最优化技术方法及MATLAB的实现

曹卫华　郭正　编

化学工业出版社
教材出版中心

最优化技术方法及MATLAB的实现

▶ 曹卫华　郭正　编

ISBN 7-5025-6383-0

9 787502 563837 >

ISBN 7-5025-6383-0/G・1627

定价：16.00元

最优化技术方法及 MATLAB 的实现

曹卫华　郭正　编

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

最优化技术方法及 MATLAB 的实现/曹卫华，郭正编.
北京：化学工业出版社，2005.1

ISBN 7-5025-6383-0

Ⅰ.最… Ⅱ.①曹…②郭… Ⅲ.数学规划-应用软件，
MATLAB Ⅳ.O221

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 123778 号

最优化技术方法及 MATLAB 的实现
曹卫华 郭 正 编
责任编辑：王文峡
文字编辑：朱 磊 徐卿华
责任校对：李 林 靳 荣
封面设计：于 兵

*

化学工业出版社
教 材 出 版 中 心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）
发行电话：(010) 64982530
http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销
北京彩桥印刷厂印装
开本 850mm×1168mm 1/32 印张 6¼ 字数 164 千字
2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-6383-0/G·1627
定 价：16.00 元

前　言

随着计算机科学的发展和应用，应用最优化方法解决问题的领域在不断扩大，最优化的理论和方法也得到普及和发展。线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划和多目标规划以及图与网络技术作为最优化方法的主要内容已经成为工程技术人员和经济管理人员所必备的基础知识，目前，最优化方法课程已经开始作为高等院校的普及课程。

在“高等数学”中学习的极值理论、线性代数、向量、矩阵、泰勒公式等概念为学习“最先化方法”奠定了基础。在“最优化方法”中，这些知识的重要价值将在工程应用中得到充分体现。

在最优化方法的应用过程中，要将所学知识直接应用于解决实际问题，中间往往还有一段距离。有时，面对需要建立的复杂数学模型，尤其是繁复的数学计算问题，往往难以入手，因此，人们总是希望能够找到具有通用性和广泛性的方法，用类似于日常使用计算器的手段，解决较为复杂的计算问题。在本书中，将“最优化方法”与“MATLAB 工具箱”连接起来学习，就能够在一定程度上弥补这一缺陷。

MATLAB 是一个很不错的计算软件，它给数学计算带来了许多的便利和可能性，它提供了几十个工具箱，利用这些工具箱，可以解决不同领域的许多问题。

本书简明扼要、叙述清楚、文字流畅，既可作为工程学科、管理及经济学科的专、本科学生的“最优化方法”教材，也可作为应用“MATLAB 工具箱”入门参考教材使用。

本书是编者根据多年的教学经验，为适应新的教学需要而编写的，所有工程应用实例均经过了 MATLAB6.5 的运行。

本书由曹卫华、郭正编写，其中第1章、第2章、第5章、第6章由曹卫华编写，第3章、第4章、第7章由郭正编写。本书在定稿前曾听取苏金明教授、李旭宇博士等专家的许多宝贵意见，谨在此表示感谢，并感谢其他支持和关心本书出版的领导和同行。

由于本人水平有限，书中错误和不足之处在所难免。有不妥之处，望批评指正。

编者

2004年9月

内 容 提 要

本书内容包括线性规划与MATLAB的实现，即非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划与MATLAB的实现及图与网络分析技术等。为方便读者学习，本书安排了大量最优化方法在工程中的应用实例，根据需要逐个编写了解决这些问题的相应数学模型，应用MATLAB程序，通过简洁的运算给出了较为复杂问题的解。

本书可作为最优化技术方法或MATLAB优化工具箱应用的入门教材，供高职高专或本科院校管理、经济类专业的师生使用，也可供广大爱好者学习参考。

目　　录

1 概　述

本章提要

最优化问题广泛存在于国民经济各部门和工程应用各领域中。在所有可能的方案中搜索出最合理的、达到事先预定的最优目标方案（即最优方案）的方法称为最优化方法。

本章简要介绍了优化问题的分类及工程背景，并介绍了最优化问题辅助计算软件 MATLAB6.5 产生的背景、优化工具箱及其工程应用。

1.1 引言

随着生产、经济、技术的发展，在实际工作中，人们常常会遇到下面这样一些问题。

① 在安排生产计划方面，如何在现有的人力、物力等条件下，合理安排生产，使总产值或总利润最高。

② 在生产工艺确定方面，如何在保证产品质量的前提下，选择合理的操作方式，使操作费用最低。

③ 在产品设计方面，如何选择参数使设计既满足要求成本又最低。

④ 在配料方面，如何合理配料，在保证质量要求的前提下使成本最低。

⑤ 在资源分配中，如何使分配的方案既能满足要求，又能取得较好的经济效益。

⑥ 在城市规划和工厂布局方面，如何合理布局才能既方便群

众，又利于城市各行业及工厂的发展。

⑦ 在交通运输方面，如何在保证安全行驶的条件下，使时间最省；或如何选择合理的路线，使运输费用最低。

⑧ 在农业方面，如何合理选择生产条件，使农业生产周期最短或农产品产量最高。

⑨ 在林业方面，如何合理建造防护林带，使之既能阻挡风沙，经济又最省；或如何合理砍伐森林，使成材的木料最多。

⑩ 在商业方面，如何合理组织货源，既能满足顾客的需求，又使资金周转最快或总利润最高。

⑪ 在国防方面，如多级火箭发射，如何在规定的时间内，烧完规定的燃料，使达到的速度最大；或在规定的时间内，达到某个速度，而燃料最省；又如潜艇最佳速沉降，如何使之在限定的条件下下沉并到达预定的深度且时间最短。

诸如这类问题，就是工程应用中的最优化问题，它们的共同点都是从多个可能的方案中选出最合理的、能实现预定最优目标的方案，这个方案就称为最优方案。长期以来，人们为了得到最优方案进行了不断的研究和探索，以期望找到科学、合理的求解方法。寻找最优方案的方法称为最优化方法，利用最优化方法解决最优化问题的技术称为最优化技术，它包括以下两类问题。

① 首先如何根据问题，建立相应的数学模型，即如何用数学关系式来表示最优化问题所要达到的目标和各种约束条件。

② 采用哪些合理的最优化方法进行模型求解来得到最优化结果。

第二次世界大战以前，解决最优化问题常用的数学方法是古典的微分法和变分法。二次大战中期，由于军事的需要产生了运筹学，提出了大量不能用古典方法解决的最优化问题，从面产生了诸如线性规划、非线性规划、动态规划、图论等新的方法。此后，最优化方法的理论和方法逐步得到了丰富和发展。自 20 世纪 60 年代以来，随着工程与技术的复杂化、大型化与精密化，随着经济计划与管理的科学化和综合化，尤其是随着电子计算机日益广泛的应

用，最优化技术不仅成为一种迫切的需要，而且有了求解的有力工具，其理论和算法迅速发展起来，形成了一门新的应用数学分支学科，渗透到了生产、管理、商业、军事、决策等各个领域中，并取得了显著的经济效益和社会效益。

本书采用目前最先进的 MATLAB6.5 软件附带的优化工具箱作为最优化问题的运算工具，该软件由美国 MathWorks 公司于 1984 年推向市场，目前已发展成为国际控制界公认的标准计算软件，它以强大的科学计算与可视化功能、良好的开放性和运行的可靠性，特别是附带的 30 多种面向不同领域的工具箱支持，使其成为当今工业、管理、规划、电子、研究等各科学领域中应用开发的首选平台，是大学生、研究生甚至博士生必须掌握的基本工具，其功能包括数值分析、算法开发、图形处理、信号处理、图像处理、通讯仿真、数学建模、工程绘图及应用开发等方面，并且集应用程序和可视化结果于一个集成环境中。

在欧美各大学里，诸如应用代数、数理统计、自动控制、动态系统仿真等课程都把 MATLAB 写入教材中，使之成为 20 世纪 90 年代教材与旧版书籍的标志性区别。

1.2 最优化问题及其工程背景

最优化问题至今已出现了线性规划、非线性规划、整数规划、多目标规划、动态规划、图论与网络流等许多分支，在实际应用中发挥了越来越重要的作用。

1.2.1 线性规划问题

实际工作与生活当中，诸如生产计划安排、生产调度、资源分配、运输与物质调配、交通调度、投资组合、人员安排、配料、管道设计、背包负荷装载、电子线路设计中的连线问题、营养调配问题等都可以用线性规划的数学模型来描述。

1.2.2 非线性规划问题

非线性规划问题在实际应用中也很常见，一般可分为两种类型

即无约束非线性规划和有约束线性规划。工程中常见的参数控制、资源分配、库存量、电路容量问题、裁料问题、两点间最短距离、资金使用问题、电路输出功率、动力系统运行等问题都是非线性最优化问题。许多有约束的非线性最优化问题也可以转化为无约束的最优化问题或转换为更简单的子问题来进行求解。

1.2.3 整数规划问题

整数规划是线性规划中的一个特例，它的全部变量或部分变量只限于取非负的整数，像投资选择、厂址选择、指派问题、生产计划安排问题、调度问题、下料问题等都是典型的整数规划问题。

1.2.4 多目标规划问题

现实活动中，决策的目标往往不止一个，如厂址选择，既要求运费及造价等经济指标最低，又要求对环境的污染最小；又如企业生产，既希望获得高利润，又希望减少成本支出及减少对环境的污染等，这都属于多目标规划问题。不同的多目标规划问题可采用不同的方法解决。多目标决策的应用非常广泛，典型的工程应用包括国家和地区发展规划、环境保护与管理、工程项目监督与管理、企业管理与经营、工程设计和工艺、交通运输与管理等。

1.2.5 动态规划问题

动态规划是一种解决多阶段决策问题的优化方法，其决策过程一般与时间有关，各阶段的决策是相互联系的，决策依赖于当前的状态，又随状态转移，一个决策序列就是在变化中的状态中产生出来的。典型的动态规划问题包括最短路问题、机器负荷分配问题、资金安排问题、生产与存储问题、设备更新、信贷投资等。

