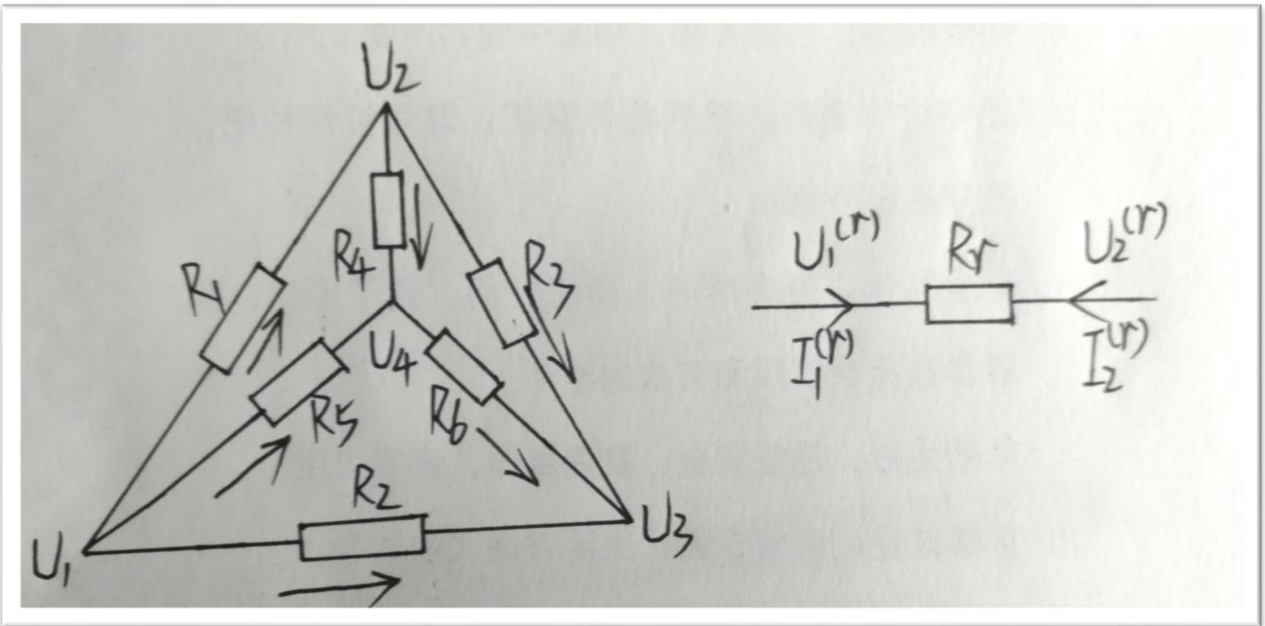
电路问题：



解：先定义电流的正方向，流入为正，流出为负

$$\frac{U}{R}=I=\begin{cases}\dfrac{U_1^{(r)}-U_2^{(r)}}{R_r}=I_1^{(r)}\\[2ex]\dfrac{U_2^{(r)}-U_1^{(r)}}{R_r}=I_2^{(r)}\end{cases},\quad \frac{1}{R_r}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1^{(r)}\\U_2^{(r)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}I_1^{(r)}\\I_2^{(r)}\end{Bmatrix}$$

则对电路图中 6 个电阻分别可得：

$$\frac{1}{R_1}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}I_1^{(1)}\\I_2^{(1)}\end{Bmatrix},\quad \frac{1}{R_2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}I_1^{(2)}\\I_2^{(2)}\end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_3}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}I_1^{(3)}\\I_2^{(3)}\end{Bmatrix},\quad \frac{1}{R_4}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_2\\U_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}I_1^{(4)}\\I_2^{(4)}\end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_5}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}I_1^{(5)}\\I_2^{(5)}\end{Bmatrix},\quad \frac{1}{R_6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_3\\U_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}I_2^{(6)}\\I_1^{(6)}\end{Bmatrix}$$

然后扩展矩阵，进行单元方程组装：

$$\frac{1}{R_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(2)} \\ 0 \\ I_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ I_1^{(3)} \\ I_2^{(3)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ I_1^{(4)} \\ 0 \\ I_2^{(4)} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(5)} \\ 0 \\ 0 \\ I_2^{(5)} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(5)} \\ 0 \\ I_2^{(6)} \\ I_1^{(6)} \end{Bmatrix}$$

