【第1题】改进热传导问题的有限元计算程序，使之更加通用。在演示算例的基础上，采用补充单元、改变绝对边界位置等方法，设计一个自己的算例进行计算。

自己设计的算例：

将边界宽度 H 设为 1，边界 1-2 温度为 160℃，边界 7-8 温度为 10℃，总共划分为 6 个单元，通过使用改进之后的计算程序可得结果如下。

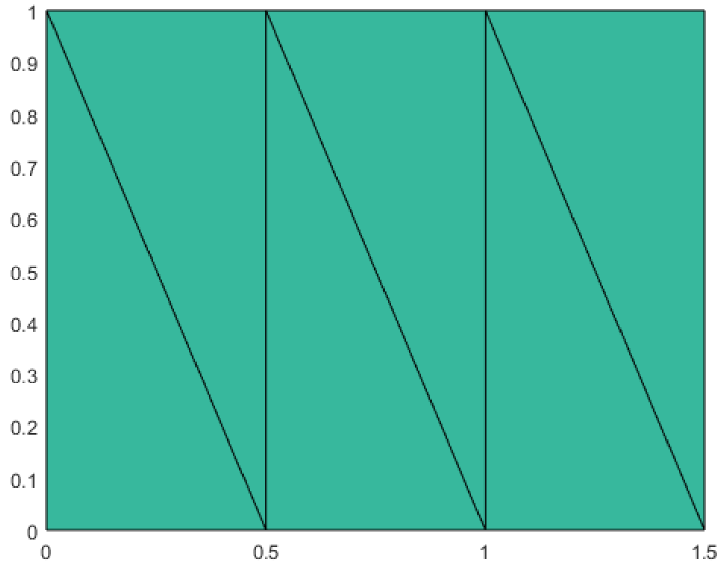
MATLAB 代码：

```
close all; clear all
x=[0 0 0.5 0.5 1 1 1.5 1.5];
y=[1 0 1 0 1 0 1 0];
nod=[1 2 4; 1 4 3; 3 4 6; 3 6 5;5 6 8;5 8 7];
BC1 = [1 160;2 160;7 10;8 10];
hold on
np = size(x,2);
ne = size(nod,1);
K=zeros(np);
for ele=1:ne
    ix=nod(ele,:);
    fill(x(ix),y(ix),0)
    Ke=EMHTRI(1.0,x(ix),y(ix));
    K(ix,ix)=K(ix,ix)+Ke;
end
axis
nfree = setdiff(1:np,BC1(:,1));
A=K(nfree,nfree);
b=-K(nfree,BC1(:,1))*BC1(:,2);
T=A\b
function Ke=EMHTRI(k,x,y)
x=x(:);y=y(:);
b=[y(2)-y(3) y(3)-y(1) y(1)-y(2)];
c=[x(3)-x(2) x(1)-x(3) x(2)-x(1)];
Area=det([1 1 1; x';y'])/2;
Ke=1/4/Area*(b'*b+c'*c);
end
```

计算结果:

```
T =
  110.0000
  110.0000
   60.0000
   60.0000
```

图像：



【第2题】在积分形式的加权残数方程$\int_0^1 w(x)\Delta(\tilde{u})\mathrm{d}x = 0$中，取权函数$w(x) = 1$以及$w(x) = e^x$，求近似解。

解：已知

$$\tilde{u}(x) = x\left(-2a_1 - 3a_2 + a_1 x + a_2 x^2\right)$$

$$\Delta\left(\tilde{u}\right) = a_2 x^3 + 3a_2 x + x + a_1\left(x^2 - 2x+2\right)$$

取加权函数 $\omega(x) = 1, \omega(x) = e^x$

当 $\omega(x) = 1$ 时，$\int_0^1 \omega(x)\Delta\left(\tilde{u}\right)dx = \int_0^1 \Delta\left(\tilde{u}\right)dx = \frac{4}{3}a_1 + \frac{7}{4}a_2 + \frac{1}{2} = 0$

当 $\omega(x) = e^x$ 时，$\int_0^1 \omega(x)\Delta\left(\tilde{u}\right)dx = \int_0^1 e^x\Delta\left(\tilde{u}\right)dx = 0$

将 $\Delta\left(\tilde{u}\right) = a_2 x^3 + 3a_2 x + x + a_1\left(x^2 - 2x+2\right)$ 代入上式求定积分

由于定积分计算略微复杂，使用 MATLAB 计算：

```
clc;clear;
syms x y a1 a2 ;
y=exp(x)*(a2*x^3+3*a2*x+x+a1*(x^2-2*x+2));
int(y,0,1)
```

得到结果为：$9a_2 - 6a_1 + 3ea_1 - 2ea_2 + 1 = 0$

所以就是解方程组来得到 a_1, a_2 数值

$$\begin{cases} \frac{4}{3}a_1 + \frac{7}{4}a_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ 9a_2 - 6a_1 + 3ea_1 - 2ea_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{7}{4} \\ 3e-6 & 9-2e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

通过 MATLAB 求解：

```
clc;clear;
A=[4/3 7/4;3*exp(1)-6 9-2*exp(1)];
B=[-1/2; -1];
X=A\B
```

结果如下：

$a_1 \approx -0.03$

$a_2 \approx -0.26$

将其代入到 $\tilde{u}(x)$ 当中，则近似解为：

$$\tilde{u}(x) = -0.26X^3 - 0.03X^2 + 0.84x$$

【第3题】直接以 $\min \int_0^1 [\Delta(\tilde{u})]^2 dx$ 为目标，能不能求得一个近似解？

解：可以求得近似解，先求定积分 $\int_0^1 \left[\Delta\left(\tilde{u}\right)\right]^2 dx$，再求取得最小值时自变量 a1、a2 的值，最后可获得近似解。

MATLAB 代码：

```
clc;clear;
syms x y a1 a2 ;
y=(a2*x^3+3*a2*x+x+a1*(x^2-2*x+2))^2;
int(y,0,1)
```

结果：

ans =

(28*a1^2)/15 + (121*a1*a2)/30 + (7*a1)/6 + (152*a2^2)/35 + (12*a2)/5 + 1/3

即求：$f\left(a_1,a_2\right)_{\min} = \frac{28}{15}a_1^2 + \frac{121}{30}a_1a_2 + \frac{7}{6}a_1 + \frac{152}{35}a_2^2 + \frac{12}{5}a_2 + \frac{1}{3}$

只需要求解当 f 取得最小值时 a1 和 a2 的值就能求得近似解
使用 MATLAB 求解：

```
clear;
syms a1 a2;
z=(28*a1^2)/15 + (121*a1*a2)/30 + (7*a1)/6 + (152*a2^2)/35 +
(12*a2)/5 + 1/3;
diff(z,a1);
diff(z,a2);
clear;
[a1,a2]=solve('(56*a1)/15 + (121*a2)/30 + 7/6','(121*a1)/30 +
(304*a2)/35 + 12/5','a1','a2')
```

结果：
a1 =

-408/14543

a2 =

-3829/14543

将 a1、a2 的值代入$\tilde{u}\left(x\right)$，可求得：

$$\tilde{u}\left(x\right) = \frac{x}{14543}\left(-3829x^2 - 408x + 12303\right)$$