第 4 章 多项式插值与函数最佳逼近

(1) Lagrange 插值多项式及余项表示
(2) 差商和 Newton 插值多项式
(3) Hermite 插值多项式
(4) 分段低次插值
(5) 三次样条插值
(6) 最佳一致逼近
(7) 最佳平方逼近

1 拉格朗日 (Lagrange) 插值

(1) 函数关系 $y=f(x)$ 是一个函数表: $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,2\cdots,n)$;

(2) 函数解析表达式 $y=f(x)$ 知道, 但很复杂.

用一个简单的函数 (一般是多项式)$p(x)$ 近似函数 $f(x)$.

定义 1.1 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 且已知在点 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 上的值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$, 若存在一个次数不超过 n 的多项式 $p_n(x)$, 使

$$p_n(x_i)=f(x_i)\quad(i=0,1,2\cdots,n)\tag{1.1}$$

成立, 则称 $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 ***n* 次插值多项式**, 式(1.1)为**插值条件**, 点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为**插值节点**, 称 $f(x)$ 为**被插值函数**.

在几何上, 插值多项式就是求曲线 $y=p_n(x)$, 使其通过给定的 $n+1$ 个点 (x_i,y_i), $i=0,1,\cdots,n$.

定理 1.1 满足插值条件(1.1)的 n 次多项式 $p_n(x)$ 是存在唯一的.

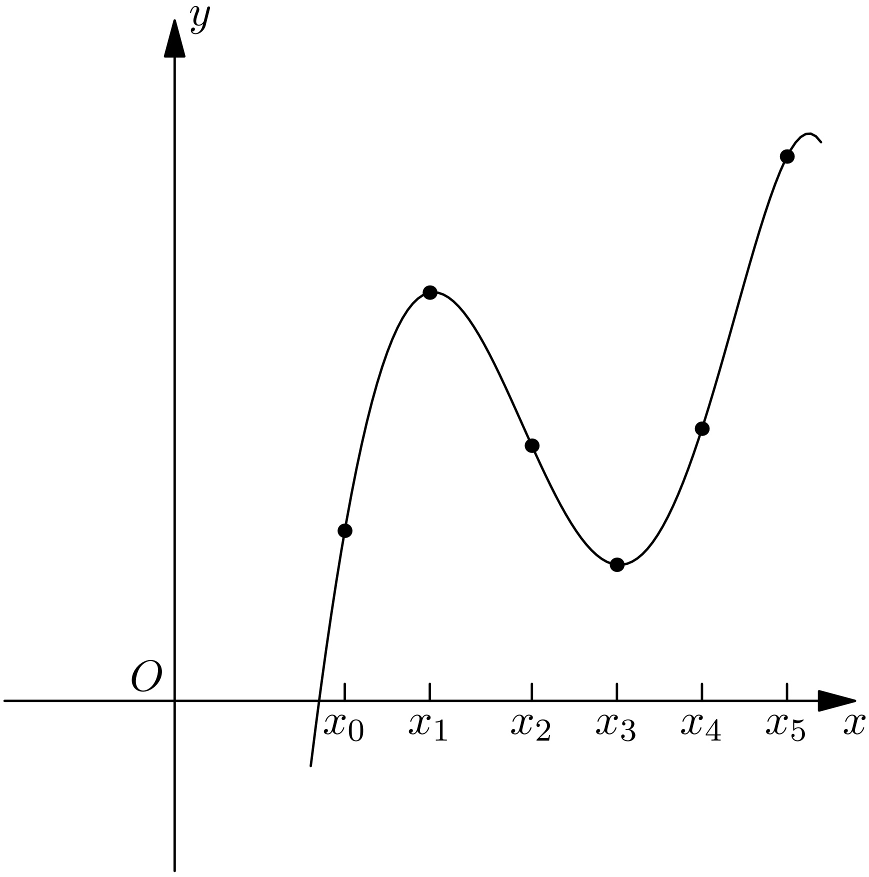

图 1.0　插值多项式的几何意义

1.1 基本插值多项式

问题 求 n 次多项式 $l_k(x)$, 使满足

$$\begin{aligned}&l_k(x_0)=0,\ l_k(x_1)=0,\ \cdots,\ l_k(x_{k-1})=0,\ l_k(x_k)=1,\\&l_k(x_{k+1})=0,\cdots,\ l_k(x_n)=0.\end{aligned}$$

即

$$l_k(x_j)=\begin{cases}1 & (j=k)\\ 0 & (j\neq k).\end{cases} \tag{1.2}$$

由条件 (1.2) 知道 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{k-1},\ x_{k+1},\ \cdots,\ x_n$ 是 n 次多项式 $l_k(x)$ 的零点, 所以 $l_k(x)$ 有 n 个因子:

$$x-x_0,\ x-x_1,\ \cdots,\ x-x_{k-1},\ x-x_{k+1},\cdots,\ x-x_n.$$

所以有

$$\begin{aligned}l_k(x)&=A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)\\&=A_k\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x-x_i)\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 A_k 为待定常数. 由 $l_k(x_k)=1$, 即

$$A_k\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)=1$$

得到

$$A_k=\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}\qquad\Rightarrow$$

$$l_k(x)=\frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x-x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}. \tag{1.4}$$

$l_k(x)$ 称为 n 次**基本插值多项式**. 当 $k=0,1,\cdots,n$ 时, 可得到 $n+1$ 个基本插值多项式 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$.

1.2 Lagrange 插值多项式

利用基本插值多项式, 满足插值条件 (1.1) 的 n 次插值多项式可以表示为

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x). \tag{1.5}$$

事实上, 由于 $p_n(x)$ 是 n 次多项式, 而且

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x_i) = f(x_i) l_i(x_i) = f(x_i), \quad (i = 0, 1, \cdots, n,)$$

(1.5) 称为 **n 次 Lagrange 插值多项式**, 记为 $L_n(x)$, 即

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}. \tag{1.6}$$

注 1.1 $l_0(x), l_1(x) \cdots, l_n(x)$ 线性无关, 它是 n 次多项式空间 $\mathcal{P}_n$ 的一组基, 而 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 也是其一组基. $l_0(x), l_1(x) \cdots, l_n(x)$ 称为 **n 次 Lagrange 插值基函数**.

1.3 插值余项及误差估计

称 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ 为插值多项式的余项.

定理 1.2 设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在, x_0, $x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ 为互异节点, $L_n(x)$ 是满足 (1.1) 的插值多项式, 则对 $\forall x \in [a,b]$, $\exists\, \xi \in (a,b)$ (ξ 依赖于 x), 使得

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \tag{1.7}$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

注 1.2 (1) ξ 依赖于 x, 即

$$\xi=\xi(x)\in(\min\{x_0,x_1,\cdots,x_n\},\max\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}).$$

(2) 当 $f(x)$ 本身是一个次数不超过 n 的多项式时, $f(x)-L_n(x)=0$, 因而 $L_n(x)=f(x)$. 特别当 $f(x)=1$, 则有

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=1.$$

(3) ξ 一般不能求出, 因此只能估计误差. 设 $\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|=M_{n+1}$, 则有

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$

例 1.1 已知函数 $f(x)=\sin x,\ x\in[0,\pi]$.

(1) 以 $x_0=0, x_1=\frac{\pi}{2}, x_2=\pi$ 为插值节点, 求 $f(x)$ 的 2 次插值多项式 $L_2(x)$, 并作 $f(x)$ 和 $L_2(x)$ 的图像.

(2) 以 $x_0=0, x_1=\frac{\pi}{3}, x_2=\frac{2\pi}{3}, x_3=\pi$ 为插值节点, 求 $f(x)$ 的 3 次插值多项式 $L_3(x)$, 并作 $f(x)$ 和 $L_3(x)$ 的图像.

解 (1) 由Lagrange插值多项式知

$$\begin{aligned}
L_2(x)=&f(0)\frac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{\left(0-\dfrac{\pi}{2}\right)(0-\pi)}+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-0)(x-\pi)}{\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right)\left(\dfrac{\pi}{2}-\pi\right)}\\
&+f(\pi)\frac{(x-0)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{(\pi-0)\left(\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)}\\
=&-\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi).
\end{aligned}$$

$f(x)$ 和 $L_2(x)$ 的图像见图1.1.