建立整体方程：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} I_1^{(1)}+I_1^{(2)}+I_1^{(5)} \\ I_2^{(1)}+I_1^{(3)}+I_1^{(4)} \\ I_2^{(2)}+I_2^{(3)}+I_2^{(6)} \\ I_2^{(4)}+I_2^{(5)}+I_1^{(6)} \end{Bmatrix}$$

通过分析电路图可知：

$$\begin{Bmatrix} I_1^{(1)}+I_1^{(2)}+I_1^{(5)} \\ I_2^{(1)}+I_1^{(3)}+I_1^{(4)} \\ I_2^{(2)}+I_2^{(3)}+I_2^{(6)} \\ I_2^{(4)}+I_2^{(5)}+I_1^{(6)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

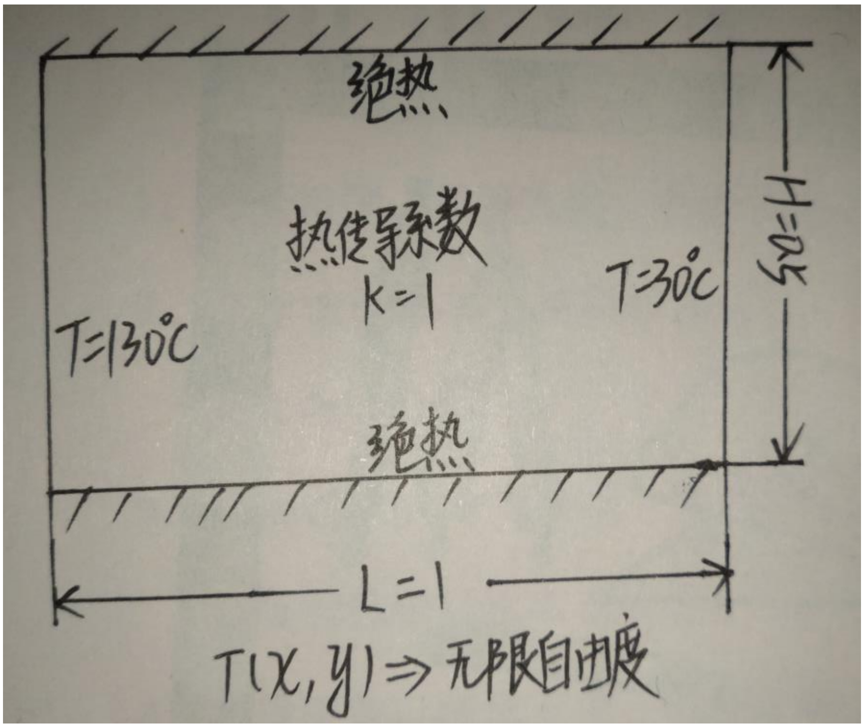
消去第 1 行和第 3 行可得：

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

又因为U_1，U_3已知，将其移到方程右边化简可得：

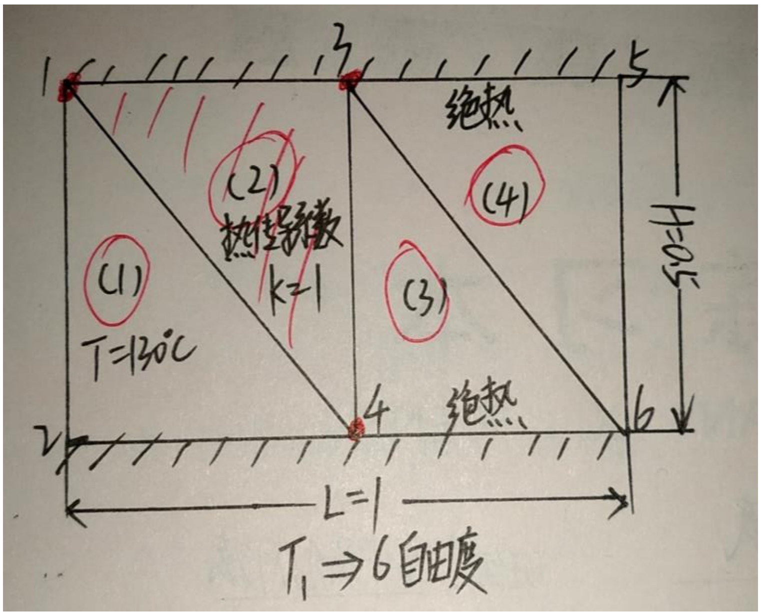
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{R_1}U_1+\frac{1}{R_3}U_3 \\ \frac{1}{R_5}U_1+\frac{1}{R_6}U_3 \end{Bmatrix}$$

