数值分析

(Numerical Analysis)

东南大学数学系计算数学教研室

课件制作人: 吴宏伟　辅助制作: 孙志忠 曹婉容

Department of Mathematics, Southeast University, 2011

目 录

参考资料

1. 孙志忠, 袁慰平, 闻振初. 数值分析(第三版). 东南大学出版社, 2011.(课程教材)

2. Rainer Kress. Numerical Analysis. Springer-Verlag, 世界图书出版公司, 2003.

3. David Kincaid, Ward Cheney. 数值分析. 机械工业出版社, 2003.

4. 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析. 华中科技大学出版社, 1986.

5. 孙志忠, 吴宏伟, 曹婉容. 数值分析全真试题解析(2007-2012). 东南大学出版社, 2012.

上机习题

以下上机题目选做5道,按任课教师要求提交.

第一章	p.20	17
第二章	p.56	20
第三章	p.126-127	39, 40
第四章	p.195	37
第五章	p.256	23
第六章	p.307	23
第七章	p.346	10

第一章 绪 论

本章主要内容

1) **误差的概念**
绝对误差(限)、相对误差(限)、有效数字及它们之间的关系

2) **数据误差对函数值的影响**
讨论函数的误差与自变量误差之间的关系

3) **算法的数值稳定性**
讨论初始数据的误差对计算结果的影响

4) **实际计算中应注意的一些问题**

1 误差的基本概念

1.1 绝对误差

定义 1 *设x^*为准确值, x是x^*的一个近似值. 记*

$$e(x) = x^* - x,$$

称$e(x)$为近似值x的绝对误差.

在实际计算中,绝对误差一般无法求出(因为精确值x^*未知). 绝大多数情况下,只需知道误差的一个范围. 如果$\exists\ \varepsilon > 0$, 使得

$$|e(x)| = |x^* - x| \le \varepsilon,$$

则ε称为近似值x的绝对误差限, 有时也可以表示成$x^* = x \pm \varepsilon$.

1.2　相对误差

定义 2 *设x^*为准确值, x是x^*的一个近似值. 记*

$$e_r(x) = \frac{x^* - x}{x^*} = \frac{e(x)}{x^*},$$

则称$e_r(x)$为近似值x的相对误差.

由于精确值x^*难以求得, 通常以

$$\bar{e}_r(x) = \frac{x^* - x}{x}$$

作为x的相对误差.

如果$\exists\ \varepsilon_r$, 使得

$$|e_r(x)| \le \varepsilon_r \qquad 或 \qquad |\bar{e}_r(x)| \le \varepsilon_r,$$

则ε_r称为x的相对误差限.

1.3 有效数

定义 3 *如果近似值x的绝对误差限是其某一位的半个单位, 且该位直到x的第一位非零数字之间共有n位, 则称x具有n位有效数字. 如果近似值直到末位都是有效数字,则其为有效数.*

如π的近似值取$x_1 = 3.14$, 则

$$|\pi - x_1| = 0.00159\cdots < 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{-2},$$

所以x_1有3位有效数字; 如取$x_2 = 3.1416$, 则

$$|\pi - x_2| < 0.00005 = \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

所以x_2有5位有效数字; 如取$x_3 = 3.1415$, 则

$$|\pi - x_3| = 0.00009\cdots < 0.0005 = \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$

所以x_3只有4位有效数字.

2 数据误差对函数值的影响

设x_1^*, x_2^*为准确值, $y^* = f(x_1^*, x_2^*)$, x_1, x_2为对应的近似值, $y = f(x_1, x_2)$. 由二元函数Taylor展开得

$$\begin{aligned} e(y) &= y^* - y = f(x_1^*, x_2^*) - f(x_1, x_2) \\ &\approx \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}(x_1^* - x_1) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}(x_2^* - x_2), \end{aligned}$$

即

$$e(y) \approx \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} e(x_1) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} e(x_2). \tag{1}$$

