第四章 多项式插值与函数最佳逼近

1) Lagrange插值多项式及余项表示

2) 差商和Newton插值多项式

3) Hermite插值多项式

4) 分段低次插值

5) 三次样条插值

6) 最佳一致逼近

7) 最佳平方逼近

1) 函数关系$y=f(x)$是一个函数表: $y_i=f(x_i)\ (i=0,1,2\cdots,n)$;

2) 函数解析表达式$y=f(x)$知道, 但很复杂.

用一个简单的函数(一般是多项式)$P(x)$近似函数$f(x)$.

定义 1 *设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义, 且已知在点$a\leq x_0<x_1<\cdots<x_n\leq b$上的值$y_0,y_1,\cdots,y_n$, 若存在一个简单函数$P(x)$, 使*

$$P(x_i)=y_i\quad(i=0,1,2\cdots,n)\tag{1}$$

成立,则称$P(x)$为$f(x)$的插值函数, 点$x_0,x_1,\cdots,x_n$称为插值节点, $[a,b]$称为插值区间, 求$P(x)$的方法称为插值法. 若$P(x)$ 是次数不超过n的多项式, 即

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\tag{2}$$

则称$P(x)$为插值多项式.

在几何上, 插值法就是求曲线$y=P(x)$, 使其通过给定的$n+1$个点(x_i,y_i), $i=0,1,\cdots,n$.

1 拉格朗日(Lagrange)插值

1.1 基本插值多项式

问题 求n次多项式$l_k(x)$, 使满足

$$l_k(x_0) = 0,\ l_k(x_1) = 0,\ \cdots,\ l_k(x_{k-1}) = 0,\ l_k(x_k) = 1,$$
$$l_k(x_{k+1}) = 0, \cdots,\ l_k(x_n) = 0.$$

即

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k). \end{cases} \tag{3}$$

由条件(3)知道x_0, x_1, $\cdots$, x_{k-1}, x_{k+1}, $\cdots$, x_n 是n 次多项式$l_k(x)$的零点, 所以$l_k(x)$ 有n 个因子:

$$x - x_0,\ x - x_1,\ \cdots,\ x - x_{k-1},\ x - x_{k+1}, \cdots,\ x - x_n.$$

所以有

$$\begin{aligned} l_k(x) &= A_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n) \\ &= A_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i) \end{aligned} \tag{4}$$

其中A_k为待定常数. 由$l_k(x_k)=1$, 即

$$A_k\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)=1$$

得到

$$A_k=\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}\quad\Rightarrow$$

$$l_k(x)=\frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x-x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}. \tag{5}$$

$l_k(x)$称为n次基本插值多项式. 当$k=0,1,\cdots,n$时, 可得到$n+1$个基本插值多项式$l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$.

1.2 Lagrange插值多项式

利用基本插值多项式, 满足插值条件(1)的n次插值多项式可以表示为

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x). \tag{6}$$

事实上, 由于$P(x)$是n次多项式, 而且

$$P(x_i)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x_i)=f(x_i)l_i(x_i)=f(x_i), \quad (i=0,1,\cdots,n.)$$

(6)称为n次Lagrange 插值多项式, 记为$L_n(x)$, 即

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i} \tag{7}$$

注 1 $l_0(x),l_1(x)\cdots,l_n(x)$*线性无关, 它是$n$次多项式空间$\mathcal{P}_n$的一组基, 而 $1,x,x^2,\cdots,x^n$也是其一组基. $l_0(x),l_1(x)\cdots,l_n(x)$称为$n$次Lagrange 插值基函数.*

定理 1 *设$x_0, x_1, \cdots, x_n$是互异节点，则存在唯一的次数不超过n次的多项式$L_n(x)$，使得*

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

证 存在性已得. 证唯一性. 假设另有n次多项式$q_n(x)$满足插值条件(1)，即

$$q_n(x_i) = f(x_i), \quad (i = 0, 1, 2 \cdots, n.)$$

令$h(x) = L_n(x) - q_n(x)$，则有

$$h(x_i) = 0, \quad (i = 0, 1, 2 \cdots, n.)$$

即$h(x)$有$n+1$个不同零点，$\Longrightarrow h(x) \equiv 0$.

1.3 插值余项及误差估计

称$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$为插值多项式的余项.

定理 2 *设$f^{(n)}(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, $f^{(n+1)}(x)$ 在(a,b) 内存在, $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ 为互异节点, $L_n(x)$ 是满足(1)的插值多项式, 则对$\forall x \in [a,b]$, $\exists\, \xi \in (a,b)$ (ξ 依赖于x), 使得*

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \tag{8}$$

其中$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

注 2 *1) ξ依赖于x, 即*

$$\xi = \xi(x) \in (\min\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \max\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}).$$

2) 当$f(x)$本身是一个次数不超过n的多项式时, $f(x) - L_n(x) =$

0, 因而$L_n(x) = f(x)$. 特别当$f(x) = 1$, 则有

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$$

3) ξ一般不能求出, 因此只能估计误差. 设$\max\limits_{a\le x\le b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$, 则有

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

例 1 给定$\sin 0.32 = 0.314567$, $\sin 0.34 = 0.333487$, $\sin 0.36 = 0.352274$, 用线性(1次)及抛物(2次)插值计算$\sin 0.3367$的值并估计误差.

解 令$x_0 = 0.32$, $x_1 = 0.34$, $x_2 = 0.36$, $y_0 = 0.314567$, $y_1 = 0.333487$, $y_2 = 0.352274$.

1) 用线性插值.

$$L_1(x) = y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$
$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367) = 0.330365,$$
$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|,$$

其中$M_2 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_1} |f''(x)| = \max\limits_{x_0 \le x \le x_1} |\sin x| \le \sin x_1 = 0.3335$,
所以

$$|R_1(0.3367)| \le \frac{1}{2} \times 0.3335 \times 0.0167 \times 0.0033 = 0.92 \times 10^{-5}.$$

2) 用抛物插值.

