第三章 线性方程组的数值解

本章主要内容:

- Gauss消去法，Gauss列主元消去法
- 向量和矩阵的范数，方程组的性态和误差估计
- Jacobi迭代、Gauss-Seidel迭代格式，收敛性的判别
- 幂法和反幂法

1 Gauss消去法

思想：利用线性代数中学习过的初等行变换将方程组化为等价的三角形方程组.

1.1 三角形方程组的回代法

考虑三角形方程组

$$\begin{array}{lllllll} u_{11}x_1+ & u_{12}x_2+ & \cdots+ & u_{1,n-1}x_{n-1}+ & & u_{1n}x_n & = y_1 \\ & u_{22}x_2+ & \cdots+ & u_{2,n-1}x_{n-1}+ & & u_{2n}x_n & = y_2 \\ & & \ddots & \cdots & & \cdots\cdots & \\ & & & u_{n-1,n-1}x_{n-1}+ & & u_{n-1,n}x_n & = y_{n-1} \\ & & & & & u_{nn}x_n & = y_n \end{array}$$

其中$u_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$. 用下面的回代法求解:

$$x_n = y_n/u_{nn},$$

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)/u_{ii}, \quad i=n-1,n-2,\cdots,1.$$

1.2 Gauss消去法

考虑一般的线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

将方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$用增广矩阵表示, 记

$$\bar{\boldsymbol{A}}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix},$$

其中

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \cdots n,$$
$$a_{i,n+1}^{(1)} = b_i, \quad i = 1, 2 \cdots, n.$$

下面用$n-1$步消元（初等行变换）将矩阵$\bar{\boldsymbol{A}}^{(1)}$化为上三角矩阵.

1) **第1步消元：** 假设$a_{11}^{(1)} \neq 0$ (否则交换两行的位置), 记$l_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, 第1行乘$-l_{i1}$加到第行$i$ $(2 \leq i \leq n)$行得

$$\bar{\boldsymbol{A}}^{(1)} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

其中

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad i = 2, 3, \cdots, n, \quad j = 2, 3, \cdots, n+1.$$

2) **第2步消元：** 假设$a_{22}^{(2)} \neq 0$ (否则交换两行的位置), 记$l_{i2} =$

$\dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$, 第2行乘$-l_{i2}$加到第$i$ $(3 \le i \le n)$行得

$$\bar{\boldsymbol{A}}^{(2)} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & a_{3,n+1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{3n}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & a_{n,n+1}^{(3)} \end{bmatrix}$$

其中

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - l_{i2}a_{2j}^{(2)}, \quad i = 3, 4, \cdots, n, \quad j = 3, 4, \cdots, n+1.$$

3) 假设按上面进行了$k-1$步消元, 即有

$$\bar{\boldsymbol{A}}^{(1)} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(2)} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(3)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(k)},$$

其中$\bar{\boldsymbol{A}}^{(k)}$

$$
=\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2,k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3,k-1}^{(3)} & a_{3k}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & a_{3,n+1}^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & a_{k-1,n+1}^{(k-1)} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} & a_{k+1,n+1}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)}
\end{bmatrix}
$$

4) **第k步消元：** 假设$a_{kk}^{(k)} \neq 0$ (否则交换两行的位置), 记$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, 第$k$行乘$-l_{ik}$加到第$i$ $(k+1 \leq i \leq n)$行得

$$\bar{\boldsymbol{A}}^{(k)} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(k+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,k}^{(2)} & a_{2,k+1}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3,k}^{(3)} & a_{3,k+1}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & a_{3,n+1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & a_{k+1,n+1}^{(k+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+2,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+2,n}^{(k+1)} & a_{k+2,n+1}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & a_{n,n+1}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

其中

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)},$$
$$i = k+1, k+2, \cdots, n, \quad j = k+1, k+2, \cdots, n+1. \qquad (2)$$

5) 总共进行$n-1$步$(k = 1, 2, \cdots, n-1)$消元后,

$$\bar{\boldsymbol{A}}^{(1)} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(2)} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(3)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(k)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bar{\boldsymbol{A}}^{(n)},$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{A}}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & a_{n-1,n+1}^{(n-1)} \\ & & & & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

若记

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n-1,n+1}^{(n-1)} \\ a_{n,n+1}^{(n)} \end{bmatrix},$$

则(3)对应的线性方程组为$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, 用回代可求得$\boldsymbol{x}$.

可以估计, Gauss消元法解线性方程组(1)需要加减法和乘除法次数均为$O(n^3)$.

