e 指数和三角函数

Xuanyi

2023 年 2 月 25 日

本文需要对复数域上的幂级数理论、绝对收敛级数的 Cauchy 乘积、幂级数的连续性、逐项可微性有一定了解

1 主流定义

Definition 1.1. $\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Proof：需要说明这三个函数的等号右边对于任意 $z \in \mathbb{C}$ 都收敛，我们考虑证明它们绝对收敛。先考虑如下级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = 1 + |z| + \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{6} + \dots$$

取 $a_n = \frac{|z|^n}{n!}$，$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{|z|^n}{n!} \frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} = \frac{1}{|z|}(1+n)$，则根据正项级数理论，可知级数 a_n 收敛，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ 绝对收敛，则根据收敛级数的结合性，下面这个级数也收敛

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|^{2n}}{(2n)!} + \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

取 $b_n = \frac{|z|^{2n}}{(2n)!} + \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$c_n = \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}, d_n = \frac{|z|^{2n}}{(2n)!}$，则 $c_n, d_n < b_n$，根据比较判别法，可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ 收敛。即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ 绝对收敛。 □

Proposition 1.1. $\exp, \sin, \cos$ 都是解析函数

Proposition 1.2. $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
这三个函数如果自变量取自 $\mathbb{R}$，则因变量也是 $\mathbb{R}$ 中的数

Proof：根据 $\mathbb{R}$ 的完备性 □

Theorem 1.3. 关于 exp 为什么叫指数：

$$\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$$

Proof：考虑绝对收敛级数的 Cauchy 乘积

$$\begin{aligned}
\exp z_1 \cdot \exp z_2 &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z_1^p}{p!} \cdot \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z_2^q}{q!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=n} \frac{z_1^p}{p!} \cdot \frac{z_2^q}{q!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!q!} \frac{z_1^p z_2^{n-p}}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z_1^p z_2^{n-p}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} \\
&= \exp(z_1+z_2)
\end{aligned}$$

□

这个性质也是为什么许多时候 $\exp z$ 被记作 $\mathrm{e}^z, \mathrm{e} = \mathrm{e}^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ 也是恰好是数学分析中验证过的自然常数。我们接下来将主要采取 e^z 的记法，更多地在 z 是复杂表达式时采用 $\exp z$ 。

Proposition 1.4. 欧拉公式 *(广义版)*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \sin z + \mathrm{i} \cos z$$

Proof：$\mathrm{i}^0 = 1, \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}, \mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \mathrm{i}^4 = 1 \Rightarrow \mathrm{i}^{4n} = 1$，进一步得到

$$\mathrm{i}^{4n} = 1, \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}, \mathrm{i}^{4n+2} = -1, \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \mathrm{i}^{2n} = (-1)^n, \mathrm{i}^{2n+1} = (-1)^n \mathrm{i}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\mathrm{i}z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(\mathrm{i}z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos z + \mathrm{i} \sin z
\end{aligned}$$

□

Corollary 1.5. 三个函数的关系

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

2 经典性质

Proposition 2.1. 三角函数的奇偶性
*(1)*sin 是奇函数，即 $\sin(-z) = -\sin z$
*(2)*cos 是偶函数，即 $\cos(-z) = \cos z$

Proof：

$$\sin(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1) z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin z$$