1.2.6 图论与网络流

图是指由一组点和一组点与点之间的连线（边）所组成的总体。图论即为研究图的理论，所研究的问题分为两类。①在给定的图中具有某种性质的点和边是否存在？若存在，有多少？或至多（少）有多少？②如何构造一个具有某些性质的图或子图？许多具有离散性的问题均可通过图来表示。

图论中应用最多的是网络流。网络即为各条边上赋有权数的图，而且可以有方向或没有方向，分别称为有向网络或无向网络。网络流问题中有三类主要问题即树、路和流。实际生活中网络的应用很多，如最短路问题、网络最大流问题、电子电路问题、最小费用最大流问题等。随着计算机的蓬勃发展，图论作为组合数学的主要成员而成为运筹学、电路网络、计算机科学所不可缺少的数学工具，而且在开关理论，编码理论，计算机辅助设计，甚至社会学、化学领域都有十分成功的应用。

1.3 MATLAB6.5 优化工具箱及工程应用简介

MATLAB 诞生于 20 世纪 70 年代，意为矩阵（Matrix）和实验室（Laboratory）的组合，其内容丰富，功能强大，深受人们的欢迎。它擅长数值计算，能处理大量的数据，而且效率非常高，是科学研究和产品开发必不可少的工具，其最大特点是简单和直接，包括：①语言简单，代码灵活，库函数资源丰富；②运算符灵活，用户使用方便，编程效率高；③扩充能力强，交互性好；④程序可移植性和开放性好；⑤强大的图形图像处理功能等主要特点。

MATLAB6.5 包括 30 多个工具箱，其中优化工具箱（Optimization Toolbox）的应用最为广泛，影响也最大，可以解决很多工程实际问题。它的主要功能如下。

① 求解线性规划和二次规划问题。

② 求解函数的最大、最小值。

③ 求解非线性规划问题。

④ 求解多目标优化问题。

⑤ 求解非线性的最小二乘。

⑥ 求解大规模优化问题。

⑦ 其他问题。

本书利用 MATLAB 优化工具箱中常用的几种函数作为求解最

优化问题的计算方法，具有方便、快捷的优点，相信读者阅读后会获得对于求解最优化问题的新的理念和有意义的提示。

MATLAB 优化工具箱中用于求解最优化问题常用的函数功能及语法见表 1-1。

表 1-1 优化工具箱常用函数（Optimization Toolbox）及其功能及语法表

函数	描述	一般语法
fgoalattain	求解多目标规划的优化问题	[x,fval]=fgoalattain(fun,x0,goal,weight,A,b,lb,ub)
fminbnd	求解边界约束条件下的非线性最小化	[x,fval]=fminbnd(fun,x1,x2)
fmincon	求解有约束的非线性最小化	[x,fval]=fmincon(fun,x0,A,B)
fminimax	求解最小最大化	[x,fval]=fminimax(fun,x0)
fminsearch	求解无约束非线性最小化	[x,fval]=fminsearch(fun,x0)
fminunc	求解多变量函数的最小化	[x,fval]=fminunc(fun,x0)
linprog	求解线性规划问题	[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
quadprog	求解二次规划问题	[x,fval]=quadprog (H,f,A,b,Aeq,beq)

当量化地求解一个实际工程应用问题时，解决的方法是首先将该问题转化为数学问题，即建立数学模型，然后进行具体的分析，选择恰当的计算方法，最后进行计算。采用计算机求解数学问题时，一般是先选定计算方法，然后通过编写计算机程序进行求解。本书中在求解最优化问题时，主要应用 MATLAB6.5 的优化工具箱中几种常用函数（见表 1-1）来解决工程应用中的实际问题，其步骤如下。

① 根据实际的最优化问题，建立相应的数学模型。

② 对建立的数学模型进行具体分析和研究，选择恰当求解方法。

③ 根据最优化方法的算法，选择 MATLAB6.5 优化函数，然后编写求解程序，最后利用计算机求出最优解。

在求解过程中，数学模型的建立是非常重要的一个步骤，模型的优劣、参数选择的正确与否将直接关系到最优化问题求解的正确性和合理性，这也是最优化技术应用中的关键问题。当然，要建立一个合适的数学模型，必须对工程实际问题有较好的把握，通过仔细分析和研究抓住优化问题的主要矛盾，理清相互联系，并利用相关学科的基础理论才能最后完成合理模型的建立。

2 线性规划与 MATLAB 实现

本章提要

线性规划问题是工作和生活中最常见的问题，也是数学规划中最简单和最基础的问题。本章着重介绍了线性规划的基本理论及两种传统的求解方法，即单纯形法和大 M 法，重点阐述了如何运用 MATLAB 优化工具箱函数 linprog 来求解线性规划问题，并列举了大量的实例进行说明，以期望读者能充分了解其用法，领略它快速、简便的运算过程。

2.1 线性规划基本理论

2.1.1 线性规划问题及其数学模型

在一定约束条件下，求一个目标函数的极大（或极小）的优化模型称为数学规划，它包括约束型数学规划和无约束型数学规划两大类，见图 2-1 所示。

- 数学规划
  - 约束型数学规划
    - 线性规划、非线性规划
      - 单目标规划
      - 多目标规划
    - 整数规划（变量限取整数值）
    - 混合整数规划
  - 无约束型数学规划

图 2-1 数学规划分类

在数学规划的讨论中，把满足所有约束条件的点 x 称为可行点（或可行解），所有可行点组成的点集称为可行域，其中使目标函数达最大或最小的可行解称为最优解（最优点），目标函数值称

为最优值。

线性规划（Linear Programming）是数学规划的一个重要分支，也是最简单、最基础的一类问题，它历史悠久，理论较成熟，方法也较完善，它所研究的问题主要有两个方面：①确定一项任务，如何统筹安排，以尽量做到用最少的资源来完成它；②如何利用一定量的人力、物力和财力等资源来完成最多的任务。目前被广泛应用于军事、经济、工业、农业、教育、商业和社会科学等许多方面。

线性规划问题一般有以下特征。

① 每个问题都有一组未知数来表示某一方案，通常这些未知数都是非负的，将它们称为决策变量。

② 存在一定的限制条件，通常称为约束条件，它们可以用一组线性等式或线性不等式来表达。

③ 都有一个目标要求，且这个目标可表示为一组未知数的线性函数，通常称为目标函数。根据实际问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

因此，决策变量、约束条件和目标函数组成了线性规划数学模型的三个要素。

为研究方便，将下列形式的线性规划模型称为标准形，即对目标函数求最小值，决策变量一律为非负变量，约束条件除变量的非负条件外一律为等式约束。

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t. } \sum a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

式中，a_{ij}、b_i、c_j 均为常数，且 $b_i \geqslant 0$ （$i=1,2,\cdots,m$）。

实际问题中的线性规划模型是多种多样的，为了计算的便利，可采用一些方法将它们化为等价的标准形。

下面给出将线性规划模型转化为标准形的基本方法。

① 若目标函数为求最大值，即 $\max z$，则令 $f=-z$，将原问

题转化为在相同约束条件下求 min f。

② 若约束条件中具有不等式约束 $\sum a_{ij}x_j \leqslant b_i$，则引入新变量 x_i'，使不等式约束条件转化为下列两个等式约束条件，即

$$\sum a_{ij}x_j + x_i' = b_i,\quad x_i' \geqslant 0$$

称变量 x_i' 为松弛变量。

③ 若约束条件中具有不等式约束 $\sum a_{ij}x_j \geqslant b_i$，则引入新变量 x_i''，使不等式约束条件转化为下列两个等式约束条件，即

$$\sum a_{ij}x_j - x_i'' = b_i,\quad x_i'' \geqslant 0$$

称变量 x_i'' 为剩余变量。

④ 若约束条件中出现 $x_j \geqslant h_j$（$h_j \neq 0$），则引进新变量 $y_j = x_j - h_j$ 替代原问题中的变量 x_j，于是问题中原有的约束条件 $x_j \geqslant h_j$ 就化为新约束条件 $y_j \geqslant 0$。

⑤ 若变量 x_j 的符号不受限制，则可引进两个新变量 y_i' 和 y_i''，并以 $x_j = y_i' - y_i''$ 代入问题的目标函数和约束条件消去 x_j，同时在约束条件中增加 $y_i' \geqslant 0$，$y_i'' \geqslant 0$ 两个约束条件，称变量 y_i' 和 y_i'' 为自由变量。

【例 2-1】 将线性规划

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.}\ & 2x_1 + 3x_2 \leqslant -12 \\ & 3x_1 + 7x_2 \geqslant 4 \\ & x_1 - 2x_2 = 3 \\ & x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

化为标准形。

解 （1）令 $f = -(2x_1 + 5x_2)$；

（2）引入新变量 x_3、x_4，并令 $x_2 = x_3 - x_4$，其中 x_3、$x_4 \geqslant 0$；

（3）引入松弛变量 x_5 和剩余变量 x_6，则原问题转化为标准形，即

$$\begin{aligned} \min\ & f = -2x_1 - 5x_2 \\ \text{s. t.}\ & 2x_1 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = -12 \end{aligned}$$

$$3x_1+7x_3-7x_4-x_6=4$$
$$x_1-2x_3+2x_4=3$$
$$x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

2.1.2 线性规划问题解的几何意义及图解法

先看下面的实例，可以借助于平面图形来直观地了解线性规划解的几何特征。

【例 2-2】 有数学模型为

$$\begin{aligned}\min\ & -2x_1-x_2\\ \text{s. t.}\ & -3x_1-4x_2\geqslant -12\\ & -x_1+2x_2\geqslant -2\\ & x_1,\ x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

