非线性物理——混沌

张轩，复旦大学核科学与技术系

摘要：非线性和混沌现象是自然科学的研究热点，本实验使用蔡氏电路模拟了一个动力系统的各种行为——单吸引子、双吸引子、各种周期的极限环行为。本实验是非线性系统的一个简单实例，可以帮助学生理解非线性动力系统的行为，理解复杂系统的学科发展动力。

关键词：蔡氏电路　混沌现象

一、引言

非线性是在自然界广泛存在的自然规律，相对于我们熟悉的线性要复杂得多。随着物理学研究的不断深入，非线性问题逐渐被重视起来，现已出现了多个分支，混沌便是其中之一。混沌现象在生活中广泛存在，如著名的蝴蝶效应、湍流、昆虫繁衍等。

要直观地演示混沌现象，采用非线性电路是一个非常好的选择。能产生混沌现象的自治电路至少满足以下三个条件：

1): 有一个非线性元件；

2): 有一个用于耗散能量的电阻；

3): 有三个存储能量的元件。

如图1所示的蔡氏电路（Chua's circuit）是一个符合上述条件、非常简洁的非线性电路，由华裔物理学家蔡绍棠（Leon O. Chua）教授于 1983 年提出并实现。近年来，非线性电路的研究领域有了长足进展，新的混沌与超混沌电路的理论设计与硬件实现等问题备受人们关注。如 Chen 氏电路、Colpitts 振荡电路、基于 SETMOS 的细胞神经网络结构的蔡氏电路，都能用于研究混沌现象，并有不同的应用领域。

二、实验目的

了解非线性系统的行为特点，掌握如何使用蔡氏电路产生这些动力系统的典型行为。

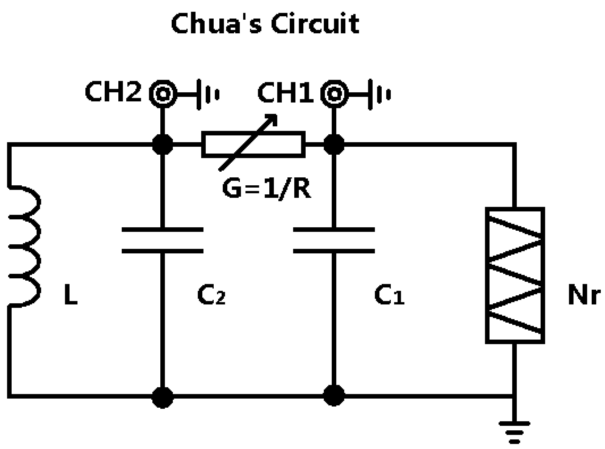


图 1　蔡氏电路

三、实验原理

3.1　动力系统的简单分析

要分析一个动力系统的特性，常用的需要在不动点附近做一阶近似，即在不动点附近丢掉向量场的高阶项，将其处理为一个线性系统。

$$\dot{x} = f(x) \to \dot{x} = J_f(x_*)(x - x_*), x \in \mathbb{R}^n$$

根据 Hartman-Grobman 定理，非线性动力系统在不动点附近和其近似的线性系统是拓扑等价的。这个定理在分析非线性动力系统的局部行为时很有帮助。

对于非线性动力系统的全局行为，目前似乎并没有非常快捷的分析方法，因为全局行为常常涉及到混沌现象。

将动力系统局部近似为一个线性系统(1)后

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

方便起见我们不妨设不动点就在原点。我们通常的做法是将矩阵 A 做本征分解

$$A = P^{-1}\Lambda P, y = Px$$
$$\Rightarrow \dot{y} = \Lambda y$$

这样方程直接解耦，但这并不意味着各个 y_i 的行为完全独立，尤其是当本征值为复数的情况。考虑到矩阵是一个实矩阵，复特征值总是成对共轭地出现。我们可以重点分析二维动力系统的行为特征。此外三维以上的非线性性的具有混沌的特性，对于高维的复杂系统而言，直接的动力学分析可能不再是适合的办法。

考虑方程(1)是一个二维系统，则其本征值 λ_1, λ_2 要么都是实数，要么是一对共轭复数。

如果本征值均为实数，则本征值大于零对应着不动点沿着该本征向量方向排斥（Repell），本征值小于零对应着不动点沿着该本征向量方向吸引（Attract）。如果本征值都大于零，则不动点为吸引子（Attractor）；如果本征值都小于 0，则不动点为排斥子（Repeller）；如果本征值一个大于零，另一个小于零，则不动点称为鞍点（Saddle Point）。

