

# 非线性物理——混沌

Xuan yi, 复旦大学核科学与技术系

**摘要:** 非线性和混沌现象是自然科学的研究热点, 本实验使用蔡氏电路模拟了一个动力系统的各种行为——单吸引子、双吸引子、各种周期的极限环行为。本实验是非线性系统的一个简单实例, 可以帮助学生理解非线性动力系统的行为, 理解复杂系统的学科发展动力。

**关键词:** 蔡氏电路 混沌现象

## 一、引言

非线性是在自然界广泛存在的自然规律, 相对于我们熟悉的线性要复杂得多。随着物理学研究的不断深入, 非线性问题逐渐被重视起来, 现已出现了多个分支, 混沌便是其中之一。混沌现象在生活中广泛存在, 如著名的蝴蝶效应、湍流、昆虫繁衍等。

要直观地演示混沌现象, 采用非线性电路是一个非常好的选择。能产生混沌现象的自治电路至少满足以下三个条件:

- 1): 有一个非线性元件;
- 2): 有一个用于耗散能量的电阻;
- 3): 有三个存储能量的元件。

如图1所示的蔡氏电路 (Chua's circuit) 是一个符合上述条件、非常简洁的非线性电路, 由华裔物理学家蔡绍棠 (Leon O. Chua) 教授于 1983 年提出并实现。近年来, 非线性电路的研究领域有了长足进展, 新的混沌与超混沌电路的理论设计与硬件实现等问题备受人们关注。如 Chen 氏电路、Colpitts 振荡电路、基于 SETMOS 的细胞神经网络结构的蔡氏电路, 都能用于研究混沌现象, 并有不同的应用领域。

## 二、实验目的

了解非线性系统的行为特点, 掌握如何使用蔡氏电路产生这些动力系统的典型行为。

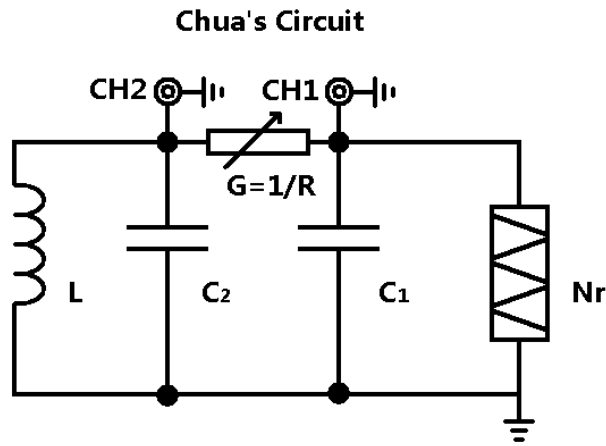


图 1 蔡氏电路

### 三、实验原理

#### 3.1 动力系统的简单分析

要分析一个动力系统的特性，常用的需要在不动点附近做一阶近似，即在不动点附近丢掉向量场的高阶项，将其处理为一个线性系统。

$$\dot{x} = f(x) \rightarrow \dot{x} = J_f(x_*)(x - x_*), x \in \mathbb{R}^n$$

根据 Hartman-Grobman 定理，非线性动力系统在不动点附近和其近似的线性系统是拓扑等价的。这个定理在分析非线性动力系统的局部行为时很有帮助。

对于非线性动力系统的全局行为，目前似乎并没有非常快捷的分析方法，因为全局行为常常涉及到混沌现象。

将动力系统局部近似为一个线性系统(1)后

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

方便起见我们不妨设不动点就在原点。我们通常的做法是将矩阵  $A$  做本征分解

$$A = P^{-1}\Lambda P, y = Px$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \Lambda y$$

这样方程直接解耦，但这并不意味着各个  $y_i$  的行为完全独立，尤其是当本征值为复数的情况。考虑到矩阵是一个实矩阵，复特征值总是成对共轭地出现。我们可以重点分析二维动力系统的行为特征。此外三维以上的非线性性的具有混沌的特性，对于高维的复杂系统而言，直接的动力学分析可能不再是适合的办法。

考虑方程(1)是一个二维系统，则其本征值  $\lambda_1, \lambda_2$  要么都是实数，要么是一对共轭复数。

如果本征值均为实数，则本征值大于零对应着不动点沿着该本征向量方向排斥 (Repell)，本征值小于零对应着不动点沿着该本征向量方向吸引 (Attract)。如果本征值都大于零，则不动点为吸引子 (Attractor)；如果本征值都小于 0，则不动点为排斥子 (Repeller)；如果本征值一个大于零，另一个小于零，则不动点称为鞍点 (Saddle Point)。

