习题 1

1．以下各表示的近似数，问具有几位有效数字？并将它舍入成有效数。

（1）$x_1^*=451.023$，　　$x_1=451.01$；

（2）$x_2^*=-0.045\,113$，　　$x_2=-0.045\,18$；

（3）$x_3^*=23.421\,3$，　　$x_3=23.460\,4$；

（4）$x_4^*=\dfrac{1}{3}$，　　$x_4=0.333\,3$；

（5）$x_5^*=23.496$，　　$x_5=23.494$；

（6）$x_6^*=96\times10^5$，　　$x_6=96.1\times10^5$；

（7）$x_7^*=0.000\,96$，　　$x_7=0.96\times10^{-3}$；

（8）$x_8^*=-8\,700$，　　$x_8=-8\,700.3$。

解：(1) $x_1^*=451.023$　　$x_1=451.01$

$\left|x_1^*-x_1\right|=0.013\le\dfrac{1}{2}\times10^{-1}$，$x_1$具有 4 位有效数字。$x_1\to451.0$

(2) $x_2^*=-0.045\,113$　　$x_2=-0.045\,18$

$$\frac{1}{2}\times10^{-4}<\left|x_2^*-x_2\right|=0.045\,18-0.045113=0.000\,067<\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

x_2具有 2 位有效数字，$x_2\to-0.045$

(3) $x_3^*=23.4213$　　$x_3=23.4604$

$$\left|x_3^*-x_3\right|=\left|23.4213-23.4604\right|=23.4604-23.4213=0.0391\le\frac{1}{2}\times10^{-1}$$

x_3 具有 3 位有效数字，$x_3\to23.4$ (不能写为 23.5)

(4) $x_4^*=\dfrac{1}{3}$，$x_4=0.3333$

$\left|x_4^* - x_4\right| = 0.000033\Lambda < \frac{1}{2}\times 10^{-4}$,x_4具有 4 位有效数字，$x_4 = 0.3333$

(5) $x_5^* = 23.496$， $x_5 = 23.494$

$\left|x_5^* - x_5\right| = 23.496 - 23.494 = 0.002 < \frac{1}{2}\times 10^{-2}$

x_5 具有 4 位有效数字， $x_5 \to 23.50$ (不能写为 23.49)

(6) $x_6^* = 96\times 10^5 = 0.96\times 10^7$ $x_6 = 96.1\times 10^5 = 0.961\times 10^7$

$\left|x_6^* - x_6\right| = 0.001\times 10^{-7} \le \frac{1}{2}\times 10^{-2}\times 10^{-7}$

x_6具有 2 位有效数字， $x_6 = 0.96\times 10^7 = 96\times 10^5$

(7) $x_7^* = 0.00096$ $x_7 = 0.96\times 10^{-3}$

$x_7^* = 0.96\times 10^{-3}$ $x_7^* - x_7 = 0$ x_7精确

(8) $x_8^* = -8700$ $x_8 = -8700.3$

$\left|x_8^* - x_8\right| = 0.3 \le \frac{1}{2}\times 10^0$ x_8具有 4 位有效数字， $x_8 = -8700$精确

2.以下各数均为有效数字：

(1) 0.1062 + 0.947; (2)23.46－12.753;

(3)2.747×6.83; (4)1.473 / 0.064 。

问经过上述运算后，准确结果所在的最小区间分别是什么？

解：(1) x_1=0.1062， x_2=0.947， $x_1 + x_2$=1.0532

$|e(x_1)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$， $|e(x_2)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-3}$

$|e(x_1+x_2)| \approx |e(x_1)+e(x_2)| \le |e(x_1)| + |e(x_2)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4} + \frac{1}{2}\times 10^{-3}$

=0.00055

$x_1^*+x_2^* \in$[1.0532$-$0.00055， 1.0532+0.00055]=[1.05265， 1.05375]

(2) x_1=23.46， $x_2=-12.753$ $x_1-x_2=10.707$

$\left|e(x_1)\right| \le \frac{1}{2}\times10^{-2}$， $\left|e(x_2)\right| \le \frac{1}{2}\times10^{-3}$

$\left|e(x_1-x_2)\right| \approx \left|e(x_1)-e(x_2)\right| \le \left|e(x_1)\right| + \left|e(x_2)\right|$

$\le \frac{1}{2}\times10^{-2}+\frac{1}{2}\times10^{-3}$=0.0055

$x_1^*-x_2^* \in$[10.707$-$ 0 .0055 , 10.707+0.0055]=[10.7015,10.7125]

(3) $x_1=2.747$ $x_2=6.83$ $x_1x_2=18.76201$,

$\left|e(x_1)\right| \le \frac{1}{2}\times10^{-3}$, $\left|e(x_2)\right| \le \frac{1}{2}\times10^{-2}$

$\left|e(x_1x_2)\right| \approx \left|x_2e(x_1)+x_1e(x_2)\right| \le x_2\left|e(x_1)\right| + x_1\left|e(x_2)\right|$

$\le 6.83\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+2.747\times\frac{1}{2}\times10^{-2}=\frac{1}{2}\times10^{-2}\times$(0.683+2.747)=0.01715

$x_1^*x_2^* \in [18.76201-0.01715, 18.76201+0.01715]=[18.74486, 18.77916]$

(4) $x_1=1.473$, $x_2=0.064$, $x_1/x_2=23.015625$

$\left|e(x_1)\right| \le \frac{1}{2}\times10^{-3}$, $\left|e(x_2)\right| \le \frac{1}{2}\times10^{-3}$ $e(x_1/x_2) \approx \frac{1}{x_2}e(x_1)-\frac{x_1}{x_2^2}e(x_2)$

$\left|e(x_1/x_2)\right| \le \frac{1}{x_2}\left|e(x_1)\right| + \frac{x_1}{x_2^2}\left|e(x_2)\right| = \frac{1}{0.064}\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1.473}{0.064^2}\times\frac{1}{2}\times10^{-3}$

=0.187622

$x_1^*/x_2^* \in$[23.015625$-$0.187622 , 23.015625+0.187622]

=[22.828003 , 23.203247]

3.对一元 2 次方程 $x^2-40x+1=0$，如果 $\sqrt{399}\approx19.975$ 具有 5 位有效数字，求其具有 5 位有效数字的根。

解：$x^2-40x+1=0$

$x^2-40x+400=399$

$x_1^*=20+\sqrt{399}$ ，　$x_2^*=20-\sqrt{399}=\dfrac{1}{20+\sqrt{399}}$

记 $x^*=\sqrt{399}$ ，$x=19.975$　$|e(x)|\le\dfrac{1}{2}\times10^{-3}$

$x_1=20+x$=20+19.975=39.975　$|e(x_1)|=|e(x_2)|\le\dfrac{1}{2}\times10^{-3}$

∴　x_1具有 5 位有效数字。

$$x_2=\frac{1}{20+x}=\frac{1}{20+19.975}=\frac{1}{39.975}=0.0250156347\Lambda$$

$e(x_2)\approx-\dfrac{e(x)}{(20+x)^2}$ ，

$$|e(x_2)|\approx\frac{|e(x)|}{(20+x)^2}\le\frac{\frac{1}{2}\times10^{-3}}{39.975^2}=0.313\times10^{-6}<\frac{1}{2}\times10^{-6}$$

因而 x_2具有 5 位有效数字。　$x_2\approx0.025016$

也可根据 $x_1x_2=1$ 得到　$x_2=\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{39.975}=0.0250156347\Lambda$

$e(x_2)\approx-\dfrac{e(x_1)}{x_1^2}$　　$|e(x_2)|\approx\dfrac{|e(x_1)|}{x_1^2}\le\dfrac{\frac{1}{2}\times10^{-6}}{39.975^2}$

4.若 $x_1\approx0.937$ 具有 3 位有效数字，问 x_1 的相对误差限是多？设 $f(x)=\sqrt{1-x}$，求 $f(x_1)$ 的绝对误差限和相对误差限。

解：$x_1=0.937$　$|e(x_1)|\le\dfrac{1}{2}\times10^{-3}$

$$\left|e_r(x_1)\right| = \left|\frac{e(x_1)}{x_1}\right| \le \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{0.937} = 0.534\times 10^{-3}$$

$$f(x) = \sqrt{1-x}\quad, f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$e(f) \approx f'(x)e(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}e(x)\quad,$$

$$\left|e(f(x_1))\right| \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}\left|e(x_1)\right| \le \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1-0.937}}\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} = 0.996\times 10^{-3}$$

$$e_r(f) = \frac{e(f)}{f} \approx -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}e(x),$$

$$\left|e_r(f(x_1))\right| \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x_1}\left|e(x_1)\right| \le \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-0.937}\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$= 0.00397 = 3.97\times 10^{-3}$$

5. 取 $\sqrt{2.01}\approx 1.42$ ， $\sqrt{2.00}\approx 1.41$ 试按 $A = \sqrt{2.01}-\sqrt{2.00}$ 和 $A = 0.01/(\sqrt{2.01}+\sqrt{2.00})$ 两种算法求 A 的值，并分别求出两种算法所得 A 的近似值的绝对误差限和相对误差限，问两种结果各至少具有几位有效数字？

解：1) 记 $x_1^* = \sqrt{2.01}$ ， $x_1 = 1.42$ ， $x_2^* = \sqrt{2.00}$ ， $x_2 = 1.41$

则 $\left|e(x_1)\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-2}$ ， $\left|e(x_2)\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-2}$

$$A^* = \sqrt{2.01}-\sqrt{2.00} \approx 1.42-1.41 = 0.01$$

$$A_1 = 1.42-1.41 = 0.01$$

$$e(A_1) = e(x_1-x_2) \approx e(x_1)-e(x_2)$$

$$\left|e(A_1)\right| \approx \left|e(x_1)-e(x_2)\right| \le \left|e(x_1)\right| + \left|e(x_2)\right| = \frac{1}{2}\times 10^{-2} + \frac{1}{2}\times 10^{-2} = 10^{-2}$$

$$\left|e_r(A_1)\right| = \left|\frac{e(A_1)}{A_1}\right| \le \frac{10^{-2}}{0.01} = 1$$

不能肯定所得结果具有一位有效数字。

2） $A^* = 0.01/(\sqrt{2.01} + \sqrt{2.00})$，

$$A_2 = 0.01/(1.42 + 1.41) = 0.01/2.83 = 0.00353356\Lambda$$

$$e(A_2) = e\left(0.01\big/(x_1 + x_2)\right) = -0.01 \times \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} e(x_1 + x_2)$$

$$\left|e(A_2)\right| \le 0.01 \times \frac{1}{(1.42 + 1.41)^2} \times \left(\frac{1}{2} \times 10^{-2} + \frac{1}{2} \times 10^{-2}\right)$$

$$= 0.12486\Lambda \times 10^{-4} < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$\therefore$ 具有 2 位有效数字。

$$\left|e_r(A_2)\right| = \left|\frac{e(A_2)}{A_2}\right| \le \frac{0.12486 \times 10^{-4}}{0.00353356} = 0.3533547 \times 10^{-2}$$

3) $A^* - A_1 = A_2 - A_1 + A^* - A_2$

$$\left|A^* - A_1\right| \ge \left|A_2 - A_1\right| - \left|A^* - A_2\right|$$

$$= \left|0.00353356 - 0.01\right| - \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.006\Lambda > \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$\therefore$ A_1无有效位数。

6.计算球的体积所产生的相对误差为 1%。若根据所得体积的值推算球的半径，问相对误差为多少？

解： $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $, dV = 4\pi R^2 dR$

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi R^2 dR}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\frac{dR}{R}$$

$$e_r(R) \approx \frac{1}{3} e_r(V)$$

由 $|e_r(V)| = 10^{-2}$ 知 $|e_r(R)| \le \frac{1}{3} \times 10^{-2}$

7.有一圆柱，高为 25.00 cm，半径为 20.00±0.05 cm。试求按所给数据计算这个圆柱的体积和圆柱的侧面积所产生的相对误差限。

解：1) $V(R) = \pi R^2 h$

$$e_r(V) \approx V'(R) \cdot \frac{R}{V} e_r(R) = 2\pi h R \cdot \frac{R}{\pi R^2 h} e_r(R) = 2 e_r(R)$$

$$|e_r(V)| \approx 2|e_r(R)| \le 2 \times \frac{0.05}{20} = \frac{1}{200} = 0.005$$

2) $S(R) = 2\pi\ Rh$

$$e_r(S) \approx S'(R) \cdot \frac{R}{S} e_r(R) = 2\pi h \cdot \frac{R}{2\pi R h} e_r(R) = e_r(R)$$

$$|e_r(S)| \approx |e_r(R)| \le \frac{0.05}{20} = 0.0025$$

答 计算体积的相对误差限为 0.005，计算侧面积的相对误差限为 0.0025

9.试改变下列表达式，使计算结果比较精确：

(1) $\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}$, 当 $|x| << 1$ 时；

(2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, 当 $|x| >> 1$ 时；

(3) $\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}$, 当 $|x| << 1$ 时；

(4) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$, 当 $|x| << 1$ 时。

解 ：(1) $\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=tg\dfrac{x}{2}$

(2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

(3)

$$\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{(1+x)-(1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}=\frac{(1+x)-(1+x-2x^2)}{(1+2x)(1+x)}$$

$$=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$$

(4) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=tg\dfrac{x}{2}$

10.若 1 个计算机的字长$n=3$，基数$\beta=10$，阶码$-2\le p\le 2$，问这台计算机能精确表示几个实数。

解：$n=3$，$\beta=0$，$L=-2$，$U=2$

所能精确表示的实数个数为

$$1+2(\beta-1)\beta^{n-1}(U-L+1)=1+2\times 9\times 10^2\times(2+2+1)=9001$$

11.给定规格化的浮点数系 F:$\beta=2$，$n=3,L=-1,U=1$,求 F 中规格化的浮点数的个数，并把所有的浮点数在数轴上表示出来。

解：$\beta=2$，$n=4$，$L=-1$，$U=1$

所有规格化浮点数个数为

$$1+2(\beta-1)\beta^{n-1}(U-L+1)=1+2\times 1\times 2^3\times(1+1+1)=49$$

机器零 0

p=1 $\pm 0.\underline{1}000 \times 2^1$， $\pm 0.1001 \times 2^1$， $\pm 0.1\underline{0}10 \times 2^1$， $\pm 0.\underline{1}011 \times 2^1$

$\pm 0.1100 \times 2^1$， $\pm 0.1101 \times 2^1$， $\pm 0.1110 \times 2^1$， $\pm 0.1111 \times 2^1$

p=0 $\pm 0.1000 \times 2^0$， $\pm 0.1001 \times 2^0$， $\pm 0.1010 \times 2^0$，$\pm 0.1011 \times 2^0$

$\pm 0.1100 \times 2^0$， $\pm 0.1101 \times 2^0$， $\pm 0.1110 \times 2^0$，$\pm 0.1111 \times 2^0$

p=-1 $\pm 0.1000 \times 2^{-1}$，$\pm 0.1001 \times 2^{-1}$， $\pm 0.1010 \times 2^{-1}$，$\pm 0.1011 \times 2^{-1}$

$\pm 0.1100 \times 2^{-1}$，$\pm 0.1101 \times 2^{-1}$，$\pm 0.1110 \times 2^{-1}$，$\pm 0.1111 \times 2^{-1}$

12.设有 1 计算机：$n = 3$，$-L = U = 2, \beta = 10$,试求下列各数的机器近似值（计算机舍入装置）：

(1) 41.92; (2) 328.7 (3) 0.0483

(4) 0.918; (5)0.007 845; (6)98 740;

(7) 1.82×10^3; (8) 4.71×10^{-6}; (9)$6.644\,5 \times 10^{21}$;

(10) 3.879×10^{-10}; (11) 3.196×10^{-100}; (12) 13.654×10^{99} 。

解：$n = 3$， $L = -2$， $U = 2$，$\beta = 10$

(1) 41.92

(2) 328.7

(3) 0.0483

(4) 0.918

(5) 0.007845

(6) 98740

(7) 1.82×10^3

(8) 4.71×10^{-6}

(9) 6.6445×10^{21}

(10) 3.879×10^{-10}

(11) 3.196×10^{-100}

(12) 13.654×10^{99}

$fl(41.92) = 0.419 \times 10^2$

$fl(328.7)$ 溢出

$fl(0.0483) = 0.483 \times 10^{-1}$

$fl(0.918) = 0.918 \times 10^0$

$fl(0.007845) = 0.785 \times 10^{-2}$

$fl(98740)$ 溢出

$fl(1.82\times10^{3})$ 溢出 $fl(3.879\times10^{-10})$ 溢出

$fl(4.71\times10^{-6})$ 溢出 $fl(3.196\times10^{-100})$ 溢出

$fl(6.6445\times10^{21})$ 溢出 $fl(13.654\times10^{99})$ 溢出

16.考虑数列 1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$，$\cdots$。设 $p_0=1$，则用递推公式

$$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}\qquad (n=2,3,\cdots)$$

可以生成上述序列。试考察计算 p_n 的算法的稳定性。

解：$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}$，$n=1,2,3,\Lambda$ 。若 p_0 有误差，则实际按如下递推

$$\tilde{p}_n=\frac{1}{3}\tilde{p}_{n-1}$$

$$p_n-\tilde{p}_n=\frac{1}{3}p_{n-1}-\frac{1}{3}\tilde{p}_{n-1}=\frac{1}{3}(p_{n-1}-\tilde{p}_{n-1})$$

记 $e_n=p_n-\tilde{p}_n$，则有

$$e_n=\frac{1}{3}e_{n-1}=\Lambda=\frac{1}{3^n}e_0$$

$$|e_n|=\frac{1}{3^n}|e_0|$$

$|e_n|=\frac{1}{3}|e_{n-1}|$,误差逐步缩小，数值稳定

17.考虑数列 1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{27}$，$\frac{1}{81}$，$\cdots$。设 $p_0=1$，$p_1=\frac{1}{3}$，则用递推公式

$$p_n=\frac{10}{3}p_{n-1}-p_{n-2}\qquad (n=2,3,\cdots)$$

可以生成上述序列。试问计算的上述公式是稳定的吗？

解：$p_n=\dfrac{10}{3}p_{n-1}-p_{n-2}$，$n=2,3,\Lambda$ 。若 p_0 和 p_1 有误差，则实际按如下

递推：

$$\tilde{p}_n=\frac{10}{3}\tilde{p}_{n-1}-\tilde{p}_{n-2},\quad n=2,3,\Lambda$$ 。

