第五章 数值积分与数值微分

本章主要内容

1) 插值型求积公式

2) 复化求积公式

3) Romberg求积法

4) Gauss求积公式

5) 数值微分

考虑定积分$I(f)=\int_a^b f(x)dx$.

1) 当$f(x)$的原函数不能用初等函数表示, 如$e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}$等.

2) $f(x)$是一个函数表, 即不知道$f(x)$的表达式.

在上述2种情况下, 只能求积分$I(f)$的近似值. 由定积分定义,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

其中$\Delta x=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$. 因此有

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k.$$

一般的数值积分公式为:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

其中称x_k为求积点, A_k为求积系数.

1 插值型求积公式

1.1 插值型求积公式

给定节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$, 已知$f(x)$在这些点上的函数值为$f(x_i)$ $(i = 0, 1\cdots, n)$. 由插值理论, $f(x)$ 的n次插值多项式为:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\int_a^b l_k(x)dx\right] f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k). \end{aligned}$$

其中$A_k = \int_a^b l_k(x)dx$. 记

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

则

$$I(f) \approx I_n(f). \tag{1}$$

定义 1 *设有计算积分$I(f)$的求积公式*

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

如果求积系数$A_k = \int_a^b l_k(x)dx \ (k = 0, 1, \cdots, n)$,则称该求积公式为插值型求积公式.

记$R(f) = I(f) - I_n(f)$, 称它为求积公式(1)的截断误差. 由插值

多项式的余项得插值型求积公式的截断误差

$$
\begin{aligned}
R(f) &= I(f) - I_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n}\left[\int_a^b l_k(x)dx\right] f(x_k) \\
&= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b L_n(x)dx \\
&= \int_a^b [f(x) - L_n(x)]dx \\
&= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)dx, \quad \xi \in (a,b). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

定义 2 *如果求积点$x_k(k = 0, 1, \cdots, n)$是等距的, 即*

$$
x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n,
$$

则称对应的插值型求积公式为Newton-Cotes公式.

下面假设节点等距. 令$x = a + th, t \in [0, n]$, 则$x_k = a + kh$,

$$x_j = a + jh,$$

$$\begin{aligned} A_k &= \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx \\ &= h \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t - j}{k - j} dt \\ &= \frac{(-1)^{n-k} h}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t - j) dt \\ &= (b - a) \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t - j) dt, \quad k = 0, 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

记

$$C_{n,k} = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t - j) dt, \quad k = 0, 1, \cdots, n, \qquad (3)$$

则Newton-Cotes公式可写为

$$I_n(f) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_{n,k} f(x_k),$$

其中$C_{n,k}$只依赖与k和n.

1) $n=1, h=b-a, x_0=a, x_1=b$. 由(3)可以求得$C_{1,0}=\frac{1}{2}, C_{1,1}=\frac{1}{2}$. 得2个等距节点的插值型求积公式:

$$T(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \tag{4}$$

(4)称为梯形公式.

2) $n=2, h=\frac{b-a}{2}, x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$. 由(3)求得$C_{2,0}=\frac{1}{6}, C_{2,1}=\frac{2}{3}, C_{2,2}=\frac{1}{6}$. 得3个等距节点的插值型求积公式

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \tag{5}$$

(5)称为Simpson公式.

访问主页
标题页
第 7 页 共 52 页
返 回
全屏显示
关 闭
退 出

3) $n = 4, h = \dfrac{b-a}{4}, x_0 = a, x_1 = \dfrac{3a+b}{4}, x_2 = \dfrac{a+b}{2}, x_3 = \dfrac{a+3b}{4}, x_4 = b$, 由(3)求得

$$C_{4,0} = \frac{7}{90}, \quad C_{4,1} = \frac{32}{90},$$
$$C_{4,2} = \frac{12}{90}, \quad C_{4,3} = \frac{32}{90},$$
$$C_{4,4} = \frac{7}{90}.$$

可得5个等距节点的插值型求积公式

$$C(f) = \frac{b-a}{90}\Big[7f(a) + 32f(\frac{3a+b}{4}) + 12f(\frac{a+b}{2}) + 32f(\frac{a+3b}{4}) + 7f(b)\Big]. \qquad (6)$$

(6)称为Cotes公式.

