快速傅里叶变换和光学传递函数

中期报告？

王动，张轩

复旦大学物理学系

2023 年 11 月 5 日

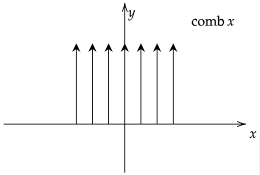
1. **采样**
2. 离散傅里叶变换 DFT
3. 快速傅里叶变换 FFT
4. 参考文献

疏状函数

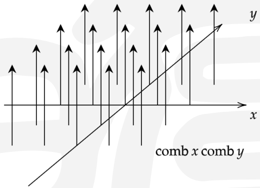
为了能让计算机实际处理，需要对连续的信号进行离散化，即采样，我们的采用通过梳状函数实现

$$\mathrm{comb}(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n)$$

对于二维的信号，则使用 $\mathrm{comb}\,x\,\mathrm{comb}\,y$ 进行采样



(a) 一维梳状函数



(b) 二维梳状函数

图 1: 疏状函数

疏状函数的傅里叶变换

高维傅里叶变换

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}x, f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}\xi$$

$\operatorname{comb} x$ 的 (一维) 傅里叶变换

$$\mathcal{F}(\operatorname{comb} x)(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n)\mathrm{e}^{-2\pi\mathbf{i}x\xi}\cdot\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\pi\mathbf{i}n\xi}$$

$$\operatorname{comb} x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\pi\mathbf{i}nx}$$

$$\mathcal{F}(\operatorname{comb} x)(\xi)=\operatorname{comb}\xi$$

二维傅里叶变换

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{comb}\frac{x}{X}\operatorname{comb}\frac{y}{Y}\right)(\xi,\eta)=XY\operatorname{comb}(X\xi)\operatorname{comb}(Y\eta) \quad (1)$$

函数采样

考虑对函数 $g(x,y)$ 采样

$$g_s(x,y) = g(x,y)\cdot \operatorname{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) \tag{2}$$

$\operatorname{comb}\left(\frac{x}{X}\right)$ 是间隔为 X 的采样
我们来看看它的傅里叶频谱变成了什么

$$G_s = \mathcal{F}\left(g\cdot \operatorname{comb}\frac{x}{X}\operatorname{comb}\frac{y}{Y}\right) = G * \mathcal{F}\left(\operatorname{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\operatorname{comb}\left(\tfrac{x}{X}\right)\operatorname{comb}\left(\tfrac{y}{Y}\right)\right)(\xi,\eta) &= XY\operatorname{comb}X\xi\operatorname{comb}Y\eta \\ &= \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\xi-\tfrac{m}{X}\right)\delta\left(\eta-\tfrac{n}{Y}\right)\end{aligned}$$

得到结论

$$G_s(\xi,\eta) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} G\left(\xi-\frac{n}{X},\eta-\frac{m}{Y}\right) \tag{3}$$

函数采样

如果 $G(\xi,\eta)$ 在一定远处恒为 0，则 G_s 是由一些“频岛”组成

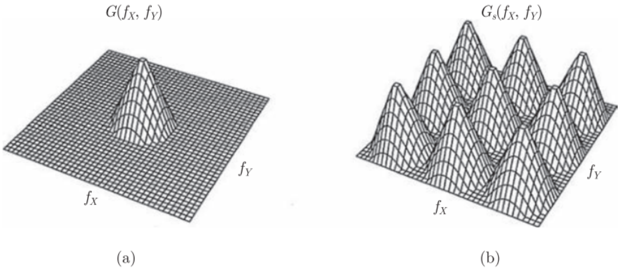


图 2: G 和 G_s 的关系

函数采样

设 G 在一个 ξ 方向宽 B_X，η 方向宽 B_Y 的矩形上不为零，满足这种条件的函数 g 称为限带函数，则只要采样频率 X 足够小，满足 $X \leqslant \frac{1}{B_X}, Y \leqslant \frac{1}{B_Y}$，则频岛之间分得足够开，只需取得中间的频岛就可以恢复原来的函数 (的频谱)

$$G(\xi,\eta) = G_s(\xi,\eta) \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{B_X}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{B_Y}\right) \tag{4}$$

满足 $X = \frac{1}{B_X}, Y = \frac{1}{B_Y}$ 的采样称为以奎斯特 (Nyquist) 频率采样，函数的带宽 (频带宽度) 决定了采样的频率

