5.3 跟踪控制器设计

极点配置的优点：可以改善系统的稳定性、动态性能

例 已知被控对象的状态空间模型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} x$$

设计状态反馈控制律，使得闭环极点为−4和−5，并讨论闭环系统的稳态性能。

期望的闭环特征多项式是

$$\Delta^*(\lambda) = \lambda^2 + 9\lambda + 20$$

所要设计的状态反馈增益矩阵是

$$K=[20-3\quad 9-4]=[17\quad 5]$$

相应的闭环系统状态矩阵

$$A-BK=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -20 & -9\end{bmatrix}$$

闭环传递函数

$$G(s)=C[sI-(A-BK)]^{-1}=\frac{2s+3}{s^2+9s+20}$$

检验系统的稳态特性：

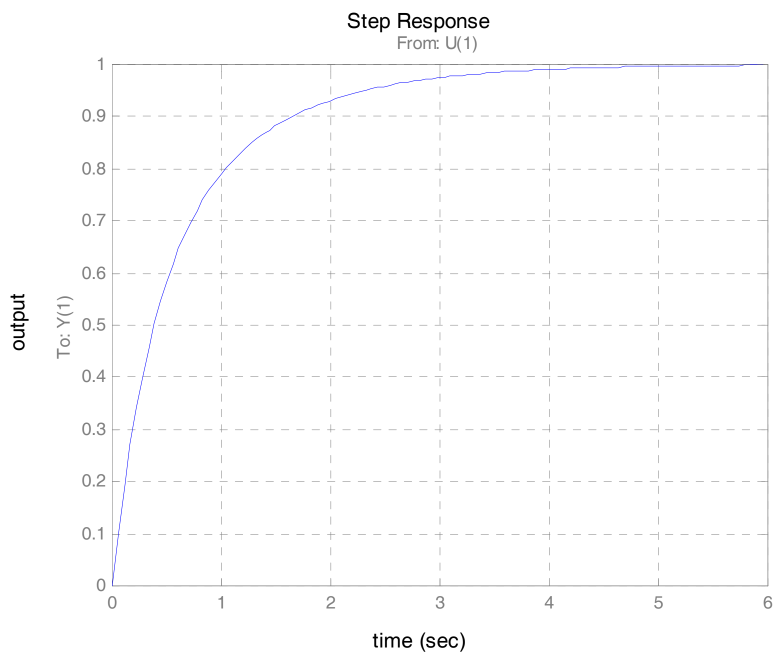
当参考输入为单位阶跃时，输出的稳态值（终值定理）

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sG(s)\frac{1}{s}=G(0)=\frac{3}{20}$$

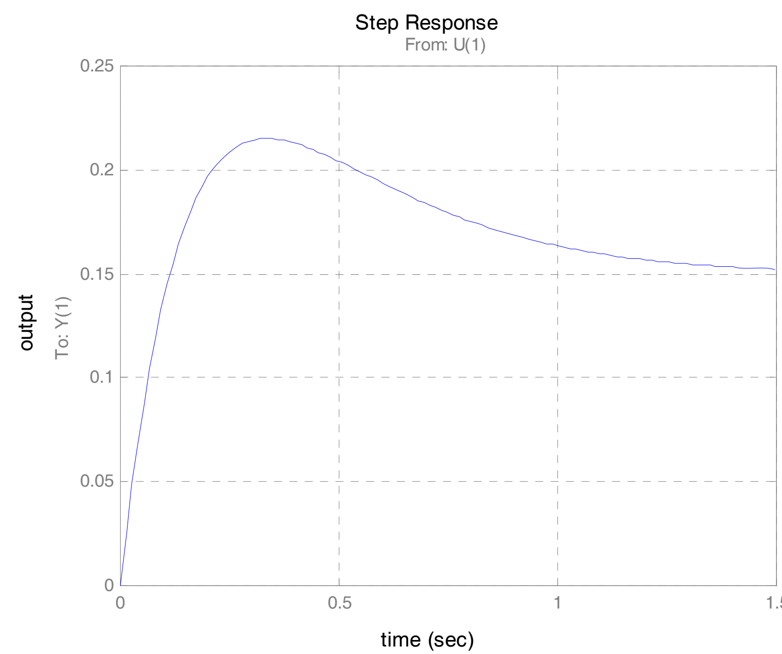
开环系统是稳定的，且开环传递函数 $G_o(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+4s+3}$

开环系统的稳态输出 $y_o(\infty)=\dfrac{3}{3}=1$，无静差。

闭环系统的稳态输出 $y_c(\infty)=\dfrac{3}{20}$，有稳态误差。



开环系统的单位阶跃响应



闭环系统的单位阶跃响应

结论：极点配置改善了系统的动态性能；

有可能降低系统的稳态性能。

问题：如何在既可以改善系统动态性能，又不降低稳态性能呢？

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

参考输入：$\boldsymbol{y}_r(t) = \boldsymbol{y}_{r0} \cdot 1(t)$

外部扰动：$\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{d}_0 \cdot 1(t)$

要求：设计控制器，使得

✓ 系统是稳定的，且具有一定过渡过程特性；

✓ 在存在扰动下，系统输出跟踪参考输入。

定义误差向量：$e(t)=y(t)-y_r(t)$

引入了积分器

引入偏差的积分：

$$q(t)=\int_0^t e(\tau)d\tau$$

$$\dot{q}(t)=e(t)=Cx(t)-y_r(t)$$

对多输入系统：

$$\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(t)=[q_1(t) \quad q_2(t) \quad \cdots \quad q_r(t)]=\left[\int_0^t e_1(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \int_0^t e_2(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \cdots \quad \int_0^t e_r(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

引入增广系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ -\boldsymbol{y}_r \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{0}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \end{cases}$$

