东南大学
2008 级研究生考试试卷 (A)

课程名称：<u>数值分析</u> 课程编号：<u>S00112</u> 考试历时：<u>150 分钟</u> 考核方式：<u>闭卷</u>

院 (系)__________ 学号 __________ 姓名 __________ 成绩 __________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得　分									

(**注意**：本试卷共有 8 页 9 大题，请考生检查自己的试卷.)

1. 填空题 (每题分 3 分，共 21 分)

   1) 为了提高数值计算精度，当近似值 $x \gg 1$ 时，应将 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 改写为 __________ 进行计算.

   2) 求方程 $x = f(x)$ 实根的 Newton 迭代格式是 _______________.

   3) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，则 $\mathrm{Cond(A)}_2 =$ _____________.

   4) 给定函数 $f(x) = x^5 + 1$, 则差商 $f[0,1,1,1] =$ __________.

   5) 求积分 $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 近似值的梯形公式的值是 _______________.

   6) 求解初值问题 $\begin{cases} y' + \sin(x+y) = 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 的后退 Euler 公式是

      ______________________________.

   7) 设 A 是实对称矩阵，则求其主特征值及对应的特征向量的幂法 (归一化算法) 是

      _________________________.

2. (9 分) 给定方程 $\mathrm{e}^x = 2 - x$. 证明该方程有唯一根 x^*，并用迭代法求 x^* 的近似值，精确到 3 位有校数字.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法求线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

4. (10 分) 给定线性方程组 $Ax=b$，这里 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵，$b\in\mathbf{R}^n$，$x\in\mathbf{R}^n$. 设有下面的迭代格式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega(b-Ax^{(k)}),\ k=0,1,2,\cdots, \tag{I}$$

其中 $\omega\neq 0$ 为常数.

(1) 证明：如果迭代格式 (I) 收敛，则迭代序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于方程 $Ax=b$ 的解.

(2) 设 $n=2$, $A=\begin{bmatrix}4&1\\1&4\end{bmatrix}$，问 ω 取何值时迭代格式 (I) 收敛？

5. (10 分) 求一个函数 $p(x)$ ，使之满足下面的三个条件

1) $p(x) \in C^1[0,2]$.

2) $p(0) = f(0),\ p(1) = f(1), p(2) = f(2),\ p'(0) = f'(0)$.

3) $p(x)$ 在 $[0,1]$ 和 $]1,2]$ 上均为 2 次多项式.

6. (10 分) 求函数 $f(x) = \ln x$ 在区间 $[1, 2]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x) = c_0 + c_1 x$.

7. (10 分) 考虑积分 $I(f)=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ 及对应的求积公式 $Q(f)=\frac{3}{4}f(0)+\frac{9}{4}f(2)$.

1) 证明求积公式 $Q(f)$ 是以 $x_0=0,\, x_1=1, x_2=2$ 为求积节点的插值型求积公式.

2) 求求积公式 $I(f)\approx Q(f)$ 的代数精度.

3) 设 $f(x)\in C^3[0,3]$, 求截断误差 $I(f)-Q(f)$ 形如 $\alpha f^{(\beta)}(\xi)$ 的表达式，其中 $\xi\in(0,3)$ ，α,β 为常数.

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \ a \le x \le b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n ，记 $h = \dfrac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \cdots, n, y_i \approx y(x_i), y_0 = \eta.$

1) 试应用数值积分公式导出求解上述初值问题的求解公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i), \quad 1 \le i \le n-1, \\ y(a) = \eta. \end{cases} \tag{II}$$

2) 推导出公式 (II) 的局部截断误差表达式，并指出该公式是几步几阶公式.

9. (10 分) 给定边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + u = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = \varphi(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega = \{(x,y)\,|\,0 < x < 1,\, 0 < y < 1\}, \partial\Omega$ 是 Ω 的边界. 取正整数 M，记 $h = 1/M, x_i = ih\,(0 \le i \le M), y_j = jh\,(0 \le j \le M)$. 假设上述问题存在光滑解，试构造上述边值问题的一个差分格式，要求截断误差为 $O(h^2)$，并写出截断误差表达式.