工科硕士生《数值分析》课程程序设计题目

第**1**章课程程序设计题：对数的近似计算

记

$$y_1(x) = \ln(1+x), \quad y_2(x) = \ln\Big(\frac{1}{1+x}\Big), \quad y_3(x) = \ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big),$$

则有

$$y_1(1) = y_2(-\frac{1}{2}) = y_3(\frac{1}{3}) = \ln 2.$$

给定函数 $y = f(x)$. 记

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

称 $S_n(x)$ 为函数函数 $y = f(x)$ 的 n 阶Tyalor多项式.

计算 $\ln 2$ 的近似值,可以用如下三种方法:

(I) 将 $y_1(x)$ 在 $x = 0$ 处进行 Taylor 展开, 取前10 项的和 $S_{10}(x)$. 估计误差

$$\max_{x\in[0,1]} |y_1(x) - S_{10}(x)|.$$

计算出 $S_{10}(1)$, 并回答 $S_{10}(1)$ 作为 $\ln 2$ 的近似值具有几位有效数字.

(II) 将 $y_2(x)$ 在 $x = 0$ 处进行 Taylor 展开, 取前10 项的和 $S_{10}(x)$. 估计误差

$$\max_{x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |y_2(x) - S_{10}(x)|.$$

计算出 $S_{10}(-\frac{1}{2})$, 并回答$S_{10}(-\frac{1}{2})$ 作为 $\ln 2$ 的近似值具有几位有效数字.

(III) 将 $y_3(x)$ 在 $x = 0$ 处进行 Taylor 展开, 取前10 项的和 $S_{10}(x)$. 估计误差

$$\max_{x\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]} |y_2(x) - S_{10}(x)|.$$

计算出 $S_{10}(\frac{1}{3})$, 并回答$S_{10}(\frac{1}{3})$ 作为 $\ln 2$ 的近似值具有几位有效数字.

(IV) 比较上述三种算法的计算精度,体会编程中要注意的 “尽量避免大数吃小数”、“尽量避免相近数相减”的准则.

第**2**章课程程序设计题：方程求根的**Newton**法

记

$$f(x) = 3x^2 - e^x, \quad g(x) = f'(x).$$

(I) 分析方程 $g(x) = 0$ 存在几个实根. 给出每个根所在的区间.

(II) 研究用Newton 法求方程 $g(x) = 0$ 的根, 分析迭代初值在什么范围内选取时, 迭代序列收敛到相应的根. 用Newton法求出具有 8 有效数字的近似根.

(III) 分析方程 $f(x) = 0$ 存在几个实根. 给出每个根所在的区间.

(IV) 研究用Newton 法求方程 $f(x) = 0$ 的根, 分析迭代初值在什么范围内选取时, 迭代序列收敛到相应的根. 用Newton法求出具有 8 有效数字的近似根.

第3章课程程序设计题：Hilbert 矩阵的条件数

已知 Hilbert 矩阵 $H_{n\times n}$ 的元素为 $h_{ij} = 1/(i+j-1),\ i,j = 1,2,\cdots,n.$

(I) 编程计算 $H_{n\times n}$ 的无穷范数 $\|H_{n\times n}\|_\infty$ 的程序.

(II) 编写计算 H_n 的无穷范数条件数 $\mathrm{cond}(H_{n\times n})_\infty$ 的程序(可调用求逆函数,在 Mathematica 中为 `Inverse[H]`,在Matlab 中为 `inv(H)` , 在其它语言中请自行查找).

(III) 对 $n = 10, 20, \cdots, 100$, 计算 $H_{n\times n}$ 的无穷范数条件数$\mathrm{cond}(H_{n\times n})_\infty$；画出$\Big(n, \ln\left(\mathrm{cond}(H_{n\times n})_\infty\right)\Big)$的关系图.

(IV) 令 $x = (1,1,\cdots,1)^T,\ b = Hx$,对 $n = 10, 50, 100$,求解 $H\hat{x} = b$,并计算 $x - \hat{x}$ 和 $b - H\hat{x}$ 以及它们的无穷范数;

(V)通过以上的数值实验,你有哪些体会?

第4章课程程序设计题：圆的拟合

平面上一个圆的方程为:

$$(x-x^*)^2+(y-y^*)^2=r^2, \tag{1}$$

其中 (x^*,y^*) 是圆心坐标, r 是半径. (x^*,y^*) 和 r 可唯一确定一个圆.

由(1)可得

$$r^2-x^{*2}-y^{*2}+2x^*x+2y^*y=x^2+y^2. \tag{2}$$

记

$$a=r^2-x^{*2}-y^{*2},\quad b=2x^*,\quad c=2y^*.$$

则有

$$a+bx+cy=x^2+y^2. \tag{3}$$

已知某物体沿一圆周附近运动.现测得位置数据为 $(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,100$, 其中

$$x_i=1+(-1)^i\epsilon+3\cos(\frac{i}{50}\pi),\quad y_i=10+3\sin\left((\frac{i}{50}+\epsilon)\pi\right),\quad \epsilon=0.05.$$

(I) 用最小二乘法推导形如(3)的拟合公式中的系数 a,b,c 的计算公式.

(II) 利用(I)中的计算公式, 根据给定的数据, 编写程序求得(a,b,c), (x^*,y^*) 和 r .

第5章课程程序设计题：数值积分

考虑积分

$$I \equiv \int_0^1 \sqrt{x}\,\ln x\,\mathrm{d}x.$$

已知 $I = -\frac{4}{9}$.

(I) 取不同的步长 $h = 2^{-m}, m = 1, 2, 3, 4, \cdots$. 分别采用复化梯形公式, 复化Simpson 公式、Romberg 求积公式编程计算积分I 的近似值, 并与积分的精确值比较. 是否存在某一个 h_0, 当 h 从 h_0 继续减少时, 计算精度将不能再被改善?

