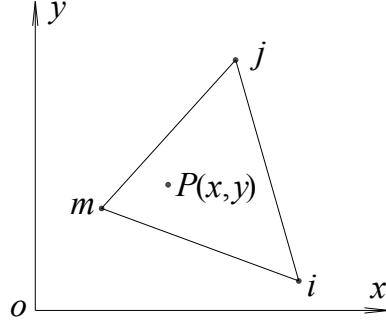


图 1-4 三角形单元

1. 位移函数的选择

根据局部化处理原则，选取位移基函数为 $\{1, x, y\}$ ，则 P 点位移可以表示为

$$\begin{cases} u^{(e)} = \alpha_0^{(e)} + \alpha_1^{(e)}x + \alpha_2^{(e)}y \\ v^{(e)} = \beta_0^{(e)} + \beta_1^{(e)}x + \beta_2^{(e)}y \end{cases} \quad (1-13)$$

上式称为单元的**位移模式**。如果单元 e 和 f 是两个具有公共边的单元，则在其公共边上应保持位移连续。为了避免引入关于系数 $\alpha_r^{(e)}, \beta_r^{(e)}$ 与 $\alpha_r^{(f)}, \beta_r^{(f)}$ 之间的约束关系 ($r=1,2,3$)，我们在三角形的顶点上布置待求位移，位移函数可以改写为

$$\begin{cases} u^{(e)} = N_i^{(e)}u_i + N_j^{(e)}u_j + N_m^{(e)}u_m \\ v^{(e)} = N_i^{(e)}v_i + N_j^{(e)}v_j + N_m^{(e)}v_m \end{cases} \quad (1-14a)$$

这里， u_r, v_r ($r=i, j, m$) 表示三角形顶点的位移分量，具有全局性；以上标 (e) 标记与单元 e 有关的局部量。在不会发生混淆的前提下，直接把单元 e 的位移函数记为

$$\begin{cases} u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{cases} \quad (1-14b)$$

其中， N_r ($r=i, j, m$) 称为形函数，

$$\begin{aligned} N_r &= \frac{1}{2A}(a_r + b_r x + c_r y), \quad r=i, j, m; \\ A &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}; \\ \begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i = y_j - y_m \\ c_i = x_m - x_j \end{cases} &, \quad (i, j, m). \end{aligned} \quad (1-15)$$

符号 (i, j, m) 表示 i, j, m 依次轮换； A 为三角形面积。

用顶点位移表出的位移函数(1-14b)式，实际上是通过顶点位移得到的拉格朗日插值函数，不过这里的顶点位移是待求量而不是已知量。我们把布置待求位移的关键点称为“位移结点”，下文中的“结点”通常就是指位移结点。对于采用线性位移函数的三角形单元来说，位移结点与形状结点完全一致。单元的位移函数也经常写为矩阵形式：

$$\begin{aligned}
\{u\} &= [N]\{\delta^{(e)}\}; \\
\{\delta^{(e)}\} &= \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m\}^T; \\
[N] &= \begin{pmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1-16}$$

其中, $[N]$ 称为单元形函数矩阵, $\{\delta^{(e)}\}$ 称为单元的结点位移向量。

2. 单元应变、应力向量

单元内 P 点的应变向量为

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= [B]\{\delta^{(e)}\}; \\
[B] &= \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1-17}$$

$[B]$ 称为单元应变矩阵。单元内 P 点的应力向量

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [S]\{\delta^{(e)}\}; \\
[S] &= [D][B].
\end{aligned} \tag{1-18}$$

$[S]$ 称为单元应力矩阵。由于 $[B]$ 、 $[S]$ 均为常数矩阵, 故 3 结点三角形单元是一种常应变、常应力单元, 在相邻单元之间, 应变、应力可能是不连续的。

3. 单元的弹性变形能

根据(1-7)式, 单元的弹性变形能

$$\begin{aligned}
U^{(e)} &= \frac{1}{2} \iiint_{V^{(e)}} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \\
&= \frac{1}{2} h \iint_{A^{(e)}} \{\delta^{(e)}\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta^{(e)}\} dA \\
&= \frac{1}{2} \{\delta^{(e)}\}^T [k^{(e)}] \{\delta^{(e)}\}
\end{aligned} \tag{1-19}$$

式中, $[k^{(e)}]$ 称为**单元刚度矩阵**, 是一个 6×6 对称矩阵, 具有半正定性, 秩为 3。单元刚度矩阵可以写成分块矩阵形式:

$$\begin{aligned}
[k^{(e)}] &= \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} & \mathbf{k}_{im} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} & \mathbf{k}_{jm} \\ \mathbf{k}_{mi} & \mathbf{k}_{mj} & \mathbf{k}_{mm} \end{pmatrix}; \\
\mathbf{k}_{rs} \triangleq [k_{rs}] &= \frac{Eh}{4A(1-\mu^2)} \begin{pmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ \mu b_s c_r + \frac{1-\mu}{2} c_s b_r & c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{pmatrix}, \\
&\quad (r, s = i, j, m)
\end{aligned} \tag{1-20}$$

4. 单元的外力势能

如果单元受到的体积力在单元内部是均匀分布的, 则单元的体积力势能为

$$\begin{aligned}
V_X^{(e)} &= - \iiint_{V^{(e)}} \{X\}^T \{u\} dV \\
&= -h \{X\}^T \left(\iint_{A^{(e)}} [N] dA \right) \{\delta^{(e)}\}
\end{aligned}$$

这个算式涉及形函数在三角形区域上的积分，根据形心的定义，

$$\iint_{A^{(e)}} x dA = x_C A, \quad \iint_{A^{(e)}} y dA = y_C A;$$

$$x_C = \frac{1}{3}(x_i + x_j + x_m), \quad y_C = \frac{1}{3}(y_i + y_j + y_m).$$

直接验证可知，

$$\iint_{A^{(e)}} N_r dA = \frac{1}{3} A, \quad r = i, j, m$$

于是，

$$V_X^{(e)} = -\{F_X^{(e)}\}^T \{\delta^{(e)}\};$$

$$\{F_X^{(e)}\} = \frac{1}{3} hA \{X, Y, X, Y, X, Y\}^T. \quad (1-21)$$

边界分布载荷作用在某些三角形单元的边上，不失一般性，假定单元 e 的 i - j 边上受到均布载荷的作用，并记这条边的长度为 l_{ij} 。在 i - j 边上，引入变换

$$\begin{cases} x = x_i + t(x_j - x_i) \\ y = y_i + t(y_j - y_i) \end{cases}$$

则在 i - j 边上的位移插值函数为

$$u = (1-t)u_i + tu_j, \quad v = (1-t)v_i + tv_j; \quad t \in [0,1]$$

于是，边界分布载荷的势能

$$V_{\bar{X}}^{(e)} = -\iint_{A_{ij}} \{\bar{X}\} \{u\} dA = -hl_{ij} \int_0^1 (\bar{X}u + \bar{Y}v) dt = -\{F_{\bar{X}}^{(e)}\}^T \{\delta^{(e)}\};$$

$$\{F_{\bar{X}}^{(e)}\} = \frac{1}{2} hl_{ij} \{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{X}, \bar{Y}, 0, 0\}^T. \quad (1-22)$$

如果弹性体上还受到集中力的作用，在网格划分时，应尽量使集中力的作用点成为一个结点。如果结点 i 上受到集中力 $\{P\} = \{P_x, P_y\}^T$ 的作用，则其势能为

$$V_P^{(e)} = -P_x u_i - P_y v_i = -\{F_P^{(e)}\}^T \{\delta^{(e)}\};$$

$$\{F_P^{(e)}\} = \{P_x, P_y, 0, 0, 0, 0\}^T. \quad (1-23)$$

把单元的体积力势能、边界分布力势能、集中力势能合并，有

$$V^{(e)} = V_X^{(e)} + V_{\bar{X}}^{(e)} + V_P^{(e)}$$

$$= -(\{F_X^{(e)}\} + \{F_{\bar{X}}^{(e)}\} + \{F_P^{(e)}\})^T \{\delta^{(e)}\} \quad (1-24)$$

例 1.2 一个 3 结点三角形单元如图 1-5 所示，单元厚度为 h 。已知材料的弹性模量为 E ，泊松比 $\mu = 0.25$ 。试写出单元的位移函数，并导出单元刚度矩阵。

解：记单元内部任意一点 P 的坐标为 (x, y) ，则位移函数为

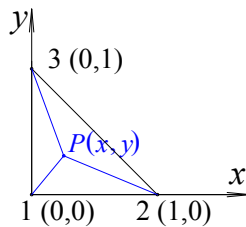


图 1-5

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (1-x-y)u_1 + xu_2 + yu_3 \\ v(x, y) &= (1-x-y)v_1 + xv_2 + yv_3 \end{aligned}$$

单元应变矩阵

$$[B] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

弹性矩阵

$$[D] = \frac{2E}{15} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

单元刚度矩阵

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] &= hA[B]^T[D][B] \\ &= \frac{Eh}{15} \begin{pmatrix} 11 & 5 & -8 & -3 & -3 & -2 \\ 5 & 11 & -2 & -3 & -3 & -8 \\ -8 & -2 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \#$$

1.2.2 平衡方程组的建立

由于积分运算关于积分域具有可加性，我们把所有单元的弹性变形能相加，即得分析对象的弹性变形能。外力势能亦然。

1. 整体结构的弹性变形能

整体结构的弹性变形能为

$$U = \sum_e U^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_e \{\delta^{(e)}\}^T [k^{(e)}] \{\delta^{(e)}\} \quad (1-25)$$

假定分析对象包含 N 个结点，如果把全部结点的位移分量排成列向量 $\{\tilde{\delta}\}$ ，它是一个 $2N$ 行向量。(1-25)可以进一步表示为

$$U = \frac{1}{2} \{\tilde{\delta}\}^T [\tilde{K}] \{\tilde{\delta}\} \quad (1-26)$$