定理 1 *给定线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. 如果$\boldsymbol{A}$的各阶顺序主子式非零, 则Gauss消去法中的各主元$a_{kk}^{(k)}(k=1,2,\cdots,n)$均非零.*

1.3 三对角方程组的追赶法

考虑三对角方程组

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

其系数矩阵元素满足

1) $|b_1| > |c_1| > 0$;

2) $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \quad a_i c_i \neq 0 (i = 2, 3, \cdots, n-1)$;

3) $|b_n| > |a_n| > 0$.

易证(4)的系数矩阵非奇异. 利用Gauss消去法解方程组(4), 每步

消元只要消一个元素. 消元过程算法如下:

$$\beta_1 = b_1, \quad y_1 = d_1,$$
$$\text{对} i = 2, 3, \cdots, n \text{ 做}$$
$$l_i = \frac{a_i}{\beta_{i-1}}, \quad \beta_i = b_i - l_i c_{i-1}, \quad y_i = d_i - l_i y_{i-1}.$$

回代算法:

$$x_n = y_n / \beta_n,$$
$$\text{对} i = n-1, n-2, \cdots, 1 \text{ 做}$$
$$x_i = (y_i - c_i x_{i+1}) / \beta_i.$$

1.4 列主元Gauss消去法

由(2)看出，在Gauss消去法中, 当$|l_{ik}|$很大(如$|a_{kk}^{(k)}|$很小)时, 元素a_{kj}很小的误差，将导致元素$a_{ij}^{(k+1)}$较大的误差. 所以希望$|l_{ik}| \le 1$.

设进行了$k-1$步消元.

$$\bar{\boldsymbol{A}}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2,k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3,k-1}^{(3)} & a_{3k}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & a_{3,n+1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & a_{k-1,n+1}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} & a_{k+1,n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

在第k步消元之前, 从第k列位于对角线以下的元素中选绝对值

最大者作为主元. 如果

$$|a_{sk}^{(k)}| = \max_{k\le i\le n} |a_{ik}^{(k)}|,$$

即(s,k)元素绝对值最大, 则交换第s行和第k行对应元素， 然后进行消元. 显然此时有

$$|l_{ik}| = \left|\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\right| \le 1.$$

例 1 *用列主元Gauss消去法求下列方程组的解.*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 12 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2 方程组的性态与误差分析

2.1 向量范数

设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{R}^n$.

定义 1 *设$f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|$是$\mathbf{R}^n$上的函数, 如果满足:*

1) (非负性) $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, *有*$\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$, *且*$\|\boldsymbol{x}\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$;

2) (齐次性) $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, $\lambda\in\mathbf{R}$, *有*$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$;

3) (三角不等式) $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$, *有*$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

则称$\|\cdot\|$*为*$\mathbf{R}^n$*上的范数.*

常用的三个向量范数:

1) 1−范数: $\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$;

2) ∞−范数: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$;

3) 2−范数: $\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$.

由范数定义的三角不等式易得

$$\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

定理 2 *设$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$为$\mathbf{R}^n$上的任意一个向量范数, 则$f(\boldsymbol{x})$为$\boldsymbol{x}$分量的连续函数. 即*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}).$$

定义 2 *设$\|\cdot\|_p$和$\|\cdot\|_q$是$\mathbf{R}^n$上两个范数. 如果存在正常数c_1, c_2使得对$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 有*

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_q \le c_2\|\boldsymbol{x}\|_p,$$

则称范数$\|\cdot\|_p$和$\|\cdot\|_q$等价.

定理 3 *$\mathbf{R}^n$上任意两个范数都等价.*

定义 3 *设$\|\cdot\|$是$\mathbf{R}^n$上的范数, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, 称$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$为$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$之间的距离.*

利用距离可以研究2个向量之间的绝对误差和相对误差. 设$\boldsymbol{x}^*$, $\tilde{\boldsymbol{x}}$是方程组$A\boldsymbol{x} = b$的精确解和近似解. 则可用$\|\boldsymbol{x}^* - \tilde{\boldsymbol{x}}\|$和$\dfrac{\|\boldsymbol{x}^* - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}^*\|}$或$\dfrac{\|\boldsymbol{x}^* - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|}$表示近似解$\tilde{\boldsymbol{x}}$的绝对误差和相对误差.

定义 4 设$\|\cdot\|$是$\mathbf{R}^n$中的一个范数，$\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots$是$\mathbf{R}^n$中的一个向量序列, $\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n$为常向量. 如果

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{c}\|=0,$$

则称向量序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$收敛于$\boldsymbol{c}$, 记为

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{c}.$$

2.2 矩阵范数

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},$$

$\|\cdot\|$为$\mathbf{R}^n$上的一个范数.

