现代控制理论大作业

张旖萱
192803

已知系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10(s+3)}{s(s^2+11.0s+29.25)}$$

1、将其转化为输出矩阵$C=[1\quad 0\quad 0]$的状态空间描述Ξ。

将传递函数整理得：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10(s+3)}{s(s^2+11.0s+29.25)}=\frac{10s+30}{s^3+11.0s^2+29.25s}$$

因此，$a_2=11.0$，$a_1=29.25$，$a_0=0$；$b_1=10$，$b_0=30$。

经计算，

$$\begin{aligned}
&\beta_3{=}b_3=0\\
&\beta_2{=}b_2-a_2b_3=0-11.0\times 0=0\\
&\beta_1{=}b_1-a_1b_3-a_2b_2=10-29.25\times 0-11.0\times 0=10\\
&\beta_0{=}b_0-a_0b_3-a_1b_2-a_2b_1=30-0\times 0-29.25\times 0-11.0\times 10=-80
\end{aligned}$$

因此，状态空间描述Ξ为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -29.25 & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 10\\ -80\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

2、将状态空间描述Ξ离散化，采样时间为 0.1s。

首先，计算系统矩阵的特征值：

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 29.25 & \lambda+11\end{vmatrix}=\lambda^3+11\lambda^2+29.25\lambda=0$$

解得$\lambda_1{=}0$，$\lambda_2=-4.5$，$\lambda_3=-6.5$

由于$\boldsymbol{A}$为友矩阵，易求得变换矩阵：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -4.5 & -6.5\\ 0 & 20.25 & 42.25\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{44}{117} & \frac{4}{117}\\ 0 & -\frac{13}{18} & -\frac{1}{9}\\ 0 & \frac{9}{26} & \frac{1}{13}\end{bmatrix}$$

求解离散时间系统的系统矩阵$\boldsymbol{G}(T)$与输入矩阵$\boldsymbol{H}(T)$：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}(T)&=e^{\boldsymbol{A}T}\\
&=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 T} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 T} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 T}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\\
&=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -4.5 & -6.5\\ 0 & 20.25 & 42.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{0T} & 0 & 0\\ 0 & e^{-4.5T} & 0\\ 0 & 0 & e^{-6.5T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{44}{117} & \frac{4}{117}\\ 0 & -\frac{13}{18} & -\frac{1}{9}\\ 0 & \frac{9}{26} & \frac{1}{13}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1 & \frac{44}{117}-\frac{13}{18}e^{-4.5T}+\frac{9}{26}e^{-6.5T} & \frac{4}{117}-\frac{1}{9}e^{-4.5T}+\frac{1}{13}e^{-6.5T}\\ 0 & \frac{13}{4}e^{-4.5T}-\frac{9}{4}e^{-6.5T} & \frac{1}{2}e^{-4.5T}-\frac{1}{2}e^{-6.5T}\\ 0 & -\frac{117}{8}e^{-4.5T}+\frac{117}{8}e^{-6.5T} & -\frac{9}{4}e^{-4.5T}+\frac{13}{4}e^{-6.5T}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1 & \frac{44}{117}-\frac{13}{18}e^{-0.45}+\frac{9}{26}e^{-0.65} & \frac{4}{117}-\frac{1}{9}e^{-0.45}+\frac{1}{13}e^{-0.65}\\ 0 & \frac{13}{4}e^{-0.45}-\frac{9}{4}e^{-0.65} & \frac{1}{2}e^{-0.45}-\frac{1}{2}e^{-0.65}\\ 0 & -\frac{117}{8}e^{-0.45}+\frac{117}{8}e^{-0.65} & -\frac{9}{4}e^{-0.45}+\frac{13}{4}e^{-0.65}\end{bmatrix}\\
&\approx\begin{bmatrix}1 & 0.0963 & 0.0035\\ 0 & 0.8977 & 0.0578\\ 0 & -1.6904 & 0.2620\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{H}(T)=\int_0^T e^{\boldsymbol{A}t}dt\cdot\boldsymbol{B}$$

