[综合例题]考虑由方块图 Fig. A 给出的线性定常系统

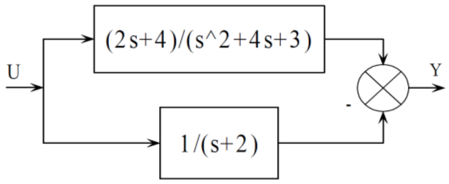


Fig. A.

(1) 求此系统时域输人输出描述，并将其化为能控规范型状态空间描述；
(2) 由(1)的结果求此系统的传递函数；
(3) 求此系统的对角线规范型状态空间描述；
(4) 设此系统具有能控规范型时的状态向量为 ***x***，而具有对角线规范型时的状态向量为 ***z***，求使得 ***z***=**T**$^{-1}$***x*** 的非奇异线性变换 **T**；
(5) 画出此系统能控规范型和对角线规范型状态空间描述的方块图。
(6) 用三种方法求闭合的状态转移矩阵。

解答：

(1) 根据方块图，可得

$$Y(s)=\left(\frac{2s+4}{s^2+4s+3}-\frac{1}{s+2}\right)=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}U(s)$$

即有：

$$s^3Y+6s^2Y+11sY+6Y=s^2U+4sU+5U$$

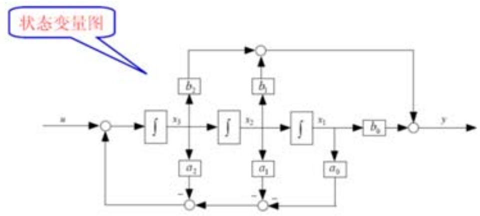
根据拉普拉斯逆变换，可得：

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=\ddot{u}+4\dot{u}+5u$$

第一种实现：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=x_3\\ \dot{x}_3&=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3+u=-6x_1-11x_2-6x_3+u\end{aligned}\quad,\quad\begin{aligned}y=b_3u&+(b_2-a_2b_3)x_3\\ &+(b_1-a_1b_3)x_2\\ &+(b_0-a_0b_3)x_1\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ -a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$



$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}b_0-a_0b_n & b_1-a_1b_n & \cdots & b_{n-2}-a_{n-2}b_n & b_{n-1}-a_{n-1}b_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+b_n\boldsymbol{u}$$

得到：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ 0&0&1\\ -6&-11&-6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}5&4&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

第二种实现：

定义 $\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{x}_1 - u \\ x_3 &= \dot{x}_2 + 2u \end{aligned}$ ，则有 $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_3 - 2u \\ \dot{x}_3 &= -\alpha_3 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_1 x_3 + \beta_2 u \\ &= -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u \end{aligned}$ ， $y = x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_n \boldsymbol{u}$$

，其中 $\begin{aligned} \beta_n &= b_n \\ \beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_{n-1}\beta_n \\ \beta_{n-2} &= b_{n-2} - a_{n-2}\beta_n - a_{n-1}\beta_{n-1} \\ &\vdots \\ \beta_0 &= b_0 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta_{n-i} \end{aligned}$

得到：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

(2) 由(1)的结果求此系统的传递函数，根据(1)方法二结果

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s+6 & 1 \\ -6 & s^2 + 6s & s \\ -6s & -11s - 6 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

关键问题：$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ 的求解

行列式 $\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{vmatrix} = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$，伴随矩阵 $\begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s+6 & 1 \\ -6 & s^2 + 6s & s \\ -6s & -11s - 6 & s^2 \end{bmatrix}$

根据(1)方法一结果

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s+6 & 1 \\ -6 & s^2 + 6s & s \\ -6s & -11s - 6 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

(3) 求此系统的对角线规范型状态空间描述

$$G(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{s^2+4s+5}{(s+3)(s+2)(s+1)}=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{z}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{z}$$

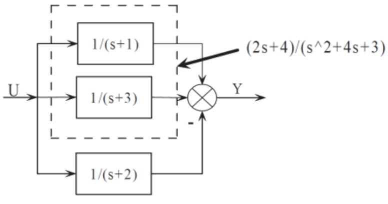


Fig. B.

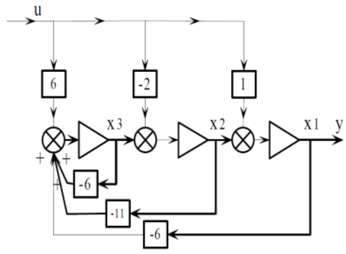


Fig. C.

