有限元方法第一次作业

姓　　名：　肖选杀

学　　号：　20210290017

课程名称：　有限元方法

任课教师：　唐国安教授

时　　间：　2021 年 3 月 16 日

第一题：

找一个由电阻构成的电路，用课堂介绍的内容，列出一个求解未知电压的方程组。要求每个同学必须独立设计一个电路图。

解题如下：

设计的电路图如下：

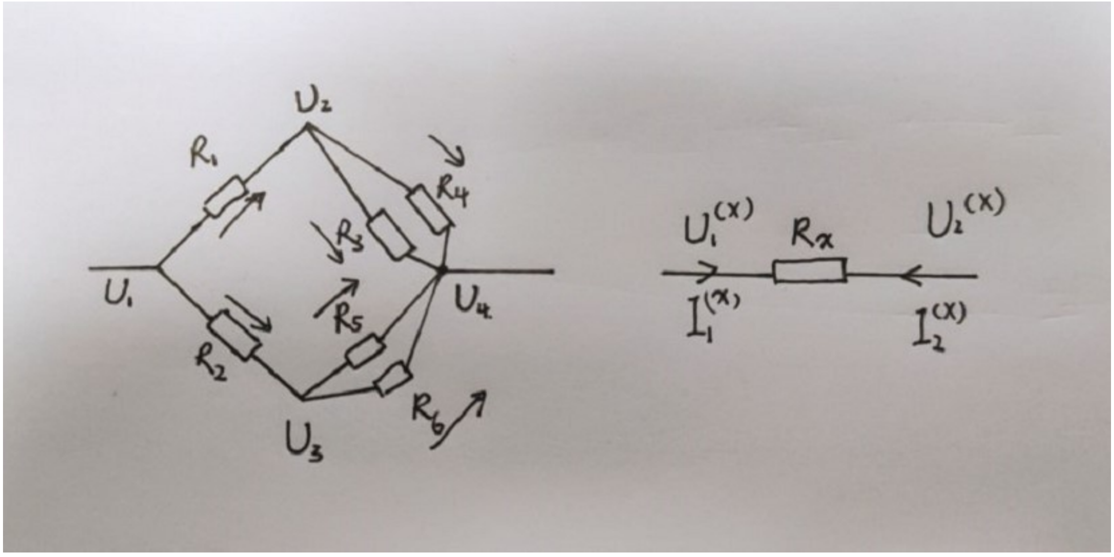

图 1-1 设计的电路图及相关定义

首先，我们定义流入电阻的电流为正，且满足图 1-1 的基本设定。

$$\frac{U}{R}=I=\begin{cases}\dfrac{U_1^{(x)}-U_2^{(x)}}{R_x}=I_1^{(x)}\\ \dfrac{U_2^{(x)}-U_1^{(x)}}{R_x}=I_2^{(x)}\end{cases}$$

化为矩阵形式：

$$\frac{1}{R_x}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1^{(x)}\\ U_2^{(x)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(x)}\\ I_2^{(x)}\end{bmatrix}$$

接下来，我们对电路图中的六个电阻分别进行该划分，我们可以得到：

注意：我们这里直接将每个点位的电压直接按照设定的书写，不再使用上下标同时书写形式。

$$\frac{1}{R_1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(1)}\\ I_2^{(1)}\end{bmatrix}\quad \frac{1}{R_2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(2)}\\ I_2^{(2)}\end{bmatrix}\quad \frac{1}{R_3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_2\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(3)}\\ I_2^{(3)}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_4}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_2\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(4)}\\ I_2^{(4)}\end{bmatrix}\quad \frac{1}{R_5}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(5)}\\ I_2^{(5)}\end{bmatrix}\quad \frac{1}{R_6}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(6)}\\ I_2^{(6)}\end{bmatrix}$$