在平面坐标系上画出函数图形，如图 2-2 所示。

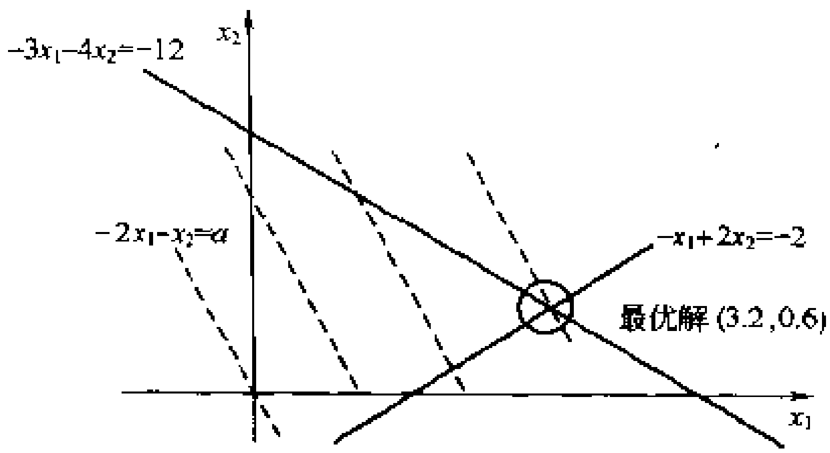

图 2-2 例 2-2 函数图形

观察目标函数 $f=-2x_1-x_2$，对于任一给定的实数 a，方程 $-2x_1-x_2=a$ 表示一直线（称为 f 的等值线，图中虚线），改变 a 的取值即得到一族相互平行的直线，使 f 的等值线向函数值 a 减小的方向移动，可以看到其与凸多边形（为可行解域）的最后一个交点（3.2，0.6）即为模型的最优解，最小目标函数值为

$$\min z=-2\times 3.2-0.6=-7$$

而（3.2，0.6）是凸多边形的一个顶点，容易相信任何一条直线作

平行移动时，与凸多边形的最后交点之一必为凸多边形的某个顶点，所以得到如下的结论，即两个变量的线性规划有最优解，则必能在可行域凸多边形的顶点中找到。

由上面关于两个变量的可行域和最优解的几何说明，可以推知线性规划解的情形如下。

① 可行域是空集。

② 有惟一最优解。

③ 有无穷多最优解。

④ 目标函数值无界而无最优解。

在线性规划问题中，利用几何特征来求最优解的方法称为图解法。图解法只适用于求解线性规划问题中含两个变量、最多三个变量的问题，即在二维或三维空间内。因为大多数线性规划问题的变量个数 $n\geqslant3$，故图解法应用不多。但该方法简单直观，有助于理解线性规划问题求解的基本原理。下面再举一个实例来说明图解法的基本解法。

【例 2-3】 某工厂制造两种产品 P_1、P_2，需用三种原料 M_1、M_2、M_3，制造 1kg 产品 P_1 需用原材料 M_1 9kg、M_2 4kg、M_3 3kg；制造 1kg 产品 P_2 需用原材料 M_1 4kg、M_2 5kg、M_3 10kg。产品 P_1 每千克的利润为 700 元，产品 P_2 每千克的利润为 1200 元。但这个工厂每天能够使用的原材料为 M_1 360kg、M_2 200kg、M_3 300kg。问每天制造多少产品 P_1、P_2，才能使工厂的利润最大？

解 设每天制造产品 P_1、P_2 的量分别为 $x_1$kg、$x_2$kg，则依据题意建立如下数学模型，即

$$
\begin{aligned}
\max\ & 7x_1+12x_2 \\
\text{s. t.}\ & 9x_1+4x_2\leqslant360 \\
& 4x_1+5x_2\leqslant200 \\
& 3x_1+10x_2\leqslant300 \\
& x_1,\ x_2\geqslant0
\end{aligned}
$$

由此绘出如图 2-3 所示图形。

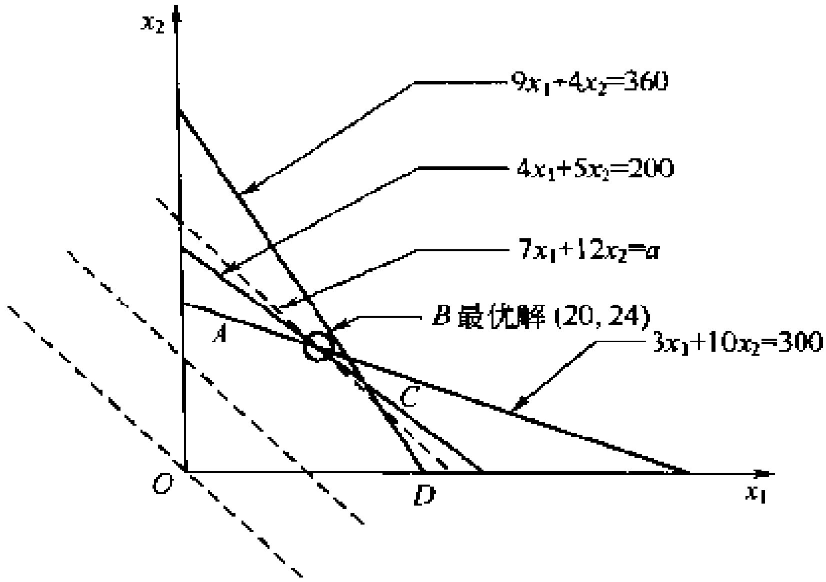

图 2-3　例 2-3 函数图形

可知，满足全部约束条件的点的集合为五边形 $OABCD$ 的边界上和内部所有的点。而且，$7x_1+12x_2=a$ 是平行等值直线族，a 越大，直线越在右上方（图中虚线）。从图上可看到，点 B 是五边形上使 a 最大的一个点，也是问题的最优解。B 点是直线 $3x_1+10x_2=300$ 和直线 $4x_1+5x_2=200$ 的交点，即 $x_1=20$，$x_2=24$。所以该问题的最优解是每天制造产品 P_1 20kg、P_2 24kg，此时工厂的利润最大，为 42800 元。

2.1.3　线性规划的基本原理

将例 2-2 的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min\ -2x_1-x_2\\
&\text{s.t.}\ \ -3x_1-4x_2\geqslant-12\\
&\qquad\ -x_1+2x_2\geqslant-2\\
&\qquad\ x_1,\ x_2\geqslant0
\end{aligned}
$$

化为标准形

$$
\begin{aligned}
&\min\ -2x_1-x_2\\
&\text{s.t.}\ \ -3x_1-4x_2-x_3=-12\\
&\qquad\ -x_1+2x_2-x_4=-2\\
&\qquad\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant0
\end{aligned}
$$

其可行域共有 4 个顶点，其对应的变量值分别为

$$(0,0,12,2)^{\mathrm{T}},(0,3,0,8)^{\mathrm{T}},(16/5,3/5,0,0)^{\mathrm{T}},(2,0,6,0)^{\mathrm{T}}$$

它们的共同点为所对应的变量值中均有两个坐标为 0。分析可知，作为平面上凸多边形的顶点必然为两条边界直线的交点，若边界直线为坐标轴，则相应的一个坐标为 0，若非坐标轴，则化标准形时所引进的松弛变量或剩余变量就应为 0。于是得到如下的一般规律，即在仅有两个决策变量的线性规划标准形的形式下，顶点所对应的变量（包括决策变量、松弛变量、剩余变量）值为 0 的个数不少于两个。

可以严格证明，对于一般的线性规划，这个规律也是成立的。

将线性规划标准形

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=i}^{n} c_j x_j \\ &\text{s. t. } \sum a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ &\qquad x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

简写为

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \\ &\text{s. t. } \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

式中，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$；$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$；$m$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，即 $r(\boldsymbol{A})=m\leqslant n$；$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{b}\geqslant 0$。

则对于简写后的线性规划标准形式，其可行解等价于线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的非负解，因线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有 n 个变量和 $r(\boldsymbol{A})=m$，因此，当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解中非负分量所对应 $\boldsymbol{A}$ 的列为线性无关解时，则非零分量的个数不少于 $n-m$。于是称 $\boldsymbol{A}$ 中对应于非零分量的列呈线性无关的 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解为简写的线性规划标准形的基本解，称非负的基本解为基本可行解。

可以证明，对于线性规划标准形，有如下定理成立。

定理 2-1 ① 若存在一个可行解，则必存在一个基本可行解；

② 若存在一个最优可行解，则必存在一个最优基本可行解。

2.2 求解线性规划问题的基本方法

2.2.1 单纯形法

单纯形法（Simple Method）是求解线性规划求解的主要方法，该法由丹塞（Dantzig）于 1947 年提出，后经多次改进而成，是求解线性规划问题的实用算法。由前面的叙述可知，如果线性规划问题的最优解存在，则必定可以在其可行解集合的顶点（极点）中找到。因此，寻求一个最优解就是在其可行解集合的诸极点中搜索最优点。单纯形法实质上是一个迭代过程，该迭代即是从可行解集合的一个极点移到另一个邻近的极点，直到判定某一极点为最优解为止。

单纯形法的基本思想是根据问题，从一个基本可行解出发，逐步改进目标函数的取值，直到求得最优基本可行解。

由此，根据线性规划基本定理，可采取如下步骤求解线性规划问题。

① 求得一个基本可行解。

② 查该基本可行解是否为最优解。

③ 若不是，则设法再求一个没有检查过的基本可行解。

④ 如此继续，直至检查出某基本可行解即为最优解为止。

将简写后的线性规划标准形写成如下表格形式，即

约束条件系数矩阵 A（中心底部）	约束条件值矩阵 b（右列）
目标函数系数矩阵 C^T（底行）	目标函数值 0（右下端）

底丝

求解时，该表格内可作如下运算。

① 底线以上部分进行行变换。

② 底线以上某一行乘一非零常数。

③ 底线以上的行进行倍加运算。

④ 把底线以上行乘常数后加至底行（包括右下端）上。

当表格具有如下特点时，即

① 中心部位具有单位子块（矩阵）；

② 右列元素非负；

③ 底行相应于单位子块位置的元素为 0；

④ 底行其他元素非负。

则从表格中立即读出线性规划问题的最优解和最优值。

最优解的读法如下。

① 单位子块中 1 对应的变量取相应右列的值。

② 不在单位子块位置中的变量取值 0。

③ 右下端元素改变符号即为最优值。

1974 年美国运筹学家 Dantzig 首创的单纯形法就是保证第①、②、③三个特点不被破坏的条件下，逐步调出第④个特点的具体步骤。

单纯形法解题步骤的前提是设当前表格已具备第①、②、③三个特点，设一般为

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
c_1	c_2	$\cdots$	c_n	$-z$

则具体解法可按以下步骤进行。

① 选择进基变量：从底行负元素中任选一个，设为 c_j（一般选最小的），所对应的变量称为进基变量。

② 选择离基变量：从所选元素对应列（x_j 列）底线以上的正元素中按下列规则选定一元素 a_{kj}，所对应的变量称为离基变

量，即

$$\theta_i=\frac{b_k}{a_{kj}}=\min_i\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\,\middle|\,a_{ij}>0\right\}$$