如果本征值为一对共轭复数 $\alpha \pm \mathbf{i}\beta$，则方程的解关于时间演化的部分由 $\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$ 组成，这表述了一种一边围绕不动点圆周运动，一边向内吸引 $(\alpha > 0)$ 或向外排斥 $(\alpha > 0)$，分别成为收缩震荡（decaying oscillations）和排斥震荡（growing oscillation）。当 $\alpha = 0$ 是，会形成中心（center）结构。

当然也存在无法本征值分解的情况，即约当标准型

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}$$

此时不动点称为节点（node），同样的本征值小于零和大于零分别对应吸引和排斥。

二阶矩阵的本征值取决于其不变量——即它的迹和行列式

不动点类型	λ_1, λ_2的情况	$\operatorname{tr} A$	$\det A$	$\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A$
吸引子	均为正	>0	>0	>0
排斥子	均为负	<0	>0	>0
鞍点	一正一负		<0	>0
吸引震荡	共轭复数且实部小于零	<0	>0	<0
排斥震荡	共轭复数且实部大于零	>0	>0	<0
中心	共轭复数且实部为零	$=0$	>0	<0
结点	本征分解为 Jordan 标准型			$=0$

不动点分类与行列式和迹的关系总结如图2所示，图片来源为维基百科，该图中将吸引和排斥称为汇（sink）和汇（sourse）

3.2 Chua 氏电路的分析

Chua 氏电路的动力方程为

$$\begin{cases} C_1 \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = G(U_2 - U_1) - g(U_1) \\ C_2 \frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}t} = G(U_1 - U_2) + I_L \\ L \frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} = -U_2 \end{cases} \tag{2}$$

其中 g 是非线性负阻的特征导纳

$$g(U) = G_b U + \frac{G_b - G_a}{2}(|U - E| - |U + E|)\,|$$

其中 $G_a = -(7.6 \pm 0.1) \times 10^{-4}\,\Omega^{-1}, G_b = -4.09 \pm (0.06) \times 10^{-4}$。这是一个单调递减的分段线性的奇函数，函数图像如图

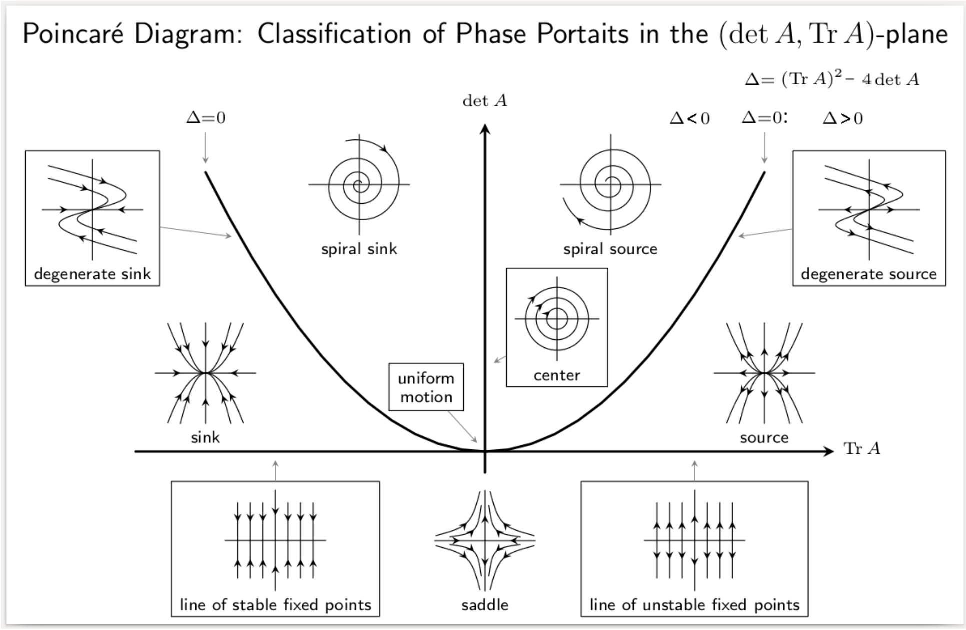
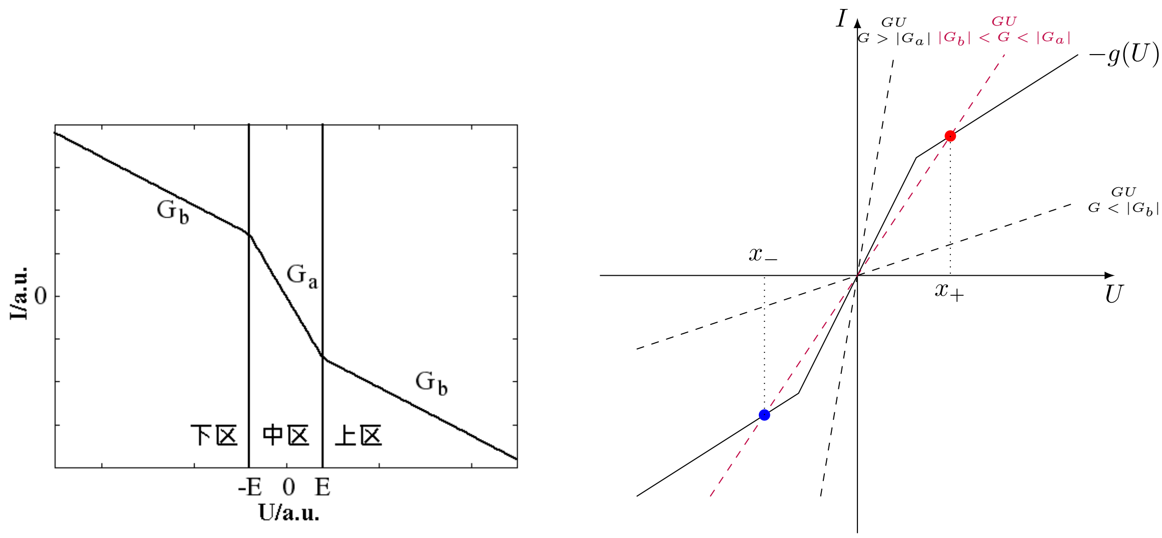