1.2 代数精度

定义 3 给定一个求积分$I(f)=\int_a^b f(x)dx$的求积公式

$$I(f)\approx I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k), \qquad (7)$$

如果当$f(x)$是任意次数不超过m的多项式时，求积公式精确成立，即对任意次数不超过m次的多项式$p_m(x)$有

$$I(p_m)=I_n(p_m), \quad \text{或} \quad \int_a^b p_m(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k p_m(x_k),$$

而至少对1个$m+1$次多项式不精确成立，即存在$m+1$次多项式$q_{m+1}(x)$，使得

$$I(q_{m+1})\neq I_n(q_{m+1}), \quad \text{或} \quad \int_a^b q_{m+1}(x)dx\neq\sum_{k=0}^{n}A_k q_{m+1}(x_k)$$

则称求积公式(7)的代数精度是m.

插值型求积公式
复化求积公式
Romberg求积法
Gauss求积公式
数值微分
习 题
访 问 主 页
标 题 页
第 9 页 共 52 页
返 回
全 屏 显 示
关 闭
退 出

由插值型求积公式的截断误差(2)知, $n+1$个节点的插值型求积公式的代数精度至少是n.

定理 1 求积公式

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$$

至少具有n次代数精度$\Longleftrightarrow$该求积公式是插值型求积公式, 即

$$A_k=\int_a^b l_k(x)dx, \quad ,k=0,1,\cdots,n.$$

定理 2 求积公式

$$I(f)\approx I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k) \tag{8}$$

的代数精度是$m\Longleftrightarrow$它对$1,x,x^2,\cdots,x^m$精确成立, 而对x^{m+1}不精确成立. 即

$$I(x^k)=I_n(x^k), \quad ,k=0,1\cdots,m, \quad I(x^{m+1})\neq I_n(x^{m+1}).$$

例 1 *求下面Simpson公式的代数精度.*

$$S(f)=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right].$$

解 Simpson公式是3个等距节点的插值型求积公式, 故其代数精度至少是2. 当$f(x)=x^3$时,

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b x^3dx=\frac{b^4-a^4}{4}, \\ S(f) &= \frac{b-a}{6}\left[a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right] \\ &= \frac{b^4-a^4}{4}. \end{aligned}$$

当$f(x)=x^4$时,

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b x^4 dx = \frac{b^5-a^5}{5}, \\ S(f) &= \frac{b-a}{6}\left[a^4+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+b^4\right] \\ &\neq \frac{b^5-a^5}{5}. \end{aligned}$$

所以Simpson公式的代数精度是3.

一般, $n+1$个节点的Newton-Cotes(等距节点插值型)公式的代数精度

$$=\begin{cases} n, & n\text{是奇数} \\ n+1, & n\text{是偶数} \end{cases}$$

1.3 梯形公式、Simpson公式和Cotes公式的截断误差

1) 梯形公式的截断误差

$$
\begin{aligned}
R_T(f) = I(f) - T(f) &= \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx \\
&= \frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx \\
&= -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta), \quad \eta \in (a,b).
\end{aligned}
$$

2) Simpson公式的截断误差

作$f(x)$的3次Hermite插值多项式$H(x)$, 满足

$$
H(a) = f(a), \qquad H\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad H(b) = f(b),
$$

$$
H'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).
$$

则其余项

$$f(x)-H(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b),\ \xi\in(a,b).$$

由于Simpson公式的代数精度为3, 即

$$\int_a^b H(x)dx=S(H),$$

所以有

$$\begin{aligned}\int_a^b H(x)dx=S(H)\quad&=\frac{b-a}{6}\left[H(a)+4H\left(\frac{a+b}{2}\right)+H(b)\right]\\&=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\\&=S(f).\end{aligned}$$