定义 5 称

$$\max_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}}\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

为矩阵A的范数, 记为$\|A\|$. 即

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

问题： 最大值能否取到?

矩阵范数的性质：设$\|\cdot\|$是一个矩阵范数, 则有

1) $\forall \boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \|\boldsymbol{A}\| \geq 0$, 且$\|\boldsymbol{A}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

2) $\forall \boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbf{R}$, 有$\|\lambda\boldsymbol{A}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{A}\|$.

3) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 有$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$.

4) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 有$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

5) $\forall \boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 有$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|$.

定义 6 设$\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$\boldsymbol{B}$的$n$个特征值. 称

$$\rho(\boldsymbol{B}) = \max_{1\leq i\leq n}\{|\lambda_i|\}$$

为矩阵$\boldsymbol{B}$的谱半径.

定理 4 设$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 则

1)

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2)

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

3)

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}.$$

定理 5 *设$\|\cdot\|$是$\mathbf{R}^{n\times n}$上的任意一个矩阵范数，$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 则有*

$$\rho(\boldsymbol{A}) \le \|\boldsymbol{A}\|.$$

定理 6 *如果$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$为对称矩阵，则$\rho(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_2$.*

定义 7 *设$\|\cdot\|_p$和$\|\cdot\|_q$为$\mathbf{R}^{n\times n}$上的两个范数，如果存在正常数c_1, c_2, 使得对$\forall \boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$有*

$$c_1\|\boldsymbol{A}\|_p \le \|\boldsymbol{A}\|_q \le c_2\|\boldsymbol{A}\|_p.$$

则称$\|\cdot\|_p$和$\|\cdot\|_q$等价.

定理 7 $\mathbf{R}^{n\times n}$上任意两个矩阵范数都等价.

定义 8 设$\|\cdot\|$是$\mathbf{R}^{n\times n}$上的矩阵范数, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 称$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|$为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$之间的距离.

定义 9 设$\|\cdot\|$是$\mathbf{R}^{n\times n}$上的矩阵范数, $\boldsymbol{A}^{(0)},\boldsymbol{A}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(k)},\cdots$ 为$\mathbf{R}^{n\times n}$ 上的一个矩阵序列, $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$. 如果

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\|=0,$$

则称矩阵序列$\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$收敛于矩阵$\boldsymbol{A}$, 记为

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}.$$

定理 8 设$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 则矩阵序列$\boldsymbol{I},\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^2,\cdots,\boldsymbol{B}^k,\cdots$收敛于零矩阵(即 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^k=\mathbf{0}$) 的充要条件是$\rho(\boldsymbol{B})<1$.

2.3 方程组的性态和条件数

例3.6 考虑方程组

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},$$

其解为$x_1 = x_2 = 1.$

设方程组系数有小扰动, 方程组成为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1.0005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

其解为$x_1 = x_2 = 0.99975006.$

该例子说明矩阵误差对解的影响不大.

例3.7 考虑方程组

$$\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -1 & 1.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001 \end{bmatrix},$$

其解为$x_1 = x_2 = 1.$

同样，若系数有误差，方程组变为

$$\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -1 & 1.0015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001 \end{bmatrix},$$

其解为$x_1 = x_2 = \dfrac{2}{3}.$

这个例子说明方程组的系数矩阵的误差对解的影响很大. 问题：怎么判别?

设$\boldsymbol{A}$非奇异, $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, 方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的精确解为$\boldsymbol{x}^*$.

1) 设$\boldsymbol{b}$有很小的扰动$\delta\boldsymbol{b}$, 此时解$\boldsymbol{x}^*$变为$\boldsymbol{x}^*+\delta\boldsymbol{x}^*$, 即有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^*+\delta\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}.$$

注意到$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}$，则得

$$\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}^*=\delta\boldsymbol{b},$$

即

$$\delta\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{b}.$$

两边取范数并由矩阵范数性质得

$$\|\delta\boldsymbol{x}^*\|\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{b}\|.$$

另一方面，由方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}$可得

$$\|\boldsymbol{b}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}^*\|.$$

从而有

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}^*\|}{\|\boldsymbol{x}^*\|}\le\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}. \tag{5}$$

2) 设$\boldsymbol{A}$有微小变化$\delta\boldsymbol{A}$, 解变为$\boldsymbol{x}^*+\delta\boldsymbol{x}^*$. 即

$$(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}^*+\delta\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{b}.$$

利用方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$得

$$\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^* + \delta\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}^* = 0,$$

即

$$\delta\boldsymbol{x}^* = -\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^* + \delta\boldsymbol{x}^*).$$

两边取范数得

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}^*\|}{\|\boldsymbol{x}^* + \delta\boldsymbol{x}^*\|} \le \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\frac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}. \tag{6}$$

定义 10 *设$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵，称$\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$为矩阵$\boldsymbol{A}$的条件数，记为*

$$cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|.$$

常用的条件数

1) $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty = \|\boldsymbol{A}\|_\infty\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty.$

2) $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2 = \|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}}.$

当$\boldsymbol{A}$对称正定时, $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}$

其中,$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$和$\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$分别为$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$的最大特征值和最小特征值, λ_1和λ_n分别为$\boldsymbol{A}$的最大特征值和最小特征值.