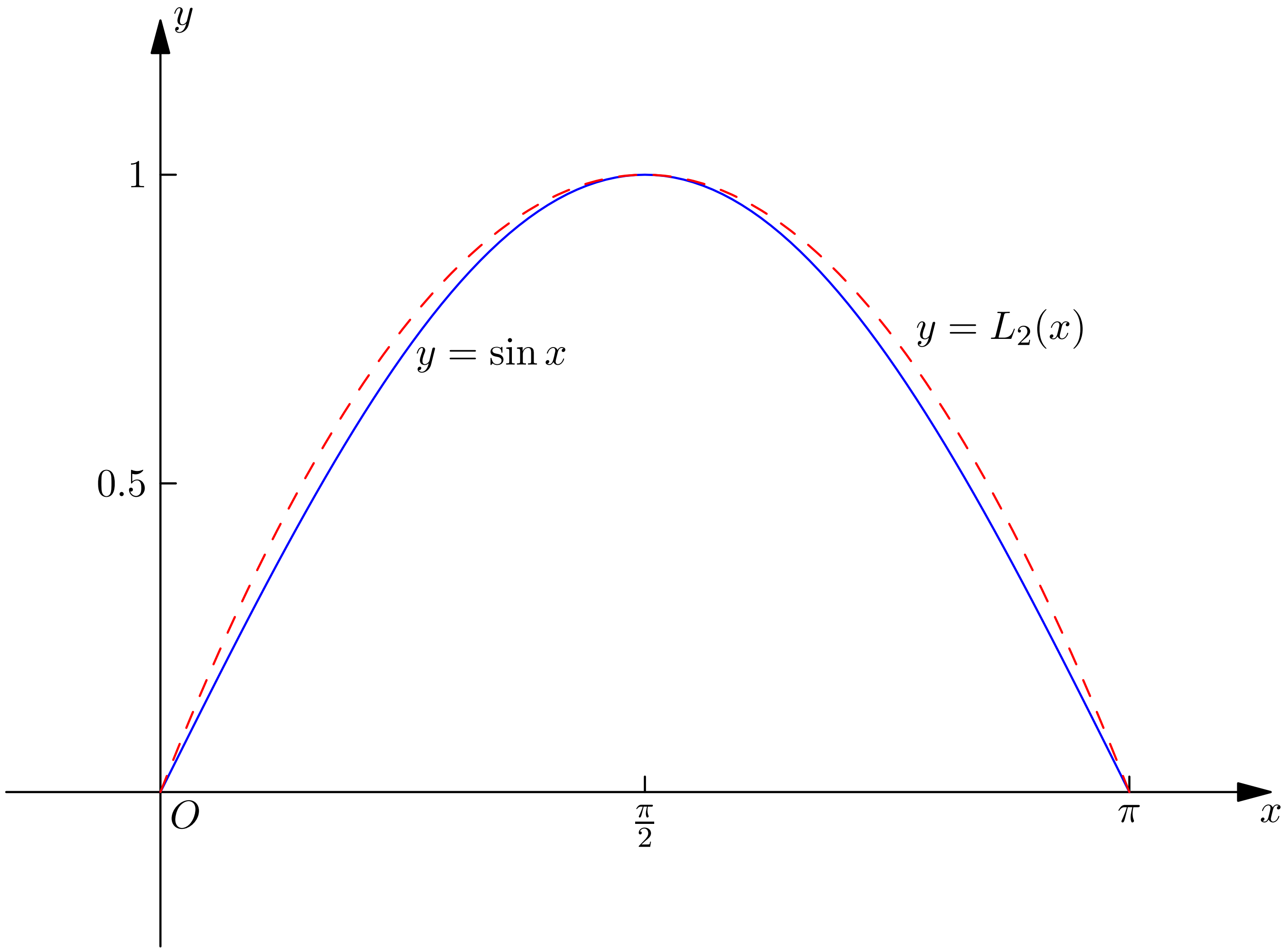

图 1.1　二次插值多项式 $L_2(x)$

(2) $f(x)$ 的 3 次插值多项式为

$$
\begin{aligned}
L_3(x) =& f(0)\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)(x-\pi)}{\left(0-\frac{\pi}{3}\right)\left(0-\frac{2\pi}{3}\right)(0-\pi)} \\
&+ f\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{(x-0)\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{3}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right)} \\
&+ f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)(x-\pi)}{\left(\frac{2\pi}{3}-0\right)\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)} \\
&+ f(\pi)\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}{(\pi-0)\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)}
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{9\sqrt{3}}{4\pi^2}x(x-\pi).$$

$f(x)$ 和 $L_3(x)$ 的图像见图1.2.

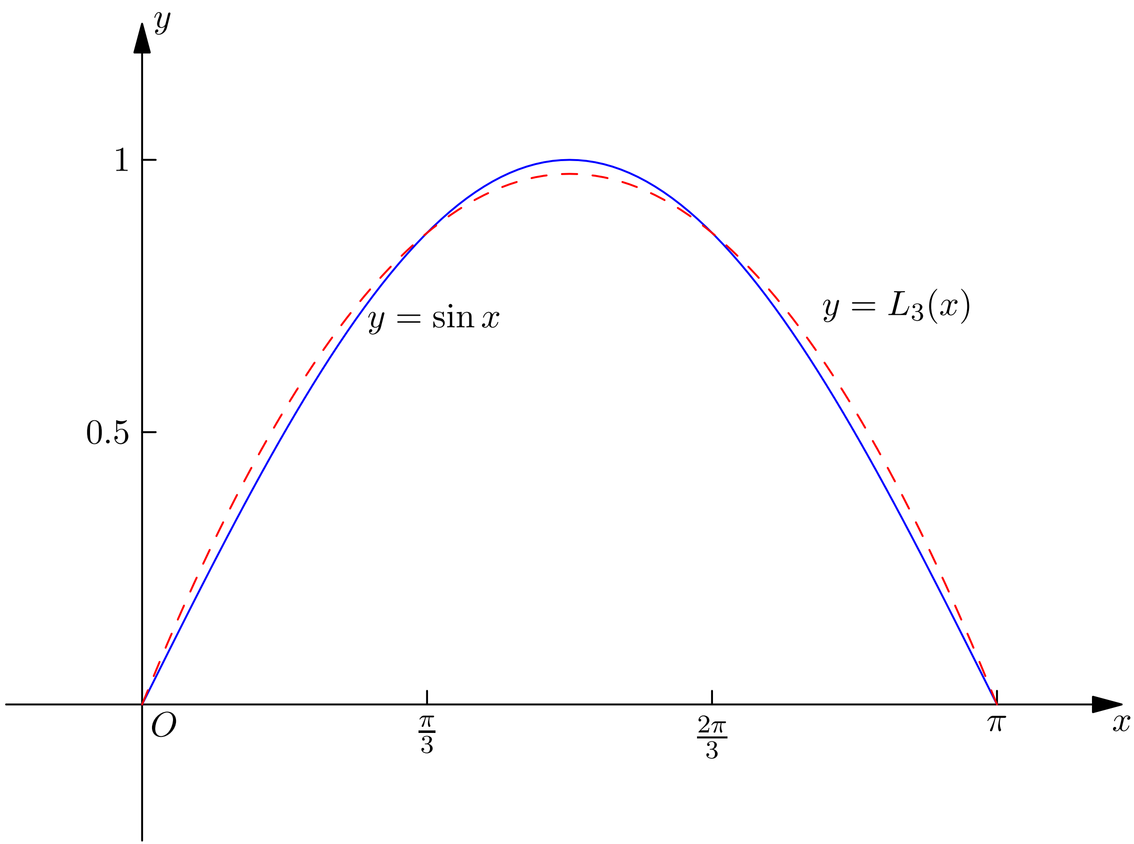

图 1.2 三次插值多项式 $L_3(x)$

例 1.2 设函数

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

的函数值已造成函数表. 假设在区间 $[4, 6]$ 上用线性插值计算 $f(x)$ 的近似值, 问会有多大的误差?

解 在 $[4, 6]$ 上作 $f(x)$ 的线性插值多项式 $p_1(x)$, 则

$$R_1(x) = f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1), \quad \xi \in [4, 6],$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad f''(x) = -\frac{4x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

$$f'''(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0, \quad x \in (4, 6), \Longrightarrow f''(x) \nearrow$$

所以有

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{2} \times |f''(4)| \times |(5-4)(5-6)| = 0.508 \times 10^{-6}.$$

2 差商、差分和 Newton 插值

Lagrange 插值的缺点：当节点增加或减少时, 插值多项式 $L_n(x)$ 将发生变化, 计算不便.

设 $L_{k-1}(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 $k-1$ 次插值多项式, $L_k(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 k 次插值多项式, 考察 L_{k-1} 和 $L_k(x)$ 之间的关系. 令

$$g(x) = L_k(x) - L_{k-1}(x),$$

则 $g(x)$ 是次数不超过 k 的多项式, 且对 $j = 0, 1, \cdots, k-1$ 有

$$\begin{aligned} g(x_j) &= L_k(x_j) - L_{k-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0. \quad \Longrightarrow \\ g(x) &= a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

其中 a_k 是和 x 无关的常数. 也可以写成

$$\begin{aligned} L_k(x) &= L_{k-1}(x) + a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}), \qquad (2.1) \\ L_k(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}). \end{aligned}$$

下面求 a_k, 在 (2.1) 中令 $x = x_k$ 得

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{L_k(x_k) - L_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})} \\
&= \frac{f(x_k) - \sum\limits_{m=0}^{k-1} f(x_m) \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k-1} \frac{x_k - x_i}{x_m - x_i}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} \\
&= \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f(x_m)}{(x_k - x_m)\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k-1}(x_m - x_i)} \\
&= \sum_{m=0}^{k} \frac{f(x_m)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k}(x_m - x_i)} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

2.1 差商及 Newton 插值多项式

定义 2.1 设已知函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$, 称

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j 的 **1 阶差商**. 称 1 阶差商 $f[x_i, x_j]$ 和 $f[x_j, x_k]$ 的差商

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j, x_k 的 **2 阶差商**, 一般地, 称 2 个 $k-1$ 阶的差商为 ***k* 阶差商**, 即

$$\begin{aligned} & f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] \\ = & \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_0}. \end{aligned}$$

约定 0 阶差商是函数值.

计算函数的差商, 可以通过列表法计算。

表 2.1　差商的计算

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$\vdots$
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$\vdots$	
3	x_3	$f(x_3)$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			

差商有下列性质:

性质 2.1 k 阶差商可表示成函数值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_k)$ 的线性组合, 即

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{m=0}^{k} \frac{f(x_m)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{k} (x_m - x_i)}. \tag{2.3}$$

由 (2.2) 和 (2.3) 知, $a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$. 利用 (2.1) 可得

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.4) 称为 **n 次 Newton 插值多项式.**

性质 2.2 k 阶差商 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 与节点的次序无关. 即

$$f[x_0, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_k] = f[x_0, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_k], \quad 0 \le i, j \le k.$$

性质 2.3 k 阶差商和 k 阶导数之间有如下关系:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!}, \tag{2.5}$$

其中 $\eta \in (\min\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}, \max\{x_0, x_1, \cdots, x_k\})$.

