

第七章 偏微分方程数值解

本章主要内容

- 1) 抛物型方程的有限差分方法.
古典显格式, 古典隐格式, Crank-Nicolson 格式,
Richardson 格式
- 2) 差分格式的收敛性和稳定性
- 3) 双曲型方程的有限差分格式
显格式, 隐格式
- 4) 椭圆型方程的差分格式
五点差分格式



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性 ...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 1 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

偏微分方程一般可分为三种类型:

1) 抛物型方程: 如

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad x \in [0, l], \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t), \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

2) 双曲型方程:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t), \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [a, b], \\ u(a, t) &= \alpha(t), \quad u(b, t) = \beta(t), \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

3) 椭圆型方程: 如2维Poisson方程

$$\begin{aligned}- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2 \\ u(x, y) \Big|_{\partial\Omega} &= \varphi(x, y).\end{aligned}$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 2 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

在用差分方法求解微分方程问题时常要用到几个差分公式:

$$g'(x_0) = \frac{1}{h}[g(x_0 + h) - g(x_0)] - \frac{h}{2}g''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_0, x_0 + h), \quad (1)$$

$$g'(x_0) = \frac{1}{h}[g(x_0) - g(x_0 - h)] + \frac{h}{2}g''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_0 - h, x_0), \quad (2)$$

$$g'(x_0) = \frac{1}{h} \left[g\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - g\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) \right] - \frac{h^2}{24}g'''(\xi_3),$$
$$\xi_3 \in \left(x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}\right), \quad (3)$$

$$g''(x_0) = \frac{1}{h^2}[g(x_0 + h) - 2g(x_0) + g(x_0 - h)] - \frac{h^2}{12}g^{(4)}(\xi_4),$$
$$\xi_4 \in (x_0 - h, x_0 + h), \quad (4)$$

$$g(x_0) = \frac{1}{2}[g(x_0 - h) + g(x_0 + h)] - \frac{h^2}{2}g''(\xi_5),$$
$$\xi_5 \in (x_0 - h, x_0 + h). \quad (5)$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 3 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

1 抛物型方程的差分方法

考虑下面的定解问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T) \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (7)$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t), \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

其中 a 是正常数, $f, \varphi, \alpha, \beta$ 是已知函数, 满足 $\varphi(0) = \alpha(0), \varphi(l) = \beta(0)$. 假设定解问题(6)-(8)存在唯一解 $u(x, t)$, 且具有一定的光滑性.



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 4 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

1.1 网格剖分

记 $D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, $h = l/M$, $\tau = T/N$, $x_i = ih$ ($0 \leq i \leq M$), $t_k = k\tau$ ($0 \leq k \leq N$), 用两簇平行直线

$$\begin{aligned}x &= x_i, & i &= 0, 1, \dots, M, \\t &= t_k, & k &= 0, 1, \dots, N\end{aligned}$$

将区域 D 分割成矩形网格. h 和 τ 称为空间步长和时间步长. 网格点 (x_i, t_k) 称为节点. 记 $\bar{D}_h = \{(x_i, t_k) | 0 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq N\}$, $D_h = \{(x_i, t_k) | 1 \leq i \leq M-1, 1 \leq k \leq N\}$, $\Gamma_h = \bar{D}_h \setminus D_h$. 称 D_h 为内部节点, Γ_h 为边界节点. 在位于 $t = t_k$ 上的所有节点称为第 k 层节点.



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 5 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

1.2 古典显格式(向前Euler格式)

考虑在点 (x_i, t_k) 处的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = f(x_i, t_k). \quad (9)$$

由(1)(4)可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) = \frac{1}{\tau} [u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)] - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_i^k),$$
$$\eta_i^k \in (t_k, t_{k+1}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)]$$
$$- \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 6 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

将上面两式代入(9)得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} [u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)] \\ & \quad - \frac{a}{h^2} [u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)] \\ &= f(x_i, t_k) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_i^k) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k). \\ & \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1. \end{aligned} \tag{10}$$

由初始条件(7)和边界条件(8)得

$$\begin{aligned} u(x_i, 0) &= \varphi(x_i) \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u(x_0, t_k) &= \alpha(t_k), \quad u(x_M, t_k) = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

记

$$R_{ik}^{(1)} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_k) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_k).$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 7 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

在(10)中忽略 $R_{ik}^{(1)}$, 并用 u_i^k 代替 $u(x_i, t_k)$ 得下面的差分格式:

$$\frac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \frac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i, t_k),$$
$$1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (11)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad (12)$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (13)$$

差分格式(11)~(13)称为古典显格式(向前Euler格式), $R_{ik}^{(1)}$ 称为差分格式(11)-(13)的截断误差. 记 $r = \frac{a\tau}{h^2}$, 称 r 是步长比. (11)可写为

$$u_i^{k+1} = (1 - 2r)u_i^k + r(u_{i-1}^k + u_{i+1}^k) + \tau f(x_i, t_k).$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 8 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

可将差分格式(11)~(13)写成向量和矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k+1} \\ u_{M-1}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau f(x_1, t_k) + r\alpha(t_k) \\ \tau f(x_2, t_k) \\ \vdots \\ \tau f(x_{M-2}, t_k) \\ \tau f(x_{M-1}, t_k) + r\beta(t_k) \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 9 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

1.3 古典隐格式(向后Euler格式)

还是考虑 (s_i, t_k) 点的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = f(x_i, t_k). \quad (14)$$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k)$ 用向后差商(2)近似, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k)$ 还是用二阶差商近似得

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) = \frac{1}{\tau} [u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})] + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_i^k),$$
$$\eta_i^k \in (t_{k-1}, t_k),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)]$$
$$- \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 10 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

代入(14)得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} [u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})] \\ & \quad - \frac{a}{h^2} [u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)] \\ &= f(x_i, t_k) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_i^k) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k). \\ & \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \tag{15}$$

由初始条件(7)和边界条件(8)得

$$\begin{aligned} u(x_i, 0) &= \varphi(x_i) \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u(x_0, t_k) &= \alpha(t_k), \quad u(x_M, t_k) = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