截断误差为

$$
\begin{aligned}
R_s(f) &= I(f) - S(f) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b H(x)dx \\
&= \int_a^b [f(x) - H(x)]dx \\
&= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\eta)}{4} \int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)dx \\
&= -\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a,b).
\end{aligned}
$$

3) Cotes公式的截断误差

$$
R_C(f) = I(f) - C(f) = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in (a,b).
$$

2 复化求积公式

由上节截断误差看出, 求积公式的截断误差依赖于区间长度. 要减小误差, 就要减小区间长度. 将区间$[a,b]$ n等分, 记$h=(b-a)/n$, $x_k=a+kh$, $k=0,1,\cdots,n$.

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

2.1 复化梯形公式

对小区间上的积分$\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$应用梯形公式, 就得到复化梯形公式.

$$T_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})].$$

由梯形公式的截断误差, 可得复化梯形公式$T_n(f)$得截断误差

$$
\begin{aligned}
I(f)-T_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx-\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{h^3}{12}f''(\eta_k)\right], \quad \eta_k\in[x_k,x_{k+1}].
\end{aligned}
$$

设$f(x)\in C^2[a,b]$, 则由连续函数介值定理, $\exists\eta\in(a,b)$, 使

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k)=f''(\eta).
$$

所以得$T_n(f)$的截断误差

$$
I(f)-T_n(f)=-\frac{h^3}{12}nf''(\eta)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta). \tag{9}
$$

记$M_2 = \max_{a\le x\le b} |f''(x)|$, 对于给定的精度$\varepsilon$, 只要

$$\frac{b-a}{12} M_2 h^2 \le \varepsilon,$$

就有

$$|I(f) - T_n(f)| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\eta)| \le \frac{b-a}{12} M_2 h^2 \le \varepsilon. \qquad (10)$$

(10)称为先验误差估计.

由(9)可得

$$\frac{I(f) - T_n(f)}{h^2} = -\frac{1}{12} \times h \sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) \longrightarrow -\frac{1}{12} \int_a^b f''(x)dx$$

$$= \frac{1}{12}[f'(a) - f'(b)], \quad \text{as } h \to 0.$$

当h很小时, 有

$$I(f) - T_n(f) \approx \frac{h^2}{12}[f'(a) - f'(b)]. \qquad (11)$$

同样, 将$[a,b]$进行$2n$等分, 得

$$I(f)-T_{2n}(f)\approx\frac{1}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2[f'(a)-f'(b)]. \tag{12}$$

由(11)和(12)可得

$$I(f)-T_{2n}(f)\approx\frac{1}{4}[I(f)-T_n(f)],$$

或

$$I(f)-T_{2n}(f)\approx\frac{1}{3}[T_{2n}(f)-T_n(f)]. \tag{13}$$

给定精度ε, 当

$$\frac{1}{3}|T_{2n}(f)-T_n(f)|\le\varepsilon,$$

就有

$$|I(f)-T_{2n}(f)|\le\varepsilon.$$

(13)称为后验误差估计.

假设$T_n(f)$已知, 求$T_{2n}(f)$时可以用下面的公式计算:

$$\begin{aligned} T_{2n}(f) \quad &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+\frac{1}{2}})]\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}\times\frac{h}{2}[f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]\right\} \\ &= \frac{1}{2}T_n(f)+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

2.2 复化Simpson公式

记$x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$, 对每个小区间上积分$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$应用Simpson公式, 得到下面的复化Simpson公式:

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})].$$

利用Simpson公式的截断误差, 可得复化Simpson公式的截断误差:

$$\begin{aligned} & I(f) - S_n(f) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta_k), \quad \eta_k \in [x_k, x_{k+1}], \\ &= -\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_k), \quad \eta_k \in [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned} \tag{14}$$