3　差分及等距节点 Newton 插值多项式 (自学)

4 Hermite插值

定义 4.1 给定 $[a,b]$ 中 $n+1$ 个互异节点 x_i $(i=0,1\cdots,n)$ 上的函数值和直到 m_i 阶的导数值 $f(x_i), f'(x_i), \cdots, f^{(m_i)}(x_i)$. 令 $m=\sum_{i=0}^{n}(m_i+1)-1$, 若存在一个次数不超过 m 的多项式 $H_m(x)$, 使得

$$\begin{cases} H_m(x_0) = f(x_0), H'_m(x_0) = f'(x_0), \cdots, H_m^{(m_0)}(x_0) = f^{(m_0)}(x_0), \\ H_m(x_1) = f(x_1), H'_m(x_1) = f'(x_1), \cdots, H_m^{(m_1)}(x_1) = f^{(m_1)}(x_1), \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ H_m(x_n) = f(x_n), H'_m(x_n) = f'(x_n), \cdots, H_m^{(m_n)}(x_n) = f^{(m_n)}(x_n), \end{cases} \tag{4.1}$$

则称 $H_m(x)$ 为 $f(x)$ 的 $\boldsymbol{m}$**次 Hermite 插值多项式.**

定理 4.1 满足 (4.1) 的 m 次多项式 $H_m(x)$ 存在唯一.

定理 4.2 设 $H_m(x)$ 为满足(4.1)的 m 次 Hermite 插值多项式, $f(x)$ 在包含 $(n+1)$ 个互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的区间 $[a,b]$ 上具有 m 阶连续导数, 在 (a,b) 内存在 $(n+1)$ 阶导数, 则对任意 $x \in [a,b]$, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$R_m(x) = f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^{m_i+1}.$$

先推广 Newton 差商的定义.

定理 4.3 (Hermite-Gennochi)　若 $f \in C^n[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$, 则有

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \int \cdots \int_{\tau_n} f^{(n)}(t_0 x_0 + t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) dt_1 \cdots dt_n$$

其中 $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i$, $\tau_n = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n) | t_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} t_i \le 1\}$ 为 n 维单纯形.

一维单纯形为区间 $[0,1]$, 二维和三维单纯形见下图:

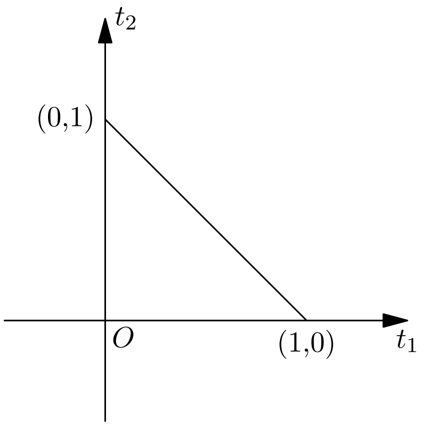

图 3.1　二维单纯形

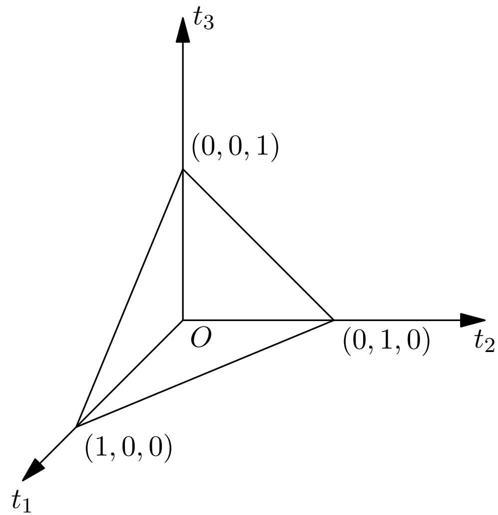

图 3.2　三维单纯形

注意到被积函数是通过一元连续函数 $f^{(n)}(x)$ 与 n 元线性连续函数 $\sum_{i=0}^{n} t_i x_i$ 复合而成, 所以 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ 是 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的连续函数. 因此

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

$$f[\underbrace{x_0, x_0, \cdots, x_0}_{k+1\text{个}}] = \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ \vdots \\ x_k \to x_0}} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

$$= \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ \vdots \\ x_k \to x_0}} \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{x_1 - x_0}.$$

考虑下面问题：求线性函数 $p(x)$ 满足

$$\begin{cases} p(x_0) = f(x_0), \\ p'(x_0) = f'(x_0). \end{cases} \tag{4.2}$$

为了解决这个问题, 我们先考虑下面的问题：求线性函数 $q(x)$ 满足

$$\begin{cases} q(x_0) = f(x_0), \\ q(x_1) = f(x_1). \end{cases} \tag{4.3}$$

我们有

$$q(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0).$$

在上式中令 $x_1 \to x_0$, 则有

$$\lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = f[x_0, x_0] = f'(x_0),$$

从而得一次多项式

$$f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0),$$

显然它满足条件(4.2). 所以

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0).$$

从这个例子可以看出, 我们可以将插值问题 (4.1) 看成是在 $m+1$ 不同节点上的 Newton 插值, 然后取极限就成为 $n+1$ 不同节点上的 Hermite 插值, 称之为重节点插值.

m 次 Hermite 插值多项式为

$$
\begin{aligned}
H_m(x) = {} & f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + \cdots + f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}](x - x_0)^{m_0} \\
& + f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}, x_1](x - x_0)^{m_0+1} + \cdots + \\
& f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}, \underbrace{x_1, \cdots, x_1}_{m_1+1}](x - x_0)^{m_0+1}(x - x_1)^{m_1} + \cdots + \\
& f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}, \cdots, \underbrace{x_{n-1}, \cdots, x_{n-1}}_{m_{n-1}+1}, x_n] \\
& (x - x_0)^{m_0+1} \cdots (x - x_{n-1})^{m_{n-1}+1} \\
& + \cdots + f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}, \cdots, \underbrace{x_{n-1}, \cdots, x_{n-1}}_{m_{n-1}+1}, \underbrace{x_n, \cdots, x_n}_{m_n+1}] \\
& (x - x_0)^{m_0+1} \cdots (x - x_{n-1})^{m_{n-1}+1}(x - x_n)^{m_n},
\end{aligned}
$$

插值余项为

$$\begin{aligned} f(x) - H_m(x) = \quad & f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}, \underbrace{x_1, \cdots, x_1}_{m_1+1}, \cdots, \underbrace{x_n, \cdots, x_n}_{m_n+1}, x] \\ & (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\cdots(x-x_n)^{m_n+1} \\ = \quad & \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^{m_i+1} \end{aligned}$$

其中 $\min\{x_0, x_1, \cdots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, x_1, \cdots, x_n, x\}$.

例 4.1 若 $n=0, m_0=k$, 即 1 个 $k+1$ 重插值节点, 其插值多项式为

$$
\begin{aligned}
H_k(x) &= f(x_0)+f[x_0,x_0](x-x_0)+\cdots+f[\underbrace{x_0,\cdots,x_0}_{k+1}](x-x_0)^k \\
&= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.
\end{aligned}
$$

此即为 k 阶 Taylor 展开式.

例 4.2 求 4 次插值多项式 $H(x)$, 使得

$$H(0)=3,\quad H'(0)=4,\quad H(1)=5,\quad H'(1)=6,\quad H''(1)=7.$$

解 可以列表计算各点差商.

k	x_k	$f(x_k)$	1 阶差商	2 阶差商	3 阶差商	4 阶差商
0	0	3	4	-2	6	$-\frac{13}{2}$
1	0	3	2	4	$-\frac{1}{2}$	
2	1	5	6	$\frac{7}{2}$		
3	1	5	6			
4	1	5				

所以得

$$H(x)=3+4(x-0)-2(x-0)^2+6(x-0)^2(x-1)-\frac{13}{2}(x-0)^2(x-1)^2.$$

例 4.3 设 $f(x)\in C^4[a,b]$, 作 3 次多项式 $H_3(x)$, 使得

$$H_3(a)=f(a),\ H_3'(a)=f'(a),\ H_3(b)=f(b),\ H_3'(b)=f'(b)$$

并写出插值余项.

解 由 Newton 型插值公式得

$$\begin{aligned} H_3(x) &= f(a)+f[a,a](x-a)+f[a,a,b](x-a)^2 \\ &\quad +f[a,a,b,b](x-a)^2(x-b). \end{aligned}$$

求差商.

$$\begin{aligned} f[a,a] &= f'(a), \quad f[b,b]=f'(b), \quad f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \\ f[a,a,b] &= \frac{f[a,b]-f[a.a]}{b-a}=\frac{f[a,b]-f'(a)}{b-a}, \\ f[a,b,b] &= \frac{f[b,b]-f[a,b]}{b-a}=\frac{f'(b)-f[a,b]}{b-a}, \\ f[a,a,b,b] &= \frac{f[a,b,b]-f[a,a,b]}{b-a} \\ &= \frac{1}{(b-a)^2}\{f'(b)-2f[a,b]+f'(a)\}, \end{aligned}$$

因而

$$
\begin{aligned}
H_3(x) \;=\; & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{b-a}\{f[a,b] - f'(a)\}(x-a)^2 \\
& \frac{1}{(b-a)^2}\{f'(b) - 2f[a,b] + f'(a)\}(x-a)^2(x-b).
\end{aligned}
$$

插值余项

$$
f(x) - H_3(x) = \frac{f^{4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2, \quad \xi \in (a,b)
$$

例 4.4 求一个 3 次多项式 $H(x)$, 使其满足

$$H(a) = f(a), \quad H(b) = f(b), \quad H'(a) = f'(a), \quad H''(b) = f''(b).$$

5 高次插值的缺点及分段低次插值

5.1 高次插值的病态性质

看下面的例子：设 $f(x) = 1/(1+25x^2)$，$x \in [-1,1]$, 将 $[-1,1]$10 等分得节点 $x_i = -1 + i/5$ $(i = 0, 1, \cdots, 10)$. 则 $f(x)$ 的 10 次插值多项式为

$$L_{10}(x) = \sum_{i=0}^{10} f(x_i) l_i(x)$$

其中

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{10} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