传热问题：

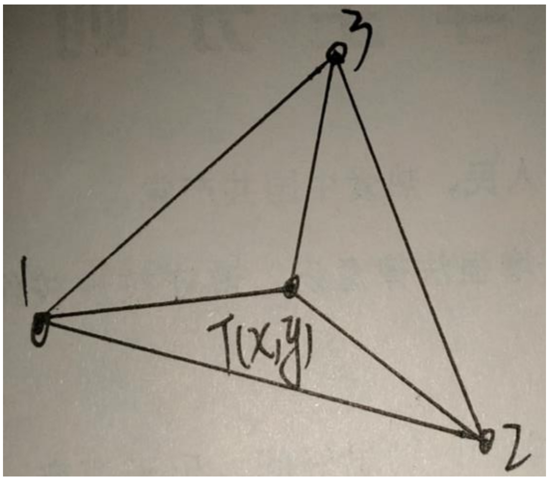


推导过程详解：

热传导问题需要求解的是$T\left(x, y\right)$，由于 x，y 具有无限个，因此是一个无限自由度的问题。采用离散化的处理办法，将单元分成小块，如单元 1，单元 2，单元 3 等，本例将其划分为 4 个单元。针对一个单元来说，如果知道其中三个节点的温度，就可以采用插值法来求解单元内部每个点的温度，因此将求无限自由度问题转化为求解六自由度问题。



下面采用温度函数插值，针对具体某一个单元，求三个节点的温度来计算单元内部$T\left(x, y\right)$的温度，如图：



方法 1：

采用待定系数法，假设第 1 个点、第 2 个点和第 3 个点的温度分别为T_1，T_2，T_3，可以构成 3 个方程求解出 3 个未知数，从而确定函数表达式。

$$T(x,y) = a + bx + cy \Rightarrow \begin{cases} a + bX_1 + cy_1 = T_1 \\ a + bX_2 + cy_2 = T_2 \\ a + bX_3 + cy_3 = T_3 \end{cases}$$

本例推荐使用方法 2：

将单元节点坐标视为三维空间坐标，把单元看作是一个空间四面体（退化的四面体，体积为 0），即设四个点的坐标分别为：

(X_1, y_1, T_1)，(X_2, y_2, T_2)，(X_3, y_3, T_3) 和 (x, y, T)

根据向量求空间四面体体积公式可知：

体积$V = \dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & X_1 & y_1 & T_1 \\ 1 & X_2 & y_2 & T_2 \\ 1 & X_3 & y_3 & T_3 \\ 1 & x & y & T \end{vmatrix} = 0$，按第 4 行展开可得温度函数表达式如下：

$$-\begin{vmatrix} X_1 & y_1 & T_1 \\ X_2 & y_2 & T_2 \\ X_3 & y_3 & T_3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & y_1 & T_1 \\ 1 & y_2 & T_2 \\ 1 & y_3 & T_3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & X_1 & T_1 \\ 1 & X_2 & T_2 \\ 1 & X_3 & T_3 \end{vmatrix} + T\begin{vmatrix} 1 & X_1 & y_1 \\ 1 & X_2 & y_2 \\ 1 & X_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

化简上式：将第 1 个行列式按第 3 列展开得：

设行列式值为2Δ：

$$2\Delta = T_1(x_2y_3 - x_3y_2) - T_2(x_1y_3 - x_3y_1) + T_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$

第 2 个行列式、第 3 个行列式及第 4 个行列式分别按第 1 列展开分别为：

$$\left[(y_2T_3 - T_2y_3) - (y_1T_3 - T_1y_3) + (y_1T_2 - T_1y_2)\right]x$$

$$\left[(x_2T_3 - x_3T_2) - (x_1T_3 - x_3T_1) + (x_1T_2 - x_2T_1)\right]y$$

$$\left[(x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)\right]T$$

整理可得：

$$T = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_1 + b_1x + c_1y)T_1 + (a_2 + b_2x + c_2y)T_2 + (a_3 + b_3x + c_3y)T_3\right]$$

