有限元方法第三次作业

姓　　名：肖选杰
学　　号：20210290017
课程名称：有限元方法
任课教师：唐国安教授
时　　间：2021年3月25日

目录

第一题：

用伽辽金方法求解常微分方程边值问题的近似解。将近似函数 $u(x)$ 设为由三个点 $(0,0),(0.5,u_1)$ 和 $(1,u_2)$ 构成的分段线性函数，其中 u_1 和 u_2 是待定的未知数。取权函数 $\omega(x)$ 也是由三个点 $(0,0),(0.5,\omega_1),(1,\omega_2)$ 构成的分段线性函数，其中 ω_1 和 ω_2 是任意常数。

$$
\begin{aligned}
&u''(x)+u(x)+x=0,(0<x<1)\\
&u(0)=0,u'(1)=0
\end{aligned}
$$

解题如下：

$$
\begin{cases}
u''(x)+u(x)+x=0,(0<x<1)\\
u(0)=0\\
u'(1)=0
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow\begin{cases}
\int_0^1 w(u''+u+x)dx=0\\
w_1u'(1)=0\\
u(0)=0
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \int_0^1 w(u''+u+x)dx+w_1u'(1)=0
$$

$$
\because wu''=(wu')'-w'u'
$$

$$
\Leftrightarrow \left[wu'\right]_0^1-\int_0^1(wu'-wu-wx)dx+w_1'(1)=0
$$

设 $w(0)=0,w(1)=-w_1$

可以继续转化为

$$
\int_0^1(wu'-wu-wx)dx=0.......(\forall w\text{任意，}\ x\in(0,1],w(0)=0\text{成立})
$$

$$
\sum_e\int_e(wu'-wu-wx)dx=0
$$

那么我们可以假设如下：

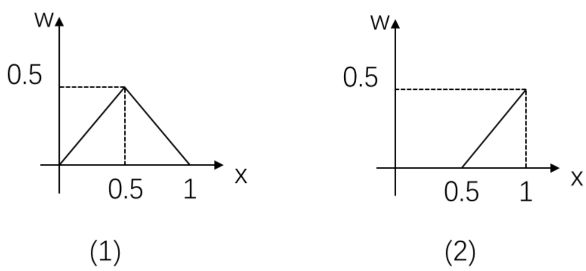


图 1-1 权值函数图像

$$w_1(x)=\begin{cases} x(0<x<\frac{1}{2}) \\ -x+1(\frac{1}{2}\le x<1) \end{cases}$$

$$w_2(x)=\begin{cases} 0(0<x<\frac{1}{2}) \\ x-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\le x<1) \end{cases}$$

再设：

$$u(x)=a_1w_1(x)+a_2w_2(x)$$

可知：

$$w_1=u(\frac{1}{2})=u_1=a_1$$

$$u(1)=u_2=\frac{a_2}{2}$$

此处对式子化简：

$$\int_0^1(wu^{'}-wu-wx)dx=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_e\int_e(wu^{'}-wu-wx)dx=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left\{w_i^{'}(x)[a_1w_1^{'}(x)+a_2w_2^{'}(x)]-w_i(x)[a_1w_1(x)+a_2w_2(x)]-w_i(x)x\right\}dx=0$$

化简为：

$$\{\int_0^1[w_i^{'}(x)w_1^{'}(x)-w_i(x)w_1(x)]dx\}a_1+\{\int_0^1[w_i^{'}(x)w_2^{'}(x)-w_i(x)w_2(x)]dx\}a_2=\int_0^1w_i(x)xdx$$

化简设为：

$$a_{i1}a_1+a_{i2}a_2=b_i$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

执行分步积分可知:

$$a_{11}=\int_0^{\frac{1}{2}}[w_1^{'}(x)w_1^{'}(x)-w_1(x)w_1(x)]dx+\int_{\frac{1}{2}}^1[w_1^{'}(x)w_1^{'}(x)-w_1(x)w_1(x)]dx$$

$$a_{11}=\int_0^{\frac{1}{2}}[1-x^2]dx+\int_{\frac{1}{2}}^1[1-(-x+1)^2]dx=\frac{11}{12}$$

$$a_{12}=\int_0^1[w_1^{'}(x)w_2^{'}(x)-w_1(x)w_2(x)]dx$$

$$a_{12}=\int_0^{\frac{1}{2}}[w_1^{'}(x)w_2^{'}(x)-w_1(x)w_2(x)]dx+\int_{\frac{1}{2}}^1[w_1^{'}(x)w_2^{'}(x)-w_1(x)w_2(x)]dx$$

$$a_{12}=\int_{\frac{1}{2}}^1[-1-(-x+1)(x-\frac{1}{2})]dx=-\frac{25}{48}$$

$$a_{21}=\int_0^{\frac{1}{2}}[w_2^{'}(x)w_1^{'}(x)-w_2(x)w_1(x)]dx+\int_{\frac{1}{2}}^1[w_2^{'}(x)w_1^{'}(x)-w_2(x)w_1(x)]dx$$

$$a_{21}=-\frac{25}{48}$$

$$a_{22}=\int_0^1[w_i^{'}(x)w_2^{'}(x)-w_i(x)w_2(x)]dx$$

$$a_{22}=\int_0^{\frac{1}{2}}[w_2^{'}(x)w_2^{'}(x)-w_2(x)w_2(x)]dx+\int_{\frac{1}{2}}^1[w_2^{'}(x)w_2^{'}(x)-w_2(x)w_2(x)]dx$$

$$a_{22}=\frac{11}{24}$$

同理：

$$b_1=\int_0^1 w_1(x)xdx$$

$$b_1=\int_0^{\frac{1}{2}}w_1(x)xdx+\int_{\frac{1}{2}}^1 w_1(x)xdx$$

$$b_1=1/8$$

$$b_2=\int_0^1 w_2(x)xdx$$

$$b_2=5/48$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{25}{48} \\ -\frac{25}{48} & \frac{11}{24} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{5}{48} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1917.6 \\ 3374.7 \end{bmatrix}$$