③ 旋转运算：利用初等行变换及倍加至底行的运算，把 a_{kj} 化为 1，该列的其他元素（包括底行相应的元素）变为 0。

④ 若底行元素均非负，算法终止，否则返回①。

定理 2-2 在已知一个基本可行解（初始基本可行解）的前提下，使用单纯形法求解线性规划时，若每次迭代得出的基本可行解的基变量均大于 0（称为非退化），则算法必有限步终止。

由定理 2-2 所述的算法终止包括如下两种情况。

① 使表具有四个特点而得到了最优解和最优值。

② 在执行第②步时，在所选列底线以上的元素中根本没有正元素，这时算法亦终止。

当有的基变量值为 0 时，即右列有零元素时（称为退化），有可能出现基本可行解重复被检查的情形（称为循环现象），则只需在执行运算第①步时，每次都选底行中左边第一个负元素即可避免循环。

【例 2-4】 用单纯形法求解线性规划问题

$$\begin{aligned}
\min\ & x_1-3x_2+2x_3+4x_4\\
\text{s.t.}\ & 2x_1-4x_3+x_4=6\\
& -x_1+x_2+3x_3=5\\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0
\end{aligned}$$

解 建立单纯形表，进行初等变换，结果如表 2-1 所示。

【例 2-5】 用单纯形法求解

$$\begin{aligned}
\min\ & -2x_1-3x_2\\
\text{s.t.}\ & -x_1+x_2\leqslant 2\\
& x_1+2x_2\leqslant 10\\
& 3x_1+x_2\leqslant 10\\
& x_1,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}$$

表 2-1　初等变换结果

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	θ_i	
x_1	2	0	-4	1	6		存在单位子块，但底行中对应的元素不为 0，作初等变换将底行对应的变量系数化为 0
x_2	-1	1	3	0	5		
	1	-3	2	4	0		
x_1^*	2	0	-4	1	6	3	←离基变量
x_2	-1	1	3	0	5	—	
	-10	0	27	0	-9		已满足第 1、2、3 三个特点
	↑进基变量						
x_1	1	0	-2	0.5	3	1	
x_2	0	1	1	0.5	8	0	
	0	0	7	5	21	0	表格已具备 4 个特点，直接读取最优解及最优值，即 $x_1=3,x_2=8,x_3=0,x_4=0$，最优值为 -21

解　先将原问题化为标准形，引进松弛变量 x_3、x_4、x_5，则有

$$\min\ -2x_1-3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.}\quad & -x_1+x_2+x_3=2 \\ & x_1+2x_2+x_4=10 \\ & 3x_1+x_2+x_5=10 \\ & x_1,x_2,x_4,x_5\geqslant 0 \end{aligned}$$

建立如下单纯形表，进行初等变换，结果如表 2-2 所示。

表格已具备 4 个特点，终止运算，直接读取最优解及最优值，即 $x_1=4$，$x_2=3$，$x_3=3$，$x_4=0$，$x_5=0$。若把引进的松弛变量略去，则最优解为 $x_1=4$，$x_2=3$，最优值为 -17。

2.2.2　大 *M* 法

当线性规划的变量及约束方程比较多，而初始基本可行解又不知道时，用试的方法得到初始基本可行解不容易，而且还有基本可行解根本不存在的情况。解决的办法是可引入人造基变量，即采用大 *M* 法。

所谓人造基变量（artifical basis），是指这些变量并不是为满足约束方程式由不等式变为等式而引起的，而是为了能应用单纯形

法来迭代并求极值而引进的，有人为的意思。

表 2-2　例 2-5 初等变换结果

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i	
x_3^a	−1	1	1	0	0	2	2	←离基变量
x_4	1	2	0	1	0	10	5	
x_5	3	1	0	0	1	15	15	
z	−2	−3	0	0	0	0		
		↑进基变量						
x_2	−1	1	1	0	0	2		
x_4^a	3	0	−2	1	0	6	2	←离基变量
x_5	4	0	−1	0	1	13	3.25	
z	−5	0	3	0	0	6		
	↑进基变量							
x_2	0	1	0.33	0.33	0	4	12	
x_1	1	0	−0.7	0.33	0	2		
x_5^a	0	0	1.67	−1.3	1	5	3	←离基变量
z	0	0	−0.3	1.67	0	16		
			↑进基变量					
x_2	0	1	0	0.6	−0.2	3		
x_1	1	0	0	−0.2	0.4	4		
x_3	0	0	1	−0.8	0.6	3		
z	0	0	0	1.4	0.2	17		

大 M 法的基本步骤如下。

① 把问题转化为标准形式。

② 在约束条件是“≥”和“=”类型的每一个方程的左边加上一个非负变量 M，这些变量称为“人造基”。

③ 对于初始基本解应用人造基，其目标系数必须为零，这可通过把约束方程乘上一个适当的常数加到目标函数上来实现。

④ 按单纯形法的正规步骤进行运算。

应用大 M 法进行笔算时，可以用符号 M 进行，当在计算机上

运算时则赋以足够大的具体正数。

【例 2-6】 求解线性规划问题

$$\begin{aligned} &\min\ -3x_1+x_2+2x_3 \\ &\text{s.t.}\ \ 3x_1+2x_2-3x_3=6 \\ &\qquad -x_1+2x_2-x_3=-4 \\ &\qquad x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 \end{aligned}$$

解 引入足够大的正数 M 及人工变量 x_4、x_5，将问题修改为

$$\begin{aligned} &\min\ -3x_1+x_2+2x_3+Mx_4+Mx_5 \\ &\text{s.t.}\ \ 3x_1+2x_2-3x_3+x_4=6 \\ &\qquad -x_1+2x_2-x_3+x_5=4 \\ &\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0 \end{aligned}$$

采用计算机 Excel 计算，取 $M=10$，计算表格如表 2-3 所示。

表 2-3 例 2-6 计算表格

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i	
x_4	3	2	−3	1	0	6	2	←离基变量
x_5	1	−2	1	0	1	4	4	
z	−3	1	2	10	10	0		
	↑进基变量							
x_1	1	2/3	−1	1/3	0	2		
x_5^*	0	−2.7	2	−0.3	1	2	1	←离基变量
z	0	3	−1	11	10	6		
			↑进基变量					
x_1	1	−0.7	0	0.17	0.5	3		
x_3	0	−1.3	1	−0.2	0.5	1		
z	0	1.67	0	10.8	10.5	7		

表格已具备 4 个特点，且人工变量 x_4、x_5 已经成为自由变量，直接读取最优解及最优值，即 $x_1=3$，$x_2=0$，$x_3=1$，最优值为−7。

【例 2-7】 试用大 M 法求解下列线性规划问题，即

$$\min\ -3x_1+x_2+x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & x_1-2x_2+x_3\leqslant 11 \\ & -4x_1+x_2+2x_3\geqslant 3 \\ & -2x_2+x_3=1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 \end{aligned}$$

解法一　笔算法

引入松弛变量 x_4，引入剩余变量 x_5，引入人工变量 x_6、x_7，且 x_6、x_7 在目标函数中的系数均为 M，则将原问题转化为

$$\min\ -3x_1+x_2+x_3+Mx_6+Mx_7$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ & -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6=3 \\ & -2x_2+x_3+x_7=1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\geqslant 0 \end{aligned}$$

计算表格如表 2-4 所示。

表 2-4　例 2-7 计算表格

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	θ_i	
x_4	1	-2	1	1	0	0	0	11	11	
x_6	-4	1	2	0	-1	1	0	3	3/2	
x_7	0	-2	1	0	0	0	1	1	1	←
	$4M-3$	$1+M$	$1-3M$	0	M	0	0			
			↑							
x_4	1	0	0	1	0	0	-1	10	-	
x_6	-4	5	0	0	-1	1	-2	1	1/5	←
x_3	0	-2	1	0	0	0	1	1	—	
	$4M-3$	$3-5M$	0	0	M	0	$3M-1$			
		↑								
x_4	1	0	0	1	0	0	-1	10	10	←
x_2	$-4/5$	1	0	0	$-1/5$	1/5	$-2/5$	1/5	—	
x_3	$-8/5$	0	1	0	$-2/5$	2/5	1/5	7/5	—	
	$-3/5$	0	0	0	3/5	$M-3/5$	$3M-1$			
	↑									
x_1	1	0	0	1	0	0	-1	10		
x_2	0	1	0	4/5	$-1/5$	1/5	$-6/5$	41/5		
x_3	0	0	1	8/5	$-2/5$	2/5	$-7/5$	87/5		
	0	0	0	3/5	3/5	$M-3/5$	$M-2/5$			