图 2　平面系统的相图分类



(a) 非线性负阻的 IV 特性

(b) 不动点的情况

图 3　Two figures.

下面计算该系统的不动点，第三个方程指出，不动点一定使得 $U_2 = 0$

$$\begin{cases} GU_1 + g(U_1) = GU_2 = 0 \\ I_L = -GU_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow GU_1 = -g(U_1)$$

则如图3b，$G > |G|_a$ 或 $G < |G|_b$ 时，只有一个不动点 $x_0 = 0$；当 $|G|_b < |G| < |G|_a$ 时，方程由三个不动点 $x_\pm, x_0$。

根据 g 的对称性系统的 Jacobian 矩阵只有两种情况

$$\begin{bmatrix} \frac{-G+|G_a|}{C_1} & \frac{G}{C_1} & \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ & -\frac{1}{L} & \end{bmatrix}\text{对应不动点}x_0,\begin{bmatrix} \frac{-G+|G_b|}{C_1} & \frac{G}{C_1} & \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ & -\frac{1}{L} & \end{bmatrix}\text{对应不动点}x_\pm$$

将这两个矩阵做本征值分解，即可获得电路系统的简单动力行为。

3.3 实际的 Chua 氏电路

在实际的 Chua 电路中，非线性负阻是通过有源电路形成的，当电路中的信号幅度过大的时候，非线性负阻的二极管特性将被破坏，此时非线性负阻将会称为一个正阻，其特性曲线大致如下，本实验也会对其进行简单的测量。

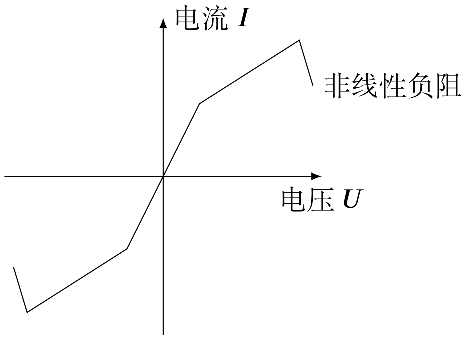


图 4 非线性负阻的 IV 特性曲线

当电路中存在的阻抗都是正阻时，这时电路回到常规的电路状态，常规的电路都是常规的吸引子。这意味着非线性负阻失真的两段造成的结果就是在电压 U_1 超过非线性负阻正常工作的范围处产生吸引子。

由于实验中没有对元件中的其它参数进行测量，通过 phylab 网站“分形与混沌之-蔡氏电路模拟”的程序中提供的数据作为参考，我计算了可调电阻 R 取不同值的条件下的特征向量和特征值，计算结果我放到了Github上[1]。结果显示，总是得到一个实特征值和一对复特征值，实特征值的方向总是和相空间中 U_2 方向的单位向量接近，可以大致推断 Chua 氏电路的相图如图5。

在 $|U_1| > U_{\text{失真}}$ 的范围内，表现为一个一维吸引子和二维吸引震荡点。在 $U_c < |U_1| < U_{\text{失真}}$ 范围内，表现为一个一维吸引子和二维吸引震荡点。在 $|U_1| < U_c$ 的条件下，表现为一个一维排斥子和一个二维吸引震荡点。