接下来，开始拓展矩阵，观察可知，共有四个 U，所以拓展为四阶

$$\frac{1}{R_1}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(1)}\\ I_2^{(1)}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad \frac{1}{R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(2)}\\ 0\\ I_2^{(2)}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_3}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ I_1^{(3)}\\ 0\\ I_2^{(3)}\end{bmatrix}\quad \frac{1}{R_4}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ I_1^{(4)}\\ 0\\ I_2^{(4)}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{R_5}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ I_1^{(5)}\\ I_2^{(5)}\end{bmatrix}\quad \frac{1}{R_6}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ I_1^{(6)}\\ I_2^{(6)}\end{bmatrix}$$

将所有的融合在一起可以得到：

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & 0\\ -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & 0 & -\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_5}-\frac{1}{R_6}\\ 0 & -\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_5}-\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1^{(1)}+I_1^{(2)}\\ I_2^{(1)}+I_1^{(3)}+I_1^{(4)}\\ I_2^{(2)}+I_1^{(5)}+I_1^{(6)}\\ I_2^{(3)}+I_2^{(4)}+I_2^{(5)}+I_2^{(6)}\end{bmatrix}$$

根据电路分析可知:

$$\begin{bmatrix}I_1^{(1)}+I_1^{(2)}\\ I_2^{(1)}+I_1^{(3)}+I_1^{(4)}\\ I_2^{(2)}+I_1^{(5)}+I_1^{(6)}\\ I_2^{(3)}+I_2^{(4)}+I_2^{(5)}+I_2^{(6)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1\\ 0\\ 0\\ I_4\end{bmatrix}$$

分析可知，我们消去第 1 和 4 行可知:

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & 0 & -\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_5}-\frac{1}{R_6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

因为U_1和U_4已知，所以可以移到方程的右边化简可知:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & 0\\ 0 & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_2\\ U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\\ 0 & -\frac{1}{R_5}-\frac{1}{R_6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_4\end{bmatrix}$$

第二题

整理热传导有限元方法的计算过程，要求给出详细的解释和推导。

解题如下：

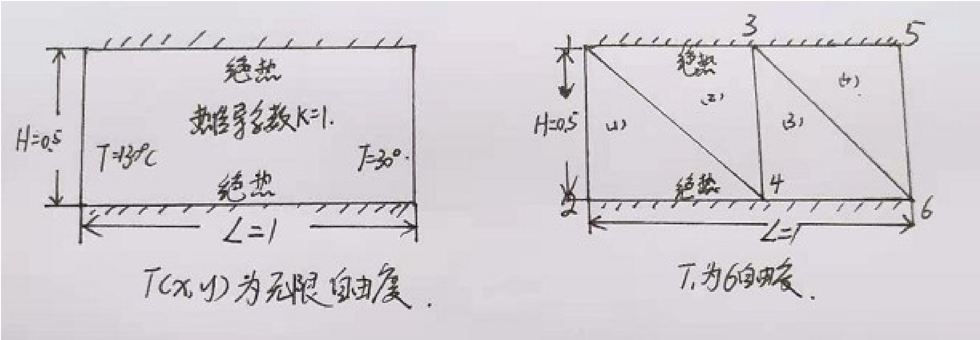

图 2-1 热传导分析

根据题可知，热传导问题最重要的是求解$T(x,y)$，但是 x，y 有无限多个，所以这个问题为无线自由度的问题，采用有限元方法进行求解，类比上面的电阻。首先，我们将整个系统离散化，将每个单元划分为独立的单元，这里我们可以划分为 4 个单元，根据插值定理可知，如果我们能够知道这三个地方的位置的温度，那么我们就可以求解内部的每个点的温度，故而转化为了六自由度的问题，这样去求解就会方便很多。

