东南大学

2010 级研究生考试试卷 (A)

课程名称： 数值分析 课程编号： S00112 考试历时： 150 分钟 考核方式： 闭卷

院 (系)__________ 学号 __________ 姓名 __________ 成绩 __________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得　分										

(**注意**：本试卷共有 8 页 10 大题，请考生检查自己的试卷.)

1. (10 分) 设近似值 $x=2.01$ 和 $y=3.14$ 的相对误差限分别为 $|e_r(x)| \le 0.003$, $|e_r(y)| \le 0.002$, 试求函数 $z = x\sin(x+2y)$ 的相对误差限.

2. (10 分) 分析方程 $x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$ 存在几个实根，并用迭代法求出这些实根，精确到 3 位有校数字.

3. 用列主元 Gauss 消去法求下面线性方程组的解

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. (10 分) 给定线性方程

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

其中 a, b, c 均为正数. 证明求上述方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式同时收敛同时发散，并且当收敛时， Gauss-Seidel 迭代格式的收敛速度比 Jacobi 迭代格式的收敛速度快.

5. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^3[a, b]$, 并且 $f(a) = f(b) = 0$.

(1) 求一个 2 次多项式 $p(x)$ 满足 $p(a) = f(a), p'(a) = f'(a), p(b) = f(b)$.

(2) 求一个 2 次多项式 $q(x)$ 满足 $q(a) = f(a), q(b) = f(b),\ q'(b) = f'(b)$.

(3) 证明

$$\max_{a \le x \le b} \left| f(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b-a)}(x-a)(x-b) \right| \le \frac{1}{48}(b-a)^3 \max_{a \le x \le b} |f'''(x)|.$$

6. (10 分) 求 1 次多项式 $p_1(x) = a + bx$ 使得

$$\max_{0 \le x \le 1} |x^3 - p_1(x)|$$

取最小值，并求此最小值.

7. (10 分) 已知求积公式

$$\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t \approx \frac{5}{9}g\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\Big) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\Big(\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)$$

为 Gauss 公式. 试给出形如

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

的求积公式，使其代数精度达到 5.

8. (10 分) 已知函数表

x	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750
$f(x)$	0.84147	0.90227	0.94898	0.98089	0.99749	0.99853	0.98399

x	0.875	1.000	1.125	1.250	1.375	1.500	1.625
$f(x)$	0.95409	0.90930	0.85032	0.77807	0.69369	0.59847	0.49392

x	1.750	1.875	2.000
$f(x)$	0.38166	0.26345	0.14112

用复化 Simpson 公式计算积分 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，要求精确到 5 位有效数字.

9. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,\, y),\, a \le x \le b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

取正整数 n ，记 $h = (b-a)/n,\ x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \cdots, n, y_i \approx y(x_i), 1 \le i \le n, y_0 = \eta.$

(1) 用数值积分方法构造形如

$$y_{i+1} = y_{i-1} + h[Af(x_{i+1}, y_{i+1}) + Bf(x_i, y_i) + Cf(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

的数值求解公式，并写出该求解公式的阶数和局部截断误差表达式.

(2) 用改进 Euler 公式与上述公式构造一个预测校正公式.

10. (10 分) 给定初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & a<x<b,\ 0<t\le T, \\ u(x,0)=\varphi(x), & a\le x\le b, \\ u(a,t)=0,\quad u(b,t)=0, & 0\le t\le T, \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 是光滑函数, 且满足相容性条件. 取正整数 M,N, 记 $h=(b-a)/M,\ \tau=T/N,\ x_i=a+ih, 0\le i\le M;\ t_k=k\tau,\ 0\le k\le N$. 设有求上述定解问题的差分格式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(u_i^{k+1}-u_i^k)+\dfrac{1}{2h}(u_{i+1}^k-u_{i-1}^k)-\dfrac{1}{h^2}(u_{i+1}^k-2uK_i+u_{i-1}^k)=f(x_i,t_k), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i\le i\le M-1,\ 0\le k\le N-1, \\ u_i^0=\varphi(x_i),\qquad 1\le i\le M-1, \\ u_0^k=0,\quad u_M^k=0,\qquad 0\le k\le N. \end{cases}$$

(1) 写出上述差分格式的截断误差表达式.

(2) 设 $f(x,t)\equiv 0, \{u_i^k\ |0\le i\le M, 0\le k\le N\}$ 是上述差分格式的解, 记 $r=\tau/h^2, \|u^k\|_\infty=\max\limits_{0\le i\le M}|u_i^k|, k=0,1,\cdots,N$. 证明：当步长比 $r\le\frac{1}{2}$ 且 $h\le 2$ 时有下面的估计式成立

$$\|u^k\|_\infty\le\|u^0\|_\infty,\ k=1,2,\cdots,N.$$