费米黄金规则（Fermi Golden Rule）

考虑到我们最近也在学量子力学，利用量子力学推导费米黄金规则并不困难。所以简单推导一下

我们考虑的是具有哈密顿量$\hat{H}$的系统具有一个含时的微扰$\hat{V}(t)$

$$\hat{H}' = \hat{H} + \hat{V}(t)$$

将t时刻的状态按照该时刻$\hat{H}$的本征态$\left|\psi_j(t)\right\rangle$展开

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i(t)|\psi_i(t)\rangle$$

注意到本征态随时间演化的规律为

$$\left|\psi_i(t)\right\rangle = \left|\psi_i(0)\right\rangle \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{E_i}{\hbar}t} := \left|\psi_{i0}\right\rangle \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{E_i}{\hbar}t}$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_i c_i(t)|\psi_{i0}\rangle \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{E_i}{\hbar}t}$$

根据薛定谔方程计算量子态的演化

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}'|\psi(t)\rangle$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \sum_i \mathrm{i}\hbar\frac{\partial c_i(t)}{\partial t}|\psi_{i0}\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t} + \sum_i c_i(t)\mathrm{i}\hbar|\psi_{i0}\rangle\cdot\left(-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t} \\
&= \sum_i \mathrm{i}\hbar\frac{\partial c_i(t)}{\partial t}|\psi_{i0}\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t} + \sum_i E_i c_i(t)|\psi_{i0}\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t} \\
\mathrm{RHS} &= (\hat{H}+\hat{V}(t))|\psi(t)\rangle \\
&= \hat{H}\left(\sum_i c_i(t)|\psi_{i0}\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t}\right) + \hat{V}(t)\left(\sum_i c_i(t)|\psi_{i0}\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t}\right) \\
&= \sum_i c_i(t)E_i|\psi_{i0}\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t} + \left(\sum_i c_i(t)\hat{V}(t)|\psi_{i0}\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t}\right)
\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\sum_i \mathrm{i}\hbar\frac{\partial c_i(t)}{\partial t}\left|\psi_{i0}\right\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t} = \sum_i c_i(t)\hat{V}(t)\left|\psi_{i0}\right\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t}$$

两边作用$\left\langle\psi_{k0}\right|$，则得到

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial c_k(t)}{\partial t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_k}{\hbar}t} = \sum_i c_i(t)\left\langle\psi_{k0}\left|\hat{V}(t)\right|\psi_{i0}\right\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_i}{\hbar}t}$$

$$\left\langle\psi_{k0}\left|\hat{V}(t)\right|\psi_{i0}\right\rangle =: V_{ki}(t), \omega_{ki} = \frac{E_k - E_i}{\hbar}$$

于是

$$\frac{\partial c_k(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\sum_i c_i(t)V_{ki}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{ki}t}$$

$$c_k(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t \sum_i c_i(t)V_{ki}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{ki}t}\mathrm{d}t$$

到此都没有做任何近似

让时间 t 为小量，以至于c_i, V_{ki}的变化可以忽略

$$c_k(t) = \sum_i c_i(0) V_{ki}(0) \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\omega_{ki} t}}{\hbar \omega_{ki}}$$

再假设初态是$\hat{H}$的本征态$|\psi_{n0}\rangle$，这意味着$c_i(0) = \delta_{in}$

$$c_k(t) = V_{kn}(0) \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\omega_{kn} t}}{\hbar \omega_{kn}} = V_{kn}(0) \mathrm{e}^{\frac{\mathbf{i}\omega_{kn} t}{2}} \frac{\sin \frac{\omega_{nk} t}{2}}{\hbar \omega_{nk} / 2}$$

这也就意味着在t时刻取得H的本征态$|\psi_k(t)\rangle$的概率$|c_k(t)|^2$为

$$P_{n \to k} = |c_k(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |V_{kn}|^2 \frac{\sin^2(\omega_{nk} t / 2)}{(\omega_{nk} / 2)^2}$$