定义 11 *对于方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中$\boldsymbol{A}$非奇异. 如果$\boldsymbol{A}$的条件数很大, 则称该方程组为病态（坏条件）方程组; 如果$\boldsymbol{A}$的条件数比较小，则称该方程组为良态（好条件）方程组.*

可以计算例3.6中矩阵的条件数$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty=2$, 故例3.6中的方程组是良态的. 而例3.7中矩阵的条件数$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_\infty=22002$, 故例3.6中的方程组是病态的.

在实际中, 由于计算$\boldsymbol{A}^{-1}$很麻烦, 所以$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$不容易计算. 但可以通过下面情形来判断病态矩阵：

1) 用列主元Gauss消去法时出现绝对值很小的主元.

2) 系数矩阵某些行(列)近似线性相关.

3) 系数矩阵元素间数量级相差很大，且没有一定规律.

对于病态方程组，一般可以采用

1) 双精度计算，减少舍入误差;

2) 对方程组进行预处理. 即选择非奇异矩阵$\boldsymbol{D},\boldsymbol{C}$, 将方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$化为等价的方程组$\boldsymbol{DAC}[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}]=\boldsymbol{Db}$, 使$\boldsymbol{DAC}$的条件数比较小.

2.4 方程组近似解可靠性的判别

设$\tilde{\boldsymbol{x}}$为方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的近似解，记$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$, 若$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, 则$\tilde{\boldsymbol{x}}$为精确解. 一般$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$.

问题　能否根据$\|\boldsymbol{r}\|$的大小来判断近似解$\tilde{\boldsymbol{x}}$的精确程度?

定理 9 *设$\tilde{\boldsymbol{x}}$是方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的的一个近似解，$\boldsymbol{x}^*$为精确解，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$. 则*

$$\frac{\|\boldsymbol{x}^* - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}^*\|} \leq \mathrm{cond}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

.

3 线性方程组的迭代法

3.1 迭代格式的构造

设$\boldsymbol{A}$非奇异，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. 考虑方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 设其解为$\boldsymbol{x}^*$. 将方程组改写为等价的方程

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$$

这里$\boldsymbol{B}$为n阶方阵，$\boldsymbol{f} \in \mathbf{R}^n$. 任取一个向量$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, 产生迭代

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}, \quad k = 0, 1, 2 \cdots . \tag{7}$$

上式产生一个向量序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$. 若它收敛于$\bar{\boldsymbol{x}}$, 即

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{x}},$$

(7)两边取极限得$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{f}$, 它等价于$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$. 故$\bar{\boldsymbol{x}}$是原方程组的解，即$\boldsymbol{x}^* = \bar{\boldsymbol{x}}$.

(7)称为迭代格式, $\boldsymbol{B}$为迭代矩阵. 若迭代格式(7)对任意初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$产生的迭代序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$均收敛，称该迭代收敛.

问题

1) 怎样构造迭代格式?

2) 迭代何时收敛?

3.2 三个常用的迭代格式

将线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$写为分量形式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

假设$a_{ii} \neq 0\ (i = 1, 2 \cdots, n)$.

1) **Jacobi迭代格式**

在上述方程组中第i个方程求出x_i得

$$\begin{aligned} x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{34}x_4 \cdots - a_{3n}x_n)/a_{33} \\ &\vdots \\ x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{aligned}$$

从而产生下面的Jacobi迭代

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\
x_3^{(k+1)} &= (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)})/a_{33} \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn}
\end{aligned}
$$

下面将Jacobi迭代用矩阵和向量表示. 记

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ a_{21} & 0 & & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & 0 & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n,n-1} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{D}+\tilde{\boldsymbol{U}} \quad \Longrightarrow \\
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow (\tilde{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{D}+\tilde{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\
&\Longrightarrow \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}=-(\tilde{\boldsymbol{L}}+\tilde{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b} \\
&\Longrightarrow \quad \boldsymbol{x}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{L}}+\tilde{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Jacobi迭代：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}_J, \quad k=0,1,\cdots.$$

其中

$$\boldsymbol{J}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{L}}+\tilde{\boldsymbol{U}}), \quad \boldsymbol{f}_J=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

2) **Gauss-Seidel迭代格式**

在Jacobi迭代中将已经求出的分量直接参加下一个分量的计

算, 得到下面的Gauss-Seidel迭代.