当然，实际的 Chua 氏电路是一个三维的动力系统，这样的动力系统具有一些奇特的动力学行为——混沌，这里的分析只能大致反映系统的局部行为。混沌现象至少在三维以上的系统中才存在，而对于动力系统的理论分析，也大多集中于二维和一维系统。

[1]这里是有超链接的。但是考虑到纸质版，还是需要贴一下网址。如果把网址贴在正文中比较难看。https://github.com/Xuanyiyiren/Fudan-TCPH-fundamental-experement/tree/main/Nonlinear_Physics

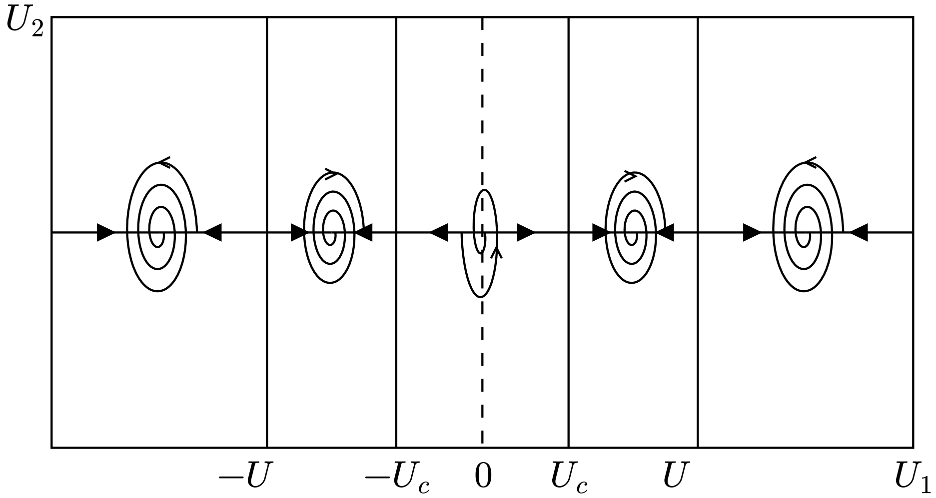


图 5　Chua 氏电路相图

对于高维系统通常采用计算机模拟。对于维度足够多的系统则可以使用统计物理方法。而对于维度超过三维但又不够高的系统，往往只能求助于数值模拟。例如著名的三体系统，以及核物理中的原子核结构问题。

四、实验装置

1. FD-NCE-II 非线性电路混沌实验仪 H1831725
2. 数字合成信号发生器 H1405631
3. NDS102U 型数字示波器 NDS102U1725053
4. ZX21 型直流多值电阻器 8910036
5. 导线若干、BNC 同轴电缆若干

五、实验过程

5.1　观察 Chua 氏电路的非线性现象

搭建 Chua 氏电路1，调节电路的可调电阻，通过对参数 G 的调节，实现不同混沌现象的观测。需要观测的现象有：单周期现象、双周期现象、阵发混沌现象、三周期现象、单吸引子、双吸引子

