第 2 章 非线性方程的求解

本章主要内容

(1) 二分法 (自学)

(2) 简单迭代法

(3) Newton 迭代法

1 概述

本章主要讨论非线性方程

$$f(x)=0 \tag{1.1}$$

的求根问题, 这里 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 为连续函数. 若存在 x^* 使得 $f(x^*)=0$, 则称 x^* 是 (1.1) 的根或函数 $f(x)$ 的零点. 若 $f(x)$ 可分解为

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x),$$

其中 m 是正整数, 且 $g(x^*)\neq 0$. 当 $m=1$, x^* 为单根, 当 $m\geq 2$, x^* 为 m 重根.

方法：一般分下面 2 步

(1) 根的搜索, 分析方程存在多少个实根, 找出每个根所在的区间.

(a) 图解法. 即通过画函数的图形, 了解根的分布情况. 如方程

$$x^2-\sin x-1=0,$$

可作函数 $y=x^2$ 和函数 $y=1+\sin x$ 的图像来判别, 见图1.1.

(b) 解析法. 用微积分基本理论来分析.

(c) 定步长搜索法. 利用连续函数的介值定理.

(2) 根的精确化, 求满足给定精度的根的近似值.

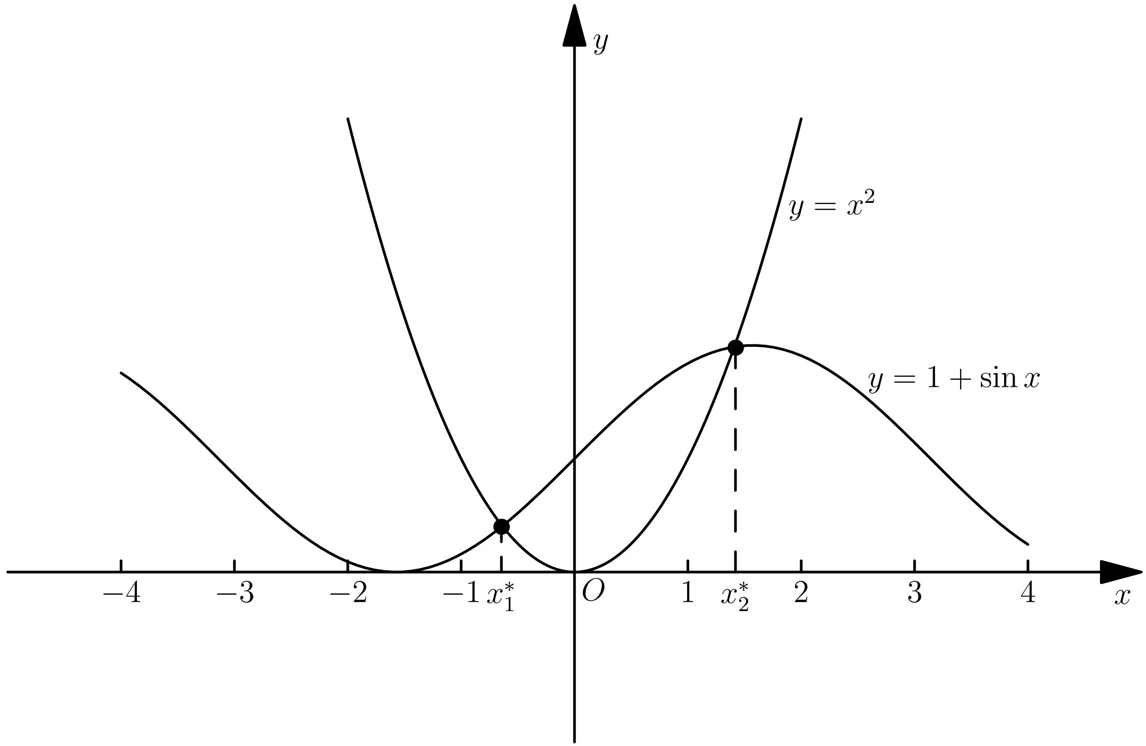

图 1.1 曲线 $y = x^2$ 和 $y = 1 + \sin x$ 的图像

1.1 二分法

二分法思想：依据连续函数的介值定理, 反复将区间分半, 在足够小的区间内, 方程有且仅有一根.