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\
x_3^{(k+1)} &= (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)})/a_{33} \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn}
\end{aligned}
$$

用矩阵表示为:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{x}^{(k)}), \\
&\Longrightarrow (\boldsymbol{D} + \tilde{\boldsymbol{L}})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{x}^{(k)}.
\end{aligned}
$$

Gauss-Seidel迭代:

$$
\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}_G, \quad k = 0, 1, \cdots .
$$

其中

$$
\boldsymbol{G} = -(\boldsymbol{D} + \tilde{\boldsymbol{L}})^{-1}\tilde{\boldsymbol{U}}, \quad \boldsymbol{f}_G = (\boldsymbol{D} + \tilde{\boldsymbol{L}})^{-1}\boldsymbol{b}.
$$

3) SOR(逐次超松弛)迭代格式

已知$\boldsymbol{x}^{(k)} = (\boldsymbol{x}_1^{(k)}, \boldsymbol{x}_2^{(k)}, \cdots, \boldsymbol{x}_n^{(k)})^T$，将Gauss-Seidel迭代得到的$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$与$\boldsymbol{x}^{(k)}$加权平均, 得到SOR迭代:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} &= (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= (1-\omega)x_n^{(k)} + \omega(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})
\end{aligned}
$$

其中ω为松弛因子. 当$\omega = 1$, 上式成为Gauss-Seidel迭代.

将SOR迭代用矩阵表示：

$$
\begin{aligned}
&x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{x}^{(k)}), \Longrightarrow \\
&\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k)} = (1-\omega)\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega(\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{x}^{(k)}), \Longrightarrow \\
&(\boldsymbol{D} + \omega\tilde{\boldsymbol{L}})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = [(1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega\tilde{\boldsymbol{U}}]\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega\boldsymbol{b}, \Longrightarrow \\
&\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{S}_\omega \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}_\omega.
\end{aligned}
$$

其中

$$
\boldsymbol{S}_\omega = (\boldsymbol{D} + \omega\tilde{\boldsymbol{L}})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega\tilde{\boldsymbol{U}}], \quad \boldsymbol{f}_\omega = \omega(\boldsymbol{D} + \omega\tilde{\boldsymbol{L}})^{-1}\boldsymbol{b}.
$$

3.3 迭代格式的收敛性

1) 迭代法基本定理

定理 10 迭代格式$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \quad (k = 0, 1, 2\cdots)$收敛$\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{B}) < 1.$

证明

定理 11 *若迭代矩阵*$\|\boldsymbol{B}\| < 1$, *则迭代*$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$*收敛.*

2) Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代的收敛性

由定理10, Jacobi迭代收敛$\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{J}) < 1$. $\boldsymbol{J}$的特征方程为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}| = |\lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{L}} + \tilde{\boldsymbol{U}})| = |\boldsymbol{D}^{-1}(\lambda \boldsymbol{D} + \tilde{\boldsymbol{L}} + \tilde{\boldsymbol{U}})| = 0.$$
$$\Longleftrightarrow |\lambda \boldsymbol{D} + \tilde{\boldsymbol{L}} + \tilde{\boldsymbol{U}}| = 0.$$

同样由定理10, Gauss-Seidel迭代收敛$\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{G}) < 1$. $\boldsymbol{G}$的特征方程为

$$\begin{aligned} &|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}| = |\lambda \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{D} + \tilde{\boldsymbol{L}})^{-1}\tilde{\boldsymbol{U}}| \\ &= |(\boldsymbol{D} + \tilde{\boldsymbol{L}})^{-1}(\lambda(\boldsymbol{D} + \tilde{\boldsymbol{L}}) + \tilde{\boldsymbol{U}}| = 0. \\ &\Longleftrightarrow |(\lambda(\boldsymbol{D} + \tilde{\boldsymbol{L}}) + \tilde{\boldsymbol{U}}| = 0. \end{aligned}$$

定义 12 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,2,\cdots,n$$

则称A按行严格对角占优；如果

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad j=1,2,\cdots,n$$

则称A按列严格对角占优。按行严格对角占优或按列严格对角占优统称为严格对角占优。

引理 设A是严格对角占优的，则$|A| \neq 0$.

证明:这里仅证A是按行严格对角占优的情况.用反证法.