如果本征值为一对共轭复数  $\alpha \pm i\beta$ ，则方程的解关于时间演化的部分由  $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$  组成，这表述了一种一边围绕不动点圆周运动，一边向内吸引 ( $\alpha < 0$ ) 或向外排斥 ( $\alpha > 0$ )，分别成为收缩震荡 (decaying oscillations) 和排斥震荡 (growing oscillation)。当  $\alpha = 0$  是，会形成中心 (center) 结构。

当然也存在无法本征值分解的情况，即约当标准型

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}$$

此时不动点称为节点 (node)，同样的本征值小于零和大于零分别对应吸引和排斥。

二阶矩阵的本征值取决于其不变量——即它的迹和行列式

不动点类型	$\lambda_1, \lambda_2$ 的情况	$\text{tr } A$	$\det A$	$\Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A$
吸引子	均为正	$> 0$	$> 0$	$> 0$
排斥子	均为负	$< 0$	$> 0$	$> 0$
鞍点	一正一负		$< 0$	$> 0$
吸引震荡	共轭复数且实部小于零	$< 0$	$> 0$	$< 0$
排斥震荡	共轭复数且实部大于零	$> 0$	$> 0$	$< 0$
中心	共轭复数且实部为零	$= 0$	$> 0$	$< 0$
结点	本征分解为 Jordan 标准型			$= 0$

不动点分类与行列式和迹的关系总结如图2所示，图片来源为维基百科，该图中将吸引和排斥称为汇 (sink) 和源 (source)

## 3.2 Chua 氏电路的分析

Chua 氏电路的动力方程为

$$\begin{cases} C_1 \frac{dU_1}{dt} = G(U_2 - U_1) - g(U_1) \\ C_2 \frac{dU_2}{dt} = G(U_1 - U_2) + I_L \\ L \frac{dI_L}{dt} = -U_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $g$  是非线性负阻的特征导纳

$$g(U) = G_b U + \frac{G_b - G_a}{2} (|U - E| - |U + E|)$$

其中  $G_a = -(7.6 \pm 0.1) \times 10^{-4} \Omega^{-1}$ ,  $G_b = -4.09 \pm (0.06) \times 10^{-4}$ 。这是一个单调递减的分段线性的奇函数，函数图像如图