其中， $[\tilde{K}]$ 是未施加位移边界条件时的整体刚度矩阵，由各个单元的刚度矩阵 $[k^{(e)}]$ 集合而成。 $[\tilde{K}]$ 是 $2N \times 2N$ 对称方阵，具有半正定性。

2. 位移边界条件的施加

当结构以 3 结点三角形单元离散后，原结构的位移边界条件转化为与这段边界相关的单元的边的位移条件。在单元的边上，位移函数退化为沿着这条边的线性插值，因而进一步转化指定某些结点的位移。不失一般性，假定 $\{\tilde{\delta}\}$ 中排在最后的 G 个位移分量已知，现在把 $\{\tilde{\delta}\}$ 划分为两部分，

$$\{\tilde{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_G \end{Bmatrix} \quad (1-27)$$

把 $[\tilde{K}]$ 也作同样的划分：

$$[\tilde{K}] = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AG} \\ \mathbf{K}_{GA} & \mathbf{K}_{GG} \end{pmatrix} \quad (1-28)$$

利用 $[\tilde{K}]$ 的对称性，结构的弹性变形能为

$$U = \frac{1}{2} \{\delta_A\}^T [K_{AA}] \{\delta_A\} + \{\delta_G\}^T [K_{GA}] \{\delta_A\} + \frac{1}{2} \{\delta_G\}^T [K_{GG}] \{\delta_G\} \quad (1-29)$$

3. 整体结构的外力势能

整体结构的外力势能可以表示为

$$V = \sum_f V^{(f)} = -\{\tilde{F}\}^T \{\tilde{\delta}\} \quad (1-30)$$

由于已知位移的边界上不允许再给出载荷，故上式实际上可以表示为

$$V = -\{F_A\}^T \{\delta_A\} \quad (1-31)$$

4. 平衡方程组

对(1-29)和(1-30)应用最小势能原理，得到平衡方程组

$$[K_{AA}] \{\delta_A\} = \{F_A\} - [K_{AG}] \{\delta_G\} \quad (1-32)$$

$[K_{AA}]$ 是对结构未施加位移边界条件后的整体刚度矩阵，是 $(2N - G) \times (2N - G)$ 方阵，具有对称、正定性（如果约束是足够的）。在不至于混淆的前提下，今后我们把 $[K_{AA}]$ 称为整体刚度矩阵，并简记为 $[K]$ 。相应地，把(1-32)简写为

$$[K] \{\delta\} = \{F\} - \{F_u\} \quad (1-33)$$

5. 计算结果的处理

从(1-33)中解出位移向量后，即可通过(1-17)和(1-18)计算单元的应变向量和应力向量，并根据实际需要作进一步的分析计算(例如计算主应力)。值得说明的是，由于相邻单元之间的应力是不连续的，如果一个结点被多个单元共用，习惯上以相关单元算得的应力分量的算术平均值作为结点的应力分量。结点应变分量也如此处理。

由于外力势能中仅包含主动力部分，支座反力和主动力共同满足方程组

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AG} \\ \mathbf{K}_{GA} & \mathbf{K}_{GG} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_G \end{Bmatrix}$$

由此可得到支座反力的计算式：

$$\{F_G\} = [K_{GA}] \{\delta_A\} + [K_{GG}] \{\delta_G\} \quad (1-34)$$

例 1.3 一正方形平面弹性体(单位厚度)，上边受均布力作用，如图 1-6 所示。已知弹性模量 $E = 10$ GPa，泊松比 $\mu = 0.25$ ，分布荷载密度 $q = 2 \times 10^3$ N/m²。将结构划分为二个三角形单元，计算角点 A、B 的位移。

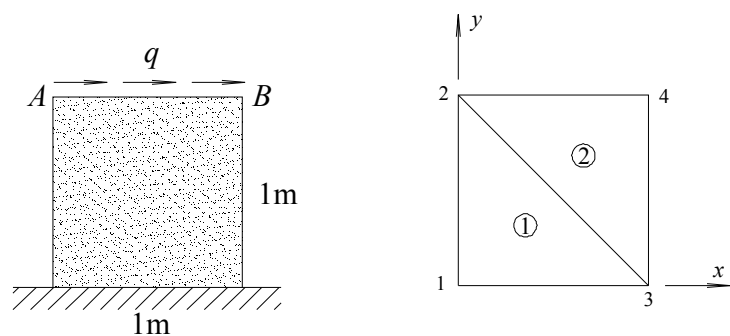


图 1-6

解：(1) 结构离散情况

结点坐标：

结点序号	x	y
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

单元定义：

单元编号	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>m</i>
1	1	3	2
2	4	2	3

(2) 单元刚度矩阵

根据例 1.2，单元①的刚度矩阵和对应的位移向量为

$$[k^{(1)}] = \frac{E}{15} \begin{pmatrix} 11 & 5 & -8 & -3 & -3 & -2 \\ 5 & 11 & -2 & -3 & -3 & -8 \\ -8 & -2 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \{\delta^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

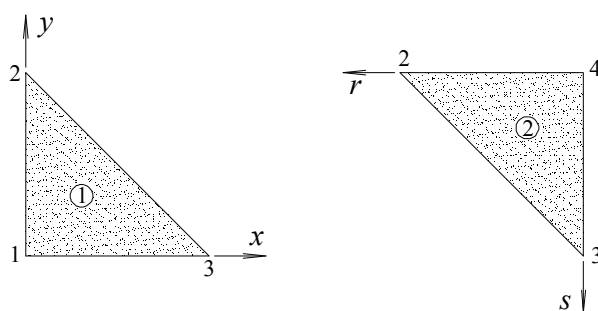


图 1-7

参考图 1.7，单元②在 *rs* 坐标系中的刚度矩阵和对应的位移向量为

$$[\hat{k}^{(2)}] = [k^{(1)}], \quad \{\hat{\delta}^{(2)}\} = \{\hat{u}_4, \hat{v}_4, \hat{u}_2, \hat{v}_2, \hat{u}_3, \hat{v}_3\}$$

式中，带有顶标“^”的量参考 rs 坐标系。由于 $\hat{u} = -u, \hat{v} = -v$ ，故

$$\{\hat{\delta}^{(2)}\} = -\{\delta^{(2)}\}; \quad \{\delta^{(2)}\} = \{u_4, v_4, u_2, v_2, u_3, v_3\}$$

根据弹性变形能的表达式可知，单元②在 xy 坐标系中的刚度矩阵

$$[k^{(2)}] = [\hat{k}^{(2)}] = [k^{(1)}]$$

(3) 整体刚度矩阵

鉴于结点 1 和 3 的位移为零，待求位移向量可取为

$$\{\delta\} = \{u_2, v_2, u_4, v_4\}^T$$

把单元刚度矩阵装配成整体刚度矩阵，得到

$$[K] = \frac{E}{15} \begin{pmatrix} 11 & 0 & -8 & -2 \\ & 11 & -3 & -3 \\ & \text{对称} & 11 & 5 \\ & & & 11 \end{pmatrix}$$

(4) 载荷向量

分布载荷的等效结点力为

$$\{F_{\bar{x}}\} = \frac{q}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\delta^{(\bar{x})}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

于是，载荷向量为

$$\{F\} = \frac{q}{2} \{1, 0, 1, 0\}^T$$

(5) 平衡方程组

$$[K]\{\delta\} = \{F\}$$

求解得到

$$\{\delta\} = \frac{q}{E} \begin{Bmatrix} \frac{365}{119} \\ \frac{345}{476} \\ \frac{476}{415} \\ \frac{119}{395} \\ -\frac{476}{476} \end{Bmatrix} \approx 10^{-7} \begin{Bmatrix} 6.1345 \\ 1.4496 \\ 6.9748 \\ -1.6597 \end{Bmatrix}$$

因此，

$$u_A = 6.1345 \times 10^{-7} \text{ m}, v_A = 1.4496 \times 10^{-7} \text{ m};$$

$$u_B = 6.9748 \times 10^{-7} \text{ m}, v_B = -1.6597 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

#

1.2.3 6 结点三角形单元

对于三角形单元，如果选用 $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ 作为基函数，则位移模式为

$$\begin{cases} u(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 \\ v(x, y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2 \end{cases} \quad (1-35)$$

把位移通过结点的插值函数表出，需要 6 个位移结点。这 6 个结点的布局见图 1-8，其中，结点 4、5、6 取为边中点。确定这个单元的形状，仅需要 3 个形状结点。

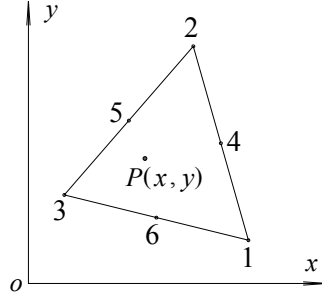


图 1-8 6 结点三角形单元

1. 面积坐标

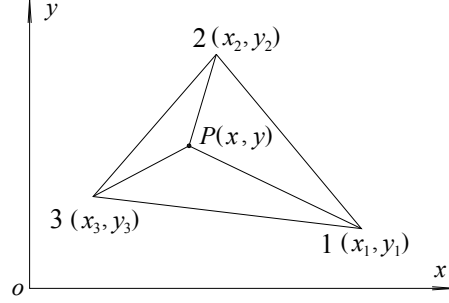


图 1-9

为了便于实现多项式在三角形区域上的积分，引入面积坐标的概念。如图 1-9 所示，由三角形内 P 点向三个顶点连线，把三角形划分为三个子区域。记 A_r 为由 P 点连同除 r 点之外另外两个顶点构成的子三角形的面积($r=1,2,3$)，面积坐标定义为

$$L_r = A_r / A, \quad r=1,2,3 \quad (1-36)$$

如果把 1.2.1 节 3 结点三角形单元的结点编号 i, j, m 改为 1、2、3，则有

$$L_r = N_r = \frac{1}{2A}(a_r + b_r x + c_r y), \quad r=1,2,3 \quad (1-37)$$

(1-37)式中的 N_r 指的是 3 结点三角形单元的形函数。面积坐标满足如下关系：

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 + L_3 &\equiv 1, \\ x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3 &\equiv x, \\ y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 &\equiv y. \end{aligned} \quad (1-38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \left(b_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial}{\partial L_3} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \left(c_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + c_3 \frac{\partial}{\partial L_3} \right). \end{aligned} \quad (1-39)$$