5.2　测量非线性负阻的 I-V 特性

搭建如图6所示电路

用信号发生器驱动，分别在 30Hz，300Hz 和 3.3kHz 等频率测量非线性负阻的 I-V 特性，讨论不同频率时 I-V 曲线的特点。

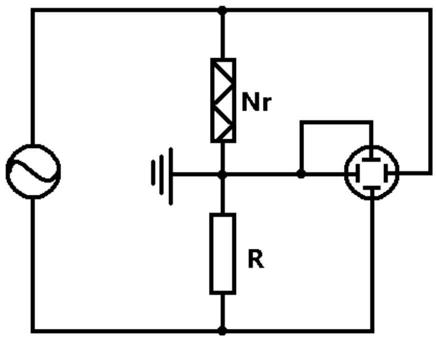


图 6　非线性负阻 IV 特性的测量电路

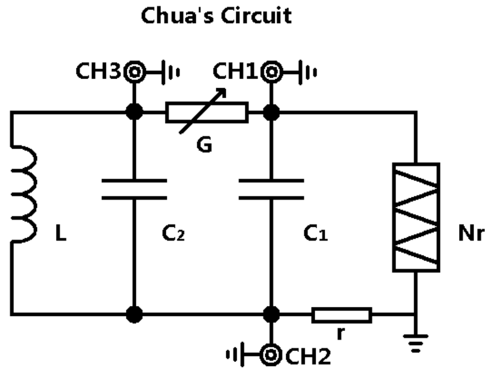


图 7　Chua 氏电路中非线性负阻的特性

5.3　观察非线性负阻在 Chua 氏电路中的工作状态

然后搭建如图7所示的电路，这只是在 Chua 氏电路中增加了一个内阻，用以测量非线性负阻的电流。在 Chua 氏电路的不同行为中观察非线性内阻的工作状态。

图中有三个示波器通道，但只有一台示波器，即两个通道，使用 CH3 和 CH1 观察 Chua 氏电路的状态，使用 CH1 和 CH2 分析非线性负阻的工作状态。

注意使用示波器读取数据时，通过电压获取的电流的极性（正负号）并在数据处理中予以修正。

六、实验结果和分析

6.1　Chua 氏电路非线性现象的观察

由于数据较为复杂，而且对于混沌现象进行数据分析难以获得更加有趣的结果，故此处展示的是示波器 XY 模式的扫描结果，横轴代表 CH1，表示 U_1 的大小。纵轴代表 CH2，是 U_2 的大小。

对 Chua 氏电路非线性行为的结果如图8所示。

图8a是单周期的结果，系统产生了单周期的极限环，此时 $R = 2000\,\Omega$。

图8b是双周期的结果。系统产生了双周期的极限环，此时 $R = 1980\,\Omega$。

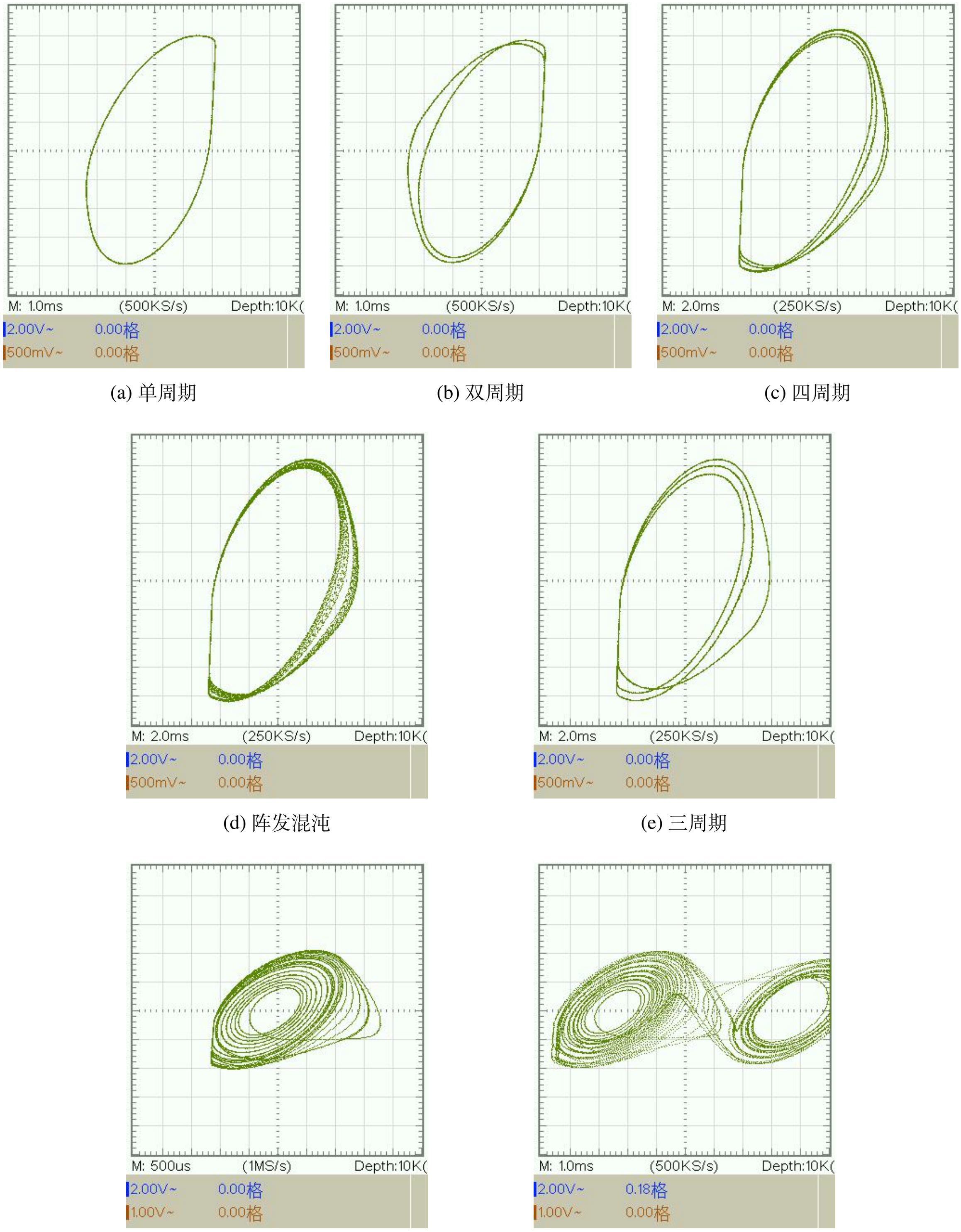
图8c是四周期的结果，系统产生了四周期的极限环，此时 $R = 1971\,\Omega$。

