第二章 非线性方程求根

本章主要内容

1) 二分法

2) 简单迭代法

3) Newton迭代法

二分法

简单迭代法

Newton 迭代法

习 题

本章主要讨论非线性方程

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

的求根问题, 这里$x \in \mathbf{R}$, $f(x)$为连续函数. 若存在x^*使得$f(x^*) = 0$，则称x^*是(1)的根或函数$f(x)$的零点. 若$f(x)$可分解为

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x),$$

其中m是正整数，且$g(x^*) \neq 0$. 当$m = 1$, x^*为单根，当$m \geq 2$，x^*为m重根.

方法：一般分下面2步

1) 根的搜索，分析方程存在多少个实根，找出每个根所在的区间.
   (a) 图解法. 即通过画函数的图形，了解根的分布情况.
   (b) 解析法. 用微积分基本理论来分析.
   (c) 定步长搜索法. 利用连续函数的介值定理.
2) 根的精确化，求满足给定精度的根的近似值.

1 二分法

二分法思想：依据连续函数的介值定理，反复将区间分半，在足够小的区间内，方程有且仅有一根.

考虑方程$f(x) = 0$，设函数$f(x) \in C[a,b]$且$f(a)f(b) < 0$. 记$a_0 = a$，$b_0 = b$. $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ 考虑区间$[a_0, x_0]$和$[x_0, b_0]$.

1) 若$f(x_0) = 0$, 则x_0就是根，计算结束. 否则

2) 若$f(x_0) \neq 0$, 则$f(a_0)f(x_0) < 0$和$f(x_0)f(b_0) < 0$有且只有一个成立.

   (a) 若$f(a_0)f(x_0) < 0$，令$a_1 = a_0, b_1 = x_0$; 否则

   (b) 若$f(x_0)f(b_0) < 0$，令$a_1 = x_0, b_1 = b_0$.

3) 考虑区间$[a_1, b_1]$, 有$f(a_1)f(b_1) < 0$, 重复上述步骤.

4) 按此方法可以得到一系列区间

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots ,$$

而且有

(a) $b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{2^k}(b - a)$;

(b) $f(a_k)f(b_k) < 0$

当$b_k - a_k$充分小时，其中点$x_k = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$可作为$f(x) = 0$在$[a,b]$内根的近似值. 且有估计式

$$|x_* - x_k| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k) \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a). \tag{2}$$

对于给定精度ε, 若取k使得

$$\frac{1}{2^{k+1}}(b - a) \le \varepsilon,$$

则有

$$|x^* - x_k| \le \varepsilon.$$

例 1 *用二分法求方程$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$在区间$[1, 1.5]$上的根.*

1) 要得到具有3位有效数的近似根，需作多少次二分;

2) 用二分法求具有3位有效数的近似根.

解 $f(1) = -5$, $f(1.5) = 2.375$, 当$x \in [1, 1.5]$时， $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$, 方程$f(x) = 0$在$[1, 1.5]$ 有唯一实根.

Table 1: 二分法算例

k	a_k ($f(a_k)$的符号)	x_k ($f(x_k)$的符号)	b_k ($f(b_k)$的符号)
0	1(-)	1.25(-)	1.5(+)
1	1.25(-)	1.375(+)	1.5(+)
2	1.25(-)	1.3125(-)	1.375(+)
3	1.3125(-)	1.34375(-)	1.375(+)
4	1.34375(-)	1.359375(-)	1.375(+)
5	1.359375(-)	1.3671875(+)	1.375(+)
6	1.359375(-)	1.36328125(-)	1.3671875(+)

1) $a = 1,\ b = 1.5,\ \varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$, 由

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \varepsilon,$$

得

$$k \geq \frac{2}{\lg 2} - 1 = 5.64,$$

故可以取$k = 6$, 即将区间二分6次.

2) 计算结果见表(1):

所以得具有3位有效数字得近似值$x_6 = 1.36328125$.

2 简单迭代法

思想：通过递推产生一个序列，使其极限为方程的根.

2.1 迭代格式的构造

设方程

$$f(x) = 0 \tag{3}$$

在$[a, b]$内有一个根x^*. 将方程改为等价形式

$$x = \varphi(x). \tag{4}$$

任取$x_0 \in [a, b]$，得到递推公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{5}$$

从而得到序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$. 如果当$k \to \infty$时，序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$有极限$\tilde{x}$，且$\varphi(x)$ 在$\tilde{x}$附近连续，则在(5)两边取极限得

$$\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}),$$

故有$f(\tilde{x}) = 0$，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

(5)称为迭代格式，称$\varphi(x)$为迭代函数，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$为迭代序列. 如果任取$x_0 \in [a,b]$迭代序列收敛，则称迭代格式(5)收敛. 称$e_k = x^* - x_k$为第k次迭代误差. 上述方法称为迭代法. 当$x_0 \neq x^*$时，如果迭代序列在$[a,b]$内无极限，则称迭代格式发散.

