1. 泰勒公式

我们发现两个函数如果在某点相同的同阶导数数目越多，它们在该点的邻域就越相近。如果函数f在点x_0处存在1~n阶导数，则一个逼近该函数的多项式是

$$P_n(x;x_0)=f(x_0)+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)(x-x_0)+...+\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}(x_0)(x-x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kf}{\mathrm{d}x^k}(x_0)\cdot(x-x_0)^n \quad (1)$$

该多项式称为函数f在x_0处的**n阶泰勒多项式**，该函数与多项式的差$r_n(x;x_0)$，称为f在x_0处的**泰勒公式的n阶余项。**

$$r_n(x;x_0)=f(x)-P_n(x;x_0)$$

这个余项所具有的良好的性质，才是泰勒公式出名的原因

Theorem 1.1 无限小展开公式

f在点x_0处存在1~n阶导数，则f在x_0处的泰勒公式的n阶余项是高于n阶的无穷小量，即

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kf}{\mathrm{d}x^k}(x_0)\cdot(x-x_0)^k+o\big((x-x_0)^n\big) \quad (2)$$

Proof：先考虑一个简单的情形：$\varphi(x)$在0处有1~n阶导数，$\varphi(0)=0$且$\frac{\mathrm{d}^p\varphi}{\mathrm{d}x^p}(x)=0,p=1,\ldots,n$，则

$$\varphi(x)=o\big((x-x_0)^n\big)$$

对n采用归纳法证明

当$n=1$是，根据导数的定义，一阶导数为零，即

$$\varphi(x)=0+0(x-x_0)+o(x-x_0)=o(x-x_0)$$

假设已知$n=k-1\geqslant 1$时的结论成立，则当$n=k\geqslant 2$时，根据归纳假设有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)=o\big((x-x_0)^{k-1}\big)$$

此时φ在x_0处至少具有二阶导数，故必须在x_0的邻域内存在一阶导数，即$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)$在$x_0$的某个邻域中存在，利用拉格朗日中值定理，则有

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+(x-x_0)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(\xi)=(x-x_0)\cdot o\big((\xi-x_0)^{k-1}\big),\xi\text{介于}x_0,x\text{之间}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\cdot o\big((\xi-x_0)^{k-1}\big)}{(x-x_0)^k}=\lim_{x\to x_0}\frac{o\big((\xi-x_0)^{k-1}\big)}{(\xi-x_0)^{k-1}}\left(\frac{\xi-x_0}{x-x_0}\right)^{k-1}=0$$

$$\Rightarrow\varphi(x)=o\big((x-x_0)^k\big)$$

故对于任意$n\in\mathbb{N}$，上述结论都成立。

不难发现$r_n(x)$恰好是这类函数，$r_n(x)$在x_0处本身和其1~n阶导数都是0，故$r_n(x)=o\big((x-x_0)^n\big)$

□

无限小给出了函数f的局部多项式逼近，在$x\to x_0$时，$f(x)$以高于n阶的速度渐进其在x_0处的n阶泰勒多项式。

然而仅仅掌握到这种程度还不够，我们需要对余项做更进一步的了解，而不局限于存在x_0的某个邻域内的性

质，如果x是个异于x_0的固定点，则余项会有如何的行为？显然，这需要更多的信息，即函数在x_0和x之间的详细信息。否则实函数完全有可能有各种完全无法预测的行为。

Theorem 1.2 f在x_0和x为端点的闭区间上连续开区间上具有$1 \sim n+1$阶导数，则对于在这个闭区间上连续开区间上可导且导数不取零的函数φ，都存在介于x_0, x之间的点ξ，使得

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0) \cdot (x - x_0)^k + r_n(x; x_0) \tag{3}$$

$$r_n(x; x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} \frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\xi) \cdot (x - \xi)^n \tag{4}$$

Proof：(值得注意的是这里的x是上面表述的固定值，而不是通常的函数的自变量)
构造函数$F(t) := r(x; t) = f(x) - P_n(x; t)$，这时在$t$处的$n$阶泰勒多项式和函数的偏差

