第 7 章 偏微分方程数值解

本章主要内容

(1) 抛物型方程的有限差分方法
古典显格式, 古典隐格式, Richardson 格式, Crank-Nicolson 格式

(2) 差分格式的收敛性和稳定性

(3) 双曲型方程的有限差分格式
显格式, 隐格式

(4) 椭圆型方程的差分格式
五点差分格式, 收敛性

偏微分方程一般可分为抛物型方程、双曲型方程和椭圆型方程三种类型. 如下面是 3 个典型的定解问题:

(1) 一维抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in (0,l),\ t \in (0,T), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l], \\ u(0,t) = \alpha(t),\ \ u(l,t) = \beta(t), & t \in [0,T]. \end{cases}$$

(2) 一维双曲型方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & x \in (a,b),\ t \in (0,T), \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [a,b], \\ u(a,t) = \alpha(t),\ \ u(b,t) = \beta(t), & t \in [0,T]. \end{cases}$$

(3) 二维 Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y), & (x,y) \in \varOmega \subset \mathbf{R}^2, \\ u(x,y) = \varphi(x,y). \quad (x,y) \in \varGamma \end{cases}$$

用差分方法求微分方程近似解时常要用到以下几个公式:

$$g'(x_0) = \frac{1}{h}[g(x_0+h) - g(x_0)] - \frac{h}{2}g''(\xi_1),\ \xi_1 \in (x_0, x_0+h), \tag{0.1}$$

$$g'(x_0) = \frac{1}{h}[g(x_0) - g(x_0-h)] + \frac{h}{2}g''(\xi_2),\ \xi_2 \in (x_0-h, x_0), \tag{0.2}$$

$$\begin{aligned} g'(x_0) = \frac{1}{h}\left[g\left(x_0+\frac{h}{2}\right) - g\left(x_0-\frac{h}{2}\right)\right] - \frac{h^2}{24}g'''(\xi_3), \\ \xi_3 \in \left(x_0-\frac{h}{2}, x_0+\frac{h}{2}\right), \end{aligned} \tag{0.3}$$

$$\begin{aligned} g''(x_0) = \frac{1}{h^2}[g(x_0+h) - 2g(x_0) + g(x_0-h)] - \frac{h^2}{12}g^{(4)}(\xi_4), \\ \xi_4 \in (x_0-h, x_0+h), \end{aligned} \tag{0.4}$$

$$\begin{aligned} g(x_0) = \frac{1}{2}[g(x_0-h) + g(x_0+h)] - \frac{h^2}{2}g''(\xi_5), \\ \xi_5 \in (x_0-h, x_0+h). \end{aligned} \tag{0.5}$$

1 抛物型方程的差分方法

考虑下面的定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x \in (0,l),\ t \in (0,T), & (1.1) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], & (1.2) \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(l,t) = \beta(t), \quad t \in [0,T], & (1.3) \end{cases}$$

其中 a 是正常数, $f, \varphi, \alpha, \beta$ 是已知函数, 满足 $\varphi(0) = \alpha(0), \varphi(l) = \beta(0)$. 假设定解问题 (1.1)-(1.3) 存在唯一解 $u(x,t)$, 且具有一定的光滑性.

1.1 网格剖分

记 $D = \{(x,t)|0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$, $h = l/M$, $\tau = T/N$,$x_i = ih(0 \le i \le M)$, $t_k = k\tau(0 \le k \le N)$, 用两簇平行直线

$$\begin{aligned} x = x_i, &\quad i = 0,1,\cdots,M, \\ t = t_k, &\quad k = 0,1,\cdots,N \end{aligned}$$

将区域 D 分割成矩形网格(见图1.1). h 和 τ 称为空间步长和时间步长. 网格点 (x_i, t_k) 称为节点. 记 $\bar{D}_h = \{(x_i,t_k)|0 \le i \le M, 0 \le k \le N\}$, $D_h = \{(x_i,t_k)|1 \le i \le M-1, 1 \le k \le N\}$, $\Gamma_h = \bar{D}_h \setminus D_h$. 称 D_h 为内部节点, Γ_h 为边界节点. 在位于 $t = t_k$ 上的所有节点称为第 k 层节点.

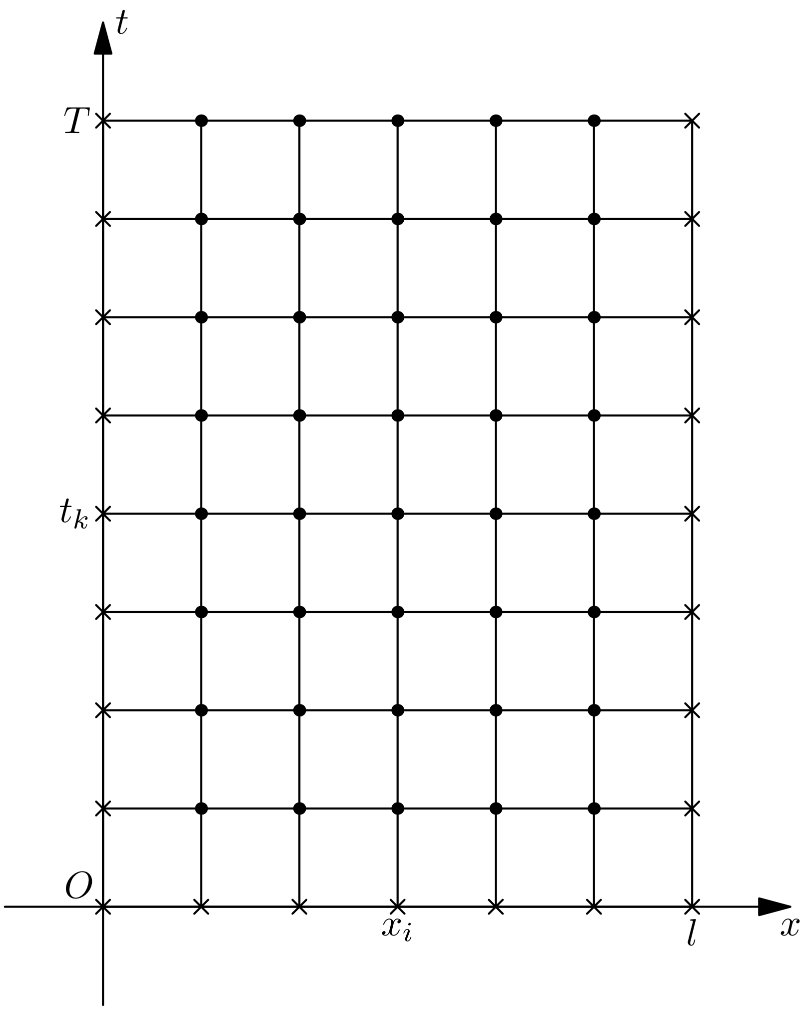

图 1.1　网格剖分

1.2 古典显格式 (向前 Euler 格式)

考虑在点 (x_i, t_k) 处的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = f(x_i, t_k). \tag{1.4}$$

由 (0.1) 和 (0.4) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) = \frac{1}{\tau}[u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)] - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_i^k),\\ \eta_i^k \in (t_k, t_{k+1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = {}& \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)]\\ & -\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}).\end{aligned}$$

将上面两式代入 (1.4) 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau}[u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)]\\ &\qquad -\frac{a}{h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)]\end{aligned}$$

$$= f(x_i, t_k) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_i^k) - \frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k).$$
$$1 \le i \le M-1, \quad 0 \le k \le N-1. \tag{1.5}$$

由初始条件 (1.2) 和边界条件 (1.3) 得

$$u(x_i, t_0) = \varphi(x_i) \quad 1 \le i \le M-1,$$
$$u(x_0, t_k) = \alpha(t_k), \quad u(x_M, t_k) = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le N.$$

记

$$R_{ik}^{(1)} = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_k) - \frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_k).$$

在 (1.5) 中忽略 $R_{ik}^{(1)}$, 并用 u_i^k 代替 $u(x_i, t_k)$ 得下面的差分格式:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \frac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i, t_k), \\ \qquad 1 \le i \le M-1, \quad 0 \le k \le N-1, & (1.6) \\ u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \le i \le M-1, & (1.7) \\ u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le N. & (1.8) \end{cases}$$

差分格式 (1.6)-(1.8) 称为**古典显格式 (向前 Euler 格式)**, $R_{ik}^{(1)}$ 称为差分格式 (1.6)-(1.8) 的截断误差. 记 $r = \frac{a\tau}{h^2}$, 称 r 是步长比. (1.6) 可写