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\sin 0.3367 \approx L_2(0.3367) = 0.330374.$$

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|,$$

其中$M_2 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_2} |f^{(3)}(x)| = \max\limits_{x_0 \le x \le x_2} |\cos x_0| = 0.828$, 所以

$$|R_2(0.3367)| \le \frac{1}{6} \times 0.838 \times 0.0167 \times 0.033 \times 0.0233 = 0.178 \times 10^{-6}.$$

例 2 *在工程中的一个函数*

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

的函数值已造成函数表. 假设在区间$[4,6]$*上用线性插值计算*$f(x)$*的近似值, 问会有多大的误差?*

解 在[4,6]上作$f(x)$的线性插值多项式$p_1(x)$, 则

$$R_1(x) = f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1), \quad \xi \in [4,6],$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad f''(x) = -\frac{4x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

$$f'''(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (2x^2 - 1) e^{-x^2} > 0, \quad x \in (4,6), \Longrightarrow f''(x) \nearrow$$

所以有

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{2} \times |f''(4)| \times |(5-4)(5-6)| = 0.508 \times 10^{-6}.$$

2 均差(差商)与牛顿插值

Lagrange插值的缺点：当节点增加或减少时, 插值多项式$L_n(x)$将发生变化, 计算不便.

设$L_{k-1}(x)$是以$x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$为插值节点的$f(x)$的$k-1$次插值多项式, $L_k(x)$是以$x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k$为插值节点的$f(x)$的$k$次插值多项式,考察$L_{k-1}$和$L_k(x)$之间的关系. 令

$$g(x) = L_k(x) - L_{k-1}(x),$$

则$g(x)$是次数不超过k的多项式, 且对$j = 0, 1, \cdots, k-1$有

$$\begin{aligned} g(x_j) &= L_k(x_j) - L_{k-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0. \quad \Longrightarrow \\ g(x) &= a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

其中a_k是和x无关的常数. 也可以写成

$$\begin{aligned} L_k(x) &= L_{k-1}(x) + a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}), \qquad (9) \\ L_k(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + a_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}). \end{aligned}$$

下面求a_k, 在(9)中令$x = x_k$得

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{L_k(x_k) - L_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})} \\
&= \frac{f(x_k) - \sum\limits_{m=0}^{k-1} f(x_m) \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k-1} \frac{x_k - x_i}{x_m - x_i}}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} \\
&= \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(x_k - x_i)} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f(x_m)}{(x_k - x_m)\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k-1}(x_m - x_i)} \\
&= \sum_{m=0}^{k} \frac{f(x_m)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{k}(x_m - x_i)}
\end{aligned} \tag{10}
$$

2.1 差商及其Newton插值公式

定义 2 *设已知函数$f(x)$ 在$n+1$ 个互异节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$, 称*

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

为$f(x)$ 关于节点x_i, x_j 的1阶差商(均差). 称1阶差商$f[x_i, x_j]$ 和$f[x_j, x_k]$ 的差商

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

为$f(x)$ 关于节点x_i, x_j, x_k 的2阶差商, 一般地, 称2个$k-1$ 阶的差商为k 阶差商, 即

$$\begin{aligned} & f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] \\ = & \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_0}. \end{aligned}$$

约定0阶差商是函数值.

计算函数的差商, 可以通过列表法计算。

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

差商有下列性质:

性质 1 *k阶差商可表示成函数值$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_k)$的线性组合, 即*

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{m=0}^{k}\frac{f(x_m)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq m}}^{k}(x_m-x_i)}. \tag{11}$$

由(10)和(11)知, $a_k=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$. 利用(9)可得

$$\begin{aligned}L_n(x)&=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\&+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).\end{aligned}\tag{12}$$

(12)称为n次Newton插值多项式.

拉格朗日(Lagrange)插值
均差(差商)与牛顿插值
差分及等距节点插值
埃尔米特插值(Hermite)
高次插值的缺点及分段...
三次样条插值
最佳一致逼近
最佳平方逼近
习 题
访 问 主 页
标 题 页
第 14 页 共 67 页
返 回
全 屏 显 示
关 闭
退 出

性质 2 k阶差商$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$与节点的次序无关. 即

$$f[x_0, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_k] = f[x_0, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_k], \quad 0 \le i, j \le k.$$

性质 3 k阶差商和k阶导数之间有如下关系:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!}, \tag{13}$$

其中$\eta \in (\min\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}, \max\{x_0, x_1, \cdots, x_k\})$.

3 差分及等距节点插值

4 埃尔米特插值(Hermite)

定义 3 给定$[a,b]$中$n+1$个互异节点x_i $(i=0,1\cdots,n)$上的函数值和直到m_i阶的导数值$f(x_i), f'(x_i),\cdots,f^{(m_i)}(x_i)$. 令$m=\sum\limits_{i=0}^{n}(m_i+1)-1$, 若存在一个次数不超过$m$的多项式$H_m(x)$, 使得

$$
\begin{array}{lll}
H_m(x_0)=f(x_0), & H'_m(x_0)=f'(x_0), \cdots, & H_m^{(m_0)}(x_0)=f^{(m_0)}(x_0),\\
H_m(x_1)=f(x_1), & H'_m(x_1)=f'(x_1), \cdots, & H_m^{(m_1)}(x_1)=f^{(m_1)}(x_1),\\
\vdots & \vdots & \vdots \\
H_m(x_n)=f(x_n), & H'_m(x_n)=f'(x_n), \cdots, & H_m^{(m_n)}(x_n)=f^{(m_n)}(x_n),
\end{array}
\tag{14}
$$

则称$H_m(x)$为$f(x)$的m次Hermite插值多项式.

定理 3 满足(14)的m次多项式$H_m(x)$存在唯一.

4.1　Newton型Hermite插值多项式

先推广Newton差商的定义.

定理 4 (Hermite-Gennochi) *若*$f \in C^n[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$, *则有*

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n] = \underset{\tau_n}{\int\cdots\int} f^{(n)}(t_0x_0+t_1x_1+\cdots+t_nx_n)dt_1\cdots dt_n$$

其中$t_0 = 1-\sum_{i=1}^{n} t_i$, $\tau_n = \{(t_1,t_2,\cdots,t_n)|t_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} t_i \le 1\}$ *为*n*维单纯形.*

注意到被积函数是通过一元连续函数$f^{(n)}(x)$与n元线性连续函数$\sum_{i=0}^{n} t_ix_i$ 复合而成, 所以$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$是$x_0,x_1,\cdots,x_n$的连续函数. 因此

$$f[x_0,x_0] = \lim_{x\to x_0} f[x_0,x] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0),$$

$$f[\underbrace{x_0, x_0, \cdots, x_0}_{k+1\text{个}}] = \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ \vdots \\ x_k \to x_0}} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

$$= \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ \vdots \\ x_k \to x_0}} \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{x_1 - x_0}.$$