以面积坐标表示的多项式，在三角形区域上的积分由下式给出：

$$\iint_{\Delta} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dx dy = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A, \quad (\alpha, \beta, \gamma \geq 0) \quad (1-40)$$

在三角形一条边上的积分(以 1-2 边为例)公式是

$$\int_{1-2} L_1^\alpha L_2^\beta dl = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} l_{12}, \quad (\alpha, \beta \geq 0) \quad (1-41)$$

式中， l_{12} 表示 1-2 边的长度。

2. 位移插值函数

$$u(x, y) = \sum_{r=1}^6 N_r u_r, \quad v(x, y) = \sum_{r=1}^6 N_r v_r \quad (1-42)$$

其中,

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1), \quad N_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad N_3 = L_3(2L_3 - 1), \\ N_4 &= 4L_1L_2, \quad N_5 = 4L_2L_3, \quad N_6 = 4L_3L_1. \end{aligned} \quad (1-43)$$

3. 应变矩阵

6 结点三角形单元的应变向量为

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta^{(e)}\} \quad (1-44)$$

其中, $[B]$ 为 3×12 矩阵, 其元素是面积坐标的 L_r 的线性函数, 由于表达式过于冗长, 这里不予列出。

6 结点三角形单元的刚度矩阵和等效结点力的推导, 留作课后练习。

1.2.4 算例

一个弹性圆环, 内半径 $a=1$, 外半径为 $b=2$, 受到均布内压 $q=1$ 作用, 如图 1-10 所示。该问题的解析解可以从弹性力学教材中查到。

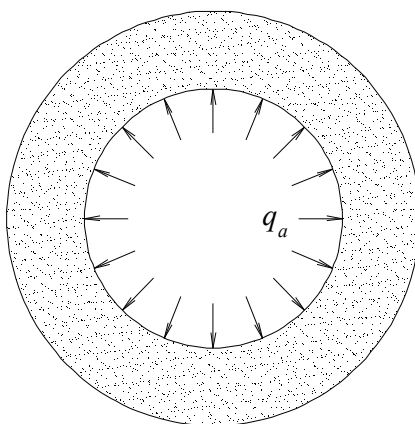


图 1-10

取圆环的四分之一作为分析对象, 采用三种结构离散方案分别进行计算。第一种方案采用 6 结点三角形单元, 共有 100 个单元、231 个结点, 见图 1-11(a); 第二种方案抽掉 6 结点三角形单元的边中点, 共有 100 个单元、66 个结点; 第三种方案把每个 6 结点三角形单元细分为 4 个单元, 总共有 400 个单元、231 个结点。径向位移的计算结果见图 1-12, 方案一的计算结果与解析解比较接近, 方案二的结果误差最大。在绘制图 1-12 时, 取 $E=1$, $\mu=0.25$, $q_a=1$ 。

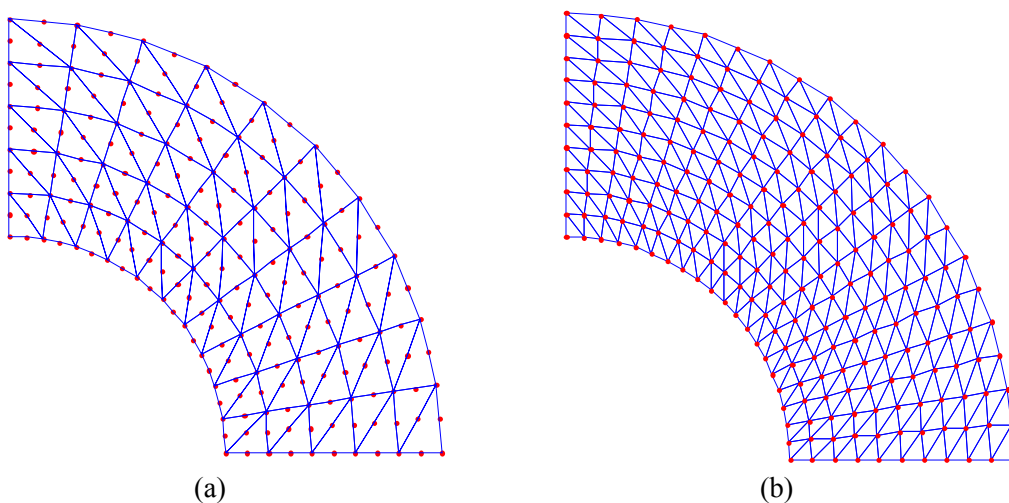


图 1-11

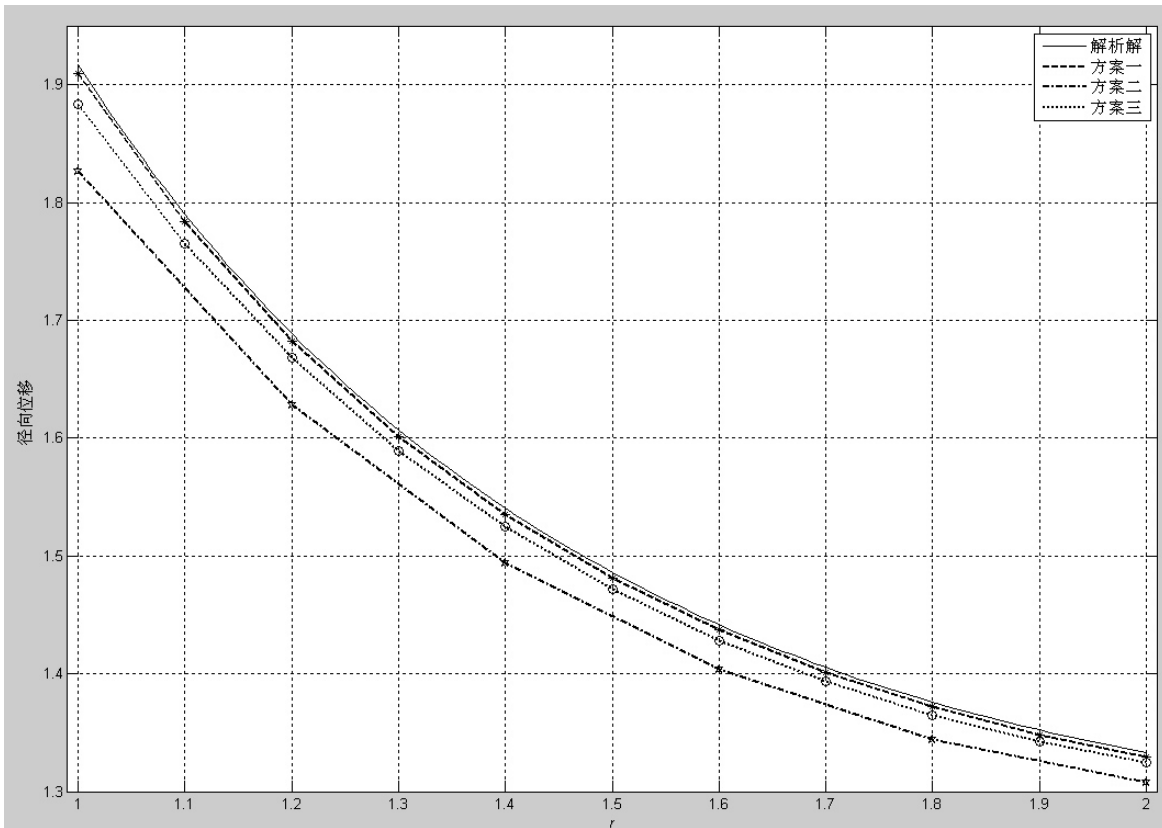


图 1-12

1.3 平面问题的有限元方法(2) —— 四边形单元

1.3.1 4 结点矩形单元

设有矩形单元 1234，其边长分别为 $2a$ 和 $2b$ ，两条边与 x 轴平行，另外两条边与 y 轴平行。矩形中心坐标为 (x_0, y_0) 。4 结点矩形单元弹性变形能的推导过程与三角形单元类似，现在仅把相关结果罗列如下。

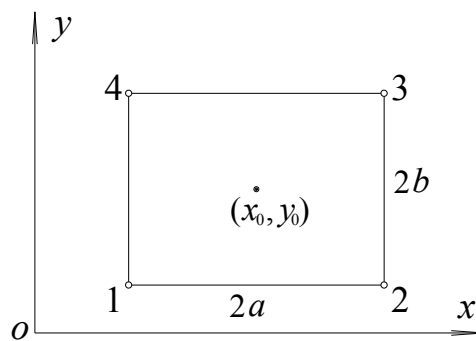


图 1-13 4 结点矩形单元

1. 位移函数

记

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x - x_0}{a}, \quad \eta = \frac{y - y_0}{b}; \\ \xi_1 &= -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1, \xi_4 = -1, \\ \eta_1 &= -1, \eta_2 = -1, \eta_3 = 1, \eta_4 = 1. \end{aligned} \quad (1-45)$$

矩形单元的位移函数为

$$\begin{cases} u = \sum_{r=1}^4 N_r u_r \\ v = \sum_{r=1}^4 N_r v_r \end{cases} \quad (1-46)$$