考虑方程 $f(x)=0$, 设函数 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$. 记 $a_0=a,\ b_0=b$. $x_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$ 考虑区间 $[a_0,x_0]$ 和 $[x_0,b_0]$.

(1) 若 $f(x_0)=0$, 则 x_0 就是根, 计算结束. 否则

(2) 若 $f(x_0)\neq 0$, 则 $f(a_0)f(x_0)<0$ 和 $f(x_0)f(b_0)<0$ 有且只有一个成立.

(a) 若 $f(a_0)f(x_0)<0$, 令 $a_1=a_0, b_1=x_0$; 否则

(b) 若 $f(x_0)f(b_0)<0$, 令 $a_1=x_0, b_1=b_0$.

(3) 考虑区间 $[a_1,b_1]$, 有 $f(a_1)f(b_1)<0$, 重复上述步骤.

(4) 按此方法可以得到一系列区间

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots,$$

而且有

(a) $b_k-a_k=\frac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})=\frac{1}{2^k}(b-a)$;

(b) $f(a_k)f(b_k) < 0$

当 $b_k - a_k$ 充分小时, 其中点 $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ 可作为 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内根的近似值. 且有估计式

$$|x_* - x_k| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b - a). \tag{1.2}$$

对于给定精度 ε, 若取 k 使得

$$\frac{1}{2^{k+1}}(b - a) \leq \varepsilon,$$

则有

$$|x^* - x_k| \leq \varepsilon.$$

例 1.1　用二分法求方程 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 在区间 $[1,1.5]$ 上的根.

(1) 要得到具有 3 位有效数的近似根, 需作多少次二分;

(2) 用二分法求具有 3 位有效数的近似根.

解 $f(1)=-5$, $f(1.5)=2.375$, 当 $x\in[1,1.5]$ 时, $f'(x)=3x^2+8x>0$, 方程 $f(x)=0$ 在 $[1,1.5]$ 有唯一实根.

(1) $a=1,\ b=1.5,\ \varepsilon=\frac{1}{2}\times 10^{-2}$, 由

$$\frac{b-a}{2^{k+1}}\le\varepsilon,$$

得

$$k\ge\frac{2}{\lg 2}-1=5.64,$$

故可以取 $k=6$, 即将区间二分 6 次.

(2) 计算结果见表 1.1.

表 1.1 二分法算例

k	a_k ($f(a_k)$ 的符号)	x_k ($f(x_k)$ 的符号)	b_k ($f(b_k)$ 的符号)
0	$1(-)$	$1.25(-)$	$1.5(+)$
1	$1.25(-)$	$1.375(+)$	$1.5(+)$
2	$1.25(-)$	$1.3125(-)$	$1.375(+)$
3	$1.3125(-)$	$1.34375(-)$	$1.375(+)$
4	$1.34375(-)$	$1.359375(-)$	$1.375(+)$
5	$1.359375(-)$	$1.3671875(+)$	$1.375(+)$
6	$1.359375(-)$	$1.36328125(-)$	$1.3671875(+)$

所以得具有 3 位有效数字的近似值 $x_6 = 1.36328125$.

2 简单迭代法

思想：通过递推产生一个序列, 使其极限为方程的根.

2.1 迭代格式的构造

设方程

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

在 $[a, b]$ 内有一个根 x^*. 将方程改为等价形式

$$x = \varphi(x). \tag{2.2}$$

任取 $x_0 \in [a, b]$, 得到递推公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{2.3}$$

从而得到序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$. 如果当 $k \to \infty$ 时, 序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有极限 $\tilde{x} \in [a, b]$, 且 $\varphi(x)$ 在 $\tilde{x}$ 附近连续, 则在 (2.3) 两边取极限得

$$\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}),$$

故有 $f(\tilde{x}) = 0$, 即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

(2.3) 称为**迭代格式**, 称 $\varphi(x)$ 为**迭代函数**, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为**迭代序列**. 如果任取 $x_0 \in [a,b]$ 迭代序列收敛, 则称**迭代格式 (2.3) 收敛**, 否则称**迭代格式发散**. 称 $e_k = x^* - x_k$ 为第 k 次**迭代误差**. 用迭代格式 (2.3) 求方程近似根的方法称为**简单迭代法**, 也称**迭代法**.

