数学 07

- 高斯消元
- 拉格朗日插值
- 题目选讲

高斯消元

给定 n 元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + .. + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + .. + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + .. + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

高斯消元可以在 $O(n^3)$ 时间复杂度内计算各个未知数的解，计算机会用浮点数存储答案

线性代数知识回顾

在上述方程组中，未知数其实意义不大，我们主要关注系数，因此我们可以把上述的方程写成 **系数矩阵** 的形式

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

如果把 b_1，b_2，…，b_n 也添加上，便构成如下 **增广矩阵**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right]$$

高斯消元最终会把系数矩阵化为 **行阶梯矩阵**，即如下的形式

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & a'_{1,2} & a'_{1,3} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\
0 & 1 & a'_{2,3} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\
0 & 0 & 1 & \dots & a'_{2,n} & b'_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n-1,n} & b'_{n-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b'_n
\end{array}\right]$$

我们要介绍的高斯约旦消元更是把系数矩阵化为如下形式的 **简化行阶梯矩阵**

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & b'_n \end{array}\right]$$

从简单的方程组入手

给定二元一次方程

$$\begin{cases} x + 3y = 16 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$$

将两个方程相减，消元 x 得到

$$6y = 6$$

从而计算出

$$y = 1$$

将 $y = 1$ 随意带入两个方程，都可以计算出 $x = 13$

用系数矩阵表示三元一次方程组的消元过程

给定三元一次方程

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 190 \\ x + 4y + 7z = 114 \\ 9x + 3y + 2z = 76 \end{cases}$$

我们省略未知数，将其写成系数矩阵的形式，最后一列为等号右边的数值，具体如下所示

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 190 \\ 1 & 4 & 7 & 114 \\ 9 & 3 & 2 & 76 \end{array}\right]$$

我们手动模拟一下消元的过程

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 190 \\ 1 & 4 & 7 & 114 \\ 9 & 3 & 2 & 76 \end{array}\right]
\xrightarrow[r_3-9r_1]{r_2-r_1}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 190 \\ 0 & 1 & 3 & -76 \\ 0 & -24 & -34 & -1634 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[r_3+24r_2]{r_1-3r_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 418 \\ 0 & 1 & 3 & -76 \\ 0 & 0 & 38 & -3458 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_3\times\frac{1}{38},r_1+5r_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -37 \\ 0 & 1 & 0 & 197 \\ 0 & 0 & 1 & -91 \end{array}\right]
$$

从而计算出

$$x = -37,\ y = 197,\ z = -91$$

消元法的一些优化

- 列主元，选取列中最大的元素所在行与当前行交换，这样最大程度保证精度
- 高斯约旦消元，将行阶梯矩阵继续化简为对角矩阵，这样可以直接计算出每一个未知数的结果

高斯约旦消元算法

算法的步骤如下

- 枚举第 j 列
  - 从第 $j+1$ 行到第 n 行，寻找 **绝对值最大** 的元素作为列主元，设其所在行为 r，与第 j 行交换
  - 从第 1 行到第 n 行，把除去第 j 行的每一行的第 j 个元素消去，其他元素相应改变

注意，在寻找列主元的过程中，如果绝对值最大的元素都为 0 时，则方程组无解

在计算机中，我们可以用 ϵ 来逼近 0

高斯消元的应用

- 逆矩阵
- 矩阵树定理
- 期望 dp（本状态由前后状态转移而来）

插值

给定 n 个点 (x_0, y_0)，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$\ldots$，$(x_n,\ y_n)$

可以用一个 n 次多项式 $f(x)$ 来拟合这个曲线

如何理解插值

插值，顾名思义，就是画一条曲线，穿针引线，把所有的值都插进去

从我们熟悉的低阶多项式理解

两点唯一确定一条直线

三点唯一确定一个抛物线

$n+1$ 个点唯一确定一个 n 次多项式

这样的多项式 $f(x)$ 一定 **唯一存在**，数学证明省略

优秀的插值算法

具体如何还原多项式?