$$=\int_0^T\begin{bmatrix}1 & \frac{44}{117}-\frac{13}{18}e^{-4.5t}+\frac{9}{26}e^{-6.5t} & \frac{4}{117}-\frac{1}{9}e^{-4.5t}+\frac{1}{13}e^{-6.5t}\\ 0 & \frac{13}{4}e^{-4.5t}-\frac{9}{4}e^{-6.5t} & \frac{1}{2}e^{-4.5t}-\frac{1}{2}e^{-6.5t}\\ 0 & -\frac{117}{8}e^{-4.5t}+\frac{117}{8}e^{-6.5t} & -\frac{9}{4}e^{-4.5t}+\frac{13}{4}e^{-6.5t}\end{bmatrix}dt\cdot\begin{bmatrix}0\\10\\-80\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{70}{169}e^{-6.5T}-\frac{10}{27}e^{-4.5T}+\frac{268}{4563}\\ -\frac{35}{13}e^{-6.5T}+\frac{5}{3}e^{-4.5T}+\frac{40}{39}\\ \frac{35}{2}e^{-6.5T}-\frac{15}{2}e^{-4.5T}-10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{70}{169}e^{-0.65}-\frac{10}{27}e^{-0.45}+\frac{268}{4563}\\ -\frac{35}{13}e^{-0.65}+\frac{5}{3}e^{-0.45}+\frac{40}{39}\\ \frac{35}{2}e^{-0.65}-\frac{15}{2}e^{-0.45}-10\end{bmatrix}$$

$$\approx\begin{bmatrix}0.0388\\0.6828\\-5.6464\end{bmatrix}$$

因此，状态空间描述Ξ离散化后的状态空间表达式为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.0963 & 0.0035\\ 0 & 0.8977 & 0.0578\\ 0 & -1.6904 & 0.2620\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}0.0388\\0.6828\\-5.6464\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[1\quad 0\quad 0]\boldsymbol{x}(k)$$

3、采用两种方法判断状态空间描述Ξ的能控性和能观性。

（1）能控性：

法①：转换成约旦标准型的判断方法。

首先，计算系统矩阵的特征值：

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 29.25 & \lambda+11\end{vmatrix}=\lambda^3+11\lambda^2+29.25\lambda=0$$

解得 λ_1=0， $\lambda_2=-4.5$， $\lambda_3=-6.5$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为友矩阵，易求得变换矩阵：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -4.5 & -6.5\\ 0 & 20.25 & 42.25\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{44}{117} & \frac{4}{117}\\ 0 & -\frac{13}{18} & -\frac{1}{9}\\ 0 & \frac{9}{26} & \frac{1}{13}\end{bmatrix}$$

变换后，

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -4.5 & 0\\ 0 & 0 & -6.5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{40}{39}\\ \frac{5}{3}\\ -\frac{35}{13}\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异，且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的各行元素都不为 0，所以状态空间描述 Ξ 是完全能控的。

法②：直接从 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 判别系统的能控性。

分别计算 $\boldsymbol{AB}$ 、 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}$ ：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}10\\ -80\\ 587.5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-80\\ 587.5\\ -4122.5\end{bmatrix}$$

能控性矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0 & 10 & -80\\ 10 & -80 & 587.5\\ -80 & 587.5 & -4122.5\end{bmatrix}$ 满秩，所以状态空间描述 Ξ 是完全能控的。

（2）能观性：

法①：转换成约旦标准型的判断方法。

首先，计算系统矩阵的特征值：

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 29.25 & \lambda+11\end{vmatrix}=\lambda^3+11\lambda^2+29.25\lambda=0$$

解得 λ_1=0， $\lambda_2=-4.5$， $\lambda_3=-6.5$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为友矩阵，易求得变换矩阵：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -4.5 & -6.5\\0 & 20.25 & 42.25\end{bmatrix}，\ \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{44}{117} & \frac{4}{117}\\0 & -\frac{13}{18} & -\frac{1}{9}\\0 & \frac{9}{26} & \frac{1}{13}\end{bmatrix}$$