为

$$u_i^{k+1} = (1-2r)u_i^k + r(u_{i-1}^k + u_{i+1}^k) + \tau f(x_i, t_k).$$

可将差分格式 (1.6)-(1.8) 写成向量和矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k+1} \\ u_{M-1}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \tau f(x_1, t_k) + r\alpha(t_k) \\ \tau f(x_2, t_k) \\ \vdots \\ \tau f(x_{M-2}, t_k) \\ \tau f(x_{M-1}, t_k) + r\beta(t_k) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

1.3 古典隐格式 (向后 Euler 格式)

还是考虑 (x_i, t_k) 点的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = f(x_i, t_k). \tag{1.9}$$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k)$ 用向后差商 (0.2) 近似, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k)$ 还是用二阶差商近似得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) = \frac{1}{\tau}[u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})] + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_i^k),\\ \eta_i^k \in (t_{k-1}, t_k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)]\\ -\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}).\end{aligned}$$

代入 (1.9) 得

$$\frac{1}{\tau}[u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})]$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{a}{h^2}[u(x_{i+1},t_k)-2u(x_i,t_k)+u(x_{i-1},t_k)]\\
=&\ f(x_i,t_k)-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\eta_i^k)-\frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k,t_k).\\
&1\le i\le M-1,\quad 1\le k\le N.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

由初始条件 (1.2) 和边界条件 (1.3) 得

$$
\begin{aligned}
&u(x_i,0)=\varphi(x_i)\quad 1\le i\le M-1,\\
&u(x_0,t_k)=\alpha(t_k),\quad u(x_M,t_k)=\beta(t_k),\quad 0\le k\le N.
\end{aligned}
$$

记

$$
R_{ik}^{(2)}=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\eta_k)-\frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,t_k).
$$

在 (1.10) 中忽略 $R_{ik}^{(2)}$, 并用 u_i^k 代替 $u(x_i,t_k)$ 得下面的差分格式:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\tau}(u_i^k-u_i^{k-1})-\dfrac{a}{h^2}(u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k)=f(x_i,t_k), \\
\qquad\qquad 1\le i\le M-1,\quad 1\le k\le N, & (1.11)\\
u_i^0=\varphi(x_i),\quad 1\le i\le M-1, & (1.12)\\
u_0^k=\alpha(t_k),\quad u_M^k=\beta(t_k),\quad 0\le k\le N. & (1.13)
\end{cases}
$$

差分格式 (1.11)-(1.13) 称为**古典隐格式 (向后 Euler 格式)**. 将其写成矩阵向量形式:

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^{k-1} \\ u_2^{k-1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k-1} \\ u_{M-1}^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau f(x_1, t_k) + r\alpha(t_k) \\ \tau f(x_2, t_k) \\ \vdots \\ \tau f(x_{M-2}, t_k) \\ \tau f(x_{M-1}, t_k) + r\beta(t_k) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots, N.$$

1.4 Richardson 格式

考虑节点 (x_i,t_k) 处方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_k)-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_k)=f(x_i,t_k),$$

将 $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_k)$ 用中心差商近似:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_k)=\frac{1}{2\tau}[u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_{k-1})]-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\eta_i^k),$$

将 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_k)$ 还是用 2 阶差商近似:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_k)=\frac{1}{h^2}[u(x_{i+1},t_k)-2u(x_i,t_k)+u(x_{i-1},t_k)]$$
$$-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k,t_k),\qquad \xi_i^k\in(x_{i-1},x_{i+1}).$$

然后代入方程得

$$\frac{1}{2\tau}[u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_{k-1})]$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{a}{h^2}[u(x_{i+1},t_k)-2u(x_i,t_k)+u(x_{i-1},t_k)]\\
&=f(x_i,t_k)+\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\eta_i^k)-\frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k,t_k),\\
&\qquad 1\le i\le M-1,\quad 0\le k\le N-1.
\end{aligned}
$$

记

$$
R_{ik}^{(4)}=\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\eta_i^k)-\frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k,t_k),
$$

忽略 $R_{ik}^{(4)}$, 并注意到初边值条件得下面的 Richardson 格式

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2\tau}(u_i^{k+1}-u_i^{k-1})-\dfrac{a}{h^2}(u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k)=f(x_i,t_k),\\
\qquad\qquad 1\le i\le M-1,\quad 1\le k\le N-1,\\
u_i^0=\varphi(x_i),\quad 1\le i\le M-1,\\
u_0^k=\alpha(t_k),\quad u_M^k=\beta(t_k),\quad 0\le k\le N.
\end{cases}
$$

Richardson 格式是一个 3 层格式, 需知道 $(k-1)$ 层和 k 层的值才能求出第 $(k+1)$ 层的值.

由方程和初边值条件得

$$
\begin{aligned}
u(x_i,\tau) = &\quad u(x_i,0) + \tau\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\bar{\eta}_i) \\
= &\quad \varphi(x_i) + \tau\left[a\varphi''(x_i) + f(x_i,0)\right] + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\bar{\eta}_i).
\end{aligned}
$$

因此可取第 1 层的值

$$
u_i^1 = \varphi(x_i) + \tau\left[a\varphi''(x_i) + f(x_i,0)\right], \quad 1 \le i \le M-1.
$$

完整的 Richardson 格式

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2\tau}(u_i^{k+1} - u_i^{k-1}) - \dfrac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i,t_k), \\
\qquad\qquad 1 \le i \le M-1, \quad 1 \le k \le N-1, & (1.14) \\
u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \le i \le M-1, & (1.15) \\
u_i^1 = \varphi(x_i) + \tau\left[a\varphi''(x_i) + f(x_i,0)\right], \quad 1 \le i \le M-1, & (1.16) \\
u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le N. & (1.17)
\end{cases}
$$

后面可以知道, Richardson 格式是完全不稳定的格式, 无实用价值.

1.5 Crank-Nicolson 格式

为了要提高时间方向的精度, 记 $t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + \frac{\tau}{2}$, 考虑点 $(x_i, t_{k+\frac{1}{2}})$ 处的微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) = f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}). \tag{1.18}$$

利用中心差商 (0.3)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\tau}[u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)] - \frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i^k),$$
$$\eta_i^k \in (t_k, t_{k+1}),$$

由平均公式 (0.5) 和二阶差商公式得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) - \frac{a}{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1})\right]\\ &= f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) - \frac{a\tau^2}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i^k), \quad \bar{\eta}_i^k \in (t_k, t_{k+1}),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, x_k)]$$

$$
-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}),
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1}) = \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, x_{k+1})]
$$

$$
-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{\xi}_i^k, t_{k+1}), \quad \tilde{\xi}_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}),
$$

将上面几个式子代入 (1.18) 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}[u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)] \\
&\qquad -\frac{a}{2h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k) \\
&+u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1})] \\
&= f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i^k) - \frac{ah^2}{24}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{\xi}_i^k, t_{k+1})\right] \\
&-\frac{a\tau^2}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i^k), \quad 1 \le i \le M-1,\ 0 \le k \le N-1.
\end{aligned}
$$

记

$$\begin{aligned} R_{ik}^{(3)} &= \frac{\tau^2}{24}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\eta_i^k) - 3a\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}(x_i,\bar{\eta}_i^k)\right] \\ &\quad -\frac{ah^2}{24}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k,t_k) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{\xi}_i^k,t_{k+1})\right], \end{aligned}$$

略去 $R_{ik}^{(3)}$, 用 u_i^k 代替 $u(x_i,t_k)$ 并注意到初边值条件得下面的差分格式

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau} - a\cdot\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h^2} + \dfrac{u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}}{h^2}\right] \\ \qquad = f(x_i,t_{k+\frac{1}{2}}),\quad 1\le i\le M-1,\quad 0\le k\le N-1, & (1.19) \\ u_i^0 = \varphi(x_i),\quad 1\le i\le M-1, & (1.20) \\ u_0^k = \alpha(t_k),\quad u_M^k = \beta(t_k),\quad 0\le k\le N. & (1.21) \end{cases}$$

上面的差分格式称为 Crank-Nicolson 格式. 用矩阵和向量表示为

$$
\begin{bmatrix}
1+r & -\frac{r}{2} & & & \\
-\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\
 & & & -\frac{r}{2} & 1+r
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k+1} \\ u_{M-1}^{k+1}
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
1-r & \frac{r}{2} & & & \\
\frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\
 & & & \frac{r}{2} & 1-r
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1^{k} \\ u_2^{k} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k} \\ u_{M-1}^{k}
\end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
\tau f(x_1, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{r}{2}(\alpha(t_k) + a(t_{k+1})) \\
\tau f(x_2, t_{k+\frac{1}{2}}) \\
\vdots \\
\tau f(x_{M-2}, t_{k+\frac{1}{2}}) \\
\tau f(x_{M-1}, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{r}{2}(\beta(t_k) + \beta(t_{k+1}))
\end{bmatrix}
$$

1.6 算例

例 1.1 用古典显格式、古典隐格式、Richardson 格式和 Crank-Nicolson 格式计算下面问题的数值解:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,1], \\
&u(x,0) = e^x, \quad x \in (0,1), \\
&u(0,t) = e^t, \quad u(1,t) = e^{t+1}, \quad t \in [0,1].
\end{aligned}
$$

该问题的精确解为 e^{x+t}.