温度 T 求偏导可得温度梯度：

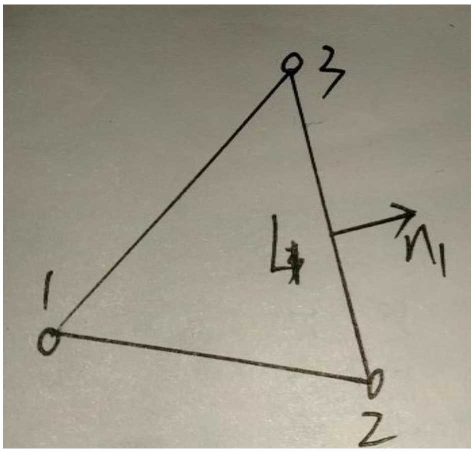
$$\nabla T = \begin{Bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3 \\ c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2, b_1 = y_2 - y_3, c_1 = x_3 - x_2$$

其中：$a_2 = x_1y_3 - x_3y_1, b_2 = y_1 - y_3, c_2 = x_1 - x_3$

$$a_3 = x_2y_1 - x_1y_2, b_3 = y_2 - y_1, c_3 = x_2 - x_1$$

下面求单元及其边界的热流：



已知单元内部的温度梯度：$\nabla T = \begin{Bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3 \\ c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 \end{pmatrix}$

由于单元内部的热流矢量正比于温度梯度，且温度由高到低：

所以单元内部的热流矢量：$q = -k\nabla T$

则单元边界的热流密度等于热流矢量点积一个方向矢量，即：

单元边界的热流密度：$q_n = -k\nabla T \bullet \vec{n}$

流入单元边界 2—3 的热量：$Q_{23} = L_1 \times k\nabla T \bullet \vec{n}$

又因为：$\begin{aligned} L_1 \times n_{x1} &= y_3 - y_2 = -b_1 \\ L_1 \times n_{y1} &= x_2 - x_3 = -c_1 \end{aligned}$

代入各项数值可得：

$$Q_{23} = -\frac{k}{2\Delta}\left[\left(b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3\right)b_1 + \left(c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3\right)c_1\right]$$

通过替换相应的指标数值，可以得到流入边界 1—2,1—3 的热量分别如下：

$$Q_{31} = -\frac{k}{2\Delta}\left[\left(b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3\right)b_2 + \left(c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3\right)c_2\right]$$

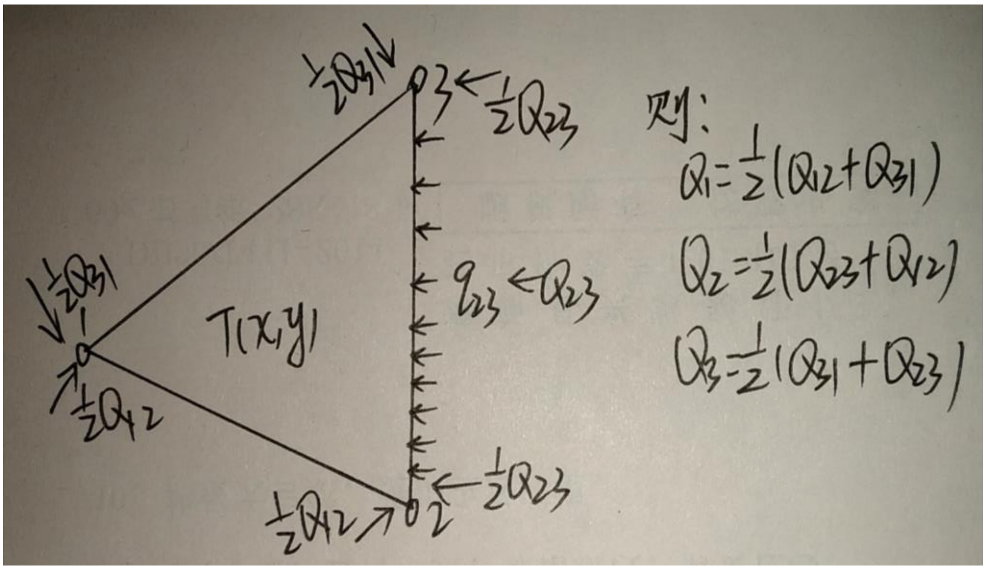
$$Q_{12} = -\frac{k}{2\Delta}\left[\left(b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3\right)b_3 + \left(c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3\right)c_3\right]$$