考虑下面问题：求线性函数$p(x)$ 满足

$$\begin{cases} p(x_0) = f(x_0), \\ p'(x_0) = f'(x_0). \end{cases} \tag{15}$$

为了解决这个问题,我们先考虑下面的问题：求线性函数$q(x)$满足

$$\begin{cases} q(x_0) = f(x_0), \\ q(x_1) = f(x_1). \end{cases} \tag{16}$$

我们有

$$q(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0).$$

令$g(x)=q(x)-f(x)$, 则上述条件即为$g(x_0)=0,\ g(x_1)=0$, 由中值定理知道, 存在$\xi\in(x_0,x_1)$使得$g'(\xi)=0$, 即$q'(\xi)=f'(\xi)$ $(\xi\in(x_0,x_1)$. 当$x_1\to x_0$时, $\xi\to x_0$. 所以在问题(16)中令$x_1\to x_0$, 则该问题就变为问题(15). 从而

$$p(x)=f(x_0)+f[x_0,x_0](x-x_0).$$

从这个例子可以看出, 我们可以将插值问题(14)看成是在$m+1$不同节点上的Newton插值, 然后取极限就成为$n+1$不同节点

上的Hermite插值, 称之为重节点插值.

$$
\begin{aligned}
H_m(x) \;=\; & f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + \cdots + f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}](x - x_0)^{m_0} \\
& + f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}, x_1](x - x_0)^{m_0+1} + \cdots + \\
& f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}, \underbrace{x_1, \cdots, x_1}_{m_1+1}](x - x_0)^{m_0+1}(x - x_1)^{m_1} + \cdots + \\
& f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}, \cdots, \underbrace{x_{n-1}, \cdots, x_{n-1}}_{m_{n-1}+1}, x_n] \\
& (x - x_0)^{m_0+1} \cdots (x - x_{n-1})^{m_{n-1}+1} \\
& + \cdots + f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{m_0+1}, \cdots, \underbrace{x_{n-1}, \cdots, x_{n-1}}_{m_{n-1}+1}, \underbrace{x_n, \cdots, x_n}_{m_n+1}] \\
& (x - x_0)^{m_0+1} \cdots (x - x_{n-1})^{m_{n-1}+1}(x - x_n)^{m_n},
\end{aligned}
$$

插值余项为

$$
\begin{aligned}
f(x)-H_m(x) = \quad & f[\underbrace{x_0,\cdots,x_0}_{m_0+1},\underbrace{x_1,\cdots,x_1}_{m_1+1},\cdots,\underbrace{x_n,\cdots,x_n}_{m_n+1},x] \\
& (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\cdots(x-x_n)^{m_n+1} \\
= \quad & \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^{m_i+1}
\end{aligned}
$$

其中$\min(x_0,x_1,\cdots,x_n,x)<\xi<\max(x_0,x_1,\cdots,x_n,x)$.

例 3 若$n = 0, m_0 = k$, 即1个$k+1$重节点, 则

$$
\begin{aligned}
H_k(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + \cdots + f[\underbrace{x_0, \cdots, x_0}_{k+1}](x - x_0)^k \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.
\end{aligned}
$$

此即为k阶Taylor展开式.

例 4 *求4次Newton型Hermite插值多项式$H(x)$, 使得*

$$H(0)=3,\quad H'(0)=4,\quad H(1)=5,\quad H'(1)=6,\quad H''(1)=7.$$

解　可以列表计算各点差商.

k	x_k	$f(x_k)$	1阶差商	2阶差商	3阶差商	4阶差商
0	0	3	4	-2	6	$-\frac{13}{2}$
1	0	3	2	4	$-\frac{1}{2}$	
2	1	5	6	$\frac{7}{2}$		
3	1	5	6			
4	1	5				

所以得

$$H(x)=3+4(x-0)-2(x-0)^2+6(x-0)^2(x-1)-\frac{13}{2}(x-0)^2(x-1)^2.$$

例 5 设$f(x)\in C^4[a,b]$, 作3次多项式$H_3(x)$, 使得

$$H_3(a)=f(a),\ H_3'(a)=f'(a),\ H_3(b)=f(b),\ H_3'(b)=f'(b)$$

并写出插值余项.

解 由Newton型插值公式得

$$\begin{aligned}H_3(x) &= f(a)+f[a,a](x-a)+f[a,a,b](x-a)^2\\ &\quad +f[a,a,b,b](x-a)^2(x-b).\end{aligned}$$

求差商.

$$\begin{aligned}
f[a,a] &= f'(a),\quad f[b,b]=f'(b),\quad f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\\
f[a,a,b] &= \frac{f[a,b]-f[a.a]}{b-a}=\frac{f[a,b]-f'(a)}{b-a},\\
f[a,b,b] &= \frac{f[b,b]-f[a,b]}{b-a}=\frac{f'(b)-f[a,b]}{b-a},\\
f[a,a,b,b] &= \frac{f[a,b,b]-f[a,a,b]}{b-a}\\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\{f'(b)-2f[a,b]+f'(a)\},
\end{aligned}$$

因而

$$H_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{b-a}\{f[a,b] - f'(a)\}(x-a)^2$$
$$\frac{1}{(b-a)^2}\{f'(b) - 2f[a,b] + f'(a)\}(x-a)^2(x-b).$$

插值余项

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2, \quad \xi \in (a,b)$$

作业

P192-

§4.1: 1 2, 4, 5

§4.2: 6, 7, 10

§4.3: 13, 14, 15

5　高次插值的缺点及分段低次插值

5.1　高次插值的病态性质

看下面的例子：设$f(x) = 1/(1+25x^2)$, $x \in [-1, 1]$, 将$[-1, 1]$10等分得节点$x_i = -1 + i/5 \ (i = 0, 1, \cdots, 10)$. 则$f(x)$的10次插值多项式为

$$L_{10}(x) = \sum_{i=0}^{10} f(x_i) l_i(x)$$

其中

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{10} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