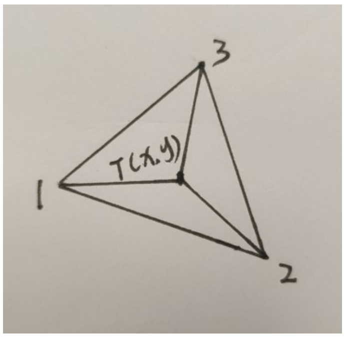

图 2-2 单个单元拆分图

这里我们采用坐标分析法，就如图 2-2 所示的一个图，我们假想为是一个空间的退化的四面体，我们给 1，2，3 和 T 四个点分别定义坐标为：

$$(x_1,y_1,T_1),(x_2,y_2,T_2),(x_3,y_3,T_3),(x,y,T)$$

利用向量法求解空间四面体的体积公式，我们可以得到：

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & T_1\\1 & x_2 & y_2 & T_2\\1 & x_3 & y_3 & T_3\\1 & x & y & T\end{vmatrix}=0$$

这里我们可以按照第四行展开可以得到温度的表达式为：

$$-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & T_1 \\ x_2 & y_2 & T_2 \\ x_3 & y_3 & T_3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & y_1 & T_1 \\ 1 & y_2 & T_2 \\ 1 & y_3 & T_3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & x_1 & T_1 \\ 1 & x_2 & T_2 \\ 1 & x_3 & T_3 \end{vmatrix} + T\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

通过化简上式，我们可以得到，按照第一个行列式的第三列展开：
这里我们假设该行列式的值为2Δ

$$2\Delta = T_1(x_2y_3 - x_3y_2) - T_2(x_1y_3 - x_3y_1) + T_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$

同理，我们将第 2,3,4 个行列式全部按照第一列展开，因为第一列为 1，方便计算。

$$x\left[(y_2T_3 - T_2y_3) - (y_1T_3 - T_1y_3) + (y_1T_2 - T_1y_2)\right]$$
$$y\left[(x_2T_3 - T_2x_3) - (x_1T_3 - T_1x_3) + (x_1T_2 - T_1x_2)\right]$$
$$T\left[(x_2y_3 - y_2x_3) - (x_1y_3 - y_1x_3) + (x_1y_2 - y_1x_2)\right]$$

整理可知：

$$T = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_1 + b_1x + c_1y)T_1 + (a_2 + b_2x + c_2y)T_2 + (a_3 + b_3x + c_3y)T_3\right]$$

对温度 T 求偏导数可知温度的梯度为:

$$\bigtriangledown T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3 \\ c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 \end{pmatrix}$$

对应其中的 a，b，c 为：

$$a_1 = x_2y_3 - y_2x_3, b_1 = y_2 - y_3, c_1 = x_3 - x_2$$
$$a_2 = x_1y_3 - y_1x_3, b_2 = y_1 - y_3, c_2 = x_1 - x_3$$
$$a_3 = x_2y_1 - y_2x_1, b_3 = y_2 - y_1, c_3 = x_2 - x_1$$

接下来求解单元及边界的热流:

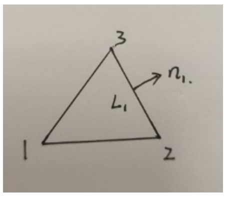

图 2-3 单元边界图

查资料可知，单元内部的温度梯度为：

$$\bigtriangledown T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3 \\ c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 \end{pmatrix}$$

由于单元内部的热流矢量与温度梯度成正比，温度为由高到低的形式存在，故而可知:

$$q = -k\bigtriangledown T$$

单元边界的热流密度等于热流矢量点积方向矢量：

单位边界的热流密度：$q_n = -k \triangledown T \bullet \vec{n}$

流入单元边界 2-3 的热量为：$Q_{23} = L_1 \times k \triangledown T \bullet \vec{n}$

且:

$$
\begin{aligned}
L_1 \times n_{x1} &= -(y_2 - y_3) = -b_1 \\
L_1 \times n_{y1} &= -(x_3 - x_2) = -c_1
\end{aligned}
$$