$$\cos(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$$

□

Proposition 2.2. 经典三角恒等式

(1)$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1$

(2)$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

(3)$\sin^2 z+\sin^2 z=1$

Proof：我还是考虑 Cauchy 乘积证法，如果仅考虑实数域和复数域的话利用会简单很多

(1) 考虑 Cauchy 乘积证法，这种证法适用于所有完备赋范数域

$$\begin{aligned}
\sin(z_1+z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z_1+z_2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}z_1^k z_2^{2n+1-k}}{(2n+1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}z_1^k z_2^{2n+1-k}}{(2n+1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{z_1^k z_2^{2n+1-k}}{k!(2n+1-k)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\sum_{l=0}^{n}\left(\frac{z_1^{2l+1}z_2^{2n-2l}}{(2l+1)!(2n-2l)!}+\frac{z_1^{2l}z_2^{2n+1-2l}}{(2l)!(2n+1-2l)!}\right)\right]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{l=0}^{n}\frac{z_1^{2l+1}z_2^{2n-2l}}{(2l+1)!(2n-2l)!}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{l=0}^{n}\frac{z_1^{2l}z_2^{2n+1-2l}}{(2l)!(2n+1-2l)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{z_1^{2p+1}z_2^{2(n-p)}}{(2p+1)!(2(n-p))!}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{q=0}^{n}\frac{z_1^{2q}z_2^{2(n-q)+1}}{(2(n-q)+1)!(2q)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{p+q=n}\frac{z_1^{2p+1}z_2^{2q}}{(2p+1)!(2q)!}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{p+q=n}\frac{z_1^{2q}z_2^{2p+1}}{(2p+1)!(2q)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n}(-1)^{p+q}\frac{z_1^{2p+1}z_2^{2q}}{(2p+1)!(2q)!}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n}(-1)^{p+q}\frac{z_2^{2p+1}z_1^{2q}}{(2p+1)!(2q)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n}(-1)^p\frac{z_1^{2p+1}}{(2p+1)!}(-1)^q\frac{z_2^{2q}}{(2q)!}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n}(-1)^p\frac{z_2^{2p+1}}{(2p+1)!}(-1)^q\frac{z_1^{2q}}{(2q)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z_1^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z_2^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z_2^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z_1^{2n}}{(2n)!}\\
&= \sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1
\end{aligned}$$

(2) 这个也可以利用 Cauchy 乘积证明，留给读者。我们这里做另一个证明，这种证明只适用于实数域和复数域。考虑

$$\begin{aligned}
\cos(z_1+z_2) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}e^{\mathrm{i}z_2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}[(\cos z_1+\mathrm{i}\sin z_1)(\cos z_2+\mathrm{i}\sin z_2)+(\cos z_1-\mathrm{i}\sin z_1)(\cos z_2-\mathrm{i}\sin z_2)]\\
&= \frac{1}{2}[2\cos z_1\cos z_2-2\sin z_1\sin z_2+0]\\
&= \cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2
\end{aligned}$$

(3) 考虑 (2) 中取 $z_1=z, z_2=-z$

$$1=\cos 0=\cos^2 z+\sin^2 z$$

□

Corollary 2.3. 根据和角公式可以推出许多三角函数恒等式：

(1) 倍角公式

$$\sin 2z=2\sin z\cos z$$

$$\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$$

(2) 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(3) 积化和差公式

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

证明留给读者，到此我们几乎证明了全部的经典三角恒等式，关于 tan 的三角恒等式，完全都是基于 sin 和 cos 而证明的。

Proposition 2.4. 极限和导数
(0)$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$
(1)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sin z)=\cos z$
(2)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\cos z)=-\sin z$
(3)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^z$

Proof：(0) 利用定义证明，幂级数函数具有连续性

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\tfrac{\sin z}{z} &= \lim_{z\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{z}\\ &= \lim_{z\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{z^{2n}}{(2n+1)!}\\ &= 1\end{aligned}$$

(1) 利用定义证明，幂级数函数具有逐项求导公式

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sin z) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\tfrac{z^{2n}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{z^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

(2) 仿照高数书上的推到 (我们已经证明了全部的经典三角恒等式了)

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\cos z) &= \lim_{h\to 0}\tfrac{\cos(z+h)-\cos z}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{-2\sin\left(z+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\\ &= -\lim_{h\to 0}\sin\left(z+\tfrac{h}{2}\right)\tfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\\ &= \sin z\end{aligned}$$

(3) 用定义逐项求导

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mathrm{e}^z\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\\
&= \mathrm{e}^z
\end{aligned}$$

□

3 周期性和 π

三角函数具有周期性是它们按幂级数定义最难处理的地方，这部分处理来自《数学分析教程》第二卷，菲赫金哥尔兹。我们先把目光放到实函数上

$$\cos 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^{2(2n-1)}}{(2(2n-1))!}+\frac{x^{2(2n)}}{(2(2n))!}\\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}-\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right)\\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1-\frac{x^2}{(4n)(4n-1)}\right)\right]
\end{aligned}$$