下面求流入节点的热流，通过引用等效力系的分析原理：

流入边界 2—3 的热流密度为q_{23}，则流入的热量$Q_{23} = q_{23} \times L_1$

则流入节点 2 和 3 的热量分别为：$\frac{1}{2}Q_{23}$

类比计算，分别求得流入个边界的热量及各节点的热量如下图所示：



通过边界流入单元的热量为：

$$
\begin{cases}
Q_{12} = -\dfrac{k}{2\Delta}\left[\left(b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3\right)b_3 + \left(c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3\right)c_3\right] \\
Q_{23} = -\dfrac{k}{2\Delta}\left[\left(b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3\right)b_1 + \left(c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3\right)c_1\right] \\
Q_{31} = -\dfrac{k}{2\Delta}\left[\left(b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3\right)b_2 + \left(c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3\right)c_2\right]
\end{cases}
$$

利用等效转换，通过节点流入单元的热量为：

$$
\begin{cases}
Q_1 = \dfrac{1}{2}\left(Q_{12} + Q_{31}\right) = \dfrac{k}{4\Delta}\left[\left(b_1b_1 + c_1c_1\right)T_1 + \left(b_1b_2 + c_1c_2\right)T_2 + \left(b_1b_3 + c_1c_3\right)T_3\right] \\
Q_2 = \dfrac{1}{2}\left(Q_{23} + Q_{31}\right) = \dfrac{k}{4\Delta}\left[\left(b_2b_1 + c_2c_1\right)T_1 + \left(b_2b_2 + c_2c_2\right)T_2 + \left(b_2b_3 + c_2c_3\right)T_3\right] \\
Q_3 = \dfrac{1}{2}\left(Q_{31} + Q_{12}\right) = \dfrac{k}{4\Delta}\left[\left(b_3b_1 + c_3c_1\right)T_1 + \left(b_3b_2 + c_3c_2\right)T_2 + \left(b_3b_3 + c_3c_3\right)T_3\right]
\end{cases}
$$

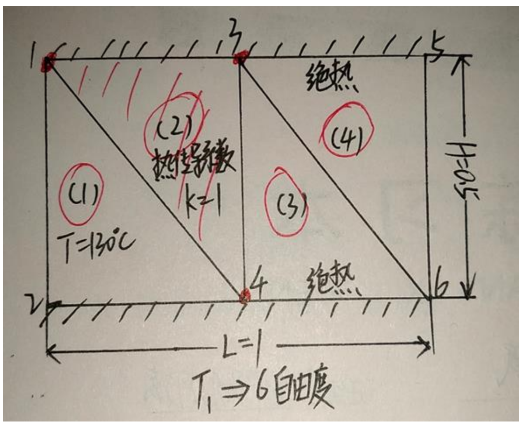
建立单元方程，将上式整理成矩阵形式如下：

$$
\frac{k}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_1b_1 + c_1c_1 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2b_2 + c_2c_2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3b_3 + c_3c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}
$$

有了上述温度和热量的关系，将单元方程进行组装如下：

$$
\begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} \\ k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1^{(e)} \\ T_2^{(e)} \\ T_3^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(e)} \\ Q_2^{(e)} \\ Q_3^{(e)} \end{Bmatrix}
$$

针对划分的 4 个单元，分别将矩阵进行扩阶：



单元 1：

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & k_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & k_{23}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & 0 & k_{33}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ 0 \\ Q_3^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

单元 2：

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & 0 & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{(2)} & 0 & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\ k_{31}^{(2)} & 0 & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(2)} \\ 0 \\ Q_3^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

单元 3：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 & k_{13}^{(3)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & 0 & k_{23}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{31}^{(3)} & k_{32}^{(3)} & 0 & k_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1^{(3)} \\ Q_2^{(3)} \\ 0 \\ Q_3^{(3)} \end{Bmatrix}$$