设$|A| \neq 0$, 则齐次方程组$Ax = 0$有非零解$x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$

设$\|x^*\|_\infty = |x_k^*| \neq 0$. 由第k个方程

$$a_{kk}x_k^* + \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^* = 0$$

可得

$$\begin{aligned} |a_{kk}| \cdot |x_k^*| &= |\sum_{j=1,j\neq k}^{n} a_{kj}x_j^*| \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}| \cdot |x_j^*| \\ &\leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}| \cdot |x_k^*| \end{aligned}$$

两边约去$|x_k^*|$, 得

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}|$$

与按行严格对角占优矛盾. 因而$|A| \neq 0$.

定理 12 *给定线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 如果$\boldsymbol{A}$是严格对角占优矩阵, 则Jacobi迭代格式收敛.*

证明: 记

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

则Jacobi迭代矩阵J的特征方程为$|B(\lambda)|=0$. 设A是按行严格对角占优的，则当$|\lambda|\geq 1$时，有

$$|\lambda a_{ii}|\geq |a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{ij}|\ \ (i=1,2,\cdots,n)$$

即$B(\lambda)$是严格按行对角占优的。由上面的一个引理可知，当$|\lambda|\geq 1$时，$|B(\lambda)|\neq 0$. 换句话说，方程$|B(\lambda)|=0$的n个根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$都应满足$|\lambda_i|<1, i=1,2,\cdots,n$. 于是$\rho(J)<1$. 同样可证当A按列严格对角占优的情况。因而Jacobi迭代格式收敛。

定理 13 给定线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 如果$\boldsymbol{A}$是严格对角占优矩阵, 则*Gauss-Seidel*迭代格式收敛.

证明: 记

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

则Gauss-Seidel迭代矩阵G的特征方程为$|C(\lambda)|=0$. 设A是按行严格对角占优的，则当$|\lambda|\geq 1$时，有

$$\begin{aligned} |\lambda a_{ii}| &= |\lambda||a_{ii}| > |\lambda| \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{ij}| \\ &\geq |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \quad i=1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

即$C(\lambda)$是严格按行对角占优的。由上面的一个引理可知，当$|\lambda|\geq 1$时，$|C(\lambda)|\neq 0$. 换句话说，方程$|C(\lambda)|=0$的n个根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$都应满足$|\lambda_i|<1, i=1,2,\cdots,n$. 于是$\rho(G)<$

1. 同样可证当A按列严格对角占优的情况。因而Gauss-Seidel迭代格式收敛。

3) SOR迭代的收敛性

SOR迭代的迭代矩阵为

$$S_\omega = (\boldsymbol{D} + \omega\tilde{\boldsymbol{L}})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega\tilde{\boldsymbol{U}}],$$

由定理10, SOR迭代收敛$\Longleftrightarrow \rho(S_\omega) < 1.$

定理 14 *SOR迭代收敛的必要条件是*$0 < \omega < 2.$

证 设S_ω的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则由线性代数知

$$|\det(S_\omega)| = |\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n| \le \rho(S_\omega)^n.$$

另一方面, 由定理10, 若SOR收敛, 则$\rho(S_\omega) < 1$, 从而有$|\det(S_\omega)| < 1$. 而行列式

$$\begin{aligned}\det(S_\omega) &= \det[(\boldsymbol{D} + \omega\tilde{\boldsymbol{L}})^{-1}]\det[(1-\omega)\boldsymbol{D} - \omega\tilde{\boldsymbol{U}}]\\ &= \left(\prod_{i=1}^n a_{ii}\right)^{-1}\prod_{i=1}^n[(1-\omega)a_{ii}]\\ &= (1-\omega)^n.\end{aligned}$$

从而有

$$|(1-\omega)^n| < 1, \quad \Longrightarrow 0 < \omega < 2.$$

定理 15 *给定线性方程组* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. *如果* $\boldsymbol{A}$ *对称正定, 且* $0 < \omega < 2$, *则SOR迭代收敛.*

注 如果$\boldsymbol{A}$对称正定, 则Gauss-Seidel迭代收敛.

4 幂法与反幂法

幂法和反幂法是迭代法. 幂法用于求矩阵按模最大的特征值和对应的特征向量. 当特征值非零时，反幂法用于求按模最小的特征值和对应的特征向量.