记 $e_n=p_n-\tilde{p}_n$,则有

$$e_n=\frac{10}{3}e_{n-1}-e_{n-2}\ ,\quad n=2,3,\Lambda$$

$$e_n-\frac{1}{3}e_{n-1}=3e_{n-1}-e_{n-2}=3(e_{n-1}-\frac{1}{3}e_{n-2})=3^{n-1}(e_1-\frac{1}{3}e_0)\qquad (A)$$

$$e_n-3e_{n-1}=\frac{1}{3}e_{n-1}-e_{n-2}=\frac{1}{3}(e_{n-1}-3e_{n-2})=\frac{1}{3^{n-1}}(e_1-3e_0)\qquad (B)$$

9(A)-(B) 得

$$e_n=\frac{1}{8}\left[3^{n+1}(e_1-\frac{1}{3}e_0)-\frac{1}{3^{n-1}}(e_1-3e_0)\right]$$

只需 $e_1-\dfrac{1}{3}e_0\neq 0$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=\infty$ 因而递推过程不稳定

18.已知 $p(x)=125x^5+230x^3-11x^2+3x-47$，用秦九韶法求 $p(5)$。

解：

	125	0	230	-11	3	-47
5		625	3125	16775	83820	419115
	125	625	3355	16764	83823	419068

$p(5)=419068$

习题 2　(1-5 题)

1. 分析下列方程各存在几个根，并找出每个根的含根区间：

(1) $x+\cos x=0$；

(2) $3x-\cos x=0$；

(3) $\sin x-e^{-x}=0$；

(4) $x^2-e^{-x}=0$。

解：(1) $x+\cos x=0$　　(A)

$f(x)=x+\cos x$ ， $f'(x)=1-\sin x\geq 0$ ，$x\in(-\infty,\infty)$

$f(0)=0+\cos 0=1$, $f(-1)=-1+\cos(-1)=-1+\cos 1<0$

$\therefore$ 方程(A) 有唯一根　$x^*\in[-1,0]$

(2) $3x-\cos x=0$　　(B)

$f(x)=3x-\cos x$， $f'(x)=3+\sin x>0$， $x\in(-\infty,\infty)$ 时

$f(0)=3\times 0-\cos 0=-1<0$， $f(1)=3\times 1-\cos 1=3-\cos 1>0$

$\therefore$　方程(B) 有唯一根　$x^*\in[0,1]$

(3) $\sin x-e^{-x}=0$　　(C)

$\sin x=e^{-x}$

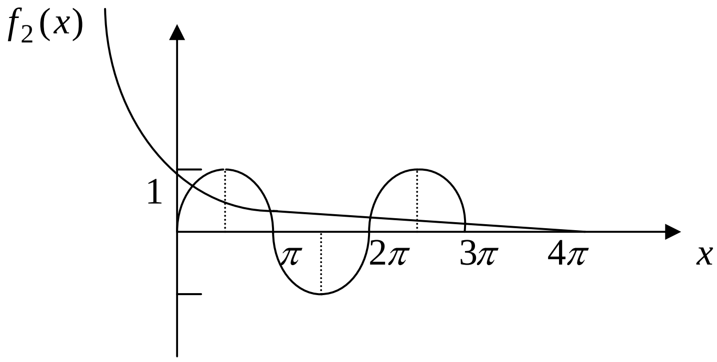
$f_1(x)=\sin x$， $f_2(x)=e^{-x}$

方程(C)有无穷个正根，无负根

在$[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$ 内有一根　$x_1^{(k)}$， 且 $\lim\limits_{k\to\infty}[x_1^{(k)}-2k\pi]=0$

在$[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\pi]$内有一根 $x_2^{(k)}$， 且 $\lim\limits_{k\to\infty}[x_2^{(k)}-(2k+1)\pi]=0$

(示图如下)　　$k=0,1,2,3\cdots$

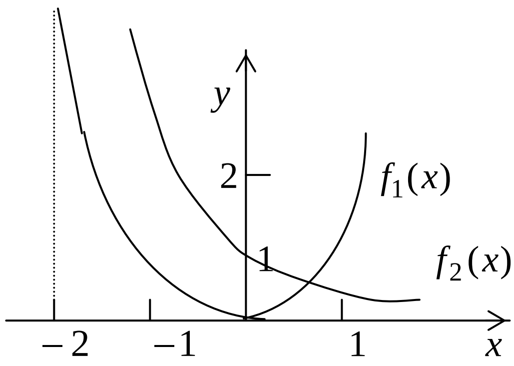


(4) $x^2 - e^{-x} = 0$ (D)

$x^2 = e^{-x}$

$f_1(x) = x^2$， $f_2(x) = e^{-x}$

方程(D) 有唯一根 $x^* \in [0,1]$

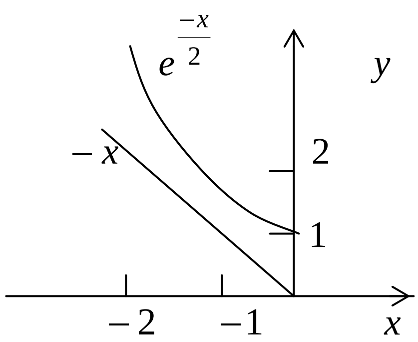


当 $x<0$ 时 (D)与方程

$-x = e^{-\frac{x}{2}}$ (E)

同解

当 $x<0$ 时 (E)无根



2. 给定方程 $x^2 - x - 1 = 0$；

(1)试用二分法求其正根，使误差不超过 0.05；

(2)若在[0 , 2]上用二分法求根，要使精确度达到 6 位有效数，需二分几次？

解：$x^2 - x - 1 = 0$

1) $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ $f(1) = -1$， $f(1.5) = -0.25 < 0$, $f(2) = 1$

$x^* \in [1.5, 2]$ ， $x^* = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034$

$1.5(-)$ $1.75(+)$ $2(+)$

$1.5(-)$ $1.625(+)$ $1.75(+)$

$1.5(-)$ $1.5625(+)$ $1.625(+)$

$1.5625(-)$ $1.59375(-)$ $1.625(+)$

$$(1.625-1.5625)/2=0.03125<\frac{1}{2}\times 10^{-1}$$

$$x^* \approx 1.59375 \approx 1.6$$

2 位有效近似值为 1.6

2) $a=a_0=0$， $b=b_0=2$

$$c_k=\frac{1}{2}(a_k+b_k)$$

$$\left|x^*-c_k\right| \le \frac{b-a}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k}$$

$$\frac{1}{2^k} \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}\ ，\ 2^{k-1} \ge 10^5 \quad k-1 \ge 5\ln 10/\ln 2=16.60$$

∴ 只要 2 等分 18 次

3. 为求 $x^3-5x-3=0$ 的正根，试构造 3 种简单迭代格式，判断它们是否收敛，且选择一种较快的迭代格式求出具有 3 位有效数的近似根。

解：$f(x)=x^3-5x-3=x(x^2-5)-3$

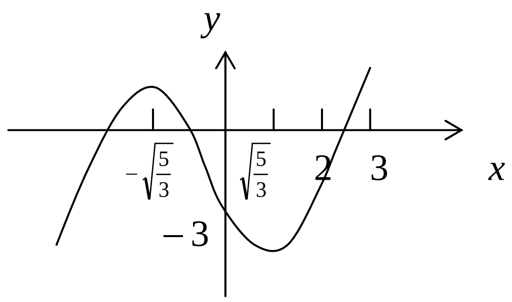
$$f'(x)=3x^2-5=3(x^2-\frac{5}{3})$$

当 $|x|<\sqrt{\frac{5}{3}}$ 时， $f'(x)<0$；当 $|x|>\sqrt{\frac{5}{3}}$ 时 $f'(x)>0$

$$f(\sqrt{\frac{5}{3}})=\sqrt{\frac{5}{3}}(\frac{5}{3}-5)-3=-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}-3<0$$

$f(-\sqrt{\frac{5}{3}})=\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}-3>0$， $f(0)=-3<0$

$f(2)=2(4-5)-3=-5$， $f(3)=3\times(9-5)\cdot 3=9$



由草图可知唯一正根$x^*\in(2,3)$

(1) $5x=x^3-3$， $x=\frac{1}{5}(x^3-3)$， $\varphi_1(x)=\frac{1}{5}(x^3-3)$,

构造迭代格式 $x_{k+1}=\frac{1}{5}(x_k^3-3)$ (I) $\varphi_1'=\frac{3}{5}x^2$

当 $x\in[2,3]$, $\varphi_1'(x)\ge\frac{3}{5}\times 2^2=\frac{12}{5}>1$ ∴迭代格式(I)发散

2) $x^3=5x+3$, $x=\sqrt[3]{5x+3}$, 构造迭代格式

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{5x_k+3}, \qquad \text{(II)}$$

$\varphi_2(x)=\sqrt[3]{5x+3}$， $\varphi_2'(x)=\frac{1}{3}(5x+3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}}$

当$x\in[2,3]$时

$|\varphi_2'(x)|\le\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(5\times 2+3)^2}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{169}}=\le\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{125}}=\frac{1}{3}<1$

当$x\in[2,3]$时

$\varphi_2(x)\in[\varphi_2(2),\varphi_2(3)]=[\sqrt[3]{5\times 2+3},\sqrt[3]{5\times 3+3}]=[\sqrt[3]{13},\sqrt[3]{18}]\subset[2,3]$

迭代格式(II) 对任意 $x_0\in[2,3]$均收敛

3) $x^2=\frac{5x+3}{x}=5+\frac{3}{x}$，　$x=\sqrt{5+\frac{3}{x}}$

构造迭代格式　$x_{k+1}=\sqrt{\frac{3}{x_k}+5}$　　(III)

$$\varphi_3(x)=\sqrt{\frac{3}{x}+5}\,,\quad \varphi_3'(x)=\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{x}+5)^{-\frac{1}{2}}(-3)x^{-2}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{3}{x}+5}}$$

当 $x\in[2,3]$ 时

$$|\varphi_3'(x)|=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{3}{x}+5}}\le\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{5}}\le\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{8\sqrt{5}}<1$$

当 $x\in[2,3]$ 时　$\varphi_3(x)\in[\varphi_3(3),\varphi_3(2)]=[\sqrt{6},\sqrt{6.5}]\subset[2,3]$

迭代格式(III) 对任意 $x_0\in[2,3]$ 均收敛

4) $\max\limits_{2\le x\le 3}|\varphi_2'(x)|=|\varphi_2'(2)|=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{169}}=0.301453$

$$\max_{2\le x\le 3}|\varphi_3'(x)|=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\min\limits_{2\le x\le 3}x^2\sqrt{\frac{3}{x}+5}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\min\{2^2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}+5},3^2\cdot\sqrt{\frac{3}{3}+5}\}}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\min\{4\sqrt{6.5},9\sqrt{6}\}}=0.0680$$

取格式(III)　$x_{k+1}=\sqrt{\frac{3}{x_k}+5}$

$x_0=2.5$，　$x_1=2.48998$，　$x_2=2.49095$，　$x_3=2.49086$

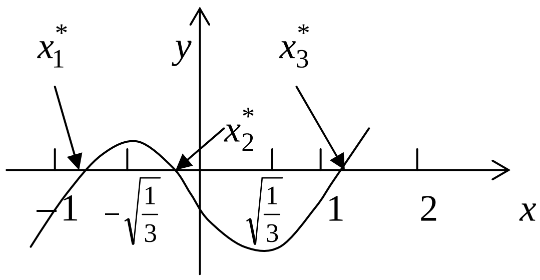
$x^*\approx 2.49$

4. 用简单迭代格式求方程 $x^3-x-0.2=0$ 的所有实根，精确至有 3 位有效数。

解：$f(x)=x^3-x-0.2=x(x^2-1)-0.2$

$$f'(x)=3x^2-1=3(x^2-\frac{1}{3})$$

当 $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时， $f'(x)<0$，



当$|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$时 $f'(x)>0$

$$f(-\sqrt{\frac{1}{3}})=-\sqrt{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3}-1)-0.2=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}-0.2>0$$

$$f(0)=-0.2$$

$f(\sqrt{\frac{1}{3}})=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}-0.2<0$ $f(1)=-0.2$， $f(2)=8-2-0.2=5.8$

$f(-1)=-0.2$， $f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})(\frac{1}{4}-1)-0.2=\frac{3}{8}-0.2>0$

$x_1^*\in[-1,-\sqrt{\frac{1}{3}}]$， $x_2^*\in[-\frac{1}{2},0]$， $x_3^*\in[1,2]$

1) $x=x^3-0.2$

迭代格式 $x_{k+1}=x_k^3-0.2$，

$$\varphi(x)=x^3-0.2,\ \varphi'(x)=3x^2\geq 0$$

当$x\in[-\frac{1}{2},0]$时，$|\varphi'(x)|\leq\frac{3}{4}$，

$$\varphi(x)\in[\varphi(-\frac{1}{2}),\varphi(0)]=[-\frac{1}{8}-0.2,-0.2]<[-\frac{1}{2},0]$$

任取$x_0\in[-\frac{1}{2},0]$迭代格式收敛于 x_2^*

取 $x_0=-0.25$得 $x_1=-0.215625$, $x_2=-0.210025$, $x_3=-0.209264$

$x_4=-0.209164$ $x_2^*\approx-0.209$

2) $x^3 = x + 0.2$， $x = \sqrt[3]{x+0.2}$

迭代格式 $x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 0.2}$

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x+0.2} \quad , \quad \varphi'(x) = \frac{1}{3}(x+0.2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+0.2)^2}}$$

当 $x \in [1,2]$ 时 $\varphi(x) \in [\varphi(1), \varphi(2)] = [\sqrt[3]{1.2}, \sqrt[3]{2.2}] < [1,2]$

$$|\varphi'(x)| \le \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(1+0.2)^2}} < \frac{1}{3} < 1$$

任意 $x_0 \in [1,2]$ 迭代格式收敛于 x_3^*

取 $x_0 = 1.5$ 计算得 $x_1 = 1.19348$， $x_2 = 1.11695$，

$x_3 = 1.09612$， $x_4 = 1.09031$

$x_5 = 1.08867$， $x_6 = 1.08821$

$\therefore \quad x_3^* = 1.09$

3) $x^2 - 1 = \dfrac{0.2}{x}$

$$x = -\sqrt{1 + \frac{0.2}{x}}$$

迭代格式 $x_{k+1} = -\sqrt{1 + \dfrac{0.2}{x_k}}$ (III)

$$\varphi(x) = -\sqrt{1 + \frac{0.2}{x}}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2}(1 + \frac{0.2}{x})^{-\frac{1}{2}}(-0.2)x^{-2} = \frac{0.1}{x^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{0.2}{x}}}$$

当 $x \in [-1, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}]$ 时

$$\varphi(x)\in[\varphi(-1),\varphi(-\frac{1}{\sqrt{3}})]=[-\sqrt{1-0.2},-\sqrt{1-0.2\sqrt{3}}]$$

$$=[-0.8944,-0.8084]\subset[-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$$

$$g(x)=x^2\sqrt{1+\frac{0.2}{x}},$$

$$g'(x)=2x\sqrt{1+\frac{0.2}{x}}+x^2\cdot\frac{1}{2}(1+\frac{0.2}{x})^{-\frac{1}{2}}(-0.2)x^{-2}$$

$$=(\sqrt{1+\frac{0.2}{x}})^{-1}[2x(1+\frac{0.2}{x})-0.1]$$

$$=(1+\frac{0.2}{x})^{-\frac{1}{2}}(2x+0.4-0.1)=(2x+0.3)(1+\frac{0.2}{x})^{-\frac{1}{2}}$$

当 $x\in[-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 时， $g'(x)<0$

$$g(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{3}\sqrt{1-0.2\sqrt{3}}=$$

当 $x\in[-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 时

$$|\varphi'(x)|\le\frac{0.1}{g(-\frac{1}{\sqrt{3}})}=\frac{0.3}{\sqrt{1-0.2\sqrt{3}}}=0.3711$$

迭代格式(III)对任意 $x_0\in[-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 均收敛于 $x*$，取 $x_0=-0.8$，

计算得 $x_1=-0.866025$， $x_2=-0.876961$， $x_3=-0.878601$

$x_4=-0.878843$， $x_1^*=-0.879$

5. 已知 $x=\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有且只有一个根，而当 $a<x<b$ 时，$|\varphi'(x)|\ge k>1$

(1)试问如何将 $x=\varphi(x)$ 化为适用于迭代的形式？

(2)将 $x=\tan x$ 化为适用于迭代的形式，并求 $x=4.5$(弧度)附近的根。

解：(1) 由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

将 $x=\varphi(x)$ 改写为 $x=\varphi^{-1}(x)$，则 $\dfrac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{d\varphi(x)}{dx}}$

当 $x\in[a,b]$ 时，$\left|\dfrac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}\right|\le\dfrac{1}{k}<1$，这时迭代格式为

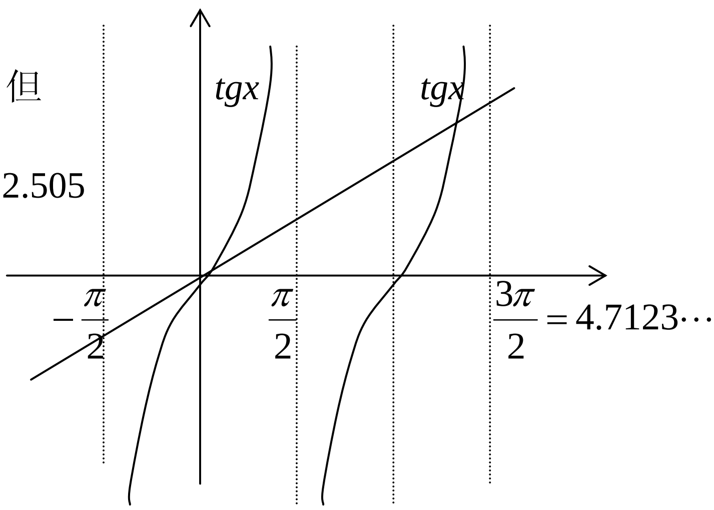
$$x_{k+1}=\varphi^{-1}(x_k)\text{，}\quad k=0,1,2,\cdots$$