则最优解为 $x_1=10, x_2=41/5, x_3=87/5, x_4=0, x_5=0, x_6=0$，

$x_7=0$，最优值为$-22/5$。

解法二 采用计算机 Excel 进行计算，取 $M=10$，计算表格如表 2-5 所示。

表 2-5 例 2-7 计算表格

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	θ_i
x_4	1	−2	1	1	0	0	0	11	
x_6	−4	1	2	0	−1	1	0	3	
x_7	0	−2	1	0	0	0	1	1	
	−3	1	1	0	0	10	10	0	
x_4	1	−2	1	1	0	0	0	11	11
x_6	−4	1	2	0	−1	1	0	3	1.5
x_7^*	0	−2	1	0	0	0	1	1	1
	37	11	−29	0	10	0	0	−40	
x_4	1	0	0	1	0	0	−1	10	—
x_6^*	−4	5	0	0	−1	1	−2	1	0.2
x_3	0	−2	1	0	0	0	1	1	—
	37	−47	0	0	10	0	29	−11	
x_4^*	1	0	0	1	0	0	−1	10	10
x_2	−0.8	1	0	0	−0.2	0.2	−0.4	0.2	—
x_3	−1.6	0	1	0	−0.4	0.4	0.2	1.4	—
	−0.6	0	0	0	0.6	9.4	10.2	−1.6	
x_1	1	0	0	1	0	0	−1	10	
x_2	0	1	0	0.8	−0.2	0.2	−1.2	8.2	
x_3	0	0	1	1.6	−0.4	0.4	−1.4	17.4	
	−0	0	0	0.6	0.6	9.4	9.6	4.4	

表格已具备4个特点，且人工变量 x_6、x_7 已经成为自由变量，直接读取最优解，即 $x_1=10$，$x_2=8.2$，$x_3=17.4$ 及最优值为 -4.4。

2.3 线性规划问题的灵敏度分析

当线性规划求得解之后，需作进一步的讨论或因价格调整、工艺、条件改变、约束条件增减等诸因素，要改变原来模型中的若干系数，或增加一些变量，或增加一些约束条件。在利用原来的求解结果，或直接对最后一张表作相应修改，在此基础上继续运算，这类问题的讨论称为灵敏度分析。下面通过一个实例来进行讨论。

【例 2-8】 设某厂在资源甲、乙的限制下，考虑制定能使总利润达到最大的三种产品 A、B、C 的生产计划，有关数据如表2-6所示。

表 2-6 例 2-8 有关数据

项 目	A	B	C	拥有总数/t
甲	6	3	5	45
乙	3	4	5	30
单位利润/千元	3	1	4	

解 以 x_1，x_2，x_3 分别表示 A、B、C 的产量，则建立如下的数学模型，即

$$\begin{aligned}
&\max\ 3x_1+x_2+4x_3\\
&\text{s.t.}\ \ 6x_1+3x_2+5x_3\leqslant 45\\
&\qquad\ 3x_1+4x_2+5x_3\leqslant 30\\
&\qquad\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0
\end{aligned}$$

化为标准形

$$\min\ -3x_1-x_2-4x_3$$

$$\text{s. t. } 6x_1+3x_2+5x_3+x_4=45$$
$$3x_1+4x_2+5x_3+x_5=30$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0$$

其中 x_4、x_5 分别是关于资源甲、乙引进的松弛变量，列成表格

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	6	3	5	1	0	45
x_5	3	4	5	0	1	30
	−3	−1	−4	0	0	0

用单纯形法经两次迭代即可终止，得

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	−1/3	0	1/3	−1/3	5
x_3	0	1	1	−1/5	2/5	3
	0	2	0	1/5	3/5	27

直接读出最优解为 $x_1=5$，$x_2=0$，$x_3=3$，$x_4=0$，$x_5=0$，标准形的最优值为−27，即原问题的最大利润为 27。

在此基础上进一步考虑以下问题。

① 两种资源中哪种资源的拥有量是制约利润进一步提高的因素？

② 若在市场上能按比正常价贵 0.5 千元的单价买到资源甲、乙，问进一步提高净利润是否应买？

③ 若欲通过提高售价来提高 B 的单位利润，问 B 的单位利润要提高多少千元，才能仍在追求最大利润的目标下考虑产品 B 的生产？

经过分析，得到如下结论。

对问题①，以 $x_1=5$，$x_2=0$、$x_3=3$ 代人约束条件得

$$6x_1+3x_2+5x_3\leqslant 45\ \text{（资源甲的约束）}$$
$$3x_1+4x_2+5x_3\leqslant 30\ \text{（资源乙的约束）}$$

均使不等号成为等号，说明在此生产计划下两种资源均已用尽。故

两种资源的拥有量均为制约利润进一步提高的因素。

对问题②，从最后一张表看出原问题等价于在原来的约束条件下求

$$\max -2x_2-\frac{1}{5}x_4-\frac{3}{5}x_5$$

注意其中 x_4、x_5 分别表示资源甲、乙的数量。由此看出，在最优生产计划的水平下，资源甲的数量每变化一个单位对总利润的影响为$\frac{1}{5}$千元，资源乙的数量每变化一个单位对总利润的影响为$\frac{3}{5}$千元。因此，在按比正常价贵 0.5 千元的单价的基础上，购买甲不合算，而购买乙是合算的。

对问题③，设未知数 C 千元表示产品 B 单位利润增加额，修改模型得

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	6	3	5	1	0	45
x_5	3	4	5	0	1	30
	-3	$-(1+C)$	-4	0	0	0

最后的计算表为

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	$-1/3$	0	1/3	$-1/3$	5
x_3	0	1	1	$-1/5$	2/5	3
	0	$2-C$	0	1/5	3/5	27

则有

① 若 $C\leqslant 2$，最后的表具备了 4 个特点，运算终止，最优解不变，x_2 仍为 0；

② 若 $C>2$，最后的表不具备第 4 个特点，需继续运算，才能让 x_2 作基变量，即 x_2 的取值才可以不为 0，所以本问题的答案为 $C>2$。

本节仅提出相关的问题，并不介绍相关的诸多讨论，读者可自行依照上面的实例试着分析讨论。

2.4 线性规划问题的MATLAB6.5辅助计算及工程应用实例

2.4.1 MATLAB优化工具箱函数选用

用于线性规划的MATLAB函数主要是linprog。

假设线性规划问题的数学模型为

$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ &\text{s.t.}\ \ \mathbf{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{Aeq}*\boldsymbol{x}=\mathbf{beq} \\ &\qquad \mathbf{lb}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\mathbf{ub} \end{aligned}$$

式中，$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{b}$、**beq**、**lb**和**ub**为向量，$\boldsymbol{A}$和**Aeq**为矩阵。

需要提醒的是，MATLAB中给向量和矩阵的赋值是逐行进行的，行之间用分号“;”隔开，每行元素之间可用“,”也可用空格隔开，矩阵右上角用符号“'”表示转置运算。

Linprog函数的调用格式如下。

① [$\boldsymbol{x}$,fval]=linprog($\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$)，求解线性规划问题的min $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，约束条件为$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$，同时返回解$\boldsymbol{x}$处的目标函数值fval。

② [$\boldsymbol{x}$,fval]=linprog($\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，**Aeq**，**beq**)，求解线性规划问题的min $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，约束条件为$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$，但增加等式约束的条件，即**Aeq** $*\ \boldsymbol{x}$=**beq**；若不等式不存在，则令$\boldsymbol{A}$=[]、$\boldsymbol{b}$=[]，同时返回解$\boldsymbol{x}$处的目标函数值fval。

③ [$\boldsymbol{x}$,fval]=linprog($\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，**Aeq**，**beq**，**lb**，**ub**)，求解线性规划问题的min $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，约束条件为$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$及**Aeq** $*\ \boldsymbol{x}$=**beq**，并定义变量$\boldsymbol{x}$的下界**lb**和上界**ub**，使得$\boldsymbol{x}$始终在该范围内；若等式不存在，则令**Aeq**=[]、**beq**=[]，同时返回解$\boldsymbol{x}$处的目标函数值fval。

④ [$\boldsymbol{x}$,fval]=linprog($\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，**Aeq**，**beq**，**lb**，**ub**，$\boldsymbol{x}_0$)，求解线性规划问题的min $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，约束条件为$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$及**Aeq** $*\ \boldsymbol{x}$=**beq**，定义变量$\boldsymbol{x}$的下界**lb**和上界**ub**，设置初值为$\boldsymbol{x}_0$，同时返回解$\boldsymbol{x}$处的目标函数值fval。

⑤ $[\boldsymbol{x}, \text{fval}] = \text{linprog}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \textbf{Aeq}, \textbf{beq}, \textbf{lb}, \textbf{ub}, \boldsymbol{x}_0$, options)，求解线性规划问题的 min $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$，约束条件为 $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$ 及 $\textbf{Aeq} * \boldsymbol{x} = \textbf{beq}$，定义变量 $\boldsymbol{x}$ 的下界 **lb** 和上界 **ub**，设置初值为 $\boldsymbol{x}_0$，用 options 指定的优化参数进行最小化，同时返回解 $\boldsymbol{x}$ 处的目标函数值 fval。

⑥ $\boldsymbol{x}$ = linprog(…)，仅输出解 $\boldsymbol{x}$ 的值，不输出目标函数值 fval。

【例 2-9】 求解下面的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
min\ & -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leqslant 6 \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 12 \\
& x_1 + x_3 + x_4 \leqslant 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

解 MATLAB 求解程序清单为

```
>>f=[-2,-1,3,-5]';
A=[1,2,4,-1;2,3,-1,1;1,0,1,1];
b=[6,12,4]';
lb=[0,0,0,0]';
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb)↵
```

结果输出为

```
x=
    0.0000
    2.6667
    0.0000
    4.0000
fval=
      -22.6667
```

说明 x 解为最优解，最优值为 22.667。

2.4.2 工程应用实例

【例 2-10】 配棉问题

配棉问题即根据棉纱的质量指标，采用各种价格不同的棉花，按一定比例配制成纱，使其既达到质量指标，又使总成本最低。棉纱的质量指标一般由棉结和品质指标来决定，棉结粒数越少越好，品质指标越大越好。