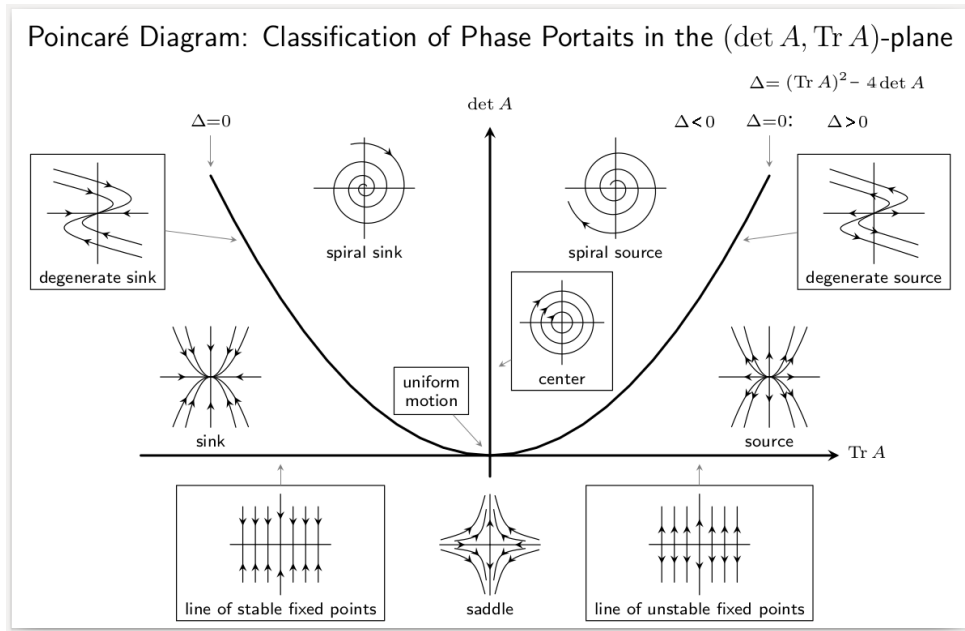


图 2 平面系统的相图分类

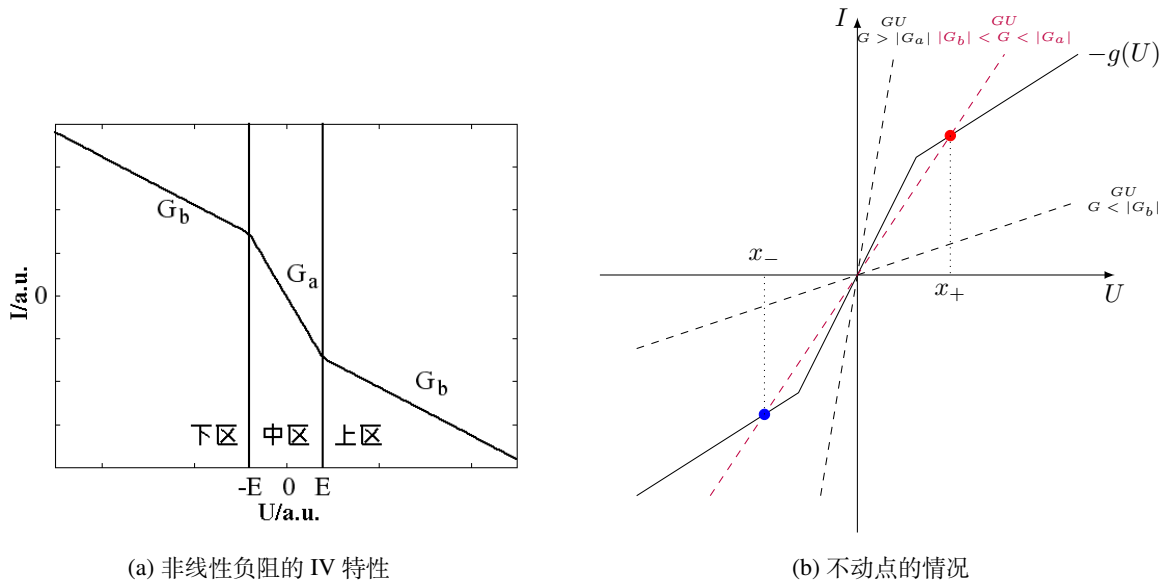


图 3 Two figures.

下面计算该系统的不动点，第三个方程指出，不动点一定使得  $U_2 = 0$

$$\begin{cases} GU_1 + g(U_1) = GU_2 = 0 \\ I_L = -GU_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow GU_1 = -g(U_1)$$

则如图3b,  $G > |G|_a$  或  $G < |G|_b$  时, 只有一个不动点  $x_0 = 0$ ; 当  $|G|_b < |G| < |G|_a$  时, 方程由三个不动点  $x_{\pm}, x_0$ 。

根据  $g$  的对称性系统的 Jacobian 矩阵只有两种情况

$$\begin{bmatrix} \frac{-G+|G_a|}{C_1} & \frac{G}{C_1} \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} \\ & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \text{对应不动点 } x_0, \begin{bmatrix} \frac{-G+|G_b|}{C_1} & \frac{G}{C_1} \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} \\ & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \text{对应不动点 } x_{\pm}$$

将这两个矩阵做本征值分解，即可获得电路系统的简单动力行为。

### 3.3 实际的 Chua 氏电路

在实际的 Chua 电路中，非线性负阻是通过有源电路形成的，当电路中的信号幅度过大的时候，非线性负阻的二极管特性将被破坏，此时非线性负阻将会称为一个正阻，其特性曲线大致如下，本实验也会对其进行简单的测量。

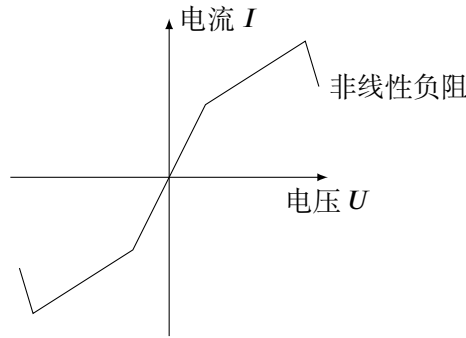


图4 非线性负阻的 IV 特性曲线

当电路中存在的阻抗都是正阻时，这时电路回到常规的电路状态，常规的电路都是常规的吸引子。这意味着非线性负阻失真的两段造成的结果就是在电压  $U_1$  超过非线性负阻正常工作的范围处产生吸引子。

由于实验中没有对元件中的其它参数进行测量，通过 phylab 网站“分形与混沌之-蔡氏电路模拟”的程序中提供的数据作为参考，我计算了可调电阻  $R$  取不同值的条件下的特征向量和特征值，计算结果我放到了Github上<sup>1</sup>。结果显示，总是得到一个实特征值和一对复特征值，实特征值的方向总是和相空间中  $U_2$  方向的单位向量接近，可以大致推断 Chua 氏电路的相图如图5。

在  $|U_1| > U_{失真}$  的范围内，表现为一个一维吸引子和二维吸引震荡点。在  $U_c < |U_1| < U_{失真}$  范围内，表现为一个一维吸引子和二维吸引震荡点。在  $|U_1| < U_c$  的条件下，表现为一个一维排斥子和一个二维吸引震荡点。