高斯消元的局限性

直观的做法，设 $f(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n$，将 $n+1$ 个点代入，得到 $n+1$ 元一次方程组，可以使用高斯消元在 $O(n^3)$ 时间范围内求解

不过这个时间复杂度有点高，我们需要寻求其他的办法

拉格朗日插值

对每一个数对 (x_i, y_i) 构造插值基函数

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

观察知道

$$\ell_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases}$$

进而构造拉格朗日多项式

$$
\begin{aligned}
L(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}
\end{aligned}
$$

由于 $f(x)$ 有且仅有一个，因此 $L(x) = f(x)$

拉格朗日插值法可以在 $O(n^2)$ 时间范围内计算答案

举例理解拉格朗日插值

上述函数有点抽象，我们用例子来解释

给定二次函数 $f(x)$ 上 3 个点 $(4,\ 20)$，$(5,\ 16)$，$(6,\ 6)$，考虑还原 $f(x)$

写出拉格朗日插值基函数

$$\ell_0(x) = \frac{(x-5)(x-6)}{(4-5)(4-6)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-4)(x-6)}{(5-4)(5-6)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-4)(x-5)}{(6-4)(6-5)}$$

进而构造拉格朗日插值多项式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(4)\cdot\ell_0(x) + f(5)\cdot\ell_1(x) + f(6)\cdot\ell_2(x) \\ &= 20\cdot\ell_0(x) + 16\cdot\ell_1(x) + 6\cdot\ell_2(x) \\ &= -3x^2 + 23x - 24 \end{aligned}$$

我们可以发现，$f(4)=20$，$f(5)=16$，$f(6)=6$

因此我们还原出了 $f(x)$

特殊点插值（选讲）

当 x_i 连续时，可以预处理一些式子来优化计算

考虑选择 n 个连续的点 $(1,\ f(1)),\ (2,\ f(2)),\ ..,\ (n,\ f(n))$ 进行插值

拉格朗日基函数有如下形式

$$\ell_i(x) = \frac{(x-1)..\left[x-(i-1)\right]\left[x-(i+1)\right]..(x-n)}{(i-1)..\left[i-(i-1)\right]\left[i-(i+1)\right]..(i-n)}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{i-1}(x-j)\prod_{j=i+1}^{n}(x-j)}{(-1)^{n-i}(i-1)!(n-i)!}$$

拉格朗日多项式为

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} f(i)\frac{\prod_{j=1}^{i-1}(x-j)\prod_{j=i+1}^{n}(x-j)}{(-1)^{n-i}(i-1)!(n-i)!}$$

为了计算 $L(x_0)\ mod\ M$，我们只需要预处理 n 以内所有数的阶乘，维护 x_0-i 的前缀积与后缀积，就可以在 $O(nlogM)$ 时间复杂度内完成计算

2614. 高斯消元

给定一个 n 元一次线性方程组，对其求解

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + .. + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + .. + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + .. + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

输入第一行一个数，表示 n

下面输入 n 行，每行输入 $n+1$ 个整数，表示 $a_{i,j}$ 和 b_i

最终输出 1 行 n 个数，依次表示 x_1，x_2，..，x_n （保留两位小数），注意行末没有空格

规定 $1 \le n \le 100, \ |a_i| \le 10^4, \ |b_i| \le 10^4$

题解

高斯消元模板题，将算法实现即可，可以用一些优化使得答案更加精确

2615. 拉格朗日插值

给定 n 个点 (x_i, y_i)，拟合 $n-1$ 次多项式 $f(x)$，给定 k，计算 $f(k)\ mod\ 998244353$

数据保证

$1 \le n \le 10^3$

$1 \le x_i, y_i, k \le 998244353$，并且 x_i 两两不同

题解

拉格朗日模板题，将算法实现即可，注意模运算的细节，例如加减乘除求逆元，一步错步步错

2618. 等幂求和（选讲）

给定 n，k，求解 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^k \ mod\ (10^9+7)$

规定 $1 \le n \le 10^9$，$0 \le k \le 10^6$

题解

记模数 MOD 为 M

观察数据，我们没法用 $nlogM$ 的时间复杂度计算答案

我们知道，上述式子是一个关于 n 的 $k+1$ 多项式，我们可以用 $k+2$ 个点来拟合出此多项式

取 $(1,\ f(1))$，$(2,\ f(2))$，$...(i,\ f(i))$，$...$，$(k+2,\ f(k))$，其中

$$f(i)=\sum_{j=1}^{i} j^k$$

根据拉格朗日插值，由连续点的拉格朗日插值，构造拉格朗日多项式，得到一个 $k+1$ 次多项式，代入 n，答案即为

$$L(n) \equiv \sum_{i=1}^{k+2} f(i) \frac{\prod_{j=1}^{i-1}(n-j) \prod_{j=i+1}^{k+2}(n-j)}{(-1)^{k+2-i}(i-1)!(k+2-i)!} \ (mod\ M)$$

我们只需要预处理 $k+2$ 以内的阶乘，维护 $n-j$ 的前缀积和后缀积，便可以在 $O(klogM)$ 时间得到答案