设$f(x)\in C^4[a,b]$, 由连续函数介值定理, 存在$\eta\in(a,b)$, 使

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_k) = f^{(4)}(\eta),$$

所以得

$$\begin{aligned} I(f)-S_n(f) &= -\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 n f^{(4)}(\eta) \\ &= -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta\in(a,b). \qquad (15) \end{aligned}$$

记$M_4=\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$. 对给定的精度$\varepsilon$, 选取$h$使得

$$\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 M_4 \le \varepsilon,$$

就有

$$|I(f)-S_n(f)|\le\varepsilon.$$

(15)称为复化Simpson的先验误差估计. 由(14)可得

$$\frac{I(f)-S_n(f)}{\left(\frac{h}{2}\right)^4} = -\frac{1}{180}\times h\sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_k) \to -\frac{1}{180}\int_a^b f^{(4)}(x)dx,$$
$$= \frac{1}{180}[f^{(3)}(a)-f^{(3)}(b)] \quad \text{as } h\to 0,$$

当h很小时有

$$I(f)-S_n(f) \approx \frac{1}{180}[f^{(3)}(a)-f^{(3)}(b)]\left(\frac{h}{2}\right)^4,$$
$$I(f)-S_{2n}(f) \approx \frac{1}{180}[f^{(3)}(a)-f^{(3)}(b)]\left(\frac{\frac{h}{2}}{2}\right)^4.$$

从而有

$$I(f)-S_{2n}(f) \approx \frac{1}{16}[I(f)-S_n(f)],$$
$$I(f)-S_{2n}(f) \approx \frac{1}{15}[S_{2n}(f)-S_n(f)].$$

对于给定精度ε, 当

$$\frac{1}{15}|S_{2n}(f) - S_n(f)| \leq \varepsilon,$$

就有

$$|I(f) - S_{2n}(f)| \leq \varepsilon.$$

2.3 复化Cotes公式

记

$$x_{k+\frac{1}{4}} = x_k + \frac{1}{4}h, x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{1}{2}h, x_{k+\frac{3}{4}} = x_k + \frac{3}{4}h.$$

对积分 $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ 应用Cotes公式, 即得复化Cotes公式:

$$C_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{90}[7f(x_k) + 32f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 32f(x_{k+\frac{3}{4}}) + 7f(x_{k+1})].$$

其截断误差为

$$I(f) - C_n(f) = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{2}\right)^6 f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in (a,b).$$

当h很小时有

$$I(f) - C_n(f) \approx \frac{2}{945}[f^{(5)}(a) - f^{(5)}(b)]\left(\frac{h}{2}\right)^6,$$

$$I(f) - C_{2n}(f) \approx \frac{1}{63}[C_{2n}(f) - C_n(f)].$$

对于给定精度ε, 当

$$\frac{1}{63}|C_{2n}(f)-C_n(f)|\leq\varepsilon,$$

就有

$$|I(f)-C_{2n}(f)|\leq\varepsilon.$$

2.4 复化求积公式的阶数

定义 4 *设有计算积分$I(f)$的复化求积公式$I_n(f)$, 如果存在正整数p和非零常数C, 使*

$$\lim_{h\to 0}\frac{I(f)-I_n(f)}{h^p}=C,$$

则称公式$I_n(f)$是p阶的.

从上面定义知, 复化梯形公式—2阶; 复化Simpson公式—4阶; 复化Cotes公式—6阶.