当 $x=2$ 时

$$\begin{aligned}
\cos 2 &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1-\frac{1}{n(4n-1)}\right)\right]\\
&= 1-\frac{4}{2!}\left(1-\frac{1}{1\times 3}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1-\frac{1}{n(4n-1)}\right)\right]\\
&= -\frac{1}{3}-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1-\frac{1}{n(4n-1)}\right)\right]
\end{aligned}$$

根据 $\cos 2$ 的收敛性，$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1-\frac{1}{n(4n-1)}\right)\right]$ 收敛，其中每一项都为正，所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1-\frac{1}{n(4n-1)}\right)\right]>0\\
\Rightarrow &-\frac{1}{3}-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1-\frac{1}{n(4n-1)}\right)\right]<0
\end{aligned}$$

得到 $\cos 2<0$，$\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数，故在 $(0,2)$ 上 $\cos x=0$ 必然有解。

在 $(0,2)$ 上

$$\begin{aligned}
\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{2n}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}+(-1)^{2n+1}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}-\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\left(1-\frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\right)
\end{aligned}$$

$$0<x<2\Rightarrow 1-\frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}>0$$

故 $\sin x > 0, x \in (0,2)$。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x < 0, x \in (0,2)$$

故 $\cos x$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，所以 $\cos x = 0$ 在 $(0,2)$ 上的解唯一

Definition 3.1. *π：定义 $\frac{\pi}{2}$ 为方程 $\cos x = 0$ 在 $(0,2)$ 上的唯一解*

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \tag{1}$$

在 $(0,2)$ 上 $\sin x > 0$，故考虑

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \tag{2}$$

于是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$$

据此可以推出一个著名的方程

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0 \tag{3}$$

这个方程由四个常数组成：

分别是：e(来自分析学)，i(来自代数学)，π(来自几何学)，1(来自经典算数)，虽然这里的 π 的定义不是几何学的，我们稍后会证明这个 π 就是古典平面集合的圆周率。

Proposition 3.1. *π 相关公式*

(1)$\sin z = \sin(z + 2\pi)$

(2)$\cos z = \cos(z + 2\pi)$

(3)$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}}$

(4) 诱导公式：

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$$
$$\sin(z+\pi) = -\sin z, \cos(z+\pi) = -\cos z$$

Proof：(1)(2)(3)

根据式 (3)，由 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}})^2 = 1$，则由 $\cos 2\pi = 1, \sin 2\pi = 0$

根据中的和角公式

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z \cos 2\pi + \cos z \sin 2\pi = \sin z$$
$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \sin z \sin 2\pi = \cos z$$

对于 exp，可以利用其指数性质

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$$

(4)

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cos\frac{\pi}{2} + \cos z \sin\frac{\pi}{2} = \cos z$$
$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos\frac{\pi}{2} - \sin z \sin\frac{\pi}{2} = -\sin z$$
$$\sin\pi = \sin 2\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0, \cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = -1$$
$$\sin(z+\pi) = \sin z \cos\pi + \cos z \sin\pi = -\sin z$$
$$\cos(z+\pi) = \cos z \cos\pi - \sin z \sin\pi = -\cos z$$

□

4　$\mathbb{R}$ 上的函数图像

4.1　三角函数

Corollary 4.1. *三角函数的详尽的对称性 (不局限于实三角函数)*

函数	中心对称点 (零点)	轴对称点 (极值点)
sin	$k\pi$	$k\pi+\frac{\pi}{2}$
cos	$k\pi+\frac{\pi}{2}$	$k\pi$

Proof：利用三角函数的周期性和奇偶性以及诱导公式

$$\sin(k\pi-z)=-\sin(z-k\pi)=-\sin(k\pi+z)$$
$$\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-z\right)=-\sin\left(z-k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}+z\right)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}+z\right)$$

关于 cos 的证明，留给读者。 □

Corollary 4.2. *三角函数 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的详细性质*
(1)$\sin x$ *是* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *上严格单调递增的、严格上凸的、恒正的函数，*$\sin 0=0,\sin\frac{\pi}{2}=1$
(2)$\cos x$ *是* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *上严格单调递减的、严格上凸的、恒正的函数，*$\cos 0=1,\cos\frac{\pi}{2}=0$