记

$$R_{ik}^{(2)} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_k) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_k).$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 11 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

在(15)中忽略 $R_{ik}^{(2)}$, 并用 u_i^k 代替 $u(x_i, t_k)$ 得下面的差分格式:

$$\frac{1}{\tau}(u_i^k - u_i^{k-1}) - \frac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i, t_k),$$

$$1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (16)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad (17)$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (18)$$

差分格式(16)~(18)称为古典隐格式(向后Euler格式). 将其写成矩阵向量形式:

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^{k-1} \\ u_2^{k-1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k-1} \\ u_{M-1}^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau f(x_1, t_k) + r\alpha(t_k) \\ \tau f(x_2, t_k) \\ \vdots \\ \tau f(x_{M-2}, t_k) \\ \tau f(x_{M-1}, t_k) + r\beta(t_k) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 12 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

1.4 Crank-Nicolson格式

为了要提高时间方向的精度, 记 $t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + \frac{\tau}{2}$, 考虑点 $(x_i, t_{k+\frac{1}{2}})$ 处的微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) = f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}). \quad (19)$$

利用中心差商(3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{\tau} [u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)] - \frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i^k), \\ \eta_i^k &\in (t_k, t_{k+1}), \end{aligned}$$

由平均公式(5)和二阶差商公式得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) - \frac{a}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1}) \right] \\ &= f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) - \frac{a\tau^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i^k), \quad \bar{\eta}_i^k \in (t_k, t_{k+1}), \end{aligned}$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 13 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 14 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) &= \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)] \\ &\quad - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1}) &= \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1})] \\ &\quad - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{\xi}_i^k, t_{k+1}), \quad \tilde{\xi}_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}),\end{aligned}$$

将上面几个式子代入(19)得

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\tau}[u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)] \\ & \quad - \frac{a}{2h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k) \\ & \quad + u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1})] \\ &= f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i^k) - \frac{ah^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{\xi}_i^k, t_{k+1}) \right] \\ & \quad - \frac{a\tau^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i^k), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1.\end{aligned}$$

记

$$R_{ik}^{(3)} = \frac{\tau^2}{24} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i^k) - 3a \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i^k) \right] - \frac{ah^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{\xi}_i^k, t_{k+1}) \right],$$

略去 $R_{ik}^{(3)}$, 用 u_i^k 代替 $u(x_i, t_k)$ 并注意到初边值条件得下面的差分格式

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - a \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} \right] = f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1,$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N.$$

上面的差分格式称为Crank-Nicolson格式. 用矩阵和向量表示



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

«

»

◀

▶

第 15 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

为

$$= \begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & & & \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ & & & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k+1} \\ u_{M-1}^{k+1} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 1-r & \frac{r}{2} & & & \\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ & & & \frac{r}{2} & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \tau f(x_1, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{r}{2}(\alpha(t_k) + \alpha(t_{k+1})) \\ \tau f(x_2, t_{k+\frac{1}{2}}) \\ \vdots \\ \tau f(x_{M-2}, t_{k+\frac{1}{2}}) \\ \tau f(x_{M-1}, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{r}{2}(\beta(t_k) + \beta(t_{k+1})) \end{bmatrix}$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 16 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

1.5 Richardson格式

考虑节点 (x_i, t_k) 处方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = f(x_i, t_k),$$

将 $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k)$ 用中心差商近似:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) = \frac{1}{2\tau}[u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_{k-1})] - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i^k),$$

将 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k)$ 还是用2阶差商近似:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) &= \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)] \\ &\quad - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{aligned}$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 17 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

然后代入方程得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau}[u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_{k-1})] \\ & \quad - \frac{a}{h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)] \\ &= f(x_i, t_k) + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i^k) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \\ & \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1. \end{aligned}$$

记

$$R_{ik}^{(4)} = \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i^k) - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k),$$

忽略 $R_{ik}^{(4)}$ ，并注意到初边值条件得下面的Richardson格式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau}(u_i^{k+1} - u_i^{k-1}) - \frac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i, t_k), \\ & \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ & u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ & u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Richardson格式是一个3层格式，需知道 $(k-1)$ 层和 k 层的值才能求出第 $(k+1)$ 层的值。



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 18 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

由方程和初边值条件得

$$\begin{aligned} u(x_i, \tau) &= u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i) \\ &= \varphi(x_i) + \tau \left[a \frac{d^2 \varphi(x_i)}{dx^2} + f(x_i, 0) \right] + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i). \end{aligned}$$

因此可取第1层的值

$$u_i^1 = \varphi(x_i) + \tau \left[a \frac{d^2 \varphi(x_i)}{dx^2} + f(x_i, 0) \right], \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

完整的Richardson格式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau}(u_i^{k+1} - u_i^{k-1}) - \frac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) &= f(x_i, t_k), \\ 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ u_i^0 &= \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u_i^1 &= \varphi(x_i) + \tau \left[a \frac{d^2 \varphi(x_i)}{dx^2} + f(x_i, 0) \right] \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u_0^k &= \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

后面可以知道, Richardson格式是完全不稳定的格式, 无实用价值.



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 19 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

1.6 算例

用上述几种方法计算下面问题的数值解:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1], \\ u(x, 0) &= e^x, \quad x \in (0, 1), \\ u(0, t) &= e^t, \quad u(1, t) = e^{t+1}, \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

表1给出了当 $h = 1/10$, $\tau = 1/200$ 时用古典显格式计算得到的部分数值结果, 数值解很好地逼近精确解.

Table 1: 古典显格式 $h = 1/10, \tau = 1/200$

k	(x, t)	数值解	精确解	误差
0	(0.5, 0.00)	1.648721	1.648721	0.000000
10	(0.5, 0.05)	1.733119	1.733253	0.000134
20	(0.5, 0.10)	1.821888	1.822119	0.000230
40	(0.5, 0.20)	2.013408	2.013753	0.000344
80	(0.5, 0.40)	2.459134	2.459603	0.000469
160	(0.5, 0.80)	3.668588	3.669297	0.000708
200	(0.5, 1.00)	4.480824	4.481689	0.000865



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 20 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

表2给出了当 $h = 1/10$, $\tau = 1/100$ 时用古典显格式计算得到的部分数值结果, 随着计算层数的增加, 误差越来越大, 数值结果没有实用意义.