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(t) \cdot (x - t)^k \right]$$

$$F(x) = 0$$

可知F_x是在x, x_0为端点的闭区间连续开区间可导的函数，利用欧拉中值定理

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}t}(t) &= -\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^{k+1} f}{\mathrm{d}x^{k+1}}(t) \cdot (x - t)^k + \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(t) \cdot (x - t)^{k-1} \cdot (-1) \right) \right] \\
&= -\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^{k+1} f}{\mathrm{d}x^{k+1}}(t) \cdot (x - t)^k \right] + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(t) \cdot (x - t)^{k-1} \\
&= -\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^{k+1} f}{\mathrm{d}x^{k+1}}(t) \cdot (x - t)^k \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^{k+1} f}{\mathrm{d}x^{k+1}}(t) \cdot (x - t)^k \\
&= -\frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}}(t) \cdot (x - t)^n
\end{aligned}$$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

$$F(x) = 0, F(x_0) = f(x) - \left[f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0) \cdot (x - x_0)^k \right]$$

$$\Rightarrow f(x) - \left[f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0) \cdot (x - x_0)^k \right] = -\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} \cdot F'(\xi)$$

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\xi) \cdot (x - \xi)^n \tag{5}$$

□

Corollary 1.3 带有欧拉余项的泰勒公式
式(3)中的余项可以写为

$$r_n(x;x_0)=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n+1}f}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\xi)\cdot(x-\xi)^n(x-x_0)$$

Proof：$\varphi(t)=t$ □

Corollary 1.4 带有拉格朗日余项的泰勒公式

$$r_n(x;x_0)=\frac{1}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^{n+1}f}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Proof：为了消去$x-\xi$，取$\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$ □

2. 泰勒级数

对于某些函数，研究发现在某些情况下其余项随着n增大而趋近于0，$\lim_{n\to\infty} r_n(x;x_0)$，此时有

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0)\cdot(x-x_0)^k$$

等号右边是一个级数，称为函数f在x_0处的泰勒级数。
下面研究基本初等函数在原点处的泰勒级数

2.1. 函数的泰勒级数

2.1.1. e^x

$$\begin{gathered}\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+r_n(x),r_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\xi}x^{n+1}\\ |r_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|x|}\\ \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!},\forall x\in\mathbb{R}\end{gathered}\tag{6}$$

关于(6)的证明如下

$$\begin{gathered}a_n:=\frac{|x|^n}{n!}\\ a_{n+1}=\frac{|x|}{n+1}a_n\end{gathered}$$

可知n足够大时，a_n会单调递减，故a_n一定收敛，设其收敛值为a，则有

$$a=a\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$$

2.1.2. $\sin x$

$$\frac{\mathrm{d}^n\sin}{\mathrm{d}x^n}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^n \sin}{\mathrm{d}x^n}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 4k \\ 1 & n = 4k+1 \\ 0 & n = 4k+2 \\ -1 & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = P_n(x) + r_n(x)$$

$$r_n(x) = \frac{\sin\left[\xi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$\Rightarrow |r_n(x)| \to 0$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n \sin}{\mathrm{d}x^n}(0)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2.1.3. $\cos x$

$$\frac{\mathrm{d}^n \cos}{\mathrm{d}x^n}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ 0 & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ 0 & n = 4k+3 \end{cases}$$

同理可得

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

值得注意的是，关于$\exp$, $\sin$, $\cos$ 的泰勒级数的研究，其实是不本质的。因为它们实际上就是利用幂级数来定义的。(至少我是采用这套定义的)
不过这种处理方法倒是适合$\exp$, $\sin$, $\cos$ 的另一套定义方法——微分方程定义。因为研究泰勒级数无非就是要清楚函数的高阶导数而已。
下面分析的两个函数，才是泰勒级数理论对于基本初等有重大意义的。

2.1.4. $\ln(1+x)$

$$f(x) = \ln(1+x), \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f(0) = 0, \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(0) \cdot (x - x_0)^k + r_n(x)$$

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}$$

不难发现拉格朗日余项失去作用了，我们尝试柯西余项，注意到ξ总是介于$0, x$之间

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot (x-\xi)^n x = (-1)^n\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n \frac{x}{1+\xi}$$

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{|x|-|\xi|}{1+\xi} \leqslant \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = 1-\frac{1-|x|}{1-|\xi|} \leqslant 1-(1-|x|) = |x| \tag{7}$$

$$\Rightarrow |r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1+\xi} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|\xi|} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0, |x|<1$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, |x|<1$$