3 Romberg求积法

由(13)有

$$I(f) - T_{2n}(f) \approx \frac{1}{3}[T_{2n}(f) - T_n(f)],$$

上式也可以写成

$$I(f) \approx \frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f). \tag{16}$$

(16)说明其右端项可以近似积分$I(f)$. 记

$$
\begin{aligned}
\tilde{T}_n(f) &= \frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f) \\
&= \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{h}{4}[f(x_k) + f(x_{k+\frac{1}{2}})] + \frac{h}{4}[f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]\right\} \\
&\qquad -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{h}{3}\Big(f(x_k) + 2f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})\Big) - \frac{h}{6}(f(x_k) + f(x_{k+1}))\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+1})] \\
&= S_n(f).
\end{aligned}
$$

即得

$$S_n(f) = \frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f).$$

同样, 由复化Simpson公式误差估计

$$I(f)-S_{2n}(f)\approx\frac{1}{15}[S_{2n}(f)-S_n(f)]$$

得

$$I(f)\approx\frac{16}{15}S_{2n}(f)-\frac{1}{15}S_n(f).$$

可以验证

$$C_n(f)=\frac{16}{15}S_{2n}(f)-\frac{1}{15}S_n(f).$$

$$I(f)-C_{2n}(f)\approx\frac{1}{63}[C_{2n}(f)-C_n(f)],$$

记

$$R_n(f)=\frac{64}{63}C_{2n}(f)-\frac{1}{63}C_n(f). \tag{17}$$

(17)称为Romberg公式. 可以证明Romberg公式的截断误差为$O(h^8)$. 从而可得

$$I(f)-R_{2n}(f)\approx\frac{1}{255}[R_{2n}(f)-R_n(f)].$$

利用Romberg求积法可以列表计算.

区间等分数(n)	$T_n(f)$		$S_n(f)$		$C_n(f)$		$R_n(f)$
1	T_1		S_1		C_1		R_1
	$\downarrow$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
2	T_2		S_2		C_2		R_2
		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
4	T_4		S_4		C_4		R_4
		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
8	T_8		S_8		C_8		$\vdots$
		$\nearrow$		$\nearrow$			
16	T_{16}		S_{16}		$\vdots$		
		$\nearrow$					
32	T_{32}		$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$						

例 2 *分别用复化梯形公式、复化Simpson公式、复化Cotes公式和Romberg 求积法计算积分*

$$\int_1^5 \frac{\sin x}{x} dx,$$

精确至7位有效数字.

插值型求积公式
复化求积公式
Romberg求积法
Gauss求积公式
数值微分
习 题
访 问 主 页
标 题 页
第 31 页 共 52 页
返 回
全 屏 显 示
关 闭
退 出

解

1) 复化梯形公式. 要求

$$\frac{1}{3}|T_{2n}-T_n|\le\frac{1}{2}\times 10^{-7}.$$

计算得$2n=4096$, 即要求4097个节点.

2) 复化Simpson公式. 要求

$$\frac{1}{15}|S_{2n}(f)-S_n(f)|\le\frac{1}{2}\times 10^{-7}.$$

计算得$2n=32$, 即要求65个节点.

3) 复化Cotes公式. 要求

$$\frac{1}{63}|C_{2n}(f)-C_n(f)|\le\frac{1}{2}\times 10^{-7}.$$

计算得$2n=8$, 即要求33个节点.

4) Romberg求积法. 要求

$$\frac{1}{255}|R_{2n}(f)-R_n(f)|\le\frac{1}{2}\times 10^{-7}.$$

计算得$2n=2$, 即要求17节点.

4 Gauss求积公式

定义 5 设

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx,\qquad I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k),$$

$I_n(f)$是求积分$I(f)$的求积公式. 如果求积公式$I_n(f)$的代数精度是$(2n+1)$, 则称该求积公式是*Gauss-Legendre*公式, 对应的求积点$x_k, k=0,1\cdots,n$称为*Gauss*点.

由代数精度知, 求积公式$I(f)\approx I_n(f)$的代数精度为$(2n+1)$ $\Longleftrightarrow$

$$\int_a^b x^i dx=\sum_{k=0}^{n}A_kx_k^i,\quad i=0,1,\cdots,2n+1.$$

例 3 考虑求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1),$$

决定求积系数A_0, A_1和求积点x_0, x_1, 使其成为2点*Gauss*公式.