表 1.1 给出了当 $h=1/10, \tau=1/200$ 时用古典显格式计算得到的部分数值结果, 数值解很好地逼近精确解.

表 1.1　古典显格式　$h=1/10, \tau=1/200$

k	(x,t)	数值解	精确解	误差
0	$(0.5, 0.00)$	1.648721	1.648721	0.000000
10	$(0.5, 0.05)$	1.733119	1.733253	0.000134
20	$(0.5, 0.10)$	1.821888	1.822119	0.000230
40	$(0.5, 0.20)$	2.013408	2.013753	0.000344
80	$(0.5, 0.40)$	2.459134	2.459603	0.000469
160	$(0.5, 0.80)$	3.668588	3.669297	0.000708
200	$(0.5, 1.00)$	4.480824	4.481689	0.000865

表 1.2 给出了当 $h=1/10, \tau=1/100$ 时用古典显格式计算得到的部分数值结果, 随着计算层数的增加, 误差越来越大, 数值结果没有实用意义.

表 1.2　古典显格式　$\boldsymbol{h=1/10, \tau=1/100}$

k	(x,t)	数值解	精确解	误差
0	$(0.5, 0.00)$	1.648721	1.648721	0.000000
4	$(0.5, 0.04)$	1.715721	1.716007	0.000286
8	$(0.5, 0.08)$	1.787434	1.786038	0.001396
12	$(0.5, 0.12)$	2.054643	1.858928	0.195715
16	$(0.5, 0.16)$	17.26231	1.934729	15.32752
17	$(0.5, 0.17)$	43.00026	1.954237	44.95449
18	$(0.5, 0.18)$	133.4547	1.973878	131.4808

表 1.3 给出了当 $h=1/10, \tau=1/100$ 时用古典隐格式计算得到的部分数值结果, 数值解很好地逼近精确解.

表 1.3　古典隐格式　$h=1/10, \tau=1/100$

k	(x,t)	数值解	精确解	误差
0	$(0.5, 0.00)$	1.648721	1.648721	0.000000
10	$(0.5, 0.10)$	1.822891	1.822119	0.000772
20	$(0.5, 0.20)$	2.014927	2.013753	0.001174
30	$(0.5, 0.30)$	2.226965	2.225541	0.001424
40	$(0.5, 0.40)$	2.461227	2.459603	0.001624
50	$(0.5, 0.50)$	2, 720096	2.718282	0.001814
60	$(0.5, 0.60)$	3.006178	3.004166	0.002012
70	$(0.5, 0.70)$	3.322344	3.320117	0.002227
80	$(0.5, 0.80)$	3.860015	3.857426	0.002589
90	$(0.5, 0.90)$	4.057922	4.055200	0.002722
100	$(0.5, 1.0)$	4.484697	4.481689	0.003008

表 1.4 给出了当 $h = 1/10, \tau = 1/100$ 时用 Richardson 格式计算得到的部分数值结果, 随着计算层数的增加, 误差越来越大, 数值结果没有实用意义.

表 1.4 Richardson 格式 $\boldsymbol{h = 1/10, \tau = 1/100}$

k	(x,t)	数值解	精确解	误差
0	$(0.5, 0.0)$	1.648721	1.648721	0.000000
1	$(0.5, 0.01)$	0.116501	1.665291	1.548790
2	$(0.5, 0.02)$	8.837941	1.682028	7.155913
3	$(0.5, 0.03)$	-22.13696	1.698932	23.83589
4	$(0.5, 0.04)$	90.79588	1.716007	89.07987
5	$(0.5, 0.05)$	-329.1597	1.733253	330.8929
6	$(0.5, 0.06)$	1267.675	1.750672	1265.924
7	$(0.5, 0.07)$	-4908.295	1.768267	4910.063
8	$(0.5, 0.08)$	19285.74	1.786083	19283.96

表 1.5 给出了当 $h=1/10, \tau=1/10$ 时用 Crank-Nicolson 格式计算得到的部分数值结果, 数值解很好地逼近精确解.

表 1.5 Crank-Nicolson 格式 $\boldsymbol{h=1/10, \tau=1/10}$

k	(x,t)	数值解	精确解	误差
0	$(0.5, 0.0)$	1.648721	1.648721	0.000000
1	$(0.5, 0.1)$	1.822394	1.822119	0.000231
2	$(0.5, 0.2)$	2.014105	2.013753	0.000352
3	$(0.5, 0.3)$	2.225953	2.225541	0.000412
4	$(0.5, 0.4)$	2.460072	2.459603	0.000469
5	$(0.5, 0.5)$	2.718802	2.718282	0.000520
6	$(0.5, 0.6)$	3.004743	3.004166	0.000577
7	$(0.5, 0.7)$	3.320755	3.320117	0.000638
8	$(0.5, 0.8)$	3.670002	3.669297	0.000705
9	$(0.5, 0.9)$	4.055979	4.055200	0.000779
10	$(0.5, 1.0)$	4.482550	4.481689	0.000861

2 差分格式的稳定性和收敛性

对抛物方程定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x \in (0,l),\ t \in (0,T), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(l,t) = \beta(t), \quad t \in [0,T] \end{cases}$$

建立了四个差分格式.

古典显格式 (向前 Euler 格式)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \dfrac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i, t_k), \\ \qquad\qquad 1 \le i \le M-1, \quad 0 \le k \le N-1, \\ u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \le i \le M-1, \\ u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le N. \end{cases}$$

古典隐格式 (向后 Euler 格式)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(u_i^k - u_i^{k-1}) - \dfrac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i, t_k), \\ \qquad\qquad 1 \le i \le M-1, \quad 1 \le k \le N, \\ u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \le i \le M-1, \\ u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le N. \end{cases}$$

Richardson 格式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\tau}(u_i^{k+1} - u_i^{k-1}) - \dfrac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i, t_k), \\ \qquad\qquad 1 \le i \le M-1, \quad 1 \le k \le N-1, \\ u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \le i \le M-1, \\ u_i^1 = \varphi(x_i) + \tau\left[a\varphi''(x_i) + f(x_i, 0)\right], \quad 1 \le i \le M-1, \\ u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le N. \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau} - a\cdot\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h^2}+\dfrac{u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}}{h^2}\right] \\
\qquad\qquad = f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}), \quad 1 \le i \le M-1, \quad 0 \le k \le N-1, \\
u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \le i \le M-1, \\
u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le N.
\end{cases}
$$

称古典显(隐)格式和 Crank-Nicolson 格式为两层格式, 称 Richardson 格式为三层格式.

对于差分格式, 我们需要讨论稳定性和收敛性.

稳定性是考虑的计算过程中的误差传播问题；收敛性考虑的是当步长趋于零时差分方程的解是否趋于微分方程问题的解。

我们需要引进范数作为工具.

记 $\Omega_h = (x_0, x_1, \cdots, x_M)$. 称 $w = (w_0, w_1, \cdots, w_M)$ 为 Ω_h 上的网格函数。记 $\mathbb{W} = \{w \mid w为\Omega_h上的网格函数\}$. 称 $\mathbb{W}$ 为网格函数空间。

对于网格函数引进范数。设 $w \in \mathbb{W}$. 定义下面的范数：

$$L_2\text{- 范数} \quad \|w\|_2 = \sqrt{h\left[\frac{1}{2}(w_0)^2 + \sum_{i=1}^{M-1}(w_i)^2 + \frac{1}{2}(w_M)^2\right]}.$$

$$L_\infty\text{- 范数} \quad \|w\|_\infty = \max_{0\le i\le M}|w_i|.$$

$$L_1\text{- 范数} \quad \|w\|_1 = h\left[\frac{1}{2}|w_0| + \sum_{i=1}^{M-1}|w_i| + \frac{1}{2}|w_M|\right].$$

设 $\{u_i^k \mid 0 \le i \le M, 0 \le k \le N\}$ 是差分格式的解. 定义

$$u^k = (u_0^k, u_1^k, \cdots, u_M^k),$$

则 u^k 为 Ω_h 上的网格函数。

定义 2.1 设 $\{u_i^k|0 \le i \le M, 0 \le k \le N\}$ 是差分格式的解, $\{v_i^k|0 \le i \le M, 0 \le k \le N\}$ 是由于初始数据有误差而得到的差分格式的近似解, 记

$$\varepsilon_i^k = u_i^k - v_i^k, \quad 0 \le i \le M, 0 \le k \le N.$$

如果存在与步长 h, τ 无关的常数 C, 使得

$$\left\|\varepsilon^k\right\| \le C\left\|\varepsilon^0\right\|, \quad 1 \le k \le N, \quad (\text{两层格式})$$

或者

$$\left\|\varepsilon^k\right\| \le C(\left\|\varepsilon^0\right\| + \left\|\varepsilon^1\right\|), \quad 1 \le k \le N, \quad (\text{三层格式})$$

则称该差分格式关于范数 $\|\cdot\|$ 是稳定的, 否则称不稳定.