(II) 记

$$J \equiv -\int_0^\infty y e^{-\frac{3}{2}y}\mathrm{d}y.$$

对于积分 I 做变量代换 $x = e^{-y}$, 可得 $I = J = -\frac{4}{9}$. 给定 $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-8}$. 确定正数 a 使得

$$\int_a^\infty y e^{-\frac{3}{2}y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\epsilon.$$

(III) 记

$$K = -\int_0^a y e^{-\frac{3}{2}y}\mathrm{d}y.$$

取$n = 2^l, l = 0, 1, 2, 3, \cdots$. 用 Romberg 求积公式 R_n 计算 K 的近似值,使得 $|R_{2n} - R_n| \le \epsilon$, 并计算 $|(-\frac{4}{9}) - R_{2n}|$. 指出所用节点数.

(IV) 观察你的计算结果, 谈谈你的体会.

第**6**章课程程序设计题：常微分方程初值问题的数值方法

考虑求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos(x^2+y^2)}{x^4+y^4}, \quad x \in (0,1], & (1) \\ y(0) = 1 & (2) \end{cases}$$

的改进Euler 方法和经典4阶Runge-Kutta(RK4) 方法. 在一定的条件下, 改进的Euler 方法是2阶收敛的, RK4方法是4阶收敛的. 取正整数 m, 将 $[a,b]$ 分成 m 个小区间, 并记 $h=1/m$, $x_i = ih$. 记 $\{u_i(h)\,|\,0 \le i \le m\}$ 为用某种方法得到的数值解, $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-10}$.

(I) 设 $\{u_i(h)\,|\,0 \le i \le m\}$ 为用改进Euler 方法得到的数值解. 记

$$E(m) = \max_{0 \le i \le m} |u_{2i}(\frac{h}{2}) - u_i(h)|.$$

依次取 $m = 2^l, l = 5, 6, 7, \cdots,$ 计算 $E(m)$ 直至 $|E(m)| \le \epsilon$.

(II) 设 $\{u_i(h)\,|\,0 \le i \le m\}$ 为用改进Euler 方法得到的数值解. 记

$$F(m) = \frac{E(m)}{E(2m)}.$$

给出 $(m, F(m)), m = 2^l, l = 5, 6, 7, \cdots, 20$ 的数据表.

(III) 设 $\{u_i(h)\,|\,0 \le i \le m\}$ 为用RK4 方法得到的数值解. 记

$$E(m) = \max_{0 \le i \le m} |u_{2i}(\frac{h}{2}) - u_i(h)|.$$

依次取 $m = 2^l, l = 5, 6, 7, \cdots,$ 计算 $E(m)$ 直至 $|E(m)| \le \epsilon$.

(IV) 设 $\{u_i(h)\,|\,0 \le i \le m\}$ 为用RK4 方法得到的数值解. 记

$$F(m) = \frac{E(m)}{E(2m)}.$$

给出 $(m, F(m)), m = 2^l, l = 5, 6, 7, \cdots, 20$ 的数据表.

(V) 说明 $E(m)$ 和 $F(m)$ 的意义. 比较并分析(1) 和(3) 的结果. 比较并分析(2) 和(4) 的结果.

第7章课程程序设计题：抛物方程初边值问题的数值方法

考虑有界域上抛物方程Dirichlet初边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, & (1)\\
u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le 1, & (2)\\
u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \quad 0 < t \le T & (3)
\end{cases}
$$

的有限差分方法, 其中 $a=1$, $T=2$, $f(x,t)=0$, $\varphi(x)=e^x$, $\alpha(t)=e^t$, $\beta(t)=e^{1+t}$. 已知(1)-(3)的解析解为 $u(x,t)=e^{x+t}$.

设 $\{u_i^k(h,\tau)\,|\,0\le i\le m, 0\le k\le n\}$ 为用某种差分格式计算所得数值解. 记

$$E(h,\tau) = \max_{0\le k\le n}\max_{0\le i\le m}|u(x_i,t_k)-u_i^k(h,\tau)|.$$

已知对于古典隐格式(向后Euler格式)存在常数C_1 使得

$$E(h,\tau)\le C_1(\tau+h^2),$$

对于Crank-Nicolson 格式存在常数C_2 使得

$$E(h,\tau)\le C_2(\tau^2+h^2).$$

(I) 应用古典隐格式计算, 对于 $l=5,6,7,8,9,10$, 给出数据表

$$(h_l,\tau_l)=(2^{-l},2^{-l}),\ E(h_l,\tau_l),\ E(h_l,\tau_l)/(\tau_l+h_l^2)\,.$$

(II) 应用古典隐格式计算, 对于 $l=5,6,7,8,9,10$, 给出数据表

$$(h_l,\tau_l)=(2^{-l},2^{-2l}),\ E(h_l,\tau_l),\ E(h_l,\tau_l)/(\tau_l+h_l^2)\,.$$

(III) 应用Crank-Nicolson 格式计算, 对于 $l=5,6,7,8,9,10$, 给出数据表

$$(h_l,\tau_l)=(2^{-l},2^{-l}),\ E(h_l,\tau_l),\ E(h_l,\tau_l)/(\tau_l^2+h_l^2)\,.$$

(IV) 应用Crank-Nicolson 格式计算, 对于 $l=5,6,7,8,9,10$, 给出数据表

$$(h_l,\tau_l)=(2^{-l},2^{-2l}),\ E(h_l,\tau_l),\ E(h_l,\tau_l)/(\tau_l^2+h_l^2)\,.$$

(V) 观察并分析上述计算的精度和运算量.