Proof：之前证明过，$\sin x$ 在 $(0,2)$ 上恒正，其在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上显然恒正，所以 $(\cos x)'=-\sin x<0$，$\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调递减，$\cos 0=1,\cos\frac{\pi}{2}=0$，可知 $\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒正，$(\cos x)''=-\cos x<0$，故 $\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是严格上凸函数。$\sin 0=0,\sin\frac{\pi}{2}=1,(\sin x)'=\cos x>0$，故 $\sin x$ 严格单调递增，$(\sin x)''=-\sin x<0$，可知 $\sin x$ 是严格上凸函数。 □

Corollary 4.3. *三角函数 $(0,2\pi)$ 的详细性质*

Proof：留给读者 (反正我懒得证这么细) □

4.2　指数函数

Proposition 4.4. *e 指数的函数图像*
(1)e^x *是* $\mathbb{R}$ *上的单调严格递增的、恒正的、下凸的函数*
(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty,\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$

Proof：
(1) 需要证明 e^x 是恒正的，这很简单 $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2\geqslant 0$，即 e^x 是非负的。
假设 $\exists x_0\in\mathbb{R},\mathrm{e}^{x_0}=0$，则

$$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x-x_0+x_0}=\mathrm{e}^{x-x_0}\cdot\mathrm{e}^{x_0}=0,\forall x\in\mathbb{R}$$

表 1: 三角函数 $(0,2\pi)$ 的详细性质

函数	0	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	π	$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$
$\sin:$ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$=0$ 中心对称点 (零点)	>0 严格单调递增且上凸函数	$=1$ 轴对称点极大值点	>0 严格单调递减且上凸函数	$=0$ 中心对称点 (零点)	<0 严格单调递减且下凸函数	$=-1$ 中心对称点 (零点)	<0 严格单调递增且下凸函数
$\cos:$ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$=1$ 轴对称点极大值点	>0 严格单调递减且上凸函数	$=0$ 中心对称点 (零点)	<0 严格单调递减且下凸函数	$=-1$ 轴对称点极大值点	<0 严格单调递增且下凸函数	$=0$ 轴对称点极大值点	>0 严格单调递增且上凸函数

这说明 $\mathrm{e}^x\equiv 0$，但是 $\mathrm{e}^0=1$，矛盾！故假设不成立，e^x 是恒正的。

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x>0$$

故 e^x 是严格单调递增的。

$$(\mathrm{e}^x)''=\mathrm{e}^x>0$$

故 e^x 是下凸函数。

(2)

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots>1+x,x>0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^t}=0$$

□

Corollary 4.5. 指数爆炸

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty,\forall n\in\mathbb{N}$$

Proof：$\mathrm{e}^x>\frac{x^n}{n!},\forall x>0,\forall n\in\mathbb{N}$。或者也可以用洛必达法则。 □

5 最小周期问题

我们回到复数域上来考虑问题，这一节我们考虑 $\exp z_1=\exp z_2$，$\sin z_1=\sin z_2$，$\cos z_1=\cos z_2$ 意味着什么。

Theorem 5.1. 指数函数确定的等价类

$$\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}\Leftrightarrow z_1=z_2+2k\pi\mathrm{i}$$

Proof：$\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1+\mathrm{i}\sin y_1),\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{x_2}(\cos y_2+\mathrm{i}\sin y_2),x_i,y_i\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x_1}\cos y_1=\mathrm{e}^{x_2}\cos y_2\wedge \mathrm{e}^{x_1}\sin y_1=\mathrm{e}^{x_2}\sin y_2$$
$$\mathrm{e}^{x_1}=\sqrt{\left(\mathrm{e}^{x_1}\cos y_1\right)^2+\left(\mathrm{e}^{x_1}\sin y_1\right)^2}=\sqrt{\left(\mathrm{e}^{x_2}\cos y_2\right)^2+\left(\mathrm{e}^{x_2}\sin y_2\right)^2}=\mathrm{e}^{x_2}$$
$$\Rightarrow x_1=x_2,\cos y_1=\cos y_2\wedge\sin y_1=\sin y_2$$
$$\Rightarrow \sin(y_1-y_2)=\cos(y_1-y_2)=0$$