是局部收敛的。

(2) 由图可知 $x=\tan x$

在 $x=4.5$ 附近有一根，但

$$(\tan x)'|_{x=4.5}=\frac{1}{(\cos 4.5)^2}=22.505$$



将 $x=\tan x$ 改写为

$x=\pi+\arctan x$

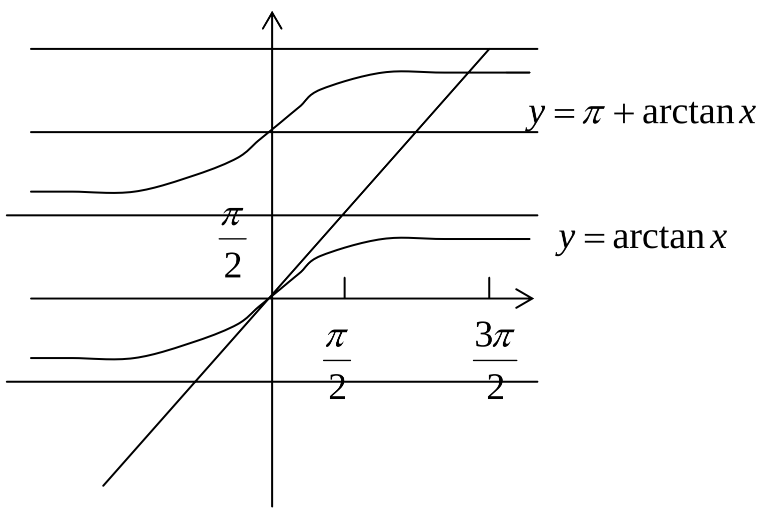
$\varphi(x)=\pi+\arctan x$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

当 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$ 时

$\varphi(x)\in[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$ 且

$$|\varphi'(x)|\le\frac{1}{1+(\frac{\pi}{2})^2}<1$$



$\therefore$ 迭代格式

$$x_{k+1} = \pi + \arctan x_k\text{，}\quad k = 0,1,2,\cdots$$

对任意 $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$均收敛

取 $x_0 = 4.5$得$x_1 = 4.49372$，$x_2 = 4.49342$，$x_3 = 4.493410$

具有 5 位有效数的根为 $x^* \approx 4.4934$

习题二 （第 6、7、11、12、18、19 题）

6. 设 (1) 方 程 $f(x)=0$ 有 根 x^* ； (2) 对 一 切 $x\in R$ ，$f'(x)$ 存 在 且 $0<m\le f'(x)\le M$ 。证明对于任意的 $\lambda\in(0,2/M)$，迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

是局部收敛的。

解：$0<m\le f'(x)\le M$

$$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$$

$$\varphi(x)=x-\lambda f(x)$$

$$\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)$$

$$\varphi'(x^*)=1-\lambda f'(x^*)$$

当 $\lambda\in(0,\dfrac{2}{M})$ 时 $1-\lambda M\le\varphi'(x^*)\le 1-\lambda\cdot m$，$\left|\varphi'(x^*)\right|<1$

$\therefore$ 迭代格式局部收敛。

7.给定方程 $f(x)=0$，并设 x^* 是其单根，且 $f(x)$ 足够光滑，证明迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}\left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]^2$$

是 3 阶局部收敛的。

证明 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}-\dfrac{f''(x)}{2f'(x)}\cdot\left[\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right]^2$

$f(x)=(x-x^*)g(x)$，$g(x^*)\ne 0$

$$f'(x)=g(x)+(x-x^*)g'(x)$$

$$f''(x)=2g'(x)+(x-x^*)g''(x)$$

$$\varphi(x)=x-\frac{(x-x^{*})g(x)}{g(x)+(x-x^{*})g'(x)}$$

$$-\frac{2g'(x)+(x-x^{*})g''(x)}{2[g(x)+(x-x^{*})g'(x)]}\left[\frac{(x-x^{*})g(x)}{g(x)+(x-x^{*})g'(x)}\right]^{2}$$

$$\lim_{x\to x^{*}}\varphi(x)=x^{*}$$

$$\varphi'(x^{*})=\lim_{x\to x^{*}}\frac{\varphi(x)-\varphi(x^{*})}{x-x^{*}}$$

$$=\lim_{x\to x^{*}}\left[1-\frac{g(x)}{g(x)+(x-x^{*})g'(x)}-\frac{2g'(x)+(x-x^{*})g''(x)}{2\left[g(x)+(x-x^{*}0g'(x)\right]}\cdot\frac{(x-x^{*})g(x)^{2}}{\left[g(x)+(x-x^{*})g'(x)\right]^{2}}\right]$$

$$=1-\frac{g(x^{*})}{g(x^{*})}-\frac{2g'(x^{*})}{2g(x^{*})}-\frac{0\cdot g(x^{*})^{2}}{g(x^{*})^{2}}=0$$

$$\varphi(x)=x-(x-x^{*})\cdot\frac{1}{1+(x-x^{*})\dfrac{g'(x)}{g(x)}}-\frac{1}{2g(x)}\left[g'(x)\right.$$

$$\left.+(x-x^{*})g''(x)\right]\frac{1}{1+(x-x^{*})\dfrac{g'(x)}{g(x)}}\cdot\frac{1}{\left[1+(x-x^{*})\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right]^{2}}(x-x^{*})^{2}$$

$$h(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}\left[-(x-x^{*})\right]$$

$$=x-(x-x^{*})\frac{1}{1-h(x)}-\frac{1}{2g(x)}\left[g'(x)+(x-x^{*})g''(x)\right]\frac{1}{(1-h(x))^{3}}(x-x^{*})^{2}$$

$$=x-(x-x^{*})[1+h(x)+h(x)^{2}+6\ \ ]$$

$$-\frac{1}{2g(x)}\cdot[g'(x)+(x-x^*)g''(x)][1+3h(x)+6\quad](x-x^*)^2$$

$$=x^*-(x-x^*)h(x)-(x-x^*)h(x)^2+O\left((x-x^*)^4\right)$$

$$-\frac{1}{2g(x)}[2g'(x)+(x-x^*)g''(x)][1+3h(x)+O(x-x^*)](x-x^*)^2$$

$$=x^*+\frac{g'(x)}{g(x)}(x-x^*)^2-\left[\frac{g'(x)}{g(x)}\right]^2(x-x^*)^3$$

$$-\frac{1}{2g(x)}\left[2g'(x)-6\frac{g'(x)^2}{g(x)}(x-x^*)+g''(x)(x-x^*)\right](x-x^*)^2+O\left((x-x^*)^4\right)$$

$$=x^*+2\left[\frac{g'(x)}{g(x)}\right]^2(x-x^*)^3-\frac{g''(x)}{2g(x)}(x-x^*)^3+O\left((x-x^*)^4\right);$$

$$\frac{x^*-\varphi(x)}{(x^*-x)^3}\to 2\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{g''(x)}{g(x)}$$

方法二　　$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\dfrac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}\left[\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]^2$

$$f(x^*)=f(x_k)+(x^*-x_k)f'(x_k)+\frac{1}{2}(x^*-x_k)^2f''(x_k)+\frac{1}{6}(x^*-x_k)^3f'''(\xi_k)=0$$

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}+x^*-x_k+\frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}(x^*-x_k)^2+\frac{1}{6}(x^*-x_k)^3\frac{f'''(\xi_k)}{f'(x_k)}=0$$

$$x^*=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2-\frac{1}{6}(x^*-x_k)^3\frac{f'''(\xi_k)}{f'(x_k)}$$

$$x^*-x_{k+1}=\frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}\left[\left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)^2-(x^*-x_k)^2\right]-\frac{1}{6}(x^*-x_k)^3\frac{f'''(\xi_k)}{f'(x_k)}$$

$$=\frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}\left\{\left[x^*-x_k+\frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}(x^*-x_k)^2\right]^2-(x^*-x_k)\right\}$$

$$-\frac{1}{6}(x^*-x_k)^3\frac{f'''(\xi_k)}{f'(x_k)}$$

$$\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^3}\to\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\cdot\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}-\frac{1}{6}\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)}$$

11.应用 Newton 法分别导出求方程 $f(x)=x^n-a=0$ 和 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$ 的根 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代格式，并求 $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})\big/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2$。

解：1) 解方程 $f(x)=0$ 的 Newton 迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x)=1-\frac{f'(x)^2-f(x)f''(x)}{f'(x)^2}=f(x)\frac{f''(x)}{f'(x)^2},\quad \lim_{x\to x^*}\varphi'(x)=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}+f(x)\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]',\qquad \lim_{x\to x^*}\varphi''(x)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{\varphi''(x^*)}{2}=-\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)},\quad x^*=\sqrt[n]{a}$$

2) $f(x)=x^n-a$，$f'(x)=nx^{n-1}$，$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$，

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=\left[\frac{nx^{n-1}}{x^n-a}\right]^{-1}, \quad \frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{n(n-1)x^{n-2}}{nx^{n-1}}=\frac{n-1}{x}$$

Newton 迭代格式 $x_{k+1}=x_k-\left[\frac{nx_k^{n-1}}{x_k^n-a}\right]^{-1}$

$$=x_k-\frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}=(1-\frac{1}{n})x_k+\frac{a}{n}x_k^{1-n}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{\sqrt[n]{a}-x_k}=-\frac{1}{2}\frac{n-1}{\sqrt[n]{a}}=\frac{1-n}{2\cdot\sqrt[n]{a}}$$

3) $f(x)=1-\frac{a}{x^n}$， $f'(x)=anx^{-(n+1)}$， $f''(x)=-an(n+1)x^{-(n+2)}$

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1-\frac{a}{x^n}}{anx^{-(n+1)}}=\frac{x^{n+1}}{an}-nx,$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{-an(n+1)x^{-(n+2)}}{anx^{-(n+1)}}=-\frac{n+1}{x}$$

Newton 迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\left[\frac{x_k^{n+1}}{an}-nx_k\right]=(1+n)x_k-\frac{x_k^{n+1}}{an}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}=\frac{n+1}{2\cdot\sqrt[n]{a}}$$

12.试写出求方程$\frac{1}{x}-c=0$(其中 c 为已知正常数)的 Newton 迭代格式，并证明当初值 x_0 满足$0<x_0<\frac{2}{c}$时迭代格式收敛。该迭代格式中是否含有除法运算？

解：记 $f(x)=c-\frac{1}{x}$,则求$\frac{1}{c}$等价于求方程$f(x)=0$的根.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}, \quad f''(x)=-\frac{2}{x^3}$$

Newton 迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{c-\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_k^2}}=x_k(2-cx_k), \quad k=0,1,2,\cdots$$

对任意 $x_0\in(0,\frac{2}{c})$，存在充分小的 δ（$\delta<\frac{1}{c}$），（δ<1）使得

$x_0\in[\delta, \frac{2}{c}-\delta]$ 现在考虑区间$[a,b]$=$[\delta, \frac{2}{c}-\delta]$

1^o $f(a)=f(\delta)=c-\frac{1}{\delta}=\frac{1}{\delta}(c\delta-1)<0$

$$f(b)=f(\frac{2}{c}-\delta)=c-\frac{1}{\frac{2}{c}-\delta}=c-\frac{c}{2-c\delta}=\frac{2c-c^2\delta-c}{2-c\delta}=\frac{c(1-c\delta)}{2-c\delta}>0$$

$f(a)f(b)<0$

2^o 当 $x\in[a,b]$时 $f'(x)>0$

3^o 当 $x\in[a,b]$时 $f''(x)<0$

4^o $\delta-\frac{f(\delta)}{f'(\delta)}=\delta(2-c\delta)\le\frac{2}{c}-\delta$

{ $(c\delta-1)(c\delta-2)\ge0$ $\quad c\delta(2-c\delta)\le 2-c\delta$ $\quad \delta(2-c\delta)\le\frac{2}{c}-\delta$ }

$$\frac{2}{c}-\delta-\frac{f(\frac{2}{c}-\delta)}{f'(\frac{2}{c}-\delta)}=(\frac{2}{c}-\delta)\left[2-c(\frac{2}{c}-\delta)\right]$$

$$=\frac{1}{c}\cdot c\delta(2-c\delta)\ge\delta$$

因而 当$x_0 \in (0, \frac{2}{c})$时，Newton 迭代格式收敛。

直接证明

$$x_{k+1} = x_k(2 - cx_k)$$

$$1 - cx_k = 1 - cx_k(2 - cx_k) = (1 - cx_k)^2$$

$$1 - cx_k = (1 - cx_{k-1})^2 = 6 = (1 - cx_0)^{2^k}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}(1 - cx_k) = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}(1 - cx_0)^{2^k} = 0$$

$$\Leftrightarrow |1 - cx_0| < 1 \Leftrightarrow x_0 \in (0, \frac{2}{c})$$

18.用劈因子法解方程$x^3 - 3x^2 - x + 9 = 0$(取$\omega_0(x) = x^2 - 4x + 6$，算至$|r_0| \le 0.005$，$|r_1| \le 0.005$)

解：$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 9$

取 $\varpi_0(x) = x^2 - 4x + 6$

$$\begin{array}{r|l} & 1+1 \\ \hline 1-4+6 & 1-3-1+9 \\ & 1-4+6 \\ \hline & \quad 1-7+9 \\ & \quad 1-4+6 \\ \hline & \qquad -3+3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 1-4+6 & 1+1+0 \\ & 1-4+6 \\ \hline & \quad +5-6 \end{array}$$

$$\begin{cases} 5\Delta u + \Delta v = -3 \\ -6\Delta u + \Delta v = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \Delta u = -0.545455 \\ \Delta v = -0.272727 \end{array}$$

于是得到 $\varpi_1(x) = \varpi_0(x) + \Delta u x + \Delta v = x^2 - 4.54546x + 5.72727$

$$\begin{cases} 6.09092\Delta u + \Delta v = 0.29756 \\ -5.72727\Delta u + 1.54546\Delta v = 0.14873 \end{cases}$$

$\Delta u = 0.0205500$，$\Delta v = 0.172392$

$$\omega_2(x) = x^2 - 4.52491x + 5.899662$$

$$f(x)=\omega_2(x)(x+1.52491)+0.00042x+0.00355$$

$$\approx \omega_2(x)(x+1.52491)$$

$$x_{1,2}=2.26246\pm 0.883718i$$

$$x_3=-1.52491$$

19.用适当的迭代法求下列方程组的根，精确至 4 位有效数：

$$\begin{cases} x=\sin\left(\dfrac{1}{2}y\right) \\ x=\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right) \end{cases}$$

解： $$\begin{cases} x_{k+1}=\sin(\dfrac{1}{2}y_k) \\ y_{k+1}=\cos(\dfrac{1}{3}x_k) \end{cases} \qquad k=0,1,2,6$$

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	0	0	0.479426	0.479426	0.473825	0.473825	0.473955
y_k	0	1	1	0.987258	0.987258	0.987553	0.987553

k	7	8	9
x_k	0.473955	0.473952	0.473952
y_k	0.987546	0.987546	0.987546

$$\therefore \quad \begin{cases} x^*\approx 0.4740 \\ y^*\approx 0.9875 \end{cases}$$

习题三　　　(第 1、2、3、6、9、11、15、16、17、18、19、20、22 题)

1. 设 L 为单位下三角阵，试写出解方程组的算法。

解：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j + x_i = d_i \text{，} \quad i = 2,3,\cdots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_i = d_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \text{，} \quad i = 2,3,\cdots,n \end{cases}$$

2. 为阶的上三角阵，试计算用回代算法解上三角方程组所需的乘除法运算次数。

解：

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ & & & & r_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} r_{n,n} x_n = c_n \\ \sum_{j=i}^{n} r_{ij} x_j = c_i \text{，} \quad i = n-1, n-2, \cdots, 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = {c_n}/{r_{n,n}} \\ x_i = (c_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij} x_j)/r_{ii} \quad \text{，} \qquad i = n-1, n-2, \cdots, 1 \end{cases}$$

乘除法运算次数 $=\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)=1+2+6\ \ +n=\frac{1}{2}n(n+1)$

3. 试用 Gauss 消去法解下列方程组，计算过程按 5 位小数进行：

$$\begin{bmatrix} 3.2 & -1.5 & 0.5 \\ 1.6 & 2.5 & -1.0 \\ 1.0 & 4.1 & -1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.90 \\ 1.55 \\ 2.08 \end{bmatrix}$$

解：

$$\begin{bmatrix} 3.2 & -1.5 & 0.5 & 0.90 \\ 1.6 & 2.5 & -1.0 & 1.55 \\ 1.0 & 4.1 & -1.5 & 2.08 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{r}_3\text{-}0.3125\mathrm{r}_1]{r_2-0.5r_1}\begin{bmatrix} 3.2 & -1.5 & 0.5 & 0.90 \\ 0 & 3.25 & -1.25 & 1.1 \\ 0 & 4.56875 & -1.65625 & 1.79875 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{r}_3\text{-}1.40577\mathrm{r}_2}\begin{bmatrix} 3.2 & -1.5 & 0.5 & 0.90 \\ 0 & 3.25 & -1.25 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0.10096 & 0.25240 \end{bmatrix}$$

$$x_3=0.25240\big/0.10096=2.5$$

$$x_2=(1.1+1.25\times 2.5)\div 3.25=1.3$$

$$x_1=(0.90+1.5\times 1.3-0.5\times 2.5)\big/3.2=0.5$$

6.用追赶法求解三对角方程组

$$\begin{cases} 2.0000M_0+1.0000M_1=5.5200 \\ 0.3571M_0+2.0000M_1+0.6429M_2=4.3144 \\ 0.6000M_1+2.0000M_2+0.4000M_3=3.2661 \\ 0.4286M_2+2.0000M_3+0.5714M_4=2.4287 \\ 1.0000M_3+2.0000M_4=2.1150 \end{cases}$$

