东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 数值分析 考试学期 16-17学年秋学期 得分__________

适用专业 各专业工科研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

（可带计算器）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分									
批阅人									

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

1. (8分) 填空

(1) 已知$\sqrt{3}=1.73205...$, 其近似值$x_1=1.7$, $x_2=1.73$, $x_3=1.732$, $x_4=1.7320$. 这些近似值中是有效数的有________________.

(2) 已知$x_1=0.702$, $x_2=1.250$ 均具有3位有效数字. 则$|e_r(x_1x_2)|\le$____________，$|e(x_1/x_2)|\le$________________.

(3) 计算$\ln(30-\sqrt{30^2-1})$时，为避免损失精度应使用算法________________.

2. (10分) 已知函数$f(x)$有一个m 重零点x^* (m为大于或等于1 的正整数), 且$f(x)$ 在x^*附近具有连续的二阶导数. 试证明迭代格式$x_{k+1}=x_k-m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 至少是2阶局部收敛的.

3. (10分) 用列主元Gauss消去法求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. (12分) 给定线性方程组

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(1) 写出求解该方程组的Jacobi迭代格式和Gauss-Seidel迭代格式；

(2) 记该方程的精确解为$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$. 取迭代初值$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$, 并记第$k$次迭代误差为

$$e^{(k)} = \begin{pmatrix} e_1^{(k)} \\ e_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* - x_1^{(k)} \\ x_2^* - x_2^{(k)} \end{pmatrix},\ k = 0, 1, \cdots.$$

试分别推导Jacobi格式和Gauss-Seidel迭代格式第k次迭代误差$e^{(k)}$ 与初始误差$e^{(0)}$ 之间的关系.

5. (12分) 设$f(x)\in\mathcal{C}^2[1,2]$, $a\in(1,2)$.

(1) 讨论满足以下5个条件的4次插值多项式$H(x)$的存在唯一性；

$$H(1)=f(1),\, H'(1)=f'(1),\, H(2)=f(2),\, H'(2)=f'(2),\, H''(a)=f''(a).$$

(2) 当$H(x)$存在唯一时，求出该插值多项式.

6. (12分) 已知一组数据

x	1.2	1.4	1.6	1.8
y	0.1	0.3	0.5	0.7

试用最小二乘拟合的方法求出形如$y = \ln(a + bx^2)$ 的拟合函数.

7. (12分) 设$f(x) \in \mathcal{C}^4[-1,1]$, $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$. 给定求积公式

$$I_N(f) = Af(-x_0) + Bf(x_0),$$

其中x_0, A, B为待定常数, $x_0 > 0$.

(1) 给出$I_N(f)$具有2次代数精度的充分必要条件;

(2) 求$I_N(f)$所能达到的最高代数精度;

(3) 当$I_N(f)$的代数精度达到最高时，推导截断误差$I(f) - I_N(f)$形如$cf^{(q)}(\xi)$的表达式，其中$\xi \in (-1,1)$.

8. (12分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases}$$

取正整数n, 并记$h = (b-a)/n,\ x_i = a + ih,\ 0 \le i \le n.$

(1) 推导梯形公式$y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$的局部截断误差表达式.

(2) 确定参数α 使求解公式$y_{i+1} = y_i + h[(\alpha+1)f(x_i, y_i) + (\alpha-1)f(x_{i-1}, y_{i-1})]$ 的局部截断误差阶达到最高，并给出局部截断误差表达式.

(3) 应用梯形公式和(2)中所获得的公式构造一个预测-校正公式，分析所得预测-校正公式的局部截断误差，并指出这个公式是一个几步几阶公式.

9. (12分) 考虑如下抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u = f(x,t), \quad 0 < x < 2,\, 0 < t \le 1, \\ u(x,0) = x, \quad 0 < x < 2, \\ u(0,t) = t, \quad u(1,t) = t+1, \quad 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

取定空间步长$h = 2/M$, 时间步长$\tau = 1/N$, 其中M, N 是给定正整数. 记$x_i = ih$, $0 \le i \le M$, $t_k = k\tau$, $0 \le k \le N$.

(1) 建立求解该问题的隐式差分格式, 使截断误差达到$O(\tau^2 + h^2)$, 并给出截断误差表达式;

(2) 取$f(x,t) = 0$, $M = 4$, $N = 4$, 试计算$u(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $u(1, \frac{1}{4})$, $u(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$的近似值.