变换后，

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -4.5 & 0\\0 & 0 & -6.5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CT}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异，且 $\boldsymbol{CT}$ 的各列元素都不为 0，所以状态空间描述 Ξ 是完全能观的。

法②：直接从 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 判别系统的能观性。

分别计算 $\boldsymbol{CA}$、$\boldsymbol{CA}^2$：

$$\boldsymbol{CA}=[0\quad 1\quad 0]，\ \boldsymbol{CA}^2=[0\quad 0\quad 1]$$

能观性判别矩阵 $N=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 满秩，所以状态空间描述 Ξ 是完全能观的。

4、试用黎卡提方程（k=1）设计状态空间描述 Ξ 的一个稳定化状态反馈控制律。

黎卡提方程为：

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}-2\boldsymbol{PBB}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$$

取 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\p_{12} & p_{22} & p_{23}\\p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}$，将其代入黎卡提方程中，得

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & -29.25\\0 & 1 & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\p_{12} & p_{22} & p_{23}\\p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\p_{12} & p_{22} & p_{23}\\p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -29.25 & -11\end{bmatrix}$$

$$-2\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\p_{12} & p_{22} & p_{23}\\p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\10\\-80\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 10 & -80\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\p_{12} & p_{22} & p_{23}\\p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

整理得方程组

$$\begin{cases} p_{13}(1600p_{12}-12800p_{13})-p_{12}(200p_{12}-1600p_{13})+1=0 \\ 2p_{12}-\dfrac{177p_{23}}{2}-p_{22}(200p_{22}-1600p_{23})+p_{23}(1600p_{22}-12800p_{23})+1=0 \\ 2p_{23}-22p_{33}-p_{23}(200p_{23}-1600p_{33})+p_{33}(1600p_{23}-12800p_{33})+1=0 \\ p_{11}-\dfrac{117p_{13}}{4}-p_{22}(200p_{12}-1600p_{13})+p_{23}(1600p_{12}-12800p_{13})=0 \\ p_{12}-11p_{13}-p_{23}(200p_{12}-1600p_{13})+p_{33}(1600p_{12}-12800p_{13})=0 \\ p_{13}+p_{22}-11p_{23}-\dfrac{117}{4}p_{33}-p_{23}(200p_{22}-1600p_{23})+p_{33}(1600p_{22}-12800p_{23})=0 \end{cases}$$

解得：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 9.7766 & 2.5788 & 0.3135 \\ 2.5788 & 0.8347 & 0.0990 \\ 0.3135 & 0.0990 & 0.0201 \end{bmatrix}$$

稳定化控制率为：

$$\begin{aligned} u &= -k\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \\ &= -[0 \quad 10 \quad -80]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \\ &\approx -[0 \quad 10 \quad -80]\begin{bmatrix} 9.7766 & 2.5788 & 0.3135 \\ 2.5788 & 0.8347 & 0.0990 \\ 0.3135 & 0.0990 & 0.0201 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \\ &= -\begin{bmatrix}0.7080 & 0.4270 & -0.6180\end{bmatrix}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

综上，对任意的$k\geq 1$，$u=-\begin{bmatrix}0.7080 & 0.4270 & -0.6180\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$都是系统的稳定化控制率。

5、利用爱克曼(Ackermann)公式确定反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得状态空间描述Ξ的闭环极点为-0.5+j，-0.5-j，-0.25；并设计全维和降维观测器，使得全维观测器的极点为-6，-8，-30，降维观测器的极点为-8，-30。

（1）反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ ：

期望闭环多项式为：

$$\phi(\lambda)=(\lambda+0.5-j)(\lambda+0.5+j)(\lambda+0.25)=\lambda^3+1.25\lambda^2+1.5\lambda+0.3125$$

因此，

$$\phi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3+1.25\boldsymbol{A}^2+1.5\boldsymbol{A}+0.3125$$