对增广系统 $\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{y}_r\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}\end{cases}$

设计状态反馈控制律 $u=-\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ q\end{bmatrix}=-K_1x-K_2q$

使得闭环系统 $\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{y}_r\end{bmatrix}$

是稳定的。

分析稳态性能：求拉氏变换，得到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\ \boldsymbol{q}(s)\end{bmatrix}=\left(s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}(s)\\ -\boldsymbol{y}_r(s)\end{bmatrix}$$

参考输入和外部扰动都是阶跃信号时，由终值定理

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{q}(t)\end{bmatrix} &= \lim_{s\to 0} s\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\ \boldsymbol{q}(s)\end{bmatrix}\\
&= \lim_{s\to 0} s\left(s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_0/s\\ -\boldsymbol{y}_{r0}/s\end{bmatrix}\\
&= -\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_0\\ -\boldsymbol{y}_{r0}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

即x和q趋向于常值。从而 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ 趋于零。

$$
\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}_r(t) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}[y(t)-y_r(t)]=0
$$

结论：针对增广系统，设计状态反馈控制律，只要闭环系统渐近稳定，则系统无静态误差。

若还需要系统有一定的过渡过程特性，极点配置！

条件：能任意配置极点的条件是增广系统能控。

定理 增广系统能控的充分必要条件是

（1）原来系统是能控的

（2） $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + r$ ， $m \geq r$ ， $\operatorname{rank} C = r$

证明：

$$\Gamma_{zc} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n+r-1}B \\ 0 & CB & CAB & \cdots & CA^{n+r-2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AS_1 \\ 0 & CS_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & S_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

其中$S_1 = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \quad \cdots \quad A^{n+r-2}B]$ 是$n \times (n+r-1)m$

原系统的能控性 $\Rightarrow$

$[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$ 的行向量线性无关。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{S}_1 \\ \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{行满秩} \Rightarrow \quad \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}\right) = n + r$$

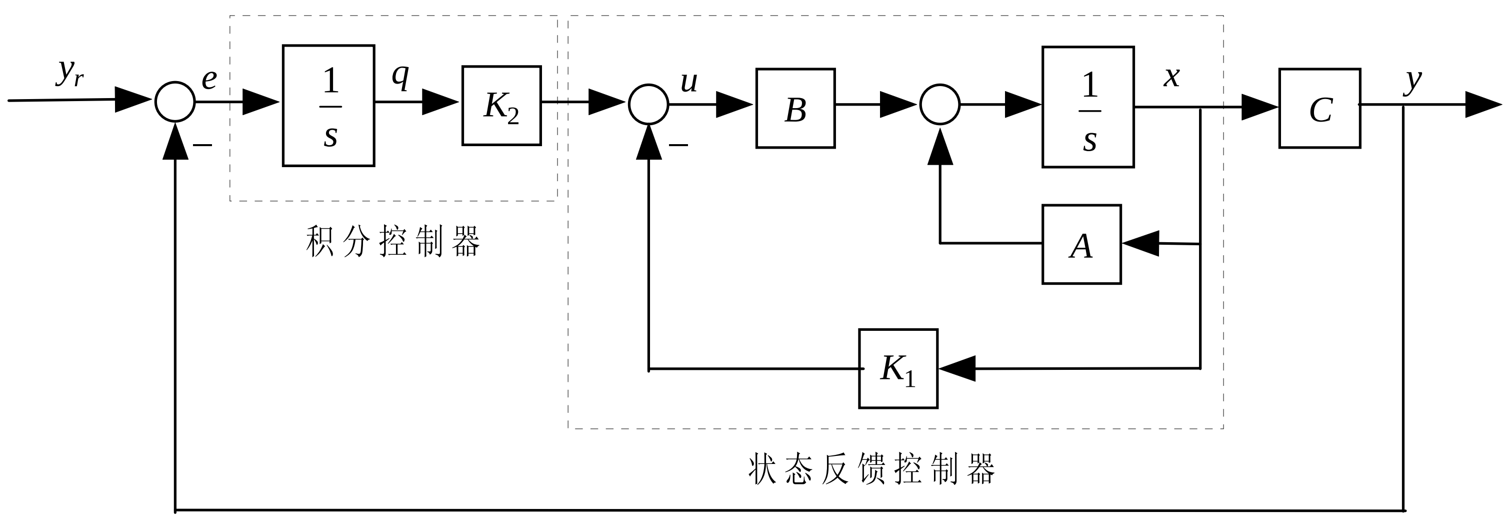
必要条件：$m \geq r$， $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C}) = r$

$m \geq r$： 输入的个数不能小于输出的个数

$\operatorname{rank}(\boldsymbol{C}) = r$： 所有的测量输出都是独立的。

跟踪外部参考输入的控制律是 $u = -K_1 x - K_2 \int_0^t e(\tau) d\tau$

积分比例控制器



针对前面的例子，再来设计一个状态反馈控制器：

使得：闭环系统具有理想的过渡过程特性；

无静差地跟踪阶跃参考输入。

系统模型

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}y_r = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ q \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]u + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hdashline -1 \end{array}\right]y_r$$

$$y = [\boldsymbol{C} \quad 0]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ q \end{bmatrix} = [3 \quad 2 \;\vdots\; 0]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 = n + r \Rightarrow \text{增广系统能控}$$

设计要求：保持原闭环极点－4，－5；

增加的增广闭环系统极点－8。

利用MATLAB可得 K=[-17.6667 13.0000 53.3333]

跟踪控制律 $u=\begin{bmatrix}17.6667 & -13\end{bmatrix}\boldsymbol{x}-53.3333\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$

单位阶跃响应：

改善动态性能；

消除静态误差。