假设 $y_1-y_2\neq 2k\pi$，不妨设 $y_1-y_2>0$, 根据阿基米德原理，存在 $!n\in\mathbb{Z}$

$$2n\pi\leqslant y_1-y_2<2(n+1)\pi$$

取 $y_2'=y_2+2n\pi$，则 $y_1-y_2'\in[0,2\pi)$，于是

$$\sin(y_1-y_2')=\cos(y_1-y_2')=0$$

根据可知，必须满足 $y_1=y_2'$，即 $y_1=y_2+2n\pi$，即 $z_1=z_2+2n\pi\mathrm{i}$。

Proposition 5.2. 指数函数、三角函数的零点
*(1)*exp 没有零点
(2)$\sin z=0\Leftrightarrow z=k\pi$
(2)$\cos z=0\Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Proof：
(1)$\mathrm{e}^z=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x\sin y=\mathrm{e}^x\cos y=0\Rightarrow \mathrm{e}^x=0$，我们知道在实数上没有方程 $\mathrm{e}^x=0$ 的解。(脑子好痒，感觉新的数域要长出来了 (doge))
(2)

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\Leftrightarrow z=k\pi$$

(3)

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}=0\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)^2+1=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\pm\mathrm{i}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\vee \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{i}z=\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+2k\pi\mathrm{i}\vee \mathrm{i}z=-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+2k\pi\mathrm{i}\Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Proposition 5.3. 三角函数的确定的等价类
(1)$\sin z_1=\sin z_2\Leftrightarrow z_1-z_2=2k\pi\vee z_1+z_2=\pi+2k\pi$
(2)$\cos z_1=\cos z_2\Leftrightarrow z_1-z_2=2k\pi\vee z_1+z_2=2k\pi$

Proof：
(1)

$$\sin z_1-\sin z_2=2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}$$
$$\sin z_1=\sin z_2\Leftrightarrow \frac{z_1+z_2}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\vee\frac{z_1-z_2}{2}=k\pi\Leftrightarrow z_1-z_2=2k\pi\vee z_1+z_2=\pi+2k\pi$$

(2)

$$\cos z_1-\cos z_2=-2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}$$
$$\cos z_1=\cos z_2\Leftrightarrow\frac{z_1+z_2}{2}=2k\pi\vee\frac{z_1-z_2}{2}=2k\pi\Leftrightarrow z_1-z_2=2k\pi\vee z_1+z_2=2k\pi$$

□

6 三角函数与单位圆

本节我们阐明圆的参数方程 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 的性质以及常数 π 的的确是古典几何学中的圆周率。其中关于几何的观点基于 (我现学的一丢丢) 黎曼几何展开。

考虑映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，可知 $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{S}:=\{|z|=1|z\in\mathbb{C}\}$。下面说明 $f([0,2\pi))=\mathbb{S}$。

$$\forall z\in\mathbb{S}, z=x+\mathrm{i}y, x^2+y^2=1$$

可知 $f(0)=1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{i}, f(\pi)=-1, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\mathrm{i}$，参照表可知

$$f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right]=\mathbb{S}\cap\{z|\operatorname{Re}\{z\}>0,\operatorname{Im}\{z\}>0\}\tag{4}$$
$$f\left(\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right]=\mathbb{S}\cap\{z|\operatorname{Re}\{z\}<0,\operatorname{Im}\{z\}>0\}$$
$$f\left(\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\right]=\mathbb{S}\cap\{z|\operatorname{Re}\{z\}<0,\operatorname{Im}\{z\}<0\}$$
$$f\left(\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)\right]=\mathbb{S}\cap\{z|\operatorname{Re}\{z\}<0,\operatorname{Im}\{z\}<0\}$$

这里证明 (4)，剩下的式子不详细赘述。

$$\forall x+\mathrm{i}y\in\mathbb{S}\cap\{z|\operatorname{Re}\{z\}>0,\operatorname{Im}\{z\}>0\}\Rightarrow x,y\in(0,1)$$
$$f(\theta)=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