解：

$$\begin{bmatrix} 2.0000 & 1.0000 & & & & 5.5200 \\ 0.3571 & 2.0000 & 0.6429 & & & 4.3144 \\ & 0.6000 & 2.0000 & 0.4000 & & 3.2661 \\ & & 0.4286 & 2.0000 & 0.5714 & 2.4287 \\ & & & 1.0000 & 2.0000 & 2.1150 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-\frac{0.4286}{1.78822}r_3 \\ r_5-\frac{1.0000}{1.90413}r_4}]{\substack{r_2-\frac{0.3571}{2.0000}r_1 \\ r_3-\frac{0.6000}{1.82145}r_2}} \begin{bmatrix} 2.0000 & 1.0000 & & & & 5.5200 \\ 0 & 1.82145 & 0.6429 & & & 3.32880 \\ 0 & 0 & 1.78822 & 0.4000 & & 2.16957 \\ 0 & 0 & 0 & 1.90413 & 0.5714 & 1.90870 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.69992 & 1.11260 \end{bmatrix}$$

等价三角方程组

$$\begin{cases} 2.0000M_0 + 1.0000M_1 = 5.5200 \\ 1.82145M_1 + 0.6429M_2 = 3.32880 \\ 1.78822M_2 + 0.4000M_3 = 2.16957 \\ 1.90413M_3 + 0.5714M_4 = 1.90870 \\ 1.69992M_4 = 1.11260 \end{cases}$$

回代得

$$M_4 = 1.11260 / 1.69992 = 0.654501$$

$$M_3 = (1.90870 - 0.5714 \times 0.654501) / 1.90413 = 0.80599$$

$$M_2 = (2.1695 - 0.4000 \times 0.80599) / 1.78822 = 1.03297$$

$$M_1 = (3.32880 - 0.6429 \times 1.03297) / 1.82145 = 1.46296$$

$$M_0 = (5.5200 - 1.0000 \times 1.46296) / 2.0000 = 2.02852$$

$\therefore M_0 = 2.0285$， $M_1 = 1.4630$， $M_2 = 1.0330$，

$M_3 = 0.8060$，$M_4 = 0.6545$

9.试用列主元 Gauss 消去法解下列方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

解：

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \boxed{3} & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - \frac{2}{3} r_1]{r_2 - \frac{1}{3} r_1} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{\frac{22}{3}} & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{22}{3} & 4 & 8 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - \frac{1}{11} r_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{22}{3} & 4 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{14}{11} \end{bmatrix}$$

等价三角方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \qquad\qquad = 3 \\ \dfrac{22}{3}x_2 + 4x_3 = 8 \\ \dfrac{7}{11}x_3 = \dfrac{14}{11} \end{cases}$$

$x_3 = 2$， $x_2 = 0$， $x_1 = 1$

11. 设计算机具有 4 位字长。分别用 Gauss 消去法和列主元 Gauss 消去法解下列方程组，并比较所得的结果。

$$\begin{cases} x + 592y = 437 \\ 592x + 4308y = 2251 \end{cases}$$

解： Gauss 消去法

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 592 & 439 \\ 592 & 4308 & 2251 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0.1000\times10^1 & 0.5920\times10^3 & 0.439\times10^3 \\ 0.592\times10^3 & 0.4308\times10^4 & 0.2251\times10^4 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - 592r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1000\times10^1 & 0.5920\times10^3 & 0.439\times10^3 \\ 0 & 0.4308\times10^4 - (0.5920\times10^3)^2 & 0.2251\times10^4 - 0.592\times0.439\times10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1000\times10^1 & 0.5920\times10^3 & 0.439\times10^3 \\ 0 & 0.4308\times10^4 - 0.3505\times10^6 & 0.2251\times10^4 - 0.2560\times10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1000\times10^1 & 0.592\times10^3 & 0.439\times10^3 \\ 0 & -0.3462\times10^6 & -0.2574\times10^6 \end{bmatrix}$$

回代

$$y = (-0.2574\times10^6) \div (-0.3462\times10^6) = 0.7435\times10^0$$

$$x = [0.4390\times10^3 - (0.592\times10^3)\times(0.7435\times10^0)] \div (0.1000\times10^1)$$

$$=(0.4390-0.4402)\times 10^3=-0.1200\times 10^1$$

列主元 Gauss 消去

$$A\to\begin{bmatrix}592 & 4308 & 2251\\ 1 & 592 & 439\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5920\times 10^3 & 0.4308\times 10^4 & 0.2251\times 10^4\\ 0.1000\times 10^1 & 0.5920\times 10^3 & 0.4390\times 10^3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{1}{0.5390\times 10^3}r_1}$$

$$\begin{bmatrix}0.5920\times 10^3 & 0.4308\times 10^4 & 0.2251\times 10^4\\ 0.0000\times 10^0 & 0.5920\times 10^3-\dfrac{0.4308\times 10^4}{0.5920\times 10^3} & 0.4390\times 10^3-\dfrac{0.2251\times 10^4}{0.5390\times 10^3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5920\times 10^3 & 0.4308\times 10^4 & 0.2251\times 10^4\\ 0 & 0.5920\times 10^3-0.7277\times 10^1 & 0.4390\times 10^3-0.4176\times 10^1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5920\times 10^3 & 0.4308\times 10^4 & 0.2251\times 10^4\\ 0 & 0.5217\times 10^3 & 0.4348\times 10^3\end{bmatrix}$$

$$y=0.8334\times 10^0$$

$$x=-0.2262\times 10^1$$

15. 用列主元三角分解法求解方程组。其中

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 5 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 3\end{bmatrix},\qquad b=\begin{bmatrix}4\\ 7\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

解：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2 & 4\\ \boxed{2} & 5 & 3 & -2 & 7\\ -2 & -2 & 3 & 5 & -1\\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 5 & 3 & -2 & 7\\ 1 & 2 & 1 & -2 & 4\\ -2 & -2 & 3 & 5 & -1\\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 5 & 3 & -2 & 7\\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -2 & 4\\ -1 & -2 & 3 & 5 & -1\\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\qquad s_2=-\frac{1}{2}\quad s_3=3\quad s_4=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}2 & 5 & 3 & -2 & 7\\ -1 & -2 & 3 & 5 & -1\\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -2 & 4\\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 5 & 3 & -2 & 7\\ -1 & 3 & 6 & 3 & 6\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 1 & -2 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\qquad s_3=\frac{1}{2}\quad s_4=\frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}2 & 5 & 3 & -2 & 7\\ -1 & 3 & 6 & 3 & 6\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 & 7 \\ -1 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

等价三角方程组

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3-2x_4=7 \\ 3x_2+6x_3+3x_4=6 \\ \frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=\frac{3}{2} \\ 3x_4=-3 \end{cases}$$

回代得

$$x_4=-1，\quad x_3=2，\quad x_2=-1，\quad x_1=2$$

16.已知 $x=[0,-1,2]^T$，求 $\|x\|_\infty$，$\|x\|_1$，$\|x\|_2$ 。

解： $x=(0,1,2)^T$

$$\|x\|_\infty=2，\|x\|_1=3，\|x\|_2=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

17.设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n,\omega_i>0(i=1,2,\cdots,n)$。证明

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}\omega_i|x_i|$$

是中的一种向量范数。

解： $\|x\|=\sum_{i=1}^{n}\omega_i|x_i|$

1^o 当 $x\neq 0$ 时 存在 i_0 使得 $x_{i_0}\neq 0$

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}\omega_i|x_i|\geq\omega_{i_0}|x_{i_0}|>0$$

$$\|x\|=0\Leftrightarrow\omega_i|x_i|=0，\quad i=1,2,\cdots,n \quad\Leftrightarrow x_i=0,i=1,2,\cdots,n\Leftrightarrow x=0$$

$2^o \quad \lambda \in R$

$$\|\lambda x\| = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$3^o \quad \forall x \in R^n, y \in R^n$

$$\|x + y\| = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i| + \sum_{i=1}^{n} \omega_i |y_i|$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

所给

$$\therefore \quad \|x\| = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i| \quad \text{为 } R^n \text{ 上的一个范数}$$

18.设 $x \in R^n$。证明

(1) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$ ；

(2) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ ；

(3) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|$ 。

解： (1) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} |x_i|)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} 1^2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{n}\|x\|_2$$

(2) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$

?

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = n\|x\|_\infty$$

(3) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|_2$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{n(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|)^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

19. 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

求 $\|A\|_\infty$，$\|A\|_1$，$\|A\|_2$ 及 $cond(A)_\infty$， $cond(A)_2$ 。

解：$\|A\|_\infty = 4, \|A\|_1 = 4$

$$A^T A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 2\\ 0 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda E - A^T A\right| = \begin{vmatrix}\lambda-6 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-5 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix} = \lambda^3 - 13\lambda^2 + 44\lambda - 16 = 0$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 13\lambda^2 + 44\lambda - 16 = 0 \qquad f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 26\lambda + 44$$

Newton 迭代格式

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{f(\lambda_k)}{f'(\lambda_k)} = \lambda_k - \frac{((\lambda_k - 13)\lambda_k + 44)\lambda_k - 16}{(3\lambda_k - 26)\lambda_k + 44}$$

$\lambda_0 = 45$	$\lambda_4 = 12.29633$	$\lambda_8 = 7.29312$
$\lambda_1 = 31.5136$	$\lambda_5 = 9.94299$	$\lambda_9 = 7.19629$
$\lambda_2 = 22.5495$	$\lambda_6 = 8.48979$	$\lambda_{10} = 7.189534$
$\lambda_3 = 15.9586$	$\lambda_7 = 7.66765$	$\lambda_{11} = 7.189534$

$$f(\lambda) = (\lambda - 7.189534)(\lambda^2 - 5.810466\lambda + 2.22546) + 0.00002033$$

$\lambda_1 = 7.189534$ $\qquad \lambda_2 = 5.398207$ $\qquad \lambda_3 = 0.412259$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = 2.68133$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix},\quad \left\|A^{-1}\right\|_\infty=2$$

$$Cond(A)_\infty=\|A\|_\infty\left\|A^{-1}\right\|_\infty=4\times 2=8$$

$$Cond(A)_2=\sqrt{\frac{7.189534}{0.412259}}=4.17605$$

20. 设$\|A\|_P,\|A\|_q$为$R^{n\times n}$上任意两种矩阵(算子)范数，证明存在常数

c_1 ，$c_2>0$使得

$$c_1\|A\|_p\le\|A\|_q\le c_2\|A\|_P$$

对一切$A\in R^{n\times n}$均成立。

解：由向量范数的等价性知道存在正常数m_1,m_2使得

$$m_1\|x\|_p\le\|x\|_q\le m_2\|x\|_p$$

$$m_1\|Ax\|_p\le\|Ax\|_q\le m_2\|Ax\|_p$$

对$\forall x\in R^n$成立，于是 当$x\neq 0$时，

$$\frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_q}\le\frac{m_2\|Ax\|_p}{m_1\|x\|_p}=\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q}\le\frac{m_2}{m_1}\|A\|_p$$

即

$$\frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_q}\le\frac{m_2}{m_1}\|A\|_p$$

由此可以得到

$$\|A\|_q=\max_{\substack{x\in R^n\\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_q}\le\frac{m_1}{m_2}\|A\|_p \qquad ①$$

同理，当 $x\neq 0$ 时

$$\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}\le\frac{\frac{1}{m_1}\|Ax\|_q}{\frac{1}{m_2}\|x\|_q}=\frac{m_2}{m_1}\frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_q}\le\frac{m_2}{m_1}\|A\|_q$$

$$\|A\|_p=\max_{\substack{x\in R^n\\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}\le\frac{m_2}{m_1}\|A\|_q$$

即 $\dfrac{m_1}{m_2}\|A\|_p\le\|A\|_q$ ②

综合① ② 得

$$\frac{m_1}{m_2}\|A\|_p\le\|A\|_q\le\frac{m_2}{m_1}\|A\|_p$$

即 $c_1\|A\|_p\le\|A\|_q\le c_2\|A\|_p$

其中 $c_1=\dfrac{m_1}{m_2}$，$c_2=\dfrac{m_2}{m_1}$

22. 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，证明

$$\|A\|_2^2\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

解： $A=(a_{ij})$

$$\|A\|_2^2=\max_{\substack{x\in R^n\\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|_2^{\ 2}}{\|x\|_2^2}=\max_{\substack{x\in R^n\\ x\neq 0}}\frac{\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2}\le\max_{\substack{x\in R^n\\ x\neq 0}}\frac{\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2)(\sum_{j=1}^n x_j^2)}{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

$$\therefore\quad \|A\|\le\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

习题三　(第 24、25、26、27、29、31、33 题)

24.设 $A \in R^{n\times n}$，证明当 $\rho(A) < 1$时，矩阵序列

$$S_k = I + A + \cdots + A^k \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

收敛，并求其极限。

解：　$S_k = I + A + \cdots + A^k$

$\rho(A) < 1$，$I - A$ 可逆 ，$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$

$$(I - A)S_k = I + A + \cdots + A^k - (A + A^2 + \cdots + A^k + A^{k+1}) = I - A^{k+1}$$

$$S_k = (I - A^{-1})(I - A^{k+1})$$

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} (I - A)^{-1}(I - A^{k+1}) = (I - A)^{-1}$$

25. 设

$$A=\begin{bmatrix} 2.0001 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}，\ b = \begin{bmatrix} 7.0003 \\ -7 \end{bmatrix}$$

已知方程组 $Ax = b$ 的精确解为

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) 计算条件数 $cond(A)_\infty$；

(2) 取近似解

$$y = \begin{bmatrix} 2.91 \\ -1.01 \end{bmatrix}$$

计算残向量 $r_y = b - Ay$；

(3) 取近似解 $z = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$，计算残向量 $r_z = b - Az$；

(4) 就近似解 y 和 z，分别计算定理 3.11 中不等式(3.55)的右端，并与不等式的左端进行比较；

(5) 本题计算结果说明什么问题？

解：(1) $A=\begin{bmatrix}2.0001 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$， $b=\begin{bmatrix}7.0003\\ -7\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}10000 & 10000\\ 20000 & 20001\end{bmatrix}$$

$$cond(A)_{\infty}=\|A\|_{\infty}\cdot\|A^{-1}\|_{\infty}=3.0001\times 40001$$

$$=120007.0001=1.20007\times 10^{5}$$

(2) $r_y=b-Ay=\begin{pmatrix}7.0007\\ -7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2.0001 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.91\\ -1.01\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.170009\\ -0.17\end{pmatrix}$

(3) $r_z=b-A_z=\begin{pmatrix}7.0007\\ -7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2.0001 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.0001\\ 0\end{pmatrix}$

(4) 估计式(3.55)：

$$\frac{\left\|x^{*}-\tilde{x}\right\|}{\left\|\tilde{x}\right\|}\le cond(A)\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

对于 y：

$$左端=\frac{\|x-y\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2.91\\ -1.01\end{pmatrix}\right\|_{\infty}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}\right\|_{\infty}}=\frac{0.09}{3}=0.03$$

$$右端=cond(A)_{\infty}\frac{\|r_y\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}=1.20007\times 10^{5}\times\frac{0.170009}{7.0003}=0.2914485\times 10^{4}$$

左端<<右端

对于 z：

左端=$\dfrac{\|x-z\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\dfrac{2}{3}$，右端=1.7143 ，左端和右端比较接近

(5) 由(1)知本题所给方程组是病态的。

由(2)(3)知对于病态方程组由残量小不能断定解的误差小。

$\|r_z\|_\infty$比$\|r_y\|_\infty$小 但$\|z-x\|_\infty$比$\|y-x\|_\infty$大得多

由(4)知 估计式(3.55)是一个保守估计，有时左端比右端小得多。

26.试分别用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法解方程组

$$\begin{bmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$

精确至 2 位有效数。

解：Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=(24-2x_2^{(k)}-3x_3^{(k)})\big/20 \\ x_2^{(k+1)}=(12-x_1^{(k)}-x_3^{(k)})\big/8 \\ x_3^{(k+1)}=(30-2x_1^{(k)}+3x_2^{(k)})\big/15 \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	0	1.2	0.75	0.769	0.768125
$x_2^{(k)}$	0	1.5	1.1	1.13875	1.138875
$x_3^{(k)}$	0	2	2.14	2.12	2.125216667

$x_1^* \approx 0.77$ ， $x_2^* \approx 1.1$ ， $x_3 = 2.1$

Gauss-Seidel 迭代格式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = (24 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}) \big/ 20 \\
x_2^{(k+1)} = (12 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \big/ 8 \\
x_3^{(k+1)} = (30 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)}) \big/ 15
\end{cases}
$$

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	0	1.2	0.7485	0.766420625	0.767374732
$x_2^{(k)}$	0	1.35	1.1426875	1.138105234	
$x_3^{(k)}$	0	2.11	2.1287375	2.12543163	

$x_1^* \approx 0.77$， $x_2^* \approx 1.1$， $x_3^* \approx 2.1$

27.试分别求出用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法解方程组

$$
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

的第 k 次迭代误差的一般表达式。方程组的精确解为 $x^* = [1,1]^T$ 。

解： $$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} x_2^* \\ x_2^* = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} x_1^* \end{cases}$$

Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} x_1^{(k)} \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{2} e_2^{(k)} \\ e_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{2} e_1^{(k)} \end{cases}$$

$$e_1^{(k+1)} = \frac{1}{2} e_2^{(k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e_1^{(k-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 e_1^{(k-1)}$$

$$e_2^{(k+1)} = \frac{1}{2} e_1^{(k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e_2^{(k-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 e_2^{(k-1)}$$

$$\begin{cases} e_1^{(2m)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m} e_1^{(0)} \\ e_2^{(2m)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m} e_2^{(0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1^{(2m+1)} = \dfrac{1}{2} e_2^{(2m)} = \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m} e_2^{(0)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m} e_2^{(0)} \\ e_2^{(2m+1)} = \dfrac{1}{2} e_1^{(2m)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m} e_1^{(0)} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} x_1^{(k+1)} \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{2} e_2^{(k)} \\ e_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{2} e_1^{(k+1)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 e_2^{(k)} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
e_2^{(k)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k} e_2^{(0)}, k = 0,1,2,\cdots \\[2ex]
e_1^{(k)} = \dfrac{1}{2} e_2^{(k-1)} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2(k-1)} e_2^{(0)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k-1} e_2^{(0)}, k = 0,1,2,\cdots
\end{cases}
$$

