东南大学
2009 级研究生考试试卷 (A)

课程名称： 数值分析 课程编号： S00112 考试历时： 150 分钟 考核方式： 闭卷

院 (系)__________ 学号 __________ 姓名 __________ 成绩 __________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得　分									

(**注意**：本试卷共有 8 页 9 大题，请考生检查自己的试卷.)

1. 填空题 (每题分 3 分，共 18 分)

   1) 设多项式 $f(x) = 4x^4 + 6x^3 + 9x + 1$ ，则求 $f(x_0)$ 仅含有 4 次程法运算的算法为 ____________________.

   2) 已知实对称矩阵 A 的全部特征值是 3, 2, 1 ，则 $\mathrm{Cond(A)}_2 =$__________________.

   3) 设 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ，则 $f(x)$ 以 $0, 1, 2$ 为插值节点的 2 次牛顿插值多项式为 ____________________.

   4) 用 Simpson 公式计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ 的近似值 (保留小数点后 3 位小数) 是 ____________.

   5) 求解初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y), \ a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta \end{cases}$ 的改进 Euler 公式是 __________________.

   6) 求解双曲型方程初值问题的显格式稳定的条件是步长比 s__________________ , 该差分格式关于空间步长 __________________ 阶收敛, 关于时间步长 __________________ 阶收敛.

2. (9 分) 分析方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有几个正根. 用迭代法求此方程的最大正根，精确到 4 位有校数字.

3. (10 分) 用列主元 Gauss 消去法求线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

4. (10 分) 设有求解线性方程组 $Ax = b$ 的迭代格式

$$Bx^{(k+1)} + Cx^{(k)} = b,\ k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{I}$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 2 & \eta & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}.$$

试确定实参数 ξ, η 的取值范围，使迭代格式 (I) 收敛.

5. (10 分) 设 $f \in C^4[a, a+2]$ ，求一个 3 次多项式 $H(x)$ 使之满足

$$H(a) = f(a),\ H(a+1) = f(a+1), H(a+2) = f(a+2), H'(a) = f'(a),$$

并写出插值余项 $f(x) - H(x)$ 的表达式.

6. (10 分) 用最小二乘法确定经验公式 $y=a+b\mathrm{e}^x$ 中的参数 a 和 b，使该曲线拟和下面的数据：

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	3	5	9

7. (12 分) 设 $f\in C^2[a,b]$, $I(f)=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, h=(b-a)/n, x_k=a+kh, k=0,1,\cdots,n, x_{k+\frac{1}{2}}=x_k+h/2, k=0,1,\cdots,n-1.$

   1) 写出计算积分 $I(f)$ 的一点 Gauss 公式 $G(f)$ 以及对应的复化求积公式 $G_n(f)$.

   2) 设 $T_n(f)$ 是计算积分 $I(f)$ 的复化梯形公式，求参数 α，使得

$$T_{2n}(f)=\frac{1}{2}T_n(f)+\alpha G_n(f).$$

8. (10 分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \, a \le x \le b, \\ y(a) = \eta, \end{cases} \tag{II}$$

取正整数 n ，记 $h = \dfrac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \cdots, n$. 给定求初值问题 (II) 的多步方法：

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + h[\beta_1 f(x_i, y_i) + \beta_2 f(x_{i+1}, y_{i+1})]. \tag{III}$$

1) 试确定公式 (III) 中的参数 β_1, β_2 ，使求解公式具有尽可能高的阶数，并写出局部截断误差表达式和阶数.

2) 利用 Euler 公式和公式 (III) 构造一个预测 - 校正公式.

9. (10 分) 给定初边值问题

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,y), && a < x < b, 0 < t \le T, \\
&u(x,0) = \varphi(x), && a \le x \le b, \\
&u(a,t) = \alpha(t),\ u(b,t) = \beta(t), && 0 \le t \le T,
\end{aligned}$$

其中 $\varphi(x), \alpha(t), \beta(t)$ 是光滑函数, 且满足相容性条件. 取正整数 M, N , 记 $h = (b-a)/M, \tau = T/N, x_i = a + ih, (0 \le i \le M), t_k = k\tau, (0 \le k \le N)$.

1) 写出求上述定解问题的古典隐格式.

2) 设 $f(x) \equiv 0, \alpha(t) = \beta(t) \equiv 0, \{u_i^k \mid 0 \le i \le M, 0 \le k \le N\}$ 是古典隐格式的解，记 $r = \tau/h^2, \|u^k\|_\infty = \max\limits_{0 \le i \le M} |u_i^k|, k = 0, 1, \cdots, N$. 证明：对任意步长比 r 有

$$\|u^k\|_\infty \le \|u^0\|, k = 1, 2, \cdots, k.$$