计算结果如下表：

拉格朗日(Lagrange)插值
均差(差商)与牛顿插值
差分及等距节点插值
埃尔米特插值(Hermite)
高次插值的缺点及分段...
三次样条插值
最佳一致逼近
最佳平方逼近
习 题
访问主页
标 题 页
第 28 页 共 67 页
返 回
全屏显示
关 闭
退 出

x	$f(x)$	$L_{10}(x)$	x	$f(x)$	$L_{10}(x)$
-1.00	0.03846	0.03848	-0.46	0.15898	0.24145
-0.96	0.04160	1.80438	-0.40	0.20000	0.19999
-0.90	0.04706	1.57872	-0.36	0.23585	0.18878
-0.86	0.05131	0.88808	-0.30	0.30769	0.23535
-0.80	0.05882	0.05882	-0.26	0.37175	0.31650
-0.76	0.06477	-0.20130	-0.20	0.50000	0.50000
-0.70	0.07547	-0.22620	-1.16	0.60976	0.64316
-0.66	0.08410	-0.10832	-0.10	0.80000	0.84340
-0.60	0.10000	0.10000	-0.06	0.91743	0.94090
-0.56	0.11312	0.19873	0.00	1.00000	1.00000
-0.50	0.13793	0.25376			

从计算结果看出，当x在± 1附近时，$f(x)$的值和$L_{10}(x)$的值相差很大. 这种现象称Runge现象.其实可以证明，$f(x)$的n次插值多项式$L_n(x)$在$[1,1]$上不是一致收敛到$f(x)$.

5.2 分段线性插值

给定$f(x)$在$n+1$个节点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$上的函数值：

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

记$h_i=x_{i+1}-x_i$, $h=\max\limits_{0\le i\le n-1} h_i$. 在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上作$f(x)$的线性插值

$$L_{1,i}(x)=f(x_i)+f[x_i,x_{i+1}](x-x_i),\quad x\in[x_i,x_{i+1}],$$

其误差为

$$f(x)-L_{1,i}(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x-x_i)(x-x_{i+1}),\quad \xi_i\in(x_i,x_{i+1}),$$

从而有

$$\begin{aligned}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-L_{1,i}(x)| &\le \max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x-x_i)(x-x_{i+1})\right| \\ &\le \frac{1}{8}h_i^2\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f''(x)|. \qquad (17)\end{aligned}$$

令

$$\tilde{L}_1(x)=\begin{cases} L_{1,0}(x), & x\in[x_0,x_1) \\ L_{1,1}(x), & x\in[x_1,x_2) \\ \vdots & \\ L_{1,n-2}(x), & x\in[x_{n-2},x_{n-1}) \\ L_{1,n-1}(x), & x\in[x_{n-1},x_n], \end{cases}$$

于是有

$$\tilde{L}_1(x_i)=f(x_i)\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

即$\tilde{L}_1(x)$是$f(x)$的插值函数, 称为分段线性插值函数,其插值误差为

$$\begin{aligned}\max_{a\le x\le b}|f(x)-\tilde{L}_1(x)| &= \max_{0\le i\le n}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-\tilde{L}_1(x)| \\ &= \max_{0\le i\le n}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-L_{1,i}(x)| \\ &\le \max_{0\le i\le n}\frac{1}{8}h_i^2\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f''(x)| \\ &\le \frac{1}{8}h^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.\end{aligned}$$

只要$f(x)$在$[a,b]$上有2阶连续导数, 当$h\to 0$时余项一致趋于

零,即分段线性插值函数$\tilde{L}_1(x)$ 一致收敛于$f(x)$.

5.3 分段3次Hermite插值

给定$f(x)$在$n+1$个节点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$上的函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
$f'(x)$	$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	$\cdots$	$f'(x_{n-1})$	$f'(x_n)$

记$h_i=x_{i+1}-x_i$, $h=\max\limits_{0\le i\le n-1} h_i$. 在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上利用数据

x	x_i	x_{i+1}
$f(x)$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$
$f'(x)$	$f'(x_i)$	$f'(x_{i+1})$

作3次Hermite插值

$$H_{3,i}(x) = f(x_i)+f'(x_i)(x-x_i)+\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f'(x_i)}{h_i}(x-x_i)^2+\frac{f'(x_{i+1})-2f[x_i,x_{i+1}]+f'(x_i)}{h_i^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1}),$$

其插值余项

$$f(x) - H_{3,i}(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2, \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}).$$

于是

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x) - H_{3,i}(x)| \le \frac{1}{4!}\frac{h_i^4}{16} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f^{(4)}(x)|. \qquad (18)$$

令

$$\tilde{H}_3(x) = \begin{cases} H_{3,0}(x), & x \in [x_0, x_1) \\ H_{3,1}(x), & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots \\ H_{3,n-2}(x), & x \in [x_{n-2}, x_{n-1}) \\ H_{3,n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

则

$$\tilde{H}_3(x_i) = f(x_i), \ \tilde{H}_3'(x_i) = f'(x_i) \quad (i = 0, 1, \cdots, n.)$$

即$\tilde{H}_3(x)$满足插值条件. 称$\tilde{H}_3(x)$为$f(x)$的分段三次插值函数, 其

误差为

$$
\begin{aligned}
\max_{a\le x\le b}|f(x)-\tilde{H}_3(x)| &= \max_{0\le i\le n}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-\tilde{H}_3(x)| \\
&= \max_{0\le i\le n}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-H_{3,i}(x)| \\
&\le \max_{0\le i\le n}\frac{1}{4!}\frac{h_i^4}{16}\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f^{(4)}(x)| \\
&\le \frac{1}{384}h^4\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|.
\end{aligned}
$$

分段三次Hermite插值的余项和$f(x)$ 的4阶导数有关，当$f(x)$在$[a,b]$ 上有4阶连续导数, 则有

$$
\tilde{H}_3(x)\xrightarrow{\text{一致}} f(x).
$$

6 三次样条插值

分段插值优点: 一致收敛. 缺点: 光滑性差.

6.1 三次样条插值函数

定义 4 *设在区间$[a,b]$上给定$n+1$个插值节点*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

及其函数在节点上的值$y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\cdots,n$. 若存在函数$S(x)$满足:

1) $S(x_j) = y_j,\ j = 0,1,\cdots,n$;

2) $S(x)$在每个小区间$[x_j,x_{j+1}]$ $j = 0,1,\cdots,n$上是3次多项式;

3) $S(x) \in C^2[a,b]$.

则称$S(x)$为$f(x)$的3次样条插值函数.