29.写出求解下列方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式，并判断敛散性：

(1) $\begin{bmatrix} 5.21 & 1.52 & -2.37 \\ 1.72 & -2.97 & 0.21 \\ 2.01 & 0.92 & 3.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.21 \\ 1.68 \\ 7.76 \end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

解： (1) Jacobi 迭代格式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = (6.21 - 1.52 x_2^{(k)} + 2.37 x_3^{(k)}) \big/ 5.21 \\[2ex]
x_2^{(k+1)} = (1.68 - 1.72 x_1^{(k)} - 0.21 x_3^{(k)}) \big/ (-2.97) \\[2ex]
x_3^{(k+1)} = (7.76 - 2.01 x_1^{(k)} - 0.92 x_2^{(k)}) \big/ 3.89
\end{cases}
$$

Gauss-Seidel 迭代格式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = (6.21 - 1.52 x_2^{(k)} + 2.37 x_3^{(k)}) \big/ 5.21 \\[2ex]
x_2^{(k+1)} = (1.68 - 1.72 x_1^{(k+1)} - 0.21 x_3^{(k)}) \big/ (-2.97) \\[2ex]
x_3^{(k+1)} = (7.76 - 2.01 x_1^{(k+1)} - 0.92 x_2^{(k+1)}) \big/ 3.89
\end{cases}
$$

由于所给线性代数组的系数矩阵是按行严格对角占优的，所以

两种迭代格式均是收敛的。

(2) Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (-1 - x_2^{(k)}) \big/ (-2) \\ x_2^{(k+1)} = (-x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \big/ (-2) \\ x_3^{(k+1)} = (-x_2^{(k)} - x_4^{(k)}) \big/ (-2) \\ x_4^{(k+1)} = (-x_3^{(k)}) \big/ (-2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2\lambda & 1 & & \\ 1 & -2\lambda & 1 & \\ & 1 & -2\lambda & 1 \\ & & 1 & -2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-2\lambda(-8\lambda^3 + 4\lambda) - (4\lambda^2 - 1) = 0$$

$$16\lambda^4 - 12\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = \mu \quad 16\mu^2 - 12\mu + 1 = 0$$

$$\mu_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 16}}{2 \times 16} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \pm 0.8090$$

$$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \pm 0.3090$$

$$\rho(J) = 0.8090 < 1$$

Jacobi 方法收敛

Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (-1 - x_2^{(k)}) \big/ (-2) \\ x_2^{(k+1)} = (-x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \big/ (-2) \\ x_3^{(k+1)} = (-x_2^{(k+1)} - x_4^{(k)}) \big/ (-2) \\ x_4^{(k+1)} = (-x_3^{(k+1)}) \big/ (-2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2\lambda & 1 & & \\ \lambda & -2\lambda & 1 & \\ & \lambda & -2\lambda & 1 \\ & & \lambda & -2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-2\lambda \begin{vmatrix} -2\lambda & 1 & \\ \lambda & -2\lambda & 1 \\ & \lambda & -2\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -2\lambda & 1 \\ \lambda & -2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$2\lambda^2(8\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_{3.,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 8}}{2 \times 8} = \frac{1 \pm i}{4},$$

$$\rho(G) = \frac{\sqrt{2}}{4} < 1$$

G-S 法收敛。

31. 试讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法解下列方程组的收敛性问题：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$。

解：(1) Jacobi 迭代法

迭代矩阵 J 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda(\lambda^2-2)-2(\lambda-2)-2(2-2\lambda)=0$$

$$\lambda^3-2\lambda-2\lambda+4-4+4\lambda=0$$

$$\lambda^3=0$$

$\rho(J)=0<1$ $\quad\therefore$ Jacobi 迭代格式发散

(2) Gauss-Seidel 迭代法

迭代矩阵 G 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda(\lambda^2-2\lambda)-2(\lambda^2-2\lambda)-2(2\lambda^2-2\lambda^2)=0$$

$$\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda^2+4\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda^2-4\lambda+4)=0$$

$\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=2$

$\rho(G)=2>1$ $\quad\therefore$ Gauss-Seidel 迭代格式发散。

33. 给定线性方程组

$$3x_1+2x_2=5$$

$$x_1+2x_2=-5$$

(1) 写出 SOR 迭代格式 ；

(2) 试求出最佳松弛因子。

解：(1) $\begin{cases} x_1^{(k+1)}=(1-\omega)x_1^{(k)}+\omega\cdot(5-2x_2^{(k)})\big/3 \\ x_2^{(k+1)}=(1-\omega)x_2^{(k)}+\omega(-5-x_1^{(k+1)})\big/2 \end{cases}$

(2) $A=\tilde{L}+D+\tilde{U}$

$$S_\omega=(D+\omega\tilde{L})^{-1}[(1-\omega)D-\omega\tilde{U}]$$

$$\left|\lambda I-S_\omega\right|=0$$

$$\left|(D+\omega\tilde{L})^{-1}\right|\cdot\left|\lambda(D+\omega\tilde{L})-[(1-\omega)D-\omega\tilde{U}]\right|=0$$

$$\left|\lambda(D+\omega\tilde{L})-[(1-\omega)D-\omega\tilde{U}]\right|=0$$

迭代矩阵S_ω的特征方程为

$$\left|\lambda\begin{pmatrix}3 & 0\\ \omega & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3(1-\omega) & -2\omega\\ 0 & 2(1-\omega)\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}3\lambda-3(1-\omega) & 2\omega\\ 0 & 2\cdot\lambda-2(1-\omega)\end{vmatrix}=0$$

$$6[\lambda-(1-\omega)][\lambda-(1-\omega)]-2\omega^2\lambda=0$$

$$(\lambda-1+\omega)^2-\frac{1}{3}\omega^2\lambda=0$$

$$\lambda^2+2(\omega-1)\lambda+(\omega-1)^2-\frac{1}{3}\omega^2\lambda=0$$

$$\lambda^2-2(\frac{1}{6}\omega^2-\omega+1)\lambda+(\omega-1)^2=0 \qquad (*)$$

$$[\lambda-(\frac{1}{6}\omega^2-\omega+1)]^2=(\frac{1}{6}\omega^2-\omega+1)^2-(\omega-1)^2$$

$$=[\frac{1}{6}\omega^2-(\omega-1)]^2-(\omega-1)^2$$

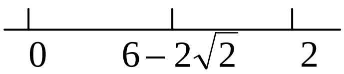
$$=(\frac{1}{6}\omega^2)^2-2\cdot\frac{1}{6}\omega^2(\omega-1)$$

$$=\frac{1}{6}\omega^2(\frac{1}{6}\omega^2-2\omega+2)$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{6}\omega^2-\omega+1\pm\frac{1}{6}\omega\sqrt{\omega^2-12\omega+12}$$

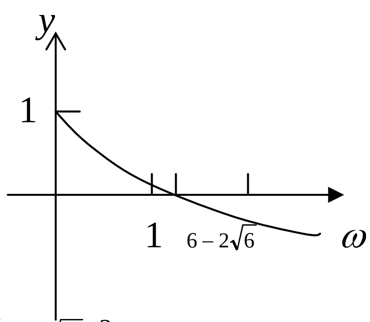
$$\omega^2-12\omega+12=[\omega-(6-2\sqrt{6})][\omega-(6+2\sqrt{6})]$$

当$\omega\in(0,6-2\sqrt{6})$时, (*)有两互异实根



当$\omega=6-2\sqrt{6}$时, (*)有两相同实根

当$\omega\in(6-2\sqrt{6},2)$时, (*)有两共轭复根



$$g(\omega)=\frac{1}{6}\omega^2-\omega+1$$

$$g'(\omega)=\frac{1}{3}\omega-1;\quad g'(\omega)=0,\quad \omega=3$$

$$g(0)=1,\quad g(6-2\sqrt{6})=5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2>0$$

$$g(2)=\frac{1}{6}\times4-2+1=-\frac{1}{3}$$

$$\rho(S_\omega)\begin{cases}\dfrac{1}{6}\omega^2-\omega+1+\dfrac{1}{6}\omega\sqrt{\omega^2-12\omega+12} & ,\omega\in(0,6-2\sqrt{6})\\ \\ \omega-1 & \omega\in(6-2\sqrt{6},2)\end{cases}$$

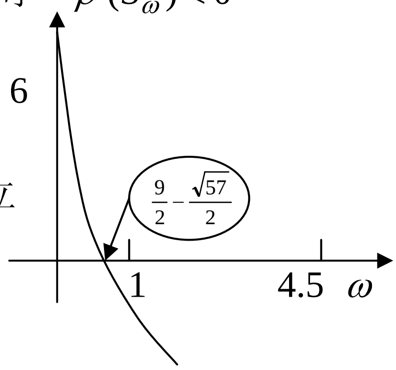
当 $\omega\in(0,6-2\sqrt{6})$

$$\rho'(S_\omega)=\frac{1}{3}\omega-1+\frac{1}{6}\left(\sqrt{\omega^2-12\omega+12}+\omega\cdot\frac{2\omega-12}{2\sqrt{\omega^2-12\omega+12}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\omega-1+\frac{1}{6}\cdot\frac{\omega^2-12\omega+12\omega+\omega^2-6\omega}{\sqrt{\omega^2-12\omega+12}}$$

$$=\frac{1}{3}\omega-1+\frac{\omega^2-9\omega+6}{3\sqrt{\omega^2+12\omega+12}}$$

现用分析法证明　当 $\omega\in(0,6-2\sqrt{6})$ 时　$\rho'(S_\omega)<0$



$$\frac{\omega^2-9\omega+6}{\sqrt{\omega^2-12\omega+12}}<3-\omega$$

当 $\omega^2-9\omega+6\le 0$ 时，上式显式成立

现考虑 $\omega^2-9\omega+6>0$ 的情况

$$(\omega-\frac{9}{2})^2>\frac{81}{4}-6=\frac{57}{4}$$

$$\left|\omega-\frac{9}{2}\right|>\frac{\sqrt{57}}{2}$$

$$\omega<\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{57}}{2}$$

当 $\omega\in(0,\dfrac{9-\sqrt{57}}{2})$ 时

$$(\omega^2-9\omega+6)^2<(3-\omega)^2(\omega^2-12\omega+12)$$

$$(\omega^2-9\omega+6)^2<(\omega^2-6\omega+9)(\omega^2-12\omega+12)$$

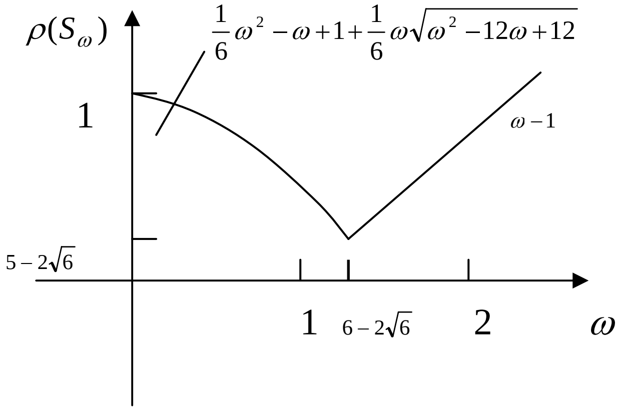
$$\omega^4 + 81\omega^2 + 36 - 18\omega^3 + 12\omega^2 - 108\omega$$

$$< \omega^4 - 12\omega^3 + 12\omega^2 - 6\omega^3 + 72\omega^2 - 72\omega + 9\omega^2 - 108\omega + 108$$

$$72\omega < 72$$

$$\omega < 1$$

$$\rho(S_\omega)|_{\omega=6-2\sqrt{6}} = 6 - 2\sqrt{6} - 1 = 5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$



$$\omega_{opt} = 6 - 2\sqrt{6} \qquad \rho(\omega_{opt}) = 5 - 2\sqrt{6}$$

习题四 (第 1、2、4、5、6、7、11、13、14、16、17 题)

1. 给定 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=100,121,144$ 3 点处的值，试以这 3 点建立 $f(x)$ 的 2 次(抛物)插值公式，利用插值公式$\sqrt{115}$求的近似值并估计误差。再给$\sqrt{169}=13$建立 3 次插值公式，给出相应的结果。

解：$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ， $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$,

$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$ ， $f(115)=10.72380529$

$x_0=100$， $x_1=121$， $x_2=144$， $x_3=169$

$y_0=10$， $y_1=11$， $y_2=12$ ， $y_3=13$

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$L_2(115)=10\times\frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)}+11\times\frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)}$$
$$+12\times\frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)}$$

$$=10\times\frac{(-6)(-29)}{(-21)(-44)}+11\times\frac{15\times(-29)}{21\times(-23)}+12\times\frac{15\times(-6)}{44\times 23}$$
$$=1.88312+9.90683-1.06719=10.72276$$

$$f(x)-L_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \quad ,\ 100<\xi<144$$

$$\left|f(115)-L_2(115)\right|\le\frac{1}{6}\max_{100\le x\le 144}\left|f'''(x)\right|\cdot\left|(115-100)\times(115-121)\times(115-44)\right|$$

$$\le\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}\times 10^{-5}\times 15\times 6\times 29$$

$$=0.1631\times 10^{-2}=0.001631$$

实际误差 $f(115)-L_2(115)=0.1045\times 10^{-2}$

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$L_3(115) = 10 \times \frac{(115-121)\times(115-144)\times(115-169)}{(100-121)\times(100-144)\times(100-169)}$$

$$+11 \times \frac{(115-100)\times(115-144)\times(115-169)}{(121-100)\times(121-144)\times(121-169)}$$

$$+12 \times \frac{(115-100)\times(115-121)\times(115-169)}{(144-100)\times(144-121)\times(144-169)}$$

$$+13 \times \frac{(115-100)\times(115-121)\times(115-144)}{(169-100)\times(169-121)\times(169-144)}$$

$$= 10 \times \frac{(-6)\times(-29)\times(-54)}{(-21)\times(-44)\times(-69)} + 11 \times \frac{15\times(-29)\times(-54)}{21\times(-23)\times(-48)}$$

$$+12 \times \frac{15\times(-6)\times(-54)}{44\times 23\times(-25)} + 13 \times \frac{15\times(-6)\times(-29)}{69\times 48\times 25}$$

$$= 1.473744 + 11.145186 - 2.305138 + 0.409783 = 10.723571$$

$$f(x) - L_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\text{，}\quad 100 < \xi < 169$$

$$\left| f(115) - L_3(115) \right| \le \frac{1}{24} \times \frac{15}{16} \times 10^{-7} \times \left| (115-10)(115-121)(115-144)(115-169) \right|$$

$$= \frac{1}{24} \times \frac{15}{16} \times 10^{-7} \times \left| 15 \times (-6) \times (-29) \times (-54) \right|$$

$$= 0.5505 \times 10^{-3} = 0.0005505$$

实际误差 $f(115) - L_2(115) = 0.23429 \times 10^{-3}$

2. 设 x_j 为互异节点 $(j = 0,1,6\ ,n)$ 求证：

(1) $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^k \qquad (k = 0,1,6\ ,n)$;

(2) $\sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^k l_j(x) = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n)$。

解：(1) 考虑函数 $g_h(x) = x^k, (0 \le k \le n)$ 以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点的 n 次插值多项式，由插值余项公式有

$$x^k - \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = \frac{(x^k)^{(n+1)}\Big|_{x=\xi}}{(n+1)!} \tilde{\pi}_{i=0}(x - x_i) = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^k, \qquad 0 \le k \le n$$

(2) 法 1　当 $1 \le k \le n$ 时

$$\sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^k l_j(x) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} C_k^l (x_j)^l (-x)^{k-l} l_j(x)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l (-x)^{k-l} \sum_{j=0}^{n}(x_j^l) l_j(x)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l (-x)^{k-l} \cdot x^l = (x + (-x))^k = 0^k = 0$$

法 2　设 $g(x) = (x - t)^k$，$1 \le k \le n$ 考虑它的 n 次插值多项式

有

$$\sum_{j=0}^{n}(x_j - t)^k l_j(x) = (x - t)^k，\ 1 \le k \le n$$

令 $t = x$ 得

$$\sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^k l_j(x) = 0，\ 1 \le k \le n$$

4. 设 $f(x) = C^2[a,b]$，且 $f(a) = f(b) = 0$，求证：

$$\max_{a \le x \le b}|f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \cdot \max_{a \le x \le b}|f''(x)|$$

解：考虑 $f(x)$ 以 $x = a, x = b$ 为节点的一次插值多项式 $L_1(x)$，则有

$$L_1(x)=f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{b-a}=0$$

$$f(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b),$$

当 $x\in[a,b]$ 时　$\xi\in(a,b)$

于是

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\cdot\max_{a\le x\le b}|(x-a)(x-b)|=\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

$$x\in[a,b]$$

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

法 2　设 $|f(x)|$ 在 $c\in[a,b]$ 处达到最大值，如果 $c=a$ 或 $c=b$

则结论显然成立，现设 $c\in(a,b)$　则有 $f'(c)=0$

$$f(a)=f(c)+\frac{1}{2}(a-c)^2f''(\xi_1)=0\qquad\xi_1\in(a,c)$$

$$f(b)=f(c)+\frac{1}{2}(b-c)^2f''(\xi_2)=0\qquad\xi_1\in(c,b)$$

当 $c\in(a,\frac{a+b}{2})$ 时，

$$|f(c)|=\left|-\frac{1}{2}(a-c)^2f''(\xi_1)\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

当 $c\in(\frac{a+b}{2},b)$ 时，

$$|f(c)|=\left|-\frac{1}{2}(b-a)^2f''(\xi_2)\right|$$

5.设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+6\ +a_{n-1}x+a_n$ 有个不同的实根 $x_1,x_2,6\ ,x_n$，

证明:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0 & 0\le k\le n-2\\ a_0^{-1} & k=n-1\end{cases}$$ 。