注：

$$\operatorname{rect} x = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

函数取样

对式子(4)做傅里叶反变换，得到

$$g = g_s * \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{B_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{B_Y}\right)\right)$$

$$g(x,y) = B_X B_Y XY \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{n}{B_X},\frac{m}{B_Y}\right)\cdot$$

$$\mathrm{sinc}\left[B_X\left(x-\frac{m}{B_X}\right)\right]\mathrm{sinc}\left[B_Y\left(y-\frac{n}{B_Y}\right)\right]$$

其中

$$\mathrm{sinc}\, x \triangleq \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

DFT

傅里叶变换是一个广义积分，这对计算机计算傅里叶变换造成了阻碍，广义积分对计算机而言实现比较困难，我们只能对采样函数做傅里叶变换，而且对函数还有一定的要求，要求函数(近似)是有限区间上非零的限带函数。

$$F_s(\xi,\eta)=\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\cdot \mathrm{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{\Delta y}\right)\mathrm{e}^{-2\pi\mathbf{i}(\xi x+\eta y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

直接计算得到

$$F_s(\xi,\eta)=\Delta x\Delta y\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} f(m\Delta x,n\Delta y)\exp(-2\pi\mathbf{i}(m\xi\Delta x+n\eta\Delta y))$$

DFT

设 f 是只在有限区域上非零的函数，不妨设 f 在 $[0, L_X], [0, L_Y]$ 上非零

$$F_s(\xi, \eta) = \Delta x \Delta y \sum_{m=0}^{N_X-1} \sum_{n=0}^{N_Y-1} f(m\Delta x, n\Delta y) \exp(-2\pi \mathbf{i}(m\xi\Delta x + n\eta\Delta y))$$

$$N_X = \frac{L_X}{\Delta x}, N_Y = \frac{L_Y}{\Delta y}$$

对 F_s 也需要做采样，计算机处理不得一点连续的东西，设采样间隔是 $\Delta\xi = \frac{B_X}{N_X}, \Delta\eta = \frac{B_Y}{N_Y}$

$$F(p\Delta\xi, q\Delta\eta) = \Delta x \Delta y \sum_{m=0}^{N_X-1} \sum_{n=0}^{N_Y-1} f(m\Delta x, n\Delta y) \cdot \exp(-2\pi \mathbf{i}(mp\Delta x\Delta\xi + n\eta\Delta y\Delta\eta)) \tag{5}$$

DFT

以奎斯特频率采样

$$\Delta x = \frac{1}{B_X}, \Delta y = \frac{1}{B_Y}$$

$$\Rightarrow \Delta\xi\Delta x = \frac{1}{N_X}, \Delta\eta\Delta y = \frac{1}{N_Y}, L_X B_X = N_X, L_Y B_Y = N_Y$$

则式(5)化为

$$F\left(\frac{p}{L_X}, \frac{q}{L_Y}\right) = \frac{1}{B_X B_Y} \sum_{m=0}^{N_X-1} \sum_{n=0}^{N_Y-1} f\left(\frac{m}{B_X}, \frac{n}{B_Y}\right) \cdot \exp\left(-2\pi\mathbf{i}\left(\frac{mp}{N_X} + \frac{n\eta}{N_Y}\right)\right) \tag{6}$$

傅里叶矩阵

取 $\omega_X = \mathrm{e}^{2\pi \mathbf{i}/N_X}, \omega_Y = \mathrm{e}^{2\pi \mathbf{i}/N_Y}$，取 $f_{mn} = f\left(\frac{m}{B_X}, \frac{n}{B_Y}\right), F_{pq} = F\left(\frac{p}{L_X}, \frac{q}{L_Y}\right)$，则式(5)继续化为

$$F_{pq} = \frac{1}{B_X B_Y} \sum_{m=0}^{N_X-1} \sum_{n=1}^{N_Y-1} f_{mn} \omega_X^{mp} \omega_Y^{nq}$$

不难发现求和部分是三矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \omega_X^{(N_X-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{00} & \cdots & f_{0,N_Y-1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{N_X-1,0} & \cdots & f_{N_X-1,N_Y-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \omega_Y^{(N_Y-1)^2} \end{bmatrix}$$

傅里叶矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \omega_X^{(N_X-1)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{00} & \cdots & f_{0,N_Y-1}\\ \vdots & & \vdots \\ f_{N_X-1,0} & \cdots & f_{N_X-1,N_Y-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \omega_Y^{(N_Y-1)^2}\end{bmatrix}$$