我们有下面的结论:

定理 2.1 当步长比 $r \le \frac{1}{2}$ 时, 古典显格式关于 L_∞ 范数是稳定的; 当 $r > \frac{1}{2}$ 关于 L_∞ 范数不稳定.

定理 2.2 对任意步长比 r, 古典隐格式关于 L_∞ 范数是稳定的.

定理 2.3 对任意步长比 r, Crank-Nicolson 格式关于 L_2 范数稳定.

定理 2.4 对任意步长比 r, Richardson 格式关于 L_∞ 范数和 L_2 范数都是不稳定的.

定义 2.2 设 $U_i^k = u(x_i, t_k)$ 是微分方程定解问题的解, u_i^k 是对应的差分格式的解. 记

$$e_i^k = U_i^k - u_i^k, \quad 0 \le i \le M,\ 0 \le k \le N.$$

如果

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \tau\to 0}} \max_{0\le k\le N} \left\|e^k\right\| = 0,$$

则称差分格式在范数 $\|\cdot\|$ 下是收敛的. 如果

$$\max_{0\le k\le N} \left\|e^k\right\| = O(h^p + \tau^q),$$

则称差分格式关于空间步长 p 阶、关于时间步长 q 阶收敛.

定理 2.5 当步长比 $r \le \frac{1}{2}$ 时, 古典显格式在 L_∞ 范数下关于空间步长 2 阶、关于时间步长 1 阶收敛的.

定理 2.6 对任意步长比 r, 古典隐格式在 L_∞ 范数下关于空间步长 2 阶、关于时间步长 1 阶收敛的.

定理 2.7 对任意步长比 r, Crank-Nicolson 格式在 L_2 范数下关于空间步长和时间步长都是 2 阶收敛的.

3 双曲型方程的差分方法

考虑下面的初边值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\
u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < l \\
u(0,t) = \alpha(t), \quad u(l,t) = \beta(t), \quad 0 \le t \le T.
\end{cases}
$$

和上节一样, 记 $h = l/M$, $\tau = T/N$, $x_i = ih$, $t_k = k\tau$.

3.1 显格式

考虑 (x_i, t_k) 处的方程

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_k) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_k) = f(x_i,t_k) \tag{3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_k) = \quad & \frac{1}{\tau^2}[u(x_i,t_{k+1}) - 2u(x_i,t_k) + u(x_i,t_{k-1})] \\
& -\frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\eta_i^k), \quad \eta_i^k \in (t_{k-1},t_{k+1}),
\end{aligned}
$$

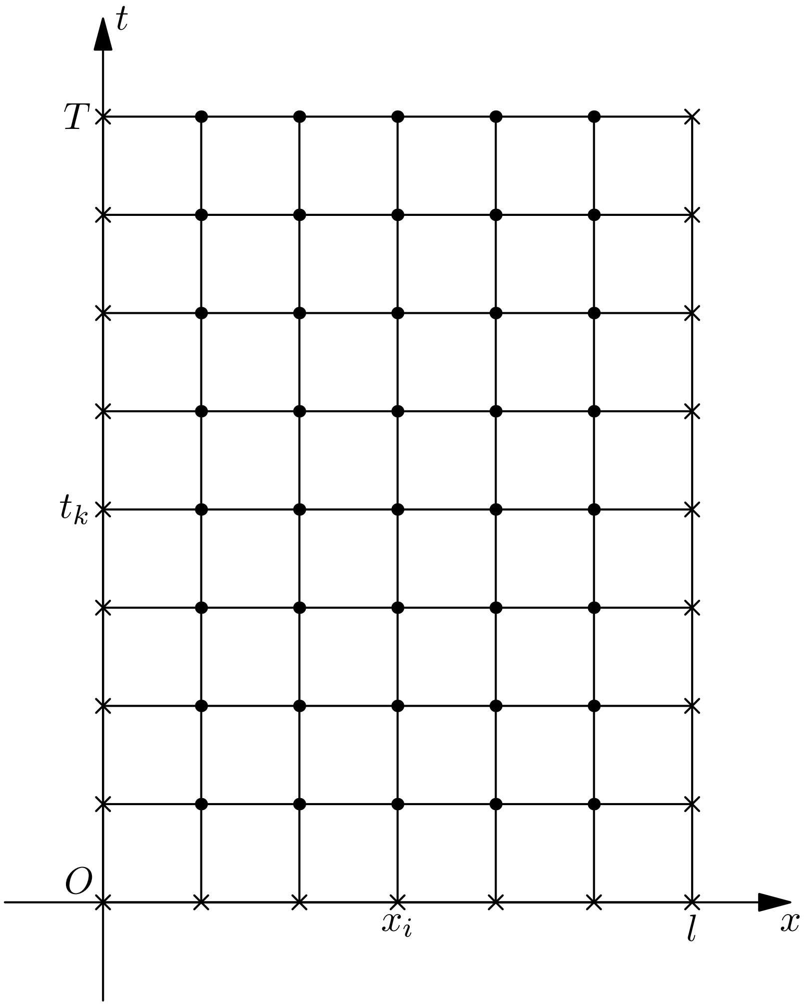

图 3.1　网格剖分

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_k) = \ & \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1},t_k)-2u(x_i,t_k)+u(x_{i-1},t_k)] \\ & -\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k,t_k), \quad \xi_i^k \in (x_{i-1},x_{i+1}),\end{aligned}$$

上面 2 式代入 (3.1) 得

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\tau^2}[u(x_i,t_{k+1})-2u(x_i,t_k)+u(x_i,t_{k-1})] \\ & \qquad -\frac{a^2}{h^2}[u(x_{i+1},t_k)-2u(x_i,t_k)+u(x_{i-1},t_k)] \\ & = f(x_i,t_k)+R_{ik}, \quad 1\le i\le M-1, \quad 1\le k\le N-1,\end{aligned}$$

其中

$$R_{ik} = \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\eta_i^k) - \frac{a^2h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k,t_k).$$

另外, 由初始条件, 有

$$\begin{aligned}u(x_i,0) = \ & \varphi(x_i), \quad 1\le i\le M-1, \\ u(x_i,t_1) = \ & u(x_i,0)+\tau\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0)+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,0)+\frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\eta_i)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2}[a^2\varphi''(x_i) + f(x_i, 0)] \\
&\quad + \frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i) \\
&\equiv \Psi(x_i) + \frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta), \quad 1 \le i \le M-1.
\end{aligned}
$$

由边界条件, 有

$$
u(0, t_k) = \alpha(t_k), \quad u(x_M, t_k) = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le N.
$$

忽略 R_{ik} 得下面的差分格式

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\tau^2}(u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}) - \dfrac{a^2}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i, t_k), \\
\qquad\qquad 1 \le i \le M-1, \quad 1 \le k \le N-1, & (3.2) \\
u_i^0 = \varphi(x_i), \quad u_i^1 = \Psi(x_i), \quad 1 \le i \le M-1, & (3.3) \\
u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \le k \le N. & (3.4)
\end{cases}
$$

记 $s = a\tau/h$, s 称为步长比, 则上面的差分格式可以写成

$$
\begin{aligned}
u_i^{k+1} = s^2(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + 2(1-s^2)u_i^k - u_i^{k-1} + \tau^2 f(x_i, t_k), \\
1 \le i \le M-1,\ 1 \le k \le N-1.
\end{aligned}
$$

例 3.1　考虑双曲方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq 1, \\ u(x,0) = \mathrm{e}^x, \ \ u_t(x,0) = \mathrm{e}^x, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = \mathrm{e}^t, \ \ u(1,t) = \mathrm{e}^{1+t}, \quad 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x,t) = \mathrm{e}^{x+t}$. 应用差分格式(3.2)-(3.4) 进行计算.

表 3.1 给出了$h=1/100,\tau=1/100$ 时部分数值结果,数值解较好逼近精确解; 表 3.2 给出了$h=1/100,\tau=1/80$ 时部分数值结果, 随着层数道的增加, 误差也增加.