解：由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个不同的实根，所以 $f(x)$ 可为

$$f(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=a_0(x-x_j)\prod_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x-x_i)$$

$$f'(x)=a_0\left\{\prod_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x-x_i)+(x-x_j)\left[\prod_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x-x_i)\right]'\right\}$$

$$f'(x_j)=a_0\prod_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)$$

因而 $$\sum_{j=i}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)} \qquad (*)$$

法 1

记 $g_k(x)=x^k$，则

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)}=\prod_{j=1}^{n}\frac{g_k(k_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)}=g_k[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\frac{g_k^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$$

$$=\begin{cases}0 & 0\le k\le n-2\\ 1 & k=n-1\end{cases}$$

将上式代入(*)得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2\\ \dfrac{1}{a_0}, & k=n-1\end{cases}$$

法 2　考虑$g_k(x)$以$x_1,x_2,\cdots,x_n$为插值节点的$n-1$次插值多项式，则有

$$\sum_{j=1}^{n}x_j^k\prod_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x-x_i)\Bigg/\prod_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)\ =x^k，\ 0\le k\le n-1$$

比较两边x^{n-1}的系数，得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)}=\begin{cases}1 & k=n-1\\ 0 & 0\le k\le n-2\end{cases}$$

6. 设有函数值表

x	1	3	4	6	7	9
y	9	7	6	4	3	1

试求各阶差商，并写出 Newton 插值多项式。

解：

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 9 & & & & & & & & & & \\
 & & -1 & & & & & & & & & \\
3 & 7 & & 0 & & & & & & & & \\
 & & -1 & & 0 & & & & & & & \\
4 & 6 & & 0 & & 0 & & & & & & \\
 & & -1 & & 0 & & 0 & & & & & \\
6 & 4 & & 0 & & 0 & & & & & & \\
 & & -1 & & 0 & & & & & & & \\
7 & 3 & & 0 & & & & & & & & \\
 & & -1 & & & & & & & & & \\
9 & 1 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$N_5(x)=9+(-1)(x-1)$$

7.设$f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$及$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$。

解：$f[2^0,2^1,\cdots 2^7]=\dfrac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=1$，$f[2^0,2^1,\cdots 2^7,2^8]=\dfrac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=0$

11. 设 $x_0,x_1,6\ ,x_n$ 互不相同，

(1) 作 $2n+1$ 次多项式 $a_i(x)$ 满足

$$a_i(x_j)=\delta_{ij}\ \ ,\ \ a_i'(x_j)=0 \qquad (0\le j\le n)$$

(2) 作 $2n+1$ 多项式 $\beta_i(x)$ 满足

$$\beta_i(x_j)=0\ \ ,\ \ \beta_i'(x_j)=\delta_{ij} \qquad (0\le j\le n)$$

解：由条件 $\alpha_i(x_j)=0,\alpha_i'(x_j)=0 \quad 0\le j\le n,\ j\ne i$

可设 $\alpha_i(x)=[A_i+B_i(x-x_i)]\,l_i^2(x)$

再由 $\alpha_i(x_i)=1$ 得 $A_i l_i^2(x_i)=A_i=1$

对 $\alpha_i(x)$ 求导得 $\alpha_i'(x)=B_i l_i^2(x)+[A_i+B_i(x-x_i)]\alpha\, l_i(x)l_i'(x)$

由 $\alpha_i'(x_i)=B_i+2A_i l_i'(x_i)=B_i+2l_i'(x_i)=0$

得 $B_i=-2l_i'(x_i)$

于是

$$\alpha_i(x)=[1-2l_i'(x_i)]l_i^2(x)$$

2) 由 $\beta_i(x_j)=0$， $0\le j\le n$

$$\beta_i'(x_j)=0,\ \ 0\le j\le n,\ \ j\ne i$$

可设 $\beta_i(x)=C_i(x-x_i)l_i^2(x)$

求导得 $\beta_i'(x)=C_i[l_i^2(x)+(x-x_i)\cdot 2l_i(x)l_i'(x)]$

求 $\beta_i'(x_i)=1$ 得

$$C_i=1$$

于是

$$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$$

13. 给定 $f(x)=e^x$。设 $x=0$ 是 4 重插值节点， $x=1$ 是单重插值节点，

试求相应的 Hermite 插值公式，并估计误差$(x\in[0,1])$。

解：$f(0)=1$，$f'(1)=1$，$f''(1)=1$，$f'''(1)=1$，$f(1)=e$

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & & & & \\
0 & 1 & 1 & & & \\
0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & & \\
0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \\
1 & e & e-2 & e-2 & e-\frac{5}{2} & e-\frac{8}{3}
\end{array}
$$

$$H_4(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+(e-\frac{8}{3})x^4$$

$$R(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-0)^4(x-1)=\frac{e^{\xi}}{5!}x^4(x-1)$$

$$|R(x)|\le\frac{e}{5!}\left|x^4(x-1)\right|$$

$$\max_{0\le x\le 1}|R(x)|\le\frac{e}{5!}(\frac{4}{5})^4\times\frac{1}{5}=\frac{2.718}{120}\times 0.08192=0.00186$$

14. 在$[a,b]$上求插值多项式$H_3(x)$，使得

$H_3(a)=f(a)$,　$H_3'(a)=f'(a)$,　$H_3''(a)=f''(a)$,

$H_3''(b)=f''(b)$

解：作$H_2(x)$满足

$$H_2(a)=f(a)\quad H_2'(a)=f'(a),\quad H_2''(a)=f''(a),$$

则　$H_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$

令　$g(x)=H_3(x)-H_2(x)$,　　(*)

则　$g(a)=0$，$g'(a)=0$，$g''(a)=0$

又　$g(x)$为 3 次多项式，故

$$g(x)=A(x-a)^3$$

代入(*)得

$$H_3(x)=H_2(x)+g(x)$$

$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+A(x-a)^3 \quad (**)$$

求 2 阶导数得

$$H_3''(x)=f''(a)+bA(x-a)$$

由 $H_3''(b)=f''(b)$ 得

$$f''(a)+bA(b-a)=f''(b)$$

解得 $\quad A=\frac{1}{6}\cdot\frac{f''(b)-f''(a)}{b-a}$

因而 $\quad H_3(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$

$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{f''(b)-f''(a)}{b-a}(x-a)^3$$

16．设 $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$，在 $-1\le x\le 1$ 上取 $n=20$，按等距节点求分段线性插值函数 $I_h(x)$，计算各相邻节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值，并计算误差。

解：$h=\frac{2}{20}=0.1$，$x_i=-1+ih=-1+0.1i,\ 0\le i\le 20$

$$x_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1}),\quad 0\le i\le 19$$

$$I_h(x)=f(x_i)+\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i),\quad x_i\le x\le x_{i+1},\quad i=0,1,2,6\ ,19$$

$$I_h(x_{i+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})],\quad 0\le i\le 19$$

各相邻节点间中点处的 $I_n(x)$ 的值 $f(x)$ 的值及误差列于下表

i	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$I_h(x_{i+\frac{1}{2}})$	$f(x_{i+\frac{1}{2}})$	$\left\lvert f(x_{i+\frac{1}{2}}) - I_n(x_{i+\frac{1}{2}}) \right\rvert$
0	-0.95	0.0427602	0.0424403	0.0003199
1	-0.85	0.0529412	0.0524590	0.0004822
2	-0.75	0.0671476	0.0663900	0.0007576
3	-0.65	0.0877358	0.0864865	0.0012493
4	-0.55	0.1189655	0.1167883	0.0021772
5	-0.45	0.1689655	0.1649485	0.0040170
6	-0.35	0.2538162	0.2461538	0.0076924
7	-0.25	0.4038462	0.3902439	0.0136023
8	-0.15	0.65	0.64	0.01
9	-0.05	0.9	0.9411765 0.9411765	0.0411765
10	0.05	0.9	0.64	0.0411765
11	0.15	0.65	0.3902439	0.01
12	0.25	0.4038462	0.2461538	0.0136023
13	0.35	0.2538462	0.1649485	0.0076924
14	0.45	0.1689655	0.1167883	0.004017
15	0.55	0.1189655	0.0864865	0.0021772
16	0.65	0.0877358	0.0663900	0.0012493
17	0.75	0.0671476	0.0524590	0.0007576
18	0.85	0.0529412	0.0424403	0.0004822
19	0.95	0.0427602		0.0003199

17. 欲使线性插值具有 4 位有效数字。在区间[0,2]上列出函数$e^{\sin x}$的具有五位有效数字的等距节点的函数值表，问步长最多可取多大？

解： $x_i = ih$ ， $0 \le i \le n$ $h = \frac{2}{n}$ 。

$$f(x) = e^{\sin x}，\quad f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x，$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\sin x}\cos^2 x - e^{\sin x}\sin x \\ &= e^{\sin x}[1 - \sin x - \sin^2 x] \\ &= e^u[1 - u - u^2]，\quad u = \sin x \\ &= g(u) \qquad \text{当 } x \in [0,2] \text{ 时，} u \in [0,1] \end{aligned}$$

$$L_1(x) = f(x_i)\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\tilde{L}_1(x) = \tilde{f}(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{h} + f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{h}$$

$$\begin{aligned} f(x) - \tilde{L}_1(x) &= f(x) - L_1(x) + L_1(x) - \tilde{L}_1(x) \\ &= \frac{1}{2}f''(\xi_i)(x - x_i)(x - x_{i+1}) + [f(x_i) - \tilde{f}(x_i)]\frac{x_{i+1} - x}{h} \\ &\quad + [f(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_{i+1})]\frac{x - x_i}{h} \end{aligned}$$

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left| f(x) - \tilde{L}_1(x) \right| \le \frac{1}{8}h^2 \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left| f''(x) \right| + \frac{1}{2} \times 10^{-4} \times [\frac{x_{i+1} - x}{h} + \frac{x - x_i}{h}]$$

$$g'(u) = e^u(1 - u - u^2) + e^u(-1 - 2u) = e^u(-3u - u^2) = -u(3 + u)e^u < 0$$

$$g(0) = 1，\ g(1) = -e,$$

$$\max_{0 \le x \le 2}\left| f''(x) \right| = \max_{0 \le u \le 1}\left| g(u) \right| = e$$

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left| f(x) - \tilde{L}_1(x) \right| \le \frac{1}{8}h^2 e + \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$\frac{1}{8}h^2 e + \frac{1}{2} \times 10^{-4} \le \frac{1}{2} \times 10^{-3} \qquad \frac{1}{4}h^2 e \le 10^{-3} - 10^{-4} = 9 \times 10^{-4}$$

$$h \leq \frac{6 \times 10^{-2}}{\sqrt{e}}$$

即 只要 $h \leq \dfrac{6 \times 10^{-2}}{\sqrt{e}}$

习题四 （第 18、19、30、31、33、34、35、36 题）

18. 求 $f(x)=x^4$ 在[0,5]上的分段 3 次 Hermite 插值，并估计误差($h=1$)。

解：　$x_i=i$，　$i=0,1,2,\cdots,5$

当 $x\in(x_i,x_{i+1})$ 时

$$f(x)-H_3^{(i)}=\frac{f^{(4)}()}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2,\quad i=0,1,2,3,4.$$

$$=(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2,\quad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$H_3^{(i)}=x^4-(x-i)^2(x-i-1)^2,\quad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

19.给定下列函数值表

i	0	1	2
x_i	3	4	6
y_i	6	0	2
y_i'	1		-1

求 3 次样条插值函数。

解：　$x_0=3$，　$x_1=4$，$x_2=6$

$y_0=6$　，$y_1=0$，$y_2=2$

$y_0'=1$　　　$y_2'=-1$

$$h_0=x_1-x_0=1,\quad h_1=x_2-x_1=2,\quad u_1=\frac{1}{3},\ \lambda_1=\frac{2}{3}$$

$$f[x_0,x_1,x_1]=-7,\quad f[x_0,x_1,x_2]=\frac{7}{3},\quad f[x_1,x_2,x_2]=-1$$

$$
\begin{array}{cccc}
3 & 6 & & \\
3 & 6 & 1 & \\
4 & 0 & -6 & -7 \\
6 & 2 & 1 & \frac{7}{3} \\
6 & 2 & -1 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} -7 \\ \frac{7}{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 \\ 14 \\ -6 \end{bmatrix}
$$

解得

$$
M_0 = -\frac{86}{3} = -28.667，\quad M_1 = \frac{46}{3} = 15.333，\quad M_2 = -\frac{22}{3} = -10.667
$$

将M_0, M_1和M_2代入插值函数表达式中 得

$$
S(x) = \begin{cases} 6 + (x-3) - \dfrac{43}{3}(x-3)^2 + \dfrac{22}{3}(x-3)^3, & x \in [3,4] \\ -\dfrac{17}{3}(x-4) + \dfrac{23}{3}(x-4)^2 - \dfrac{13}{6}(x-4)^3, & x \in [4,6] \end{cases}
$$

30. 观测物体的直线运动，得出以下数据：

t/s	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
s/m	0	10	30	51	80	111

求运动方程。

解： 设 $S(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$，$\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = t^2$

$$
\bar{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.9 \\ 1.9 \\ 3.0 \\ 3.9 \\ 5.0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.81 \\ 3.61 \\ 9 \\ 15.21 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 30 \\ 51 \\ 80 \\ 111 \end{pmatrix}
$$

$(\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_0)=6$， $(\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_1)=14.7$， $(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_1)=53.63$

$(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2)=218.907$ $(\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_2)=53.63$ $(\bar{\varphi}_2,\bar{\varphi}_2)=951.032$

$(\bar{\varphi}_0,s)=282$ $(\bar{\varphi}_1,\bar{s})=1086$ $(\bar{\varphi}_2,\bar{s})=4567.2$

正规方程为

$$\begin{bmatrix} 6 & 14.7 & 53.63 \\ 14.7 & 53.63 & 218.907 \\ 53.63 & 218.907 & 951.032 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 282 \\ 1086 \\ 4567.2 \end{bmatrix}$$

$c_0=-0.6184$， $c_1=11.1607$， $c_2=2.2683$

$s(t)=-0.6184+11.160t+2.2683t^2$

均方误差

$$\left\| s-\bar{s} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{6}(s(t_i)-s_i)^2} = 19.0245$$

31. 用最小二乘法，求一个形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式，使它与下列数据拟合，并计算均方误差：

x	19	25	31	38	44
y	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解：

i	1	2	3	4	5
x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

$\varphi_0(x)=1$， $\varphi_1(x)=x^2$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{5}\varphi_0(x_i)^2=5，\quad (\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{5}\varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i^2)=5327$$

$(\varphi_1,\varphi_1)=7277699$， $(\varphi_0,y)=271.4$ $(\varphi_1,y)=369321.5$

正规方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{bmatrix}$$

列主元 Gauss 消去法得到 $a = 0.050035, b = 0.972748$

经验公式 $y = 0.050035 + 0.972748x^2$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y(x_i) - y_i)^2} = 0.12257$$

33. 设已知一组实验数据

x	2.2	2.6	3.4	4.0	1.0
y	65	61	54	50	90

试用最小二乘法确定拟合模型 $y = ax^b$ 中的参数 a,b。

解：

i	1	2	3	4	5
x_i	2.2	2.6	3.4	4.0	1.0
y_i	65	61	54	50	90

$$y = ax^b$$

$$\ln y = \ln a + b \ln x$$

令 $Y = \ln y$，$t = \ln x$，则有 $Y = c_0 + c_1 t$，其中 $c_0 = \ln a$，$c_1 = b$

实验数据转化为

i	1	2	3	4	5
$t_i = \ln x_i$	0.342	0.415	0.531	0.602	0
$Y_i = \ln y_i$	1.813	1.785	1.732	1.699	1.954

正规方程组

$$\begin{cases} 5c_0 + 1.89c_1 = 8.983 \\ 1.89c_1 + 0.933554c_1 = 3.303311 \end{cases}$$

$$c_1 = -0.421, \qquad c_0 = 1.956$$

即 $\qquad \ln a = 1.956 \qquad a = e^{1.956} = 7.071$

$$b = c_1 = -0.421$$

经验公式为

$$\therefore \quad y = 7.071e^{-0.421}$$

34. 试用最小二乘法，求解下列超定方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \\ \quad 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

解：将该方程组两边同时左乘以 A^T，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 25 \end{bmatrix}$$

解得 $\qquad x_2 = 1.42802$， $x_1 = 1.66926$

最小二乘解为 $\qquad \begin{pmatrix} 1.66926 \\ 1.42802 \end{pmatrix}$

35. 求a,b，使$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin x-(a+bx)]^2dx$为最小，并与 26 题结果作比较。

解： $f(x)=\sin x$， $p(x)=a+bx$， $\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1^2dx=\frac{\pi}{2} \quad , \qquad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx=\frac{1}{8}\pi^2,$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\frac{\pi^3}{24} \qquad (\varphi_0,f)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$(\varphi_1,f)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd(-\cos x)=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

正规方程组为

$$\begin{bmatrix}\frac{\pi}{2} & \frac{1}{8}\pi^2\\ \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$a=\frac{8}{\pi^2}(\pi-3)=0.11477,\ b=\frac{96}{\pi^3}(1-\frac{1}{4}\pi)=\frac{24}{\pi^3}(4-\pi)=0.66444$$

$$p(x)=0.11477+0.66444x$$

36. 设$M_3=Span\{1,x^2,x^4\}$，在M_3中求$f(x)=|x|$在$[-1,1]$上的最佳平方逼近多项式。

解：$M_3=Span\{1,x^2,x^4\}$ $\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x^2$，$\varphi_2(x)=x^4$，

$$p(x)=a\varphi_0(x)+b\varphi_1(x)+c\varphi_2(x)$$

$$f(x)=|x|,\ [-1,1]$$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_{-1}^{1}1^2dx=2,\ (\varphi_1,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5},\ (\varphi_2,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}x^8dx=\frac{2}{9}$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},\ (\varphi_1,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}x^6dx=\frac{2}{7},\ (\varphi_0,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}$$

$$(\varphi_0,f)=\int_{-1}^{1}|x|dx=2\int_0^1 xdx=1,$$

$$(\varphi_1, f) = \int_{-1}^{1} x^2 |x| dx = 2\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}$$

$$(\varphi_2, f) = \int_{-1}^{1} x^4 |x| dx = 2\int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{3}$$

