核辐射探测器中的 Poisson 过程

核电子学 (TCPH130004) 讨论课

Xuan Zhang

2023 年 5 月 23 日

Poisson 过程

- Poisson 过程描述的是脉冲信号 (点时间) 在时间上随机出现的过程
- Poisson 的假设：将任何时间作为起始时间，得到的结果服从相同的分布
- 原子核放射的过程是一个 Poisson 过程

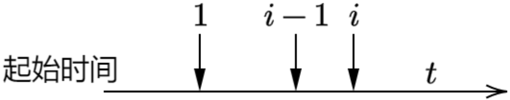


图: Poisson 过程

根据 Poisson 分布的假设可以一步步推得给定时间区间上的脉冲分布数服从 Poisson 分布。

Poisson 过程

Poisson 过程涉及一些随机变量

X_i	第i个脉冲和前一个脉冲的时间, X_1则是从起始时间到第一个脉冲发生的时间
T_i	第i个脉冲到起始点的时间间隔
N_t	长为t的时间段内的脉冲个数

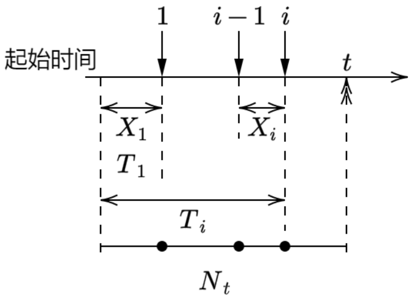


图: Poisson 过程

指数分布

根据假设，所有的 X_i 独立同分布，设他们的分布函数为 $F_X(x) = P(X_i \leqslant x)$，设 $F^c = 1 - F_X(x)$，表示长度为 x 的时间区间内没有脉冲发生的概率，于是有

$$
\begin{aligned}
F^c(s+t) = P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t) = F^c(s)F^c(t) \\
\Rightarrow F^c(t) = [F^c(1)]^t = \mathbf{e}^{\ln F^c(1)\cdot t} \\
\lambda := \ln F^c(1) \quad (1) \\
F_X(t) = 1 - \mathbf{e}^{-\lambda t}, t \in [0, +\infty) \quad (2)
\end{aligned}
$$

概率密度函数为

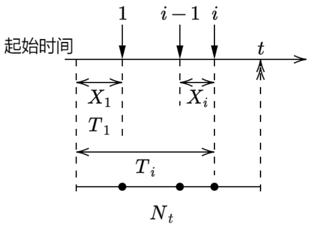
$$f_X(t) = \lambda \mathbf{e}^{-\lambda t} \tag{3}$$

可以计算出指数分布的期望和方差

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

这里产生了一个参数 λ，它的物理意义是平均计数率 (原因在后面给出)

Gamma 分布



$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，设 T_n 的分布函数为 F_{T_n}，概率密度函数为 f_{T_n}，则

$$f_{T_n} = f_X^{*n}(\text{自卷积}n\text{次})$$

可以通过数学归纳法证明

$$f_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{e}^{-\lambda t}, t \in [0, +\infty) \tag{4}$$

如果一个随机变量的分布和 T_n 相同，则称其服从参数为 (λ, n) 的 Gamma 分布

Gamma 分布

可以求出其期望和方差

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{n}{\lambda}, \mathrm{Var}(T_n) = \frac{n}{\lambda^2} \tag{5}$$

在核辐射探测计数系统中，计数器的高进制位的脉冲就服从 (n_0, s) 的 Gamma 分布。虽然 S 越大，gamma 分布的方差也越大，但是相对偏差 (离散系数) 为

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(T_n)}}{\mathbb{E}(T_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

n 越大，相对偏差就越小，且趋近于 0。

计数器高位的脉冲

对于进制为 S 的位，其脉冲间隔服从如下分布

$$f_{T_S}(t) = \frac{n_0^S t^{S-1}}{(S-1)!}\mathbf{e}^{-n_0 t}, t \in [0, +\infty)$$