计算结果如下表：

x	$f(x)$	$L_{10}(x)$	x	$f(x)$	$L_{10}(x)$
-1.00	0.03846	0.03848	-0.46	0.15898	0.24145
-0.96	0.04160	1.80438	-0.40	0.20000	0.19999
-0.90	0.04706	1.57872	-0.36	0.23585	0.18878
-0.86	0.05131	0.88808	-0.30	0.30769	0.23535
-0.80	0.05882	0.05882	-0.26	0.37175	0.31650
-0.76	0.06477	-0.20130	-0.20	0.50000	0.50000
-0.70	0.07547	-0.22620	-1.16	0.60976	0.64316
-0.66	0.08410	-0.10832	-0.10	0.80000	0.84340
-0.60	0.10000	0.10000	-0.06	0.91743	0.94090
-0.56	0.11312	0.19873	0.00	1.00000	1.00000
-0.50	0.13793	0.25376			

从计算结果看出, 当 x 在 ± 1 附近时, $f(x)$ 的值和 $L_{10}(x)$ 的值相差很大. 这种现象称 **Runge** 现象. 其实可以证明, $f(x)$ 的 n 次插值多项式 $L_n(x)$ 在 $[1, 1]$ 上不是一致收敛到 $f(x)$.

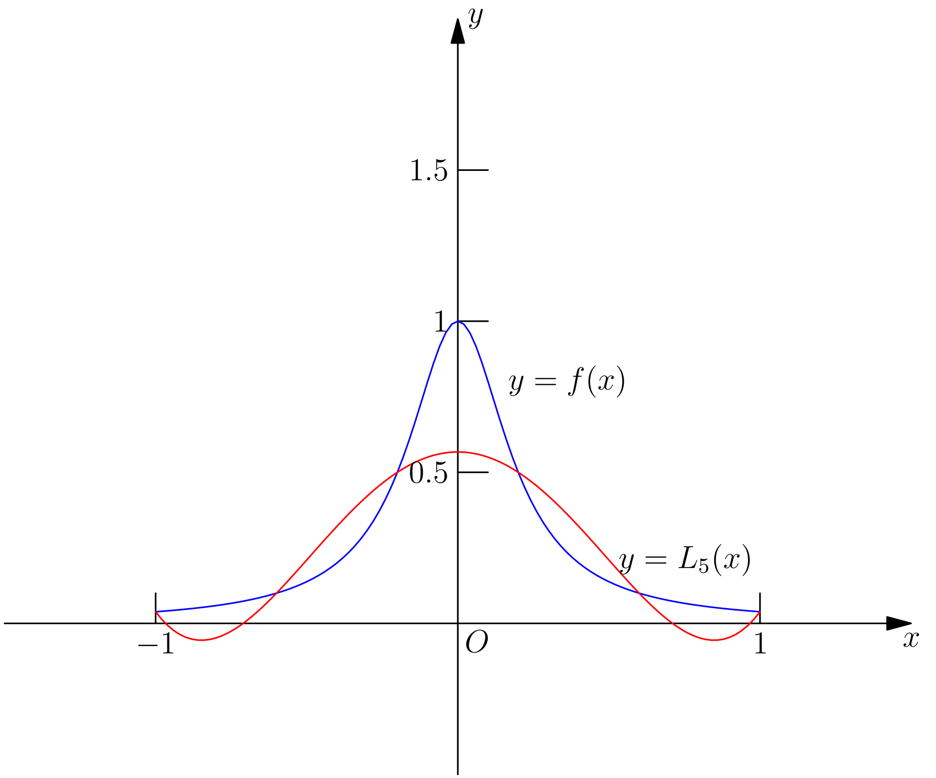

图 4.1　函数 $f(x)$ 和$L_5(x)$

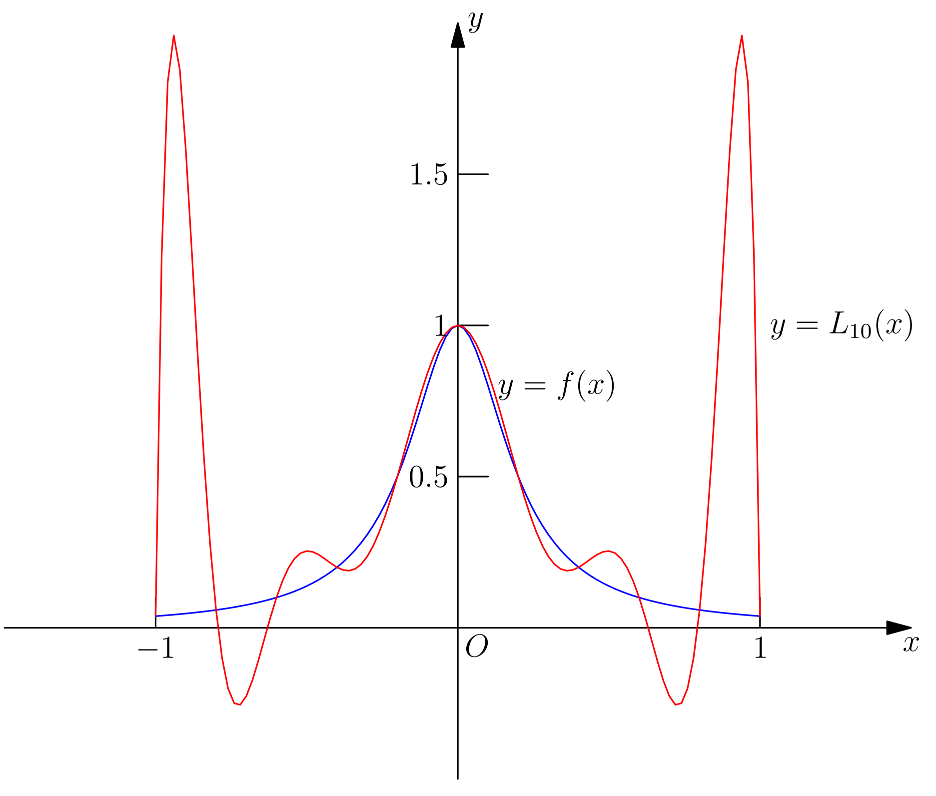

图 4.2　函数 $f(x)$ 和 $L_{10}(x)$

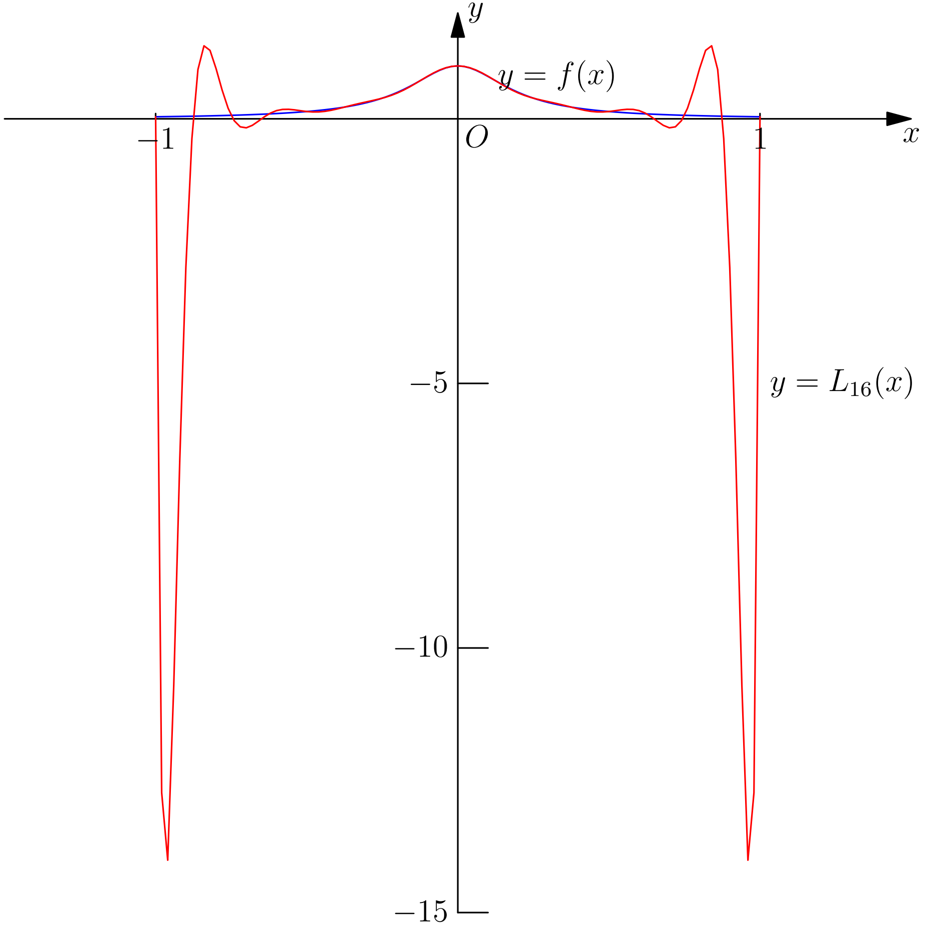

图 4.3　函数 $f(x)$ **和** $L_{16}(x)$

5.2 分段线性插值

给定 $f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上的函数值:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

