东南大学

<u>2015</u> 年研究生考试试卷(B)

课程名称: 数值分析　课程编号: S000112　考试历时: 150分钟　考核方式: 闭卷

院(系) __________　学号__________　姓名__________　成绩__________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
得分										

1. (10分) 设 x^* 和 y^* 的具有 4 位有效数字的近似值分别为 $x = 1.450$ 和 $y = 340.2$. 试给出计算函数 $f(x, y) = (x + y)(x - y)$ 的绝对误差限和相对误差限.

2. (10分) 给定方程 $\ln(1+x^2)-2x-1=0$.

(1) 分析该方程存在几个实根;

(2) 用迭代法求出这些根, 精确到 4 位有效数;

(3) 说明所使用的迭代格式的收敛性.

3. (10分) 用列主元 Gauss 消去法求下面线性方程组的解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

4. (10分) 给定迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1+3\alpha)x_1^{(k)} + 2\alpha x_2^{(k)} + 3, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha x_1^{(k)} + (1+2\alpha)x_2^{(k)} + 2, \end{cases}$$

问实数 α 取何值时上述迭代格式收敛.

5. (12分) 求一个 3 次多项式 $H(x)$, 使其满足

$$H'(a) = f'(a), \quad H\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad H'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad H'(b) = f'(b).$$

6. (12分) 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的 1 次最佳一致逼近多项式 $p(x) = a + bx$.

7. (12分) 设 $I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 用插值方法推导出求积分 $I(f)$ 的 Simpson 公式, 并写出其截断误差表达式.

8. (12分) 给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad a < x \leqslant b, \\ y(a) = \eta. \end{cases}$$

取正整数n, 记$h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \cdots, n$. 试求预测–校正解公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(p)} = y_i + \dfrac{h}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})], \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{12}[5f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(p)}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] \end{cases}$$

的局部截断误差表达式和阶数.

9. (12分) 给定如下抛物方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0, & 0 < x < 2, 0 < t < 1, \\ u(x,0) = x(2-x), & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

取正整数 M, N, 记 $h = 2/M$, $\tau = 1/N$, $x_i = ih, 0 \leqslant i \leqslant M$, $t_k = k\tau, 0 \leqslant k \leqslant N$.

(1) 推导出求解该问题的一个隐式差分格式, 并写出其截断误差表达式;

(2) 取 $h = 1/2, \tau = 1/4$, 用构造的差分格式计算 $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $u\left(1, \frac{1}{4}\right)$, $u\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 的近似值.