图8d是阵发混沌结果，系统处于三周期和四周期的中间状态，具有不稳定的周期性，此时 $R = 1968\,\Omega$。

图8e是三周期的结果，系统产生了三周期的极限环，此时 $R = 1965\,\Omega$。

图8f是单吸引子的结果，值得注意的是这不是一个常义的吸引子，而是一个奇异吸引子，不是系统的局部行为。此时 $R = 1957\,\Omega$。

图8g是双吸引子的结果，这也是一个奇异吸引子，是混沌系统独有的特性。此时 $R = 1946\,\Omega$。



(a) 单周期　(b) 双周期　(c) 四周期

(d) 阵发混沌　(e) 三周期

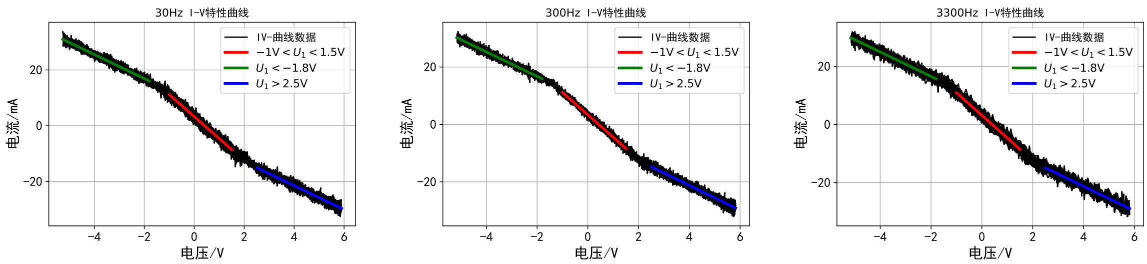
(f) 单吸引子　(g) 双吸引子

图 8　Chua 氏电路的非线性行为

这七种行为的转化对应着不同类型的分岔，这里全说出来不过是徒增一些名词而已，有兴趣的同学可以去阅读[1]或者其它动力系统的文献资料。

6.2 非线性负阻的 IV 特性

使用扫描法测量非线性负阻的 IV 特性，分别在 30, 300, 3300 Hz 的条件下，使用 10 V 的正弦信号在图6中作为激励源信号扫描。然后将得到的数据分段拟合得到非线性负阻的 IV 特性，结果如图。其中分段拟合为了减弱两段交点附近过渡因素的影响，选择拟合的范围避开了不同段的交界点。



(a) 30Hz 下的 IV 特性　(b) 300Hz 下的 IV 特性　(c) 3300Hz 下的 IV 特性

拟合的结果如表1所示，可见在不同频率下，非线性负阻的频率特性差异不大。

		斜率 (mA/V)	截距 (mA)	决定系数
30 Hz	负段	-4.306 ± 0.012	-4.306 ± 0.012	0.97
	中间段	-7.88 ± 0.05	-7.88 ± 0.05	0.943
	正段	-4.291 ± 0.016	-4.291 ± 0.016	0.951
300 Hz	负段	-4.259 ± 0.012	8.22 ± 0.05	0.973
	中间段	-7.81 ± 0.03	3.34 ± 0.02	0.981
	正段	-4.325 ± 0.015	-3.91 ± 0.07	0.956
3300 Hz	负段	-4.218 ± 0.015	8.12 ± 0.06	0.954
	中间段	-7.79 ± 0.05	3.15 ± 0.04	0.944
	正段	-4.218 ± 0.018	-4.39 ± 0.08	0.940

表 1　非线性负阻的 IV 特性测量

为了进一步说明不同频率下的结果差异不大，将三种情况下的拟合曲线放在一张图中进行对比，结果如图9所示，发现拟合曲线几乎重合。

取 3300 Hz 的数据计算得到

$$G_a = (-4.218 \pm 0.08)\,\mathrm{mA/V}$$

$$G_b = -7.79 \pm 0.05\,\mathrm{mA/V}$$

$$U_c = 1.75\,\mathrm{V}$$

值得强调的是，这种方法是一种较为简单的办法，可以得到不同频率的 IV 幅度响应曲线。如果需要细致地研究非线性负阻的在不同频率下的特性，需要分别测量不同幅度信号的关系并测量信号之间的相位差。