记 $h_i = x_{i+1} - x_i$, $h = \max\limits_{0\le i\le n-1} h_i$. 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上作 $f(x)$ 的线性插值

$$L_{1,i}(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

其误差为

$$f(x) - L_{1,i}(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}),$$

从而有

$$\begin{aligned} \max_{x_i\le x\le x_{i+1}} |f(x) - L_{1,i}(x)| &\le \max_{x_i\le x\le x_{i+1}} \left|\frac{1}{2} f''(\xi_i)(x - x_i)(x - x_{i+1})\right| \\ &\le \frac{1}{8} h_i^2 \max_{x_i\le x\le x_{i+1}} |f''(x)|. \end{aligned} \tag{5.1}$$

令

$$\tilde{L}_1(x) = \begin{cases} L_{1,0}(x), & x \in [x_0, x_1) \\ L_{1,1}(x), & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ L_{1,n-2}(x), & x \in [x_{n-2}, x_{n-1}) \\ L_{1,n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

于是有

$$\tilde{L}_1(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

即 $\tilde{L}_1(x)$ 是 $f(x)$ 的插值函数, 称为**分段线性插值函数**, 其插值误差为

$$\begin{aligned} \max_{a \le x \le b} |f(x) - \tilde{L}_1(x)| &= \max_{0 \le i \le n} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x) - \tilde{L}_1(x)| \\ &= \max_{0 \le i \le n} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x) - L_{1,i}(x)| \\ &\le \max_{0 \le i \le n} \frac{1}{8} h_i^2 \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f''(x)| \\ &\le \frac{1}{8} h^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)|. \end{aligned}$$

只要 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 2 阶连续导数, 当 $h \to 0$ 时余项一致趋于零, 即

分段线性插值函数 $\tilde{L}_1(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

5.3 分段 3 次 Hermite 插值

给定 $f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 上的函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
$f'(x)$	$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	$\cdots$	$f'(x_{n-1})$	$f'(x_n)$

记 $h_i=x_{i+1}-x_i$, $h=\max\limits_{0\le i\le n-1} h_i$. 在每个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上利用数据

x	x_i	x_{i+1}
$f(x)$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$
$f'(x)$	$f'(x_i)$	$f'(x_{i+1})$

作 3 次 Hermite 插值

$$\begin{aligned} H_{3,i}(x) = \quad & f(x_i)+f'(x_i)(x-x_i)+\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f'(x_i)}{h_i}(x-x_i)^2+ \\ & \frac{f'(x_{i+1})-2f[x_i,x_{i+1}]+f'(x_i)}{h_i^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1}), \end{aligned}$$

其插值余项

$$f(x)-H_{3,i}(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2,\quad \xi\in(x_i,x_{i+1}).$$

于是

$$\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-H_{3,i}(x)|\le\frac{1}{4!}\frac{h_i^4}{16}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f^{(4)}(x)|. \tag{5.2}$$

令

$$\tilde{H}_3(x)=\begin{cases}H_{3,0}(x), & x\in[x_0,x_1)\\ H_{3,1}(x), & x\in[x_1,x_2)\\ \vdots & \\ H_{3,n-2}(x), & x\in[x_{n-2},x_{n-1})\\ H_{3,n-1}(x), & x\in[x_{n-1},x_n].\end{cases}$$

则

$$\tilde{H}_3(x_i)=f(x_i),\ \tilde{H}_3'(x_i)=f'(x_i)\quad(i=0,1,\cdots,n.)$$

即 $\tilde{H}_3(x)$ 满足插值条件. 称 $\tilde{H}_3(x)$ 为 $f(x)$ 的**分段三次插值函数**, 其误差为

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-\tilde{H}_3(x)| = \max_{0\le i\le n}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-\tilde{H}_3(x)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \max_{0\le i\le n} \max_{x_i\le x\le x_{i+1}} |f(x) - H_{3,i}(x)| \\
&\le \max_{0\le i\le n} \frac{1}{4!}\frac{h_i^4}{16} \max_{x_i\le x\le x_{i+1}} |f^{(4)}(x)| \\
&\le \frac{1}{384} h^4 \max_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)|.
\end{aligned}
$$

分段三次 Hermite 插值的余项和 $f(x)$ 的 4 阶导数有关, 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 4 阶连续导数, 则有

$$
\tilde{H}_3(x) \xrightarrow{\text{一致}} f(x).
$$

6 三次样条插值

分段插值优点: 一致收敛. 缺点: 光滑性差.

6.1 三次样条插值函数

定义 6.1 设在区间 $[a,b]$ 上给定 $n+1$ 个插值节点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

及其函数在节点上的值 $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$. 若存在函数 $S(x)$ 满足:

(1) $S(x_j) = y_j,\ j = 0, 1, \cdots, n$;

(2) $S(x)$ 在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ $j = 0, 1, \cdots, n$ 上是 3 次多项式;

(3) $S(x) \in C^2[a,b]$.

则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的 **3 次样条插值函数**.

要确定 $S(x)$, 在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上要确定 4 个参数, 所以共要确定 $4n$ 个参数. 根据 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶导数连续, 在节点 x_j $j=1,2,\cdots,n-1$ 处满足下面的连续性条件:

$$\begin{aligned} &S(x_j-0)=S(x_j+0), \quad S'(x_j-0)=S'(x_j+0), \\ &S''(x_j-0)=S''(x_j+0). \end{aligned} \tag{6.1}$$

共有 $3n-3$ 个条件, 加上插值条件 $n+1$ 个, 共有 $4n-2$ 个条件. 故还要加 2 个条件, 通常在端点处附加条件 (边界条件), 一般有以下三种:

(1) 已知两端点的一阶导数, 即

$$S'(x_0)=f'(x_0),\ S'(x_n)=f'(x_n). \tag{6.2}$$

(2) 已知两端点的二阶导数, 即

$$S''(x_0)=f''(x_0),\ S''(x_n)=f''(x_n). \tag{6.3}$$

特别, 当 $S''(x_0)=0, S''(x_n)=0$ 时, 称为自然边界条件.

(3) 周期边界条件, 当 $f(x_0)=f(x_n)$ 时,

$$S'(x_0+0)=S'(x_n-0), \quad S''(x_0+0)=S''(x_n-0). \tag{6.4}$$

6.2 样条插值函数的建立

$S(x)$ 在 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是 3 次多项式, 则 $S''(x)$ 是线性函数, 设 $S''(x_j) = M_j$, $S''(x_{j+1}) = M_{j+1}$, 则

$$S''(x) = M_j + \frac{1}{h_j}(M_{j+1} - M_j)(x - x_j), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \tag{6.5}$$

其中 $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$. 积分上式得

$$\begin{aligned} S'(x) = c_j + M_j(x - x_j) + \frac{1}{2h_j}(M_{j+1} - M_j)(x - x_j)^2, \\ x \in [x_j, x_{j+1}], \end{aligned} \tag{6.6}$$

再积分一次

$$\begin{aligned} S(x) = \quad & y_j + c_j(x - x_j) + \frac{1}{2}M_j(x - x_j)^2 + \\ & \frac{1}{6h_j}(M_{j+1} - M_j)(x - x_j)^3, \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \end{aligned} \tag{6.7}$$

利用 $S(x_{j+1}) = y_{j+1}$, 可得

$$c_j = f[x_j, x_{j+1}] - \left(\frac{1}{3}M_j + \frac{1}{6}M_{j+1}\right)h_j, \tag{6.8}$$

所以

$$
\begin{aligned}
S(x) = \quad & y_j + \left\{ f[x_j, x_{j+1}] - \left(\frac{1}{3} M_j + \frac{1}{6} M_{j+1} \right) h_j \right\} (x - x_j) \\
& + \frac{1}{2} M_j (x - x_j)^2 + \frac{1}{6h_j} (M_{j+1} - M_j)(x - x_j)^3, \\
& \qquad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \cdots, n-1. \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

由 (6.6) 和 (6.8) 得

$$
\begin{aligned}
S'(x_j + 0) = c_j = f[x_j, x_{j+1}] - \left(\frac{1}{3} M_j + \frac{1}{6} M_{j+1} \right) h_j, \\
j = 0, 1, \cdots, n-1, \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S'(x_{j+1} - 0) \; &= \; c_j + M_j h_j + \frac{1}{2} (M_{j+1} - M_j) h_j \\
&= \; f[x_j, x_{j+1}] + \left(\frac{1}{6} M_j + \frac{1}{3} M_{j+1} \right) h_j, \\
& \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1. \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

上式中 j 换成 $j-1$ 得

$$
S(x_j - 0) = f[x_{j-1}, x_j] + \left(\frac{1}{6} M_{j-1} + \frac{1}{3} M_j \right) h_{j-1},
$$

$$j=1,2\cdots,n. \tag{6.12}$$

将 (6.10) 和 (6.12) 代入连续性方程 $S'(x_j-0)=S'(x_j+0)$, $j=1,2,\cdots,n-1$,

$$\begin{aligned} f[x_{j-1},x_j]+\left(\frac{1}{6}M_{j-1}+\frac{1}{3}M_j\right)h_{j-1} \\ =f[x_j,x_{j+1}]-\left(\frac{1}{3}M_j+\frac{1}{6}M_{j+1}\right)h_j, \end{aligned}$$

即

$$\mu_j M_{j-1}+2M_j+\lambda_j M_{j+1}=d_j, \quad j=1,2,\cdots,n-1, \tag{6.13}$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_j &= \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}, \quad \lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}=1-\mu_j, \\ d_j &= 6f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]. \end{aligned} \tag{6.14}$$

式 (6.13) 给出了 $n-1$ 个方程. 如果边界条件是 (6.2), 把 $S'(x_0)=f'_0$, $S'(x_n)=f'_n$ 分别代入 (6.10) 和 (6.12) 得

$$f[x_0,x_1]-\left(\frac{1}{3}M_0+\frac{1}{6}M_1\right)h_0=f'_0,$$

$$f[x_{n-1}, x_n] + \left(\frac{1}{6}M_{n-1} + \frac{1}{3}M_n\right)h_{n-1} = f'_n,$$