Table 2: 古典显格式 $h = 1/10, \tau = 1/100$

k	(x, t)	数值解	精确解	误差
0	(0.5,0.00)	1.648721	1.648721	0.000000
4	(0.5,0.04)	1.715721	1.716007	0.000286
8	(0.5,0.08)	1.787434	1.786038	0.001396
12	(0.5,0.12)	2.054643	1.858928	0.195715
16	(0.5,0.16)	17.26231	1.934729	15.32752
17	(0.5,0.17)	43.00026	1.954237	44.95449
18	(0.5,0.18)	133.4547	1.973878	131.4808



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 21 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

表3给出了当 $h = 1/10$, $\tau = 1/200$ 时用古典隐格式计算得到的部分数值结果, 数值解很好地逼近精确解.

Table 3: 古典隐格式 $h = 1/10, \tau = 1/200$

k	(x, t)	数值解	精确解	误差
0	(0.5,0.00)	1.648721	1.648721	0.000000
10	(0.5,0.05)	1.733511	1.733253	0.000258
20	(0.5,0.10)	1.822564	1.822119	0.000445
40	(0.5,0.20)	2.014426	2.013753	0.000673
80	(0.5,0.40)	2.460529	2.459603	0.000926
160	(0.5,0.80)	3.670699	3.669297	0.001402
200	(0.5,1.00)	4.483403	4.481689	0.001714



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 22 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

表4给出了当 $h = 1/10$, $\tau = 1/10$ 时用Crank-Nicolson 格式计算得到的部分数值结果, 数值解很好地逼近精确解.

Table 4: Crank-Nicolson 格式 $h = 1/10, \tau = 1/10$

k	(x, t)	数值解	精确解	误差
0	(0.5,0.0)	1.648721	1.648721	0.000000
1	(0.5,0.1)	1.822394	1.822119	0.000231
2	(0.5,0.2)	2.014105	2.013753	0.000352
3	(0.5,0.3)	2.225953	2.225541	0.000412
4	(0.5,0.4)	2.460072	2.459603	0.000469
5	(0.5,0.5)	2.718802	2.718282	0.000520
6	(0.5,0.6)	3.004743	3.004166	0.000577
7	(0.5,0.7)	3.320755	3.320117	0.000638
8	(0.5,0.8)	3.670002	3.669297	0.000705
9	(0.5,0.9)	4.055979	4.055200	0.000779
10	(0.5,1.0)	4.482550	4.481689	0.000861



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 23 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

表5给出了当 $h = 1/10$, $\tau = 1/100$ 时用Richardson 格式计算得到的部分数值结果, 随着计算层数的增加, 误差越来越大, 数值结果没有实用意义.

Table 5: Richardson 格式 $h = 1/10, \tau = 1/100$

k	(x, t)	数值解	精确解	误差
0	(0.5,0.0)	1.648721	1.648721	0.000000
1	(0.5,0.01)	0.116501	1.665291	1.548790
2	(0.5,0.02)	8.837941	1.682028	7.155913
3	(0.5,0.03)	-22.13696	1.698932	23.83589
4	(0.5,0.04)	90.79588	1.716007	89.07987
5	(0.5,0.05)	-329.1597	1.733253	330.8929
6	(0.5,0.06)	1267.675	1.750672	1265.924
7	(0.5,0.07)	-4908.295	1.768267	4910.063
8	(0.5,0.08)	19285.74	1.786083	19283.96



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 24 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

2 差分格式的稳定性和收敛性

对抛物方程问题

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad x \in [0, l], \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t), \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

建立了四格差分格式。

古典显格式(向前Euler格式)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \frac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) &= f(x_i, t_k), \\ 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1, \\ u_i^0 &= \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u_0^k &= \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N.\end{aligned}$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 25 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

古典隐格式(向后Euler格式)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}(u_i^k - u_i^{k-1}) - \frac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) &= f(x_i, t_k), \\ 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N, \\ u_i^0 &= \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u_0^k &= \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N.\end{aligned}$$

Crank-Nicolson格式

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - a \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} \right] \\ = f(x_i, t_{k+\frac{1}{2}}), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq k \leq N-1, \\ u_i^0 &= \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u_0^k &= \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N.\end{aligned}$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 26 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

Richardson格式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\tau}(u_i^{k+1} - u_i^{k-1}) - \frac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) &= f(x_i, t_k), \\ 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ u_i^0 &= \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u_i^1 &= \varphi(x_i) + \tau \left[a \frac{d^2 \varphi(x_i)}{dx^2} + f(x_i, 0) \right] \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u_0^k &= \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N.\end{aligned}$$

称前三个格式为两层格式.称Richardson格式为三层格式。

对于差分格式，我们需要讨论稳定性和收敛性。

稳定性是考虑的计算过程中的误差传播问题；收敛性考虑的是当步长趋于零时差分方程的解是否趋于微分方程问题的解。

我们需要引进范数作为工具。

记 $\Omega_h = (x_0, x_1, \dots, x_M)$. 称 $w = (w_0, w_1, \dots, w_M)$ 为 Ω_h 上的网格函数。记 $\mathbb{W} = \{w \mid w \text{ 为 } \Omega_h \text{ 上的网格函数}\}$. 称 \mathbb{W} 为网格函数



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 27 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

空间。对于网格函数引进范数。设 $w \in \mathbb{W}$. 定义下面的范数:

$$L_2\text{-范数} \quad \|w\|_2 = \sqrt{h \left[\frac{1}{2} (w_0)^2 + \sum_{i=1}^{M-1} (w_i)^2 + \frac{1}{2} (w_M)^2 \right]}.$$

$$L_\infty\text{-范数} \quad \|w\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq M} |w_i|.$$

$$L_1\text{-范数} \quad \|w\|_1 = h \left[\frac{1}{2} |w_0| + \sum_{i=1}^{M-1} |w_i| + \frac{1}{2} |w_M| \right].$$

