

核辐射统计规律和辐射外照射防护设计

Xuan yi, 复旦大学核科学与技术系

摘要: 本实验由两个实验组成, 分别是核辐射的统计规律和辐射外照射防护设计。在核辐射统计规律中, 我们测量了一组 (300 个) 较高的核辐射计数值和一组较低的计数值, 分别验证它们服从正态分布和 Piosson 分布。在辐射外照射中, 分别探究了辐射的计数率与距离、屏蔽层厚度以及时间的关系。本实验的数据和数据处理均已上传Github¹中。

关键词: 核辐射 χ^2 -检验 辐射防护 误差分配

一、引言

核辐射是一种无处不在且不可避免的现象, 它在医疗诊断、工业生产以及能源开发等领域都扮演着重要的角色。然而, 虽然核辐射具有广泛的应用, 但其潜在的危害也是不可忽视的。在处理核辐射时, 人们必须深入了解其统计规律和辐射外照射防护设计, 以最大限度地减少对人类和环境的不利影响。

本实验旨在探索核辐射的统计规律, 以及设计有效的辐射外照射防护措施。通过实验, 我们将深入研究核辐射的特性、分布规律以及与之相关的辐射量测量方法。同时, 我们还将探讨如何利用不同的防护方法来使得对人体和周围环境的辐射下降一个量级。

在核辐射统计规律实验中, 我们使用 ^{137}Cs 放射源测量了 300 个较高的计数值, 并通过幅度分析器的阈值调控, 得到 300 个较低的计数值, 然后使用 Pearson 卡方检验, 来验证它们服从正态分布和 Piosson 分布。

在辐射外照射防护设计实验中, 我们仍然使用了 ^{137}Cs 放射源, 测量了不同距离、屏蔽层厚度和测量时长条件下的计数率, 验证了计数率和距离的平方反比关系, 计数率随厚度的指数衰减关系以及随时长不变的关系。

本实验的结果将为我们提供对核辐射统计规律更深入的理解, 有助于制定更加科学和有效的核辐射管理策略, 以确保人类和环境的安全。同时, 通过本实验, 我们也将为未来的相关研究和应用提供有价值的参考和基础。

二、实验目的

1. 了解并验证原子核衰变以及放射性的统计性;
2. 学习检验测量数据的分布类型的方法;
3. 设计三种方案使得人员处于放射性场所时, 所受到的辐射剂量减小一个量级。

¹<https://github.com/Xuanyiyiren/Fundamental-Laboratory-Experiment-in-Nuclear-Electronics-II/tree/main/Experiment-1and8>

三、实验原理

3.1 核辐射的统计规律

3.1.1 单个原子核

对于单个原子核的放射性而言，具有一个非常重要的特性——历史无关性。即经过一天尚未放射的原子核和经过三十年尚未放射的原子核，它们的放射规律相同。我们设从某一个时刻开始原子核产生放射的时间是 T 。设他们的累计分布函数为 $F(t) = P(T \leq t)$ ，于是 $F^c(t) := 1 - F(t)$ 表示长度为 t 的时间区间内没有衰变的概率，于是有

$$\begin{aligned} F^c(s+t) &= P(T > s+t) = P(T > s)P(T > t) = F^c(s)F^c(t) \\ \Rightarrow F^c(t) &= [F^c(1)]^t = e^{\ln F^c(1) \cdot t} \\ \lambda &:= \ln F^c. \end{aligned}$$

立即得到原子核产生放射性的时间的累积分布函数

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \in [0, +\infty)$$

其概率密度函数为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

可以计算出指数分布的期望和方差

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

这里产生了一个参数 λ ，称为原子核的衰变率。对于原子核而言，我们通常使用其期望值 $\frac{1}{\lambda}$ 作为原子核的（平均）寿命。另一个常用的参数为半衰期 $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ 。

3.1.2 放射性物质

放射性物质中具有多个放射性原子核，原子核放射性的第二个重要的特性是环境独立性，即原子核的放射性规律不会随着环境（包括宏观环境和微观环境）的改变，在多原子核体系中，各原子核的放射性规律相互独立。