即

$$2M_0 + M_1 = 6f[x_0, x_0, x_1] \equiv d_0, \tag{6.15}$$

$$M_{n-1} + 2M_n = 6f[x_{n-1}, x_n, x_n] \equiv d_n. \tag{6.16}$$

联立 (6.13), (6.15) 和 (6.16) 得下面的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \tag{6.17}$$

如果边界条件是 (6.3), 则得 $M_0 = f''_0$, $M_n = f''_n$. 这时 (6.13) 的第一个方程和最后一个方程分别为

$$2M_0 + \lambda_1 M_2 = d_1 - \mu_1 f''_0, \tag{6.18}$$

$$\mu_{n-1}M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1} - \lambda_{n-1}f''_n. \tag{6.19}$$

从而得下面线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

如果边界条件是 (6.4), 则由 $S'(x_0) = S'(x_n)$ 得

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] - \left(\frac{1}{3}M_0 + \frac{1}{6}M_1\right)h_0 \;=\; & f[x_{n-1}, x_n] + \left(\frac{1}{6}M_{n-1}\right. \\ & \left. + \frac{1}{3}M_n\right)h_{n-1}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

由 $S''(x_0) = S''(x_n)$ 得

$$M_0 = M_n$$

代入 (6.21) 得

$$\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n,$$

其中

$$\lambda_n = \frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}},$$
$$d_n = 6\frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_0 + h_{n-1}}.$$

此时 (6.13) 的第一个方程为

$$2M_1 + \lambda_1 M_2 + \mu_1 M_n = d_1,$$

所以得下面的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

方程 (6.17),(6.20) 和 (6.22) 对应的系数矩阵是严格对角占优的, 前 2 个方程是 3 对角的, 可以用追赶法求解, 第三个方程也可用类似的方法求解.

求出 $M_0, M_1, \ldots, M_n$ 后, 将他们代入 (6.9) 便得三次样条插值函数的分段表达式.

例 6.1 给定数据:

x	1	2	4	5
$f(x)$	1	3	4	2

求 $f(x)$ 的自然 (边界条件) 3 次样条插值函数, 并求 $f(3)$ 和 $f(4.5)$ 的近似值.

解 记 $x_0 = 1\ x_1 - 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$, 则

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 3,\ f(x_2) = 4,\ f(x_3) = 2$$
$$h_0 = x_1 - x_0 = 1,\ h_1 = x_2 - x_1 = 2,\ h_3 = x_3 - x_2 = 1$$
$$\mu_1 = \frac{h_0}{h_0 + h_1} = \frac{1}{3},\ \mu_2 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{2}{3}$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{1}{2},\ f[x_1, x_2, x_3] = -\frac{5}{6}.$$

由自然边界条件知 $M_0 = M_3 = 0$, 故得线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

解得 $M_1 = -\frac{3}{4}$, $M_2 = -\frac{9}{4}$. 代入 (6.9) 得 3 次样条函数

$$S(x) = \begin{cases} 1 + \frac{17}{8}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^3, & 1 \le x < 2, \\ 3 + \frac{7}{4}(x-2) - \frac{3}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3, & 2 \le x < 4, \\ 4 - \frac{5}{4}(x-4) - \frac{9}{8}(x-4)^2 + \frac{3}{8}(x-4)^3, & 4 \le x \le 5. \end{cases}$$

计算 $f(3) \approx S(3) = \frac{17}{4}$, $f(4.5) \approx S(4.5) = \frac{201}{64}$.

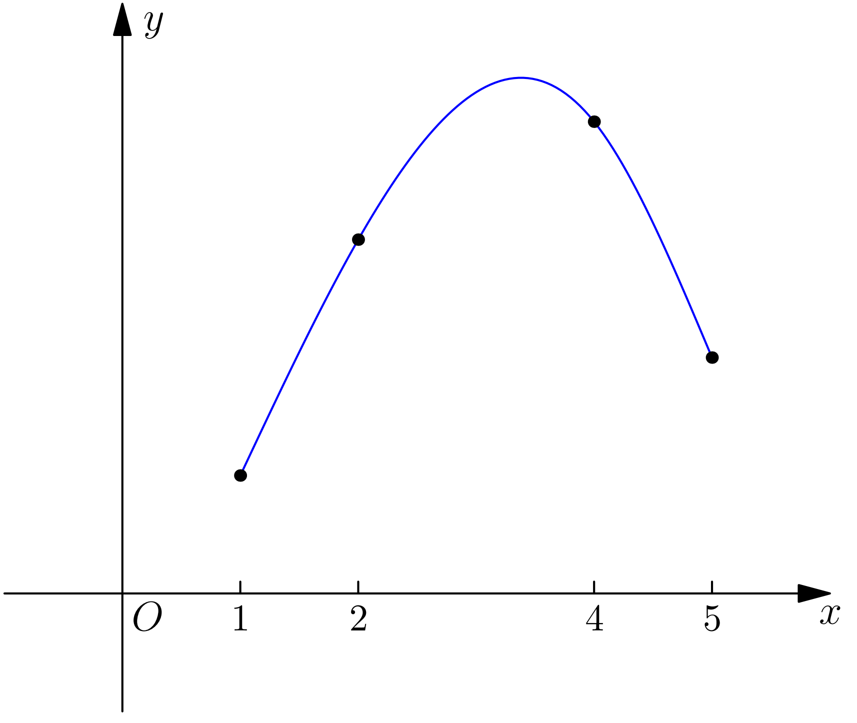

图 5.1　三次样条函数 $S(x)$

6.3　3 次样条函数的误差界

设 $g(x) \in C[a,b]$, 记

$$\|g\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |g(x)|.$$

定理 6.1　设 $f(x) \in C^4[a,b]$, $S(x)$ 为满足第一边界条件 (6.2) 或第二边界条件 (6.3) 的 3 次样条函数, $h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$, 则有估计

$$\|f^{(k)} - S^{(k)}\|_\infty \le c_k \|f^{(4)}\|_\infty h^{4-k}, \ k = 0, 1, 2, \tag{6.23}$$

其中 $c_0 = \dfrac{1}{16}$, $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$.

7 最佳一致逼近

7.1 线性赋范空间

定义 7.1 (线性空间) 设 X 是一个集合. 如果对 $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbf{R}$, 有 $\lambda x \in X, x + y \in X$, 则称 X 是**线性空间**.

定义 7.2 (线性无关) 设 X 是 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m \in X$, 如果存在不全为零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbf{R}$ 使得

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_m\varphi_m = 0,$$

则称 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ **线性相关**; 否则称 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ **线性无关**.

若线性空间 X 是由 m 个线性无关的元素 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 张成, 即对任意 $\varphi \in X$, 存在实数 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbf{R}$, 使得

$$\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_m\varphi_m,$$

则称 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 是 X 的一组基, 记为 $X = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m\}$, 并称 X 是 **m 维线性空间**, 系数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 称为 φ 在基 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 下的坐标, 记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$. 如果 X 的基的元素个数有无穷多个, 则称 X 是无穷维线性空间.

例: 次数不超过 n 的多项式空间 M_n, 区间 $[a,b]$ 上所有连续函数组成的函数空间 $C[a,b]$.

定义 7.3 设 X 是一个线性空间. 若对 $\forall x \in X$, 对应于实数, 记为 $\|x\|$, 且满足下面关系:

(1) $\forall x \in X$, 有 $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(2) $\forall \lambda \in R, x \in X$, 有 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(3) $\forall x, y \in X$, 有 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的一个**范数**, 对应的空间称**线性赋范空间**.

定义 7.4 设 X 是线性赋范空间, $x, y \in X$, 称 $\|x-y\|$ 为 x 和 y 之间的距离.

例 当 $X = \mathbf{R}^n$ 时, 即为向量范数, 有 $1, 2, \infty$ 范数.

例 $X = C[a,b] = \{f | f(x)在[a,b]上连续\}$. 在 $C[a,b]$ 上定义通常的加法和数乘运算后 $C[a,b]$ 是一个线性空间. 设 $f \in C[a,b]$, 记

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx, \quad \|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 \, dx}.$$

则 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2$ 是 $C[a,b]$ 上的范数.

设 $f, g \in C[a,b]$, f 和 g 在 $[a,b]$ 上的最大误差表示为:

$$\|f-g\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)-g(x)|.$$

定义 7.5 设 X 是线性赋范空间, $M \subseteq X$ 是 X 的子空间, $f \in X$. 若 $\exists \varphi \in M$ 使 $\forall \psi \in M$ 有

$$\|f-\varphi\| \le \|f-\psi\|,$$

则称 φ 是 f 在 M 中的**最佳逼近元**.

7.2 最佳一致逼近多项式

记 $M_n = \{p_n | p_n \text{为次数不超过} n \text{的多项式}\}$, 则 $M_n \subset C[a,b]$.

定义 7.6 设 $f \in C[a,b]$. 若 $\exists p_n \in M_n$, 使得对 $\forall q_n \in M_n$, 有

$$\|f - p_n\|_\infty \le \|f - q_n\|_\infty.$$

则称 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 ***n* 次最佳一致逼近多项式**.

注 7.1 由定义知

$$\|f - p_n\|_\infty = \min_{q_n \in M_n} \|f - q_n\|_\infty,$$

或

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| = \min_{q_n \in M_n} \max_{a \le x \le b} |f(x) - q_n(x)|.$$

最佳一致逼近多项式的存在唯一性

定理 7.1 设 $f \in C[a,b]$, 则 f 在 M_n 中存在唯一的 n 次最佳一致逼近多项式 $p_n(x)$.