注 1 *当$x^* = \varphi(x^*)$, x^*称为不动点；上述方法称为不动点迭代法.*

例 2 *求方程$x^3 - x - 1 = 0$在$x_0 = 1.5$附近的根.*

方法1 将原方程写成等价的方程：$x = x^3 - 1$. 取迭代函数$\varphi_1(x) = x^3 - 1$, 构造迭代格式

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值$x_0 = 1.5$, 计算结果：

k	0	1	2	3	$\cdots$
x_k	1.5	2.375	12.396	1903.779	$\cdots$

方法2 将原方程写成等价的方程：$x = \sqrt[3]{x+1}$. 取迭代函数$\varphi_2(x) = \sqrt[3]{x+1}$, 构造迭代格式

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值$x_0 = 1.5$, 计算结果：

k	0	1	2	3	$\cdots$	7	8
x_k	1.5	1.35721	1.33086	1.32588	$\cdots$	1.32472	1.32472

2.2 迭代法的收敛性

定理 1 *设$\varphi(x)$在$[a,b]$内存在一阶连续导数，且满足：*

1) 当$x \in [a,b]$时，$\varphi(x) \in [a,b]$;

2) 存在正常数$L < 1$, 当$x \in [a,b]$时，$|\varphi'(x)| \leq L < 1$.

则

1) $x = \varphi(x)$在$[a,b]$上有唯一实根，记为x^*;

2) 对任意初值$x_0 \in [a,b]$, 迭代格式(5)收敛，且$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$;

3)

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|, \quad k = 1,2,3\cdots; \tag{6}$$

4)

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|, \quad k = 1,2,3\cdots; \tag{7}$$

5)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \varphi'(x^*). \tag{8}$$

定理 2 设方程(4)在区间$[a,b]$上有根，且当$x\in[a,b]$时$|\varphi'(x)|\geq 1$,则对任意$x_0\in[a,b]$，且$x_0\neq x^*$,迭代格式(5)发散.

例 3 求方程$f(x)=x^3+4x^2-10=0$在$[1,1.5]$内的根x^*.

1) 试分析如下3个迭代格式的收敛性.

$$x_{k+1}=10+x_k-4x_k^2-x_k^3, \tag{9}$$

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_k^3}, \tag{10}$$

$$x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{x_k+4}}. \tag{11}$$

2) 选择一种收敛较快的迭代格式，求出x^*, 精确至4位有效数.

例 4 给定方程$x^2+\ln x-2=0$.

1) 分析该方程存在几个实根.

2) 构造一个迭代格式, 说明收敛性, 并用迭代求方程得根,精确至4位有效数.

定义 1 *对于方程$x=\varphi(x)$，若在x^*的某个邻域$S=\{x||x-x^*|\leq\delta\}$内，对任意初值$x_0\in S$ 迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$都收敛, 则称迭代法在x^*的附近局部收敛.*

定理 3 *设方程$x=\varphi(x)$有根x^*, 且在x^*的某个邻域$S=\{x||x-x^*|\leq\delta\}$内$\varphi(x)$ 一阶连续可导，则*

1) 当$|\varphi'(x^*)|<1$时，迭代格式局部收敛;

2) 当$|\varphi'(x^*)|>1$时，迭代格式发散.

二分法
简单迭代法
Newton 迭代法
习 题

2.3 迭代法的收敛速度

定义 2 *设序列$\{x_k\}$收敛于x^*，并记$e_k = x^* - x_k$. 如果存在常数$p \geq 1$及非零常数C，使得*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

则称序列$\{x_k\}$是p阶收敛的.

p的大小反映了序列$\{x_k\}$的收敛速度，p越大，收敛越快. 当$p = 1$且$0 < |C| < 1$时，称为线性收敛；当$p > 1$称超线性收敛，特别当$p = 2$时，称平方收敛.

如果迭代$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, \cdots$ 产生的迭代序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$是p 阶收敛的，则称该迭代是p 阶收敛的.

定理 4 若$\varphi(x)$在x^*附近的某个邻域内有$p(\geq 1)$阶连续导数, 且

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, p-1, \tag{12}$$

$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0, \tag{13}$$

则迭代格式在x^*附近是p阶局部收敛的，且有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^p} = (-1)^{p-1}\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}. \tag{14}$$

如果$p = 1$, 要求$|\varphi'(x^*)| < 1$.

3 Newton 迭代法

3.1 迭代格式

给定方程

$$f(x)=0 \tag{15}$$

若已知x_k, 将$f(x)$在x_kTaylor展开

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

所以, 方程

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

可以作为(15)的近似方程, 其根为$x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$可作为方程(15)的近似根. 因此得下面的Newton迭代:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots. \tag{16}$$

Newton迭代的几何意义.