当然，实际的 Chua 氏电路是一个三维的动力系统，这样的动力系统具有一些奇特的动力学行为——混沌，这里的分析只能大致反映系统的局部行为。混沌现象至少在三维以上的系统中才存在，而对于动力系统的理论分析，也大多集中于二维和一维系统。

<sup>1</sup>这里是有超链接的。但是考虑到纸质版，还是需要贴一下网址。如果把网址贴在正文中比较难看。[https://github.com/Xuanyiyiren/Fudan-TCPH-fundamental-experiment/tree/main/Nonlinear\\_Physics](https://github.com/Xuanyiyiren/Fudan-TCPH-fundamental-experiment/tree/main/Nonlinear_Physics)

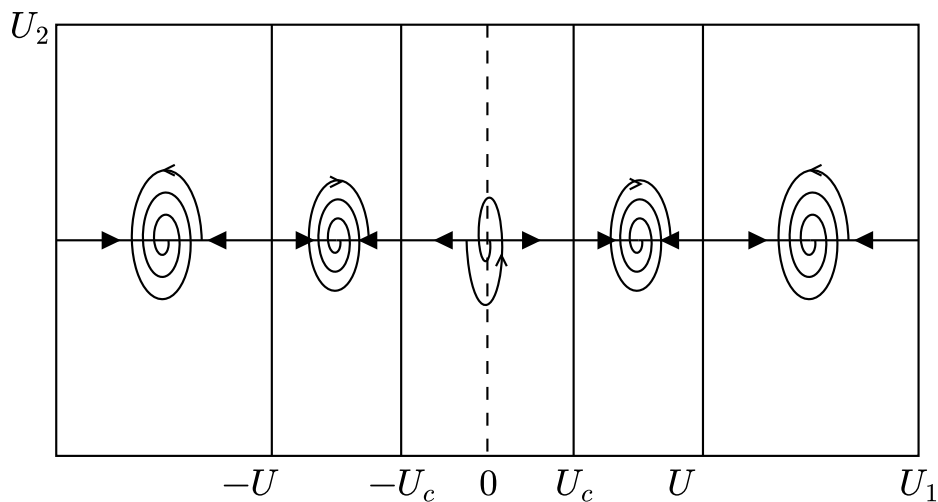


图 5 Chua 氏电路相图

对于高维系统通常采用计算机模拟。对于维度足够多的系统则可以使用统计物理方法。而对于维度超过三维但又不够高的系统，往往只能求助于数值模拟。例如著名的三体系统，以及核物理中的原子核结构问题。

## 四、实验装置

1. FD-NCE-II 非线性电路混沌实验仪 H1831725
2. 数字合成信号发生器 H1405631
3. NDS102U 型数字示波器 NDS102U1725053
4. ZX21 型直流多值电阻器 8910036
5. 导线若干、BNC 同轴电缆若干

## 五、实验过程

### 5.1 观察 Chua 氏电路的非线性现象

搭建 Chua 氏电路1，调节电路的可调电阻，通过对参数  $G$  的调节，实现不同混沌现象的观测。需要观测的现象有：单周期现象、双周期现象、阵发混沌现象、三周期现象、单吸引子、双吸引子