一年纺纱能力为15000锭的小厂在采用最优化方法配棉前，某一种产品32D纯棉纱的棉花配比、质量指标及单价如表2-7所示。

表2-7　32D纯棉纱的棉花配比、质量指标及单价

原料品名	单价/(元/t)	混合比/%	棉结/粒	品质指标	混棉单价/(元/t)
国棉131	8400	25	60	3800	2100
国棉229	7500	35	65	3500	2625
国棉327	6700	40	80	2500	2680
平均合计		100	70	3175	7405

有关部门对32D纯棉纱规定的质量指标为棉结不多于70粒，品质指标不小于2900。问应该如何选择棉花配比，才能使混棉单价最少？

解　设x_1、x_2、x_3分别为国棉131、229、327的棉花配比，而目标为混棉单价最小，

则数学模型为

$$\min\ 8400x_1+7500x_2+6700x_3$$

$$\text{s.t.}\quad 60x_1+65x_2+80x_3\leqslant 70$$

$$3800x_1+3500x_2+2500x_3\geqslant 2900$$

$$x_1+x_2+x_3=1$$

$$x_1,x_2,x_3\geqslant 0$$

MATLAB求解程序清单为

```
>>f=[8400,7500,6700]';
A=[60,65,80;-3800,-3500,-2500];
b=[70,-2900]';
Aeq=[1,1,1];
beq=1;
```

```
lb=[0,0,0]';
ub=[1,1,1]';
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub) ↵
```

结果输出为

```
x=
    0.000
    0.667
    0.333
fval=
      7.2333e+003
```

说明 当国棉 131、229、327 的棉花配比分别为 0、0.667、0.333 时，最小混棉单价为 7.233×10^3 元/t。

【例 2-11】 生产决策问题

某工厂生产甲、乙两种产品，已知生产 1kg 产品甲需用原料 A 5kg，原料 B 6kg；生产 1kg 产品乙需用原料 A 3kg，原料 B 7kg，原料 C 5kg。若 1kg 产品甲和乙的销售价格分别为 6 万元和 5 万元，三种原料的限用量分别为 100kg、160kg 和 180kg。试确定应生产这两种产品各多少千克才能使总销售价格最高？

解 令生产产品甲的数量为 x_1，生产产品乙的数量为 x_2，由题意可建立下面的模型。

$$
\begin{aligned}
\max\ & 6x_1+5x_2 \\
\text{s.t.}\ & 5x_1+3x_2\leqslant 100 \\
& 6x_1+7x_2\leqslant 160 \\
& 5x_2\leqslant 180 \\
& x_1,x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

该模型要求使目标函数最大化，则按照 MATLAB 的要求进行转换，将目标函数最小化，即

$$
\begin{aligned}
\min\ & -6x_1-5x_2 \\
\text{s.t.}\ & 5x_1+3x_2\leqslant 100 \\
& 6x_1+7x_2\leqslant 160
\end{aligned}
$$

$$5x_2 \leqslant 180$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

MATLAB 求解程序清单为

```
>>f=[-6,-5]';
A=[5,3;6,7;0,5];
b=[100,160,180]';
lb=[0,0]';
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    12.9412
    11.7647
fval=
       -136.4706
```

说明 生产产品甲、乙的数量分别为 12.94kg、11.76kg 时，创造的最高总售价为 136.47 万元。

【例 2-12】 某车间生产 A、B 两种产品，已知生产产品 A、B 需用原料分别为 2 个单位和 3 个单位，所需的工时分别为 4 个单位和 2 个单位，现在可以应用的原料为 100 个单位，工时为 120 个单位，每生产一台 A 和 B 分别可获得利润 6 元和 4 元，应当安排生产 A、B 各多少台，才能获得最大利润？

解 令生产产品 A、B 分别为 x_1、x_2 台，由题意可建立下面的模型。

$$\begin{aligned}&\max\ 6x_1+4x_2\\&\text{s.t.}\ \ 2x_1+3x_2\leqslant 100\\&\qquad 4x_1+2x_2\leqslant 120\\&\qquad x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

将该模型按照 MATLAB 的要求转换为目标函数最小化，即

$$\begin{aligned}&\min\ -6x_1-4x_2\\&\text{s.t.}\ \ 2x_1+3x_2\leqslant 100\end{aligned}$$

$$4x_1+2x_2\leqslant 120$$
$$x_1, x_2\geqslant 0$$

MATLAB 求解程序清单为

```
>>f=[-6,-4]';
A=[2,3;4,2];
b=[100,120]';
lb=[0,0]';
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    20.0000
    20.0000
fval=
        -200.0000
```

说明 生产产品 A、B 的数量分别为 20 台、20 台时，最大利润为 200 元。

【例 2-13】 工程项目投资问题

某公司有一批资金欲投资到 5 个工程项目中，各工程项目的净收益（投入资金的百分比）见表 2-8 所示。

表 2-8 工程项目的净收益表

工程项目	A	B	C	D	E
收益/%	10	12	15	12	8

由于一些原因，公司决定用于项目 A 的投资不大于其他各项投资之和，而用于项目 B 和项目 D 的投资要大于项目 C 和项目 E 的投资。试确定投资分配方案，使该公司收益达到最大。

解 设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 分别表示用于项目 A、B、C、D 和 E 的投资百分数，由于各项目的投资百分数之和等于 100%，所以

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$$

根据题意可建立下面的模型，即

$$\max\ 0.1x_1+0.12x_2+0.15x_3+0.12x_4+0.08x_5$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4-x_5\leqslant 0 \\ x_2+x_4-x_3-x_5\geqslant 0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

将该模型转换为目标函数最小化，即

$$\min\ -0.1x_1-0.12x_2-0.15x_3-0.12x_4-0.08x_5$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4-x_5\leqslant 0 \\ -x_2-x_4+x_3+x_5\leqslant 0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

MATLAB 求解程序清单为

```
>>f=[-0.1,-0.12,-0.15,-0.12,-0.08]';
A=[1,-1,-1,-1,-1;0,-1,1,-1,1];
b=[0,0]';
Aeq=[1,1,1,1,1];
beq=[1];
lb=[0,0,0,0,0]';
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    0.0000
    0.2500
    0.5000
    0.2500
    0.0000
fval=
        -0.1350
```

可见，5 个项目的投资百分数分别为 0、25%、50%、25%和 0 时可使该公司获得最大的收益，最大收益为 13.5%。

【例 2-14】 投资证券组合问题

金融机构和个人投资者经常会遇到证券投资组合的选择问题，即从多种可供选择的投资机会中选择收益率高、风险小的投资组合。选择时，投资者要在收益、收益增长的潜在可能、风险和其他条件中进行综合权衡，以便得到一个最佳的投资方案。

某人有一笔 50 万元的资金可用于长期投资，可供选择的投资机会包括购买国库券、购买公司债券、投资房地产、购买股票或银行保值储蓄等。不同的投资方式的具体参数如表 2-9 所示。

表 2-9　不同投资方式具体的参数

序号	投资方式	年限	收益/%	风险系数	增长潜力/%
1	国库券	3	5	1	0
2	公司债券	10	10	3	15
3	房地产	6	25	8	30
4	股票	2	20	6	20
5	定期存款	1	3	1	5
6	长期储蓄	5	5	2	10
7	现金存款	0	2	0	0

投资者希望投资组合的平均年限不超过 5 年，平均的期望收益率不低于 13%，风险系数不超过 4，收益的增长潜力不低于 10%。问在满足上述要求的前提下投资者该如何选择投资组合才能使平均年收益率最高?

解　设 x_i 为第 i 种投资方式在总投资额中所占的比例，则根据题意建立以下线性规划模型，即

$$\max\ 5x_1+10x_2+25x_3+20x_4+3x_5+5x_6+2x_7$$

$$\text{s.t.}\ \ 3x_1+10x_2+6x_3+2x_4+x_5+5x_6\leqslant 5$$

$$5x_1+10x_2+25x_3+20x_4+3x_5+5x_6+2x_7\geqslant 13$$
$$x_1+3x_2+8x_3+6x_4+x_5+2x_6\leqslant 4$$
$$15x_2+30x_3+20x_4+5x_5+10x_6\geqslant 10$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=1$$
$$x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,7$$

MATLAB 求解清单为

```
>>f=[-5,-10,-25,-20,-3,-5,-2]';
A=[3,10,6,2,1,5,0;-5,-10,-25,-20,-3,-5,-2;1,
3,8,6,1,2,0;0,-15,-30,-20,-5,-10,0];
b=[5,-13,4,10]';
Aeq=[1,1,1,1,1,1,1];
beq=[1];
lb=zeros(7,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
   0.5575
   0.0195
   0.4230
   0.0000
   0.0000
   0.0000
   0.0000
fval=
     -17.0000
```

可见，该投资者将 50 万元的 55.75%投资到国库券，1.95%投资到公司债券，42.3%投资到房地产，其平均年收益率最高，为 17%。

【例 2-15】 连续投资问题

某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，已知：

① 项目 A，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利 115%；

② 项目 B，第三年初需要投资，到第五年末能回收本利 125%，但规定最大的投资额不超过 4 万元；

③ 项目 C，第二年初需要投资，到第五年末能回收本利 140%，但规定最大的投资额不超过 3 万元；

④ 项目 D，五年内每年初可购买公债，于当年末还，并加利息 6%。

该部门现有资金 10 万元，问应如何确定这些项目的投资额，使到第五年末拥有的资金本利总额最大？

解 这是一个连续投资的问题，与时间有关。这里设法用线性规划方法静态地处理。

① 确定变量 设 x_{ij} ($i=1, 2, 3, 4, 5$; $j=1, 2, 3, 4$) 表示第 i 年年初给项目 j 的投资额，将变量列于表 2-10 中。

表 2-10 例 2-6 表

项目 \ 年份	1	2	3	4	5
1(A)	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	
2(B)			x_{32}		
3(C)		x_{23}			
4(D)	x_{14}	x_{24}	x_{34}	x_{44}	x_{54}

② 确定每年年初的投资额 由于投资额应等于手中拥有的资金额，而项目 D 每年都可投资，且当年末即能回收本息，所以该项目每年应把资金全部投出去，手中不应当有剩余的呆滞资金，因此每年的投资额和本利和为