(4) 求使得 $\boldsymbol{z}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ 的非奇异线性变换 **T**

先求 **A** 的特征根：

$$\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$$

根据：

$$\text{单根：}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i\text{；}\quad\text{重根：}\quad\left.\begin{array}{c}\lambda_1\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=0\\\lambda_1\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=-\boldsymbol{P}_1\\\vdots\\\lambda_1\boldsymbol{P}_q-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_q=-\boldsymbol{P}_{q-1}\end{array}\right\}$$

可得到：

$$\mathbf{T}=\left[\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_3\right]=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\\lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_n\\\lambda_1^2&\lambda_2^2&\cdots&\lambda_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}\dot{x}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}\\y=\mathbf{Cx}+\mathbf{Du}\end{array}\rightarrow\begin{array}{l}x=\mathbf{Tz}，\text{或}\\\mathbf{z}=\mathbf{T}^{-1}x\end{array}\rightarrow\begin{array}{l}\dot{z}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATz}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Bu},\\y=\mathbf{CTz}+\mathbf{Du}\end{array}\qquad\mathbf{z}(0)=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0)=\mathbf{T}^{-1}x_0$$

对应求相关矩阵：(Matlab 中)求取，发现 A 对应，B 和 C 对应不上，为什么？

(5) 画出规范型的方框图，见 Fig. C。

(6) 求状态转移矩阵。

对角规范型法：

$$e^{At}=\mathbf{T}^{-1}e^{\Lambda t}\mathbf{T}$$

$$=\mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{-2t}&0\\0&0&e^{-3t}\end{bmatrix}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}3&2.5&0.5\\-3&-4&-1\\1&1.5&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{-2t}&0\\0&0&e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t}&2.5e^{-t}-4e^{-2t}+1.5e^{-3t}&0.5e^{-t}-e^{-2t}+0.5e^{-3t}\\-3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t}&-2.5e^{-t}+8e^{-2t}-4.5e^{-3t}&-0.5e^{-t}+2e^{-2t}-1.5e^{-3t}\\3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t}&2.5e^{-t}-16e^{-2t}+13.5e^{-3t}&0.5e^{-t}-4e^{-2t}+4.5e^{-3t}\end{bmatrix}$$

拉氏逆变法：

$$e^{At}=L^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\begin{bmatrix} s^2+6s+11 & s+6 & 1 \\ -6 & s^2+6s & s \\ -6s & -11s-6 & s^2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s^2+6s+11}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s+6}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \\ \frac{-6}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s^2+6s}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s}{s^3+6s^2+11s+6} \\ \frac{-6s}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{-11s-6}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s^2}{s^3+6s^2+11s+6} \end{bmatrix}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{3}{s+1}+\frac{-3}{s+2}+\frac{1}{s+3} & \frac{2.5}{s+1}+\frac{-4}{s+2}+\frac{1.5}{s+3} & \frac{0.5}{s+1}+\frac{-1}{s+2}+\frac{0.5}{s+3} \\ \frac{-3}{s+1}+\frac{6}{s+2}+\frac{-3}{s+3} & \frac{-2.5}{s+1}+\frac{8}{s+2}+\frac{-4.5}{s+3} & \frac{-0.5}{s+1}+\frac{2}{s+2}+\frac{-1.5}{s+3} \\ \frac{3}{s+1}+\frac{-12}{s+2}+\frac{9}{s+3} & \frac{2.5}{s+1}+\frac{-16}{s+2}+\frac{13.5}{s+3} & \frac{0.5}{s+1}+\frac{-4}{s+2}+\frac{4.5}{s+3} \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} 3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & 2.5e^{-t}-4e^{-2t}+1.5e^{-3t} & 0.5e^{-t}-e^{-2t}+0.5e^{-3t} \\ -3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t} & -2.5e^{-t}+8e^{-2t}-4.5e^{-3t} & -0.5e^{-t}+2e^{-2t}-1.5e^{-3t} \\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & 2.5e^{-t}-16e^{-2t}+13.5e^{-3t} & 0.5e^{-t}-4e^{-2t}+4.5e^{-3t} \end{bmatrix}$$

凯莱-哈尔密顿法：

$$e^{At}=\alpha_0(t)\mathbf{I}+\alpha_1(t)\mathbf{A}+\alpha_2(t)\mathbf{A}^2$$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2.5 & -4 & 1.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} \\ 2.5e^{-t}-4e^{-2t}+1.5e^{-3t} \\ 0.5e^{-t}-e^{-2t}+0.5e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 \\
&= \alpha_0(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1(t)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} + \alpha_2(t)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \\ 36 & 60 & 25 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 2.5e^{-t} - 4e^{-2t} + 1.5e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 2.5e^{-t} - 4e^{-2t} + 1.5e^{-3t} \\ -15e^{-t} + 24e^{-2t} - 9e^{-3t} & -27.5e^{-t} + 44e^{-2t} - 16.5e^{-3t} & -15e^{-t} + 24e^{-2t} - 9e^{-3t} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5e^{-t} - e^{-2t} + 0.5e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t} & -5.5e^{-t} + 11e^{-2t} - 5.5e^{-3t} & -3e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ 18e^{-t} - 36e^{-2t} + 18e^{-3t} & 30e^{-t} - 60e^{-2t} + 30e^{-3t} & 12.5e^{-t} - 25e^{-2t} + 12.5e^{-3t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & 2.5e^{-t} - 4e^{-2t} + 1.5e^{-3t} & 0.5e^{-t} - e^{-2t} + 0.5e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t} & -2.5e^{-t} + 8e^{-2t} - 4.5e^{-3t} & -0.5e^{-t} + 2e^{-2t} - 1.5e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} & 2.5e^{-t} - 16e^{-2t} + 13.5e^{-3t} & 0.5e^{-t} - 4e^{-2t} + 4.5e^{-3t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$