东南大学
2007级研究生考试试卷 (A)

课程名称：数值分析　课程编号：S000112　考试历时：150 分钟　考核方式：闭卷

院 (系)__________　学号 __________　姓名 __________　成绩 __________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得 分									

(**注意**：本试卷共有 8 页 9 大题，请考生检查自己的试卷.)

1. 填空题 (每小题 3 分，共 21 分)

(1) 设 $x_1 = 0.2008$, $x_2 = 0.1809$ 是均具有 4 位有效数字的近似值，则 x_1x_2 至少具有 __________ 位有效数字.

(2) 给定方程 $x = 1 + \sin 2x$, 求该方程根的 Newton 迭代格式是 ____________________.

(3) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_2$= __________.

(4) 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)$, 则 $f[0,1,2,3]$= __________.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 2 阶连续可导，则 $f(0.5) - \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] =$ ____________.

(6) 求积分 $\int_1^2 f(x)dx$ 的 Simpson 公式是 ______________________________.

(7) 求常微分方程初值问题 $\begin{cases} 3y'(x) - xy = 0, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 的改进的 Euler 公式是

____.

2. (10 分) 构造一种迭代算法，求 $\sqrt[5]{2008}$ 的近似值，精确到 4 位有效数字.

3. (10 分) 给定线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

写出求解该方程组的 Jacobi 迭代格式，并分析 Jacobi 迭代格式的收敛性.

4. (9 分) 给定线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A \in R^{n\times n}$ 可逆， $b \in R^n$ 为非零向量， $x \in R^n$. 设 x^* 和 $\tilde{x}$ 分别为方程组的精确解和近似解， $r = b - A\tilde{x}$. 证明

$$\frac{1}{\mathrm{Cond}(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^*\|}$$

5. (10 分) 用插值法求一个二次多项式 $p_2(x)$ ，使得曲线 $y=p_2(x)$ 在 $x=0$ 处与曲线 $y=\cos x$ 相切，在 $x=\pi/2$ 处与 $y=\cos x$ 相交，并证明

$$\max_{0\le x\le \pi/2}|p_2(x)-\cos x|\le \frac{\pi^3}{324}.$$

6. (10 分) 求函数 $f(x) = xe^x$ 在区间 [0,1] 上的 1 次最佳平方逼近多项式 $p_1(x) = ax + b$.

7. (10 分) 给定求积公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx Af(x_0) + f(x_1).$$

(1) 求 A, x_0, x_1, 使得求积公式具有尽可能高的代数精度，并指出所达到的最高代数精度的次数.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上充分光滑，求由 (1) 所确定的求积公式的截断误差，并将其表示为 $Cf^{(p)}(\xi)$ 的形式，其中 C, p 为常数.

8. (10 分) 考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' &= f(x,y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) &= \eta. \end{cases}$$

取正整数 n, 记 $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih, i = 0,1,2,\cdots,n$. 给定上述初值问题的求解公式：

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + (1-\beta)h, y_i + h\beta f(x_i, y_i)).$$

试求参数 β, 使求解公式具有尽可能高的阶数，并求出该公式的局部截断误差表达式及阶数.

9. (10 分) 给定初边值问题

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+f(x,t), \quad 0<x<1,\ 0<t<1,\\
&u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), \quad 0<x<1,\\
&u(0,t)=\alpha(t), \quad u(1,t)=\beta(t), \quad 0\le t\le 1.
\end{aligned}$$

取正整数 M,N, 记 $h=1/M,\tau=1/N$, $x_i=ih,\ (0\le i\le M)$, $t_k=k\tau,\ (0\le k\le N)$. 试构造上述初边值问题的一种显式差分格式，要求截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$.