不妨设开始时放射性原子核总数是 N_0 ，观测时间为 0 到 T 时刻，在这一时间段内，单个原子核衰变的概率为

$$F(T) = 1 - e^{-\lambda T}$$

由于不同原子核之间的放射性衰变具有独立性，这实际上就是一个伯努利过程 (Bernoulli process)，这个时间段内的放射性计数 N 服从二项分布

$$N \sim B(N_0, 1 - e^{-\lambda T})$$

在 $0 \sim T$ 时间内产生 n 个衰变计数的概率为

$$\begin{aligned} P_N(n) &:= P(N = n) = \binom{N_0}{n} [F(T)]^n [1 - F(T)]^{N_0 - n} \\ &= \frac{N_0!}{(N_0 - n)!n!} (1 - e^{-\lambda T})^n (e^{-\lambda T})^{N_0 - n} \end{aligned}$$

计数的平均值以及方差为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= N_0 \cdot (1 - e^{-\lambda T}) \\ \text{Var}(N) &= N_0 (1 - e^{-\lambda T}) (e^{-\lambda T}) = \mathbb{E}(N) e^{-\lambda T} \end{aligned}$$

如果观测的时间远小于半衰期，即 $\lambda T \ll 1$ ，则

$$\text{Var}(N) = \mathbb{E}(N), \sigma(N) = \sqrt{\text{Var}(N)} = \sqrt{\mathbb{E}(N)}$$

3.1.3 近似为 Poisson 分布

Poisson 分布可以是二项分布的极限形式

在条件 $N \rightarrow \infty, Np = \text{const.}$ 下，二项分布 $B(N, p)$ 将趋近于泊松分布 $P(\lambda), \lambda = Np$

$$P_N(n) = \frac{\Lambda^n}{n!} e^{-\Lambda}, \Lambda = N_0(1 - e^{-\lambda T})$$

其期望和方差为

$$\mathbb{E}(n) = \frac{1}{\Lambda}, \text{Var}(n) = \frac{1}{\Lambda}$$

3.1.4 近似为 Gauss 分布

根据大数定理， N 足够大时，Bernoulli 过程 $B(N, p)$ 会被近似到正态分布，另外参数足够大的 Poisson 分布也可以用 Gauss 分布来替代。

$$\begin{aligned} p_N(n)dn &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(n - \bar{n})^2}{2\sigma^2}\right) dn \\ \bar{n} &= N_0 (1 - e^{-\lambda T}), \sigma^2 = N_0 (1 - e^{-\lambda T}) (e^{-\lambda T}) = \bar{n} e^{-\lambda T} \end{aligned}$$

如果观测的时间远小于半衰期，之前的结论也成立

$$\sigma = \sqrt{\bar{n}} \quad (1)$$

3.1.5 核辐射统计计数和误差

当观测的事件远小于半衰期时，式(1)成立，于是单次计数的测量结果可以报道为

$$N \pm \sqrt{N}$$

对于计数率 $n = \frac{N}{T}$ ，这里 T 是测量计数的事件，则有

$$\sigma_n = \frac{\sigma_N}{T} = \frac{\sqrt{N}}{T} = \sqrt{\frac{n}{t}} \quad (2)$$

3.2 Pearson χ^2 检验法和 p -值

假设检验是判定某种论断（假设）是否可信的方法，待判定的论断称为零假设 (Null hypothesis)。在假设检验中，我们通常根据零假设，得出某种统计量的统计分布，并且根据显著性程度 α （一个 $(0, 1)$ 范围内非常小的数），构造统计量出现的概率小于 α 的一个区间，这个区间就称为拒绝域，如果统计量的结果落在了拒绝域中，则拒绝假设。即图1所示。