表 3.1　双曲方程显格式　$h=1/100,\tau=1/100$

k	(x,t)	数值解	精确解	误差
0	$(0.5,0.0)$	1.648721	1.648721	0.000000
10	$(0.5,0.1)$	1.8222116	1.822119	0.000003
20	$(0.5,0.2)$	2.013747	2.013753	0.000006
30	$(0.5,0.3)$	2.225953	2.225541	0.000412
40	$(0.5,0.4)$	2.459592	2.459603	0.000011
50	$(0.5,0.5)$	2.718268	2.718282	0.000014
60	$(0.5,0.6)$	3.004154	3.004166	0.000012
70	$(0.5,0.7)$	3.320108	3.320117	0.000009
80	$(0.5,0.8)$	3.669291	3.669297	0.000006
90	$(0.5,0.9)$	4.055199	4.055200	0.000001
100	$(0.5,1.0)$	4.481688	4.481689	0.000001

表 3.2　双曲方程显格式　$h = 1/100, \tau = 1/80$

k	(x,t)	数值解	精确解	误差
0	$(0.5, 0.0)$	1.648721	1.648721	0.000000
1	$(0.5, 0.0125)$	1.669459	1.699460	0.000001
2	$(0.5, 0.0250)$	1.690458	1.690459	0.000001
3	$(0.5, 0.0375)$	1.711720	1.711722	0.000002
4	$(0.5, 0.050)$	1.733254	1.733253	0.000001
5	$(0.5, 0.0625)$	1.755042	1.755055	0.000013
6	$(0.5, 0.0750)$	1.777168	1.777130	0.000038
7	$(0.5, 0.0875)$	1.799323	1.799484	0.000161
8	$(0.5, 0.100)$	1.822730	1.822119	0.000611
9	$(0.5, 0.1125)$	1.842627	1.845038	0.002411
10	$(0.5, 0.1250)$	1.877649	1.868246	0.009403
11	$(0.5, 0.1375)$	1.854973	1.891746	0.036773
12	$(0.5, 0.1500)$	2.059241	1.915541	0.143700
13	$(0.5, 0.1625)$	1.377665	1.939635	0.561970
14	$(0.5, 0.1750)$	4.163094	1.964033	2.199061
15	$(0.5, 0.1875)$	-6.623787	1.988737	8.612524
16	$(0.5, 0.200)$	35.774890	2.013753	33.761137

关于显式差分格式 (3.2)-(3.4), 有如下结论:

定理 3.1 (1) 当步长比 $s \leq 1$ 时, 显式差分格式 (3.2)-(3.4) 在 L_2 范数下是稳定的; 当步长比 $s > 1$ 时, 显式差分格式 (3.2)-(3.4) 在 L_2 范数下是不稳定的;

(2) 当步长比 $s \leq 1$ 时, 显式差分格式 (3.2)-(3.4) 在 L_2 范数下关于空间步长和时间步长都是二阶收敛的。

3.2 隐格式

还是考虑 (x_i,t_k) 点的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_k)-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_k)=f(x_i,t_k).$$

利用平均公式得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_k)-\frac{a^2}{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{k+1})+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{k-1})\right] \tag{3.5}$$

$$=f(x_i,t_k)-\frac{a^2\tau^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}(x_i,\bar{\eta}_i^k), \tag{3.6}$$

将

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_k)= \quad & \frac{1}{\tau^2}[u(x_i,t_{k+1})-2u(x_i,t_k)+u(x_i,t_{k-1})]\\ & -\frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\eta_i^k), \quad \eta_i^k\in(t_{k-1},t_{k+1}),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_k)=\frac{1}{h^2}[u(x_{i+1},t_k)-2u(x_i,t_k)+u(x_{i-1},t_k)]$$

$$-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}),$$

代入 (3.6) 得

$$\frac{1}{\tau^2}[u(x_i,t_{k+1}) - 2u(x_i,t_k) + u(x_i,t_{k-1})] - \frac{a^2}{2h^2}[u(x_{i+1},t_{k+1})$$
$$-2u(x_i,t_{k+1}) + u(x_{i-1},t_{k+1}) + u(x_{i+1},t_{k-1})$$
$$-2u(x_i,t_{k-1}) + u(x_{i-1},t_{k-1})]$$
$$= f(x_i,t_k) + R_{ik}, \quad 1 \le i \le M-1, \quad 1 \le k \le N-1,$$

其中

$$\begin{aligned} R_{ik} = \quad & -\frac{a^2\tau^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i^k) + \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta_i^k) \\ & -\frac{a^2h^2}{24}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\bar{\xi}_i^{k+1}, t_{k+1}) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\bar{\xi}_i^{k-1}, t_{k-1})\right] \end{aligned}$$

由初边值条件

$$u(x_i,t_0) = \varphi(x_i), \quad u(x_i,t_1) = \Psi(x_i) + \frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\eta_i),$$
$$1 \le i \le M-1,$$

$$u(x_0,t_k)=\alpha(t_k),\quad u(x_M,t_k)=\beta(t_k),\quad 0\le k\le N.$$

忽略上面的 R_{ik} 和 $\frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\eta_i)$, 并用 u_i^k 代替 $u(x_i,t_k)$ 的下面的差分格式

$$\begin{cases}\frac{1}{\tau^2}(u_i^{k+1}-2u_i^k+u_i^{k-1})-\frac{a^2}{2h^2}\Big(u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}\\ \quad +u_{i+1}^{k-1}-2u_i^{k-1}+u_{i-1}^{k-1}\Big)=f(x_i,t_k),\\ \qquad\qquad 1\le i\le M-1,\quad 1\le k\le N-1, & (3.7)\\ u_i^0=\varphi(x_i),\quad u_i^1=\Psi(x_i),\quad 1\le i\le M-1, & (3.8)\\ u_0^k=\alpha(t_k),\quad u_M^k=\beta(t_k),\quad 0\le k\le N. & (3.9)\end{cases}$$

将 (3.7)–(3.9) 写成向量和矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1+s^2 & -\frac12 s^2 & & & \\ -\frac12 s^2 & 1+s^2 & -\frac12 s^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac12 s^2 & 1+s^2 & -\frac12 s^2 \\ & & & -\frac12 s^2 & 1+s^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^{k+1}\\ u_2^{k+1}\\ \vdots\\ u_{M-2}^{k+1}\\ u_{M-1}^{k+1}\end{bmatrix}$$

$$
= \quad 2\begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(1+s^2) & \frac{1}{2}s^2 & & & \\ \frac{1}{2}s^2 & -(1+s^2) & \frac{1}{2}s^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2}s^2 & -(1+s^2) & \frac{1}{2}s^2 \\ & & & \frac{1}{2}s^2 & -(1+s^2) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} u_1^{k-1} \\ u_2^{k-1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k-1} \\ u_{M-1}^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau^2 f(x_1, t_k) + \frac{1}{2}s^2(\alpha(t_{k-1}) + \alpha(t_{k+1})) \\ \tau^2 f(x_2, t_k) \\ \vdots \\ \tau^2 f(x_{M-2}, t_k) \\ \tau^2 f(x_{M-1}, t_k) + \frac{1}{2}s^2(\beta(t_{k-1}) + \beta(t_{k+1})) \end{bmatrix},
$$

$$
1 \leq k \leq N-1.
$$

例 3.2 用隐格式(3.7)–(3.9)计算例3.1所给定解问题的近似解.

取 $h = 1/100$, $\tau = 1/80$, 所得部分结果列表 3.3, 数值结果很好逼近精确解.

表 3.3 双曲方程隐格式 $h = 1/100, \tau = 1/80$

k	(x,t)	数值解	精确解	误差
0	$(0.5, 0.0)$	1.648721	1.648721	0.000000
10	$(0.5, 0.125)$	1.868241	1.868246	0.000005
20	$(0.5, 0.250)$	2.116993	2.117000	0.000007
30	$(0.5, 0.375)$	2.398868	2.398875	0.000007
40	$(0.5, 0.50)$	2.718278	2.718282	0.000004
50	$(0.5, 0.625)$	3.080229	3.080217	0.000012
60	$(0.5, 0.75)$	3.490369	3.490343	0.000026
70	$(0.5, 0.875)$	3.955116	3.955077	0.000040
80	$(0.5, 1.00)$	4.481741	4.481689	0.000052

关于隐式差分格式 (3.7)-(3.9), 有如下结论：

定理 3.2 （1）对任意步长比 s, 隐式差分格式 (3.7)-(3.9) 在 L_2 范数下是稳定的；（2）对任意步长比 s, 隐式差分格式 (3.7)-(3.9) 在 L_2 范数下关于空间步长和时间步长都是二阶收敛的。

4　椭圆型方程的差分方法

考虑二维 Poisson 方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, & (4.1)\\ u=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma. & (4.2)\end{cases}$$

其中 Ω 为矩形区域

$$\Omega=\{(x,y)\Big|a<x<b,c<y<d\},$$

Γ 是 Ω 的边界.