### 5.2 测量非线性负阻的 I-V 特性

搭建如图6所示电路

用信号发生器驱动，分别在 30Hz，300Hz 和 3.3kHz 等频率测量非线性负阻的 I-V 特性，讨论不同频率时 I-V 曲线的特点。

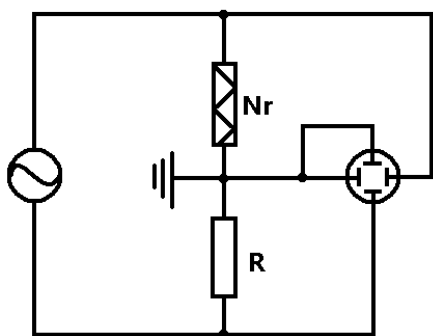


图6 非线性负阻 IV 特性的测量电路

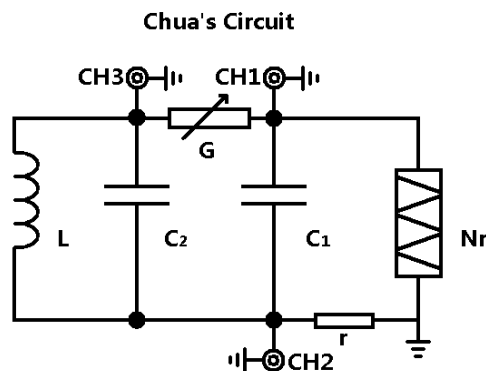


图7 Chua 氏电路中非线性负阻的特性

### 5.3 观察非线性负阻在 Chua 氏电路中的工作状态

然后搭建如图7所示的电路，这只是在 Chua 氏电路中增加了一个内阻，用以测量非线性负阻的电流。在 Chua 氏电路的不同行为中观察非线性内阻的工作状态。

图中有三个示波器通道，但只有一台示波器，即两个通道，使用 CH3 和 CH1 观察 Chua 氏电路的状态，使用 CH1 和 CH2 分析非线性负阻的工作状态。

注意使用示波器读取数据时，通过电压获取的电流的极性（正负号）并在数据处理中予以修正。

## 六、实验结果和分析

### 6.1 Chua 氏电路非线性现象的观察

由于数据较为复杂，而且对于混沌现象进行数据分析难以获得更加有趣的结果，故此处展示的是示波器 XY 模式的扫描结果，横轴代表 CH1，表示  $U_1$  的大小。纵轴代表 CH2，是  $U_2$  的大小。

