东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 数值分析 考试学期 18-19学年秋学期 得分__________

适用专业 各专业工科研究生 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

（可带计算器）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得分									
批阅人									

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

1. (8分) 设 $x = 0.045$, $y = 1.040$ 均为有效数. 试分析由以上数据计算函数

$$u(x,y) = (0.5x + 0.4)y - 0.3e^x y^2$$

的近似值至少具有几位有效数字, 并给出其相对误差限.

2. (10分) 给定方程 $x - x^2 + \cos x = 0$.

(1) 分析该方程存在几个实根；

(2) 用迭代法求出这些实根，精确到3位有效数.

3. (10分) 用列主元Gauss消去法求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. (12分) 给定线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix},$$

其中d_1, d_2, d_3为常数且不全为零.

(1) 证明求解此方程组的Gauss-Seidel迭代格式发散；

(2) 考虑上述方程组的同解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix},$$

其中 $a \neq -1$. 求实数a 的范围，使求解此同解方程组的Gauss-Seidel迭代格式收敛；

(3) 试说明(2) 中对原线性方程组左乘给定矩阵的意义.

5. (12分) 求一个在闭区间$[-1,1]$上一阶导数连续的函数$p(x)$，使之满足以下条件：

(1) 函数$p(x)$在区间$[-1,0]$上为二次多项式，在$[0,1]$上为三次多项式；

(2) $p(-1)=1$, $p''(-1)=6$, $p(0)=-1$, $p(1)=0$;

(3) 积分$\int_{-1}^{1} p(x)dx=0$.

6. (12分) 已知一组数据

x	-1	0	1	1.5	2
y	1.40	1.71	2.57	3.45	4.91

试用最小二乘拟合的方法求出形如$y = ae^x + b$ 的拟合函数.

7. (12分) 设$f(x) \in \mathcal{C}^4[a,b]$, $I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 给定求积公式

$$I(f) \approx \frac{b-a}{2}\big[f(x_0)+f(x_1)\big],$$

其中x_0, x_1 为待定参数.

(1) 确定参数x_0, x_1，使上述求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出代数精度的最高次数;

(2) 求出由(1) 所得到求积公式的形如$R(f)=C(b-a)^k f^{(p)}(\xi)$ 的截断误差表达式;

(3) 取正整数n, 记$h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$, $i=0,1,\cdots,n$. 试由(1) 中所得到的求积公式构造复化求积公式$I_n(f)$.

8. (12分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a < x \le b, \\ y(a) = \eta. \end{cases}$$

取正整数n, 并记 $h=(b-a)/n$, $x_i = a+ih$, $0 \le i \le n$.

(1) 确定参数A, B, C, D，使求解公式

$$y_{i+1} = Ay_i + By_{i-1} + \frac{2h}{3}[Cf(x_{i+1},y_{i+1}) + f(x_i,y_i) + Df(x_{i-1},y_{i-1})]$$

的局部截断误差阶达到最高，并给出局部截断误差表达式.

(2) 给定求上述常微分方程初值问题的求解公式 $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})]$及其局部截断误差表达式 $R_{i+1} = \frac{5}{12}y'''(x_i)h^3 + O(h^4)$. 试写出由该公式与(1) 中求得的公式构造的预测校正公式，并推导预测校正公式的局部截断误差表达式.

9. (12分) 给定如下定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} - cu, \quad 0 < x < l, 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 < x < l, \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(l,t) = \beta(t), \quad 0 \le t \le T, \end{cases}$$

其中函数$\phi(x)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 满足$\phi(0) = \alpha(0)$, $\phi(l) = \beta(0)$, $a, b, c \in \mathrm{R}$ 且$a, c > 0$. 取正整数M, N, 记空间步长$h = l/M$, 时间步长$\tau = T/N$, $x_i = ih$, $0 \le i \le M$, $t_k = k\tau$, $0 \le k \le N$, 并记$u_i^k \approx u(x_i, t_k)$.

(1) 试导出如下差分格式，并给出截断误差表达式;

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \dfrac{a}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + \dfrac{b}{2h}(u_{i+1}^k - u_{i-1}^k) - cu_i^{k+1}, \\ \qquad\qquad 1 \le i \le M-1, \, 0 \le k \le N-1; \\ u_i^0 = \phi(x_i), \; 1 \le i \le M-1; \\ u_0^k = \alpha(t_k), \; u_M^k = \beta(t_k), \; 0 \le k \le N. \end{cases}$$

(2) 记$\lambda = \dfrac{a\tau}{h^2}$, 证明当$\lambda \le \dfrac{1}{2}$ 且 $\dfrac{|b|}{2a}h < 1$ 时, 上述差分格式在L_∞ 范数意义下稳定.