注 2.1 当 $x^* = \varphi(x^*)$, x^* 称为不动点; 上述方法称为不动点迭代法.

例 2.1 求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的根.

方法 1 将原方程写成等价的方程: $x = x^3 - 1$. 取迭代函数 $\varphi_1(x) = x^3 - 1$, 构造迭代格式

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值 $x_0 = 1.5$, 计算结果:

k	0	1	2	3	$\cdots$
x_k	1.5	2.375	12.396	1903.779	$\cdots$

方法 2 将原方程写成等价的方程：$x = \sqrt[3]{x+1}$. 取迭代函数 $\varphi_2(x) = \sqrt[3]{x+1}$, 构造迭代格式

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值 $x_0 = 1.5$, 计算结果：

k	0	1	2	3	$\cdots$	7	8
x_k	1.5	1.35721	1.33086	1.32588	$\cdots$	1.32472	1.32472

方法 1 和方法 2 的情形可用下图来表示:

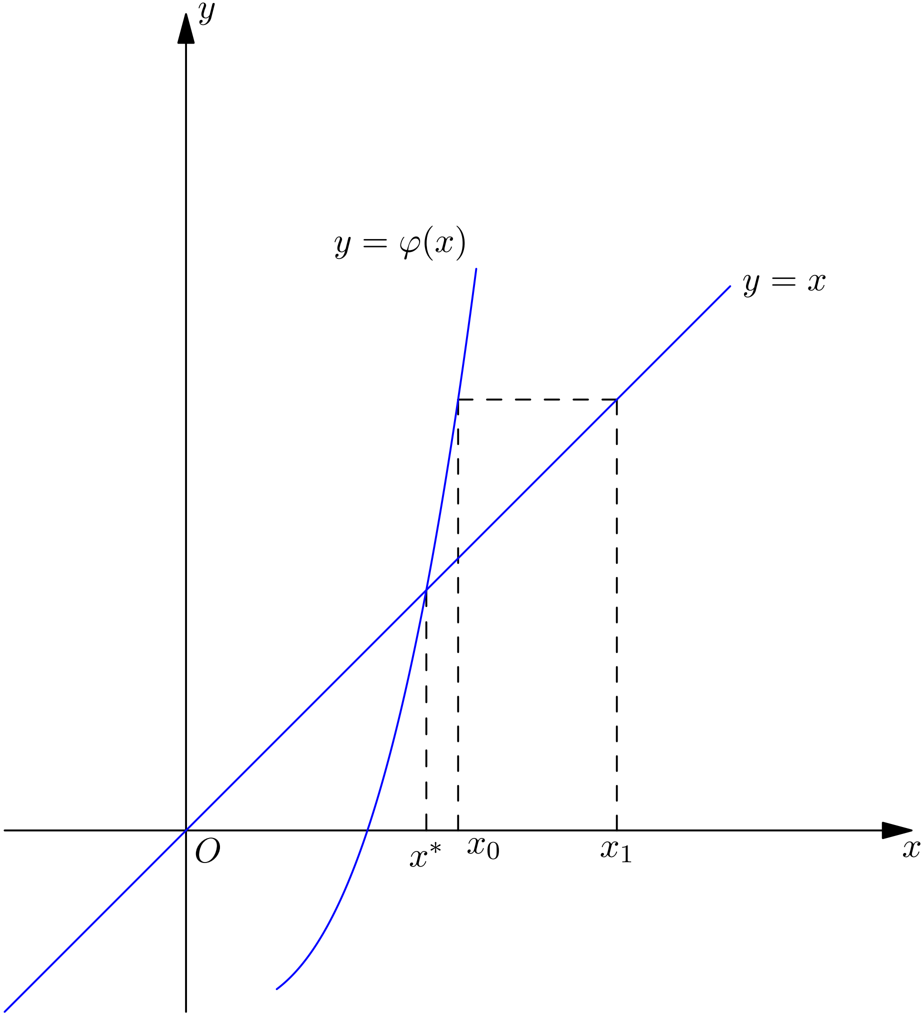

图 2.1(a) 简单迭代法几何解释

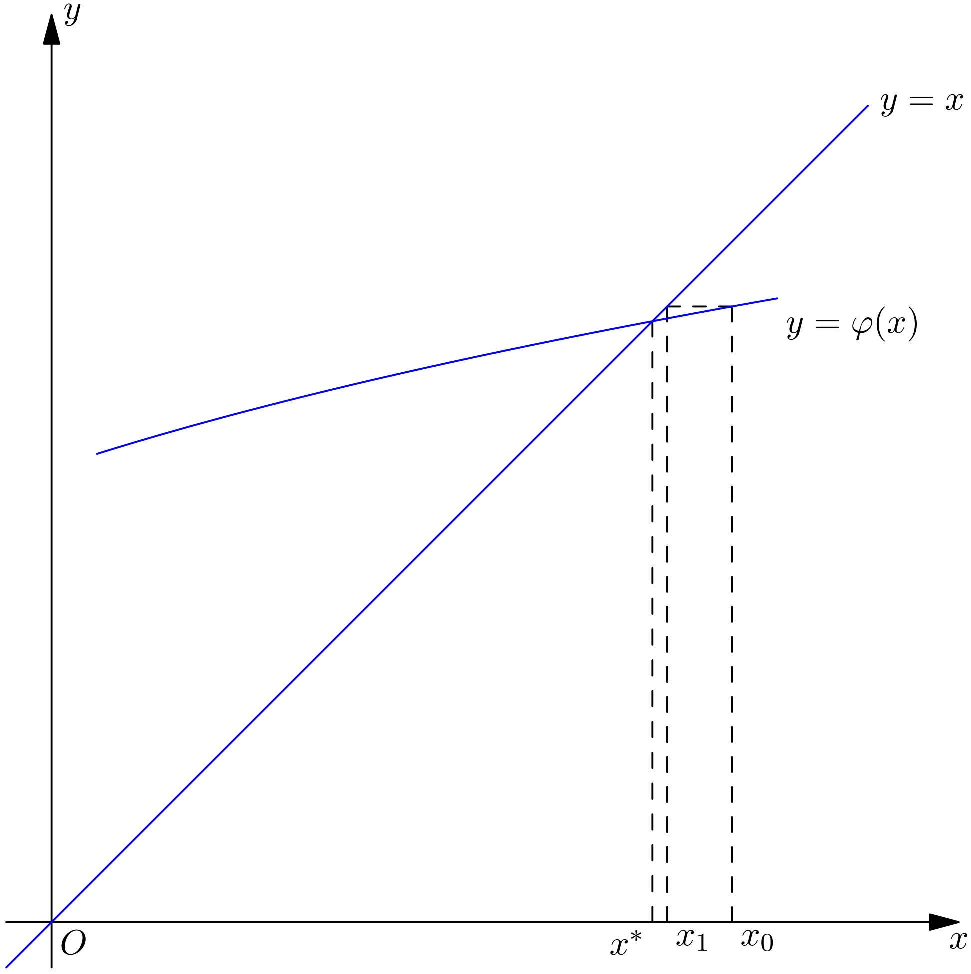

图 2.1(b) 简单迭代法几何解释

2.2 迭代法的收敛性

定理 2.1 设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在一阶连续导数, 且满足:

(1) 当 $x \in [a,b]$ 时, $\varphi(x) \in [a,b]$;

(2) 存在正常数 $L<1$, 使得 $\max\limits_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| \le L < 1$.

则

(1) $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一实根, 记为 x^*;

(2) 对任意初值 $x_0 \in [a,b]$, 迭代格式 (2.3) 收敛, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$;

(3)

$$|x^*-x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|, \quad k=1,2,3\cdots; \tag{2.4}$$

(4)

$$|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|, \quad k=1,2,3\cdots; \tag{2.5}$$

(5)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = \varphi'(x^*). \tag{2.6}$$

定理 2.2 设方程 (2.2) 在区间 $[a,b]$ 上有根, 且 $\min\limits_{a\le x\le b}|\varphi'(x)|>1$, 则对任意 $x_0\in[a,b]$, 且 $x_0\neq x^*$, 迭代格式 (2.3) 发散.