对 Chua 氏电路非线性行为的结果如图8所示。

图8a是单周期的结果，系统产生了单周期的极限环，此时  $R = 2000 \Omega$ 。

图8b是双周期的结果。系统产生了双周期的极限环，此时  $R = 1980 \Omega$ 。

图8c是四周期的结果，系统产生了四周期的极限环，此时  $R = 1971 \Omega$ 。

图8d是阵发混沌结果，系统处于三周期和四周期的中间状态，具有不稳定的周期性，此时  $R = 1968 \Omega$ 。

图8e是三周期的结果，系统产生了三周期的极限环，此时  $R = 1965 \Omega$ 。

图8f是单吸引子的结果，值得注意的是这不是一个常义的吸引子，而是一个奇异吸引子，不是系统的局部行为。此时  $R = 1957 \Omega$ 。

图8g是双吸引子的结果，这也是一个奇异吸引子，是混沌系统独有的特性。此时  $R = 1946 \Omega$ 。

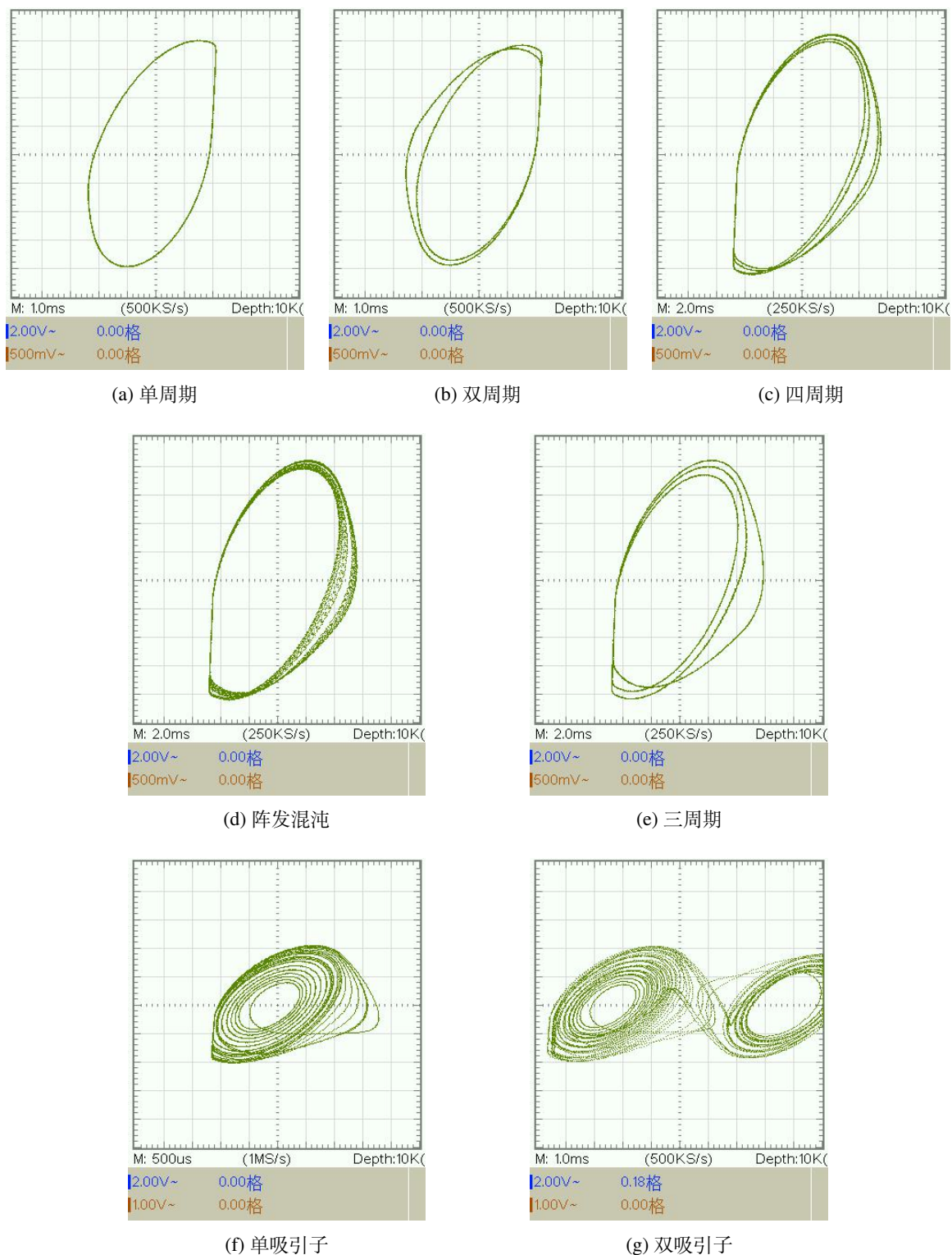


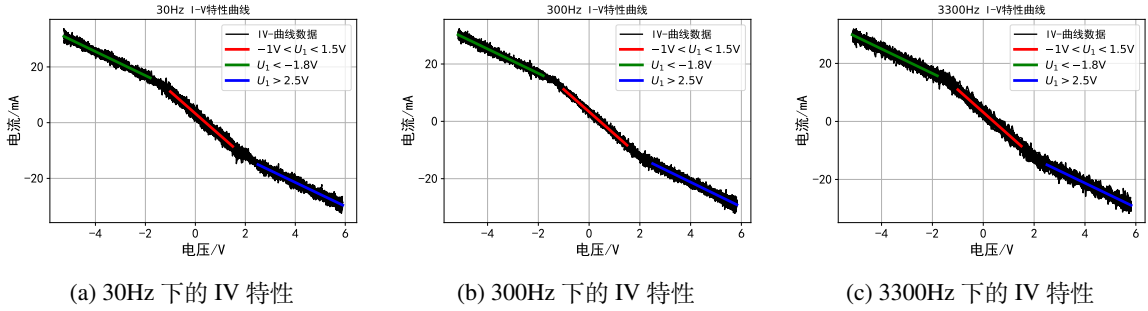
图 8 Chua 氏电路的非线性行为

这七种行为的转化对应着不同类型的分岔，这里全说出来不过是徒增一些名词而已，有兴趣的同学可以去阅读<sup>[1]</sup>或者其它动力系统的文献资料。



6.2 非线性负阻的 IV 特性

使用扫描法测量非线性负阻的 IV 特性，分别在 30, 300, 3300 Hz 的条件下，使用 10 V 的正弦信号在图6中作为激励源信号扫描。然后将得到的数据分段拟合得到非线性负阻的 IV 特性，结果如图。其中分段拟合为了减弱两段交点附近过渡因素的影响，选择拟合的范围避开了不同段的交界点。



拟合的结果如表1所示，可见在不同频率下，非线性负阻的频率特性差异不大。

		斜率 (mA/V)	截距 (mA)	决定系数
30 Hz	负段	$-4.306 \pm 0.012$	$-4.306 \pm 0.012$	0.97
	中间段	$-7.88 \pm 0.05$	$-7.88 \pm 0.05$	0.943
	正段	$-4.291 \pm 0.016$	$-4.291 \pm 0.016$	0.951
300 Hz	负段	$-4.259 \pm 0.012$	$8.22 \pm 0.05$	0.973
	中间段	$-7.81 \pm 0.03$	$3.34 \pm 0.02$	0.981
	正段	$-4.325 \pm 0.015$	$-3.91 \pm 0.07$	0.956
3300 Hz	负段	$-4.218 \pm 0.015$	$8.12 \pm 0.06$	0.954
	中间段	$-7.79 \pm 0.05$	$3.15 \pm 0.04$	0.944
	正段	$-4.218 \pm 0.018$	$-4.39 \pm 0.08$	0.940

表 1 非线性负阻的 IV 特性测量

为了进一步说明不同频率下的结果差异不大，将三种情况下的拟合曲线放在一张图中进行对比，结果如图9所示，发现拟合曲线几乎重合。

取 3300 Hz 的数据计算得到

$$G_a = (-4.218 \pm 0.08) \text{ mA/V}$$
$$G_b = -7.79 \pm 0.05 \text{ mA/V}$$
$$U_c = 1.75 \text{ V}$$

值得强调的是，这种方法是一种较为简单的办法，可以得到不同频率的 IV 幅度响应曲线。如果需要细致地研究非线性负阻的在不同频率下的特性，需要分别测量不同幅度信号的关系并测量信号之间的相位差。