定义 7.7 设 $g \in C[a,b]$. 如果 $\exists x_0 \in [a,b]$ 使得 $|g(x_0)| = \|g\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|g(x)|$, 则称 x_0 为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**偏差点**.

当 $g(x_0) = \|g\|_\infty$, x_0 称 $g(x)$ 的**正偏差点**.

当 $g(x_0) = -\|g\|_\infty$, x_0 称 $g(x)$ 的**负偏差点**.

引理 7.1 设 $f \in C[a,b]$, $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式, 则 $f - p_n$ 必存在正负偏差点.

最佳一致逼近多项式的特征定理.

定理 7.2 设 $f \in C[a,b]$, $p_n(x)$ 是 n 次多项式, 则 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式 $\Longleftrightarrow$ $f(x) - p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $(n+2)$ 个交错偏差点, 即存在 $(n+2)$ 个点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} \le b$, 使得

$$f(x_i) - p_n(x_i) = (-1)^i \sigma \|f - p_n\|_\infty, \quad i = 0, 1, \cdots, n+1,$$

其中 $\sigma = 1$ 或 $\sigma = -1$.

推论 7.1 设 $f \in C[a,b]$, $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式. 如果 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在且保号, 则 $f(x) - p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 内恰有 $(n+2)$ 个交错偏差点, 且两端点 a, b 也是偏差点.

由推论 7.1, 如果 $f(x) \in C[a,b]$ 且 $f^{(n+1)}$ 在 (a,b) 上保号, 设 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式为

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n,$$

则 $f(x) - p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+2$ 个交错偏差点 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 我们有

$$\begin{aligned} f(a) - p_n(a) &= -[f(x_1) - p_n(x_1)] \\ &= f(x_2) - p_n(x_2) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^n [f(x_n) - p_n(x_n)] \\ &= (-1)^{n+1} [f(b) -_n (b)] \\ f'(x_i) - p_n'(x_n) &= 0, \quad i = 1, 2 \cdots, n \end{aligned}$$

上述是具有 $2n+1$ 个参数 $c_0, c_1, \cdots, c_n, x_1, x_2, \cdots, c_n$ 的 $2n+1$ 阶非线性方程组, 一般可用迭代法求解, 在特殊情形可精确求解.

例 7.1 设 $f(x) \in C^2[a,b]$, 且 $f''(x)$ 在 (a,b) 内存在且保号, 求 $f(x)$ 的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)$.

解 设 $p_1(x) = c_0 + c_1 x$, 则 $f(x) - p_1(x)$ 在 $[a,b]$ 内有 3 个交错偏差点 a, x_1, b, 于是可得

$$\begin{cases} f(a) - p_1(a) = -[f(x_1) - p_1(x_1)] = f(b) - p_1(b), \\ f'(x_1) - p_1'(x_1) = 0, \end{cases}$$

计算可得

$$c_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad x_1 = (f')^{-1}(c_1), \quad c_0 = \frac{f(a) + f(x_1)}{2} - c_1 \frac{a + x_1}{2},$$

$p_1(x)$ 的图像见图7.1.

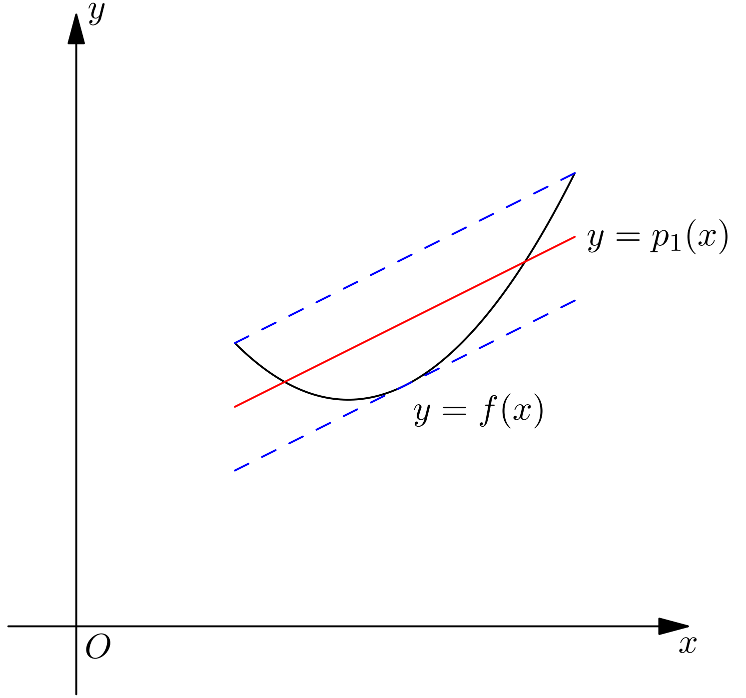

图 7.1 一次最佳一致逼近多项式

例 7.2 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x) = c_0 + c_1 x$.

解 $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ 在 $(0,1)$ 内保号, 所以 $f(x) - p_1(x)$ 在 $[0,1]$ 内有 3 个偏差点 $0, x_1, 1$. 我们有

$$\begin{aligned} & f(0) - p_1(0) = -[f(x_1) - p_1(x_1)] = f(1) - p_1(1), \\ & f'(x_1) - p_1'(x_1) = 0. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} -c_0 &= -[\ln 1 + x_1 - c_0 - c_1 x_1] \\ &= \ln 2 - c_0 - c_1, \\ \frac{1}{1+x_1} &= c_1. \end{aligned}$$

得 $c_0 = \dfrac{1}{2}[\ln 2 - \ln\ln 2 - 1]$, $c_1 = \ln 2$.

例 7.3 求 a, b, 使得

$$\max_{1\le x\le 2}\left|\frac{1}{x}-ax-b\right|$$

取最小值, 并求出最小值.

解 该问题即求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)=b+ax$. $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ 在 $[1,2]$ 上保号, 故 $f(x)-p_1(x)$ 在 $[1,2]$ 上有 3 个偏差点 $1, x_1, 2$ 满足

$$\begin{aligned}&f(1)-p_1(1)=-[f(x_1)-p_1(x_1)]=f(2)-p_1(2),\\&f'(x_1)-p_1'(x_1)=0.\end{aligned}$$

可求得 $c_0=\frac{3}{4}(1+\sqrt{2}), c_1=-\frac{1}{2}$.

推论 7.2 设 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式 $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 的某个 n 次插值多项式.

8　最佳平方逼近

8.1　内积空间

定义 8.1　设 X 是一个线性空间, 若对 $\forall x, y \in X$ 有实数与之对应, 记该实数为 (x, y), 且满足:

(1) $\forall x, y \in X$, 有 $(x, y) = (y, x)$;

(2) $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbf{R}$, 有 $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

(3) $\forall x, y, z \in X$, 有 $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

(4) $\forall x \in X$, 有 $(x, x) \geq 0$, 且 $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

则 X 称为**内积空间**, 二元运算 $(\cdot, \cdot)$ 成为**内积**.

定义 8.2　设 X 是内积空间, $x, y \in X$, 如果 $(x, y) = 0$, 则称 x 和 y 正交.

例 $X = \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 记

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

则 (x, y) 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个内积.

例 考虑线性空间 $C[a, b]$. 对 $f, g \in C[a, b]$, 记

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

则 (f, g) 为 $C[a, b]$ 中的一个内积.

引理 8.1 (Cauchy-Schwartz 不等式) 设 X 是一个内积空间, 则对 $\forall x, y \in X$ 有

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

设 X 是一个内积空间, $x \in X$, 定义

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

则可以验证 $\|x\|$ 是 X 上的一个范数, 称为 2 范数.

8.2 最佳平方逼近

定义 8.3 设 X 是内积空间, $(\cdot,\cdot)$ 是内积, M 是 X 的有限维子空间, $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 是 M 的一组基, $f\in X$, 若存在 $\varphi\in M$, 使得对任意 $\psi\in M$ 有

$$\|f-\varphi\|\leq\|f-\psi\|, \tag{8.1}$$

或者

$$\|f-\varphi\|=\min_{\psi\in M}\|f-\psi\|,$$

则称 φ 是 f 在 M 中的**最佳平方逼近元**.

记 $\varphi=\sum\limits_{i=0}^m c_i\varphi_i$, $\psi=\sum\limits_{i=0}^m a_i\varphi_i$, 则问题 (8.1) 即求 $c_0,c_1,\cdots,c_m$ 使得

$$(f-\sum_{i=0}^m c_i\varphi_i, f-\sum_{j=0}^m c_j\varphi_j)=\min_{\psi\in M}(f-\sum_{i=0}^m a_i\varphi_i, f-\sum_{j=0}^m a_j\varphi_j).$$

记

$$\Phi(a_0,a_1,\cdots,a_m)=(f-\sum_{i=0}^m a_i\varphi_i, f-\sum_{j=0}^m a_j\varphi_j),$$

则即求 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 使得

$$\Phi(c_0, c_1 \cdots, c_m) = \min_{a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbf{R}} \Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m).$$

$$\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m) = (f, f) - 2\sum_{i=0}^{m} a_i(f, \varphi_i) + \sum_{i,j=0}^{m} a_i a_j(\varphi_i, \varphi_j).$$

令

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = -2(f, \varphi_k) + 2\sum_{i=0}^{m} a_i(\varphi_i, \varphi_k) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, m.$$

即

$$\sum_{i=0}^{m} (\varphi_k, \varphi_i) a_i = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, \cdots, m. \tag{8.2}$$

所以 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 是方程 (8.2) 的解, 即 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 满足下面的线性

方程组:

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_m) \end{bmatrix}, \tag{8.3}$$

称方程组(8.3)为**正规方程组**, 或**法方程组**.

引理 8.2 正规方程组(8.3)的系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m) \end{bmatrix}$$

是对称正定矩阵.

定理 8.1 正规方程组(8.3)存在唯一解 $(c_0, c_1, \cdots, c_m)^T$.