另外，由于信号发生器的信号幅度选择得仍然较小，这里并没有看到非线性负阻在高电压下失真变为正阻的过程，这个过程将在下面看到。

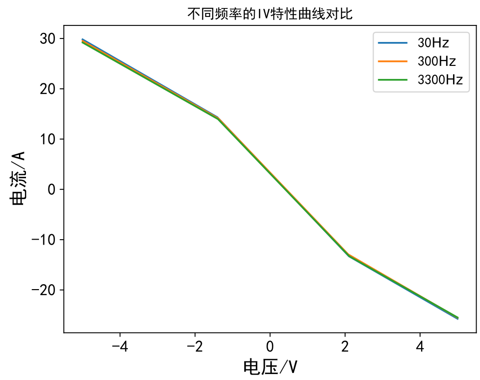
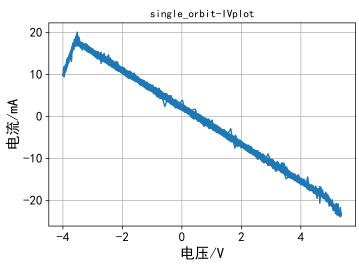


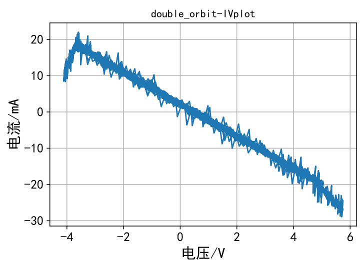
图 9　Chua 氏电路相图

6.3　非线性负阻在 Chua 氏电路中的工作状态

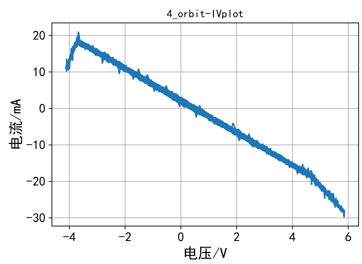
观测非线性负阻的在 Chua 氏电路中的两端电压和电流行为，绘制 IV 曲线得到结果如图10所示。



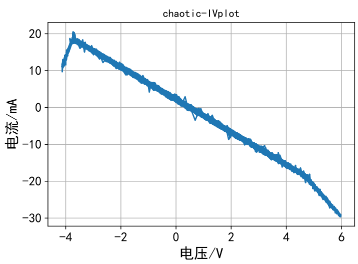
(a) 单周期



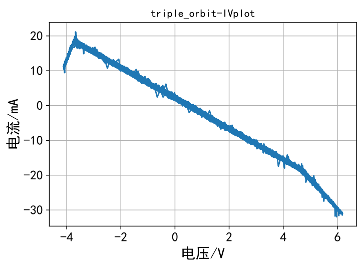
(b) 双周期



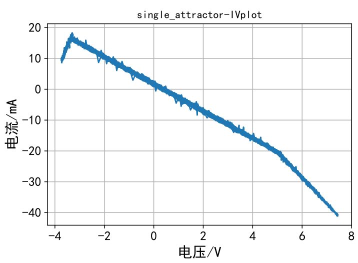
(c) 四周期



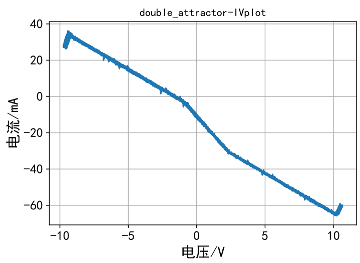
(d) 阵发混沌



(e) 三周期



(f) 单吸引子



(g) 双吸引子

图 10　非线性负阻在 Chua 氏电路中的行为

此时示波器采用了交流耦合模式，导致 IV 曲线存在一定的偏置。此图可以配合

图8以及图5一起，观察非线性负阻是如何引起整个电路的非线性行为的。

图10a是电路单周期行为的结果，非线性负阻的主要集中在 $-U_{失真} < U < -U_C$ 之间，此时 G 调制的导纳较小，x_- 不动点应该十分靠近 $-U_{失真}$，图5中 $-U_{失真} < U < -U_C$ 段此时应该是震荡排斥子。当 U_1 处于 $-U_{失真} < U < -U_C$ 之间时，震荡排斥子将使相点做圆周运动并向外发散，原本相点应当不停的发散到无穷大，但这种行为是违背了基本的物理学定律，在一个真实的物理动力系统种不会发生这种行为。在 Chua 氏电路种，当发散到另外两个区域时，又迅速被推回原区域。当参数适合时，可以产生稳定的极限环。双周期、四周期、阵法混沌以及三周期的产生机理都和此时类似。如图10b、图10c、图10d图10e所示。虽然我们能够简单肥西这些奇特的现象的产生机理，但是我们仍然很难解释这里的周期分岔以及阵法混沌现象，这就是混沌和非线性科学所研究的问题之一。