要确定$S(x)$, 在每个小区间$[x_j,x_{j+1}]$上要确定4个参数, 所以共要确定$4n$个参数. 根据$S(x)$在$[a,b]$上二阶导数连续, 在节点x_j $j = 1,2,\cdots,n-1$处满足下面的连续性条件:

$$S(x_j-0) = S(x_j+0), \quad S'(x_j-0) = S'(x_j+0),$$
$$S''(x_j-0) = S''(x_j+0). \tag{19}$$

共有$3n-3$个条件, 加上插值条件$n+1$个, 共有$4n-2$个条件. 故还要加2个条件, 通常在端点处附加条件(边界条件), 一般有一下三种:

1) 已知两端点的一阶导数, 即

$$S'(x_0)=f_0',\ S'(x_n)=f_n'. \tag{20}$$

2) 已知两端点的二阶导数, 即

$$S''(x_0)=f_0'',\ S''(x_n)=f_n''. \tag{21}$$

3) 周期边界条件, 当$f(x_0)=f(x_n)$时,

$$S'(x_0+0)=S'(x_n-0),\quad S''(x_0+0)=S''(x_n-0). \tag{22}$$

6.2 样条插值函数的建立

$S(x)$在$[x_j, x_{j+1}]$上是3次多项式, 则$S''(x)$是线性函数, 设$S''(x_j) = M_j$, $S''(x_{j+1}) = M_{j+1}$, 则

$$S''(x) = M_j + \frac{1}{h_j}(M_{j+1} - M_j)(x - x_j), \quad x \in [x_j, x_{j+1}] \tag{23}$$

其中$h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$. 积分上式得

$$S'(x) = c_j + M_j(x - x_j) + \frac{1}{2h_j}(M_{j+1} - M_j)(x - x_j)^2, \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \tag{24}$$

再积分一次

$$S(x) = y_j + c_j(x - x_j) + \frac{1}{2}M_j(x - x_j)^2 + \frac{1}{6h_j}(M_{j+1} - M_j)(x - x_j)^3, \quad x \in [x_j, x_{j+1}] \tag{25}$$

利用$S(x_{j+1}) = y_{j+1}$, 可得

$$c_j = f[x_j, x_{j+1}] - \left(\frac{1}{3}M_j + \frac{1}{6}M_{j+1}\right)h_j, \tag{26}$$

所以

$$
\begin{aligned}
S(x) = \quad & y_j + \left\{ f[x_j, x_{j+1}] - \left(\frac{1}{3}M_j + \frac{1}{6}M_{j+1}\right)h_j \right\}(x - x_j) \\
& + \frac{1}{2}M_j(x - x_j)^2 + \frac{1}{6h_j}(M_{j+1} - M_j)(x - x_j)^3, \\
& \qquad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \cdots, n-1. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

由(24)和(26)得

$$
\begin{aligned}
S'(x_j + 0) = c_j = f[x_j, x_{j+1}] - \left(\frac{1}{3}M_j + \frac{1}{6}M_{j+1}\right)h_j, \\
j = 0, 1, \cdots, n-1, \qquad (28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S'(x_{j+1} - 0) \; &= \; c_j + M_j h_j + \frac{1}{2}(M_{j+1} - M_j)h_j \\
&= \; f[x_j, x_{j+1}] + \left(\frac{1}{6}M_j + \frac{1}{3}M_{j+1}\right)h_j, \\
& \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

上式中j换成$j-1$得

$$
\begin{aligned}
S(x_j - 0) = f[x_{j-1}, x_j] + \left(\frac{1}{6}M_{j-1} + \frac{1}{3}M_j\right)h_{j-1}, \\
j = 1, 2, \cdots, n. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

将(28)和(30)代入连续性方程$S'(x_j-0)=S'(x_j+0)$, $j=1,2,\cdots,n-1$,

$$f[x_{j-1},x_j]+\left(\frac{1}{6}M_{j-1}+\frac{1}{3}M_j\right)h_{j-1}$$
$$=f[x_j,x_{j+1}]-\left(\frac{1}{3}M_j+\frac{1}{6}M_{j+1}\right)h_j,$$

即

$$\mu_j M_{j-1}+2M_j+\lambda_j M_{j+1}=d_j,\quad j=1,2,\cdots,n-1, \tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_j &= \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j},\quad \lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}=1-\mu_j,\\ d_j &= 6f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}].\end{aligned} \tag{32}$$

式(31)给出了$n-1$个方程. 如果边界条件是(20),把$S'(x_0)=f_0'$, $S'(x_n)=f_n'$分别代入(28)和(30)得

$$f[x_0,x_1]-\left(\frac{1}{3}M_0+\frac{1}{6}M_1\right)h_0=f_0',$$
$$f[x_{n-1},x_n]+\left(\frac{1}{6}M_{n-1}+\frac{1}{3}M_n\right)h_{n-1}=f_n',$$

即

$$2M_0 + M_1 = 6f[x_0, x_0, x_1] \equiv d_0, \tag{33}$$
$$M_{n-1} + 2M_n = 6f[x_{n-1}, x_n, x_n] \equiv d_n. \tag{34}$$

联立(31), (33)和(34)得下面的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{35}$$

如果边界条件是(21), 则得$M_0 = f_0''$, $M_n = f_n''$. 这时(31)的第一个方程和最后一个方程分别为

$$2M_0 + \lambda_1 M_2 = d_1 - \mu_1 f_0'', \tag{36}$$
$$\mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n''. \tag{37}$$

从而得下面线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix} \tag{38}$$

如果边界条件是(22), 则由$S'(x_0) = S'(x_n)$得

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] - \Big(\frac{1}{3}M_0 + \frac{1}{6}M_1\Big)h_0 \ = \ & f[x_{n-1}, x_n] + \Big(\frac{1}{6}M_{n-1} \\ & + \frac{1}{3}M_n\Big)h_{n-1}. \end{aligned} \tag{39}$$

由$S''(x_0) = S''(x_n)$得

$$M_0 = M_n$$

代入(39)得

$$\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

其中

$$\lambda_n = \frac{h_0}{h_0+h_{n-1}}, \quad \mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0+h_{n-1}},$$

$$d_n = 6\frac{f[x_0,x_1]-f[x_{n-1},x_n]}{h_0+h_{n-1}}.$$

此时(31)的第一个方程为

$$2M_1+\lambda_1 M_2+\mu_1 M_n = d_1,$$

所以得下面的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (40)$$

方程(35),(38)和(40)对应的系数矩阵是严格对角占优的, 前2个方程是3对角的, 可以用追赶法求解, 第三个方程也可用类似的方法求解.

求出$M_0, M_1, \ldots, M_n$后, 将他们代入(27)便得三次样条插值函数的分段表达式.