设 $\{u_i^k \mid 0 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq N\}$ 是差分格式的解. 定义

$$u^k = (u_0^k, u_1^k, \dots, u_M^k),$$

则 u^k 为 Ω_h 上的网格函数。



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

«

»

◀

▶

第 28 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



定义 1 设 $\{u_i^k | 0 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq N\}$ 是差分格式的解, $\{v_i^k | 0 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq N\}$ 是由于初始数据有误差而得到的差分格式的近似解, 记

$$\varepsilon_i^k = u_i^k - v_i^k, \quad 0 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq N.$$

如果存在与步长 h, τ 无关的常数 C , 使得

$$\|\varepsilon^k\| \leq C\|\varepsilon^0\|, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (\text{两层格式})$$

或者

$$\|\varepsilon^k\| \leq C(\|\varepsilon^0\| + \|\varepsilon^1\|), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (\text{三层格式})$$

则称该差分格式关于范数 $\|\cdot\|$ 是稳定的, 否则称不稳定.

我们有下面的结论:

定理 1 当步长比 $r \leq \frac{1}{2}$ 时, 古典显格式关于 L_∞ 范数是稳定的; 当 $r > \frac{1}{2}$ 关于 L_∞ 范数不稳定.

定理 2 对任意步长比 r , 古典隐格式关于 L_∞ 范数是稳定的.

定理 3 对任意步长比 r , Crank-Nicolson格式关于 L_2 范数稳定.

定理 4 对任意步长比 r , Richardson格式关于 L_∞ 范数和 L_2 范数都是不稳定的.

抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

«

»

◀

▶

第 29 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



定义 2 设 $U_i^k = u(x_i, t_k)$ 是微分方程定解问题的解, u_i^k 是对应的差分格式的解. 记

$$e_i^k = U_i^k - u_i^k, \quad 0 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq N.$$

如果

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \max_{0 \leq k \leq N} \|e^k\| = 0,$$

则称差分格式在范数 $\|\cdot\|$ 下是收敛的. 如果

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|e^k\| = O(h^p + \tau^q),$$

则称差分格式关于空间步长 p 阶、关于时间步长 q 阶收敛.

定理 5 当步长比 $r \leq \frac{1}{2}$ 时, 古典显格式在 L_∞ 范数下关于空间步长 2 阶、关于时间步长 1 阶收敛的.

定理 6 对任意步长比 r , 古典隐格式在 L_∞ 范数下关于空间步长 2 阶、关于时间步长 1 阶是收敛的.

定理 7 对任意步长比 r , Crank-Nicolson 格式在 L_2 范数下关于空间步长和时间步长都是 2 阶收敛的.

抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 30 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

3 双曲型方程的差分方法

考虑下面的初边值问题：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq T.\end{aligned}$$

和上节一样，记 $h = l/M$, $\tau = T/N$, $x_i = ih$, $t_k = k\tau$.

3.1 显格式

考虑 (x_i, t_k) 处的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = f(x_i, t_k) \quad (20)$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 31 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 32 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k) &= \frac{1}{\tau^2}[u(x_i, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k-1})] \\ &\quad - \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta_i^k), \quad \eta_i^k \in (t_{k-1}, t_{k+1}), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) &= \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)] \\ &\quad - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i^k \in (x_{i-1}, x_{i+1}),\end{aligned}$$

上面2式代入(20)得

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\tau^2}[u(x_i, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k-1})] \\ & \quad - \frac{a}{h^2}[u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)] \\ &= f(x_i, t_k) + R_{ik}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N-1,\end{aligned}$$

其中

$$R_{ik} = \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta_i^k) - \frac{a^2 h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k).$$

另外, 由初始条件,有

$$\begin{aligned}u(x_i, 0) &= \varphi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \\u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i) \\&= \varphi(x_i) + \tau \psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2} [a^2 \varphi''(x_i) + f(x_i, 0)] \\&\quad + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i) \\&\equiv \Psi(x_i) + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta), \quad 1 \leq i \leq M-1.\end{aligned}$$

由边界条件, 有

$$u(0, t_k) = \alpha(t_k), \quad u(x_M, t_k) = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N.$$

忽略 R_{ik} 得下面的差分格式



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 33 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



$$\frac{1}{\tau^2}(u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}) - \frac{a^2}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = f(x_i, t_k)$$

$$1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad (21)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad u_i^1 = \Psi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad (22)$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (23)$$

记 $s = a\tau/h$, s 称为步长比, 则上面的差分格式可以写成

$$u_i^{k+1} = s^2(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + 2(1-s^2)u_i^k - u_i^{k-1} + \tau^2 f(x_i, t_k),$$

$$1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

关于显式差分格式(21)-(23), 有如下结论:

定理 8 (1) 当步长比 $s \leq 1$ 时, 显式差分格式(21)-(23)在 L_2 范数下是稳定的; 当步长比 $s > 1$ 时, 显式差分格式(21)-(23)在 L_2 范数下是不稳定的;

(2) 当步长比 $s \leq 1$ 时, 显式差分格式(21)-(23)在 L_2 范数下关于空间步长和时间步长都是二阶收敛的。

抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

«

»

◀

▶

第 34 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

3.2 隐格式

还是考虑 (x_i, t_k) 点的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = f(x_i, t_k).$$

利用平均公式得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k) - \frac{a^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k+1}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{k-1}) \right] \quad (24)$$

$$= f(x_i, t_k) - \frac{a^2 \tau^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i^k), \quad (25)$$

将

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k) = & \frac{1}{\tau^2} [u(x_i, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k-1})] \\ & - \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta_i^k), \quad \eta_i^k \in (t_{k-1}, t_{k+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) = & \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)] \\ & - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^k, t_k), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{aligned}$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 35 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

代入(25)得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau^2} [u(x_i, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k-1}))] - \frac{a^2}{2h^2} [u(x_{i+1}, t_{k+1}) \\ & \quad - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1}) + u(x_{i+1}, t_{k-1}) \\ & \quad - 2u(x_i, t_{k-1}) - 2u(x_i, t_{k-1}) + u(x_{i-1}, t_{k-1})] \\ & = f(x_i, t_k) + R_{ik}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N-1, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R_{ik} = & -\frac{a^2\tau^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_i^k) + \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta_i^k) \\ & - \frac{a^2 h^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\bar{\xi}_i^{k+1}, t_{k+1}) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\bar{\xi}_i^{k-1}, t_{k-1}) \right] \end{aligned}$$