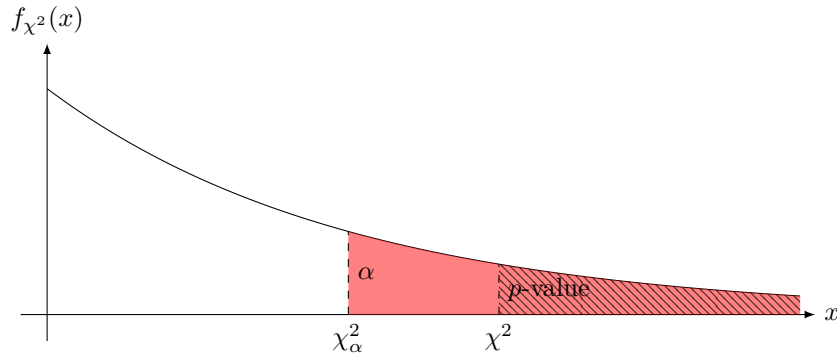


图 1 假设检验和 p -值：这时所构造的统计量的概率密度函数，图中的红色部分的面积是 α ，阴影部分的面积是 p -值。红色部分对应的 x 轴部分 $\{x : x > \chi^2_{\alpha}\}$ 是所谓的拒绝域，如果统计量落入拒绝域，则 p -值小于 α ，拒绝零假设

对于不同的假设检验，有不同的统计量，使用统计量和拒绝域的作为准则，会使得假设检验的准则非常复杂。现代统计学使用的是 p -值 (p -value)，即通过实际的统计量，计算零假设成立的条件下，得到当前统计量的概率，这就是 p -值。当 p -值比显著性程度 α 更小时，说明如果假设成立，现在发生的事情就是一个小概率事件（是否判定小概率取决于显著性程度 α ），那么更大的可能是零假设有问题，所以拒绝假设。

Pearson 卡方检验是一种非参数检验方法，为了检验某样本 X_i 是否服从某分布 f_X ，将样本分为几组范围 $[x_1, x_2), [x_2, x_3), \dots, [x_{n-1}, x_n]$ 并统计每组的个数 $N_{\text{obs},i}$ ，然后根据统计分布预测出分组后每组个数的期望值 $N_{\text{exp},i}$ 。根据大数定理，统计量

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{N_{\text{obs},i} - N_{\text{exp},i}}{N_{\text{exp},i}} \right)^2$$

应该服从自由度为 n 的卡方分布，这里 n 是分组个数。如果分布中存在未知参数，需要使用极大似然法从样本估计该参数从而得到理论预测值，并且统计量所服从的卡方分布的自由度应该减去参数的个数。

3.3 计数率和距离、屏蔽层以及测量时间的关系的理论预测

从前面的推导可以看出，对于稳定源而言，计数服从 Poisson 分布，从而计数率与时间无关。

计数率和距离之间满足平方反比规律，这是因为物体接收到的辐射实际上就是粒子，而放射性通常具有各向同性，于是物体接收到的辐射剂量正比于物体相对于放射源的立体角，从而满足平方反比规律。

计数率和屏蔽层厚度之间满足指数衰减规律，这是因为核辐射与物质相互作用与环境无关的特性，就导致核辐射粒子被吸收与否与粒子入射的厚度无关。这一假设十分贴近单粒子衰变的历史无关性，于是利用类似的推理即可得知计数率 n 与屏蔽层厚度 t 之间的关系是一个空间上的指数分布 $n(t) = n_0 e^{-\mu t}$ 。

3.4 净计数的误差分配和测量时间分配

测量放射性源计数率时，往往伴随着本底计数，为了得到更准确的结果，通常拿走放射源的情况下，测量一个本底计数 n_b ，然后再测量一次总计数率 n_t ，则放射源准确的计数率应该是去掉本底的计数率

$$n = n_t - n_s$$

净计数的误差需要使用误差合成公式，得到

$$\sigma_n^2 = \sigma_{n_t}^2 + \sigma_{n_s}^2$$

根据放射性的统计规律式(2)

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{n_t}{T_t} + \frac{n_b}{T_b}}$$

在总测量时间 $T = T_t + T_b$ 一定的情况下，合理的控制时间分配，可以将误差均匀更分配到两部分计数率上，从而减少误差。不难发现，当满足

$$\frac{T_t}{T_b} = \sqrt{\frac{n_t}{n_b}} \quad (3)$$

时，误差达到最小。取 $r = \frac{n_t}{n_b}$ ，得到最小误差

$$\sigma_{n,\min}^2 = \frac{(1 + \sqrt{r})^2}{T n_b}, v_{n,\min}^2 = \left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2 = \frac{(1 + \sqrt{r})^2}{T n_b(1 - r)} =: \frac{Q}{T} \quad (4)$$