从而可以得到

$$\begin{aligned} e_r(y) = \frac{e(y)}{y} &\approx \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{x_1}{f(x_1, x_2)} e_r(x_1) \\ &+ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{x_2}{f(x_1, x_2)} e_r(x_2). \end{aligned} \tag{2}$$

简化为一元函数的情况, 即设x^*为准确值, $y^* = f(x^*)$, x为对应的近似值, $y = f(x)$. 由函数Taylor展开式得

$$\begin{aligned} e(y) &= y^* - y = f(x^*) - f(x) \\ &\approx \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}(x^* - x) \end{aligned}$$

即

$$e(y) \approx \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} e(x) \tag{3}$$

从而可以得到

$$e_r(y) = \frac{e(y)}{y} \quad \approx \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \frac{x}{f(x)} e_r(x). \tag{4}$$

利用(1)和(2)可以得到

$$e(x_1+x_2)=e(x_1)+e(x_2), \tag{5}$$

$$e(x_1-x_2)=e(x_1)-e(x_2), \tag{6}$$

$$e(x_1x_2)\approx x_2e(x_1)+x_1e(x_2), \tag{7}$$

$$e\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\approx\frac{1}{x_2}e(x_1)-\frac{x_1}{x_2^2}e(x_2), \tag{8}$$

$$e_r(x_1+x_2)\approx\frac{x_1}{x_1+x_2}e_r(x_1)+\frac{x_2}{x_1+x_2}e_r(x_2), \tag{9}$$

$$e_r(x_1-x_2)\approx\frac{x_1}{x_1-x_2}e_r(x_1)-\frac{x_2}{x_1-x_2}e_r(x_2), \tag{10}$$

$$e_r(x_1x_2)\approx e_r(x_1)+e_r(x_2), \tag{11}$$

$$e_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\approx e_r(x_1)-e_r(x_2). \tag{12}$$

例 1 已知$x_1 = 1.021$, $x_2 = 2.134$是具有4位有效数字的近似值，求$x_1 - x_2$, $x_1^2 - x_2^2$及$x_1^2 x_2$的绝对误差限和相对误差限.

解

$$|e(x_1)| \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}, \quad |e(x_2)| \le \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$

$$|e(x_1 - x_2)| \le |e(x_1)| + |e(x_2)| \le 10^{-3}.$$

$$|e_r(x_1 - x_2)| = \left|\frac{e(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}\right| \le \frac{10^{-3}}{1.113} = 8.9847 \times 10^{-4}.$$

$$|e(x_1^2 - x_2^2)| \approx |2(x_1 e(x_1) - x_2 e(x_2))| \le 2(x_1|e(x_1)| + x_2|e(x_2)|)$$
$$\le 3.155 \times 10^{-3}.$$

$$|e_r(x_1^2 - x_2^2)| = \left|\frac{e(x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 - x_2^2}\right| \le 8.985 \times 10^{-4}.$$

$$|e(x_1^2 x_2)| \approx |2x_1 x_2 e(x_1) + x_1^2 e(x_2)| \le 2.7 \times 10^{-3}.$$

$$|e_r(x_1^2 x_2)| = \left|\frac{e(x_1^2 x_2)}{x_1^2 x_2}\right| \le 1.2134 \times 10^{-3}$$

例 2 设$x_1^* = \sqrt{2001}$, $x_2^* = \sqrt{1999}$, $x_1 = 44.7325$, $x_2 = 44.7102$, 已知x_1, x_2分别是x_1^*, x_2^*的具有6位有效数字的近似值. 计算$\sqrt{2001} - \sqrt{1999}$, 现有下面两种算法:

1)

$$x_1^* - x_2^* \approx x_1 - x_2 = 44.7325 - 44.7102 = 0.0223.$$

2)

$$\begin{aligned} x_1^* - x_2^* &= \frac{2}{x_1^* + x_2^*} \approx \frac{2}{x_1 + x_2} = \frac{2}{44.7325 + 44.7102} \\ &= 0.0223606845 \cdots . \end{aligned}$$

试分析上述两种算法所得结果的有效数字.