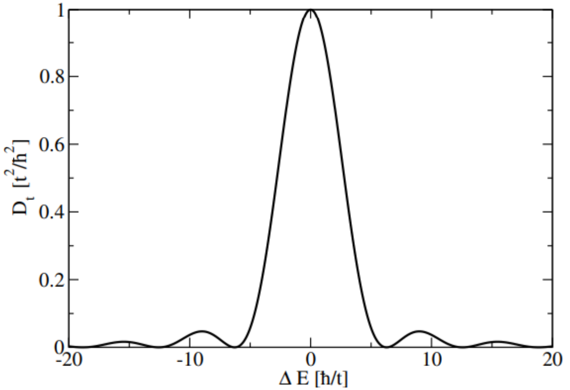
我们感兴趣的其实是能量本征态，也就意味着末态可能存在简并

实际计算简并非常复杂，我们使用态密度近似

$$P = \frac{1}{\hbar^2} |V_{kn}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\omega) \frac{\sin^2((\omega_{nk} - \omega) t / 2)}{((\omega_{nk} - \omega) / 2)^2} \mathrm{d}\omega$$

$$P=\frac{1}{\hbar^2}|V_{kn}|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\omega)\frac{\sin^2((\omega_{nk}-\omega)t\,/\,2)}{((\omega_{nk}-\omega)\,/\,2)^2}\mathrm{d}\omega$$

其中$\frac{\sin^2(xt/2)}{(x/2)^2}$对于足够小的$t$是一个典型的$\delta$函数（没有归一化，归一化系数是其广义积分的倒数）



于是

$$P\approx\frac{1}{\hbar^2}|V_{kn}|\rho(\omega_{nk})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2((\omega_{nk}-\omega)t\,/\,2)}{((\omega_{nk}-\omega)\,/\,2)^2}\mathrm{d}\omega=\frac{2\pi}{\hbar^2}|V_{kn}|^2\rho(\omega_{nk})t$$

我们还是将态密度改成对能量的分布函数，根据$\omega_{nk}=E_{nk}\,/\,\hbar$，$\rho(\omega_{nk})=\rho(E_{nk})\cdot\hbar$

$$P=\frac{2\pi}{\hbar}|V_{kn}|^2\rho(E_{nk})t$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{2\pi}{\hbar}|V_{kn}|^2\rho(E_{nk})$$

这就是费米黄金规则，这里初态用n标记，末态用k标记。一般初末态使用i,f标记

$$\lambda_{i\to f}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{2\pi}{\hbar}|V_{fi}|^2\rho(E_{if})$$

实际上费米黄金定则不一定总是要让末态为能量本征态，更多的时候选择合适的量子态作为考虑的末态，并且选择合适的态密度描述。

β衰变的费米理论

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

考虑β衰变的反应能是Q，反应能是始末态能量差，故$Q = E_{if} = T_e + T_\nu$。取β衰变中，出射电子动量为$[p, p + \mathrm{d}p]$范围内的部分。这部分的辐射常数λ为

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{fi}|^2 \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p\mathrm{d}E_{if}}$$

这里的$\mathrm{d}N$包含了两部分的量子态——电子以及中微子的，忽略反冲核的影响。

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p\mathrm{d}E_{if}} = \frac{\mathrm{d}N_e}{\mathrm{d}p} \cdot \frac{\mathrm{d}N_\nu}{\mathrm{d}p_\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}E_{if}}$$

认为产生的电子和中微子是自由的

$$p_i = \frac{n_i \pi \hbar}{L}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{2\pi^2}\frac{L^3}{\hbar^3}p^2$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p\mathrm{d}E_{if}}=\frac{\mathrm{d}N_e}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}N_\nu}{\mathrm{d}p_\nu}\cdot\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}E_{if}}=\frac{1}{2\pi^2}\frac{L^3}{\hbar^3}p^2\frac{1}{2\pi^2}\frac{L^3}{\hbar^3}p_\nu^2\cdot\frac{1}{c}$$