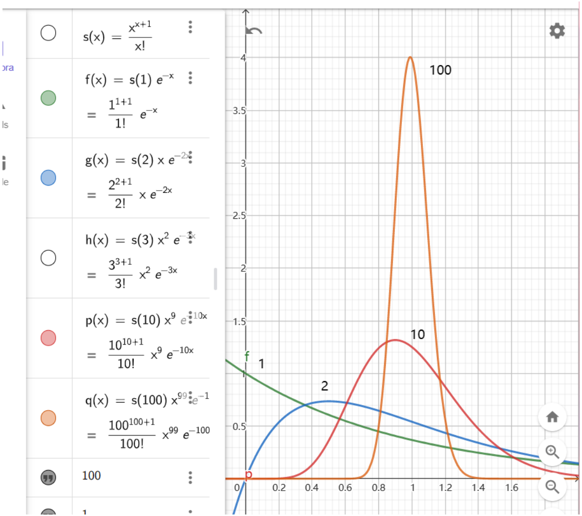
$$\mathbb{E}(T_S) = \frac{S}{n_0}, \mathrm{Var}(T_S) = \frac{S}{n_0^2}, \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(T_S)}}{\mathbb{E}(T_S)} = \frac{1}{\sqrt{S}}$$

随着 S 增大，高位脉冲之间的间隔是越来越均匀的，经过足够高的进位后，脉冲近似均匀分布。只需用最大计数率大于 n_0/S 的计数器，其计数损失就很小了。
取 $\tau = n_0 t/S$，则

$$f_{T_S}(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{S^{S+1}}{S!}\tau^{S-1}e^{-S\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$\mathbb{E}(\tau_S) = 1, \mathrm{Var}(\tau_S) = \frac{1}{S}$$

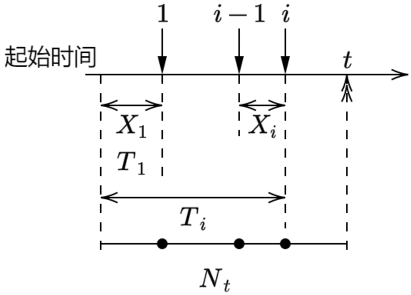
计数器高位的脉冲


$s(x) = \frac{x^{x+1}}{x!}$
$f(x) = s(1)\, e^{-x} = \frac{1^{1+1}}{1!} e^{-x}$
$g(x) = s(2)\, x\, e^{-2x} = \frac{2^{2+1}}{2!} x\, e^{-2x}$
$h(x) = s(3)\, x^2 e^{-3x} = \frac{3^{3+1}}{3!} x^2 e^{-3x}$
$p(x) = s(10)\, x^9 e^{-10x} = \frac{10^{10+1}}{10!} x^9 e^{-10x}$
$q(x) = s(100)\, x^{99} e^{-100x} = \frac{100^{100+1}}{100!} x^{99} e^{-100x}$
100
100
10
1
2

Poisson 分布

现在考虑计算 N_t 的分布，注意到这是一个离散型随机变量，有

$$N_t \geqslant n \Leftrightarrow T_n \leqslant t$$



Poisson 分布

于是有

$$P(N_t \geqslant n) = P(T_n \leqslant t) = F_{T_n}(t) = 1 - \mathbf{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$P(N_t = n) = P(N_t \geqslant n) - P(N_t \geqslant n+1) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathbf{e}^{-\lambda t}$$

可以计算 N_t 的均值和方差

$$\mathbb{E}(N_t) = \lambda t, \mathrm{Var}(N_t) = \lambda t$$

发现 $\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \lambda$ 与 t 无关，所以 λ 在具体的 Poisson 过程中具有实际意义，表示长度为 t 的时间上的平均脉冲数就是 λt。在核辐射探测领域该参数称为**平均计数率**，表示单位时间上的 (理论上的) 脉冲信号数。

参考文献

Introduction to the Poisson Process, aug 10 2020.
[Online; accessed 2023-05-23].

Introduction to the Poisson Process