由初边值条件

$$\begin{aligned} u(x_i, t_0) &= \varphi(x_i), \quad u(x_i, t_1) = \Psi(x_i) + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i), \\ & \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ u(x_0, t_k) &= \alpha(t_k), \quad u(x_M, t_k) = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N. \end{aligned}$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 36 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

忽略上面的 R_{ik} 和 $\frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_i)$, 并用 u_i^k 代替 $u(x_i, t_k)$ 的下面的差分格式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2}(u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}) - \frac{a^2}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} \right. \\ \left. + \frac{u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{h^2} \right) = f(x_i, t_k), \\ 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq N-1, \end{aligned} \quad (26)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad u_i^1 = \Psi(x_i), \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad (27)$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_M^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (28)$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 37 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

将(26)~(28)写成向量和矩阵形式

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1+s^2 & -\frac{1}{2}s^2 & & \\ -\frac{1}{2}s^2 & 1+s^2 & -\frac{1}{2}s^2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -\frac{1}{2}s^2 & 1+s^2 & -\frac{1}{2}s^2 \\ & & & -\frac{1}{2}s^2 & 1+s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k+1} \\ u_{M-1}^{k+1} \end{bmatrix} \\
 = & 2 \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{M-2}^k \\ u_{M-1}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(1+s^2) & \frac{1}{2}s^2 & & \\ \frac{1}{2}s^2 & -(1+s^2) & \frac{1}{2}s^2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \frac{1}{2}s^2 & -(1+s^2) & \frac{1}{2}s^2 \\ & & & \frac{1}{2}s^2 & -(1+s^2) \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} u_1^{k-1} \\ u_2^{k-1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{k-1} \\ u_{M-1}^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau^2 f(x_1, t_k) + \frac{1}{2}s^2(\alpha(t_{k-1}) + \alpha(t_{k+1})) \\ \tau^2 f(x_2, t_k) \\ \vdots \\ \tau^2 f(x_{M-2}, t_k) \\ \tau^2 f(x_{M-1}, t_k) + \frac{1}{2}s^2(\beta(t_{k-1}) + \beta(t_{k+1})) \end{bmatrix}, \\
 & 1 \leq k \leq N-1.
 \end{aligned}$$

关于隐式差分格式(26)-(28),有如下结论:



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 38 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

定理 9 (1) 对任意步长比 $s \leq 1$ 时, 隐式差分格式(26)-(28)在 L_2 范数下是稳定的; (2) 对任意步长比 $s \leq 1$ 时, 隐式差分格式(26)-(28)在 L_2 范数下关于空间步长和时间步长都是二阶收敛的。



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 39 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

4 椭圆型方程的差分方法

考虑二维Poisson方程Dirichlet边值问题

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (29)$$

$$u = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (30)$$

其中 Ω 为矩形区域

$$\Omega = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\},$$

Γ 是 Ω 的边界.

4.1 差分格式的建立

将区间 $[a, b]$ 作 m 等分, 将 $[c, d]$ 作 n 等分, 记 $h_1 = (b - a)/m$, $h_2 = (d - c)/n$, $x_i = a + ih_1$, $0 \leq i \leq m$, $y_j = c + jh_2$, $0 \leq j \leq n$. h_1, h_2 称为 x 方向和 y 方向的步长. 用平行线

$$\begin{aligned} x &= x_i, & 0 \leq i \leq m, \\ y &= y_j, & 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 40 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

将 Ω 剖分为 mn 个小矩形, 交点 (x_i, y_j) 称为网格节点. 记

$$\Omega_h = \left\{ (x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \right\},$$

$$\overset{o}{\Omega}_h = \left\{ (x_i, y_j) \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1 \right\},$$

$$\Gamma_h = \Omega_h \setminus \overset{o}{\Omega}_h.$$

称 $\overset{o}{\Omega}_h$ 为内结点, 称 Γ_h 为边界结点.
为方便起见, 记

$$\omega \equiv \left\{ (i, j) \mid (x_i, y_j) \in \overset{o}{\Omega}_h \right\}, \quad \gamma \equiv \left\{ (i, j) \mid (x_i, y_j) \in \Gamma_h \right\}.$$

记

$$S_h = \left\{ v \mid v = \{v_{ij} \mid 0 \leq i, j \leq m\} \text{ 为 } \Omega_h \text{ 上的网格函数} \right\}.$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 41 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 42 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

设 $v = \{v_{ij} \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\} \in S_h$, 引进如下记号:

$$D_x v_{ij} = \frac{1}{h_1}(v_{i+1,j} - v_{ij}), \quad D_{\bar{x}} v_{ij} = \frac{1}{h_1}(v_{i,j} - v_{i-1,j}),$$

$$D_y v_{ij} = \frac{1}{h_2}(v_{i,j+1} - v_{ij}), \quad D_{\bar{y}} v_{ij} = \frac{1}{h_2}(v_{i,j} - v_{i,j-1}),$$

$$\delta_x^2 v_{ij} = \frac{1}{h_1}(D_x v_{ij} - D_{\bar{x}} v_{ij}), \quad \delta_y^2 v_{ij} = \frac{1}{h_2}(D_y v_{ij} - D_{\bar{y}} v_{ij}),$$

$$\|v\|_\infty = \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} |v_{ij}|.$$

称 $\|v\|_\infty$ 为 v 的无穷范数.