第一年，该部门年初拥有 10 万元，所以

$$x_{11}+x_{14}=10$$

第二年，因第一年给项目 A 的投资要到该年末才能回收，所以该部门在该年初拥有的资金额仅为项目 D 在第一年回收的本利

和 $x_{14}(1+6\%)$，于是第二年的投资分配是

$$x_{21}+x_{23}+x_{24}=1.06x_{14}$$

第三年，第三年初的资金额是从项目 A 的第一年投资及项目 D 的第二年投资中回收的本利总和 $x_{11}(1+15\%)$及 $x_{24}(1+6\%)$，于是该年的资金分配为

$$x_{31}+x_{32}+x_{34}=1.15x_{11}+1.06x_{24}$$

第四年，同以上分析，可得年初的资金分配为

$$x_{41}+x_{44}=1.15x_{21}+1.06x_{34}$$

第五年，年初的资金分配为

$$x_{54}=1.15x_{31}+1.06x_{44}$$

此外，由于对项目 B、C 的投资有限额的规定，有

$$x_{32}\leqslant 4$$
$$x_{23}\leqslant 3$$

③ 第五年末该部门拥有的资金总额为

$$1.40x_{23}+1.25x_{32}+1.15x_{41}+1.06x_{54}$$

④ 根据题意建立线性规划模型

$$\max\ 1.15x_{41}+1.40x_{23}+1.25x_{32}+1.06x_{54}$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_{11}+x_{14}=10 \\ -1.06x_{14}+x_{21}+x_{23}+x_{24}=0 \\ -1.15x_{11}-1.06x_{24}+x_{31}+x_{32}+x_{34}=0 \\ -1.15x_{21}-1.06x_{34}+x_{41}+x_{44}=0 \\ -1.15x_{31}-1.06x_{44}+x_{54}=0 \\ x_{32}\leqslant 4 \\ x_{23}\leqslant 3 \\ x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,\cdots,5; j=1,2,3,4 \end{cases}$$

⑤ 用 MATLAB 求解

```
≫f=[0,0,0,-1.40,0,0,-1.25,0,-1.15,0,-1.06]';
A=[0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0;0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0];
b=[4,3]';
Aeq=[1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0;0,-1.06,1,1,1,0,0,0,0,0,0,
```

```
    0;-1.15,0,0,0,-1.06,1,1,1,0,0,0;0,0,-1.15,0,
    0,0,0,-1.06,1,1,0;0,0,0,0,0,-1.15,0,0,0,
    -1.06,1];
beq=[10,0,0,0,0];
lb=zeros(11,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
   6.5508
   3.4492
   0.6561
   3.0000
   0.0000
   2.0066
   4.0000
   1.5268
   2.3730
   0.0000
   2.3076
fval=
    -14.3750
```

则有第五年末该部门拥有的资金总额为 14.375 万元，盈利 43.75%。

【例 2-16】 工件加工任务分配问题

某车间有两台车床 A 和 B，用于加工 3 种工件。已知这两台车床的可用台时数分别为 500 和 600，3 种工件的数量分别为 400、450 和 500。此外，还已知用两台不同车床加工单位数量的不同工件所需的台时数和加工费用如表 2-11 所示。试分配车床的加工任务，使总加工费用最低。

表 2-11　车床加工情况

车床类型	单位工件所需加工台时数			单位工件的加工费用			可用台时数
	工件 1	工件 2	工件 3	工件 1	工件 2	工件 3	
A	0.5	1.2	1.3	15	12	10	500
B	0.6	1.1	1.5	13	10	11	600

解　设在 A 车床上加工工件 1、2、3 的数量分别为 x_{11}、x_{12}、x_{13}，在 B 车床上加工工件 1、2、3 的数量分别为 x_{21}、x_{22}、x_{23}。根据 3 种工件的数量限制有

$$x_{11}+x_{21}=400$$
$$x_{12}+x_{22}=450$$
$$x_{13}+x_{23}=500$$

根据题意可建立下面的模型

$$\begin{aligned}
\min\ & 15x_{11}+12x_{12}+10x_{13}+13x_{21}+10x_{22}+11x_{23}\\
\text{s. t.}\ & 0.5x_{11}+1.2x_{12}+1.3x_{13}\leqslant 500\\
& 0.6x_{21}+1.1x_{22}+1.5x_{23}\leqslant 600\\
& x_{11}+x_{21}=400\\
& x_{12}+x_{22}=450\\
& x_{13}+x_{23}=500\\
& x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,6
\end{aligned}$$

MATLAB 求解程序清单为

```
>>f=[15,12,10,13,10,11]';
A=[0.5,1.2,1.3,0,0,0;0,0,0,0.6,1.1,1.5];
b=[500,600]';
Aeq=[1,0,0,1,0,0;0,1,0,0,1,0;0,0,1,0,0,1];
beq=[400,450,500];
lb=zeros(6,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    400.0000
    0.0000
    230.7966
    0.0000
    178.3896
    269.2034
fval=
      1.3053e+004
```

说明 在车床 A 上加工 400 个工件 1 和 231 个工件 2，在车床 B 上加工 178 个工件 2 和 269 个工件 3 时，可使总加工费最小，最小费用为 1.31×10^4 元。

【例 2-17】 裁料问题

某车间有一批长度为 7.4m 的同型钢管，欲用它们来做 100 套钢架，已知每套钢架需用长 2.9m、2.1m 和 1.5m 的钢管各一根。问如何下料方可使所用材料最省？

解 因为所需钢材总长度是固定的，所以要使用料的根数最少，也就是要使裁下来的残料最少。而残料的多少取决于裁取方法，故设 $x_j(j=1,2,\cdots,8)$ 为按第 j 种方法裁取钢管的根数，则对各种可能的裁取方法所产生的残料列于表 2-12。

表 2-12 各种可能的裁取方法所产生的残料

所裁长度/m	裁料方案编号								所需根数
	1	2	3	4	5	6	7	8	
2.9	2	1	1	1	0	0	0	0	100
2.1	0	0	2	1	2	1	3	0	100
1.5	1	3	0	1	2	3	0	4	100
残料长度/m	0.1	0	0.3	0.9	0.2	0.8	1.1	1.4	

则可建立该问题的数学模型为

$$\min\ 0.1x_1+0.3x_3+0.9x_4+0.2x_5+0.8x_6+1.1x_7+1.4x_8$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2+x_3+x_4=100 \\
& 2x_3+x_4+2x_5+x_6+3x_7=100 \\
& x_1+3x_2+x_4+2x_5+3x_6+4x_8=100 \\
& x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,8
\end{aligned}
$$

MATLAB 求解程序清单为

```
>>f=[0.1,0,0.3,0.9,0.2,0.8,1.1,1.4]';
Aeq=[2,1,1,1,0,0,0,0;0,0,2,1,2,1,3,0;1,3,0,1,2,3,0,4];
beq=[100,100,100]';
lb=zeros(8,1);
[x,fval]=linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    39.5760
    0.4240
    20.4240
    0.0000
    29.5760
    0.0000
    0.0000
    0.0000
fval=
    16.0000
```

所以，分别按第 1、3、5 种裁料方案裁取 40 根、20 根、30 根 7.4m 长的钢管时，残料料头最节省，残料总长为 16m。

【例 2-18】 员工工作计划安排问题

某工厂实行 24h 昼夜工作，每 4h 为一个工作时段，每天各时段所需的工人人数如表 2-13 所示，工人在某一时段开始上班后需连续工作 8h（包括轮流用膳时间），问该工厂至少需要多少名工人才能满足生产需要？

表 2-13　各时段所需工人人数

班　次	时　间　段	所需人数
1	8:00~12:00	80
2	12:00~16:00	80
3	16:00~20:00	60
4	20:00~24:00	30
5	24:00~4:00	20
6	4:00~8:00	20

解　设 $x_j(j=1,2,\cdots,6)$ 为第 j 个时段开始上班的工人人数，根据题意建立下面的数学模型

$$\min\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_6+x_1\geqslant 80 \\ x_1+x_2\geqslant 80 \\ x_2+x_3\geqslant 60 \\ x_3+x_4\geqslant 30 \\ x_4+x_5\geqslant 20 \\ x_5+x_6\geqslant 20 \\ x_j\geqslant 0, j=1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

MATLAB 求解程序清单为

```
>>f=[1,1,1,1,1,1]';
A=[-1,0,0,0,0,-1;-1,-1,0,0,0,0;0,-1,-1,0,0,0;
   0,0,-1,-1,0,0;0,0,0,-1,-1,0;0,0,0,0,-1,-1];
b=[-80,-80,-60,-30,-20,-20];
lb=zeros(6,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    55.1373
    34.5146
```

25.4854

11.0822

8.9178

24.8627

fval=

160.0000

所以，工厂只需在6个时段中分别安排55人、35人、25人、11人、9人和25人就可以满足生产要求，共计160人。

【例2-19】 员工编制问题

某电视机厂每日8h生产的电视机产量不低于500台。为了实施质量控制，该厂计划聘请两种不同水平的质检员。一级质检员的要求为检验速度15件/h，正确率99%，工资10元/h；二级质检员的要求为检验速度10件/h，正确率96%，工资5元/h。质检员每错检1次，工厂损失200元。试确定应聘请的一级、二级质检员的人数为多少，使总检验费用最小。

解 首先分析每名质检员每天的总检验费用及检验的产品数量，即每名一级质检员每天工资为80元，每天可检验120件产品，由于错检带来的损失为200×120×1%=240元，则每名一级质检员每天的总检验费用为320元；同样，每名二级质检员每天工资为40元，每天可检验80件产品，由于错检带来的损失为200×80×4%=640元，则每名二级质检员每天的总检验费用为680元。

设需要聘请一级和二级质检员的人数分别为x_1名和x_2名，根据题意，建立下面的数学模型。

$$\begin{aligned}&\min\ 240x_1+640x_2\\&\text{s.t.}\ \ 120x_1+80x_2\geqslant 500\\&\qquad x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