4.1　差分格式的建立

将区间 $[a,b]$ 作 m 等分, 将 $[c,d]$ 作 n 等分, 记 $h_1=(b-a)/m$, $h_2=(d-c)/n$, $x_i=a+ih_1, 0\le i\le m$, $y_j=c+jh_2, 0\le j\le n$. h_1, h_2 称为 x 方向和 y 方向的步长. 用平行线

$$x=x_i, \quad 0\le i\le m,$$
$$y=y_j, \quad 0\le j\le n$$

将 Ω 剖分为 mn 个小矩形, 交点 (x_i, y_j) 称为网格节点. 记

$$\Omega_h = \left\{(x_i, y_i)\middle| 0 \le i \le m, 0 \le j \le n\right\},$$

$$\overset{o}{\Omega}_h = \left\{(x_i, y_i)\middle| 1 \le i \le m-1, 1 \le j \le n-1\right\},$$

$$\Gamma_h = \Omega_h \setminus \overset{o}{\Omega}_h.$$

称 $\overset{o}{\Omega}_h$ 为内结点, 称 Γ_h 为边界结点.

为方便起见, 记

$$\omega \equiv \left\{(i,j) \,|\, (x_i, y_j) \in \mathring{\Omega}_h\right\}, \qquad \gamma \equiv \left\{(i,j) \,|\, (x_i, y_j) \in \Gamma_h\right\}.$$

记

$$S_h = \{v \,|\, v = \{v_{ij} \,|\, 0 \leqslant i, j \leqslant m\} \text{为}\Omega_h\text{上的网格函数}\}.$$

设 $v = \{v_{ij} \,|\, 0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n\} \in S_h$, 引进如下记号:

$$D_x v_{ij} = \frac{1}{h_1}(v_{i+1,j} - v_{ij}), \qquad D_{\bar{x}} v_{ij} = \frac{1}{h_1}(v_{i,j} - v_{i-1,j}),$$

$$D_y v_{ij} = \frac{1}{h_2}(v_{i,j+1} - v_{ij}), \qquad D_{\bar{y}} v_{ij} = \frac{1}{h_2}(v_{i,j} - v_{i,j-1}),$$

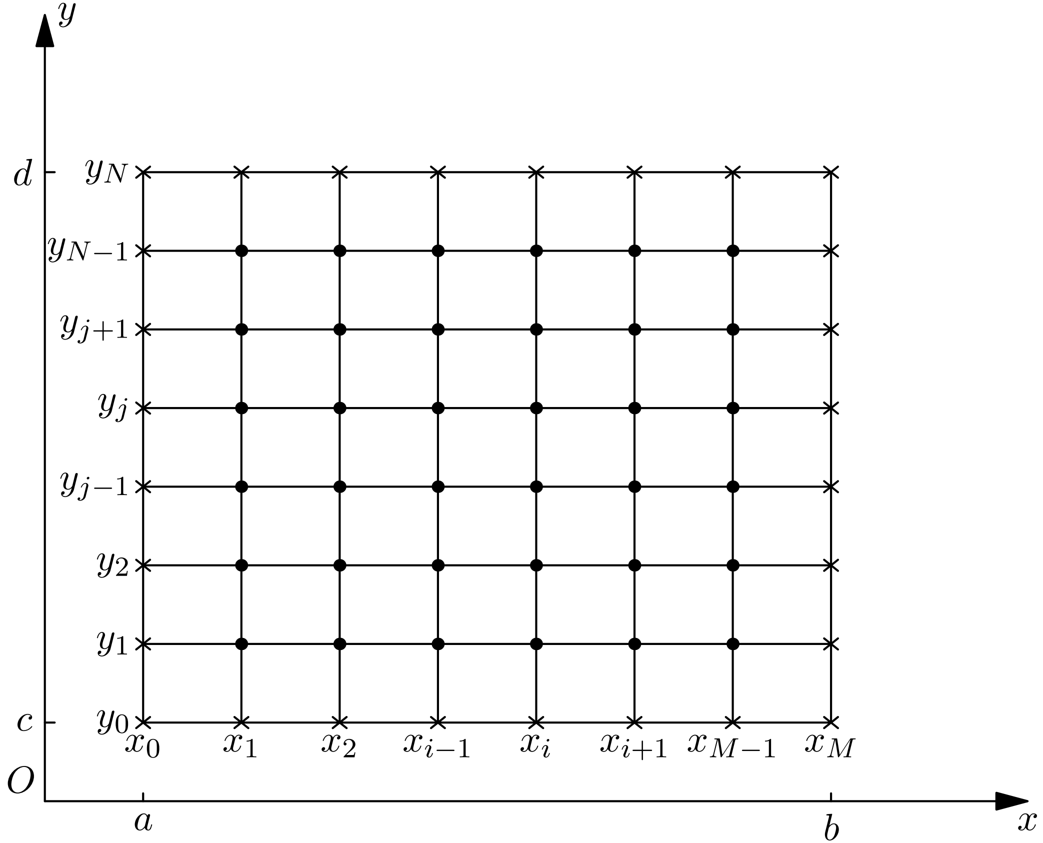

图 4.1　网格剖分

$$\delta_x^2 v_{ij} = \frac{1}{h_1}(D_x v_{ij} - D_{\bar{x}} v_{ij}), \qquad \delta_y^2 v_{ij} = \frac{1}{h_2}(D_y v_{ij} - D_{\bar{y}} v_{ij}),$$

$$\|v\|_\infty = \max_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ 0\leqslant j\leqslant n}} |v_{ij}|.$$

称 $\|v\|_\infty$ 为 v 的无穷范数.

在结点处考虑边值问题 (4.1)-(4.2), 有

$$-\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)\right] = f(x_i, y_j), \qquad (i, j) \in \omega, \tag{4.3}$$

$$u(x_i, y_j) = \varphi(x_i, y_j), \qquad (i, j) \in \gamma. \tag{4.4}$$

定义 Ω_h 上的网格函数

$$U = \left\{U_{ij} \,|\, 0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n\right\},$$

其中

$$U_{ij} = u(x_i, y_j), \qquad 0 \leqslant i \leqslant m, \quad 0 \leqslant j \leqslant n.$$

由公式 (0.4), 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h_1^2}\Big[u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)\Big] - \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_{ij}, y_j)}{\partial x^4}$$

$$= \delta_x^2 U_{ij} - \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_{ij}, y_j)}{\partial x^4}, \qquad x_{i-1} < \xi_{ij} < x_{i+1};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h_2^2}\Big[u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})\Big] - \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij})}{\partial y^4}$$

$$= \delta_y^2 U_{ij} - \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij})}{\partial y^4}, \qquad y_{j-1} < \eta_{ij} < y_{j+1}.$$

将以上两式代入 (4.3), 并注意到边界条件 (4.4), 可得

$$-(\delta_x^2 U_{ij} + \delta_y^2 U_{ij}) = f(x_i, y_j) - \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_{ij}, y_j)}{\partial x^4} - \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij})}{\partial y^4},$$
$$(i, j) \in \omega, \tag{4.5}$$
$$U_{ij} = \varphi(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \gamma. \tag{4.6}$$

在上式中略去小量项

$$R_{ij} = -\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u(\xi_{ij}, y_j)}{\partial x^4} - \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij})}{\partial y^4}, \tag{4.7}$$

并用 u_{ij} 代替 U_{ij}, 得到如下差分格式(五点差分格式)

$$\begin{cases} -(\delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij}) = f(x_i, y_j), \qquad (i,j) \in \omega, & (4.8) \\ u_{ij} = \varphi(x_i, y_j), \qquad (i,j) \in \gamma. & (4.9) \end{cases}$$

称 R_{ij} 为差分格式 (4.8) 的局部截断误差, 它反映了差分格式 (4.8) 对精确解的满足程度, 即 R_{ij} 为差分格式 (4.8) 用精确解代替近似解后等式两边之差

$$\begin{aligned} R_{ij} = &-\frac{1}{h_1^2}\Big[u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)\Big] \\ &-\frac{1}{h_2^2}\Big[u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})\Big] - f(x_i, y_j). \end{aligned}$$

记

$$M_4 = \max\left\{ \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} \left|\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}\right|, \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} \left|\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}\right| \right\}, \tag{4.10}$$

则有

$$\left|R_{ij}\right| \leqslant \frac{M_4}{12}(h_1^2 + h_2^2), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{4.11}$$

4.2 差分格式解的存在性

定理 4.1 差分格式 (4.8)-(4.9) 存在唯一解.