在结点处考虑边值问题(29)-(30), 有

$$-\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)\right] = f(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \omega, \quad (31)$$

$$u(x_i, y_j) = \varphi(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \gamma. \quad (32)$$

定义 Ω_h 上的网格函数

$$U = \{U_{ij} \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\},$$

其中

$$U_{ij} = u(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq n.$$

由微分公式,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &= \frac{1}{h_1^2} \left[u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) \right] - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_{ij}, y_j)}{\partial x^4} \\ &= \delta_x^2 U_{ij} - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_{ij}, y_j)}{\partial x^4}, \quad x_{i-1} < \xi_{ij} < x_{i+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \frac{1}{h_2^2} \left[u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) \right] - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij})}{\partial y^4} \\ &= \delta_y^2 U_{ij} - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij})}{\partial y^4}, \quad y_{j-1} < \eta_{ij} < y_{j+1}. \end{aligned}$$

将以上两式代入(31), 并注意到边界条件(32), 可得

$$-(\delta_x^2 U_{ij} + \delta_y^2 U_{ij}) = f(x_i, y_j) - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_{ij}, y_j)}{\partial x^4} - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij})}{\partial y^4},$$
$$(i, j) \in \omega, \quad (33)$$

$$U_{ij} = \varphi(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \gamma. \quad (34)$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 43 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

在上式中略去小量项

$$R_{ij} = -\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_{ij}, y_j)}{\partial x^4} - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_{ij})}{\partial y^4}, \quad (35)$$

并用 u_{ij} 代替 U_{ij} , 得到如下差分格式

$$-(\delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij}) = f(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \omega, \quad (36)$$

$$u_{ij} = \varphi(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \gamma. \quad (37)$$

称 R_{ij} 为差分格式(36)的局部截断误差, 它反映了差分格式(36)对精确解的满足程度, 即 R_{ij} 为差分格式(36)用精确解代替近似解后等式两边之差

$$R_{ij} = -\frac{1}{h_1^2} \left[u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) \right] \\ - \frac{1}{h_2^2} \left[u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) \right] - f(x_i, y_j).$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 44 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

记

$$M_4 = \max \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} \right|, \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right| \right\}, \quad (38)$$

则有

$$|R_{ij}| \leq \frac{M_4}{12}(h_1^2 + h_2^2), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (39)$$

4.2 差分格式解的存在性

定理 10 差分格式(36)-(37)存在唯一解.

证明 差分格式(36)-(37)是线性的.考虑其齐次方程组

$$-\left(\delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij}\right) = 0, \quad (i, j) \in \omega, \quad (40)$$

$$u_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \gamma. \quad (41)$$

设 $\|u\|_\infty = M > 0$.则由(41)知,存在 $(i_0, j_0) \in \omega$ 使得 $|u_{i_0, j_0}| = M$, 且 $|u_{i_0-1, j_0}|$, $|u_{i_0+1, j_0}|$, $|u_{i_0, j_0-1}|$, $|u_{i_0, j_0+1}|$ 中至少有一个小于 M . 考虑(40)中 $(i, j) = (i_0, j_0)$ 的等式,有

$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right)u_{i_0, j_0} = \frac{1}{h_1^2}(u_{i_0-1, j_0} + u_{i_0+1, j_0}) + \frac{1}{h_2^2}(u_{i_0, j_0-1} + u_{i_0, j_0+1}).$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 45 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

将上式两边取绝对值,可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right)M \\ & \leq \frac{1}{h_1^2}(|u_{i_0-1,j_0}| + |u_{i_0+1,j_0}|) + \frac{1}{h_2^2}(|u_{i_0,j_0-1}| + |u_{i_0,j_0+1}|) \\ & < \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right)M. \end{aligned}$$

与假设 $M > 0$ 矛盾. 故 $M = 0$. 因而差分格式(36)-(37)是唯一可解的. 定理证毕.

4.3 差分格式的求解

差分格式(36)-(37)是以 $\{u_{ij} \mid 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1\}$ 为未知量的线性方程组(36)可改写为

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h_2^2}u_{i,j-1} - \frac{1}{h_1^2}u_{i-1,j} + 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)u_{ij} - \frac{1}{h_1^2}u_{i+1,j} - \frac{1}{h_2^2}u_{i,j+1} \\ & = f(x_i, y_j), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned} \quad (42)$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 46 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

记

$$\mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{m-1,j} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

利用(37)可将(42)写为

$$\mathbf{D}\mathbf{u}_{j-1} + \mathbf{C}\mathbf{u}_j + \mathbf{D}\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{f}_j, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad (43)$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) & -\frac{1}{h_1^2} & & & \\ -\frac{1}{h_1^2} & 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) & -\frac{1}{h_1^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h_1^2} & 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) & -\frac{1}{h_1^2} \\ & & & -\frac{1}{h_1^2} & 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) \end{pmatrix},$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 47 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2^2} & & & & \\ & -\frac{1}{h_2^2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{h_2^2} & \\ & & & & -\frac{1}{h_2^2} \end{pmatrix}, \quad f_j = \begin{pmatrix} f(x_1, y_j) + \frac{1}{h_1^2} \phi(x_0, y_j) \\ f(x_2, y_j) \\ \vdots \\ f(x_{m-2}, y_j) \\ f(x_{m-1}, y_j) + \frac{1}{h_1^2} \phi(x_m, y_j) \end{pmatrix}$$

(43)可进一步写为

$$\begin{pmatrix} C & D & & & \\ D & C & D & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & D & C & D \\ & & & D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - Du_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} - Du_n \end{pmatrix}. \quad (44)$$

上述线性方程组的系数矩阵是一个三对角块矩阵, 每一行至多有5个非零元素, 通常称这种绝大多数元素为零的矩阵为**稀疏矩阵**. 常用迭代法求解以大型稀疏矩阵为系数矩阵的线性方程组. 可以证明(44)的系数矩阵是对称正定的.