其中， $Q = \frac{(1 + \sqrt{r})^2}{n_b(1 - r)}$ 是优质因子。

在进行净计数率的测量时，为了以较少的时间得到较精确的结果，可以进行预实验，简单的测量一下本底计数率和总计数率，根据式(3)分配正式实验的测量时间。这种预测量-分配的实验技巧在本底计数率较低短时间没有有效计数时，显得非常重要。

四、实验装置

实验台号：7-3

- ^{137}Cs 放射源，微居，1 个
- NaI(Tl) γ 探头 $\Phi 40 \times 40 \text{ mm}$ FJ-374，1 个
- 高压电源 BH1283N 1 个
- 线性脉冲放大器 BH1218 1 个
- 单道脉冲幅度分析器 BH1299A 1 个
- 定标器 BH1220N 1 个
- 插件机箱以及低压电源 FH0001 BH1222 各 1 个
- 双踪示波器 TDS1001B-SC 1 台
- 导线若干、BNC 同轴电缆若干

实验装置图如图2所示

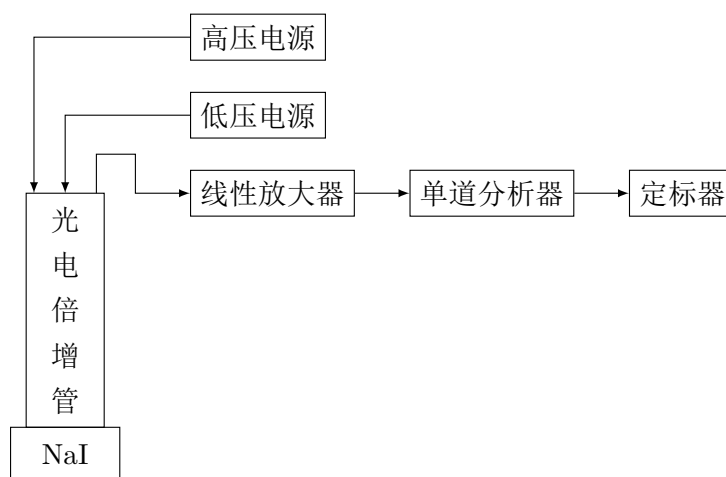


图 2 实验装置图

五、实验过程

5.1 核辐射统计规律

按照实验装置图连接好线路并使用示波器检查各处波形是否正常。观察到各处波形正常时，参数设置如表1所示

取 ^{137}Cs 放射源，放置到NaI探头下方适当位置处。取定标器的测量时间为1s观察到平均计数超过100，连续测量300次计数并记录。然后移开放射源，调节定标器和单道分析器的阈值，使得平均计数为6左右，重复测量300次并记录。

5.2 计数率和距离、屏蔽层以及测量时间的关系

仍然保持上一步骤中的仪器连接和参数设置，但是将阈值降低回1V。

表 1 仪器参数表

仪器名称	参数名词	参数值
高压电源	高压	3.5 圈
线性放大器	粗调增益	20 倍
	细调增益	0.9
	微分时间	max
	积分时间	min
单道分析器	工作模式	积分
	阈值(下阈)	1 V
定标器	阈值	1 V

预测量：设计三组参数，分别改变探测器和放射源的距离，探测器和放射源之间的屏蔽层厚度以及测量时间。在前两组的每个参数条件下，测量放射源的总计数 10s，并为两组分别测量背景计数 10s。利用所测的数据，分配正式测量时的测量时间。分配方法参考第3.4节，注意受到定标器限制，每次测量时间都必须为整数。本实验中，从预测量的参数值确定时间分配的结果如表4和表5所示

表 2 距离参数预测量

总计数	本底计数	距离参数 (m)	理想时间计数	最佳总计数测量时间 (s)	最佳本底测量时间 (s)
8574	944	25	3.01374	60	20
4484	944	23	2.179449	61	28
2982	944	21	1.777329	64	36
2362	944	19	1.581809	49	31
1916	944	17	1.424662	57	40
1624	944	15	1.311617	55	42

表 3 屏蔽层参数预测量

总计数	本底计数	屏蔽层 (g/cm ²)	理想时间比值	最佳总计数测量时间 (s)	最佳本底测量时间 (s)
2982	994	0	1.732051	52	30
2696	994	1.84	1.646898	56	34
2248	994	3.658	1.503852	48	32
2137	994	5.419	1.466254	50	34
1873	994	7.239	1.3727	48	35
1729	994	8.985	1.318877	54	41
1615	994	10.777	1.274656	51	40