证明 差分格式 (4.8)-(4.9) 是线性的. 考虑其齐次方程组

$$\begin{cases} -\left(\delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij}\right) = 0, \qquad (i,j)\in\omega, & (4.12) \\ u_{ij} = 0, \qquad (i,j)\in\gamma. & (4.13) \end{cases}$$

设 $\|u\|_\infty = M > 0$. 则由 (4.13) 知, 存在 $(i_0, j_0) \in \omega$ 使得 $|u_{i_0,j_0}| = M$, 且 $|u_{i_0-1,j_0}|$, $|u_{i_0+1,j_0}|$, $|u_{i_0,j_0-1}|$, $|u_{i_0,j_0+1}|$ 中至少有一个小于 M. 考虑 (4.12) 中 $(i,j) = (i_0, j_0)$ 的等式, 有

$$(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2})u_{i_0,j_0} = \frac{1}{h_1^2}(u_{i_0-1,j_0} + u_{i_0+1,j_0}) + \frac{1}{h_2^2}(u_{i_0,j_0-1} + u_{i_0,j_0+1}).$$

将上式两边取绝对值, 可得

$$
\begin{aligned}
&(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2})M \\
&\leqslant \frac{1}{h_1^2}(|u_{i_0-1,j_0}|+|u_{i_0+1,j_0}|)+\frac{1}{h_2^2}(|u_{i_0,j_0-1}|+|u_{i_0,j_0+1}|) \\
&< (\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2})M.
\end{aligned}
$$

与假设 $M>0$ 矛盾. 故 $M=0$. 因而差分格式 (4.8)-(4.9) 是唯一可解的. 定理证毕.

4.3 差分格式的求解

差分格式 (4.8)-(4.9) 是以 $\left\{u_{ij}\,|\,1\leqslant i\leqslant m-1,\ 1\leqslant j\leqslant n-1\right\}$ 为未知量的线性方程组. (4.8) 可改写为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{h_2^2}u_{i,j-1}-\frac{1}{h_1^2}u_{i-1,j}+2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)u_{ij}-\frac{1}{h_1^2}u_{i+1,j}-\frac{1}{h_2^2}u_{i,j+1} \\
&=f(x_i,y_j),\qquad 1\leqslant i\leqslant m-1,\quad 1\leqslant j\leqslant n-1. \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

记

$$\boldsymbol{u}_j = \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{m-1,j} \end{bmatrix}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n.$$

利用 (4.9) 可将 (4.14) 写为

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_{j-1} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_{j+1} = \boldsymbol{f}_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \tag{4.15}$$

其中

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right) & -\frac{1}{h_1^2} & & & \\ -\frac{1}{h_1^2} & 2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right) & -\frac{1}{h_1^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h_1^2} & 2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right) & -\frac{1}{h_1^2} \\ & & & -\frac{1}{h_1^2} & 2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{h_2^2} & & & & \\ & -\frac{1}{h_2^2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{h_2^2} & \\ & & & & -\frac{1}{h_2^2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_j=\begin{bmatrix} f(x_1,y_j)+\frac{1}{h_1^2}\phi(x_0,y_j) \\ f(x_2,y_j) \\ \vdots \\ f(x_{m-2},y_j) \\ f(x_{m-1},y_j)+\frac{1}{h_1^2}\phi(x_m,y_j) \end{bmatrix}.$$

(4.15) 可进一步写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & & & \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ & & & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{n-2} \\ \boldsymbol{u}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{n-2} \\ \boldsymbol{f}_{n-1}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}. \qquad (4.16)$$

上述线性方程组的系数矩阵是一个三对角块矩阵, 每一行至多有 5 个非零元素, 通常称这种绝大多数元素为零的矩阵为**稀疏矩阵**. 常用迭代法求解以大型稀疏矩阵为系数矩阵的线性方程组. 可以证明 (4.16) 的系数矩阵是对称正定的.

Jacobi 迭代方法 对 $k=0,1,2,\cdots,$ 计算

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(k+1)} = \Big[& f(x_i,y_j) + \frac{1}{h_2^2}u_{i,j-1}^{(k)} + \frac{1}{h_1^2}u_{i-1,j}^{(k)} \\
& + \frac{1}{h_1^2}u_{i+1,j}^{(k)} + \frac{1}{h_2^2}u_{i,j+1}^{(k)}\Big] \Big/ \Big[2\Big(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\Big)\Big], \\
& \qquad\qquad i=1,2,\cdots,m-1; \quad j=1,2,\cdots,n-1.
\end{aligned}
$$

Gauss-Seidel 迭代方法 对 $k=0,1,2,\cdots,$ 计算

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(k+1)} = \Big[& f(x_i,y_j) + \frac{1}{h_2^2}u_{i,j-1}^{(k+1)} + \frac{1}{h_1^2}u_{i-1,j}^{(k+1)} \\
& + \frac{1}{h_1^2}u_{i+1,j}^{(k)} + \frac{1}{h_2^2}u_{i,j+1}^{(k)}\Big] \Big/ \Big[2\Big(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\Big)\Big], \\
& \qquad\qquad i=1,2,\cdots,m-1; \quad j=1,2,\cdots,n-1.
\end{aligned}
$$

例 4.1 应用差分格式 (4.8)-(4.9) 计算如下问题

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=(\pi^2-1)e^x\sin(\pi y),\ 0<x<2, 0<y<1, \\ u(0,y)=\sin(\pi y), \quad u(2,y)=e^2\sin(\pi y),\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ u(x,0)=0, \quad u(x,1)=0, \quad 0<x<2. \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x,y)=e^x\sin(\pi y)$.

将 $[0,2]$ 作 m 等分, 将 $[0,1]$ 作 n 等分, 用 Gauss-Seidel 迭代方法求解差分方程组 (4.8)-(4.9), 精确至 $\|u^{(l+1)}-u^{(l)}\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-10}$.

表 4.1 给出了 5 个结点处的精确解和取不同步长所得的数值解. 表 4.2 给出了这些结点处取不同步长时所得数值解和精确解差的绝对值 $|u(x_i,y_j)-u_{ij}|$. 表 4.3 给出了取不同步长时所得数值解的最大误差

$$E(h_1,h_2)=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m-1\\1\leqslant j\leqslant n-1}}\left|u(x_i,y_j)-u_{ij}\right|.$$

由表 4.3 可以看出, 当步长 h_1,h_2 同时缩小到原来的 $1/2$ 时, 最大误差约缩小到原来的 $1/4$.

表 4.1: 部分结点处的精确解和取不同步长时所得的数值解

$(h_1,h_2)\ \backslash\ (x,y)$	$(1/2,1/4)$	$(1,1/4)$	$(3/2,1/4)$	$(1/2,1/2)$	$(1,1/2)$
$(1/8,1/8)$	1.179943	1.946264	3.198998	1.668692	2.752434
$(1/16,1/16)$	1.169343	1.928138	3.176531	1.653700	2.726799
$(1/32,1/32)$	1.166702	1.923620	3.170908	1.649965	2.720410
$(1/64,1/64)$	1.166042	1.922492	3.169502	1.649032	2.718814
精确解	1.165822	1.922116	3.169033	1.648721	2.718282

表 4.2 取不同步长时部分结点处数值解的误差的绝对值

$(h_1,h_2)\ \backslash\ (x,y)$	$(1/2,1/4)$	$(1,1/4)$	$(3/2,1/4)$	$(1/2,1/2)$	$(1,1/2)$
$(1/8,1/8)$	$1.412e-2$	$2.415e-2$	$2.997e-2$	$1.997e-2$	$3.415e-2$
$(1/16,1/16)$	$3.521e-3$	$6.023e-3$	$7.499e-3$	$4.979e-3$	$8.517e-3$
$(1/32,1/32)$	$8.796e-4$	$1.505e-3$	$1.875e-3$	$1.244e-3$	$2.128e-3$
$(1/64,1/64)$	$2.198e-4$	$3.761e-4$	$4.688e-4$	$3.109e-4$	$5.319e-4$

表 4.3　取不同步长时数值解的最大误差

(h_1, h_2)	$E_\infty(h_1, h_2)$	$E_\infty(2h_1, 2h_2)/E_\infty(h_1, h_2)$
$(1/8, 1/8)$	$4.238e-2$	$*$
$(1/16, 1/16)$	$1.061e-2$	3.994
$(1/32, 1/32)$	$2.656e-3$	3.995
$(1/64, 1/64)$	$6.640e-4$	4.000

4.4 差分格式解的先验估计式

本节应用极值原理来给出差分方程组

$$
\begin{cases}
-\left(\delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij}\right) = g_{ij}, \qquad (i,j) \in \omega, & (4.17) \\
v_{ij} = \varphi_{ij}, \qquad (i,j) \in \gamma & (4.18)
\end{cases}
$$

解的先验估计式.