解 由条件得

$$|e(x_1)| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad |e(x_2)| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}.$$

$$\begin{aligned} |e(x_1 - x_2)| &= |e(x_1) - e(x_2)| \le |e(x_1)| + |e(x_2)| \\ &\le \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 10^{-4} < \frac{1}{2} \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

因此方法1)所得结果至少具有2位有效数.

$$
\begin{aligned}
\left|e\left(\frac{2}{x_1+x_2}\right)\right| &\approx \left|-\frac{2}{(x_1+x_2)^2}e(x_1+x_2)\right| \\
&\approx \left|-\frac{2}{(x_1+x_2)^2}[e(x_1)+e(x_2)]\right| \\
&\le \frac{2}{(x_1+x_2)^2}[|e(x_1)|+|e(x_2)|] \\
&\le \frac{2}{(44.7325+44.7102)^2}\left(\frac{1}{2}\times 10^{-4}+\frac{1}{2}\times 10^{-4}\right) \\
&= 0.25\times 10^{-7} < \frac{1}{2}\times 10^{-7}
\end{aligned}
$$

按方法2)得到的结果至少具有6位有效数字.

3 算法的数值稳定性

3.1 数值稳定性

定义 4 *对于某一种算法, 如果初始数据很有小的误差仅使最终结果产生较小的误差, 则称该算法是数值稳定的, 否则称为不稳定的.*

例 3 *建立计算积分*

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, 10.) \tag{13}$$

的递推公式, 并研究其误差传播.

解

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1} - 5x^{n-1}}{x+5} dx \\
&= \int_0^1 x^{n-1} dx - 5\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+5} dx \\
&= \frac{1}{n} - 5I_{n-1}, \qquad (n = 1, 2, \cdots, 10.) \\
I_0 &= \int_0^1 \frac{1}{x+5} dx = \ln(6/5).
\end{aligned}
$$

从而得到计算I_n的递推关系

$$
I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1}, \qquad (n = 1, 2, \cdots, 10.) \tag{14}
$$

$$
I_0 = \ln(6/5). \tag{15}
$$

计算时, 取I_0的具有6位有效数的近似值$\tilde{I}_0 = 0.182322$, 设$\tilde{I}_i$表示I_i的近似值, 则实际计算公式为

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_n &= \frac{1}{n} - 5\tilde{I}_{n-1}, \qquad (n = 1, 2, \cdots, 10.) \\
\tilde{I}_0 &= 0.182322.
\end{aligned}
$$

由上式计算可得到下列结果

$$\tilde{I}_1 = 1 - 5\tilde{I}_0 = 0.0883900, \qquad \tilde{I}_2 = \frac{1}{2} - 5\tilde{I}_1 = 0.0580500,$$
$$\tilde{I}_3 = \frac{1}{3} - 5\tilde{I}_2 = 0.0430833, \qquad \tilde{I}_4 = \frac{1}{4} - 5\tilde{I}_3 = 0.0345835,$$
$$\tilde{I}_5 = \frac{1}{5} - 5\tilde{I}_4 = 0.0270825, \qquad \tilde{I}_6 = \frac{1}{6} - 5\tilde{I}_6 = 0.0312542,$$
$$\tilde{I}_7 = \frac{1}{7} - 5\tilde{I}_6 = -0.0134139, \qquad \tilde{I}_8 = \frac{1}{8} - 5\tilde{I}_7 = 0.192070,$$
$$\tilde{I}_9 = \frac{1}{9} - 5\tilde{I}_8 = -0.849239, \qquad \tilde{I}_{10} = \frac{1}{10} - 5\tilde{I}_9 = 4.34620.$$

由于$I_n > 0$且单调减, 显然计算有误差. 事实上, 记$e_n = I_n - \tilde{I}_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, 10)$, 则

$$I_n - \tilde{I}_n = (-5)(I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1})$$

即

$$|e_n| = 5|e_{n-1}| = 5^n|e_0|.$$

用另一种方法计算.