4.1 求主特征值的幂法

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$是$n$阶方阵, 它有$n$个线性无关的特征向量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$, 对应的特征值为$\lambda_j (j = 1, 2\cdots, n)$, 按模的大小排列

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

其中λ_1是主特征值. 给定初值非零向量$\boldsymbol{v}_0$, 构造迭代

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

$\boldsymbol{v}_0$可由$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$线性表示, 设表示为

$$\boldsymbol{v}_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{x}_i,$$

且$a_1 \neq 0$. 因此有

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_{k-1} = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{A}^k\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i^k\boldsymbol{x}_i, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

1) 特征值满足$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. 则

$$\boldsymbol{v}_k = \lambda_1^k\left[a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{x}_n\right]$$

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \lambda_1^{k+1}\left[a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k+1}\boldsymbol{x}_n\right]$$

因为

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \quad i = 2, 3, \cdots, n,$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0, \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

从而当k充分大, 有

$$\boldsymbol{v}_k \approx a_1\lambda_1^k\boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{v}_{k+1} \approx a_1\lambda_1^{k+1}\boldsymbol{x}_1 \approx \lambda_1\boldsymbol{v}_k. \qquad (8)$$

由上式知$\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k\approx\lambda_1\boldsymbol{v}_k$. 该式说明$\boldsymbol{v}_k$是$\lambda_1$对应的近似特征向量, $\boldsymbol{v}_k$和$\boldsymbol{v}_{k+1}$近似线性相关. 所以

$$\lambda_1=\lim_{k\to\infty}\frac{(\boldsymbol{v}_{k+1})_i}{(\boldsymbol{v}_k)_i},$$

其中$(\boldsymbol{v}_k)_i$表示$\boldsymbol{v}_k$的第i个分量. 实际计算时，为了避免$\boldsymbol{v}_k$的分量产生溢出, 可以采用“归一化”，具体将算法改为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{v}_0\\ \boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-1}\\ m_k=\max(\boldsymbol{v}_k)\\ \boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{v}_k/m_k\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots. \tag{9}$$

其中$m_k=\max\boldsymbol{v}_k$表示$\boldsymbol{v}_k$中(首次出现的)绝对值最大的分量.

定理 16 设$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$, *则由算法(9)产生的序列*$\{\boldsymbol{u}_k\}$*和*$\{m_k\}$*均收敛, 且*

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{u}_k=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\max(\boldsymbol{x}_1)},\qquad \lim_{k\to\infty}m_k=\lambda_1.$$

证

$$\boldsymbol{u}_k=\frac{1}{m_k}\boldsymbol{v}_k=\frac{1}{m_k}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

利用上式递推得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_k &= \frac{1}{m_k}\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{m_{k-1}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-2}\right)\\
&= \frac{1}{m_k m_{k-1}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{u}_{k-2}\\
&= \cdots\\
&= \frac{1}{m_k m_{k-1}\cdots m_1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0.
\end{aligned}$$

由$\boldsymbol{u}_k$的归一化, $m_k m_{k-1}\cdots m_1 = \dfrac{\max(\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0)}{\max(\boldsymbol{u}_k)} = \max(\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0)$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_k &= \frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0}{\max(\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0)}\\
&= \frac{\lambda_1^k\left(a_1\boldsymbol{x}_1+\sum\limits_{i=2}^{n}a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{x}_i\right)}{\max\left(\lambda_1^k\left(a_1\boldsymbol{x}_1+\sum\limits_{i=2}^{n}a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{x}_i\right)\right)}\\
&= \frac{a_1\boldsymbol{x}_1+\sum\limits_{i=2}^{n}a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{x}_i}{\max\left(a_1\boldsymbol{x}_1+\sum\limits_{i=2}^{n}a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{x}_i\right)}.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\max(\boldsymbol{x}_1)}.
$$

同样

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{k-1} = \frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{u}_0}{\max(\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{u}_0)}$$
$$= \frac{\lambda_1 \max\left(a_1\boldsymbol{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{x}_i\right)}{\max\left(a_1\boldsymbol{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k-1} \boldsymbol{x}_i\right)}.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} \max(\boldsymbol{v}_k) = \lambda_1.$$

2) 当$|\lambda_1| = |\lambda_2|$, 且$|\lambda_2| > |\lambda_3|$时.

(a) $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{u}_0}{\max(\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{u}_0)} = \frac{a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 + \sum\limits_{i=3}^{n} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{x}_i}{\max\left(a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 + \sum\limits_{i=3}^{n} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{x}_i\right)}$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \frac{a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2}{\max(a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2)}.$$

$$\lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} \max(\boldsymbol{v}_k) = \lambda_1.$$

