数学 09

- 提取公因数
- 莫比乌斯函数
- 莫比乌斯反演
- 题目选讲

提取公因数

提取公因数与整除分块一样，是数论题的常用科技

给定 n，m，考虑化简

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\gcd(i,\ j)$$

注意到 $1 \le \gcd(i,\ j) \le \min(n,\ m)$，当且仅当 $i = j = \min(n,\ m)$ 时取到等号

枚举 $d=\gcd(i,\ j)$，考虑贡献，于是上式变为

$$\sum_{d=1}^{\min(n,\ m)} d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,\ j)=d]$$

其中 $[x]$ 表示指示函数，取值如下所示

$$[x]=\begin{cases}1 & x=1\\0 & x=0\end{cases}$$

我们知道，$d \mid i$，$d \mid j$，令 $x = \frac{i}{d}$，$y = \frac{j}{d}$，于是 $\frac{1}{d} \le x \le \frac{n}{d}$，$\frac{1}{d} \le y \le \frac{m}{d}$

结合 x，$y \in \mathbb{Z}^+$，于是 $1 \le x \le \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$，$1 \le y \le \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$

$$\sum_{d=1}^{\min(n,\ m)} d \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \sum_{y=1}^{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor} [\gcd(x,\ y) = 1]$$

提取公因数本质上是把对于 $\gcd(i,\ j)$ 的计算从枚举 $i,\ j$ 转化为枚举 $d = \gcd(i,\ j)$ 的值

至于计算

$$\sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \sum_{y=1}^{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor} [\gcd(x,\ y) = 1]$$

等介绍完莫比乌斯反演后，一切就都会揭晓

莫比乌斯函数

本讲我们介绍莫比乌斯函数，这也是一个常见的积性函数，其定义式如下所示

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \text{ 含有平方因子} \\ (-1)^k & k \text{ 为 } n \text{ 的本质不同质因子个数} \end{cases}$$

常数函数的狄利克雷卷积逆元

莫比乌斯函数 μ 是常数函数 1 的狄利克雷卷积逆元，即

$$\mu * 1 = \varepsilon$$

从验证的角度着手

我们来验证一下莫比乌斯函数是否是常数函数的狄利克雷卷积逆元，回顾一下狄利克雷卷积逆元

当 $n = 1$ 时

$$g(n) = \frac{1}{f(1)}$$

当 $n > 1$ 时

$$g(n) = -\frac{\sum\limits_{d|n,\ d>1} f(d)g(\frac{n}{d})}{f(1)}$$

设 $g * 1 = \varepsilon$，我们来验证 g 是否等于 μ

注意到 $1(n) = 1$，当 $n = 1$ 时，代入便能验证

$$g(1) = \frac{1}{1(1)} = 1$$

当 $n \neq 1$ 时

$$g(n) = -\sum_{d|n,\ d>1} g(\frac{n}{d})$$

考虑两种特殊的情形

- 当 n 为质数，即 $n = p$，有 $g(p) = -g(1) = -1$
- 当 n 为质数幂，即 $n = p^k$，有 $g(p^k) = -\sum_{i=1}^{k-1} g(p^i)$，我们可以先考虑 $k = 2$ 的情形，发现 $g(p^2) = -g(p) - g(1) = 0$，由此往 $k \geq 3$ 的情况做数学归纳，可以得到 $g(p^k) = 0$

如果你还记得之前介绍的结论：积性函数的狄利克雷卷积逆元仍然是积性函数

那么当 n 为质数乘积，即 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i$ 时

$$
\begin{aligned}
g(n) &= g(\prod_{i=1}^{k} p_i) \\
&= \prod_{i=1}^{k} g(p_i) \\
&= (-1)^k
\end{aligned}
$$

当 n 中至少含有一个质因数两次时，乘积中就会出现 0，此时 $g(n) = 0$

我们发现，每一种情况 g 的取值都与 μ 如出一辙，因此 $g = \mu$，是 1 的狄利克雷卷积

从狄利克雷卷积角度探索

考虑计算狄利克雷卷积

$$\begin{aligned}(\mu * 1)(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) 1(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{d|n} \mu(d)\end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时，$(\mu * 1)(1) = \mu(1) = 1$

当 $n \neq 1$ 时，设 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$，$n' = \prod_{i=1}^{k} p_i$

例如 $n = 12 = 2^2 \cdot 3$

则 $n' = 6 = 2 \cdot 3$

有 $\sum_{d|12} \mu(12) = \sum_{d|6} \mu(6)$

因此

$$
\begin{aligned}
(\mu * 1)(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n'} \mu(d) \\
&= \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i 1^{k-i} \\
&= (1 + (-1))^k \\
&= 0
\end{aligned}
$$

上面的操作，实际上是在挑选 n' 的质因子，因为 n' 的任意因数，都可以由 n' 的质因子组合乘积而成

综上所述，我们得到一个结论

$$\mu * 1 = \varepsilon$$

也就是说，莫比乌斯函数 μ 是常数函数 1 的狄利克雷卷积逆元

莫比乌斯函数是积性函数

上面也提到了 μ 是积性函数，这不仅可以从定义式证明，也可以从狄利克雷卷积逆元的角度证明

莫比乌斯函数的性质

对上面提到的结论总一个总结

- μ 是积性函数
- $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$
- $\mu * 1 = \varepsilon$