其中两边的矩阵称为傅里叶矩阵 (上面为了能写在一行省略了很多)

$$F_X \triangleq \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega_X & \omega_X^2 & \cdots & \omega_X^{N_X-1}\\ 1 & \omega_X^2 & \omega_X^4 & \cdots & \omega_X^{2(N_X-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega_X^{N_X-1} & \omega_X^{2(N_X-1)} & \cdots & \omega_X^{(N_X-1)^2}\end{bmatrix}, F_Y\text{同}$$

傅里叶矩阵

需要注意的是 F_X 是 $N_X \times N_X$ 的，而 F_Y 是 $N_Y \times N_Y$，傅里叶矩阵有一些非常好的性质

(1)F_X 是对称矩阵

(2)F_X 是可逆矩阵，其逆阵如下，其中 $\overline{\omega}_X = \mathrm{e}^{-2\pi\mathbf{i}/N_X}$(就是共轭复数)

$$F_X^{-1} = \frac{1}{N_X}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \overline{\omega}_X & \dots & \overline{\omega}_X^{N_X-1} \\ 1 & \overline{\omega}_X^2 & \dots & \overline{\omega}_X^{2(N_X-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega}_X^{N_X-1} & \dots & \overline{\omega}_X^{(N_X-1)^2} \end{bmatrix} \triangleq \frac{1}{N_X} F_X^*$$

DFT 的最终形式

虽然这个对称得太美了，但是有必要将系数处理一下变成一个略微不对称的形式，我们把 F_{pq} 整体自乘 $B_X B_Y$

$$[F_{pq}] = F_X[f_{mn}]F_Y \tag{7}$$

$$[f_{mn}] = \frac{1}{N_X N_Y} F_X^*[F_{pq}]F_Y^* \tag{8}$$

这就是二维 DFT，最终形式中不包含函数的带宽和实际非零区域的长度，只包含采样点个数以及原函数和相函数的采样点

一维 DFT

我们暂时回到一维的情形，其 DFT 为

$$[F_p] = \hat{F}[f_n] \tag{9}$$

$$[f_n] = \frac{1}{N}\hat{F}^*[F_p] \tag{10}$$

其中 $\hat{F}$ 是也是傅里叶矩阵，$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathbf{i}/N}$，$N$ 是采样点数

$$\hat{F} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \tag{11}$$

一维 DFT

为了实际的计算 DFT，我们需要做的就是计算傅里叶矩阵乘一个列向量，一般要做这样一个计算，复杂度是 $O\left(n^2\right)$，FFT 是一种快速实现一维 DFT 和逆 DFT(IDFT) 的算法，它的复杂度为 $O(n \ln n)$

FFT 针对长度 (采样点数目) 为 2^n 的 DFT，如果长度不满足这个要求，则填充 0 到适合的 2^n 即可。

一维 DFT

根据(9)以及(11)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}$$

从中提取出 F_p 的表达式

$$F_p = \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cdot (\omega^p)^i$$

$$f(x) \stackrel{\triangle}{=\!=} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cdot x^i$$

F_p 就是 ω^p 在多项式 $f(x)$ 处的值

FFT

多项式 p 有两种表示方法，第一种方法是写出各阶项系数，第二种方法是写出在 $\deg p$ 个不同的点处的值，范德蒙行列式的规律告诉我们，两种表示方法是可以相互导出的。

F_p 可是视为以 f_i 为系数的多项式在 $\{\omega_N^p\}_{p=0}^{N-1}$ 点值表示，从系数表示到点值表示，这就是 DFT；而 IDFT 就是倒过来，从点值表示求出系数表示。好在倒过来的过程只需要对 ω_N 取共轭后，进行一次 DFT 后再除以 N。

FFT

FFT 充分利用了这个性质，同时还注意到 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathbf{i}/N}$，$\{\omega^p\}_{p=0}^{N-1}$ 恰好按复数乘法构成了一个 N 阶循环群，它均匀的分布在单位圆上