二分法
简单迭代法
Newton 迭代法
习 题
访问主页
标题页
第 14 页 共 23 页
返 回
全屏显示
关 闭
退 出

3.2 Newton迭代的局部收敛性.

Newton迭代格式的迭代函数为：$\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. 由定理4求$\varphi'(x^*)$. 设$x^*$是方程$f(x) = 0$的$m$重根, 则$f(x) = (x - x^*)^m g(x), g(x^*) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x - x^*)^{m-1}(mg(x) + (x - x^*)g'(x)), \\
\varphi(x) &= x - \frac{(x - x^*)g(x)}{mg(x) + (x - x^*)g'(x)}, \\
\varphi'(x^*) &= \lim_{x \to x^*} \frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} \\
&= \lim_{x \to x^*} \frac{1}{x - x^*} \left(x - \frac{(x - x^*)g(x)}{mg(x) + (x - x^*)g'(x)} - x^* \right) \\
&= 1 - \frac{1}{m}.
\end{aligned}
$$

结论：

- 当x^*为方程单根时, Newton迭代是二阶局部收敛.
- 当x^*为方程$m(m \geq 2)$重根时, Newton迭代一阶局部收敛.

例 5 给定方程$e^x + x - 3 = 0$

1) 判别该方程实根个数.

2) 用Newton迭代法求方程的根, 要求精确到3位有效数.

3.3 Newton迭代的大范围收敛性

定理 5 *设函数*$f(x)$*在区间*$[a,b]$*内2阶连续可导，且满足：*

1) $f(a)f(b) < 0$;

2) 当$x \in [a,b]$*时，*$f'(x) \neq 0$;

3) 当$x \in (a,b)$*时，*$f''(x)$*保号*;

4) $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} \leq b, \quad b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} \geq a.$

则对$\forall x_0 \in [a,b]$，*Newton迭代格式*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

收敛到方程$f(x) = 0$*在*$[a,b]$*内的唯一实根.*

3.4 重根的处理

设x^*是方程$f(x)=0$的m重根,

1) 若m已知, 迭代改为

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

2) 若m未知, 记$u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, 此时x^*是方程$u(x)=0$的单根, 迭代为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

3.5 Newton法的变形

1) Newton下山法

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots,$$

其中$\lambda \in (0,1)$, 选取λ使得$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$.

2) 割线法:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

3) 拟Newton法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k - f(x_k))}, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

解:

1) 记$f(x) = e^x + x - 3$. $f(0) = 1 + 0 - 2 < 0$, $f(1) = e + 1 - 3 > 0$, $f'(x) = e^x + 1 > 0$, 所以方程$f(x) = 0$有唯一实根$x^* \in (0, 1)$.

2) 迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{x_k} + x_k - 3}{e^{x_k} + 1}, \quad k = 0, 1 \cdots,$$
$$x_0 = 0.5.$$

计算得$x_1 = 0.8214$, $x_2 = 0.7924$, $x_3 = 0.7921$, $|x_3 - x_2| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, $x^* \approx 0.7921$.

解:

1) 迭代函数

$$\varphi(x) = 10 + x - 4x^2 - x^3, \tag{17}$$

$$\varphi'(x) = 1 - 8x - 3x^2. \tag{18}$$

当$x \in [1, 1.5]$时$|\varphi'(x)| \geq 10 > 1$, 所以迭代发散.

2) 迭代函数为$\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$, 当$x \in [1, 1.5]$时

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}}\right| \nearrow, \quad \Longrightarrow \tag{19}$$

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi(1.5)| = 0.6556 < 1. \tag{20}$$

当$x \in [1, 1.5]$时

$$1 < \varphi(1.5) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1) = 1.5,$$

因此迭代收敛.

3) 同2)分析相同.

解:

1) 记$f(x)=x^2+\ln x-2$. $f(1)=1-2<0$, $f(2)=4+\ln 2-2>0$,

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$, 所以方程$f(x)=0$有唯一实根$x^*\in(1,2)$.

2) 构造迭代格式:

$$\begin{aligned} &x_{k+1}=\sqrt{2-\ln x_k}, \quad k=0,1\cdots, \\ &x_0=1.3. \end{aligned}$$

分析：迭代函数$\varphi(x)=\sqrt{2-\ln x}$.

(a) $\forall x\in[1,2]$, $|\varphi'(x)|=\dfrac{1}{2x\sqrt{2-\ln x}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{2-\ln 2}}<1$.

(b) 当$x\in[1,2]$时, $1<\sqrt{2-\ln 2}\le\varphi(x)\le\sqrt{2}<2$.

由定理1, 迭代收敛.

计算得$x_1=1.318194$, $x_2=1.312911$, $x_3=1.314440$, $x_4=1.313997$, $|x_4-x_3|<\dfrac{1}{2}\times 10^{-3}$, $x^*\approx 1.313997$.

4 习 题

习题2 p.54～p.56　　2, 3, 4, 5, 8, 11