例 6 *给定数据:*

x	1	2	4	5
$f(x)$	1	3	4	2

求$f(x)$的自然(边界条件)3次样条插值函数, 并求$f(3)$和$f(4.5)$的近似值.

解 记$x_0 = 1\ x_1 - 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$, 则

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 3,\ f(x_2) = 4,\ f(x_3) = 2$$

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1,\ h_1 = x_2 - x_1 = 2,\ h_3 = x_3 - x_2 = 1$$

$$\mu_1 = \frac{h_0}{h_0 + h_1} = \frac{1}{3},\ \mu_2 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{2}{3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{1}{2},\ f[x_1, x_2, x_3] = -\frac{5}{6}.$$

由自然边界条件知$M_0 = M_3 = 0$, 故得线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

解得$M_1=-\frac{3}{4}$, $M_2=-\frac{9}{4}$.代入(27)得3次样条函数

$$S(x)=\begin{cases} 1+\frac{17}{8}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^3, & 1\le x<2,\\ 3+\frac{7}{4}(x-2)-\frac{3}{8}(x-2)^2-\frac{1}{8}(x-2)^3, & 2\le x<4,\\ 4-\frac{5}{4}(x-4)-\frac{9}{8}(x-4)^2+\frac{3}{8}(x-4)^3, & 4\le x\le 5.\end{cases}$$

计算$f(3)\approx S(3)=\dfrac{17}{4}$, $f(4.5)\approx S(4.5)=\dfrac{201}{64}$.

6.3 3次样条函数的误差界

设$g(x) \in C[a,b]$, 记

$$\|g\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |g(x)|.$$

定理 5 *设$f(x) \in C^4[a,b]$, $S(x)$为满足第一边界条件(20)或第二边界条件(21) 的3次样条函数, $h = \max\limits_{0\le i\le n-1} h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0,1,\cdots,n-1)$, 则有估计*

$$\|f^{(k)} - S^{(k)}\|_\infty \le c_k \|f^4\|_\infty h^{4-k}, \ k = 0,1,2, \tag{41}$$

其中$c_0 = \dfrac{5}{384}$, $c_1 = \dfrac{1}{24}$, $c_2 = \dfrac{3}{8}$.

7 最佳一致逼近

7.1 线性赋范空间

定义 5 (线性空间) *设X是一个集合. 如果对$\forall x, y \in X, \lambda \in R$, 有$\lambda x \in X, x + y \in X$, 则称$X$是线性空间.*

定义 6 *设X是一个线性空间. 若对$\forall x \in X$, 对应于实数, 记为$\|x\|$, 且满足下面关系:*

1) $\forall x \in X$, 有$\|x\| \geq 0$, 且$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

2) $\forall \lambda \in R, x \in X$, 有$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

3) $\forall x, y \in X$, 有$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

则称$\| \cdots \|$为X上的一个范数, 对应的空间称线性赋范空间.

定义 7 *设X是线性赋范空间, $x, y \in X$, 称$\|x - y\|$为x和y之间的距离.*

例 当$X = R^n$时, 即为向量范数, 有$1, 2, \infty$范数.

例 $X = C[a, b] = \{f | f(x)在[a, b]上连续\}$. 在$C[a, b]$上定义通常的加法和数乘运算后$C[a, b]$是一个线性空间. 设$f \in C[a, b]$,

记

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)|,$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}.$$

则$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2$是$C[a,b]$上的范数.
设$f, g \in C[a,b]$, f和g在$[a,b]$上的最大误差表示为:

$$\|f-g\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)-g(x)|.$$

定义 8 *设X是线性赋范空间, $M \subseteq X$是X的子空间, $f \in X$. 若$\exists \varphi \in M$使$\forall \psi \in m$有*

$$\|f-\varphi\| \le \|f-\psi\|,$$

则称φ是f在M中的最佳逼近元.

7.2 最佳一致逼近多项式

记$M_n = \{p_n | p_n$为次数不超过n的多项式$\}$, 则$M_n \subset C[a,b]$.

定义 9 *设$f \in C[a,b]$. 若$\exists p_n \in M_n$, 使得对$\forall q_n \in M_n$, 有*

$$\|f - p_n\|_\infty \le \|f - q_n\|_\infty.$$

则称$p_n(x)$是$f(x)$的n次最佳一致逼近多项式.

注 由定义知

$$\|f - p_n\|_\infty = \min_{q_n \in M_n} \|f - q_n\|_\infty.$$

或

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| = \min_{q_n \in M_n} \max_{a \le x \le b} |f(x) - q_n(x)|.$$

最佳一致逼近多项式的存在唯一性

定理 6 *设$f \in C[a,b]$, 则f在M_n中存在唯一的n次最佳一致逼近多项式$p_n(x)$.*

定义 10 *设$g \in C[a,b]$. 如果$\exists x_0 \in [a,b]$使得$|g(x_0)| = \|g\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |g(x)|$, 则称$x_0$为$g(x)$在$[a,b]$上的偏差点.*

当$g(x_0) = \|g\|_\infty$, x_0称$g(x)$的正偏差点.
当$g(x_0) = -\|g\|_\infty$, x_0称$g(x)$的负偏差点.

引理 1 设$f \in C[a,b]$, $p_n(x)$是$f(x)$的n次最佳一致逼近多项式, 则$f - p_n$必存在正负偏差点.

最佳一致逼近多项式的特征定理.

定理 7 设$f \in C[a,b]$, $p_n(x)$是n次多项式,则$p_n(x)$是$f(x)$的n次最佳一致逼近多项式$\Longleftrightarrow$ $f(x)-p_n(x)$ 在$[a,b]$上至少有$(n+2)$个交错偏差点, 即存在$(n+2)$个点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} \le b$, 使得

$$f(x_i) - p_n(x_i) = (-1)^i \sigma \|f - p_n\|_\infty, \quad i = 0, 1, \cdots, n+1,$$

其中$\sigma = 1$或$\sigma = -1$.

推论 1 设$f \in C[a,b]$, $p_n(x)$是$f(x)$的n次最佳一致逼近多项式. 如果$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在且保号, 则$f(x) - p_n(x)$在$[a,b]$内恰有$(n+2)$个交错偏差点, 且两端点a, b也是偏差点.