正式测量：按照预测量的结果得到的分配时间，测量前两组每组参数的本底和计数率。对于最后一组，测量时间选择表4第四行（距离参数为 21 m）的最小时间比值 16 : 9 的倍增 1 倍至 5 倍。

六、实验结果和分析

6.1 高计数的正态分布检验

本部分结果对应第5.1节中，带源的计数测量结果，使用数据的均值和样本方差分组统计，分组区间为

$$\dots, \left[\mu - \frac{3}{4}\sigma, \mu - \frac{1}{4}\sigma \right], \left[\mu - \frac{1}{4}\sigma, \mu + \frac{1}{4}\sigma \right], \left[\mu + \frac{1}{4}\sigma, \mu + \frac{3}{4}\sigma \right], \dots$$

对于频次少于 5 的区间，将其与相邻的区间合并，得到 Pearson χ^2 -检验的结果如图3所示， p -值为 0.254，对于通常选择的显著性水平 $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ 下，不能拒绝假设，即认为带源的计数的确符合正态分布。

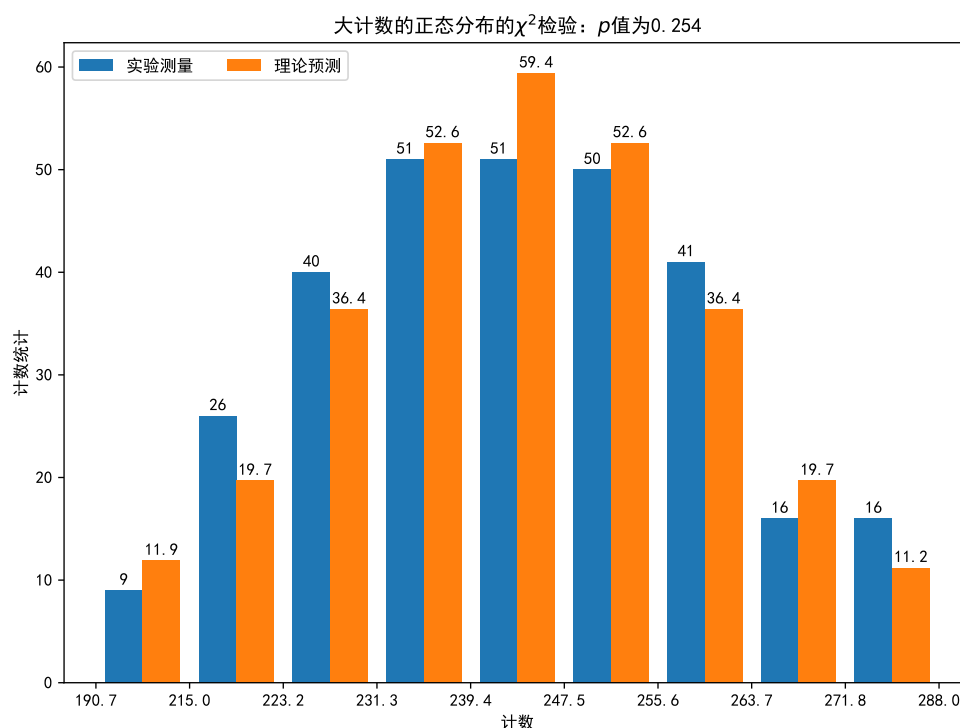


图3 Pearson χ^2 -正态检验

6.2 低计数的 Poisson 分布检验

本部分结果对应第5.1节中，不带源且使用高能量阈值筛选的低计数测量结果，使用数据的均值和样本方差分组统计，由于计数本身较低，于是使用单位长度的整数区间作为分组。

对于频次少于 5 的区间，将其与相邻的区间合并，得到 Pearson χ^2 -检验的结果如图4所示， p -值为 0.588，对于通常选择的显著性水平不能拒绝假设，即认为带源的计数的确符合 Poisson 分布。