其中,

$$N_r(x, y) = \frac{(1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta)}{4}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (1-47)$$

2. 应变向量

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [B] \{\delta^{(e)}\}; \\ \{\delta^{(e)}\} &= \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}^T; \\ [B] &= [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4], \\ [B_r] &= \frac{1}{4ab} \begin{pmatrix} b\xi_r(1 + \eta_r \eta) & 0 \\ 0 & a\eta_r(1 + \xi_r \xi) \\ a\eta_r(1 + \xi_r \xi) & b\xi_r(1 + \eta_r \eta) \end{pmatrix}, \quad r = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (1-48)$$

3. 单元刚度矩阵

$$[k^{(e)}] = h \int_{y_0-b}^{y_0+b} \int_{x_0-a}^{x_0+a} [B]^T [D] [B] dx dy = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} & \mathbf{k}_{14} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{24} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{34} \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} & \mathbf{k}_{44} \end{bmatrix} \quad (1-49a)$$

$$\begin{aligned} [k_{rs}] &= \frac{Eh}{4(1-\mu^2)} \begin{pmatrix} z_{rs}^{(11)} & z_{rs}^{(12)} \\ z_{rs}^{(21)} & z_{rs}^{(22)} \end{pmatrix}, \quad r, s = 1, 2, 3, 4; \\ z_{rs}^{(11)} &= \frac{b}{a} \xi_r \xi_s (1 + \frac{1}{3} \eta_r \eta_s) + \frac{1-\mu}{2} \frac{a}{b} \eta_r \eta_s (1 + \frac{1}{3} \xi_r \xi_s), \\ z_{rs}^{(12)} &= \mu \xi_r \eta_s + \frac{1-\mu}{2} \eta_r \xi_s, \\ z_{rs}^{(21)} &= \mu \xi_s \eta_r + \frac{1-\mu}{2} \eta_s \xi_r, \\ z_{rs}^{(22)} &= \frac{a}{b} \eta_r \eta_s (1 + \frac{1}{3} \xi_r \xi_s) + \frac{1-\mu}{2} \frac{b}{a} \xi_r \xi_s (1 + \frac{1}{3} \eta_r \eta_s). \end{aligned} \quad (1-49b)$$

1.3.2 参数单元的基本思想

矩形单元难以应用于工程问题中形状较为复杂的结构。如果单元是一般四边形, 在结构离散方面的限制将大为放宽。对于如图 1-14(a)所示的四边形单元, 未必能够以 $\{1, x, y, xy\}$ 为基函数构造出位移函数; 而在四边形区域上完成相关积分, 将进一步提高复杂程度。

对于图 1-14(b)的正方形区域, 积分问题将会简单得多。即便不能获得解析形式的积分结果, 采用数值方式算出积分的近似值依然是可能的 (例如, 采用高斯积分)。为此, 需要建立从 xy 坐标系到 $\xi\eta$ 坐标系的坐标变换,

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (1-50)$$

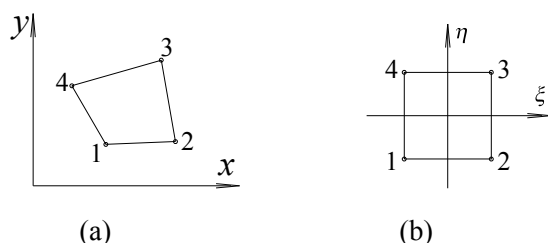


图 1-14 4 结点四边形单元

寻找这样的坐标变换并不困难。实际上，不仅能够构造出从四边形区域到正方形区域的变换关系，还能找到从形状更为复杂的区域到正方形区域的变换关系，例如，把某些曲线边界“四边形”区域变换到正方形区域。坐标变换的引入，可望构造出几何形状较为复杂的单元。

前面我们讨论过的三角形单元和矩形单元，位移函数均采用多项式，简单有效。对于几何形状较为复杂的区域，在 xy 坐标系中建立位移函数可能已经比较复杂；经坐标变换，参与积分的位移函数实际上变得更为复杂，甚至可能不再是关于 ξ 、 η 的多项式。正方形区域相对简单，不妨直接构造关于 ξ 、 η 多项式形式的位移函数，然后套用坐标逆变换，即可获得 xy 坐标系之下的位移函数。

根据这种思想建立的单元称为参数单元。在图 1-14 中， $\xi\eta$ 坐标系中的正方形区域称为“母单元”， xy 坐标系中的四边形称为“子单元”。坐标变换与位移函数通常均可采用插值形式，其中坐标变换涉及形状结点，位移函数涉及位移结点。如果形状结点与位移结点是同一个点集，且采用相同的形函数，则称这种变换为等参变换；如果形状结点多于位移结点，称为超参变换；如果形状结点少于位移结点，称为次参变换。与这三类变换所对应的单元分别称为等参元、超参元和次参元。

1.3.3 4 结点平面等参元

1. 母单元与子单元

参考图 1-14，母单元包含 4 个结点，其坐标是

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1, \xi_4 = -1, \\ \eta_1 &= -1, \eta_2 = -1, \eta_3 = 1, \eta_4 = 1.\end{aligned}\quad (1-51)$$

选择这样的区域作为母单元，主要是便于实现高斯积分。子单元包含 4 个结点，假定 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ 按照逆时针方向排列，结点坐标是 (x_r, y_r) ， $r = 1, 2, 3, 4$ 。

2. 坐标变换与位移函数

坐标变换采用

$$\begin{cases} x = \sum_{r=1}^4 N_r(\xi, \eta) \cdot x_r \\ y = \sum_{r=1}^4 N_r(\xi, \eta) \cdot y_r \end{cases} \quad (1-52)$$

位移函数为

$$\begin{cases} u = \sum_{r=1}^4 N_r(\xi, \eta) \cdot u_r \\ v = \sum_{r=1}^4 N_r(\xi, \eta) \cdot v_r \end{cases} \quad (1-53)$$

二者使用同一套形函数：

$$N_r(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta)}{4}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (1-54)$$

3. 形函数对 x 、 y 的偏导数

记

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &\triangleq \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{r=1}^4 \frac{\partial N_r}{\partial \xi} x_r, & x_{,\eta} &\triangleq \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{r=1}^4 \frac{\partial N_r}{\partial \eta} x_r; \\ y_{,\xi} &\triangleq \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{r=1}^4 \frac{\partial N_r}{\partial \xi} y_r, & y_{,\eta} &\triangleq \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{r=1}^4 \frac{\partial N_r}{\partial \eta} y_r. \end{aligned} \quad (1-55)$$

则坐标变换的雅可比矩阵为

$$[J] = \begin{pmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{pmatrix} \quad (1-56)$$

根据复合函数求导法则，形函数对 x 、 y 的偏导数为

$$\begin{Bmatrix} N_{r,x} \\ N_{r,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{r,\xi} \\ N_{r,\eta} \end{Bmatrix}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (1-57)$$

4. 应变矩阵

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta^{(e)}\} \quad (1-58a)$$

$$[B] = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \quad (1-58b)$$

$$[B_r] = \begin{pmatrix} N_{r,x} & 0 \\ 0 & N_{r,y} \\ N_{r,y} & N_{r,x} \end{pmatrix}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (1-58c)$$

5. 单元刚度矩阵

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] &= \iint_{A^{(e)}} h [B]^T [D] [B] dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h |J| [B]^T [D] [B] d\xi d\eta \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} & \mathbf{k}_{14} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{24} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{34} \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} & \mathbf{k}_{44} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1-59a)$$

其中，

$$[k_{rs}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h |J| [B_r]^T [D] [B_s] d\xi d\eta, \quad r, s = 1, 2, 3, 4 \quad (1-59b)$$

单元刚度矩阵一般通过高斯积分法以数值方式算出。

6. 高斯积分

一维高斯积分公式为

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{r=1}^n H_r f(\xi_r) \quad (1-60)$$

其中 n 为积分点数目。选用 n 个积分点，可以精确地对不超过 $(2n-1)$ 次多项式积分。积分点坐标 ξ_r 和对应的权系数 H_r 可以从数学手册上查到，表 1-1 列出了 $n=1\sim 3$ 时的 ξ_r 、 H_r 。

二维高斯积分公式

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{r=1}^{n_\xi} \sum_{s=1}^{n_\eta} H_r H_s f(\xi_r, \eta_s) \quad (1-61)$$

表 1-1 高斯积分表

n	ξ_r	H_r
1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	-0.57735 02961 89626	1.00000 00000 00000
	+0.57735 02961 89626	1.00000 00000 00000
3	-0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
	+0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556

7. 外力势能的计算

留作习题，由同学们课后完成。

1.3.4 8 结点平面等参元

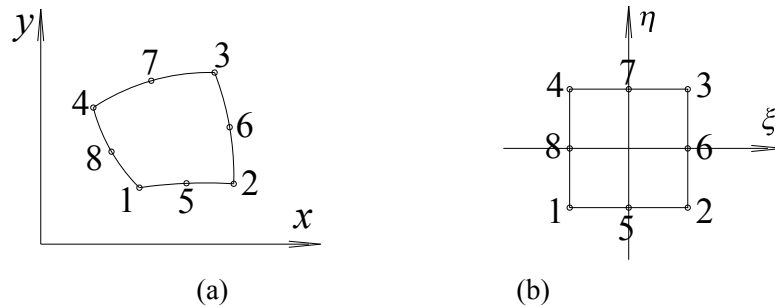


图 1-15 8 结点四边形单元

参考图 1-15，8 结点平面等参元采用 8 个形状结点进行坐标变换，子单元的边可以是直线或者抛物线，方便、灵活，是工程结构有限元分析中的常用单元。其推导过程与 4 结点等参元类似，这里不再列出。