2.1.5. $(1+x)^{\alpha}$

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}, \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x) = \alpha^{(n)}(1+x)^{\alpha-n}$$

其n阶柯西余项为

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\alpha^{(n+1)}(1+\xi)^{\alpha-n}(x-\xi)^n x$$

$$|r_n(x)| = \left|\alpha(1-\alpha)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right| \cdot (1+\xi)^{\alpha} \left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n \cdot |x| \leqslant \left|\alpha(1-\alpha)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right| \cdot (1+\xi)^{\alpha}|x|^{n+1}$$

$$|r_n(x)| \leqslant \prod_{n=1}^{n<\alpha} \left|\alpha(1-\alpha)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right| 2^{\alpha}|x|^{n+1}$$

前面是和n无关的常数，后面是无穷小量，可知$|r_n(x)| \to 0$

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, |x|<1$$

2.2. $\ln(1+x), (1+x)^{\alpha}$的临界估计

不论是通过泰勒余项估计还是通过幂级数的逐项可积性和逐项可微性结合微分方程的方法，得到的$(1+x)^{\alpha}$和$\ln(1+x)$的展开式总是在$x=\pm 1$两端非常乏力。合理的方法是利用幂级数的阿贝尔极限定理

Lemma 1 幂级数的阿贝尔极限定理

如果幂级数$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$在某点$\zeta \in \mathbb{C}$处收敛，则它在$z$在收敛域内趋近于$\zeta$且保持$\frac{|\zeta-z|}{|\zeta-z_0|-|z-z_0|}$有界时，则有

$$\lim_{z\to\zeta} f(z) = f(\zeta)$$

我们这里只用实数的特殊情况，即$x \to \xi-$。

2.2.1. $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, |x|<1 \tag{8}$$

先考察$\ln(1+x)$的情况，这个比较简单，当$x=-1$的时候，右边变成

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

这个调和级数是发散的。当然$\ln(1+x)$在$x=-1$的时候也是没定义的。
当$x=1$时，右边变成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

很容易知道这个级数是条件收敛的。那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\lim_{x\to 1-}\ln(1+x)=\ln 2$$

这说明(8)在$x=1$的时候也成立，可以将其修改为

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, x\in(-1,1] \tag{9}$$

一个常用的推论为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2 \tag{10}$$

2.2.2. $(1+x)^{\alpha}$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n, |x|<1 \tag{11}$$

这个的分析比较复杂，重点是分析端点处幂级数的收敛性。这里有一个参数α，而且表达式也较为复杂。
case1： $\alpha>0$，

$$\exists! k\in\mathbb{Z}, \alpha\in(k-1,k], \alpha-k\in(-1,0], k\geqslant 1$$

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}=\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\cdot(-1)^{n-k}\frac{(k-\alpha)\cdot\ldots\cdot(k-\alpha+(n-k-1))}{n!}$$

取$\lambda:=k-\alpha\in[0,1)$

$$\frac{(k-\alpha)\cdot\ldots\cdot(k-\alpha+(n-k-1))}{n!}=\frac{\lambda\cdot(\lambda+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+n-k-1)}{n!}$$

$$\binom{\alpha}{n}=[\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)](-1)^{n-k}\frac{\lambda\cdot(\lambda+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+n-k-1)}{n!}$$

此时$\binom{\alpha}{n}$被分成了三个部分

第一部分$M_{\alpha}:=[\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)]$是一个和$n$无关的系数，它是$\binom{\alpha}{n}$分母中一路连乘下来前面的正数的、不
变号的部分，它只和α有关。
第二部分$(-1)^{n-k}$是后面的非正数部分总体的符号贡献。
第三部分$b_n=\frac{\lambda\cdot(\lambda+1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+n-k-1)}{n!}$是至关重要的部分，它反映了$\binom{\alpha}{n}$数值大小变化的本质，这是一个正数
当$x=1$时，需要分析如下级数

$$\xi_n = \binom{\alpha}{n} = M_\alpha(-1)^{n-k} \cdot b_n$$

当$x = -1$时，需要分析如下级数

$$\eta_n = (-1)^n \binom{\alpha}{n} = \left[M_\alpha(-1)^k\right] \cdot b_n$$

目前看来需要分析正项级数和交错级数的收敛情况

$$\begin{aligned}
\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} &= -\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \\
&= -\frac{\lambda \cdot (\lambda+1) \cdot \ldots \cdot (\lambda+n-k-1)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{\lambda \cdot (\lambda+1) \cdot \ldots \cdot (\lambda+n-k)} \\
&= -\frac{n+1}{\lambda+n-k} = -\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{\lambda-k}{n}} = -\left[1+\frac{1+\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\eta_n}{\eta_{n+1}} = 1+\frac{1+\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