$$I_{n-1} = \frac{1}{5}(\frac{1}{n} - I_n), \quad (n = 10, 9, \cdots, 2, 1.) \tag{16}$$

只要计算出I_{10}的近似值$\tilde{I}_{10}$, 就可以算出其它的值. 同样有

$$|e_{n-1}| = \frac{1}{5}|e_n|, \quad (n = 10, 9, \cdots, 2, 1,)$$

或

$$|e_{10-k}| = (\frac{1}{5})^k |e_{10}|, \quad (k = 1, 2, \cdots, 10.)$$

所以递推(16)是稳定的. 由积分中值定理

$$I_n = \frac{1}{\xi_n + 5}\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{\xi_n + 5} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad (0 < \xi_n < 1).$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{6}\frac{1}{n+1} < I_n < \frac{1}{5}\frac{1}{n+1}.$$

可以取

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\tilde{I}_{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{10+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{10+1}\right) = \frac{1}{60}.$$

有误差估计

$$|I_{10} - \tilde{I}_{10}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{55} - \frac{1}{66}\right) = \frac{1}{660}.$$

3.2　病态问题

例 4 *研究方程*

$$p(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-20)=x^{20}-210x^{19}+\cdots=0 \quad (17)$$

解　该方程的精确根是$x_i=i, i=1,2,\cdots,20$. 若将系数-210作微小扰动变成$-210+2^{-23}$, 则方程为

$$p(x)+2^{-23}x^{19}=0 \quad (18)$$

可以计算其根分别是

$$\begin{array}{lll} 1.000000000, & 2.000000000, & 3.000000000, \\ 4.000000000, & 4.999999928, & 6.000006944, \\ 6.999697234, & 8.007267603, & 8.917250249, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 10.095358137 \pm 0.643500904i, & 11.793633881 \pm 1.652329728i, \\ 13.992358137 \pm 2.518830070i, & 16.730737466 \pm 2.812624894i, \\ 19.502439400 \pm 1.940330347i, & 20.846908101. \end{array}$$

其中10个根变成了复数. 这是一个病态问题. 分析(略).

4 实际计算中应注意的一些问题

1) 要尽量避免除数绝对值远远小于被除数绝对值.

$$e\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx \frac{1}{x_2}e(x_1) - \frac{x_1}{x_2^2}e(x_2).$$

2) 要尽量避免两个相近的数相减.

$$e_r(x_1 - x_2) \approx \frac{x_1}{x_1 - x_2}e_r(x_1) - \frac{x_2}{x_1 - x_2}e_r(x_2).$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}};$$

当x很大时, $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln(1 + 1/x)$;

当$|x| << 1$时, $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$.

3) 要防止大数“吃”小数

4) 简化计算步骤, 减少运算次数

例 5 *计算*$x^{31} = x \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot x^8 \cdot x^{16}$, *进行8次乘法.*

例 6 *计算多项式*

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

若直接计算, 则需要$\frac{n(n+1)}{2}$次乘法, n次加法. 将多项式改写为

$$P_n(x) = (\cdots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \cdots + a_{n-1})x + a_n,$$

令

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= b_0x + a_1 \\ b_2 &= b_1x + a_2 \\ &\vdots \\ b_n &= b_{n-1}x + a_n = P_n(x) \end{aligned}$$

即可得到递推公式

$$b_0 = a_0, \tag{19}$$

$$b_k = b_{k-1}x + a_k, \quad k = 1, 2 \cdots, n. \tag{20}$$

$P_n(x) = b_n$. 这就是秦九韶法. 它需要n次乘法和n次加法.

5 习 题

p.18-p.20: 1, 4, 5, 6, 9, 13, 14, 15, 16.

6 两个重要的结果

二元函数Taylor展开

$$
f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y
$$
$$
+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}(\Delta x)(\Delta y) + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right)
$$
$$
+\cdots
$$

积分中值定理

设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续, $g(x)$在$[a,b]$上保号（即非负或非正），则存在$\xi \in [a,b]$, 使得

$$
\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.
$$