1.3.5 算例

针对 1.2.4 节的结构，取圆环的四分之一作为分析对象，分别用 4 结点等参元和 8 结点等参元进行结构离散(图 1-16)。径向位移的计算结果见图 1-17。

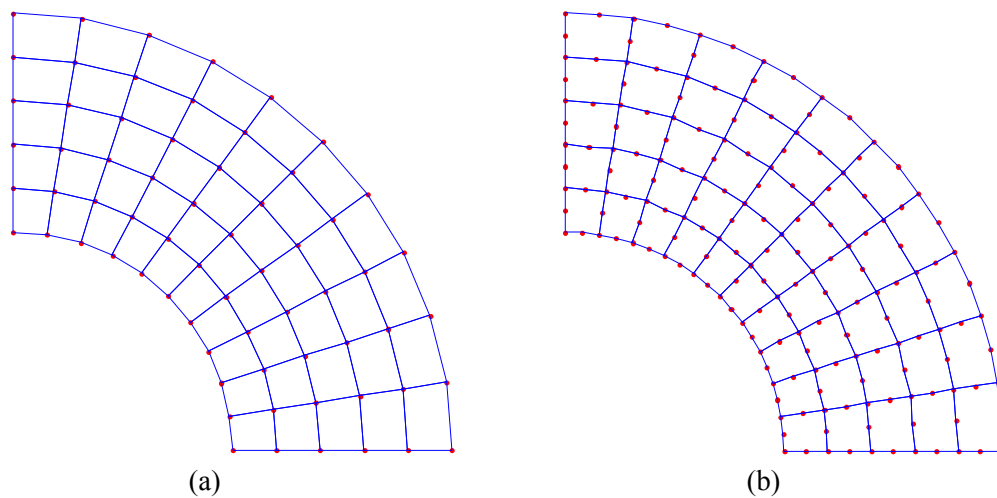


图 1-16 结构离散

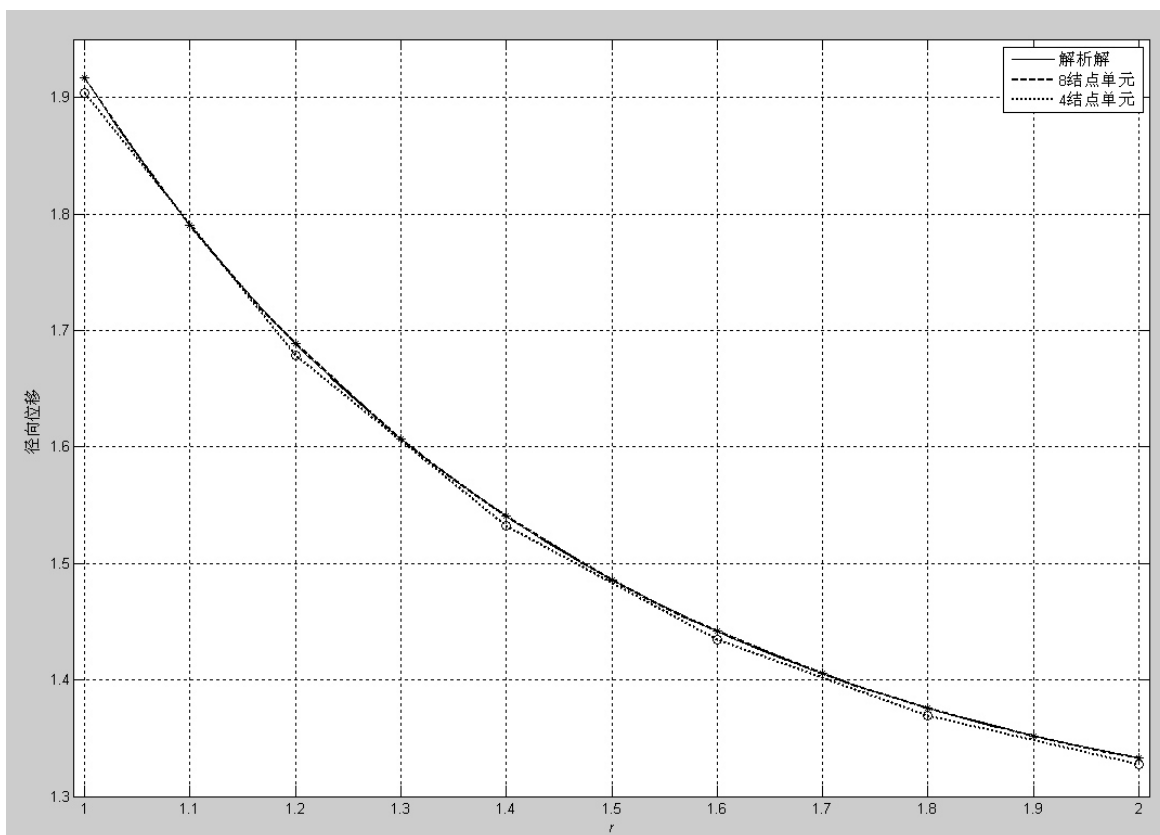


图 1-17

1.4 有限元法的一般原则

1.4.1 加权残数法简介

在 1.2 和 1.3 节中，我们把最小势能原理作为建立有限元方程的出发点。然而，并非所有的力学问题都可以归结为某个泛函的极值问题。对于这类问题，利用加权残数法仍然能够建立有限元方程。

假定一个力学问题的数学描述如下：

$$\mathcal{L}u - f = 0, \quad \text{in } V \quad (1-62a)$$

$$\mathcal{D}u - g = 0, \quad \text{on } \Gamma \quad (1-62b)$$

其中， \mathcal{L} 和 \mathcal{D} 是微分算子， u 是待求函数， f 和 g 是已知函数。如果 \tilde{u} 是一个近似解，则有

$$R^{(V)} = \mathcal{L}\tilde{u} - f, \quad \text{in } V \quad (1-63a)$$

$$R^{(\Gamma)} = \mathcal{D}\tilde{u} - g, \quad \text{on } \Gamma \quad (1-63b)$$

$R^{(V)}$ 是域 V 内的残数， $R^{(\Gamma)}$ 是边界 Γ 上的残数。加权残数法要求

$$\int_V W^{(V)} R^{(V)} dV = 0 \quad (1-64a)$$

$$\int_{\Gamma} W^{(\Gamma)} R^{(\Gamma)} d\Gamma = 0 \quad (1-64b)$$

这里， $W^{(V)}$ 和 $W^{(\Gamma)}$ 是权函数。如果 \tilde{u} 以基函数 $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$ 的线性组合表出，

$$\tilde{u} = \sum_{r=1}^m A_r \phi_r \quad (1-65)$$

选取适当形式和数目的权函数，即可根据(1-64a)、(1-64b)解出组合系数 A_r ，从而得到微分方程的近似解。特别地，如果 \tilde{u} 原本已经满足(1-62b)，则(1-64b)自动成立，我们称之为(加权残数法的)内部法；如果 \tilde{u} 原本已经满足(1-62a)，我们称之为(加权残数法的)边界法。

我们通过一个例子来说明权函数选择的基本方法。考虑边值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, & u(1) = 0 \end{cases} \quad (1-66)$$

这个方程的解析解为

$$u(x) = -\frac{e}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x}) + x \quad (1-67)$$

取构造近似解的基函数为

$$\phi_1(x) = x(1-x), \quad \phi_2(x) = x^2(1-x)$$

则近似解可表示为

$$\tilde{u}(x) = A_1 x(1-x) + A_2 x^2(1-x)$$

它自动满足边界条件，内部区域的残数为

$$R(x) \triangleq R^{(V)} = \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x$$

加权残数法方程为

$$\int_0^1 W(x) \cdot R(x) dx = 0 \quad (1-68)$$

1. 最小二乘法

记 $I(A_1, A_2) = \int_0^1 [R(x)]^2 dx$ ，为了使 $I(A_1, A_2)$ 取最小值，应有

$$\int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial A_r} dx = 0, \quad r = 1, 2$$

最小二乘法取权函数为

$$W_r(x) = \frac{\partial R}{\partial A_r}, \quad r = 1, 2$$

把最小二乘法应用于本例，得到

$$\tilde{u}(x) = \frac{54559}{367305} x(1-x) + \frac{427}{2605} x^2(1-x) \quad (1-69a)$$

2. 配点法

选取两个点 x_1 、 x_2 ，取权函数为

$$W_r(x) = \delta(x - x_r), \quad r = 1, 2$$

这里， $\delta(x)$ 为狄拉克函数。代入(4.1.7)得到，

$$R(x_r) = 0, \quad r = 1, 2$$

配点法相当于要求近似解在指定点上满足微分方程。如果取 $x_1 = 1/3$ 、 $x_2 = 2/3$ ，得到的近似解为

$$\tilde{u}(x) = \frac{81}{560} x(1-x) + \frac{9}{56} x^2(1-x) \quad (1-69b)$$

3. 子域法

选择两个子域 V_1 、 V_2 ，令

$$\int_{V_r} R dV = 0$$

从而确定近似解。对于本例，如果取 $V_1 = [0, 0.5]$ 、 $V_2 = [0.5, 1]$ ，得到

$$\tilde{u}(x) = \frac{95}{637} x(1-x) + \frac{8}{49} x^2(1-x) \quad (1-69c)$$

4. 伽辽金法
取

$$W_r(x) = \phi_r(x), \quad r = 1, 2$$

得到近似解

$$\tilde{u}(x) = \frac{69}{473}x(1-x) + \frac{7}{43}x^2(1-x) \quad (1-69d)$$

5. 矩量法
取

$$W_r(x) = x^{r-1}, \quad r = 1, 2$$

得到近似解

$$\tilde{u}(x) = \frac{118}{793}x(1-x) + \frac{10}{61}x^2(1-x) \quad (1-69e)$$

作为练习，请同学们课后推导近似解(1-69a)~(1-69e)，并绘制曲线，与解析解(1-67)作比较。

1.4.2 结构离散的一般原则

在 1.2 和 1.3 节，我们已经讨论了用于弹性力学平面问题的三角形单元和四边形单元。下面以这两种单元为例，介绍结构离散中应该注意的一些问题。

在结构离散的时候，不同的部位可以采用不同大小的单元。例如，图 1-18 所示的带孔薄板，由于在孔口附近存在应力集中区域，应采用小尺寸单元；在应力变化比较平缓的区域，单元尺寸可以稍微大一些，以减少自由度的数目。如果应力变化情况预先无法估计，可以先采用比较均匀的剖分进行初算，根据初算结果进行合理剖分，再进行复算。