这里我们忽略了中微子的静止质量，从而得到$\frac{\mathrm{d}p_\nu}{\mathrm{d}E_{if}}=\frac{1}{c}$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p}=\frac{L^6}{2\hbar^7c\pi^3}|V_{if}|^2\cdot p^2\cdot p_\nu^2$$

实际上$p_\nu=\frac{T_\nu}{c}=\frac{Q-T_e}{c}$，于是

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p}=\frac{L^6}{2\hbar^7c^3\pi^3}|V_{if}|^2\cdot p^2\cdot(Q-T_e)^2$$

这就得到了不同动量的电子的辐射常数，也即β射线的动量谱。

书上提到了一个修正因子$F(Z,E)=\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}},x=\frac{2\pi Zc}{137v}$，这一项修正是对原子核的库伦场的修正。（严格讨论这些相互作用需要熟练掌握场论？）

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p}=\frac{L^6}{2\hbar^7c^3\pi^3}|V_{if}|^2\cdot p^2\cdot(Q-T_e)^2\cdot F(Z,E) \tag{1}$$

修正后的结果更加符合实验了

跃迁、选择定则

现在来计算$|V_{if}|^2$

$$V_{if}=\langle\psi_i|\hat{V}|\psi_f\rangle$$

我们的问题中，是电子和中微子双粒子态，且认为它们的末态是在周期性方盒中

$$\psi_{ef}=\frac{1}{\sqrt{V}}\exp(-\mathbf{i}\boldsymbol{k}_e\cdot\boldsymbol{r}),\psi_{ef}=\frac{1}{\sqrt{V}}\exp(-\mathbf{i}\boldsymbol{k}_\nu\cdot\boldsymbol{r})$$

$$V_{if}=\frac{1}{V}\int\psi_{e0}^*\psi_{\nu0}^*\hat{V}\exp(-\mathbf{i}(\boldsymbol{k}_e+\boldsymbol{k}_\nu)\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

不难看出V_{if}是一个关于$\exp(-\mathbf{i}(\boldsymbol{k}_e+\boldsymbol{k}_\nu)\cdot\boldsymbol{r})$线性的量
我们可以把这个式子做展开（e指数展开或者球球面波展开）

$$\exp(-\mathbf{i}(\boldsymbol{k}_e+\boldsymbol{k}_\nu)\cdot\boldsymbol{r})=\begin{cases}1-\mathbf{i}(\boldsymbol{k}_e+\boldsymbol{k}_\nu)\cdot\boldsymbol{r}-\frac{1}{2}((\boldsymbol{k}_e+\boldsymbol{k}_\nu)\cdot\boldsymbol{r})^2+\ldots\\ \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(-1)^lJ_l(|(\boldsymbol{k}_e+\boldsymbol{k}_\nu)\cdot\boldsymbol{r}|)P_l(\cos\theta)\end{cases}$$

当展开式中的主项（$l=0$的项）具有贡献是，称为**容许跃迁。**

如果主项的贡献为0，则余项的贡献下，跃迁的概率非常小，称为**禁戒跃迁。**

衰变过程具有一定的守恒律，从而可以得到一定的选择定则。这部分的内容较为繁琐。

库里厄图（Kurie Plot）

注意这是plot。不是picture也不是diagram。

实验上，为了可以验证β衰变的Fermi理论，Kurie首先采用一些变换处理手段将关系转化为近线性的关系来研究，也就是说Kurie图是一种专门的实验数据可视化的方法。方法如下

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p} &= \frac{L^6}{2\hbar^7c^3\pi^3}|V_{if}|^2\cdot p^2\cdot(Q-T_e)^2\cdot F(Z,E)\\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{p^2F(Z,E)}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p}} = K(Q-T_e)\end{aligned}$$

Kurie图即绘制$\sqrt{\frac{1}{p^2F(Z,E)}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p}}$和$T_e$的曲线，得到一个明显的线性关系。