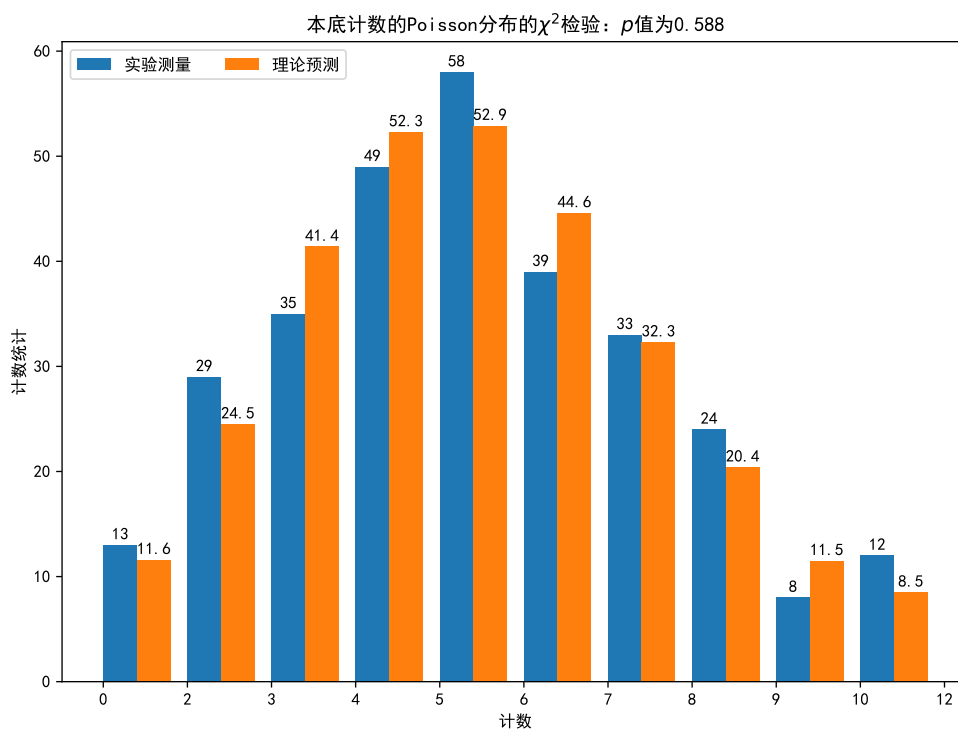


图 4 Pearson χ^2 -Poisson 检验

6.3 辐射外照射防护设计

本部分结果对应第5.2节

6.3.1 计数率和距离的关系

将探测器固定在刻度为 50 cm 处, 不加屏蔽层, 改变放射源平台的刻度, 取刻度差 (探测器刻度减去放射平台刻度) 为横坐标, 纵坐标为计数率 n , 以函数

$$n = \frac{a}{(x - x_0)^2} \quad (5)$$

做曲线拟合, 得到的结果如图5和表4所示

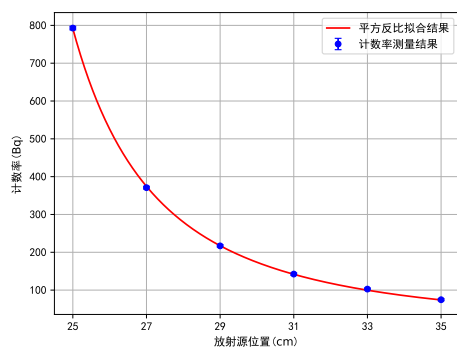


表 4 平方反比拟合结果

拟合参数	拟合结果
系数 $a(\text{s cm}^{-2})$	$(1.53 \pm 0.02) \times 10^4$
水平偏移 $x_0(\text{cm})$	20.60 ± 0.03
决定系数 r	0.99994

