

有限元方法第二次作业



姓 名： 肖选杰

学 号： 20210290017

课程名称： 有限元方法

任课教师： 唐国安教授

时 间： 2021 年 3 月 20 日

目录

有限元方法第二次作业.....	1
第一题:	3
第二题:	4
附录一.....	5
附录二.....	5

第一题：

在积分形式的加权残数方程

$$\int_0^1 w(x) \Delta(u) dx = 0$$

中，取权函数

$$w(x) = 1$$

$$w(x) = e^x$$

求近似解。

解题如下：

$$\begin{cases} \Delta(u) = u''(x) + u(x) + x = 0, (0 < x < 1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

推导出：

$$\begin{cases} \Delta(u) = 0, (0 < x < 1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

构造近似解得到：

$$u(x) = x(-2a_1 - 3a_2 + a_1x + a_2x^2)$$

$$\Delta(u) = a_2x^3 + 3a_2 + x + a_1(x^2 - 2x + 2)$$

又因为：

$$\Delta(u) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 w(x) \Delta(u) dx = 0$$

可知：

$$\begin{cases} \int_0^1 1 * a_2x^3 + 3a_2 + x + a_1(x^2 - 2x + 2) dx = 0 \\ \int_0^1 e^x * a_2x^3 + 3a_2 + x + a_1(x^2 - 2x + 2) dx = 0 \end{cases}$$

解出：

$$\begin{cases} \frac{4}{3}a_1 + \frac{7}{4}a_2 = -\frac{1}{2} \\ (-6 + 3e)a_1 + (9 - 2e)a_2 = -1 \\ a_1 = -0.0324 \\ a_2 = -0.2611 \end{cases}$$

解得：

$$u(x) = x(-2a_1 - 3a_2 + a_1x + a_2x^2)$$

$$u(x) = 0.8481x - 0.0324x^2 - 0.2611x^3$$

代码详情见：附录一

第二题：

直接以

$$\min \int_0^1 [\Delta(u)]^2 dx$$

为目标，能不能求得一个近似解？

由上题知：

$$\Delta(u) = a_2x^3 + 3a_2 + x + a_1(x^2 - 2x + 2)$$

首先解出函数：

$$fx = \min \int_0^1 [\Delta(u)]^2 dx$$

$$fx = \frac{(28*a_1^2)}{15} + \frac{(121*a_1*a_2)}{30} + \frac{(7*a_1)}{6} + \frac{(152*a_2^2)}{35} + \frac{(12*a_2)}{5} + \frac{1}{3}$$

然后对 fx 求 a_1, a_2 的偏导数：

$$equ1 = \frac{(56*a_1)}{15} + \frac{(121*a_2)}{30} + \frac{7}{6} = 0$$

$$equ2 = \frac{(121*a_1)}{30} + \frac{(304*a_2)}{35} + \frac{12}{5} = 0$$

解出

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{408}{14543} \\ a_2 = -\frac{3829}{14543} \end{cases}$$

那么可知：

$$\Delta(u) = a_2x^3 + 3a_2 + x + a_1(x^2 - 2x + 2)$$

$$\Delta(u) = \frac{3872*x}{14543} - \frac{408*x^2}{14543} - \frac{3829*x^3}{14543} - \frac{816}{14543}$$

附录一

第一题代码

```
clc;
clear all;
close all;
syms a2 a1 x;
eq1=int(a2*x^3+3*a2*x+x+a1*(x^2-2*x+2),0,1)==0;
eq2=int(exp(x)*(a2*x^3+3*a2*x+x+a1*(x^2-2*x+2)),0,1)==0;
solve(eq1,eq2)
A=[4/3 7/4
    -6+3*exp(1) 9-2*exp(1)];
B=[-1/2 -1]';
X=A\B
a3=-0.0324
a4=-0.2611
b1=-2*a3-3*a4
```

附录二

第二题代码

```
clc;
clear all;
close all;
syms a2 a1 x fx;
Detal_u = a2*x^3+3*a2*x+x+a1*(x^2-2*x+2);
fx = int(Detal_u^2,0,1);
equ1=diff(fx,a1)==0; %求解偏导数，当其为 0 时候，为极小值，当两个都存在，
即为最小值
equ2=diff(fx,a2)==0;
[a1,a2]=solve(equ1,equ2,a1,a2)
```