由推论1, 如果$f(x) \in C[a,b]$且$f^{(n+1)}$在(a,b)上保号, 设$f(x)$的n次最佳一致逼近多项式为

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n,$$

则$f(x)-p_n(x)$在$[a,b]$上有$n+2$个交错偏差点$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 我们有

$$\begin{aligned} f(a)-p_n(a) &= -[f(x_1)-p_n(x_1)] \\ &= f(x_2)-p_n(x_2) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^n[f(x_n)-p_n(x_n)] \\ &= (-1)^{n+1}[f(b)-_n(b)] \\ f'(x_i)-p_n'(x_n) &= 0, \quad i=1,2\cdots,n \end{aligned}$$

上述是具有$2n+1$个参数$c_0,c_1,\cdots,c_n,x_1,x_2,\cdots,c_n$的$2n+1$阶非线性方程组, 一般可用迭代法求解, 在特殊情形可精确求解.

例 7 *求函数$f(x)=\ln(1+x)$在$[0,1]$上的1次最佳一致逼近多项式$p_1(x)=c_0+c_1x$.*

解 $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$在$(0,1)$内保号, 所以$f(x)-p_1(x)$在$[0,1]$内有3个偏差点$0,x_1,1$. 我们有

$$f(0)-p_1(0)=-[f(x_1)-p_1(x_1)]=f(1)-p_1(1),$$
$$f'(x_1)-p_1'(x_1)=0.$$

即

$$\begin{aligned} -c_0 &= -[\ln 1 + x_1 - c_0 - c_1 x_1] \\ &= \ln 2 - c_0 - c_1, \\ \frac{1}{1+x_1} &= c_1. \end{aligned}$$

得$c_0 = \frac{1}{2}[\ln 2 - \ln\ln 2 - 1]$, $c_1 = \ln 2$.

例 8 *求a, b,使得*

$$\max_{1\le x\le 2}\left|\frac{1}{x} - ax - b\right|$$

取最小值,并求出最小值.

解 该问题即求函数$f(x) = \frac{1}{x}$在$[1,2]$上的1次最佳一致逼近多项式$p_1(x) = b + ax$. $f''(x) = \frac{2}{x^3}$在$[1,2]$上保号,故$f(x) - p_1(x)$在$[1,2]$上有3个偏差点$1, x_1, 2$满足

$$\begin{aligned} &f(1) - p_1(1) = -[f(x_1) - p_1(x_1)] = f(2) - p_1(2), \\ &f'(x_1) - p_1'(x_1) = 0. \end{aligned}$$

可求得$c_0 = \frac{3}{4}(1+\sqrt{2}), c_1 = -\frac{1}{2}$.

8 最佳平方逼近

8.1 内积空间

定义 11 *设X是一个线性空间, 若对$\forall x, y \in X$有实数与之对应, 记该实数为(x, y), 且满足:*

1) $\forall x, y \in X$, *有*$(x, y) = (y, x)$;

2) $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbf{R}$, *有*$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

3) $\forall x, y, z \in X$, *有*$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

4) $\forall x \in X$, *有*$(x, x) \geq 0$, *且*$(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

则X称为内积空间, 二元运算$(\cdot, \cdot)$成为内积.

定义 12 *设X是内积空间, $x, y \in X$, 如果$(x, y) = 0$, 则称x和y正交.*

例 $X = \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, 记

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

则(x, y)是$\mathbf{R}^n$上的一个内积.

拉格朗日(Lagrange)插值
均差(差商)与牛顿插值
差分及等距节点插值
埃尔米特插值(Hermite)
高次插值的缺点及分段...
三次样条插值
最佳一致逼近
最佳平方逼近
习 题
访问主页
标 题 页
第 54 页 共 67 页
返 回
全屏显示
关 闭
退 出

例 考虑线性空间$C[a,b]$. 对$f,g\in C[a,b]$, 记

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

则(f,g)为$C[a,b]$中的一个内积.

引理 2 (Cauchy-Schwartz 不等式) *设X是一个内积空间, 则对$\forall x,y\in X$ 有*

$$(x,y)^2\le(x,x)(y,y).$$

设X是一个内积空间, $x\in X$, 定义

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)},$$

则可以验证$\|x\|$是X上的一个范数, 称为2范数.

8.2 最佳平方逼近

设X是内积空间, $(\cdot,\cdot)$是内积, M是X的有限维子空间, $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 是M的一组基, $f\in X$, 求$\varphi\in M$使得

$$\|f-\varphi\|\le\|f-\psi\|,\quad \forall\psi\in M, \tag{42}$$

或者

$$\|f-\varphi\|=\min_{\psi\in M}\|f-\psi\|.$$

记$\varphi=\sum_{i=0}^{m}c_i\varphi_i$, $\psi=\sum_{i=0}^{m}a_i\varphi_i$, 则问题(42)即求$c_0,c_1,\cdots,c_m$使得

$$\left(f-\sum_{i=0}^{m}c_i\varphi_i,\ f-\sum_{j=0}^{m}c_j\varphi_j\right)=\min_{\psi\in M}\left(f-\sum_{i=0}^{m}a_i\varphi_i,\ f-\sum_{j=0}^{m}a_j\varphi_j\right).$$

记

$$\Phi(a_0,a_1,\cdots,a_m)=\left(f-\sum_{i=0}^{m}a_i\varphi_i,\ f-\sum_{j=0}^{m}a_j\varphi_j\right),$$

则即求$c_0,c_1,\cdots,c_m$使得

$$\Phi(c_0,c_1\cdots,c_m)=\min_{a_0,a_1,\cdots,a_m\in\mathbf{R}}\Phi(a_0,a_1,\cdots,a_m).$$

$$\Phi(a_0,a_1,\cdots,a_m)=(f,f)-2\sum_{i=0}^{m}a_i(f,\varphi_i)+\sum_{i,j=0}^{m}a_ia_j(\varphi_i,\varphi_j).$$

令

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_k}=-2(f,\varphi_k)+2\sum_{i=0}^{m}a_i(\varphi_i,\varphi_k)=0,\qquad k=0,1,\cdots,m.$$

即

$$\sum_{i=0}^{m}(\varphi_k,\varphi_i)a_i=(f,\varphi_k),\quad k=0,1,\cdots,m. \tag{43}$$

所以$c_0,c_1,\cdots,c_m$是方程(43)的解. 易证方程(43)的系数矩阵是对称正定矩阵, 故有唯一解.