正规方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{5}r_1]{r_2 - \frac{1}{3}r_1} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \frac{8}{45} & \frac{16}{105} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{16}{105} & \frac{32}{225} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - \frac{6}{7}r_2} \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \frac{8}{45} & \frac{16}{105} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{128}{15^2 \times 7^2} & -\frac{1}{105} \end{bmatrix}$$

$$c = -\frac{105}{128} = -0.8203$$

$$b = \frac{45 \times 7}{24 \times 8} = \frac{15 \times 7}{8 \times 8} = \frac{105}{64} = 1.6406$$

$$a = \frac{85 \times 3 - 105 \times 2}{12 \times 32} = \frac{45}{12 \times 32} = \frac{15}{128} = 0.1172$$

$$(a, b, c) = (0.1172 \quad 1.6406 \quad -0.8203)$$

所求最佳平方逼近多项式为

$$p(x) = 0.1172 + 1.6406x^2 - 0.8203x^4$$

习题五（第 1、2、3、5、7、9、10、12、21 题）

1．导出如下 3 个求积公式，并给出截断误差的表达式。

(1) 左矩形公式：$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)(b-a)$

(2) 右矩形公式：$\int_a^b f(x)dx \approx f(b)(b-a)$

(3) 中矩形公式：$\int_a^b f(x)dx \approx f(\frac{a+b}{2})(b-a)$

解：(1) $f(x) \approx f(a)$， $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx = f(a)(b-a)$

$$\int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(a)dx = \int_a^b (f(x)-f(a))dx$$

$$= \int_a^b f'(\xi)(x-a)dx = f'(\eta)\int_a^b (x-a)dx = \frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\eta),\quad \xi,\eta \in (a,b)$$

(2) $f(x) \approx f(b)$，$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(b)dx = f(a)(b-a)$

$$\int_a^b f(x)dx - f(b)(b-a) \approx \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(b)dx = \int_a^b [f(x)-f(b)]dx$$

$$= \int_a^b f'(\xi)(x-b)dx = f'(\eta)\int_a^b (x-b)dx = -\frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\eta)，\ \xi,\eta \in (a,b)$$

(3) 法 1 $f(x) \approx f(\frac{a+b}{2})$ ，

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2})(b-a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - f(\frac{a+b}{2}) \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2 \right] dx$$

$$= f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx + \frac{1}{2} f''(\eta)\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 dx$$

$$= \frac{1}{24} f''(\eta)(b-a)^3$$

法 2　可以验证所给公式具有 1 次代数精度。作一次多项式 $H(x)$

满足　$H(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})$，$H'(\frac{a+b}{2})=f'(\frac{a+b}{2})$，则有

$$H(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

$$f(x)-H(x)=\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2,\quad \xi\in(a,b)$$

$$\int_a^b H(x)dx=H(\frac{a+b}{2})(b-a)=f(\frac{a+b}{2})(b-a)$$

于是

$$\int_a^b f(x)dx-f(\frac{a+b}{2})(b-a)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b H(x)dx$$

$$=\int_a^b[f(x)-H(x)]dx=\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

$$=\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx=\frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3$$

2．考察下列求积公式具有几次代数精度：

（1）$\int_0^1 f(x)dx\approx f(0)+\frac{1}{2}f'(1)$；

（2）$\int_{-1}^1 f(x)dx\approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$。

解：（1）当 $f(x)=1$ 时，左=1，右=1+0=1，左=右；

当 $f(x)=x$ 时，左$=\frac{1}{2}$，右$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，左=右；

当 $f(x)=x^2$ 时，左=$\frac{1}{3}$，右=1，左$\neq$右，代数精度为 1。

（2）当 $f(x)=1$ 时，左=2，右=2，左=右；

当 $f(x)=x$ 时，左=0，右=$(-\frac{1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{\sqrt{3}}=0$，左=右；

当 $f(x)=x^2$ 时，左$=\dfrac{2}{3}$，右$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$，左=右；

当 $f(x)=x^3$ 时，左$=0$，右$=(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})^3+(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^3=0$，左=右；

当 $f(x)=x^4$ 时，左$=\dfrac{2}{5}$，右$=(\dfrac{1}{3})^2+(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{2}{9}$，左$\neq$右。代数精度为 3。

3．确定下列公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指出其代数精度的次数。

（1） $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\dfrac{1}{3}[f(-1)+2f(\alpha)+3f(\beta)]$；

（2） $\int_{-b}^{b}f(x)dx\approx\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+a(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$；

（3） $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx a_0f(-1)+a_1f(0)+a_2f(1)$。

解：(1) 当 $f(x)=1$ 时，左$=2$，右$=\dfrac{1}{3}(1+2+3)=2$，左=右；

当 $f(x)=x$ 时，左$=0$，右$=\dfrac{1}{3}(-1+2\alpha+3\beta)$，

当 $f(x)=x^2$ 时，左$=\dfrac{2}{3}$，右$=\dfrac{1}{3}(1+2\alpha^2+3\beta^2)$；

要使所给求积公式至少具有 2 次代数精度当且仅当 α 、 β 满足

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}(-1+2\alpha+3\beta)=0\\[2ex]\dfrac{1}{3}(1+2\alpha^2+3\beta^2)=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta=1\\[2ex]2\alpha^2+3\beta^2=1\end{cases}$$

$$\beta = \frac{1}{3}(1-2\alpha)$$

$$2\alpha^2 + \frac{1}{3}(1-2\alpha)^2 = 1$$

$$6\alpha^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 3$$

$$10\alpha^2 - 4\alpha - 2 = 0$$

$$5\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \frac{\sqrt{6}}{5} = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5} \quad , \qquad \beta_{1,2} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{2}{5}(1 \pm \sqrt{6})\right] = \frac{1}{5} \mp \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

求积公式（1）：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left[f(-1) + 2f(\frac{1+\sqrt{6}}{5}) + 3f(\frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{15}) \right] \qquad \text{（A）}$$

求积公式（2）：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left[f(-1) + 2f(\frac{1-\sqrt{6}}{5}) + 3f(\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{15}) \right] \qquad \text{（B）}$$

当 $f(x) = x^3$ 时，（A）的左端为 1。

（A） 的右端 $= \frac{1}{3}\left[-1 + 2\times(\frac{1+\sqrt{6}}{5})^3 + 3(\frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{15})^3 \right] \neq 1$

（B） 的右端 $= \frac{1}{3}\left[-1 + 2\times(\frac{1-\sqrt{6}}{5})^3 + 3(\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{15})^3 \right] \neq 1$

∴ （A）和（B）的代数精度均为 2。

（2） $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b) \right] + \alpha(b-a)^2[f'(a) - f'(b)]$

当 $f(x) = 1$ 时，左 $= b-a$，右 $= \frac{b-a}{2}(1+1) = b-a$

当 $f(x) = x$ 时，左 $= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$，右 $= \frac{b-a}{2}[a+b] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

当 $f(x) = x^2$ 时，左 $= \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$，

$$右=\frac{b-a}{2}(a^2+b^2)+\alpha(b-a)(\alpha a-2b)$$

$$=(b-a)[\frac{1}{2}(b^2+a^2)-2\alpha(b-a)^2]$$

要使求积公式具有 2 次代数精度，当且仅当

$$(b-a)[\frac{1}{2}(b^2+a^2)-2\alpha(b-a)^2]=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$\frac{1}{2}(b^2+a^2)-2\alpha(b-a)^2=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$$

$$2\alpha(b-a)^2=\frac{1}{6}(b^2-2ab+a^2)\quad \alpha=\frac{1}{12}$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(x)+f(b)]+\frac{1}{12}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$$

当 $f(x)=x^3$ 时，左$=\int_a^b x^3dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$,

$$右=\frac{b-a}{2}[a^3+b^3]+\frac{1}{12}(b-a)^2[3a^2-3b^2]$$

$$=\frac{(b^2-a^2)}{4}[2a^2-2ab+2b^2-(b-a)^2]$$

$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)(a^2-ab+b^2)-\frac{1}{4}(b^2-a^2)(b-a)^2$$

$$=\frac{1}{4}(b^2-a^2)[2a^2-2ab+2b^2-(b^2-2ab+a^2)]$$

$$=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

当 $f(x)=x^4$ 时，左$=\int_a^b x^4dx=\frac{1}{5}(b^5-a^5)$，$b^5$ 的系数$=\frac{1}{5}$。

$$右=\frac{b-a}{2}[a^4+b^4]+\frac{1}{12}(b-a)^2(4a^3-4b^3)\text{，}$$

其中b^5的系数$=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\times(-4)=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{5}$。因而　代数精度为 3。

5．设函数 $f(x)$ 由下表给出：

x	1.6	1.8	2.0	2..2	2.4	2.6
$f(x)$	4.953	6.050	7.389	9.025	11.023	13.464

x	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
$f(x)$	16.445	20.086	24.533	29.964	36.598	44.701

解：

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
$f(x)$	6.050	7.389	9.025	11.023	13.464	16.445	20.086	24.533	29.964

(1) 复化梯形公式　　$h=0.2$，　　$x_i=1.8+ih$，$i=0,1,2,\cdots,8$

$$T_8=h[\frac{1}{2}(f(x_0)+f(x_8))+\sum_{i=1}^{7}f(x_i)]$$

$$=0.2[\frac{1}{2}\times(6.050+29.964)+7.389+9.025+11.023$$

$$+13.464+16.445+20.086+24.533]$$

$$=23.9149$$

（2）$h=0.4$

$$S_4=\frac{0.4}{6}[f(1.8)+4f(2.0)+f(2.2)]+\frac{0.4}{6}[f(2.2)+4f(2.4)+f(2.6)]$$

$$+\frac{0.4}{6}[f(2.6)+4f(2.8)+f(3.0)]+\frac{0.4}{6}[f(3.0)+4f(3.2)+f(3.4)]$$

$$=\frac{0.4}{6}\{f(1.8)+f(3.4)+2\times[f(2.2)+f(2.6)+f(3.0)]$$

$$+4\times[f(2.0)+f(2.4)+f(2.8)+f(3.2)]\}$$

$$=\frac{0.4}{6}\{6.050+29.964+2\times[9.025+13.464+20.086]$$

$$+4\times[7.389+11.023+16.445+24.533]\}$$

$$=23.9149$$

（3） Romberg 算法

$$\begin{array}{llll} T_1 & S_1 & C_1 & R_1 \\ T_2 & S_2 & C_2 & \\ T_4 & S_4 & & \\ T_8 & & & \end{array}$$

$$T_1=\frac{3.4-1.8}{2}[f(1.8)+f(3.4)]=28.8112$$

$$T_2=\frac{1}{2}[T_1+1.6\times f(2.6)]=25.1768$$

$$T_4=\frac{1}{2}[T_2+0.8\times(f(2.2)+f(3.0))]=24.2328$$

$$T_8=\frac{1}{2}[T_4+0.4\times(f(2.0)+f(2.4)+f(2.8)+f(3.2))]$$

$$=23.9944$$

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=23.9653$$

$$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=23.9181$$

$$S_3=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4=23.9149$$

$$C_1=\frac{16}{15}S_2-\frac{1}{15}S_1=23.91495$$

$$C_2=\frac{16}{15}S_4-\frac{1}{15}S_2=23.91469$$

$$R_1=\frac{64}{63}C_2-\frac{1}{63}C_1=23.91469$$

7．试用复化梯开公式计算曲线 $f(x)=\tan x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上这一段的弧长，取

$\varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$。

解： $f(x) = \tan x$， $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

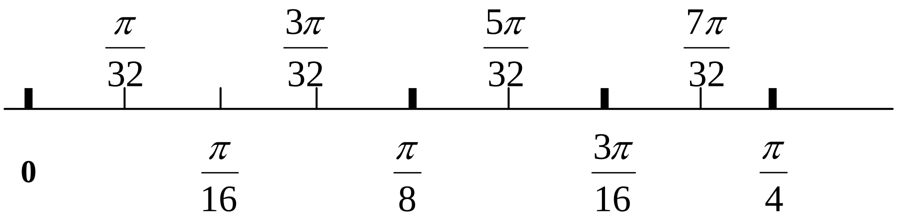
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}}\,dx$$

$$g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} \qquad g(0) = \sqrt{2} \qquad g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{5}$$

$$T_1 = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{2}[g(0) + g(\frac{\pi}{4})] = 1.43346$$

$$g(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{8}}} = \sqrt{2.37255583} = 1.54032$$

$$T_2 = \frac{1}{2}[T_1 + \frac{\pi}{4} \times g(\frac{\pi}{8})] = \frac{1}{2}[1.43346 + \frac{\pi}{4} \times 1.54032] = 1.32161$$



$$g(\frac{\pi}{16}) = 1.44246 \qquad g(\frac{3\pi}{16}) = 1.75848$$

$$T_4 = \frac{1}{2}[T_2 + \frac{\pi}{8}(g(\frac{\pi}{16}) + g(\frac{3\pi}{16}))]$$

$$= \frac{1}{2}[1.32161 + \frac{\pi}{8}(1.44246 + 1.75848)] = 1.28931$$

$$\frac{1}{3}\left|T_4 - T_2\right| = 0.01077$$

$$T_8 = \frac{1}{2}\left[T_4 + \frac{T}{16}\left(g(\frac{\pi}{32}) + g(\frac{3\pi}{32}) + g(\frac{5\pi}{32}) + g(\frac{7\pi}{32})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1.28931 + \frac{\pi}{16}(1.42109 + 1.48071 + 1.62881 + 1.94953)\right]$$

$$= 1.28084$$

$$\frac{1}{3}\left|T_8 - T_4\right| = 0.00282$$

$$T_{16} = \frac{1}{2}\left[T_8 + \frac{\pi}{32}\left(g(\frac{\pi}{64}) + g(\frac{3\pi}{64}) + g(\frac{5\pi}{64}) + g(\frac{7\pi}{64})\right.\right.$$

$$\left.\left. + g(\frac{9\pi}{64}) + g(\frac{11\pi}{64}) + g(\frac{13\pi}{64}) + g(\frac{15\pi}{64})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1.28084 + \frac{\pi}{32}(1.41592 + 1.42986 + 1.45925 + 1.50746$$

$$+ 1.58033 + 1.68747 + 1.84462 + 2.07792)]$$

$$= 1.27869$$

$$\frac{1}{3}\left|T_{16} - T_8\right| = 0.72 \times 10^{-3}$$

$$T_{32} = \frac{1}{2}\left[T_{16} + \frac{\pi}{64}\left(g(\frac{\pi}{128}) + g(\frac{3\pi}{128}) + g(\frac{5\pi}{128}) + g(\frac{7\pi}{128})\right.\right.$$

$$+ g(\frac{9\pi}{128}) + g(\frac{11\pi}{128}) + g(\frac{13\pi}{128}) + g(\frac{15\pi}{128})$$

$$+ g(\frac{17\pi}{128}) + g(\frac{19\pi}{128}) + g(\frac{21\pi}{128}) + g(\frac{23\pi}{128})$$

$$\left.\left. + g(\frac{25\pi}{128}) + g(\frac{27\pi}{128}) + g(\frac{29\pi}{128}) + g(\frac{31\pi}{128})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1.27869 + \frac{\pi}{64}(1.41464 + 1.41807 + 1.42501 + 1.43566$$

$$+ 1.45031 + 1.46936 + 1.49338 + 1.52307$$
$$+ 1.55935 + 1.60341 + 1.65675 + 1.72128$$

$$+ 1.79946 + 1.89446 + 2.01043 + 2.15281)]$$

$$=\frac{1}{2}(1.27869+1.27762)=1.27816$$

$$\frac{1}{3}\left|T_{32}-T_{16}\right|=0.177\times10^{-3}<\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

所求弧长为 $T_{32}=1.278$

9．利用积分 $\int_2^8\frac{1}{x}dx=\ln4$ 计算 $\ln4$ 时，若采用复化梯形公式 ，问应取多少节点才能使其误差绝对值不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$。

解： $a=2$， $b=8$， $f(x)=\frac{1}{2}$， $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$， $f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$$\int_a^b f(x)dx-T_n(f)=-\frac{b-a}{12}f''(\xi)h^2,\quad \xi\in(2,8)$$

要使

$$\frac{8-2}{12}h^2\left|f''(\xi)\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

只要

$$\frac{1}{2}h^2\cdot\frac{2}{2^3}\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

$$h^2\le2^2\times10^{-5}$$

$$\left(\frac{6}{n}\right)^2\le2^2\times10^{-5}$$

$$\frac{6}{n}\le2\times10^{-3}\sqrt{10}$$

$$n\ge{3\times10^3}\Big/{\sqrt{10}}=300\sqrt{10}=948.68$$

取 $n=949$

答：取 950 个等距节点，则有 $\left|\int_{-1}^1 f(x)dx-T_n\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$

方法 2 $\quad I(f)-T_n(f)\approx\frac{1}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right]h^2=\frac{1}{12}\left[\frac{1}{8^2}-\frac{1}{2^2}\right]h^2$

$$\left|I(f)-T_n(f)\right|\approx\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{64}\right)h^2\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

$$\frac{1}{12}\times\frac{15}{64}h^2\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

$$h^2\le4\times64\times10^{-6}$$

$$h\le2\times8\times10^{-3}$$

$$\frac{6}{n}\le16\times10^{-3}\qquad n\ge\frac{3}{8}\times10^3=3\times125=375$$

10．用 Romberg 方法求 $\int_2^8\frac{1}{x}dx$，要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$。从所取节点个数与上题结果比较中体会这 2 种方法的优缺点。