例 2.2 求方程 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,1.5]$ 内的根 x^*.

(1) 试分析如下 3 个迭代格式的收敛性.

$$x_{k+1}=10+x_k-4x_k^2-x_k^3, \tag{2.7}$$

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_k^3}, \tag{2.8}$$

$$x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{x_k+4}}. \tag{2.9}$$

(2) 选择一种收敛较快的迭代格式, 求出 x^*, 精确至 4 位有效数.

例 2.3 给定方程 $x^2+\ln x-2=0$.

(1) 分析该方程存在几个实根.

(2) 构造一个迭代格式, 说明收敛性, 并用迭代求方程的根, 精确至 4 位有效数.

定义 2.1 对于方程 $x=\varphi(x)$, 若在 x^* 的某个邻域 $S=\{x||x-x^*|\leq\delta\}$ 内, 对任意初值 $x_0\in S$ 迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 都收敛, 则称迭代法在 x^* 的附近**局部收敛**.

定理 2.3 设方程 $x=\varphi(x)$ 有根 x^*, 且在 x^* 的某个邻域 $S=\{x||x-x^*|\leq\delta\}$ 内 $\varphi(x)$ 一阶连续可导, 则

(1) 当 $|\varphi'(x^*)|<1$ 时, 迭代格式局部收敛;

(2) 当 $|\varphi'(x^*)|>1$ 时, 迭代格式发散.

2.3　迭代法的收敛速度

定义 2.2　设序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 x^*, 并记 $e_k = x^* - x_k$. 如果存在常数 $p \geq 1$ 及非零常数 C, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

则称序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 **p 阶收敛的**.

p 的大小反映了序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的收敛速度, p 越大, 收敛越快. 当 $p=1$ 且 $0<|C|<1$ 时, 称为**线性收敛**; 当 $p>1$ 称**超线性收敛**, 特别当 $p=2$ 时, 称**平方收敛**.

如果迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, \cdots$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 p 阶收敛的, 则称该迭代是 p 阶收敛的.

例 2.4 设两个迭代序列分别是线性收敛和平方收敛:

$$(1)\ \frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{1}{2}, k = 0, 1, 2 \cdots ;$$

$$(2)\ \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\tilde{e}_k^2} = \frac{1}{2}, k = 0, 1, 2 \cdots ,$$

其中$e_0 = \tilde{e}_0 = 1$. 若取精度 $\varepsilon = 10^{-16}$, 试分别估计这两个迭代所需迭代次数.

定理 2.4 若 $\varphi(x)$ 在 x^* 附近的某个邻域内有 $p(\geq 1)$ 阶连续导数, 且

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, p-1, \tag{2.10}$$

$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0, \tag{2.11}$$

则迭代格式在 x^* 附近是 p 阶局部收敛的, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}. \tag{2.12}$$

如果 $p = 1$, 要求 $|\varphi'(x^*)| < 1$.

3 Newton 迭代法

3.1 迭代格式

给定方程

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

若已知 x_k, 将 $f(x)$ 在 x_kTaylor 展开

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

所以, 方程

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

可以作为 (3.1) 的近似方程, 其根为 $x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 可作为方程 (3.1) 的近似根. 因此得下面的 **Newton 迭代格式**:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots . \tag{3.2}$$

Newton 迭代的几何意义

3.2 Newton 迭代的局部收敛性.

Newton 迭代格式的迭代函数为：$\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. 由定理 2.4 求 $\varphi'(x^*)$. 设 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的 m 重根, 则 $f(x) = (x - x^*)^m g(x), g(x^*) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x-x^*)^{m-1}(mg(x) + (x-x^*)g'(x)), \\
\varphi(x) &= x - \frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x) + (x-x^*)g'(x)}, \\
\varphi'(x^*) &= \lim_{x\to x^*} \frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} \\
&= \lim_{x\to x^*} \frac{1}{x-x^*}\left(x - \frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x) + (x-x^*)g'(x)} - x^*\right) \\
&= 1 - \frac{1}{m}.
\end{aligned}
$$

所以, 当 $m = 1$ 时, $\varphi'(x^*) = 0$; 当 $m \geq 2$, $|\varphi'(x^*)| < 1$.

