东 南 大 学 考 试 试 卷 (A 卷)

课程名称 数值分析 考试学期 14-15学年秋学期 得分______

适用专业 各专业工学研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

(开卷、半开卷请在此写明考试可带哪些资料)

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
批阅人										

1. (10分) 设$x = 1.345, y = 0.2067$均为有效数字. 试分析由此计算函数

$$f(x, y) = x^2 - x \sin y$$

的近似值至少具有几位有效数字，并给出其相对误差限.

2. (10分) 给定方程$x^5 - 20x^2 - 2 = 0$.

   (1) 证明该方程存在唯一正根;

   (2) 用Newton迭代法求出这些根, 精确至4位有效数.

3. (10分) 用列主元Gauss消去法求解下列线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

4. (10分) 给定方程组

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

其中实参数$\alpha \neq 0$. 试确定α的取值范围以保证求解这个线性方程组的Jacobi格式和Gauss-Seidel格式都收敛.

5. (12分) 设$f(x) \in C^1[a,b]$.

(1) 求一个3次多项式$H_3(x)$, 使之满足

$$H_3(a)=f(a), H_3'(a)=f'(a), H_3(b)=f(b),\ H_3'(b)=f'(b).$$

(2) 讨论满足如下条件的4次多项式$H(x)$是否存在，若存在，写出满足这组条件的多项式

$$H(a)=f(a), H'(a)=f'(a), H(b)=f(b),\ H'(b)=f'(b), H'(\frac{a+b}{2})=f'(\frac{a+b}{2}).$$

6. (12分) 设$p_1(x)$为任意的一次多项式，证明

$$\max_{0\le x\le 1}\left|\frac{1}{1+x}-p_1(x)\right|\ge \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. (12分) 设$f(x) \in C^2[a,b]$, $I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 已知

$$I(f) - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi),\ \xi \in (a,b).$$

(1) 取$h = \frac{b-a}{n}$, 其中n是正整数，$x_i = a + ih, 0 \le i \le n$. 写出计算$I(f)$的复化梯形公式$T_n(f)$;

(2) 证明

$$\lim_{h\to 0} \frac{I(f) - T_n(f)}{h^2} = \frac{1}{12}[f'(a) - f'(b)];$$

(3) 证明$I(f) - T_{2n}(f) \approx \frac{1}{3}[T_{2n}(f) - T_n(f)]$.

8. (12分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,\, y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases}$$

取正整数 n, 并记 $h = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + ih,\ 0 \le i \le n.$

试确定参数A, B使求解公式

$$y_{i+1} = y_i + h\Big[Af(x_i, y_i) + (1-A)f(x_i + Bh, y_i + \frac{4}{5}hf(x_i, y_i))\Big]$$

的局部截断误差R_{i+1}的阶数达到最高，并指出局部截断误差表达式.

9. (12分) 给定如下抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = f(x,t),\ 0 < x < 1, 0 < t \le 1, \\ u(x,0) = \phi(x),\ 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = \alpha(t),\ u(1,t) = \beta(t),\ 0 < t \le 1. \end{cases}$$

取正整数M, N, 记步长$h = 1/M$, $\tau = 1/N, x_i = ih, t_k = k\tau$, $0 \le i \le M, 0 \le k \le N$. 试建立一个求解此问题的隐式差分格式，并给出截断误差表达式.