另外，由于信号发生器的信号幅度选择得仍然较小，这里并没有看到非线性负阻在高电压下失真变为正阻的过程，这个过程将在下面看到。

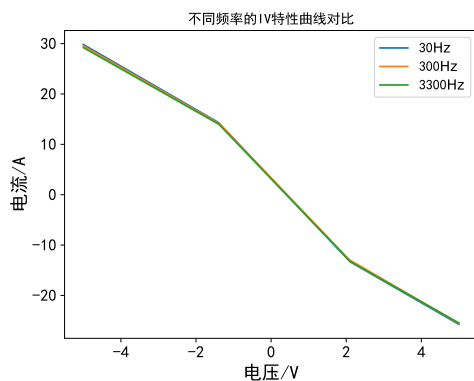


图 9 Chua 氏电路相图

### 6.3 非线性负阻在 Chua 氏电路中的工作状态

观测非线性负阻的在 Chua 氏电路中的两端电压和电流行为，绘制 IV 曲线得到结果如图10所示。

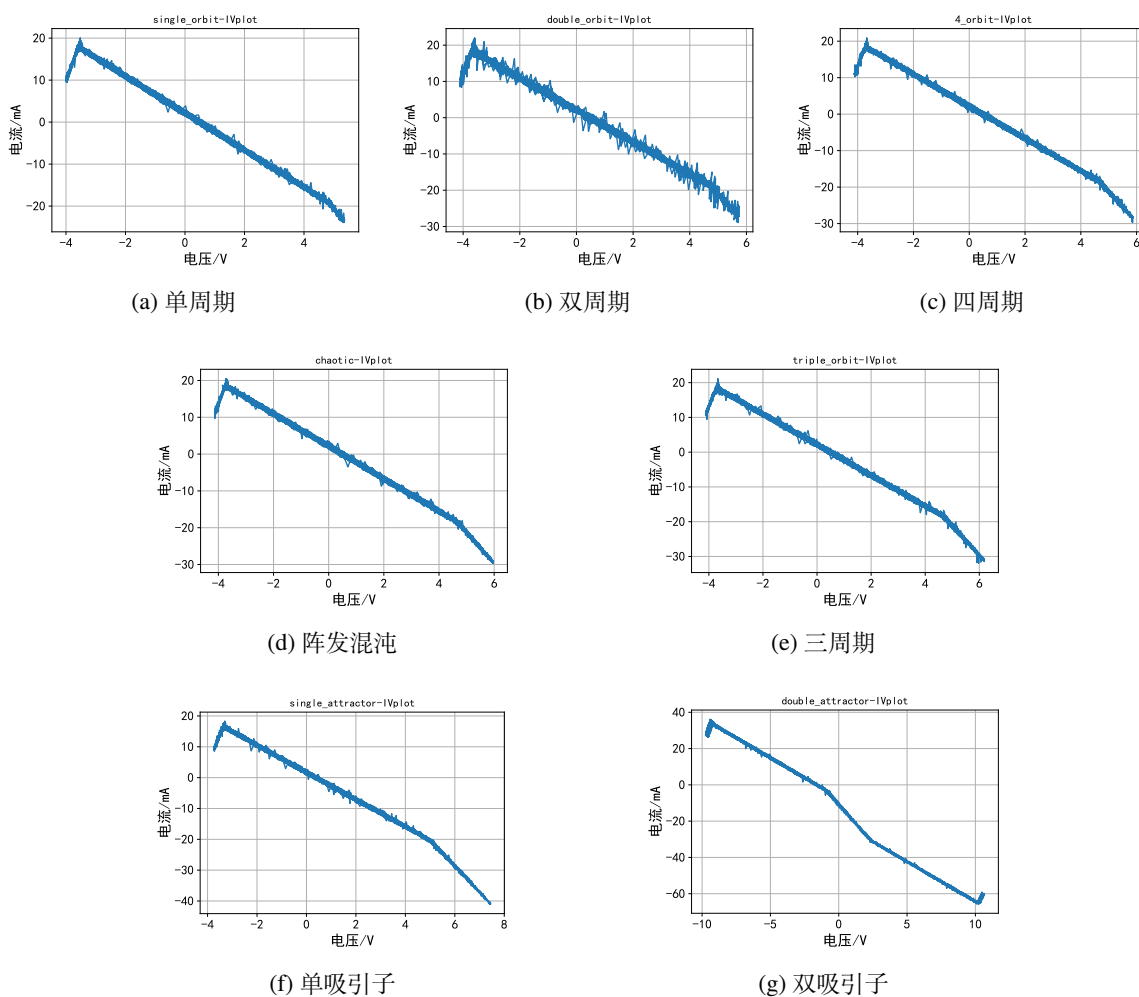


图 10 非线性负阻在 Chua 氏电路中的行为

此时示波器采用了交流耦合模式，导致 IV 曲线存在一定的偏置。此图可以配合

图8以及图5一起，观察非线性负阻是如何引起整个电路的非线性行为的。

图10a是电路单周期行为的结果，非线性负阻的主要集中在  $-U_{失真} < U < -U_C$  之间，此时  $G$  调制的导纳较小， $x_1$  不动点应该十分靠近  $-U_{失真}$ ，图5中  $-U_{失真} < U < -U_C$  段此时应该是震荡排斥子。当  $U_1$  处于  $-U_{失真} < U < -U_C$  之间时，震荡排斥子将使相点做圆周运动并向外发散，原本相点应当不停的发散到无穷大，但这种行为是违背了基本的物理学定律，在一个真实的物理动力系统种不会发生这种行为。在 Chua 氏电路种，当发散到另外两个区域时，又迅速被推回原区域。当参数适合时，可以产生稳定的极限环。双周期、四周期、阵法混沌以及三周期的产生机理都和此时类似。如图10b、图10c、图10d图10e所示。虽然我们能够简单肥西这些奇特的现象的产生机理，但是我们仍然很难解释这里的周期分岔以及阵法混沌现象，这就是混沌和非线性科学所研究的问题之一。

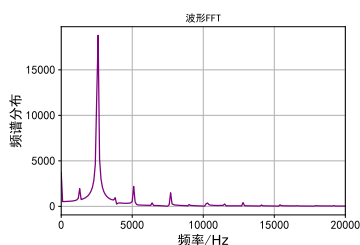
图8f是单吸引子的结果，这是一个奇异吸引子。它相较于前面的极限环，更多的依赖于  $-U_{失真} < U < -U_C$  段和  $-U_C < U < U_C$  段，当相点发散到  $-U_C < U < U_C$  段时，从图5中可以发现，这里是一个震荡吸引子和一个一维排斥子，当相点发散运动到这一段时，会表现出震荡吸引子的特点，即8f中左侧的小突起。但由于一维排斥子的作用，相点只能做部分的震荡吸引子行为后，被一维排斥子推回到  $-U_{失真} < U < -U_C$  段。总体行为表现为一个奇异吸引子。