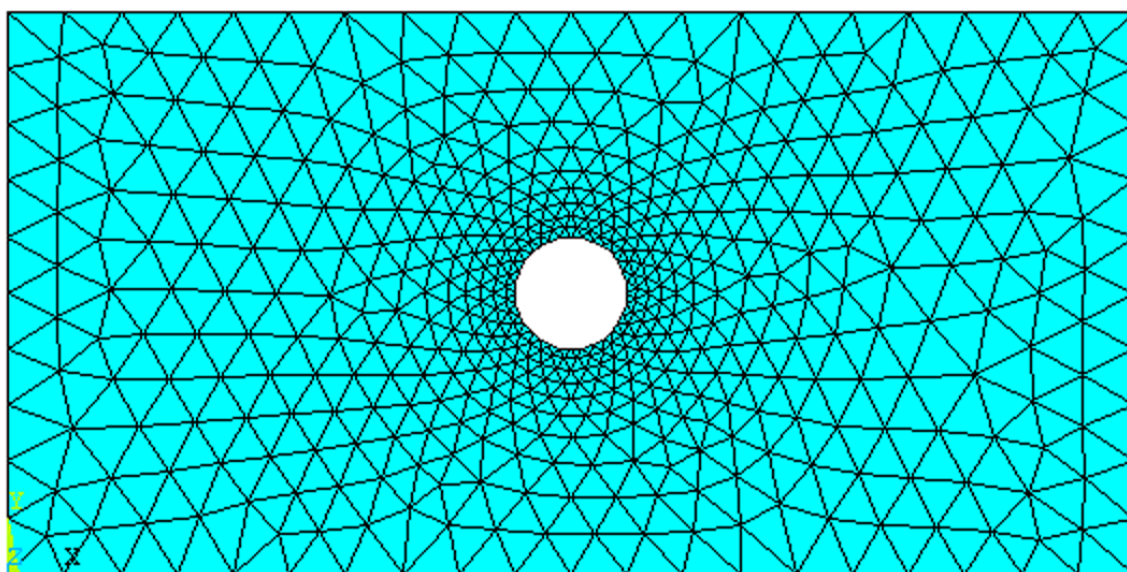


图 1-18

对结构进行单元剖分时，允许三角形、四边形单元混合使用。无论采用单一形状的单元还是多种形状的单元，位移的连续性必须得到保证。在图 1-19(a)中，单元②的顶点 5 是单元①的一条边上的内点，在由 2、5 号结点确定的线段上，位移连续性难以得到保证，应避免出现这种情形。形成单元时，应尽可能使同一个单元各边的长度相差不大，且单元中尽量不要出现大钝角。参考图 1-19，图(b)方案优于图(c)方案。

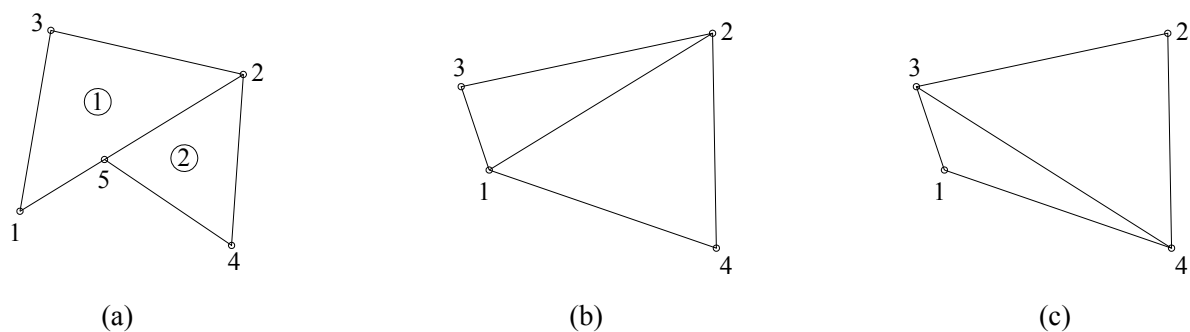


图 1-19

在结构的厚度或者材料性质有突变的地方，应该把突变线作为单元的分界线。如果结构受集中载荷的作用，应在载荷作用点布置结点。如果结构和载荷具有对称性，可根据对称性选择一部分区域作为求解区域，以减少自由度的数目。

1.4.3 单元形状

有限元法的基本前提是通过单元的集合体尽可能精确地描述一个任意形状的结构(或者求解区域)，因而大多数单元的几何形状都相对简单。

1. 一维单元

一维单元的形状通常是一条线段，在线段的两端设置结点。如有必要，也可在中间增加结点。一维单元适用于可以通过一系列线段来理想化的结构，例如杆系结构。



图 1-20 常用一维单元

2. 二维单元

常用的二维单元形状是三角形或者四边形。对于二维参数单元，单元的边可以是曲线。三角形单元可以是 3 结点、6 结点或者 7 结点；四边形单元则是 4 结点、8 结点或者 9 结点。如有必要，可以构造更多结点的三角形、四边形单元。二维单元可用于弹性力学平面问题、平板弯曲问题、平面温度场问题等。

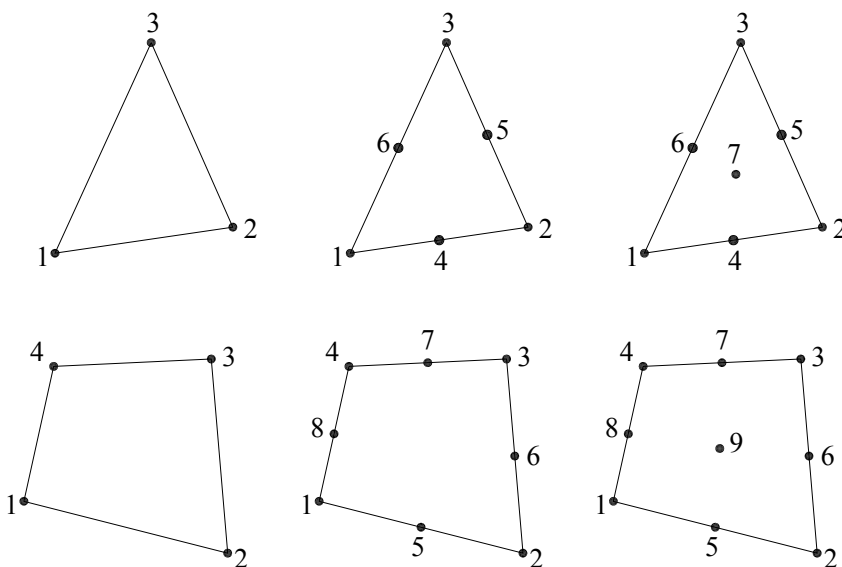


图 1-21 常用二维单元

3. 三维单元

常用的三维单元包括四面体单元(4 结点、10 结点或 11 结点等)、三棱柱单元(6 结点、15 结点等)和六面体单元(8 结点、20 结点、21 结点等),可用于弹性力学空间问题或者三维温度场问题。

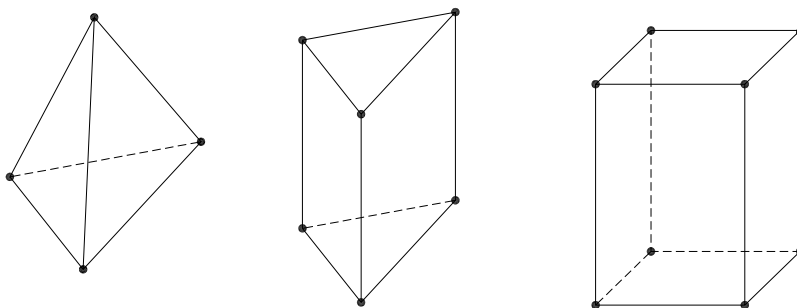


图 1-22 一些三维单元

4. 轴对称单元

如果结构是轴对称的、载荷也是轴对称的,三维结构的静力平衡问题可以归结为圆柱坐标系中的二维问题。轴对称单元是一种环形单元,横截面通常是三角形或者四边形。

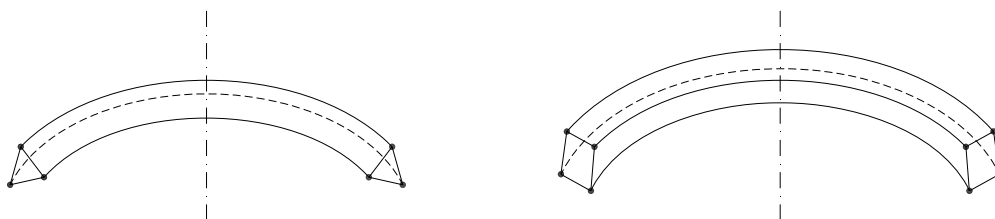


图 1-23 轴对称单元

1.4.4 单元位移模式的选择

用于弹性力学问题的位移模式,应该满足如下要求:

- (1) 必须能够描述弹性体的无变形状态(即单元的刚体位移状态);
- (2) 必须能够描述单元的常应变状态。

从物理意义上来看,当单元尺寸无限缩小时,每个单元中的应变应该趋于常量。因此,位移模式包含常应变状态(包括无变形状态)是有限元法收敛于正确解的必要条件。这两个条件称为位移函数的完备性条件(仅仅指弹性力学问题)。此外,弹性力学问题的位移函数还应该满足:

- (3) 位移函数应保证在单元内部位移的连续性,并使相邻单元间的位移协调。

这个条件称为相容性条件(或协调性条件)。

在有限元方法中,最常用的位移基函数是多项式函数。对于一维弹性力学问题,位移函数可以取为

$$u(x) = \sum_{r=0}^m \alpha_r x^r \quad (1-70)$$

其中,完备性条件要求 $m \geq 1$ 。对于二维弹性力学问题,位移函数可以取为

$$u(x, y) = \sum_{r=0}^m \left(\sum_{s=0}^r \alpha_s^{(r)} x^s y^{r-s} \right) \quad (1-71)$$

这是一个完整的 m 次多项式($m \geq 1$),项数为 $(m+1)(m+2)/2$ 。出于对位移结点布局方面的考虑,有时候需要采用非完整的 m 次多项式。为了保持位移函数对坐标的对称性,一般通过帕斯卡三角形决定多项式的取舍:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & x & & y \\
 & & & x^2 & & xy & & y^2 \\
 & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\
 x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \\
 & & & & \dots\dots & & & &
 \end{array}$$

以 $m = 2$ 为例，可以单独选择 xy 项而弃去 x^2 、 y^2 ，例如矩形单元就是这样；如果选择了 x^2 项，同时应该选择 y^2 项。

在有限元方法中，位移函数通常表示为插值函数的形式，例如，

$$u(x, y) = \sum_{r=1}^n N_r(x, y) u_r$$

其中， u_r 为结点位移， $N_r(x, y)$ 为形函数(插值基函数)。对于采用拉格朗日插值的位移函数，形函数满足如下条件：

- (1) $N_r(x_s, y_s) = \delta_{rs}$ ，即 N_r 在结点 r 处取值为 1、其它结点处取值为 0；
- (2) $\sum_{r=1}^n N_r(x, y) \equiv 1$ ，表示位移函数容许刚体位移；
- (3) $N_r(x, y)$ 包含线性项，以保证位移函数可满足常应变条件。

1.4.5 稀疏矩阵技术的应用

由于有限元采用分片插值模式，从整体刚度矩阵的形成过程来看，整体刚度矩阵不仅具有对称性和正定性，而且通常是稀疏矩阵。充分利用刚度矩阵的稀疏性，能够减少矩阵的存储量以及方程组求解时的计算量，是有限元软件能够解算相对较大规模工程问题的基础。

稀疏矩阵所采用的存储方案，通常与随后的计算方法一并考虑。如果采用直接方法求解平衡方程组(1-33)，刚度矩阵可以采用二维带状存储方案、一维变带宽存储方案或者 Sherman 存储方案；而存储量的大小，不仅依赖于原始刚度矩阵的稀疏性，而且显著地受到矩阵分解过程中填入元数目的影响。对结点位移合理地编号，可以减少填入元的数目，故未知量编号算法(例如，RCM 算法)也是稀疏矩阵技术应用中的一个重要环节。稀疏矩阵技术的细节超出了本课程的范围，在此不作进一步的讨论。

1.5 平面杆件系统的有限元分析

平面杆件系统，是指一个结构由材料力学杆元件构成。如果假定杆件在载荷作用下产生平面变形，则仅涉及杆件的轴向伸缩变形(拉压杆模型)和横向弯曲变形(梁模型)的组合。本节仅讨论 2 结点平面杆件单元，位移结点布置在杆的两端，假定该单元是均质、等截面的。弯曲变形采用简单梁模型。

1.5.1 单元坐标系

对于在整体坐标系 $o-xy$ 中的一个平面杆件单元，为了便于分析，以单元的端点 1 为原点、杆的伸展方向为 ξ 轴建立局部坐标系 $o'-\xi\eta$ ，称为单元坐标系。单元坐标系与整体坐标系之间仅相差平移和旋转变换。我们把杆单元相对于单元坐标系的位移加顶标“ \sim ”，以区别相对于整体坐标系的位移。

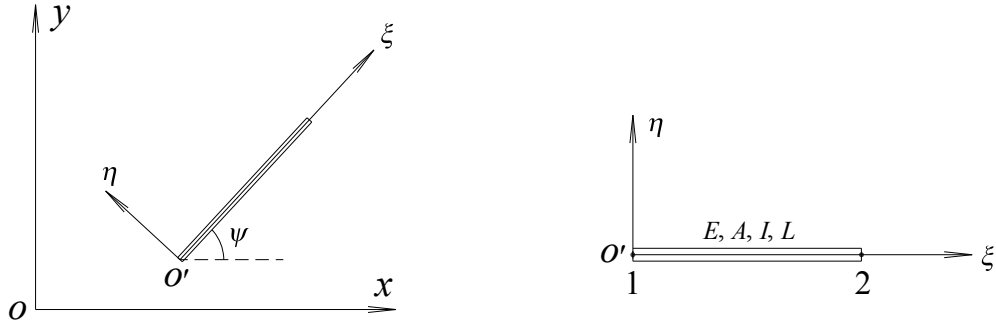


图 1-24 整体坐标系与单元坐标系

1.5.2 局部坐标系下的单元刚度矩阵

取单元的轴向伸缩变形模式为

$$\tilde{u}(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi \quad (1-72)$$

弯曲变形模式为

$$\tilde{v}(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \beta_3 \xi^3 \quad (1-73)$$

如果把端点 1、2 作为位移结点，则每个结点有三个位移分量： $\tilde{u}_r, \tilde{v}_r, \tilde{\theta}_r; r=1,2$ 。于是，轴向位移函数为

$$\tilde{u}(\xi) = H_1(\xi) \cdot \tilde{u}_1 + H_2(\xi) \cdot \tilde{u}_2 \quad (1-74a)$$

$$H_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{L}, \quad H_2(\xi) = \frac{\xi}{L} \quad (1-74b)$$

弯曲位移函数为

$$\tilde{v}(\xi) = N_1(\xi) \cdot \tilde{v}_1 + N_2(\xi) \cdot \tilde{v}_2 + M_1(\xi) \cdot \tilde{\theta}_1 + M_2(\xi) \cdot \tilde{\theta}_2 \quad (1-75a)$$

$$N_1(\xi) = 1 - 3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\xi}{L}\right)^3, \quad N_2(\xi) = 3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\xi}{L}\right)^3; \quad (1-75b)$$

$$M_1(\xi) = L\left[\frac{\xi}{L} - 2\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right], \quad M_2(\xi) = L\left[\left(\frac{\xi}{L}\right)^3 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^2\right].$$

$$\tilde{\theta}(\xi) = \frac{d\tilde{v}}{d\xi} = N_{1,\xi} \cdot \tilde{v}_1 + N_{2,\xi} \cdot \tilde{v}_2 + M_{1,\xi} \cdot \tilde{\theta}_1 + M_{2,\xi} \cdot \tilde{\theta}_2 \quad (1-75c)$$

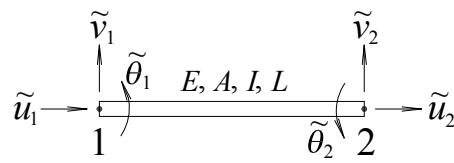


图 1-25 单元坐标系下的结点位移

杆单元的拉压变形能

$$U_T^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{d\tilde{u}}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (1-76a)$$

$$= \frac{1}{2} \{ \tilde{\delta}_T^{(e)} \}^T [k_T^{(e)}] \{ \tilde{\delta}_T^{(e)} \}$$

$$[k_T^{(e)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \{ \tilde{\delta}_T^{(e)} \} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (1-76b)$$

杆单元的弯曲变形能

$$\begin{aligned}
U_B^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 \tilde{v}}{d\xi^2} \right)^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2} \{ \tilde{\delta}_B^{(e)} \}^T [\tilde{k}_B^{(e)}] \{ \tilde{\delta}_B^{(e)} \}
\end{aligned} \tag{1-77a}$$

$$[\tilde{k}_B^{(e)}] = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & \text{对称} & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{pmatrix}; \quad \{ \tilde{\delta}_B^{(e)} \} = \begin{Bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{\theta}_2 \end{Bmatrix} \tag{1-77b}$$

组合变形能

$$U^{(e)} = U_T^{(e)} + U_B^{(e)} = \frac{1}{2} \{ \tilde{\delta}^{(e)} \}^T [\tilde{k}^{(e)}] \{ \tilde{\delta}^{(e)} \} \tag{1-78a}$$

$$[\tilde{k}^{(e)}] = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & \text{对称} & & & & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}; \quad \{ \tilde{\delta}^{(e)} \} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{\theta}_2 \end{Bmatrix} \tag{1-78b}$$

1.5.3 整体坐标系下的单元刚度矩阵

参考图 1-24，整体坐标系与单元坐标系之间存在变换关系

$$\begin{aligned}
\{ \tilde{u} \} &= [t] \{ u \} \\
[t] &= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1-79}$$

$$\{ u \} = \{ u, v, \theta \}^T, \quad \{ \tilde{u} \} = \{ \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\theta} \}^T$$

于是，

$$\begin{aligned}
\{ \tilde{\delta}^{(e)} \} &= [T] \{ \delta^{(e)} \} \\
[T] &= \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1-80}$$

$$\{ \delta^{(e)} \} = \{ u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2 \}^T$$