解 $n=1$, 即要使公式的代数精度为$2+1=3$. 由代数精度得

$$f(x)=1, \quad A_0+A_1=\int_{-1}^{1} 1dx=2,$$

$$f(x)=x, \quad A_0x_0+A_1x_1=\int_{-1}^{1} xdx=0,$$

$$f(x)=x^2, \quad A_0x_0^2+A_1x_1^2=\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$f(x)=x^3, \quad A_0x_0^3+A_1x_1^3=\int_{-1}^{1} x^3dx=0.$$

求得$A_0=A_1=1, x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 故$[-1,1]$上两点Gauss公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

定理 3 设

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx, \qquad I_n(f)=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

$I_n(f)$是计算积分$I(f)$的插值型求积公式, 记

$$W_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

则求积公式$I(f)\approx I_n(f)$是Gauss求积公式(代数精度$2n+1$, 或$\{x_k\}_{k=0}^n$ 为Gauss点)$\Longleftrightarrow$ $W_{n+1}(x)$与任意一个次数不超过n的多项式$p(x)$正交, 即

$$\int_a^b p(x)W_{n+1}(x)dx=0.$$

证明 " $\Longrightarrow$ ": 设$I_n(f)$是Gauss公式, 则其代数精度为$(2n+1)$, 即对任意一个次数不超过$(2n+1)$ 的多项式精确成立. 设$p(x)$是任意一个次数不超过n的多项式, 则$p(x)W_{n+1}(x)$是一个次数不超过$(2n+1)$的多项式, 有

$$\int_a^b p(x)W_{n+1}(x)dx=\sum_{k=1}^{n} A_k p(x_k)W_{n+1}(x_k)=0.$$

" $\Longleftarrow$ ": 设对任意次数不超过n的多项式$p(x)$,有

$$\int_a^b p(x)W_{n+1}(x)dx = 0.$$

设$f(x)$是任意一个次数不超过$(2n+1)$的多项式, 用$W_{n+1}(x)$除$f(x)$, 设得商$s(x)$和余式$r(x)$. 即有

$$f(x) = s(x)W_{n+1}(x) + r(x),$$

显然$s(x), r(x)$都是次数不超过n的多项式. 因此有

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b s(x)W_{n+1}(x)dx + \int_a^b r(x)dx \\
&= \int_a^b r(x)dx \quad (\text{由正交性条件}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k) \quad (\text{由插值型求积公式性质}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k s(x_k)W_{n+1}(x_k) + \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k) \quad (W_{n+1}(x_k) = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k).
\end{aligned}$$

这说明求积公式代数精度为$(2n+1)$, 即它为Gauss公式.

4.1 正交多项式

定义 6 设

$$g_n(x) = a_{n,0}x^n + a_{n,1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,n-1}x + a_{n,n}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

其中$a_{n,0} \neq 0$. 如果对任意的$i, j = 0, 1, \cdots, i \neq j$有

$$(g_i, g_j) = \int_a^b g_i(x)g_j(x)dx = 0,$$

则称$\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$为区间$[a, b]$上的正交多项式序列, 称$g_n(x)$为区间$[a, b]$上的$n$次正交多项式.

定理 4 设$\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$为区间$[a, b]$上的正交多项式序列, 则对任意的$n$, 多项式

$$g_0(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)$$

线性无关.

由该结论知, 如果$\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$为区间$[a, b]$上的正交多项式序列, 则$g_0(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)$组成$n$次多项式空间的一组基, 从而$g_n(x)$与任意一个次数不超过$n-1$的多项式正交.

定理 5 设$\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$为区间$[a,b]$上的正交多项式序列, 则$g_n(x)$在$(a,b)$有$n$个不同的实零点.