图8g是双吸引子的结果，可以发现的是此时几乎涉及了非线性负阻的所有区域，其中主要发挥作用的也是非失真区域。和前面的单吸引子类似，但此时相点发散到  $-U_C < U < U_C$  段时，会被排斥到另一端，进而产生了双吸引子的行为。

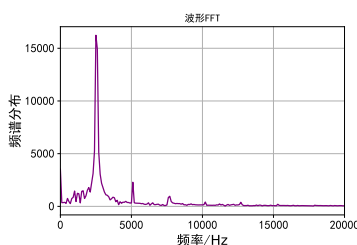
## 6.4 非线性负阻在 Chua 氏电路中的频率

本节分析了非线性负阻在 Chua 氏电路中的电压波形进行了频谱 FFT 分析，主要目的是说明非线性负阻的频谱主要分布在 3 kHz 附近，说明我们第5.2步的频率选择的有效性。

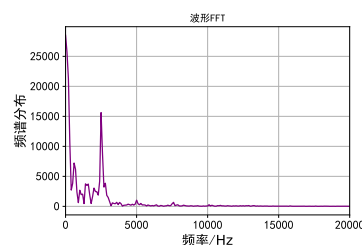
考虑将所有情况都展示出来比较冗杂，我们特定展示了三个情况下的频谱如下。



(a) 双周期下非线性负阻的 FFT



(b) 阵法混沌下非线性负阻的 FFT



(c) 双吸引子下非线性负阻的 FFT

---

## 七、实验结论

1. 通过 Chua 氏电路以及示波器，观察力 Chua 氏电路的非线性行为并采集了轨迹曲线；
2. 测量了非线性负阻的 IV 特性曲线，发现非线性负阻的 IV 特性和频率几乎无关，在 3300 Hz 的条件下测量结果为

$$G_a = (-4.218 \pm 0.08) \text{ mA/V}$$

$$G_b = -7.79 \pm 0.05 \text{ mA/V}$$

$$U_c = 1.75 \text{ V}$$

3. 通过示波器观察非线性负阻在 Chua 氏电路中的行为，并结合此分析了 Chua 氏电路各种非线性行为的机制。

## 八、参考文献

- [1] PAJEVIC S. Nonlinear dynamics and chaos: Steven h. strogatz, addison-wesley, reading, massachusetts, 1994[M]. Springer, 1995.
- [2] KENNEDY M P. Three steps to chaos. ii. a chua's circuit primer[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1993, 40(10): 657-674.

注：由于本文中涉及一些彩色图例标记以及一些超链接，黑白打印的展示效果可能较差，我已经将报告的电子版发送到老师的邮箱了leyk@fudan.edu.cn。