(b) $\lambda_1 = -\lambda_2$

(c) $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

Gauss消去法
方程组的性态与误差分析
线性方程组的迭代法
习题
访问主页
标题页
第 45 页 共 55 页
返回
全屏显示
关闭
退出

4.2 反幂法

当$\boldsymbol{A}$非奇异时, $\boldsymbol{A}$的特征值非零. $\boldsymbol{A}^{-1}$的按模最大特征值就是$\boldsymbol{A}$的按模最小的特征值. 因此用幂法可以求$\boldsymbol{A}^{-1}$的按模最大的特征值即$\boldsymbol{A}$的按模最小的特征值, 这就是反幂法. 算法如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{u}_{k-1} \\ m_k = \max(\boldsymbol{v}_k) \\ \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{v}_k / m_k \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots .$$

易知

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{x}_n}{\max(\boldsymbol{x}_n)}, \quad \lim_{k\to\infty} m_k = \frac{1}{\lambda_n}.$$

例 2 *给定线性方程组*

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) 分别写出求解该方程组的Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代格式.

2) 分析这两种迭代格式的收敛性.

解

1) Jacobi迭代格式:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 1, \quad k = 0, 1, \cdots . \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_2^{(k)} + 1. \end{aligned}$$

Gauss-Seidel迭代格式为:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)}, \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 1, \quad k = 0, 1, \cdots . \\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_2^{(k+1)} + 1.
\end{aligned}
$$

2) Jacobi迭代矩阵$\boldsymbol{J}$的特征方程是

$$
\begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = 0. \Longrightarrow 4\lambda^3 - 3\lambda + 1 = 0.
$$

$$
\Longrightarrow (2\lambda - 1)(2\lambda^2 + \lambda - 1) = 0, \Longrightarrow \rho(\boldsymbol{J}) = 1.
$$

故Jacobi迭代发散.

Gauss-Seidel迭代矩阵$\boldsymbol{G}$的特征方程是

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda & \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{2}\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0. \Longrightarrow \lambda(8\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0.$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{8}, \quad \rho(\boldsymbol{G}) = \frac{1}{8} < 1.$$

所以Gauss-Seidel迭代收敛.

例 3 给定线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$为n阶非奇异矩阵.构造迭代

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^{(k)}),\quad (k=0,1,2,\cdots.)$$

其中$\omega\neq 0$为常数.

1) 证明：如果迭代收敛, 则迭代序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$收敛于方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解.

2) 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, 则$\omega$取何值时迭代收敛?

解

1) 证　设$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}^*$. 在迭代格式两边取极限

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\lim_{k\to\infty}[\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^{(k)})].$$

得$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}^*+\omega(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^*)$. 因为$\omega\neq 0$, 所以$\boldsymbol{Ax}^*=\boldsymbol{b}$, 即$\boldsymbol{x}^*$是方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解.

2) 迭代格式的迭代矩阵为$\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{A}$, 迭代收敛$\Longleftrightarrow \rho(\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{A})<1$.

矩阵$\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$
\begin{aligned}
&|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{A}| \\
&=\begin{vmatrix} (\lambda-1+2\omega) & \omega & \omega \\ \omega & (\lambda-1+2\omega) & \omega \\ \omega & \omega & (\lambda-1+2\omega) \end{vmatrix}=0,
\end{aligned}
$$

记$\mu=(\lambda-1+2\omega)$, $\Longrightarrow \mu^3-3\omega^2\mu+2\omega^3=0,$

$\Longrightarrow (\mu-\omega)^2(\mu+2\omega)=0.$

$\Longrightarrow \mu=\omega$或$\mu=-2\omega, \Longrightarrow \lambda=1-\omega$或$\lambda=1-4\omega.$

$$
\left\{\begin{array}{l} |1-\omega|<1 \\ |1-4\omega|<1 \end{array}\right. \Longrightarrow 0<\omega<\frac{1}{2}.
$$

解:

$$
\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \\ 12 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}
\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}
\xrightarrow[-\frac{1}{4}r_1+r_3]{-\frac{1}{3}r_1+r_2}
$$

$$
\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}
\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}
\xrightarrow{-\frac{4}{7}r_2+r_3}
$$

$$
\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.
$$

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1.$$

最大值 $\max\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \dfrac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 能否取到? 由定理2知, 对 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续. 记

$$\mathbf{S} = \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n, \|\boldsymbol{y}\| = 1\},$$

$\mathbf{S}$是有界闭集. $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$在$\mathbf{S}$上能取到最大值, 设最大值为$M$. 即存在$\boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{S}$使得

$$\max_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{S}} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_0\| = M.$$

故对$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{x} \neq 0$, 有$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} \in \mathbf{S}$, 令$\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$, 有

$$\max_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \max_{\boldsymbol{y}\in S} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\| = M.$$

定理(10)的证明

$$" \Longrightarrow "$$

5　习题

习题3 p.120

5, 7, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 28, 30, 32(1)(2).