能控性矩阵为：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 0 & 10 & -80 \\ 10 & -80 & 587.5 \\ -80 & 587.5 & -4122.5 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{39}{40} & \frac{11}{30} & \frac{1}{30}\\ \frac{11}{30} & \frac{128}{315} & \frac{16}{315}\\ \frac{1}{30} & \frac{16}{315} & \frac{2}{315}\end{bmatrix}$$

求得反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为：

$$\boldsymbol{K}=[0\quad 0\quad 1]\begin{bmatrix}\frac{39}{40} & \frac{11}{30} & \frac{1}{30}\\ \frac{11}{30} & \frac{128}{315} & \frac{16}{315}\\ \frac{1}{30} & \frac{16}{315} & \frac{2}{315}\end{bmatrix}\phi(A)\approx[0.0104\quad -1.1877\quad -0.0266]$$

（2）全维观测器的设计：

能观性判别矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 满秩，所以状态空间描述 Ξ 是完全能观的，此问题可解。期望闭环多项式为：

$$\phi(\lambda)=(\lambda+6)(\lambda+8)(\lambda+30)=\lambda^3+44\lambda^2+468\lambda+1440$$

设观测器增益矩阵为：

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\\ l_3\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}$ 的特征值为：

$$\begin{aligned}\det\left[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})\right]&=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -29.25 & -11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\\ l_3\end{bmatrix}[1\quad 0\quad 0]\right)\\ &=\det\begin{bmatrix}\lambda+l_1 & -1 & 0\\ l_2 & \lambda & -1\\ l_3 & 29.25 & \lambda+11\end{bmatrix}\\ &=\lambda^3+(11+l_1)\lambda^2+(29.25+11l_1+l_2)\lambda+29.25l_1+11l_2+l_3\end{aligned}$$

与期望闭环多项式比较，得出方程组：

$$\begin{cases}11+l_1=44\\ 29.25+11l_1+l_2=468\\ 29.25l_1+11l_2+l_3=1440\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} l_1=33 \\ l_2=75.75 \\ l_3=-358.5 \end{cases}$$

所以，

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 33 \\ 75.75 \\ -358.5 \end{bmatrix}$$

所求得得观测器是：

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} &= (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})\tilde{x}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{L}y \\ &= \begin{bmatrix} -33 & 1 & 0 \\ -75.75 & 0 & 1 \\ 358.5 & -29.25 & -11 \end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -80 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 33 \\ 75.75 \\ -358.5 \end{bmatrix}y \end{aligned}$$

控制律为：

$$u=-\begin{bmatrix} 0.0104 & -1.1877 & -0.0266 \end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

（3）降维观测器的设计：

由状态空间表达式可知，x_1 可直接由输出观测，而 x_2、x_3 需要设计降维观测器。对状态空间表达式进行分块，得：

$$\boldsymbol{x}_a=\begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{x}_b=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{aa}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{A}_{ab}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{A}_{ba}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{A}_{bb}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -29.25 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_a=[0]，\quad \boldsymbol{B}_b=\begin{bmatrix} 10 \\ -80 \end{bmatrix}$$

期望闭环多项式为

$$\phi(\lambda)=(\lambda+8)(\lambda+30)=\lambda^2+38\lambda+240$$

令

$$\tilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{A}_{ab}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}，\quad \tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}_{bb}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -29.25 & -11 \end{bmatrix}$$

设降维观测器增益矩阵为：

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{C}}$ 的特征值为：

$$\det\left[\lambda \boldsymbol{I}-(\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{L}\tilde{\boldsymbol{C}})\right]=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -29.25 & -11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}[1\quad 0]\right)$$
$$=\det\begin{bmatrix}\lambda+l_1 & -1\\ 29.25+l_2 & \lambda+11\end{bmatrix}$$
$$=\lambda^2+(11+l1)\lambda+11l_1+l_2+29.25$$