结论：

- 当 $m = 1$, 即 x^* 为方程单根时, Newton 迭代二阶局部收敛.
- 当 $m \geq 2$, 即 x^* 为方程 $m(m \geq 2)$ 重根时, Newton 迭代一阶局部收敛.

例 3.1 给定方程 $e^x + x - 3 = 0$

(1) 判别该方程实根个数.

(2) 用 Newton 迭代法求方程的根, 要求精确到 3 位有效数.

3.3 重根的处理

设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的 m 重根,

(1) 若 m 已知, 迭代改为

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

(2) 若 m 未知, 记 $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, 此时 x^* 是方程 $u(x)=0$ 的单根, 迭代为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

3.4 Newton 迭代的大范围收敛性

定理 3.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内 2 阶连续可导, 且满足:

(1) $f(a)f(b)<0$;

(2) 当 $x\in[a,b]$ 时, $f'(x)\neq 0$;

(3) 当 $x\in(a,b)$ 时, $f''(x)$ 保号;

(4) $a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}\leq b,\quad b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}\geq a.$

则对 $\forall x_0\in[a,b]$, Newton 迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

收敛到方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内的唯一实根.

例 3.2 给定方程 $\sin x = \dfrac{x}{2}$.

(1) 讨论上述方程在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上根的存在唯一性以及用 Newton 迭代法的收敛性.

(2) 用 Newton 迭代法求根, 精确到 5 位有效数字.

3.5 Newton 法的变形

(1) 割线法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots .$$

(2) 拟 Newton 法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k - f(x_k))}, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

(3) Steffenson 法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

解:

(1) 记 $f(x)=e^x+x-3$. $f(0)=1+0-2<0, f(1)=e+1-3>0$, $f'(x)=e^x+1>0$, 所以方程 $f(x)=0$ 有唯一实根 $x^*\in(0,1)$.

(2) 迭代格式:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{e^{x_k}+x_k-3}{e^{x_k}+1},\quad k=0,1\cdots,$$
$$x_0=0.5.$$

计算得 $x_1=0.8214$, $x_2=0.7924$, $x_3=0.7921$, $|x_3-x_2|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$, $x^*\approx0.7921$.

解:

(1) 迭代函数

$$\varphi(x) = 10 + x - 4x^2 - x^3, \tag{3.3}$$
$$\varphi'(x) = 1 - 8x - 3x^2. \tag{3.4}$$

当 $x \in [1, 1.5]$ 时 $|\varphi'(x)| \geq 10 > 1$, 所以迭代发散.

(2) 迭代函数为 $\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$, 当 $x \in [1, 1.5]$ 时

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}}\right| \nearrow, \quad \Longrightarrow \tag{3.5}$$
$$|\varphi(x)| \leq |\varphi(1.5)| = 0.6556 < 1. \tag{3.6}$$

当 $x \in [1, 1.5]$ 时

$$1 < \varphi(1.5) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1) = 1.5,$$

因此迭代收敛.

(3) 同 2) 分析相同.

解:

(1) 记 $f(x)=x^2+\ln x-2$. $f(1)=1-2<0, f(2)=4+\ln 2-2>0$, $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$, 所以方程 $f(x)=0$ 有唯一实根 $x^*\in(1,2)$.

(2) 构造迭代格式:

$$\begin{aligned}&x_{k+1}=\sqrt{2-\ln x_k}, \quad k=0,1\cdots,\\&x_0=1.3.\end{aligned}$$

分析：迭代函数 $\varphi(x)=\sqrt{2-\ln x}$.

(a) $\forall x\in[1,2], |\varphi'(x)|=\dfrac{1}{2x\sqrt{2-\ln x}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{2-\ln 2}}<1$.

(b) 当 $x\in[1,2]$ 时, $1<\sqrt{2-\ln 2}\le\varphi(x)\le\sqrt{2}<2$.

由定理 2.1, 迭代收敛.

计算得 $x_1=1.318194$, $x_2=1.312911$, $x_3=1.314440$, $x_4=1.313997$, $|x_4-x_3|<\dfrac{1}{2}\times10^{-3}$, $x^*\approx1.313997$.