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 48 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

Jacobi 迭代方法 对 $k = 0, 1, 2, \dots$, 计算

$$u_{ij}^{(k+1)} = \left[f(x_i, y_j) + \frac{1}{h_2^2} u_{i,j-1}^{(k)} + \frac{1}{h_1^2} u_{i-1,j}^{(k)} + \frac{1}{h_1^2} u_{i+1,j}^{(k)} + \frac{1}{h_2^2} u_{i,j+1}^{(k)} \right] / \left[2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) \right],$$
$$i = 1, 2, \dots, m-1; \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Gauss-Seidel 迭代方法 对 $k = 0, 1, 2, \dots$, 计算

$$u_{ij}^{(k+1)} = \left[f(x_i, y_j) + \frac{1}{h_2^2} u_{i,j-1}^{(k+1)} + \frac{1}{h_1^2} u_{i-1,j}^{(k+1)} + \frac{1}{h_1^2} u_{i+1,j}^{(k)} + \frac{1}{h_2^2} u_{i,j+1}^{(k)} \right] / \left[2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) \right],$$
$$i = 1, 2, \dots, m-1; \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 49 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

算例 应用差分格式(36)-(37)计算如下问题

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = (\pi^2 - 1)e^x \sin(\pi y), \quad 0 < x < 2, 0 < y < 1, \quad (45)$$

$$u(0, y) = \sin(\pi y), \quad u(2, y) = e^2 \sin(\pi y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (46)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 2. \quad (47)$$

该问题的精确解为 $u(x, y) = e^x \sin(\pi y)$.

将 $[0, 2]$ 作 m 等分, 将 $[0, 1]$ 作 n 等分, 用 Gauss-Seidel 迭代方法求解差分方程组(36)-(37), 精确至 $\|u^{(l+1)} - u^{(l)}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \times 10^{-10}$.

表6给出了5个结点处的精确解和取不同步长所得的数值解. 表7给出了这些结点处取不同步长时所得数值解和精确解差的绝对值 $|u(x_i, y_j) - u_{ij}|$. 表8给出了取不同步长时所得数值解的最大误差

$$E(h_1, h_2) = \max_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} |u(x_i, y_j) - u_{ij}|.$$

由表8可以看出, 当步长 h_1, h_2 同时缩小到原来的 $1/2$ 时, 最大误差约缩小到原来的 $1/4$.



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 50 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

Table 6: 部分结点处的精确解和取不同步长时所得的数值解

$(h_1, h_2) \setminus (x, y)$	$(1/2, 1/4)$	$(1, 1/4)$	$(3/2, 1/4)$	$(1/2, 1/2)$	$(1, 1/2)$
$(1/8, 1/8)$	1.179943	1.946264	3.198998	1.668692	2.752434
$(1/16, 1/16)$	1.169343	1.928138	3.176531	1.653700	2.726799
$(1/32, 1/32)$	1.166702	1.923620	3.170908	1.649965	2.720410
$(1/64, 1/64)$	1.166042	1.922492	3.169502	1.649032	2.718814
精确解	1.165822	1.922116	3.169033	1.648721	2.718282

Table 7: 取不同步长时部分结点处数值解的误差的绝对值

$(h_1, h_2) \setminus (x, y)$	$(1/2, 1/4)$	$(1, 1/4)$	$(3/2, 1/4)$	$(1/2, 1/2)$	$(1, 1/2)$
$(1/8, 1/8)$	1.412e-2	2.415e-2	2.997e-2	1.997e-2	3.415e-2
$(1/16, 1/16)$	3.521e-3	6.023e-3	7.499e-3	4.979e-3	8.517e-3
$(1/32, 1/32)$	8.796e-4	1.505e-3	1.875e-3	1.244e-3	2.128e-3
$(1/64, 1/64)$	2.198e-4	3.761e-4	4.688e-4	3.109e-4	5.319e-4

4.4 差分格式解的先验估计式

本节应用极值原理来给出差分方程组

$$-(\delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij}) = g_{ij}, \quad (i, j) \in \omega, \quad (48)$$

$$v_{ij} = \varphi_{ij}, \quad (i, j) \in \gamma \quad (49)$$

解的先验估计式.

设 $v = \{v_{ij} \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ 为 Ω_h 上的网格函数, 记

$$(L_h v)_{ij} = -(\delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij}), \quad (i, j) \in \omega.$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 51 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

Table 8: 取不同步长时数值解的最大误差

(h_1, h_2)	$E_\infty(h_1, h_2)$	$E_\infty(2h_1, 2h_2)/E_\infty(h_1, h_2)$
(1/8,1/8)	4.238e-2	*
(1/16,1/16)	1.061e-2	3.994
(1/32,1/32)	2.656e-3	3.995
(1/64,1/64)	6.640e-4	4.000

极值原理 设 $v = \{v_{ij} \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ 为 Ω_h 上的网格函数. 如果

$$(L_h v)_{ij} \leq 0, \quad (i, j) \in \omega,$$

则有

$$\max_{(i,j) \in \omega} v_{ij} \leq \max_{(i,j) \in \gamma} v_{ij}.$$

证明 用反证法. 设

$$\max_{(i,j) \in \omega} v_{ij} > \max_{(i,j) \in \gamma} v_{ij},$$

且 $\max_{(i,j) \in \omega} v_{ij} = M$, 则一定存在 $(i_0, j_0) \in \omega$ 使得 $v_{i_0, j_0} = M$, 且 $v_{i_0-1, j_0}, v_{i_0+1, j_0}$,



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 52 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 53 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

v_{i_0, j_0-1} 和 v_{i_0, j_0+1} 中至少有一个的值小于 M . 因此

$$\begin{aligned} (L_h v)_{i_0, j_0} &= 2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) v_{i_0, j_0} - \frac{1}{h_1^2} (v_{i_0-1, j_0} + v_{i_0+1, j_0}) \\ &\quad - \frac{1}{h_2^2} (v_{i_0, j_0-1} + v_{i_0, j_0+1}) \\ &> 2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) M - \frac{1}{h_1^2} (M + M) - \frac{1}{h_2^2} (M + M) = 0. \end{aligned}$$

这与条件矛盾. 定理证毕.

定理 11 设 $\{v_{ij}\}$ 为 (48)-(49) 的解, 则有

$$\max_{(i,j) \in \omega} |v_{ij}| \leq \max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{d-c}{2} \right)^2 \right] \max_{(i,j) \in \omega} |g_{ij}|.$$

上式中 $\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{d-c}{2} \right)^2$ 为 Ω 的外接圆半径的平方.