8.3 离散数据的最佳平方逼近

定义 13 给定数据

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

设$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)$线性无关. 令

$$p(x)=\sum_{i=0}^{m}c_i\varphi_i(x),\quad q(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i\varphi_i(x),$$

$$\Phi(a_0,a_1,\cdots,a_m)=\sum_{k=1}^{n}(q(x_k)-y_k)^2,$$

求$c_0, c_1, \cdots, c_m$, 使得

$$\Phi(c_0, c_1, \cdots, c_m) = \min_{a_0, a_1, \cdots, a_m \in \mathbf{R}} \Phi(a_0, a_1, \cdots, a_m). \tag{44}$$

称$p(x)$为数据的拟合函数.

如果$\varphi_k(x) = x^k$, 则称$p(x)$为m次最小二乘多项式. 记

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \begin{bmatrix} \varphi_k(x_1) \\ \varphi_k(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_k(x_n) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \cdots, m,$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

则$c_0, c_1, \cdots, c_m$是下面的线性方程组的解.

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_m) \\ (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\varphi}_0) & (\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\varphi}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\varphi}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\varphi}_0) \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\varphi}_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\varphi}_m) \end{bmatrix}$$

例 9 *观察物体的直线运动, 得到如下数据:*

t	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
s	0	10	30	51	80	111

试用最小二乘法求2次多项式 $f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ *拟合上述数据.*

解 $\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = t^2.$

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \\ 1.9 \\ 3.0 \\ 3.9 \\ 5.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.81 \\ 3.61 \\ 9 \\ 15.21 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 30 \\ 51 \\ 80 \\ 111 \end{bmatrix},$$

代入方程(45)得

$$\begin{bmatrix} 6 & 14.7 & 53.63 \\ 14.7 & 53.63 & 218.907 \\ 53.63 & 218.907 & 951.0323 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 282 \\ 1086 \\ 4567.2 \end{bmatrix}$$

解得 $c_0 = -0.6170, c_1 = 11.1586, c_2 = 2.2687.$

8.4 超定线性方程组的最小二乘解

给定方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{45}$$

其中$m > n$, 系数矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量线性无关. 方程(45)称为超定方程组. 该方程组一般没有精确解. 记

$$\boldsymbol{A}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2 \cdots, n, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n).$$

方程组(45)可写为

$$x_1\boldsymbol{A}_1 + x_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{b}.$$

记$\boldsymbol{M} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n\}$, 则$\boldsymbol{M}$是$\mathbf{R}^m$的一个有限维子空间. 记

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \|\boldsymbol{b} - \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{A}_i\|^2,$$

求$x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$, 使得

$$\Phi(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) = \min_{x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}} \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

由8.2节理论知, $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$是下面方程组的解:

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_1) & (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) & \cdots & (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_n) \\ (\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_1) & (\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_2) & \cdots & (\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_1) & (\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_2) & \cdots & (\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{A}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}_1) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}_2) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}_n) \end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}$$

例 10 *求下列超定方程组的最小二乘解:*

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ -4x + 8y = 1 \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$$

解 系数矩阵和右端向量为

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 61 & -2 \\ -2 & 89 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 29 \\ 37 \end{bmatrix},$$

得方程组

$$\begin{bmatrix} 61 & -2 \\ -2 & 89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 37 \end{bmatrix},$$

解得$x = 0.4894, y = 0.4267.$

8.5 连续函数的最佳平方逼近

设$f(x) \in C[a, b], M = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)\}$是$C[a, b]$的一个$m + 1$维子空间. $q(x), p(x) \in M$可表示为

$$q(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x), \quad p(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x).$$

记
$$\Phi(a_0,a_1,\cdots,a_m)=\|f-q\|^2=\int_a^b[f(x)-\sum_{i=0}^m a_i\varphi_i(x)]^2dx.$$
求$c_0,c_1,\cdots,c_m$使得
$$\|f-p\|_2\le\|f-q\|_2,\quad \forall q\in M.$$
即
$$\Phi(c_0,c_1,\cdots,c_m)=\min_{a_0,a_1,\cdots,a_m\in\mathbf{R}}\Phi(a_0,a_1,\cdots,a_m).$$
由8.2节最佳平方逼近理论, $c_0,c_1,\cdots,c_m$是下面的(正规)方程组的解:
$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&(\varphi_0,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_0,\varphi_m)\\(\varphi_1,\varphi_0)&(\varphi_1,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_1,\varphi_m)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\(\varphi_m,\varphi_0)&(\varphi_m,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_m,\varphi_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\\\vdots\\(f,\varphi_m)\end{bmatrix}\quad(46)$$

其中

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx,\ (f,\varphi_i)=\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx.$$

如果$\varphi_i(x)=x^i(i=0,1\cdots,m)$, 则$p(x)$称为$f(x)$在$[a,b]$上的$m$次最佳平方逼近多项式.

例 11 *设$f(x)=e^x, x\in[0,1]$. 求$f(x)$的2次最佳平方逼近多项式$p_2(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$.*

解 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\varphi_2(x)=x^2,$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1dx,\quad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},\quad (\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2=\frac{1}{3},$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4},\quad (\varphi_2,\varphi_2)=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5},$$

$$(f,\varphi_0)=\int_0^1 e^xdx=e-1,\quad (f,\varphi_1)=\int_0^1 xe^xdx=1,$$

$$(f,\varphi_2)=\int_0^1 x^2e^xdx=e-2.$$

正规方程组为:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{bmatrix}.$$

解得$c_0=39e-105, c_1=588-216e, c_2=210e-570.$

访问主页
标题页
第 65 页 共 67 页
返回
全屏显示
关闭
退出

例 12 求c, d, 使得

$$\int_0^1 \left[x^3 - c - dx^2\right]^2 dx$$

取最小值.

解 该问题即求$f(x) = x^3$在$[0,1]$上的最佳平方逼近多项式$p(x) = c + dx^2$. $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x^2$.

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1dx = 1, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}, \quad (f, \varphi_0) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4},$$

$$(f, \varphi_2) = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}.$$

正规方程为:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

解得$c = -\frac{1}{16}, d = \frac{15}{16}$.

拉格朗日(Lagrange)插值
均差(差商)与牛顿插值
差分及等距节点插值
埃尔米特插值(Hermite)
高次插值的缺点及分段...
三次样条插值
最佳一致逼近
最佳平方逼近
习 题
访问主页
标题页
第 66 页 共 67 页
返 回
全屏显示
关 闭
退 出

9 习题

习题4 p.192～196

1, 2, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 17, 20, 23, 26, 27, 30, 31, 32, 34, 35, 36.