$\cos\theta$ 是连续函数且 $\cos 0=0,\cos\frac{\pi}{2}=1$，可知 $\exists\theta_*\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\cos\theta_*=x$，而

$$\theta_*\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sin\theta_*>0\Rightarrow\sin\theta_*=\sqrt{1-\cos^2\theta_*}=y$$
$$\Rightarrow f(\theta_*)=x+\mathrm{i}y$$

可以进一步利用证明 θ_* 是唯一的，但是利用 (3)，容易证明 f 在 $(0,2\pi]$ 上是单射。所以 f 构成 $[0,2\pi)$ 和 $\mathbb{S}$ 之间的双射。同理可证 f 也构成 $(0,2\pi]$ 和 $\mathbb{S}$ 之间的双射。

仍然考虑 (3)，可进一步证明 f 构成 $[x_0,x_0+2\pi)$ 或 $(x_0,x_0+2\pi]$ 和 $\mathbb{S}$ 之间的双射。只考虑开区间，则 f 构成 $(x_0,x_0+2\pi)$ 和 $\mathbb{S}\backslash\{f(x_0)\}$ 之间的双射，下面我们要证明 f 构成 $(x_0,x_0+2\pi)$ 和 $\mathbb{S}\backslash\{f(x_0)\}$ 之间同胚 $\mathbb{S}$，进而证明 $(f^{-1},\mathbb{S}\backslash\{f(x_0)\})$ 可以是 $\mathbb{S}$ 作为一维实 Riemann 流形的局部坐标图。

Proof：f 构成 $(x_0,x_0+2\pi)$ 和 $\mathbb{S}\backslash\{f(x_0)\}$ 之间的同胚。

容易证明 $\mathbb{S}\backslash\{f(x_0)\}=[\mathbb{C}\backslash\{f(x_0)\}]\cap\mathbb{S}$ 的确是开集，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}$ 显然是连续的，要证明 $f^{-1}:\mathbb{S}\backslash\{f(x_0)\}\to(x_0,x_0+2\pi)$ 是连续映射，不妨先设 $x_0=0$，只要证明 $f(A)$ 是 $\mathbb{S}$ 中的开集对于任意开集 $A\subset(0,2\pi)$ 成立即可，不妨设 A 是开区间 (开区间是拓扑基)，分别考虑 $A\cap\left(0,\frac{\pi}{2}\right), A\cap\left\{\frac{\pi}{2}\right\},\ldots,A\cap\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 并结合前面的结果容易证明。特别地记 $x_0=0$ 时的映射 f 为 f_0，当 $x_0\neq 0$ 时

$$f=h\circ f_0\circ g$$

其中 $g:(x_0,x_0+2\pi)\to(0,2\pi), g(x)=x-x_0$，$h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, h(z)=z\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0}$，容易证明 g,h 都是同胚映射。 □

接下来可以计算曲线 $\mathbb{S}$ 的长度，利用坐标图 $(f_0^{-1},\mathbb{S}\backslash\{1\})$

$$\operatorname{Vol}(\mathbb{S})=\int_0^{2\pi}\|f_{0*}(\theta)\|\mathrm{d}\theta$$
$$\hat{f}_0(\theta)=\theta\Rightarrow\mathrm{D}\hat{f}_0=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$
$$\operatorname{Vol}(\mathbb{S})=\int_0^{2\pi}1\cdot\mathrm{d}\theta=2\pi$$

单位圆 $\mathbb{S}$ 的半径是 1，直径是 2，这说明 π 的确是圆周率。
注：黎曼几何这部分真的是速成的，只听过没学过。想用黎曼几何处理单位圆还是想把单位圆作为与参数坐标选取无关的概念，同时也想和现代几何学接轨。

7 e 指数的来源

e 指数的来源在于人们在广泛的自然界和实际生活中的下列微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)=\alpha f(z),f(0)=1$$

在实数域中，常微分方程解的存在性和唯一性告诉我们该方程有且仅有一个解。
考虑自变量变换 $t=\alpha z$，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)$$