定义 7 称

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n},\quad n=0,1,2,\cdots$$

为*n*次勒让德(*Legendre*)多项式

由定义可知

$$P_0(t)=1,\quad P_1(t)=t,\quad P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1),$$
$$P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t),\quad P_4(t)=\frac{1}{8}(35t^4-30t^2+2),\cdots.$$

定理 6 *Legendre*多项式序列$\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$是区间$[-1,1]$上的正交多项式序列.

4.2 区间$[-1,1]$上的Gauss公式

考虑区间$[-1,1]$上的Gauss公式

$$I(g)=\int_{-1}^{1}g(t)dt\approx\sum_{k=0}^{n}\tilde{A}_k g(t_k),$$

由定理3, 定理4和定理5知, $n+1$次Legendre多项式$P_{n+1}(t)$的零点就是Gauss公式的节点, 而求积系数

$$\tilde{A}_k=\int_{-1}^{1}\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{t-t_j}{t_k-t_j}dt,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

当$n=0$时, $t_0=0$, $\tilde{A}_0=2$, 得1个节点的Gauss公式

$$\int_{-1}^{1}g(t)dt\approx 2g(0).$$

$n=1$时, $t_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}, t_1=\frac{1}{\sqrt{3}}, \tilde{A}_0=1, \tilde{A}_1=1$, 得到2个节点的Gauss公式

$$\int_{-1}^{1}g(t)dt\approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

当$n=2$时, $t_0=-\sqrt{\frac{3}{5}}, t_1=0, t_2=\sqrt{\frac{3}{5}}, \tilde{A}_0=\frac{5}{9}, \tilde{A}_1=\frac{8}{9}, \tilde{A}_2=\frac{5}{9}$.
得到3点Gauss公式

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx \frac{5}{9}g\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)+\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}g\Big(\sqrt{\frac{3}{5}}\Big).$$

4.3 区间$[a,b]$上的Gauss公式

考虑区间$[a,b]$上的积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx,$$

作变换$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$, 可得

$$I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt.$$

由$[-1,1]$上的Gauss公式得$[a,b]$上的Gauss公式

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}\frac{b-a}{2}\tilde{A}_k f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_k\right).$$

令

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k, \quad A_k = \frac{b-a}{2} \tilde{A}_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

则得$[a, b]$上的Gauss积分公式为

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

4.4 Gauss公式的截断误差

定理 7 设$f(x) \in C^{2n+2}[a,b]$, 则Gauss公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的截断误差为

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \\ &= \frac{f^{(2n+2)}}{(2n+2)!} \int_a^b W_{n+1}^2(x)dx, \end{aligned}$$

其中$W_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j), \quad \xi \in (a,b).$

4.5 Gauss公式的稳定性和收敛性

定理 8 *Gauss*公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的求积系数$A_k > 0(k = 0, 1, \cdots, n)$.

在利用求积公式$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$计算中, 由于舍入误差影响, $f(x_k)$往往有误差, 即计算时用$f(x_k)$的近似值$\tilde{f}_k$计算, 因而实际求得定积分近似值为

$$I_n(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{n} A_k \tilde{f}_k.$$

定义 8 求积公式$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f(x_k)$, 其近似值为$I_n(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{n} A_k \tilde{f}_k$. 如果对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$\max\limits_{0\le k\le n} |f(x_k) - \tilde{f}_k| < \delta$时, 有$|I_n(f) - I_n(\tilde{f})| < \varepsilon$, 则称该求积公式是稳定的.

定理 9 *Gauss*公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

是稳定的.

定义 9 给定求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}),$$

如果对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 当$n > N$时, 有$|I(f) - I_n(f)| < \varepsilon$, 则称该求积公式收敛.

定理 10 设$f(x) \in C[a,b]$, 则*Gauss*公式收敛.

4.6 带权积分

积分

$$I(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

称为带权积分, 其中$\rho(x)$称为权要满足: $\rho(x)$在$[a,b]$上连续, 且

1) 当$x\in(a,b)$时, $\rho(x)\geq 0$;

2) $\displaystyle\int_a^b \rho(x)dx>0$;

3) 对$k=0,1,2,\cdots$, 积分$\displaystyle\int_a^b x^k\rho(x)dx$存在.