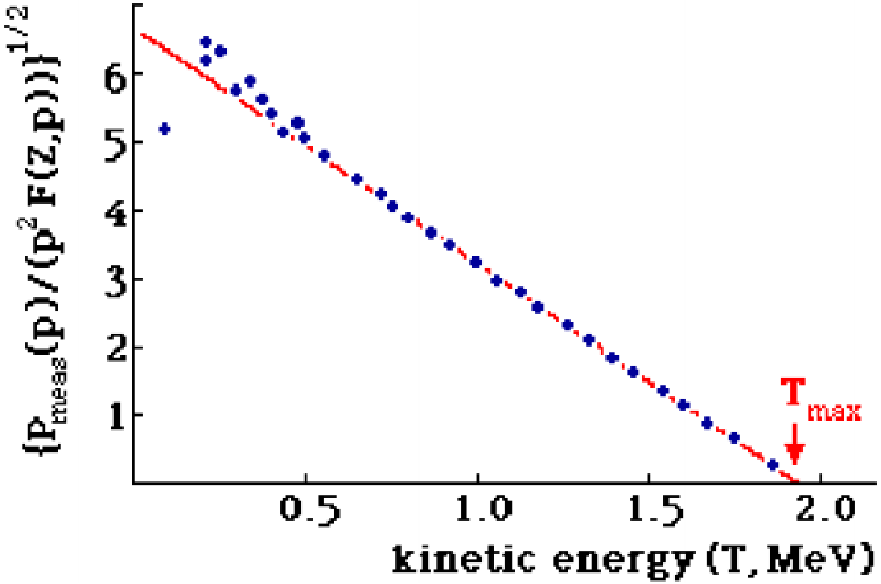


Figure 1: 图片来源phys.libretexts.org

$$\boxed{\sqrt{\frac{1}{p^2 F(Z,E)}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p}}} = K\left(Q - \boxed{T_e}\right)$$

可惜好事情不是总发生的，库里厄图是线性的，这一点要求K是不变的。

$$K=\sqrt{\frac{L^6}{2\hbar^7c^3\pi^3}|V_{if}|^2}=\sqrt{\frac{L^6}{2\hbar^7c^3\pi^3}}|V_{if}|$$

对于容许跃迁

$$K\propto|V_0|\approx\frac{1}{V}\int\psi_{e0}^*\psi_{\nu0}^*\hat{V}(1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

K基本不变

对于禁戒跃迁，存在一定的形状因子$S_n(E)$，在修补了形状因子后，也可以得到较好的线性性。

$$\boxed{\sqrt{\frac{1}{p^2F(Z,E)}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p}S_n}}=K\Big(Q-\boxed{T_e}\Big)$$

- 观察表达式不难发现，曲线和X轴的交点恰好是反应能，同时由于曲线具有良好的线性性，通过线性拟合可以得到反应能Q的非常精确的结果。
- 库里厄图同时还可以用来对复杂β谱进行分解。

  复杂β谱的$|V_{if}|$不固定，但能量最高的β射线的跃迁矩阵元是固定的，于是通过高能区的直线向低能区延长，可以分辨计数的来源是何种β衰变。
- 通过选取最合适的形状因子，可以判断跃迁的类型，不同禁戒跃迁对应不同的形状因子。
- 可以测量中微子质量

  实际的曲线在高能端有偏移，偏移是由于中微子具有质量造成的。经过复杂的运算验证后，发现偏离线性拟合的横截距的程度恰好就是中微子的质量。

参考文献

1. 荣誉课程参考资料
2. 密歇根大学的核物理课程讲义
   (a) http://websites.umich.edu/~ners311/CourseLibrary/bookchapter13.pdf
   (b) http://websites.umich.edu/~ners311/CourseLibrary/bookchapter15.pdf
3. 隆德大学课程讲义http://www.matfys.lth.se/staff/andreas.wacker/Scripts/fermiGR.pdf