解： 将区间[2，8]作 16 等分，$\frac{8-2}{16}=\frac{3}{8}$

$f(x)=1/x$

x	2，	$2+\frac{3}{8}=\frac{19}{8}$，	$\frac{22}{8}$，	$\frac{25}{8}$，	$\frac{28}{8}$，	$\frac{31}{8}$，	$\frac{34}{8}$，	$\frac{37}{8}$，
$f(x)$	$\frac{1}{2}$，	$\frac{8}{19}$	$\frac{8}{22}$	$\frac{8}{25}$，	$\frac{8}{28}$，	$\frac{8}{31}$，	$\frac{8}{34}$，	$\frac{8}{37}$

x	$\frac{40}{8}$，	$\frac{43}{8}$，	$\frac{46}{8}$，	$\frac{49}{8}$，	$\frac{52}{8}$，	$\frac{55}{8}$，	$\frac{58}{8}$，	$\frac{61}{8}$，	$\frac{64}{8}$
$f(x)$	$\frac{8}{40}$，	$\frac{8}{43}$，	$\frac{8}{46}$，	$\frac{8}{49}$，	$\frac{8}{52}$，	$\frac{8}{55}$，	$\frac{8}{58}$，	$\frac{8}{61}$，	$\frac{8}{64}$

$$T_1=\frac{8-2}{2}\left[f(2)+f(8)\right]=\frac{6}{2}\times\left[\frac{1}{2}+\frac{8}{64}\right]=1.875$$

$$T_2=\frac{1}{2}\left[T_1+6\times f(5)\right]=\frac{1}{2}\left[1.875+6\times\frac{8}{40}\right]=1.5375$$

$$T_4=\frac{1}{2}\left[T_2+3\times\left(f(\frac{28}{8})+f(\frac{52}{8})\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[1.5375+3\times\left(\frac{8}{28}+\frac{8}{52}\right)\right]=1.428090659$$

$$T_8=\frac{1}{2}\left[T_4+1.5\times\left(f(\frac{22}{8})+f(\frac{34}{8})+f(\frac{46}{8})+f(\frac{58}{8})\right)\right]=1.397126249$$

$$T_{16}=\frac{1}{3}\left[T_8+0.75\times\left(f(\frac{19}{8})+f(\frac{25}{8})+f(\frac{31}{8})+f(\frac{37}{8})+f(\frac{43}{8})\right.\right.$$

$$\left.\left.+f(\frac{49}{8})+f(\frac{55}{8})+f(\frac{61}{8})\right)\right]$$

$$=1.38903085$$

$T_1=1.875$ $S_1=1.425$ $C_1=1.389395604$ $R_1=1.38643748$

$T_2=1.5375$ $S_2=1.391620879$ $C_2=1.386483701$ $R_2=1.38629799$

$T_4=1.428090659$ $S_4=1.386804775$ $C_4=1.386300892$

$T_8=1.397126246$ $S_8=1.386332385$

$T_{16}=1.38903085$

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=(4T_2-T_1)/3 \qquad C_1=(16S_2-S_1)/15 \qquad R_1=(64C_2-C_1)/63$$

$$\left|\frac{1}{255}(R_2-R_1)\right|=\left|-5.47010549\times10^{-7}\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

$I\approx1.38630$

实际上

$$\ln 4=1.386294361\approx1.38630$$

12．用 3 点 Gauss-Legendre 公式求 $I=\int_0^1 e^{-x}dx$。

解： $\int_0^1 e^{-x}dx$ $\qquad x=\frac{1}{2}(1+t)$

三点 Gauss 公式

$$\int_{-1}^1 g(t)dt\approx\frac{5}{9}g(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}g(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\times\left[\frac{5}{9}f\left(\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)+\frac{8}{9}f(\frac{1}{2})+\frac{5}{9}f\left(\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)\right]$$

$$\int_0^1 e^{-x}dx \approx \frac{1}{2}\times\left[\frac{5}{9}e^{-\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}}+\frac{8}{9}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{5}{9}e^{-\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{18}e^{-\frac{1}{2}}\times\left[5e^{\frac{\sqrt{0.6}}{2}}+8+5e^{-\frac{\sqrt{0.6}}{2}}\right]$$

$$=0.632120255$$

21．根据下列 $f(x)=\tan x$ 的数值表：

x	1.20	1.24	1.28	1.32	1.36
$f(x)$	2.572 15	2.911 93	3.341 35	3.903 35	4.673 44

解： $f(x)=\tan x$ $\qquad f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

$$f''(x)=2\tan x\cdot(\tan x)'=2\tan x\cdot(1+\tan^2 x)=2\tan x+2\tan^3 x$$

$$D(x_0,h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h},$$

$$f'(x_0)-D(x_0,h)=-\frac{1}{6}h^2 f'''(\xi),\quad \xi\in(x_0-h,x_0+h)$$

$$D(1.28,0.08)=\frac{f(1.36)-f(1.20)}{1.36-1.20}=\frac{4.67344-2.57215}{0.16}=13.1330625$$

$$D(1.28,0.04)=\frac{f(1.32)-f(1.24)}{1.32-1.24}=\frac{3.90335-2.91193}{0.08}=12.39275$$

$$f'''(x)=(2+6\tan^2 x)(\tan x)'=(2+6\tan^2 x)(1+\tan^2 x)$$

$$f'(1.28)=1+\tan^2 1.28=12.16461982$$

$$\left|f'(1.28)-D(1.28,0.08)\right|=\frac{1}{6}\times 0.08^2\times\left|f'''(\xi)\right|\le\frac{1}{6}\times 0.08^2\times\left|f'''(1.36)\right|$$

$$=\frac{1}{6}\times 0.08^2\times(2+6\times 4.67344^2)\times(1+4.67344^2)$$

$$=3.241509202$$

实际误差 $\left|f'(1.28)-D(1.28,0.08)\right|=0.96844268$

$$\left|f'(1.28)-D(1.28,0.04)\right|\le\frac{1}{6}\times 0.04^2\times(2+6\times 3.90335^2)\times(1+3.90335^2)$$

$$=0.4044611$$

实际误差 $\left|f'(1.28)-D(1.28,0.04)\right|=0.22813018$

$$\tilde{D}(1.28,0.04)=\frac{4}{3}D(1.28,0.04)-\frac{1}{3}D(1.28,0.08)=12.14597917$$

$h=0.04$

$$=\frac{4}{3}\frac{f(x_0+\tilde{h})-f(x_0-\tilde{h})}{2h}-\frac{1}{3}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{4h}$$

$$=\frac{1}{12h}\left[f(x_0+2h)+8f(x_0+h)-8f(x_0-h)+f(x_0-2h)\right]$$

$$\left|f'(1.28)-\tilde{D}(1.28,0.04)\right|=0.018640653$$

$$f'(1.28)-\tilde{D}(1.28,0.04)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(1.28-1.20)\times(1.28-1.24)$$

$$\times(1.28-1.32)(1.28-1.36)$$

$$f^{(5)}(x)=8(15\tan^4 x+15\tan^2 x+2)(\tan^2 x+1)$$

$$\left|f'(1.28)-\tilde{D}(1.28,0.04)\right|\le\frac{1}{5!}\times 8\times(15\times 4.67344^4+15\times 4.67344^2+2)$$

$$\times(4.67344^2+1)\times 0.08^2\times 0.04^2$$

$$=0.116713518$$

习题六　（第 1、3、5、6、7、9、10 题）

1．求解初值问题

$$\begin{cases} y' = x + y & (0 \le x \le 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.2$，分别用 Euler 公式与改进 Euler 公式计算，并与准确解 $y = x - 1 + 2e^{x}$ 相比较。

解：1) 应用 Euler 具体形式为 $\begin{cases} y_{i+1} = x_i + h(x_i + y_i) \\ y_0 = 1 \end{cases}$，其中 $x_i = 0.2i$

计算结果列于下表

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
1	**0.2**	**1.200000**	**1.242806**	**0.042806**
2	**0.4**	**1.480000**	**1.583649**	**0.103649**
3	**0.6**	**1.856000**	**2.044238**	**0.188238**
4	**0.8**	**2.347200**	**2.651082**	**0.303882**
5	**1.0**	**2.976640**	**3.436564**	**0.459924**

2) 用改进的 Euler 公式进行计算，具体形式如下：

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{i+1}^{(D)} = y_i + h(x_i + y_i) \\ y_{i+1}^{(C)} = y_i + h(x_{i+1} + y_{i+1}^{(D)}) \\ y_{i+1} = \dfrac{1}{2}(y_{i+1}^{(D)} + y_{i+1}^{(c)}) \qquad i = 0,1,2,3,4 \end{cases}$$

计算结果列表如下

i	x_i	y_i	$y_{i+1}^{(D)}$	$y_{i+1}^{(c)}$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	**0.0**	**1.000000**	**1.200000**	**1.280000**	**0.000000**
1	**0.2**	**1.240000**	**1.528000**	**1.625600**	**0.002860**
2	**0.4**	**1.576800**	**1.972160**	**2.091232**	**0.006849**
3	**0.6**	**2.031696**	**2.558635**	**2.703303**	**0.012542**
4	**0.8**	**2.630669**	**3.316803**	**3.494030**	**0.020413**
5	**1.0**	**3.405417**			**0.031147**

3. 对初值问题$\begin{cases} y' = -y & (x>0) \\ y(0)=1 \end{cases}$，证明用梯形公式所求得的近似值为

$$y(ih) \approx y_i = (\frac{2-h}{2+h})^i \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

并证明当$h \to 0$时，它收敛于准确解$y = e^{-x_i}$，其中$x_i = ih$为固定点。

解：1) 对以上初值问题用梯形公式得

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[(-y_i)+(-y_{i+1})], \qquad i=0,1,2,\cdots \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

其中$x_i = ih$ 由上式递推得

$$y_i = (\frac{2-h}{2+h})^i \ , \ i=0,1,2,\cdots$$

2) $$y_i = \left(\frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}}\right)^i = \frac{(1-\frac{h}{2})^{-\frac{2}{h}(-\frac{x_i}{2})}}{(1+\frac{h}{2})^{\frac{2}{h}\bullet\frac{x_i}{2}}}$$

$$\lim_{h\to 0} y_i = \frac{\left[\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{h}{2})^{-\frac{2}{h}}\right]^{(-\frac{x_i}{2})}}{\left[\lim\limits_{h\to 0}(1+\frac{h}{2})^{\frac{2}{h}}\right]^{\frac{x_i}{2}}} = \frac{e^{-\frac{x_i}{2}}}{e^{\frac{x_i}{2}}} = e^{-x_i}$$

5．证明

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, \ \ y_i + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_i + h, \ \ y_i - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

是 1 个 3 阶公式。

证明 $$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \dfrac{h}{2}\ ,\ \ y_i + \dfrac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_i + h\ ,\ \ y_i - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

是一个 3 阶公式

解局部截断误差为

$$\begin{cases} R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - \dfrac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_i, y(x_i)) \\ K_2 = f(x_i + \dfrac{h}{2}\ ,\ \ y(x_i) + \dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_i + h\ ,\ \ y(x_i) - hK_1 + 2hK_2) \end{cases}$$

由微分方程有

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}$$

$$y'''(x) = \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x \partial y} y'(x) + y'(x)\left[\frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x \partial y}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial y^2} y'(x)\right] + y''(x)\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x^2} + 2y'(x)\frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial x \partial y}$$

$$+ y'(x)^2 \frac{\partial^2 f(x, y(x))}{\partial y^2} + y''(x)\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}$$

$K_1 = y'(x_i)$

$$K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}\ ,\ \ y(x_i) + \frac{h}{2}y'(x_i))$$

$$= f(x_i, y(x_i)) + \frac{h}{2}\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} + \frac{h}{2}y'(x_i)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y}$$

$$+\frac{1}{2}\left[(\frac{h}{2})^2\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x^2} + 2\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}y'(x_i)\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{h}{2}y'(x_i)^2\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2}\right] + O(h^3)$$

$$= y'(x_i) + \frac{h}{2}y''(x_i) + \frac{h^2}{8}\left[y'''(x_i) - y''(x_i)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y}\right] + O(h^3)$$

$$K_3 = f\left(x_i + h\ ,\ \ y(x_i) + hy'(x_i) + h\partial y''(x_i) + O(h^3)\right)$$

$$= f(x_i, y(x_i)) + \left[h\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} + (hy'(x_i) + h^2 y''(x_i))\frac{\partial f(x_i, y(x_i)}{\partial y}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x^2} + 2\cdot h\cdot hy'(x_i)\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+h^2 y'(x_i)^2\frac{\partial^2 f(x_i, y(x_i))}{\partial y^2}\right] + O(h^3)$$

$$= y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{1}{2}h^2\left[y'''(x_i) + y''(x_i)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y}\right] + O(h^3)$$

$$R_{i+1} = hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4)$$

$$-\frac{h}{6}\left[y'(x_i) + 4y'(x_i) + 2hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}\left(y'''(x_i) - y''(x_i)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left.+ y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}\left(y'''(x_i) - y''(x_i)\frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y}\right) + O(h^3)\right]$$

$$= O(h^4)$$

$\therefore$所给公式是一个 3 阶公式

6．导出中点公式（或称 Euler 两步公式）

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

并给出局部截断误差。

解： 1^o 法 1 将后退 Eluer 公式

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_i, y_i)$$

和 Eluer 公式

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

相加得到

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

2^o 法 2 得

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{1}{6}h^2 y'''(\xi_i)\text{，} \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

代入等式 $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$

得到 $$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} = f(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{6}h^2 y'''(\xi_i)$$

变形得到 $$y(x_{i+1}) = y(x_{i-1}) + 2hf(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{3}h^3 y'''(\xi_i)$$

忽略小量项 $\frac{1}{3}h^3 y'''(\xi_i)$，并用 y_i 代替 $y(x_i)$，得到中点公式

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

3^o 局部截断误差

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) - 2hf(x_i, y(x_i)) \\ &= 2hy'(x_i) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x_i + \theta h) - 2hy'(x_i) \\ &= \frac{1}{6}h^3 f'''(x_i + \theta h) \end{aligned}$$

7．证明解 $y' = f(x, y)$ 的公式：

$$y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i-1}) + \frac{h}{4}[4f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i) + 3f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

是二阶的，并求出其局部截断误差。

解：$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - \frac{1}{2}[y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h}{4}[4f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$

$$- f(x_i, y(x_i)) + 3f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]$$

$$= y(x_{i+1}) - \frac{1}{2}y(x_i) - \frac{1}{2}y(x_{i-1}) - hy'(x_{i+1}) + \frac{h}{4}y'(x_i) - \frac{3}{4}hy'(x_{i-1})$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4) - \frac{1}{2}y(x_i)$$

$$- \frac{1}{2}[y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4)]$$

$$- h[y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y'''(x_i) + O(h^3)] + \frac{h}{4}y'(x_i)$$

$$- \frac{3}{4}h[y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + O(h^3)]$$

$$= -\frac{5}{6}h^3 y'''(x_i) + O(h^4)$$

9．直接推导出 2 步 Adams 显式公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

和局部截断误差

$$R_{i+1} = \frac{5}{12}h^3 y^{(3)}(\xi_i), \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

解：$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$

以 x_i 和 x_{i-1} 为节点作 $f(x, y(x))$ 的一次插值多项式

$$L_1(x) = f(x_i, y(x_i))\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$$

则有

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_1(x)dx$$

$$= y(x_i) + f(x_i, y(x_i)) \cdot \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i-1})^2 dx$$

$$+ f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) \cdot \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_i - x)dx$$

$$= y(x_i) + \frac{3}{2}hf(x_i, y(x_i)) - \frac{1}{2}hf(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

于是我们得到如下二步 Adams 显式格式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{3}{2}hf(x_i, y_i) - \frac{1}{2}hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$= y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

局部截断误差

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[3f(x_i, y(x_i)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]$$

$$= y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}[3y'(x_i) - y'(x_{i-1})]$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4)$$

$$- y(x_i) - \frac{3}{2}hy'(x_i) + \frac{h}{2}\left[y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + O(h^3)\right]$$

$$= \frac{5}{12}h^3 y'''(x_i) + O(h^4)$$

10．导出具有下列形式的 3 阶方法：

$$y_{i+1} = a_0 y_i + a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} +$$

$$h[b_0 f(x_i, y_i) + b_1 f(x_{i-1}, y_{i-1}) + b_2 f(x_{i-2}, y_{i-2})]$$

的系数所满足的方程组。

解：

$$y_{i+1} = a_0 y_i + a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + h[b_0 f(x_i, y_i)$$

$$+ b_1 f(x_{i-1}, y_{i-1}) + b_2 f(x_{i-2}, y_{i-2})]$$

$$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - a_0 y(x_i) - a_1 y(x_{i-1}) - a_2 y(x_{i-2})$$

$$- h[b_0 y'(x_i) + b_1 y'(x_{i-1}) + b_2 y'(x_{i-2})]$$

$$= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4)$$

$$- a_0 y(x_i)$$

$$- a_1[y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + O(h^4)]$$

$$- a_2[y(x_i) - 2hy'(x_i) + 2h^2 y''(x_i) - \frac{4}{3}h^3 y'''(x_i) + O(h^4)]$$

$$- b_0 hy'(x_i)$$

$$- b_1 h[y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2}y'''(x_i) + O(h^3)]$$

$$- b_2 h[y'(x_i) - 2hy''(x_i) + 2h^2 y'''(x_i) + O(h^3)]$$

$$= (1 - a_0 - a_1 - a_2)y(x_i) + (1 + a_1 + 2a_2 - b_0 - b_1 - b_2)hy'(x_i)$$

$$+ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_1 - 2a_2 + b_1 + 2b_2)h^2 y''(x_i)$$

$$+ (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}a_1 + \frac{4}{3}a_2 - \frac{b_1}{2} - 2b_2)h^3 y'''(x_i) + O(h^4)$$

所给方程为 3 阶方法充要条件为

$$\begin{cases} 1 - a_0 - a_1 - a_2 = 0 \\ 1 + a_1 + 2a_2 - b_0 - b_1 - b_2 = 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_1 - 2a_2 + b_1 + 2b_2 = 0 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6}a_1 + \frac{4}{3}a_2 - \frac{b_1}{2} - 2b_2 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 + 2a_2 - b_0 - b_1 - b_2 = -1 \\ a_1 + 4a_2 - 2b_1 - 4b_2 = 1 \\ a_1 + 8a_2 - 3b_1 - 12b_2 = -1 \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 + a_2 = 1$$

$$-a_1 - 2a_2 + b_0 + b_1 + b_2 = 1$$

$$a_1 + 4a_2 - 2b_1 - 4b_2 = 1$$

$$-a_1 - 8a_2 + 3b_1 + 12b_2 = 1$$