可以构造带权积分的求积公式:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k). \tag{18}$$

如果当$f(x)=1,x,x^2,\cdots,x^m$时, 求积公式(18)精确成立, 而当$f(x)=x^{m+1}$时, 求积公式(18)不精确成立, 则称该求积公式的代数精度是m. 当其代数精度是$(2n+1)$时, 称为Gauss公式.

例 4 给定积分$I(f)=\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$及对应的求积公式

$$I(f)\approx Af\left(\frac{1}{5}\right)+Bf(1).$$

1) 求A,B使上述求积公式的代数精度尽量高, 并指出达到的最高次代数精度;

2) 设$f(x)\in C^3[0,1]$, 求该求积公式的截断误差.

解

1) 当$f(x)=1$, 左边$=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2$, 右边$=A+B$.

当$f(x)=x$, 左边$=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{3}$, 右边$=\frac{1}{5}A+B$.

要使代数精度尽量高则

$$\begin{aligned}&A+B=2\\&\frac{1}{5}A+B=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

求得$A=\frac{5}{3}, B=\frac{1}{3}$. 此时求积公式为

$$I(f)\approx\frac{5}{3}f\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}f(1).$$

当$f(x)=x^2$时，左边$=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{5}$，右边$=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{3}(1)^2=\frac{2}{5}$.

当$f(x)=x^3$时，左边$=\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{7}$，右边$=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{3}(1)^3=\frac{26}{75}$.

所以代数精度为2.

2) 作一个2次Hermite插值多项式$H(x)$，满足

$$H\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{1}{5}\right),\quad H(1)=f(1),$$

$$H'\left(\frac{1}{5}\right)=f'\left(\frac{1}{5}\right).$$

该多项式存在唯一, 且

$$f(x)-H(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x-\frac{1}{5}\right)^2(x-1),\quad \xi\in\left(\frac{1}{5},1\right).$$

所以

$$\begin{aligned}
&I(f)-\left[\frac{5}{3}f\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}f(1)\right]\\
&=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx-\left[\frac{5}{3}H\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}H(1)\right]\quad \text{(由插值条件)}\\
&=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx-\int_0^1\frac{H(x)}{\sqrt{x}}dx\quad \text{(利用代数精度为2)}\\
&=\int_0^1\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(x-\frac{1}{5}\right)^2(x-1)dx\\
&=\frac{f^{(3)}(\eta)}{3!}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\left(x-\frac{1}{5}\right)^2(x-1)dx\quad \text{(积分中值定理)}\\
&=-\frac{16}{1575}f^{(3)}(\eta),\quad \eta\in(0,1).
\end{aligned}$$

例 5 设$f(x)\in C^4[a,b]$, 对积分$I(f)=\int_a^b f(x)dx$

1) 构造具有3次代数精度的Gauss公式$G(f)$;

2) 证明$I(f)-G(f)=\frac{1}{135}(\frac{b-a}{2})^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi\in(a,b)$;

3) 构造对应的2点复化Gauss公式$G_n(f)$.

5 数值微分

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad (\text{向前差商})$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}, \qquad (\text{向后差商})$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}, \qquad (\text{中心差商})$$

将$f(x_0+h), f(x_0-h)$在x_0点Taylor展开, 可以得

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\frac{h}{2}f''(x_0) + O(h^2),$$

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = \frac{h}{2}f''(x_0) + O(h^2),$$

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = -\frac{h^2}{6}f'''(x_0) + O(h^3),$$

插值型求积公式
复化求积公式
Romberg求积法
Gauss求积公式
数值微分
习 题
访问主页
标题页
第 51 页 共 52 页
返 回
全屏显示
关 闭
退 出

6 习 题

p.253～266

1, 2(2), 3(2), 5, 9, 10, 12, 13.