图 5 计数率和距离的关系

可以发现决定系数达到了4个9，这非常好地验证了计数率随距离的平方反比规律。

6.3.2 计数率和屏蔽层厚度的关系

将探测器固定在刻度为50 cm处，放射源平台固定到刻度25 cm，取新加的屏蔽层的质量厚度为横坐标，纵坐标为计数率 n ，以函数

$$n = n_0 \exp(-\mu t) \quad (6)$$

做曲线拟合，得到的结果如图6和表5所示。

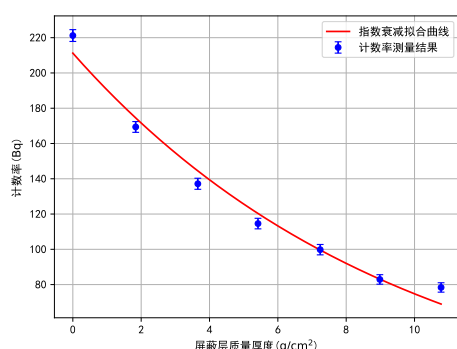


表5 指数衰减拟合结果

拟合参数	拟合结果
无屏蔽计数率 n_0 (Bq)	211 ± 7
质量相互作用系数 μ (cm² g)	0.104 ± 0.007
决定系数 r	0.981

图6 计数率和距离的关系

该规律的拟合效果较差²，实验所用的屏蔽层的质量厚度并不是重新测量，而是直接从标签上读出，可能是因为质量厚度的标签不准确所致。另一方面也和屏蔽层本身厚度不均匀等方面的问题。

6.3.3 计数率和测量时间的关系

将探测器固定在刻度为50 cm处，放射源平台固定到刻度25 cm，不加屏蔽层，纵坐标为计数率 n ，总计数的测量时间为横坐标，考虑进行线性拟合得到的结果如图7和表6所示。

可见拟合效果较差，但是得到斜率非常小，这其实恰恰说明了计数率是与时间无关的而又自身具有一定的涨落的。如果测量更多组数据，将会有更多的统计学方法来验证这个规律，当然这个规律也是核放射性的基本理论之一。

6.3.4 降低剂量的方法

综合前面的测量结果，可以得到

$$n = \frac{a}{r^2} e^{-\mu t}$$

$$a = (1.53 \pm 0.02) \times 10^4 \text{ s cm}^{-1}, \mu = 0.104 \pm 0.007 \text{ cm}^2/\text{g}$$

²该数据用平方反比规律拟合，决定系数达到两个9

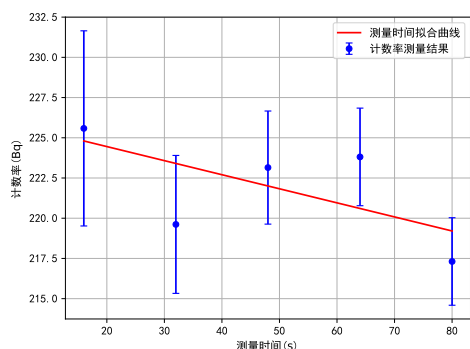


图 7 计数率和距离的关系

表 6 线性拟合结果

拟合参数	拟合结果
斜率 $n_0(\text{Bq/s})$	$(-9 \pm 7) \times 10^{-2}$
截距 $\mu(\text{Bq})$	$(2.26 \pm 0.04) \times 10^2.0$
决定系数 r	0.377

关于 x_0 的拟合结果吸收到 r 中，对于 n_0 的测量结果只是其在相应参数下无屏蔽层的计数率的重新测量而已。从理论上讲，系数 a 中包含了放射源活度，探测器有效面积和探测效率，辐射的空气衰减等信息。

于是，为了将剂量降低一个量级，可以有如下方法

- 和放射源的距离增加为原来的 3 倍以上；
- 将屏蔽层厚度增加半吸收厚度的 3 倍及以上，即 1/10 吸收厚度；
- 将暴露在放射源下的时间减小一个量级。

这里对于实验室用的 ^{137}Cs 源放射的 γ 射线而言，实验用的屏蔽层铅 1/10 的质量吸收厚度为 $\frac{\ln 10}{\mu} = 22.16 \text{ g/cm}^2$ 。即使用质量厚度为 22.16 g/cm^2 铅板即可让剂量降低一个量级。

七、实验结论

1. 通过 ^{137}Cs 源的重复测量，验证了高计数稳定源的计数服从正态分布
2. 通过同样的方法验证了低计数稳定源服从 Poisson 分布
3. 通过探究剂量的影响因素，得到了将剂量降低一个量级的办法：
 - 和放射源的距离增加为原来的 3 倍以上；
 - 将屏蔽层厚度增加半吸收厚度的 3 倍及以上，即 1/10 吸收厚度，对于实验使用的 ^{137}Cs ，只需使用 22.16 g/cm^2 质量厚度的屏蔽层（铅板）即可；
 - 将暴露在放射源下的时间减小一个量级。