设 $v = \{v_{ij} \,|\, 0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n\}$ 为 Ω_h 上的网格函数, 记

$$(L_h v)_{ij} = -\Big(\delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij}\Big), \qquad (i,j) \in \omega.$$

引理 4.1 (极值原理) 设 $v=\{v_{ij}\,|\,0\leqslant i\leqslant m, 0\leqslant j\leqslant n\}$ 为 Ω_h 上的网格函数. 如果

$$(L_h v)_{ij}\leqslant 0, \qquad (i,j)\in\omega,$$

则有

$$\max_{(i,j)\in\omega} v_{ij}\leqslant \max_{(i,j)\in\gamma} v_{ij}.$$

证明 用反证法. 设

$$\max_{(i,j)\in\omega} v_{ij} > \max_{(i,j)\in\gamma} v_{ij},$$

且 $\max_{(i,j)\in\omega} v_{ij}=M$, 则一定存在 $(i_0,j_0)\in\omega$ 使得 $v_{i_0,j_0}=M$, 且 v_{i_0-1,j_0}, v_{i_0+1,j_0},
v_{i_0,j_0-1} 和 v_{i_0,j_0+1} 中至少有一个的值小于 M. 因此

$$(L_h v)_{i_0,j_0}=2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)v_{i_0,j_0}-\frac{1}{h_1^2}\Big(v_{i_0-1,j_0}+v_{i_0+1,j_0}\Big)$$
$$-\frac{1}{h_2^2}\Big(v_{i_0,j_0-1}+v_{i_0,j_0+1}\Big)$$

$$> 2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)M-\frac{1}{h_1^2}\Big(M+M\Big)-\frac{1}{h_2^2}\Big(M+M\Big)=0.$$

这与条件矛盾. 定理证毕.

定理 4.2 设 $\{v_{ij}\}$ 为 (4.17)-(4.18) 的解, 则有

$$\max_{(i,j)\in\omega}|v_{ij}|\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}|\varphi_{ij}|+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{d-c}{2}\right)^2\right]\max_{(i,j)\in\omega}|g_{ij}|.$$

上式中 $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{d-c}{2}\right)^2$ 为 Ω 的外接圆半径的平方.

证明 记

$$C=\max_{(i,j)\in\omega}|g_{ij}|,$$

$$P(x,y)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{d-c}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2,$$

并定义 Ω_h 上的网格函数

$$w_{ij}=\tfrac{1}{4}CP(x_i,y_j),\qquad (i,j)\in\omega\bigcup\gamma,$$

则有

$$w_{ij} \geqslant 0, \qquad (i,j) \in \omega \bigcup \gamma,$$

$$(L_h w)_{ij} = C, \qquad (i,j) \in \omega.$$

因而

$$L_h(\pm v - w)_{ij} = \pm(L_h v)_{ij} - (L_h w)_{ij} = \pm g_{ij} - C \leqslant 0, \qquad (i,j) \in \omega.$$

由极值原理, 知

$$\max_{(i,j)\in\omega} (\pm v - w)_{ij} \leqslant \max_{(i,j)\in\gamma} (\pm v - w)_{ij} \leqslant \max_{(i,j)\in\gamma} |\pm v_{ij}| + \max_{(i,j)\in\gamma} (-w_{ij}) \leqslant \max_{(i,j)\in\gamma} |v_{ij}|,$$

于是

$$\begin{aligned}
\max_{(i,j)\in\omega} (\pm v)_{ij} &= \max_{(i,j)\in\omega} (\pm v - w + w)_{ij} \\
&\leqslant \max_{(i,j)\in\omega} (\pm v - w)_{ij} + \max_{(i,j)\in\omega} w_{ij} \\
&\leqslant \max_{(i,j)\in\gamma} |v_{ij}| + \max_{(i,j)\in\omega} w_{ij} \\
&\leqslant \max_{(i,j)\in\gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{2}\right)^2\right] \max_{(i,j)\in\omega} |g_{ij}|.
\end{aligned}$$

易知

$$\max_{(i,j)\in\omega}|v_{ij}|\leqslant\max_{(i,j)\in\gamma}|\varphi_{ij}|+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{d-c}{2}\right)^2\right]\max_{(i,j)\in\omega}|g_{ij}|.$$

定理证毕.

4.5 差分格式解的收敛性和稳定性

收敛性

定理 4.3 设 $\{u(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 是定解问题 (4.1)-(4.2) 的解, $\{u_{ij}\,|\,0\leqslant i\leqslant m, 0\leqslant j\leqslant n\}$ 为差分格式 (4.8)-(4.9) 的解, 则有

$$\max_{(i,j)\in\omega}\left|u(x_i,y_j)-u_{ij}\right|\leqslant\frac{M_4}{48}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{d-c}{2}\right)^2\right](h_1^2+h_2^2),$$

其中 M_4 由 (4.10) 定义.

证明 记

$$e_{ij}=u(x_i,y_j)-u_{ij},\qquad (i,j)\in\omega\bigcup\gamma,$$

将 (4.5)-(4.6) 分别与 (4.8)-(4.9) 相减, 得误差方程

$$-\left(\delta_x^2 e_{ij} + \delta_y^2 e_{ij}\right) = R_{ij}, \qquad (i,j) \in \omega, \tag{4.19}$$

$$e_{ij} = 0, \qquad (i,j) \in \gamma, \tag{4.20}$$

其中 R_{ij} 由 (4.7) 定义. 由 (4.11), 有

$$\max_{(i,j)\in\omega} |R_{ij}| \leqslant \frac{M_4}{12}(h_1^2 + h_2^2).$$

应用定理 2.2.3, 有

$$\begin{aligned}\max_{(i,j)\in\omega} |e_{ij}| &\leqslant \frac{1}{4}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{2}\right)^2\right]\max_{(i,j)\in\omega} |R_{ij}| \\ &\leqslant \frac{M_4}{48}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{2}\right)^2\right](h_1^2 + h_2^2).\end{aligned}$$

定理证毕.

稳定性

假设在应用差分格式 (4.8)-(4.9) 时, 计算右端函数 $f(x_i, y_j)$ 有误差 f_{ij}, 计算边界值有误差 φ_{ij}. 设 $\{v_{ij}\}$ 为差分格式

$$-\left(\delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij}\right) = f(x_i, y_j) + f_{ij}, \qquad (i,j) \in \omega, \tag{4.21}$$

$$v_{ij} = \varphi(x_i, y_j) + \varphi_{ij}, \qquad (i,j) \in \gamma \tag{4.22}$$

的解. 记

$$\varepsilon_{ij} = v_{ij} - u_{ij}, \quad (i,j) \in \omega \cup \gamma.$$

将 (4.21)-(4.22) 与 (4.8)-(4.9) 相减, 得

$$-\left(\delta_x^2 \varepsilon_{ij} + \delta_y^2 \varepsilon_{ij}\right) = f_{ij}, \qquad (i,j) \in \omega, \tag{4.23}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varphi_{ij}, \qquad (i,j) \in \gamma. \tag{4.24}$$

应用定理 2.2.3, 得到

$$\max_{(i,j)\in\omega} |\varepsilon_{ij}| \leqslant \max_{(i,j)\in\gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{2}\right)^2\right] \max_{(i,j)\in\omega} |f_{ij}|.$$

由上式可知, 当 $\max_{(i,j)\in\gamma} |\varphi_{ij}|$ 和 $\max_{(i,j)\in\omega} |f_{ij}|$ 为小量时, $\max_{(i,j)\in\omega} |\varepsilon_{ij}|$ 也为小量. 我们称差分格式 (4.8) 和 (4.9) 关于边界值和右端函数是稳定的.

称 (4.23)-(4.24) 为**摄动方程**, 它的形式和差分格式 (4.8)-(4.9) 是一样的. 于是我们得到如下定理.

定理 4.4 差分格式 (4.8)-(4.9) 在下述意义下关于边界值和右端函数是稳定的: 设 $\{u_{ij}\}$ 为

$$-\left(\delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij}\right) = f_{ij}, \qquad (i,j) \in \omega,$$
$$u_{ij} = \varphi_{ij}, \qquad (i,j) \in \gamma$$

的解, 则有

$$\max_{(i,j)\in\omega} |u_{ij}| \leqslant \max_{(i,j)\in\gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{2}\right)^2\right] \max_{(i,j)\in\omega} |f_{ij}|.$$

5 习题

p.345 ～ 346

1, 2, 3, 4, 7, 9, 10(上机题)