代入可知：

$$
Q_{23} = -\frac{k}{2\Delta}[(b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3)b_1 + (c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3)c_1]
$$

同理可得：

$$
\begin{aligned}
Q_{13} &= -\frac{k}{2\Delta}[(b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3)b_2 + (c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3)c_2] \\
Q_{12} &= -\frac{k}{2\Delta}[(b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3)b_3 + (c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3)c_3]
\end{aligned}
$$

利用等效力系的分析原理，可知流入节点的热流:

流入边界 23 的热流密度为 q_{23} ，可知流入的热量为: $Q_{23} = q_{23} \times L_1$

可知流入节点 2 和 3 的热量分别为：$\frac{1}{2}Q_{23}$

根据分析可知:

$$
Q_1 = \frac{1}{2}(Q_{12} + Q_{31})
$$

$$
Q_2 = \frac{1}{2}(Q_{23} + Q_{12})
$$

$$
Q_3 = \frac{1}{2}(Q_{31} + Q_{23})
$$

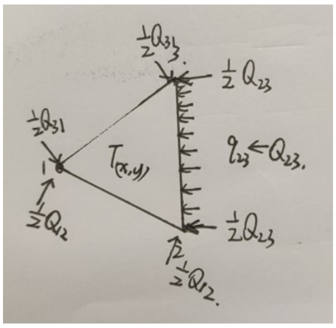

图 2-4 各点热量图

归纳为：

$$Q_{23}=-\frac{k}{2\Delta}[(b_1T_1+b_2T_2+b_3T_3)b_1+(c_1T_1+c_2T_2+c_3T_3)c_1]$$

$$Q_{13}=-\frac{k}{2\Delta}[(b_1T_1+b_2T_2+b_3T_3)b_2+(c_1T_1+c_2T_2+c_3T_3)c_2]$$

$$Q_{12}=-\frac{k}{2\Delta}[(b_1T_1+b_2T_2+b_3T_3)b_3+(c_1T_1+c_2T_2+c_3T_3)c_3]$$

利用上式子的转换，我们可以知道单节点的热量为：

$$\begin{cases} Q_1=\frac{1}{2}(Q_{12}+Q_{31})=\frac{k}{4\Delta}[(b_1b_1+c_1c_1)T_1+(b_1b_2+c_1c_2)T_2+(b_1b_3+c_1c_3)T_3] \\ Q_2=\frac{1}{2}(Q_{23}+Q_{12})=\frac{k}{4\Delta}[(b_2b_1+c_2c_1)T_1+(b_2b_2+c_2c_2)T_2+(b_2b_3+c_2c_3)T_3] \\ Q_3=\frac{1}{2}(Q_{31}+Q_{23})=\frac{k}{4\Delta}[(b_3b_1+c_3c_1)T_1+(b_3b_2+c_3c_2)T_2+(b_3b_3+c_3c_3)T_3] \end{cases}$$

建立单元方程转化为矩阵形式为如下:

$$\frac{k}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_1b_1+c_1c_1 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3 \\ b_2b_1+c_2c_1 & b_2b_2+c_2c_2 & b_2b_3+c_2c_3 \\ b_3b_1+c_3c_1 & b_3b_2+c_3c_2 & b_3b_3+c_3c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

可得对应的单元的方程如下:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} \\ k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1^{(e)} \\ T_2^{(e)} \\ T_3^{(e)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_1^{(e)} \\ Q_2^{(e)} \\ Q_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

因为总共划分了四个单元，所以我们需要对方程进行扩阶

单元一:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & k_{13}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0 & k_{23}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & 0 & k_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ 0 \\ Q_3^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

单元二:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^2 & 0 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^2 & 0 & k_{22}^2 & k_{22}^2 & 0 & 0 \\ k_{31}^2 & 0 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_1^2 \\ 0 \\ Q_3^2 \\ Q_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