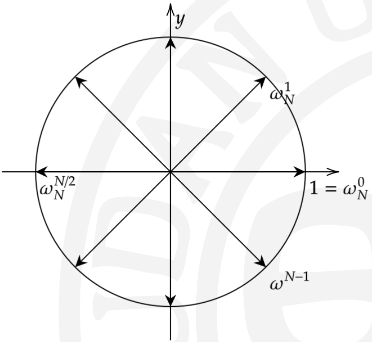


图 3: 多项式的插值点

分治递归法

以 $N=8=2^3$ 为特例

$$f(x)=f_0+f_1x+\ldots+f_7x^7$$

为了计算 $f(x)$，可以考虑将其按奇偶次序分组

$$\begin{aligned}f(x)&=f_0+f_2x^2+f_4x^4+f_6x^6+x\left(f_1+f_3x^2+f_5x^4+f_7x^6\right)\\G(x)&=f_0+f_2x+f_4x^2+f_6x^3\\H(x)&=f_1+f_3x+f_5x^2+f_7x^3\\f(x)&=G\left(x^2\right)+xH\left(x^2\right)\end{aligned}$$

当 $x=\omega_N^p$ 时

$$F_p=G\left(\omega_N^{2p}\right)+\omega_N^pH\left(\omega_N^{2p}\right)$$

分治递归法

接下来就是 $\{\omega_N^p\}_{p=0}^{N-1}$ 的神奇性质了

第一个巧妙之处在于我们只需要计算 $F_p, p = 0, \ldots, N/2 - 1$ 就够了，$\omega_N^{p+\frac{N}{2}} = -\omega_N^p$

$$F_{p+N/2} = G\left(\omega_N^{2p}\right) - \omega^p H\left(\omega_N^{2p}\right)$$

分治递归法

第二个巧妙之处在于 $G\left(\omega_N^{2p}\right), H\left(\omega_N^{2p}\right)$ 在 $p=0,\ldots,N/2$ 时又可以视为 f_0, f_2, f_4, f_6 和 f_1, f_3, f_5, f_7 的 DFT

$$\omega_{N/2} = \omega_N^2 \tag{12}$$

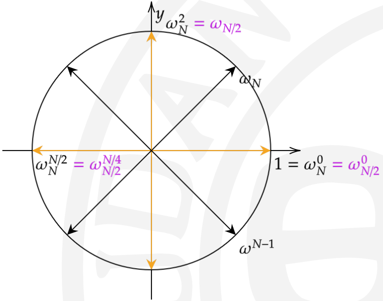


图 4: 插值点的递归性质

分治递归法

$$G\left(\omega_N^{2p}\right)=G\left(\left(\omega^2\right)^p\right)=G\left(\omega_{N/2}^p\right),H\left(\omega_N^{2p}\right)=H\left(\omega_{N/2}^p\right)$$

取 $G_p \xlongequal{\triangle} G\left(\omega_{N/2}^p\right),H_p \xlongequal{\triangle} H\left(\omega_{N/2}^p\right)$，则有

$$F_p=G_p+\omega_N^p H_p \tag{13}$$

$$F_{p+N/2}=G_p-\omega_N^p H_p \tag{14}$$

于是要实现长度为 N 的 DFT，只需要调用 $N/2$ 的 DFT 就足够了，这也是为什么要求 $N=2^n$ 的原因，这样我们可以一直调用下去直到 $N=1$，此时的 DFT 和 IDFT 都是恒等变换，将一个数变成它自己

分治递归法

仍然以 $N=8$ 为例，实现 $N=8$ 的 DFT，只需调用 $N=4$ 的 DFT

$$[f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7] \qquad \omega_8 = e^{-\frac{2\pi i}{8}}$$

$$\downarrow$$

$$[f_0, f_2, f_4, f_6, f_1, f_3, f_5, f_7]$$

$$[f_0, f_2, f_4, f_6] \xrightarrow{\text{DFT}} [G_0, G_1, G_2, G_3]$$

$$[f_1, f_3, f_5, f_7] \xrightarrow{\text{DFT}} [H_0, H_1, H_2, H_3]$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= G_0 + H_0 & F_4 &= G_0 - H_0 \\
F_1 &= G_1 + \omega_8 H_1 & F_5 &= G_1 - \omega_4 H_1 \\
F_2 &= G_2 + \omega_8^2 H_2 & F_6 &= G_2 - \omega_8^2 H_2 \\
F_3 &= G_3 + \omega_8^3 H_3 & F_7 &= G_3 - \omega_8^3 H_3
\end{aligned}$$

图 5: FFT 的算法图解

1. 采样
2. 离散傅里叶变换 DFT
3. 快速傅里叶变换 FFT
4. **参考文献**

[1] OI Wiki Team.
快速傅里叶变换.

[2] 古德曼.
傅里叶光学导论 = *Introduction to fourier optics.*

[3] 吕乃光.
傅里叶光学.
第 2 版 edition.

Thanks!