与期望闭环多项式比较，得出方程组：

$$\begin{cases}11+l_1=38\\ 11l_1+l_2+29.25=240\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}l_1=27\\ l_2=-86.25\end{cases}$$

所以，

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}27\\ -86.25\end{bmatrix}$$

分别计算 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 、 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 、 $\hat{\boldsymbol{F}}$ ：

$$\hat{A}=A_{bb}-LA_{ab}=\begin{bmatrix}-27 & 1\\ 57 & -11\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=\hat{A}L+A_{ba}-LA_{aa}=\begin{bmatrix}-815.25\\ 2487.75\end{bmatrix}$$

$$\hat{F}=B_b-LB_a=\begin{bmatrix}10\\ -80\end{bmatrix}。$$

降维观测器模型为：

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{w}}}=\hat{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{w}}+\hat{\boldsymbol{B}}y+\hat{\boldsymbol{F}}u=\begin{bmatrix}-27 & 1\\ 57 & -11\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{w}}+\begin{bmatrix}-815.25\\ 2487.75\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}10\\ -80\end{bmatrix}u$$
$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{b}}=\tilde{\boldsymbol{w}}+\boldsymbol{L}y=\tilde{\boldsymbol{w}}+\begin{bmatrix}27\\ -86.25\end{bmatrix}y=\tilde{\boldsymbol{w}}+\begin{bmatrix}27\\ -86.25\end{bmatrix}x_1$$

控制律为：

$$u=-0.0104x_1-\left[-1.1877\quad -0.0266\right]\tilde{\boldsymbol{x}}_b$$

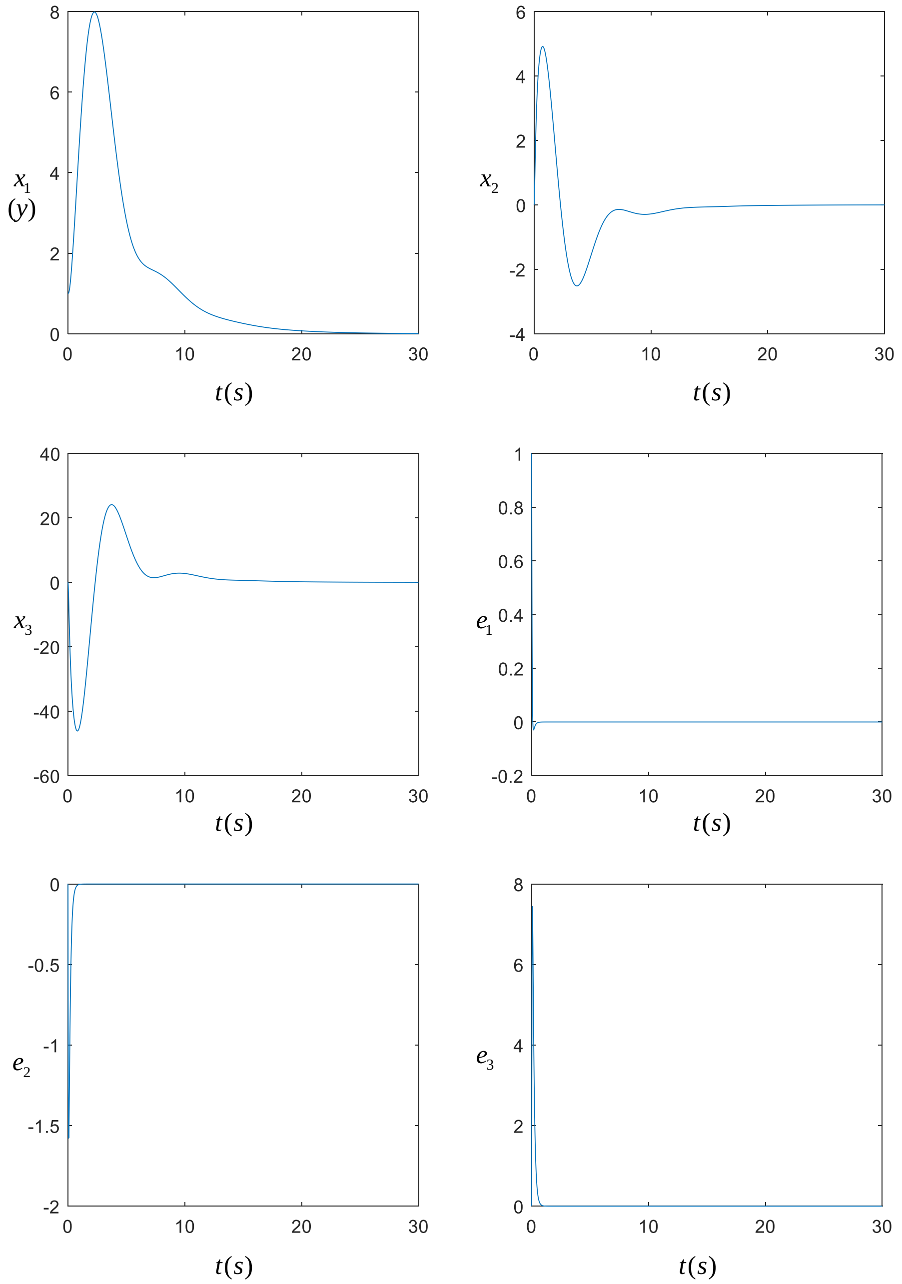
6、绘制初始状态为 $x(0)=[1\quad 0\quad 0]^T$ ， $e(0)=[1\quad 0\quad 0]^T$ 或 $e(0)=[1\quad 0]^T$ 时系统零输入响应曲线，并结合响应曲线结果针对控制设计进行简要分析讨论。