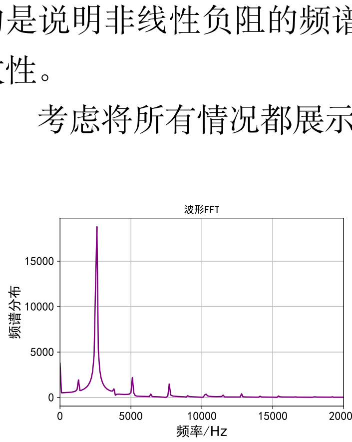
图8f是单吸引子的结果，这是一个奇异吸引子。它相较于前面的极限环，更多的依赖于 $-U_{失真} < U < -U_C$ 段和 $-U_C < U < U_C$ 段，当相点发散到 $-U_C < U < U_C$ 段时，从图5中可以发现，这里是一个震荡吸引子和一个一维排斥子，当相点发散运动到这一段时，会表现出震荡吸引子的特点，即8f中左侧的小突起。但由于一维排斥子的作用，相点只能做部分的震荡吸引子行为后，被一维排斥子推回到 $-U_{失真} < U < -U_C$ 段。总体行为表现为一个奇异吸引子。

图8g是双吸引子的结果，可以发现的是此时几乎涉及了非线性负阻的所有区域，其中主要发挥作用的也是非失真区域。和前面的单吸引子类似，但此时相点发散到 $-U_C < U < U_C$ 段时，会被被排斥到另一端，进而产生了双吸引子的行为。

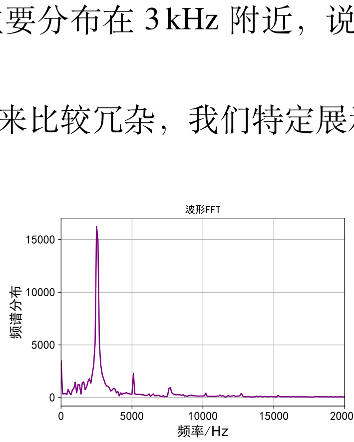
6.4 非线性负阻在 Chua 氏电路中的频率

本节分析了非线性负阻在 Chua 氏电路中的电压波形进行了频谱 FFT 分析，主要目的是说明非线性负阻的频谱主要分布在 3 kHz 附近，说明我们第5.2步的频率选择的有效性。

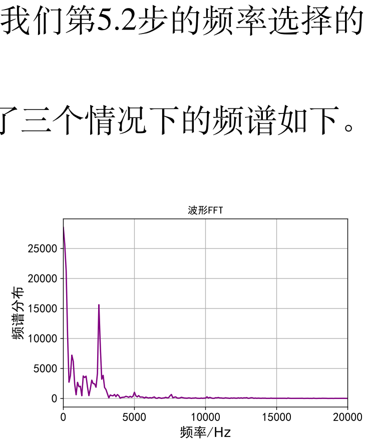
考虑将所有情况都展示出来比较冗杂，我们特定展示了三个情况下的频谱如下。



(a) 双周期下非线性负阻的 FFT



(b) 阵发混沌下非线性负阻的 FFT



(c) 双吸引子下非线性负阻的 FFT

七、实验结论

1. 通过 Chua 氏电路以及示波器，观察力 Chua 氏电路的非线性行为并采集了轨迹曲线；
2. 测量了非线性负阻的 IV 特性曲线，发现非线性负阻的 IV 特性和频率几乎无关，在 3300 Hz 的条件下测量结果为

$$G_a = (-4.218 \pm 0.08)\,\mathrm{mA/V}$$
$$G_b = -7.79 \pm 0.05\,\mathrm{mA/V}$$
$$U_c = 1.75\,\mathrm{V}$$

3. 通过示波器观察非线性负阻在 Chua 氏电路中的行为，并结合此分析了 Chua 氏电路各种非线性行为的机制。

八、参考文献

[1] PAJEVIC S. Nonlinear dynamics and chaos: Steven h. strogatz, addison-wesley, reading, massachusetts, 1994[M]. Springer, 1995.

[2] KENNEDY M P. Three steps to chaos. ii. a chua's circuit primer[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1993, 40(10): 657-674.

注：由于本文中涉及一些彩色图例标记以及一些超链接，黑白打印的展示效果可能较差，我已经将报告的电子版发送到老师的邮箱了`leyk@fudan.edu.cn`。