上述方程化为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)=f(t),f(0)=1$$

人们采用两个方法获得这个方程的解，分别是欧拉折线法和待定系数法。
我们还是以 z 为自变量，再次写出这个要求解的方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)=f(z),f(0)=1$$

7.1 待定系数法

这种方法是考虑常微分方程的幂级数解法，常微分方程解的光滑依赖性告诉我们，这个方程的解是一个解析函数，于是考虑如下形式的解

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

利用幂级数的逐项求导公式，得到

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

根据函数幂级数展开的系数的唯一性可知

$$(n+1)a_{n+1}=a_n$$
$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n=\frac{1}{(n+1)n}a_{n-1}=\ldots=\frac{a_0}{(n+1)!}$$

根据初值条件可有 $f(0)=a_0=1$，故 $a_n=\frac{1}{n!}$，于是方程的解为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

在证明了这个级数的收敛性后，才能将其作为方程的解，我们在前面已经做过这个工作了。

7.2 欧拉折线法

欧拉折线法是数值方法中求解常微分方程的初级方法，也是龙格-库塔方法的灵感来源。
获得函数在 z 处的值，将 $(0,z)$ 分为 n 等分，步长为 $h=\frac{z}{n}$，记 $z_k=kh$，欧拉折线法给出 z_n 上方程的近似解

$$f(z_k)=f(z_{k-1})+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_{k-1})h, f(z_0)=1 \tag{5}$$

这种方法计算 $f(z_n)$ 的误差为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$，所以 $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$。
将 (5) 整理可得

$$\begin{aligned}f(z_k)&=f(z_{k-1})\cdot\left(1+\frac{z}{n}\right)\\ \Rightarrow f(z_n)&=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\\ f(z)&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\end{aligned}$$

7.3 e 指数和三角函数的另一种定义方法

这种方法来源于欧拉折线法，并且这种方法需要先在实数上独立地定义好指数函数和三角函数并研究清楚它们的各类性质。

Definition 7.1. $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$$\exp z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n, z\in\mathbb{C}$$

Proof：仍然需要证明对于任意的 $z\in\mathbb{C}$，这个极限存在

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^z&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}+\mathrm{i}\frac{y}{n}\right)^n\\ &=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}+\mathrm{i}\frac{\frac{y}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}\right)\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}\right]^n\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}+\mathrm{i}\frac{\frac{y}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}\right)^n\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}+\mathrm{i}\frac{\frac{y}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}\\ &=\lim_{n\to\infty}(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{y^2+x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

其中

$$\theta_n=\arctan\frac{y}{n+x},\lim_{n\to\infty}n\theta_n=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y$$

故

$$\lim_{n\to\infty}(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)^n=\lim_{n\to\infty}(\cos n\theta_n+\mathrm{i}\sin n\theta_n)=\cos y+\mathrm{i}\sin y$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{y^2+x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{y^2+x^2}{n^2}\right)\right\}=\mathrm{e}^x$$

于是有

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$$

□

这个定义和 $z \in \mathbb{R}$ 时指数函数的定义是相容的，从上面的证明过程我们不难提炼出如下命题

Proposition 7.1. $\exp(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$

这可以直接推出 exp 的指数性质

Corollary 7.2. $\exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$

也可以直接推出经典的欧拉公式

Corollary 7.3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

Definition 7.2. $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

Proof：不难发现这个定义和 $z \in \mathbb{R}$ 上是相容的

Corollary 7.4. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \sin z + \mathrm{i}\cos z$

这种定义的 e 指数和三角函数体系就不在赘述了，有兴趣的读者可参照幂级数定义的方式自行建立。

8 参考文献

参考文献

[1] 卓里奇. *数学分析 (第一卷)*, volume 1 of 俄罗斯数学教材选译. 高等教育出版社, 2019.2.

[2] 卓里奇. *数学分析 (第二卷)*, volume 2 of 俄罗斯数学教材选译. 高等教育出版社, 2019.2.

[3] 巴赫瓦洛夫. *数值方法*. 俄罗斯数学教材选译.

[4] . 拉夫连季耶夫. *复变函数论方法*. 第 2 版 edition.

[5] . 菲赫金哥尔茨. *微积分学教程*, volume 2. 第 2 版 edition.