关于实数级数收敛性判断的重要结论为

Theorem 1 比值判别法——对数形式

对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

若$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$，则$\begin{cases} \alpha > 1 & \text{收敛} \\ \alpha < 1 & \text{发散} \\ \alpha = 1 & \begin{cases} \beta > 1 & \text{收敛} \\ \beta < 1 & \text{发散} \\ \beta = 1 & \begin{cases} \gamma > 1 & \text{收敛} \\ \gamma < 1 & \text{发散} \\ \gamma = 1 & \text{不确定} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$

Key　交错级数的判别

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是交错级数，$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\left(\alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right)$

$$
\text{则}\begin{cases}
\alpha > 1 & \text{绝对收敛} \\
\alpha < 1 & \text{发散} \\
\alpha = 1 & \begin{cases}
\beta > 1 & \text{绝对收敛} \\
0 < \beta < 1 & \text{条件收敛} \\
\beta = 1 & \begin{cases} \gamma > 1 & \text{绝对收敛} \\ \gamma < 1 & \text{条件收敛} \\ \gamma = 1 & \begin{array}{l}\text{绝对敛散性无法判断} \\ \text{自身收敛}\end{array} \end{cases} \\
\beta = 0 & \begin{cases} \gamma \geqslant 0 & \begin{array}{l}\text{自身收敛性无结果} \\ \text{绝对发散}\end{array} \\ \gamma < 0 & \text{发散} \end{cases} \\
\beta < 0 & \text{发散}
\end{cases}
\end{cases}
$$

此时$\alpha > 0, 1+\alpha > 1$，故ξ_n绝对收敛，η_n收敛。
即$\alpha > 0$的情况下，两边都收敛，于是有

$$
2^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}
$$

$$
0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n}
$$

$$
(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, |x| \leqslant 1, \alpha > 0
$$

case2： $\alpha < 0$

$$
\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - (n-1))}{n!} = (-1)^n \frac{\beta(\beta+1) \ldots (\beta+n-1)}{n!}, \beta := -\alpha
$$

$$
\xi_n = (-1)^n \frac{\beta(\beta+1) \ldots (\beta+n-1)}{n!}
$$

$$
\eta_n = \frac{\beta(\beta+1) \ldots (\beta+n-1)}{n!}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} &= -\frac{\beta(\beta+1) \ldots (\beta+n-1)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1) \cdot \ldots \cdot (\beta+n)} \\
&= -\frac{n+1}{n+\beta} = -\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{\beta}{n}} \\
&= -\left(1 + \frac{1+\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$\frac{\eta_n}{\eta_{n+1}} = 1 + \frac{1+\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

由于$\alpha < 0$，$1-\alpha < 1$，故η_n发散，即$x = -1$时级数一定发散
对于ξ_n，则

$$\begin{cases} \alpha \in (-1,0) & \text{条件收敛} \\ \alpha = -1 & \text{未知} \\ \alpha < -1 & \text{发散} \end{cases}$$

单独考察$\alpha = -1$的情形

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n} = (-1)^n$$
$$\xi_n = (-1)^n$$

显然发散。

小结一下

	$x = -1$	$x = 1$	公式成立范围
$\alpha > 0$	收敛	绝对收敛	$x \in [-1,1]$
$\alpha = 0$	。。。	。。。	$x \in \mathbb{R}$
$\alpha \in (-1,0)$	发散	条件收敛	$x \in (-1,1]$
$\alpha \leqslant -1$	发散	发散	$x \in (-1,1)$

Table 1: $(1+x)^\alpha$的幂级数展开边界情况

同时我们得到了一些公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} = 2^\alpha, \alpha > -1 \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} = 0, \alpha > 0 \tag{13}$$

参考文献：(不准备正式写了，反正都是抄的书)

1.卓里奇《数学分析 第一卷》
2.Ahlfors 《复分析》中译本
3.谢锡麟老师的数学分析课程(所用的实级数收敛性的结论是我首先从谢老师那里学到的)