解: (1) 由条件易得

$$e_k = \frac{1}{2}e_{k-1} = \cdots = \frac{1}{2^k}e_0 = \frac{1}{2^k},$$

要使

$$|e_k| = \frac{1}{2^k} \le 10^{-16},$$

得$k \ge 53.15.$
(2) 由条件得

$$\tilde{e}_k = \frac{1}{2}\tilde{e}_{k-1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2} (\tilde{e}_{k-2})^{2^2}$$
$$= \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+2^{k-1}} \tilde{e}_0^{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1},$$

要使

$$|\tilde{e}_k| = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \le 10^{-16},$$

解得$k \ge 5.67.$

4 习 题

习题 2 p.54 ∼ p.56

1(2),(4), 4, 6, 9, 10, 11, 12, 20(上机题)

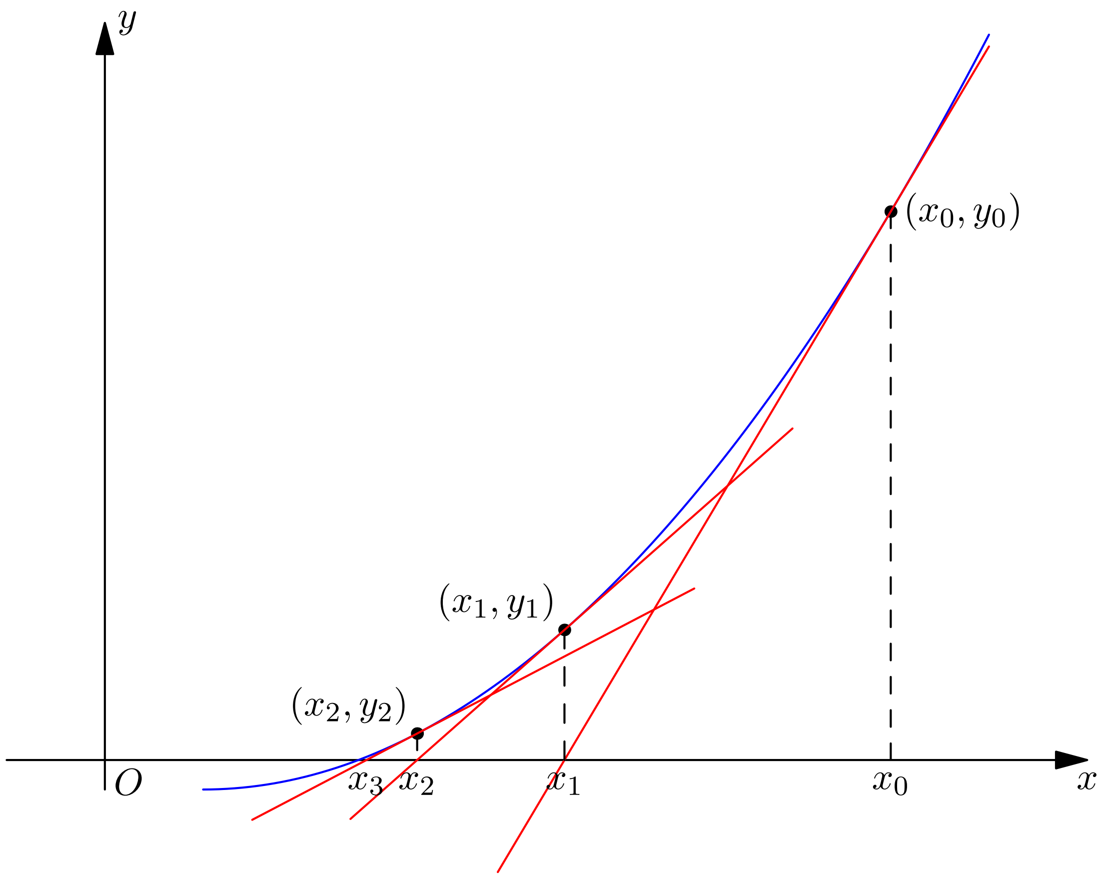

图 3.1 Newton 迭代法的几何意义