东 南 大 学 考 试 卷（B 卷）

课程名称 数值分析 考试学期 17-18学年秋学期 得分________

适用专业 各专业工科研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

（可带计算器）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分									
批阅人									

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

密 封 线

1. (8分) 设 $x = 2.045$, $y = 0.0489$ 均为有效数. 试分析由以上数据计算函数

$$u(x, y) = x^2 e^y - xy$$

的近似值至少具有几位有效数字, 并给出其相对误差限.

2. (10分) 给定方程$e^x + 4x - \sin x = 0$. 分析此方程具有几个实根, 用适当的迭代格式求出所有实根, 精确至4位有效数, 并说明所用迭代格式的收敛性.

3. (10分) 用列主元Gauss消去法求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. (12分) 给定线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

其中a 为实参数.

(1) 写出求解该方程组的Gauss-Seidel迭代格式;

(2) 求参数a 的范围, 使求解该方程组的Gauss-Seidel迭代格式收敛.

5. (12分) 记

$$x_0=-3,\, x_1=-1,\, x_2=1,\, x_3=3.$$

设$f(x)\in C^5[x_0,\,x_5]$.

(1) 写出$f(x)$ 以$x_0,\,x_1,\,x_2,\,x_3$ 为插值节点的3次插值多项式$L_3(x)$, 并写出插值余项$f(x)-L_3(x)$ 的表达式;

(2) 计算$L_3'''(x)$, 并给出$f'''(0)-L_3'''(0)$ 的表达式.

6. (12分) 求函数$f(x) = e^{-x}$ 在$[0,1]$ 上的1 次最佳一致逼近多项式$p_1(x) = a + bx$, 并求$\|f - p_1\|_\infty$.

7. (12分) 设$f(x) \in \mathcal{C}^4[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $I(f) = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x$.

(1) 以$x_0 = -1$, $x_1 = 1$ 为求积节点建立求解$I(f)$ 的插值型求积公式$I_1(f)$, 并求出$I_1(f)$ 的代数精度;

(2) 推导$I(f) - I_1(f)$ 形如$cf^{(q)}(\xi)$的表达式，其中$\xi \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$).

(3) 利用$I_1(f)$ 求积分$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

8. (12分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a < x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases}$$

取正整数n, 并记$h = (b-a)/n,\ x_i = a + ih,\ 0 \le i \le n$. 确定参数$A$, B, C, D 使求解公式

$$y_{i+1} = Ay_i + By_{i-1} + h[Cf(x_{i+1}, y_{i+1}) + Df(x_i, y_i) + Cf(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

的局部截断误差阶达到最高，并给出局部截断误差表达式.

9. (12分) 考虑如下定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < l, 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 < x < l, \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \quad 0 \le t \le T, \end{cases}$$

其中函数$\phi(x)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 满足$\phi(0) = \alpha(0)$, $\phi(l) = \beta(0)$. 取正整数M, N, 记空间步长$h = l/M$, 时间步长$\tau = T/N$, $x_i = ih$, $0 \le i \le M$, $t_k = k\tau$, $0 \le k \le N$.

(1) 建立求解该问题的两层隐式差分格式, 并给出截断误差表达式;

(2) 写出所建立差分格式的矩阵表达形式, 并证明差分格式解的存在唯一性.