整体坐标系下的单元刚度矩阵

$$[k^{(e)}] = [T]^T [\tilde{k}^{(e)}] [T] \tag{1-81}$$

1.5.4 轴向与横向分布载荷

杆单元可能受到的载荷包括体积力、轴向和横向分布力(见图 1-26)、结点集中力和力矩，对应的外力势能的推导，留作习题，由同学们课后完成。

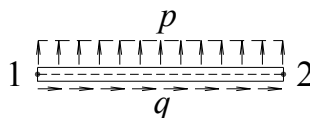


图 1-26 轴向与横向分布力

1.6 杂谈

1.6.1 单元质量矩阵

对于弹性力学平面问题，如果单元是等密度、等厚度的，其动能为

$$\begin{aligned} T^{(e)} &= \frac{1}{2} \iiint_{V^{(e)}} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{\delta}^{(e)}\}^T (\rho h \iint_{A^{(e)}} [N]^T [N] dA) \{\dot{\delta}^{(e)}\} \end{aligned} \quad (1-82)$$

于是，单元质量矩阵为

$$[m^{(e)}] = \rho h \iint_{A^{(e)}} [N]^T [N] dA \quad (1-83)$$

如果计算单元动能所用的位移函数与计算单元弹性变形能所用的位移函数相同，根据(1-83)式获得的单元质量矩阵称为一致质量矩阵(或协调质量矩阵)。以 3 结点三角形单元为例，一致质量矩阵是

$$[m^{(e)}] = \frac{\rho h A}{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1-84)$$

单元的一致质量矩阵为对称、正定矩阵，但通常不是对角阵。结构分析中也经常使用集中质量矩阵，3 结点三角形单元的集中质量矩阵是

$$[m^{(e)}] = \frac{\rho h A}{3} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1-85)$$

在结构的动力学分析中，一致质量矩阵和集中质量矩阵各有优点。至于怎样获得单元的集中质量矩阵，这里不再讨论。

平面等参元和平面杆件的一致质量矩阵的形成方法，留作课后练习。

1.6.2 平面不可压缩无旋流动

对于不可压缩流体的稳态、无旋平面流动，设 u 和 v 分别表示在 x 和 y 方向上的流速，连续性方程是

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1-86)$$

无旋条件为

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1-87)$$

我们可以使用势函数 $\phi = \phi(x, y)$ 或者流函数 $\psi = \psi(x, y)$ 进行求解。如果使用势函数求解，势函

数满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1-88a)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1-88b)$$

常见边界条件：

$$\phi|_{\Gamma_1} = f, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = g \quad (1-89)$$

与方程(1-88a)及边界条件(1-89)等价的变分问题为

$$\begin{aligned} \delta J(\phi) &= 0; \\ J(\phi) &= \frac{1}{2} \iint_A \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma_2} g \phi d\Gamma \end{aligned} \quad (1-90)$$

仿照弹性力学平面问题的处理方法，可以推导出三角形单元、矩形单元和平面等参元的单元特征矩阵，以及整个流场的平衡方程。

1.6.3 分片试验

如果对一个弹性力学平面问题重复进行有限元分析，每次使用更细的网格，一系列的计算结果会收敛于位移、应变和应力的精确解吗？分片试验用于检查所使用的单元组能否趋于常应变状态，如果一种单元不能通过分片试验，则问题的答案不保证是肯定的。

分片试验(Patch Test)是由埃诺斯(Bruce Irons)提出的，此后进行了研究、分析和完善。这里我们给出一种简单的描述，让大家初步理解分片试验的思想。

分片试验是检验单元的位移模式从总体上来看(而不是从一个单元内部来看)是否兼容常应变状态的手段。如图 1-27 所示，假定一个平面区域已经用特定单元离散(图中是 4 结点四边形单元)，对于内部结点 9，取出与之相关的全部单元进行研究，这些单元的形状应具有—般性(例如，如果全部是矩形就过于特殊)；这些单元构成整个区域的一个片段(一个子域)；这些单元把结点 9 包围在中间使之称为这个子域的内部点。如果结构处于常应变状态，则位移可以表示为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ v(x, y) &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y \end{aligned}$$

其中， α_r 和 β_r 是任意常数。这个子域内的所有结点位移均应满足这个关系。现在，对除了结点 9 之外的所有结点赋予这个线性位移，把结点 9 的位移作为未知量，通过有限元法求解。如果求出的结果符合上述线性关系，则称这种单元能够通过分片试验。如果单元不能通过分片试验，意味着需要在结点 9 施加外力才能获得线性位移关系，或者说，即便单元尺寸逐渐缩小，也不能保证所得到的结果收敛于正确解。

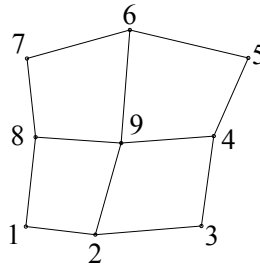


图 1-27 平面 4 结点单元的分片试验

1.6.4 一种矩形非协调薄板单元

忽略横向剪切变形的弹性薄板(克希霍夫板)的平衡方程为

$$D_0 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q(x, y) \quad (1-91a)$$

$$D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (1-91b)$$

其中, $w = w(x, y)$ 为中面的挠度函数, $q(x, y)$ 为横向分布力, h 为板厚。这里略去推导过程, 相关细节请查阅弹性力学教材。实施有限元分析所涉及的弹性变形能为

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (1-92a)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}; [D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (1-92b)$$

早期的板单元是具有 12 个自由度的矩形板单元(参考图 1-28), 以矩形的 4 个角点为位移结点, 每个结点具有三个位移分量($w_r, \theta_{xr}, \theta_{yr}, r=1,2,3,4$)。位移模式为

$$w(x, y) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3] \{\alpha\} \quad (1-93)$$

其中, $\{\alpha\}$ 的 12 个分量为广义自由度。这样构造的单元, 在边界处法向斜率不具备相容性。例如, 在图 1-28 中, 如果 2-3 边是两个单元的公共边, 则 θ_y 可能不连续。这个特性表明, 这种矩形薄板单元是非协调元。

研究表明, 随着网格的细化, 这种不相容性会逐渐趋于零, 因而矩形板元可以用于结构分析, 性能也令人满意。值得注意的是, 这种单元不能推广到一般四边形区域。

相对于平面单元而言, 板单元的构造难度相当大。本节的目的仅仅在于让大家知晓一种非协调单元。

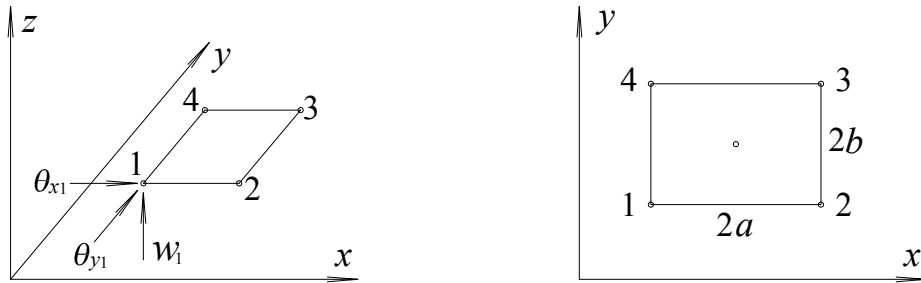


图 1-28 4 结点矩形板单元

1.6.5 关于高斯积分的降阶使用

考察一个用于弹性力学平面问题的 8 结点正方形单元, 边长为 2, 见图 1-29(a)。其位移函数取为包含 3 次项的多项式, 单元刚度矩阵的表达式是

$$[k^{(e)}] = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] dx dy \quad (1-94)$$

被积矩阵($[B]^T [D] [B]$)的元素包含 x^4 、 y^4 项。如果采用 3×3 的高斯积分法, 将获得准确的积分结果。我们把能够获得准确积分结果所采用的积分方案称为完全积分方案。

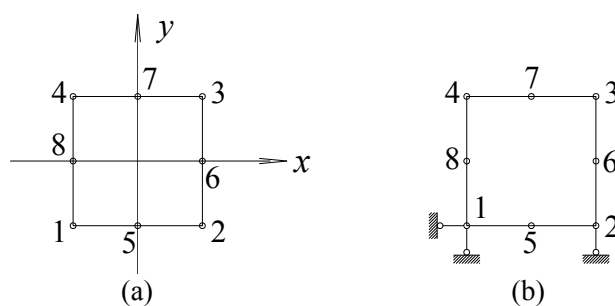


图 1-29

然而，对单元刚度矩阵进行完全积分并不必然提高有限元分析的精度。有限元法所采用的位移插值函数，相当于对单元施加了变形约束，笼统地说，将使单元变得“过度刚硬”。如果采用比完全积分节次低的积分方案，例如 2×2 的高斯积分法，可能在一定程度上“软化”单元刚度特性，从而改善有限元计算结果的精度。这种手段称为降阶积分(或不完全积分)。降阶积分还能减少生成单元刚度矩阵时的计算量。

实际应用表明，恰当地使用降阶积分所带来的好处是明显的。如果使用不当，降阶积分也可能引进一些不同称谓的缺陷。这里，我们仅仅讨论降阶积分所引起的刚度矩阵不满秩问题。

对于如 1-29(b)所示的有限元分析问题，结构受到 3 个位移约束，已经完全消除了刚体位移的可能性。这个结构具有 13 个自由度。如果采用 2×2 的高斯积分法，单元刚度矩阵的计算公式为

$$[k^{(e)}] = h \sum_{m=1}^4 w_m ([B]^T [D] [B]) \Big|_{(x_m, y_m)} \quad (1-95)$$

由于矩阵 $([B]^T [D] [B]) \Big|_{(x_m, y_m)}$ 的秩不超过 3，故 $[k^{(e)}]$ 的秩不超过 $4 \times 3 = 12$ ，由此得到的整体刚度矩阵的秩亦不超过 12，不满秩。