（1）初始状态为 $x(0)=[1\quad 0\quad 0]^T$ ， $e(0)=[1\quad 0\quad 0]^T$ ：

$$
\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ 0 & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}
$$

$$
\approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1040 & 11.8770 & 1.2660 & 0.1040 & -11.8770 & -0.2660 \\ 0.8320 & -124.2660 & -13.1280 & -0.8320 & 95.0160 & 2.1280 \\ 0 & 0 & 0 & -33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -75.75 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 358.5 & -29.25 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}
$$

绘制系统响应曲线：

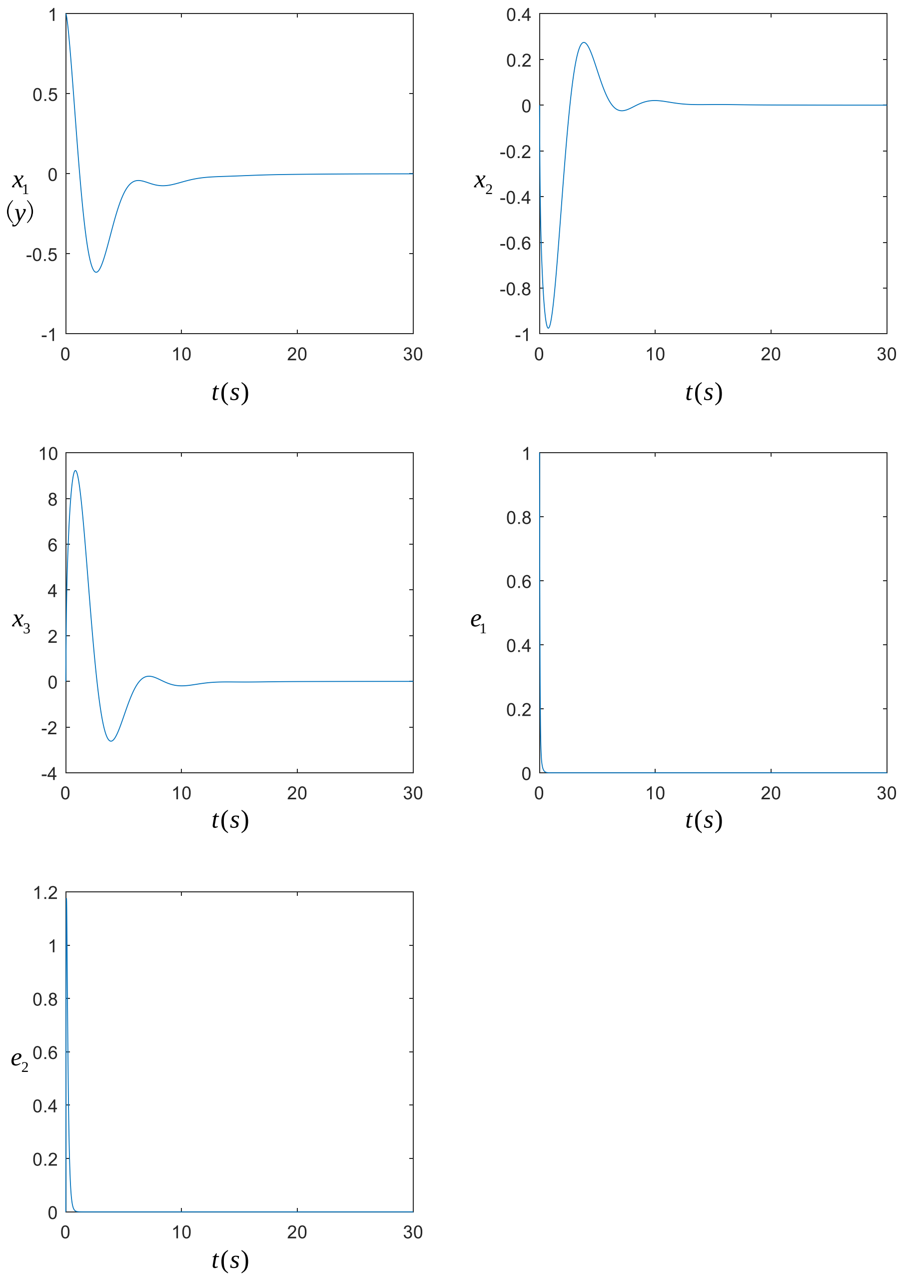


（2）初始状态为 $x(0)=[1 \quad 0 \quad 0]^T$， $e(0)=[1 \quad 0]^T$：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK}_b \\ 0 & \boldsymbol{A}_{bb}-\boldsymbol{LA}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1042 & 11.8770 & 1.2659 & -11.8770 & -0.2660 \\ 0.8333 & -124.2659 & -13.1270 & 95.0160 & 2.1280 \\ 0 & 0 & 0 & -27 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 57 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}$$

绘制系统响应曲线：



对以上两组响应曲线进行分析，可发现：

①系统闭环极点为-0.5+j，-0.5-j，-0.25，都位于复平面的左半平面，因此系统是稳定的，两组响应曲线中的各个状态在一段时间后都趋于 0。

②由于全维观测器的极点为-6，-8，-30，都位于复平面的左半平面，因此全维观测器是稳定的，全维观测器的各个误差在很短的一段时间之后迅速趋于 0，状态跟踪效果很好。

③降维观测器的极点为-8，-30，都位于复平面的左半平面，因此降维观测器是稳定的，降维观测器的各个误差在很短的一段时间之后迅速趋于 0，状态跟踪效果很好。

④降维观测器和全维观测器的误差调节时间要远小于原系统状态的调节时间，这是因为观测器的极点远离坐标轴，为非主极点；而系统闭环极点靠近坐标轴，为主极点，且两者相差十倍以上。因此，状态观测器的状态跟踪效果很好。

⑤全维观测器与降维观测器观测到的系统稳态时的状态是相等的，都趋于系统真实状态。

⑥在系统动态过程中，使用全维观测器时系统状态的变化幅度与使用降维观测器时明显不同，在该例中，使用降维观测器时系统状态的变化幅度更小，即超调更小。

综上，该控制设计实现了稳定化控制，设计的全维观测器能和降维观测器的跟踪效果很好。