证明 记

$$C = \max_{(i,j) \in \omega} |g_{ij}|,$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页



第 54 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

$$P(x, y) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{c+d}{2}\right)^2,$$

并定义 Ω_h 上的网格函数

$$w_{ij} = \frac{1}{4}CP(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \omega \cup \gamma,$$

则有

$$\begin{aligned} w_{ij} &\geq 0, & (i, j) &\in \omega \cup \gamma, \\ (L_h w)_{ij} &= C, & (i, j) &\in \omega. \end{aligned}$$

因而

$$L_h(\pm v - w)_{ij} = \pm(L_h v)_{ij} - (L_h w)_{ij} = \pm g_{ij} - C \leq 0, \quad (i, j) \in \omega.$$

由极值原理, 知

$$\max_{(i,j) \in \omega} (\pm v - w)_{ij} \leq \max_{(i,j) \in \gamma} (\pm v - w)_{ij} \leq \max_{(i,j) \in \gamma} |\pm v_{ij}| + \max_{(i,j) \in \gamma} (-w_{ij}) \leq \max_{(i,j) \in \gamma} |v_{ij}|,$$

于是

$$\begin{aligned}\max_{(i,j) \in \omega} (\pm v)_{ij} &= \max_{(i,j) \in \omega} (\pm v - w + w)_{ij} \\ &\leq \max_{(i,j) \in \omega} (\pm v - w)_{ij} + \max_{(i,j) \in \omega} w_{ij} \\ &\leq \max_{(i,j) \in \gamma} |v_{ij}| + \max_{(i,j) \in \omega} w_{ij} \\ &\leq \max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{d-c}{2} \right)^2 \right] \max_{(i,j) \in \omega} |g_{ij}|.\end{aligned}$$

易知

$$\max_{(i,j) \in \omega} |v_{ij}| \leq \max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{d-c}{2} \right)^2 \right] \max_{(i,j) \in \omega} |g_{ij}|.$$

定理证毕.

4.5 差分格式解的收敛性和稳定性

收敛性

定理 12 设 $\{u(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 是定解问题(29)-(30)的解, $\{u_{ij} \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ 为差分格式(36)-(37)的



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

◀

▶

◀

▶

第 55 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

解, 则有

$$\max_{(i,j) \in \omega} |u(x_i, y_j) - u_{ij}| \leq \frac{M_4}{48} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{d-c}{2} \right)^2 \right] (h_1^2 + h_2^2),$$

其中 M_4 由(38)定义.

证明 记

$$e_{ij} = u(x_i, y_j) - u_{ij}, \quad (i, j) \in \omega \cup \gamma,$$

将(33)-(34)分别与(36)-(37)相减, 得误差方程

$$-\left(\delta_x^2 e_{ij} + \delta_y^2 e_{ij} \right) = R_{ij}, \quad (i, j) \in \omega, \quad (50)$$

$$e_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \gamma, \quad (51)$$

其中 R_{ij} 由(35)定义. 由(39), 有

$$\max_{(i,j) \in \omega} |R_{ij}| \leq \frac{M_4}{12} (h_1^2 + h_2^2).$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

«

»

◀

▶

第 56 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

应用定理2.2.3,有

$$\begin{aligned}\max_{(i,j) \in \omega} |e_{ij}| &\leq \frac{1}{4} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{d-c}{2} \right)^2 \right] \max_{(i,j) \in \omega} |R_{ij}| \\ &\leq \frac{M_4}{48} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{d-c}{2} \right)^2 \right] (h_1^2 + h_2^2).\end{aligned}$$

定理证毕.

稳定性

假设在应用差分格式(36)-(37)时, 计算右端函数 $f(x_i, y_j)$ 有误差 f_{ij} , 计算边界值有误差 φ_{ij} . 设 $\{v_{ij}\}$ 为差分格式

$$-\left(\delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij}\right) = f(x_i, y_j) + f_{ij}, \quad (i, j) \in \omega, \quad (52)$$

$$v_{ij} = \varphi(x_i, y_j) + \varphi_{ij}, \quad (i, j) \in \gamma \quad (53)$$

的解. 记

$$\varepsilon_{ij} = v_{ij} - u_{ij}, \quad (i, j) \in \omega \cup \gamma.$$

将(52)-(53)与(36)-(37)相减, 得



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

⏪ ⏩

◀ ▶

第 57 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

$$-\left(\delta_x^2 \varepsilon_{ij} + \delta_y^2 \varepsilon_{ij}\right) = f_{ij}, \quad (i, j) \in \omega, \quad (54)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varphi_{ij}, \quad (i, j) \in \gamma. \quad (55)$$

应用定理2.2.3,得到

$$\max_{(i,j) \in \omega} |\varepsilon_{ij}| \leq \max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{d-c}{2} \right)^2 \right] \max_{(i,j) \in \omega} |f_{ij}|.$$

由上式可知, 当 $\max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}|$ 和 $\max_{(i,j) \in \omega} |f_{ij}|$ 为小量时, $\max_{(i,j) \in \omega} |\varepsilon_{ij}|$ 也为小量. 我们称差分格式(36)和(37)关于边界值和右端函数是稳定的.

称(54)-(55)为摄动方程, 它的形式和差分格式(36)-(37)是一样的. 于是我们得到如下定理.

定理 13 差分格式(36)-(37)在下述意义下关于边界值和右端函数是稳定的: 设 $\{u_{ij}\}$ 为

$$-\left(\delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij}\right) = f_{ij}, \quad (i, j) \in \omega,$$

$$u_{ij} = \varphi_{ij}, \quad (i, j) \in \gamma$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页

« »

◀ ▶

第 58 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出

的解, 则有

$$\max_{(i,j) \in \omega} |u_{ij}| \leq \max_{(i,j) \in \gamma} |\varphi_{ij}| + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(\frac{d-c}{2} \right)^2 \right] \max_{(i,j) \in \omega} |f_{ij}|.$$



抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收 ...

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页



第 59 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出



5 习题

p.345~346

§7.1 1, 2, 3

§7.2 5

§7.3 7

§7.4 9

抛物型方程的差分方法

差分格式的稳定性 and 收敛性

双曲型方程的差分方法

椭圆型方程的差分方法

习题

访问主页

标题页



第 60 页 共 60 页

返回

全屏显示

关闭

退出