线性筛莫比乌斯函数

研究积性函数，很重要的一点是研究该积性函数能否被线性筛预处理

是的，莫比乌斯一样可以被线性筛

首先 $\mu(1) = 1$，其次考虑筛的过程，对于质因子 p 和当前枚举的数 i

- 如果 i 本身是素数，则 $\mu(i) = -1$
- 如果 $i \equiv 0 \ (mod\, p)$，那么说明在 i 中，质因子 p 已经出现了一次，那么 $p \cdot i$ 中至少出现 p 两次，因此 $\mu(p \cdot i) = 0$
- 如果 $i \not\equiv 0 \ (mod\, p)$，那么根据积性函数性质，有 $\mu(p \cdot i) = \mu(p) \cdot \mu(i)$

```
mu[1] = 1;
for (int i = 2; i <= n; ++i)
{
    if (!vis[i]) prime[++cnt] = i, mu[i] = -1;
    for (int j = 1; j <= cnt && prime[j] * i <= n; ++j) {
        vis[i * prime[j]] = 1;
        mu[i * prime[j]] = mu[i] * mu[prime[j]];
        if (i % prime[j] == 0) {
            mu[i * prime[j]] = 0;
            break;
        }
    }
}
```

莫比乌斯反演

设 $f(n)$，$g(n)$ 为两个数论函数，莫比乌斯反演指的是

如果有

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

那么有

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$

从狄利克雷卷积角度推导公式

在介绍了狄利克雷卷积以及莫比乌斯函数之后，我们可以轻易地从狄利克雷卷积角度证明上面的公式，我们将上面的式子写成卷积形式

$$f = 1 * g$$

上式两边同时卷积 μ，根据 μ 是 1 的狄利克雷卷积逆元，再根据结合律，以及 ε 单位元的性质

$$\begin{aligned} \mu * f &= (\mu * 1) * g \\ &= \varepsilon * g \\ &= g \end{aligned}$$

于是

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$

最大公因数遇上莫比乌斯函数

由前面的推导我们知道

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

对于任意两个数 i，j，我们用 $\gcd(i,\ j)$ 替换 n，于是得到下面的结论

$$[\gcd(i,\ j) = 1] = \sum_{d|\gcd(i,\ j)} \mu(d)$$

上式即为

$$\varepsilon(\gcd(i,\ j)) = \sum_{d \mid \gcd(i,\ j)} \mu(d)$$

常见的问题形式

之所以要介绍最大公因数与莫比乌斯函数的结合，是因为在一般情况下，构造一个

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

形式的式子是比较难的，我们通常把问题化成 $\gcd$ 的形式，然后通过莫比乌斯反演来计算答案

莫比乌斯反演例题

莫比乌斯反演的题大多是凑出 $\gcd$ 的形式，结合提取公因式和整除分块两大技巧，以及线性筛莫比乌斯函数解决问题

纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行

例 1

给定 n，m，计算

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,\ j) = 1]$$

使用莫比乌斯反演

$$[\gcd(i,\ j) = 1] = \sum_{d|\gcd(i,\ j)} \mu(d)$$

得到

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|\gcd(i,\ j)} \mu(d)$$

提取公因式，上式变为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{d=1} \mu(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor} 1 \\
=&\sum_{d=1} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

线性筛预处理 μ 的前缀和，结合二维数论分块，便可以在 $O(N + \sqrt{N})$ 时间计算答案，其中 $N = \min(n,\ m)$

例 2

给定 n，m，k，计算

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,\ j)=k]$$

变换得到

$$\sum_{x=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \sum_{y=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor} [\gcd(x, y) = 1]$$

莫比乌斯反演

$$\sum_{x=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \sum_{y=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor} \sum_{d \mid \gcd(x,y)} \mu(d)$$

提取公因数后化简

$$\sum_{d=1}\mu(d)\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor\lfloor\frac{m}{kd}\rfloor$$

预处理莫比乌斯函数，二维整除分块即可，时间复杂度仍然是 $O(N+\sqrt{N})$

事实上，这题只比上一题在整除分块的分母上多乘以了个 k 而已

2636 莫比乌斯函数

给定 n，计算

$$\sum_{i=1}^{n} i\mu(i)$$

$1 \le n,\ m \le 10^7$

题解

用线性筛筛莫比乌斯函数后计算

2635 互质对的数量

给定 n，m，对于所有 i，j，满足 $1 \le i \le n$，$1 \le j \le m$，计算 $\gcd(i, j) = 1$ 的 (i, j) 对数量，换句话说，计算所有互质对的数量

$1 \le n, m \le 10^7$

题解

参考上面的例题讲解，最后计算

$$\sum_{d=1}^{\min(n,\ m)} \mu(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor$$

线性筛预处理莫比乌斯前缀和，然后二维整除分块，便可以在 $O(N+\sqrt{N})$ 时间计算答案，其中 $N=\min(n,\ m)$