定理 8.2 正规方程组(8.3)的唯一解 $(c_0, c_1, \cdots, c_m)^T$ 是函数 $\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m)$ 的最小点.

8.3 连续函数的最佳平方逼近

设 $f(x) \in C[a,b]$, $M = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)\}$ 是 $C[a,b]$ 的一个 $m+1$ 维子空间. $q(x), p(x) \in M$ 可表示为

$$q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x), \quad p(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x).$$

记

$$\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m) = \|f - q\|^2 = \int_a^b [f(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x)]^2 dx.$$

求 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 使得

$$\|f - p\|_2 \leq \|f - q\|_2, \quad \forall q \in M.$$

即

$$\Phi(c_0, c_1, \cdots, c_m) = \min_{a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbf{R}} \Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m).$$

由 8.2 节最佳平方逼近理论, $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 是下面的 (正规) 方程组的解:

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_m) \end{bmatrix}, \qquad (8.4)$$

其中

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx,\ (f,\varphi_i) = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx.$$

如果 $\varphi_i(x) = x^i(i = 0, 1\cdots, m)$, 则 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 m 次最佳平方逼近多项式.

例 8.1 设 $f(x) = e^x, x \in [0,1]$. 求 $f(x)$ 的 2 次最佳平方逼近多项式 $p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

解 $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$,

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1dx, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2},$$

$$(\varphi_0, \varphi_2) = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}, \quad (\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}, \quad (\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5},$$

$$(f, \varphi_0) = \int_0^1 e^xdx = e - 1, \quad (f, \varphi_1) = \int_0^1 xe^xdx = 1,$$

$$(f, \varphi_2) = \int_0^1 x^2e^xdx = e - 2.$$

正规方程组为:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{bmatrix}.$$

解得 $c_0 = 39e - 105, c_1 = 588 - 216e, c_2 = 210e - 570.$

例 8.2 求 c, d, 使得

$$\int_0^1 \left[x^3 - c - dx^2\right]^2 dx$$

取最小值.

解 该问题即求 $f(x) = x^3$ 在 $[0,1]$ 上的最佳平方逼近多项式 $p(x) = c + dx^2$. $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x^2$.

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1dx = 1, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}, \quad (f, \varphi_0) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4},$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}.$$

正规方程为:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

解得 $c = -\dfrac{1}{16}, d = \dfrac{15}{16}$.

8.4 超定线性方程组的最小二乘解

给定方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

其中 $m > n$, 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关. 方程 (8.5) 称为超定方程组. 该方程组一般没有精确解. 记

$$\boldsymbol{A}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2 \cdots, n, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n).$$

方程组 (8.5) 可写为

$$x_1\boldsymbol{A}_1 + x_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{b}.$$

记 $\boldsymbol{M}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n\}$, 则 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个有限维子空间. 记

$$\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\|\boldsymbol{b}-\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{A}_i\|^2,$$

求 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$, 使得

$$\Phi(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)=\min_{x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}}\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

由 8.2 节理论知, $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ 是下面方程组的解:

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1) & (\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2) & \cdots & (\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_n) \\ (\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1) & (\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2) & \cdots & (\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}_1) & (\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}_2) & \cdots & (\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}_n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}_1) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}_2) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}_n) \end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

例 8.3 求下列超定方程组的最小二乘解:

$$\begin{cases} 3x + 4y &= 5 \\ -4x + 8y &= 1 \\ 6x + 3y &= 3 \end{cases}$$

解 系数矩阵和右端向量为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 61 & -2 \\ -2 & 89 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 29 \\ 37 \end{bmatrix},$$

得方程组

$$\begin{bmatrix} 61 & -2 \\ -2 & 89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 37 \end{bmatrix},$$

解得 $x = 0.4894, y = 0.4267.$

8.5 离散数据的最佳平方逼近

定义 8.4 给定函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)$ 及 n 个不同节点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 若存在不全为零的常数 $c_0, c_1, \cdots, c_m$, 使得

$$c_0\varphi_0(x_k) + c_1\varphi_1(x_k) + \cdots + c_m\varphi_m(x_k) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

则称 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)$ 关于节点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **线性相关**, 否则称为**线性无关**.

定义 8.5 给定数据

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)$ 关于节点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关. 令

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i\varphi_i(x), \quad q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i(x),$$

$$\Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m) = \sum_{k=1}^{n} (q(x_k) - y_k)^2,$$

求 $c_0, c_1, \cdots, c_m$, 使得

$$\Phi(c_0, c_1, \cdots, c_m) = \min_{a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbf{R}} \Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m). \tag{8.6}$$

称 $p(x)$ 为给定数据的**拟合函数**.

如果 $\varphi_k(x) = x^k, 0 \leq k \leq m$, 则称 $p(x)$ 为 **m 次最小二乘拟合多项式**. 记

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \begin{bmatrix} \varphi_k(x_1) \\ \varphi_k(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_k(x_n) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \cdots, m, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

则 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 是下面的线性方程组的解:

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_m) \\ (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\varphi}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\varphi}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\varphi}_0) \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\varphi}_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\varphi}_m) \end{bmatrix}. \tag{8.7}$$

例 8.4 观察物体的直线运动, 得到如下数据:

t	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
s	0	10	30	51	80	111

试用最小二乘法求 2 次多项式 $f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2$ 拟合上述数据.

解 $\varphi_0(t)=1, \varphi_1(t)=t, \varphi_2(t)=t^2$.

$$\boldsymbol{\varphi}_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varphi}_1=\begin{bmatrix}0\\0.9\\1.9\\3.0\\3.9\\5.0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varphi}_2=\begin{bmatrix}0\\0.81\\3.61\\9\\15.21\\25\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0\\10\\30\\51\\80\\111\end{bmatrix},$$

代入方程 (8.7) 得

$$\begin{bmatrix}6 & 14.7 & 53.63\\ 14.7 & 53.63 & 218.907\\ 53.63 & 218.907 & 951.0323\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}282\\1086\\4567.2\end{bmatrix}$$

解得 $c_0=-0.6170, c_1=11.1586, c_2=2.2687$. 所以,

$$f(t)=-0.6170+11.1586t+2.2687t^2.$$

其图像可见图8.2.

对于某些非线性逼近问题, 可通过适当变换化为线性空间逼近问题. 如拟合函数 $y = a\mathrm{e}^{bx}$, $y = \frac{1}{ax+b}$ 等.

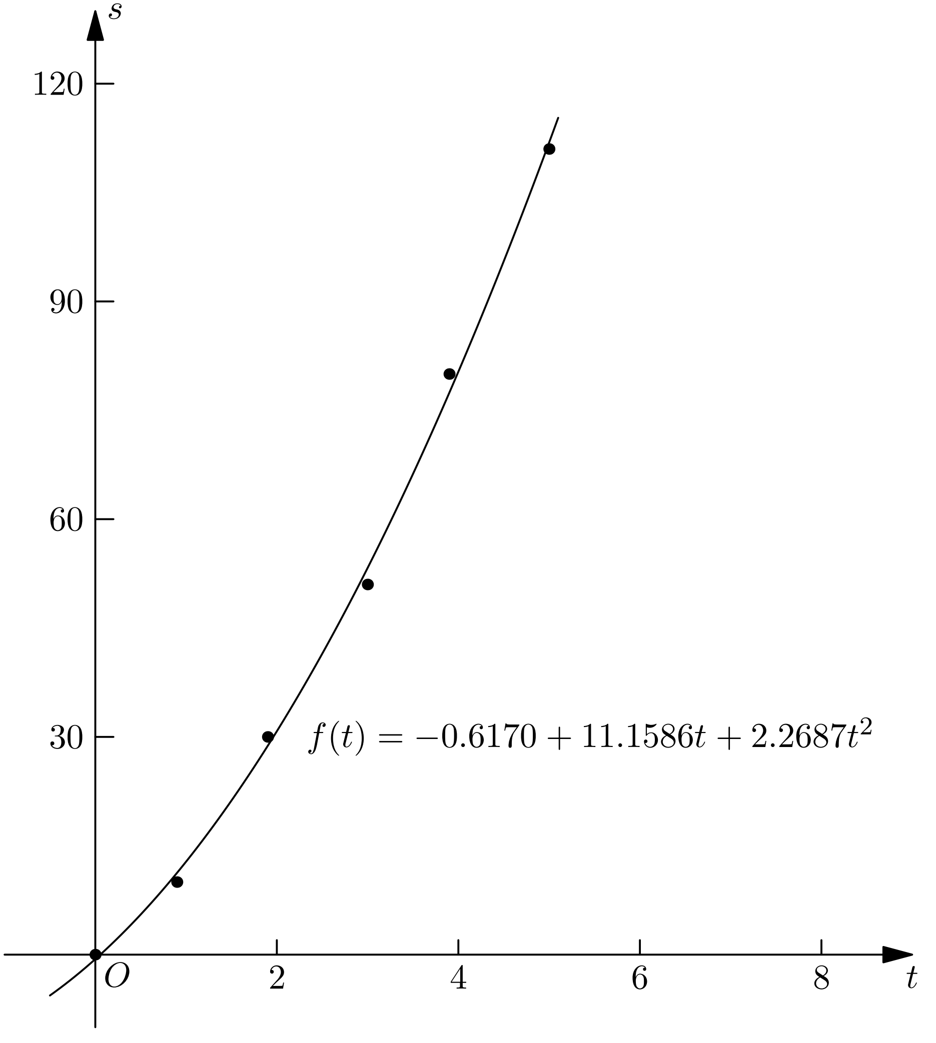

图 8.2　二次拟合多项式

9 习题

习题 4 p.192 ∼ 196

1, 3, 6, 7, 11, 13, 14, 19, 20, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 33, 35, 37(上机题).