单元三:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{3} & k_{12}^{3} & 0 & k_{13}^{3} \\ 0 & 0 & k_{21}^{3} & k_{22}^{3} & 0 & k_{23}^{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{31}^{3} & k_{32}^{3} & 0 & k_{33}^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1^3 \\ Q_2^3 \\ 0 \\ Q_3^3 \end{bmatrix}$$

单元四:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{4} & 0 & k_{12}^{4} & k_{13}^{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^{4} & 0 & k_{22}^{4} & k_{23}^{4} \\ 0 & 0 & k_{31}^{4} & 0 & k_{32}^{4} & k_{33}^{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1^4 \\ 0 \\ Q_3^4 \\ Q_2^4 \end{bmatrix}$$

接下来进行建立整体的方程

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1+k_{11}^2 & k_{11}^1 & k_{13}^2+k_{12}^2 & k_{13}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{2}^1 & 0 & k_{23}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^2 & 0 & k_{33}^2+k_{11}^3+k_{11}^4 & k_{23}^2+k_{12}^3 & k_{13}^4 & k_{13}^3+k_{12}^4 \\ k_{31}^1+k_{21}^2 & k_{32}^1 & k_{32}^2+k_{21}^3 & k_{33}^1+k_{22}^2+k_{22}^3 & 0 & k_{23}^3 \\ 0 & 0 & k_{31}^4 & 0 & k_{33}^4 & k_{32}^4 \\ 0 & 0 & k_{31}^4+k_{21}^4 & k_{32}^3 & k_{23}^4 & k_{33}^3+k_{33}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^1+Q_1^2 \\ Q_2^1 \\ Q_3^2+Q_1^3+Q_1^4 \\ Q_3^1+Q_2^2+Q_2^3 \\ Q_3^4 \\ Q_3^3+Q_2^4 \end{bmatrix}$$

因为节点 3，4 都在绝热边界上，故而热量为 0，可知

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1+k_{11}^2 & k_{11}^1 & k_{13}^2+k_{12}^2 & k_{13}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{2}^1 & 0 & k_{23}^1 & 0 & 0 \\ k_{31}^2 & 0 & k_{33}^2+k_{11}^3+k_{11}^4 & k_{23}^2+k_{12}^3 & k_{13}^4 & k_{13}^3+k_{12}^4 \\ k_{31}^1+k_{21}^2 & k_{32}^1 & k_{32}^2+k_{21}^3 & k_{33}^1+k_{22}^2+k_{22}^3 & 0 & k_{23}^3 \\ 0 & 0 & k_{31}^4 & 0 & k_{33}^4 & k_{32}^4 \\ 0 & 0 & k_{31}^4+k_{21}^4 & k_{32}^3 & k_{23}^4 & k_{33}^3+k_{33}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

据分析知，已知量有 T_1, T_2, T_5, T_6，其余未知，所以同理除去 1,2,5,6 行后，可以得到 T_3, T_4

$$\begin{bmatrix} k_{31}^2 & 0 & k_{33}^2+k_{11}^3+k_{11}^4 & k_{23}^2+k_{12}^3 & k_{13}^4 & k_{13}^3+k_{12}^4 \\ k_{31}^1+k_{21}^2 & k_{32}^1 & k_{32}^2+k_{21}^3 & k_{33}^1+k_{22}^2+k_{22}^3 & 0 & k_{23}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

又因为其中的已知T_1, T_2, T_5, T_6，所以化简为：

$$\begin{bmatrix} k_{33}^2+k_{11}^3+k_{11}^4 & k_{23}^2+k_{12}^3 \\ k_{32}^2+k_{21}^3 & k_{33}^1+k_{22}^2+k_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{31}^2T_1-k_{13}^4T_5-(k_{13}^3+k_{12}^4)T_6 \\ -(k_{31}^1+k_{21}^2)T_1-k_{32}^1T_2-k_{23}^3T_6 \end{bmatrix}$$