单元 4：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{(4)} & 0 & k_{12}^{(4)} & k_{13}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^{(4)} & 0 & k_{22}^{(4)} & k_{23}^{(4)} \\ 0 & 0 & k_{31}^{(4)} & 0 & k_{32}^{(4)} & k_{33}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1^{(4)} \\ 0 \\ Q_3^{(4)} \\ Q_2^{(4)} \end{Bmatrix}$$

将上述 4 个方程相加，建立整体方程：

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(2)}+k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & k_{23}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{31}^{(2)} & 0 & k_{33}^{(2)}+k_{11}^{(3)}+k_{11}^{(4)} & k_{23}^{(2)}+k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(4)} & k_{13}^{(3)}+k_{12}^{(4)} \\ k_{31}^{(1)}+k_{21}^{(2)} & k_{32}^{(1)} & k_{32}^{(2)}+k_{21}^{(3)} & k_{33}^{(1)}+k_{22}^{(2)}+k_{22}^{(3)} & 0 & k_{23}^{(3)} \\ 0 & 0 & k_{31}^{(4)} & 0 & k_{33}^{(4)} & k_{32}^{(4)} \\ 0 & 0 & k_{31}^{(3)}+k_{21}^{(4)} & k_{32}^{(3)} & k_{23}^{(4)} & k_{33}^{(3)}+k_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(1)}+Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(2)}+Q_1^{(3)}+Q_1^{(4)} \\ Q_3^{(1)}+Q_2^{(2)}+Q_2^{(3)} \\ Q_3^{(4)} \\ Q_3^{(3)}+Q_2^{(4)} \end{Bmatrix}$$

由于节点 3 和节点 4 在绝热边界上，所以流入这两个节点的热量为 0，所以：

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(2)}+k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & k_{23}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{31}^{(2)} & 0 & k_{33}^{(2)}+k_{11}^{(3)}+k_{11}^{(4)} & k_{23}^{(2)}+k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(4)} & k_{13}^{(3)}+k_{12}^{(4)} \\ k_{31}^{(1)}+k_{21}^{(2)} & k_{32}^{(1)} & k_{32}^{(2)}+k_{21}^{(3)} & k_{33}^{(1)}+k_{22}^{(2)}+k_{22}^{(3)} & 0 & k_{23}^{(3)} \\ 0 & 0 & k_{31}^{(4)} & 0 & k_{33}^{(4)} & k_{32}^{(4)} \\ 0 & 0 & k_{31}^{(3)}+k_{21}^{(4)} & k_{32}^{(3)} & k_{23}^{(4)} & k_{33}^{(3)}+k_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}$$

其中$T_3, T_4, Q_1, Q_2, Q_5, Q_6$是未知量，温度$T_1, T_2, T_5, T_6$是已知量，可以直接求出$Q_1, Q_2, Q_5, Q_6$。

通过去除第 1、2、5、6 行来求解温度T_3, T_4,

则上面整体方程化简为：

$$\begin{bmatrix} k_{31}^{(2)} & 0 & k_{33}^{(2)}+k_{11}^{(3)}+k_{11}^{(4)} & k_{23}^{(2)}+k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(4)} & k_{13}^{(3)}+k_{12}^{(4)} \\ k_{31}^{(1)}+k_{21}^{(2)} & k_{32}^{(1)} & k_{32}^{(2)}+k_{21}^{(3)} & k_{33}^{(1)}+k_{22}^{(2)}+k_{22}^{(3)} & 0 & k_{23}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

因为温度T_1, T_2, T_5, T_6已知，移到方程右边，上式化简为：

$$\begin{bmatrix} k_{33}^{(2)}+k_{11}^{(3)}+k_{11}^{(4)} & k_{23}^{(2)}+k_{12}^{(3)} \\ k_{32}^{(2)}+k_{21}^{(3)} & k_{33}^{(1)}+k_{22}^{(2)}+k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_{31}^{(2)}T_1 - k_{13}^{(4)}T_5 - \left(k_{13}^{(3)}+k_{12}^{(4)}\right)T_6 \\ -\left(k_{31}^{(1)}+k_{21}^{(2)}\right)T_1 - k_{32}^{(1)}T_2 - k_{23}^{(3)}T_6 \end{Bmatrix}$$

由上求解出$T_3, T_{4,}$，至此传热问题求解完毕。