第二题：

将旋转弹性杆视为在离心力作用下的两段等长度串联弹簧，试导出弹簧连接点和右端点位移所满足的方程组。

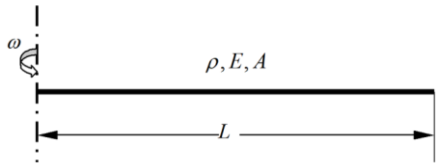


图 2-1 弹性杆图像

解题如下：

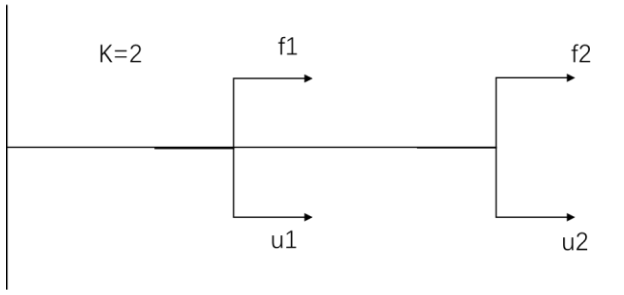


图 2-2 弹性杆假想图及参数

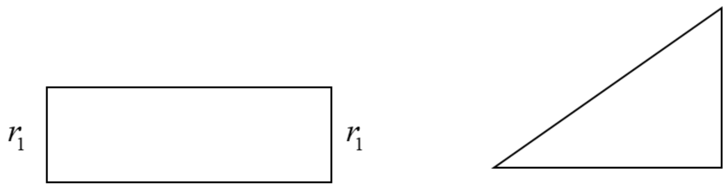
$$k=\frac{EA}{\Delta l}=2$$

$$\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}$$

据分析可知：

根据查阅资料并结合与同学讨论验证，我们可以得到如下的等效方法：

等效力的概念为：等效的力连续，合力相同且合力矩相同。



$f_1=\frac{r_1}{2}$ $f_2=\frac{r_1}{2}$ $f_1=\frac{1}{3}\frac{r_1}{2}$ $f_2=\frac{2}{3}\frac{r_1}{2}$

图 2-3 等效力方法图示

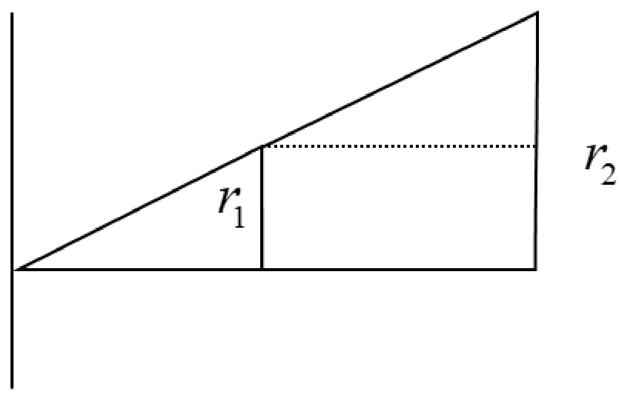


图 2-4 弹性杆受理图

根据上面的等效方法，我们可以知道：

$$r_1 = x_1 + u_1 = \frac{1}{2} + u_1$$
$$r_2 = x_2 + u_2 = 1 + u_2$$
$$f_1 = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * (r_2 - r_1) + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * r_1 = \frac{1}{12} r_2 - \frac{1}{6} r_1$$
$$f_2 = \frac{2}{3} * \frac{1}{4} * (r_2 - r_1) + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * r_1 = \frac{1}{6} r_2 - \frac{1}{12} r_1$$

列出式子为：

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + u_1 \\ 1 + u_2 \end{bmatrix}$$

附录一

第一题代码

```
%% 代码信息
%author：JamesRemington
%E-mail:xuanjiexiao@163.com
%date:2021-04-04
%copyright:2020-2021
%version
clc;%清屏
clear all;%清除数据内存
close all;%清楚所有图片
syms x fx;
Detal_w1 = -1-(x-(1/2))*(-x+1);
fx1 = int(Detal_w1,1/2,1);
Detal_w2 = 1^2-(x-(1/2))^2;
fx2 = int(Detal_w2,1/2,1);

b11 = x^2;
b12 = (-x+1)*x;
fxb1 = int(b11,0,1/2)+int(b12,1/2,1);

b21 = 0;
b22 = (x-1/2)*x;
fxb2 = int(b22,1/2,1);

A=[11/12 -25/48
   -25/48 11/24];
B=[1/8 548]';
X=A\B
```