将模型转化为

$$\begin{aligned}&\min\ 240x_1+640x_2\\&\text{s.t.}\ \ -120x_1-80x_2\leqslant -500\end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

MATLAB 求解程序清单为

```
≫f=[240,640]';
A=[-120,-80];
b=[-500];
lb=[0,0]';
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    4.1667
    0.0000
fval=
      1.0000e+003
```

所以，聘请 4 名一级质验员时可使总检验费最少，为 1000 元。

【例 2-20】 厂址选择及建厂规模问题

有 A、B、C、D 四座城市，分别出产一定数量的原材料，同时也消耗一定的产品（见表 2-14）。已知生产每吨产品需 2t 的原材料，各城市间相距为 A～B：200km，A～C：250km，A～D：180km，B～C：220km，B～D：250km，C～D：200km。又已知 1 万吨原材料运输 1km 的运费为 8000 元，1 万吨产品运输 1km 的运费为 5000 元。因为地区差异，在不同城市建厂的生产成本不同。问如何选择厂址及规模才能使总生产成本最小？

表 2-14　A、B、C、D 四地点出产原材料、消耗产品情况

地点	年产原料/万吨	年销产品/万吨	生产费用/(万元/万吨)
A	25	10	180
B	20	15	150
C	30	20	200
D	20	18	160

解 设 x_{ij} 为由 i 地运到 j 地的原料数量（万吨），y_{ij} 为由 i 地运到 j 地的产品数量（万吨），$i,j=1,2,3,4$（分别对应 A、B、C、D 四座城市）。

首先进行如下分析。

① 各城市之间每万吨原料的运输费用

A～B：8000×200＝1600000 元＝160 万元

A～C：8000×250＝200 万元

A～D：8000×180＝144 万元

B～C：8000×220＝176 万元

B～D：8000×250＝200 万元

C～D：8000×200＝160 万元

② 各城市之间每万吨产品的运输费用

A～B：5000×200＝100 万元

A～C：5000×250＝125 万元

A～D：5000×180＝90 万元

B～C：5000×220＝110 万元

B～D：5000×250＝125 万元

C～D：5000×200＝100 万元

根据题意建立下面的数学模型（其中目标函数包括原材料运输费、产品运输费和生产费）

$$\begin{aligned}\min\ & 160x_{12}+200x_{13}+144x_{14}+160x_{21}+176x_{23}+200x_{24}+\\ & 200x_{31}+176x_{32}+160x_{34}+144x_{41}+200x_{42}+160x_{43}+\\ & 180y_{11}+(150+100)y_{12}+(200+125)y_{13}+(160+90)\\ & y_{14}+(180+100)y_{21}+150y_{22}+(200+110)y_{23}+(160+\\ & 125)y_{24}+(180+125)y_{31}+(150+110)y_{32}+200y_{33}+\\ & (160+100)y_{34}+(180+90)y_{41}+(150+125)y_{42}+(200+\\ & 100)y_{43}+160y_{44}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ & 2y_{11}+2y_{12}+2y_{13}+2y_{14}+x_{12}+x_{13}+x_{14}-x_{21}-x_{31}-\\ & x_{41}\leqslant 25\\ & 2y_{21}+2y_{22}+2y_{23}+2y_{24}+x_{21}+x_{23}+x_{24}-x_{12}-x_{32}-\end{aligned}$$

$x_{42} \leqslant 20$

$2y_{31}+2y_{32}+2y_{33}+2y_{34}+x_{31}+x_{32}+x_{34}-x_{13}-x_{23}-x_{43} \leqslant 30$

$2y_{41}+2y_{42}+2y_{43}+2y_{44}+x_{41}+x_{42}+x_{43}-x_{14}-x_{24}-x_{34} \leqslant 20$

$y_{11}+y_{21}+y_{31}+y_{41}=10$

$y_{12}+y_{22}+y_{32}+y_{42}=15$

$y_{13}+y_{23}+y_{33}+y_{43}=20$

$y_{14}+y_{24}+y_{34}+y_{44}=18$

$x_{ij} \geqslant 0, i,j=1,2,3,4, i \neq j$

$y_{ij} \geqslant 0, i,j=1,2,3,4$

MATLAB 求解程序清单为

```
≫f=[160,200,144;160,176,200,200,176,160,144,200,160,
    180,250,325,250,280,150,310,285,305,260,200,260,
    270,275,300,160]';
  A=[1,1,1,-1,0,0,-1,0,0,-1,0,0,2,2,2,2,0,0,0,0,
    0,0,0,0,0,0,0,0;-1,0,0,1,1,1,0,-1,0,0,-1,0,0,
    0,0,0,2,2,2,2,0,0,0,0,0.0,0,0;0,-1,0,0,-1,0,
    1,1,1,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,2,2,2,2,0,0,0,
    0;0,0,-1,0,0,-1,0,0,-1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,
    0,0,0,0,0,2,2,2,2];
  b=[25,20,30,20];
Aeq=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,
    0,1,0,0,0;0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,
    0,0,1,0,0,0,1,0,0;0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,
    0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0;0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
    0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1];
 beq=[10;15;20;18];
  lb=zeros(28,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb) ↵
```

结果输出为

x=

1.0761

0.3777

0.4754

0.4130

0.1462

0.2347

0.7666

1.1221

0.6741

1.2395

1.0356

0.6972

7.4551

2.6861

1.8556

0.7482

0.5818

8.9355

1.3286

0.3740

0.1549

0.5755

13.5987

0.0001

1.8082

2.8029

3.2171

16.8777

fval=

1.4077e+004

可见，A、B、C、D 四个城市的建厂规模分别为 7.5 万吨、9 万吨、14 万吨和 17 万吨时，最小总生产成本为 14077 万元。

【例 2-21】 污染排放控制问题

某地区有两类工业为钢铁和电力工业。炼钢因采用不同的对空气污染物排放的控制技术而有三种不同的工艺。可供选择的控制方案有①电除尘；②洗涤器；③电除尘器-洗涤器相结合。三种炼钢工艺的产量按年产吨数计算，分别是 x_1、x_2、x_3。电除尘器已在运行，转用洗涤器则递增费用为 0.1 元/t（成器钢），将电除尘器与洗涤器结合使用的递增费用为 0.25 元/t（成器钢）。安装除尘器和洗涤器的现行工艺还可以发电，安装除尘器和附设脱硫厂的炼钢工艺也可以发电，它们的发电量分别是 x_4 和 x_5，它们按各工艺所投入煤的吨数计算，发电量为 x_5 的工艺其递增费用为 1.25 元/t（煤）投入量。设要求年生产 1000 万吨钢，发电用煤不得超过 200 万吨。颗粒物、流氧化物、氮氧化物的排放量分别应限制在 800 万吨/年、4000 万吨/年和 3500 万吨/年，各种污染物的排放系数如表 2-15 所列。试求递增费用减少到最低限度的地区的大气污染物排放控制对策。

表 2-15 各种污染物的排放系数

项　目	工艺 1 /[kg/t(钢)]	工艺 2 /[kg/t(钢)]	工艺 3 /[kg/t(钢)]	发电工艺 1 /[kg/t(煤)]	发电工艺 2 /[kg/t(煤)]
颗粒物	7	4	3	3	2
硫氧化物	13	13	13	11	12
氮氧化物	2	2	2	20	16

解 根据所规定的钢产量及发电用煤限制以及各种污染物的排放系数可列出下面的方程，即

颗粒物限制：$7x_1+4x_2+3x_3+3x_4+2x_5\leqslant 8,000,000$

硫氧化物限制：$13x_1+13x_2+13x_3+11x_4+12x_5\leqslant 40,000,000$

氮氧化物限制：$2x_1+2x_2+2x_3+20x_4+16x_5\leqslant 35,000,000$

钢产量约束：$x_1+x_2+x_3=10,000,000$

电站用煤约束：$x_4+x_5\leqslant 2,000,000$

实施此对策，总递增费用为

$$0.1x_2+0.25x_3+1.25x_5$$

由此建立以下数学模型，即

$$\begin{aligned}
\min\ & 0.1x_2+0.25x_3+1.25x_5 \\
\text{s.t.}\ & 7x_1+4x_2+3x_3+3x_4+2x_5\leqslant 8,000,000 \\
& 13x_1+13x_2+13x_3+11x_4+12x_5\leqslant 40,000,000 \\
& 2x_1+2x_2+2x_3+20x_4+16x_5\leqslant 35,000,000 \\
& x_1+x_2+x_3=10,000,000 \\
& x_4+x_5\leqslant 2,000,000 \\
& x_i\geqslant 0(i=1,2,3,4,5)
\end{aligned}$$

然后应用 MATLAB 求解，程序清单为

```
>>f=[0,0.1,0.25,0,1.25]';
A=[7,4,3,3,2;13,13,13,11,12;2,2,2,20,16;0,0,0,1,1];
b=[20,16,24,5];
Aeq=[1,1,1,0,0];
beq=[10000000];
lb=zeros(5,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    1.0e+003*
    1.2224
    2.8909
    7.0276
    0.0000
```

0.0000

fval=

2.0460e+003

可见，三种炼钢工艺的产量分别为 1.2224×10^3t/年、2.8909×10^3t/年、7.0276×10^3t/年，不进行发电时，递增费用最小，为 2.046×10^3 元/年。

【例 2-22】 营养配餐问题

假定一个成年人每天需要从食物中获取 3000kcal（1kcal $=4.1868\times10^3$J）的热量、55g 蛋白质和 800mg 的钙。如果市场上只有 4 种食品可供选择，每千克食品所含热量和营养成分以及市场价格见表 2-16 所示。问如何选择才能在满足营养的前提下使购买食品的费用最少？

表 2-16 每千克食品所含热量和营养成分及市场价格

序 号	食品名称	热量/kcal	蛋白质/g	钙/mg	价格/元
1	猪肉	1000	50	400	14
2	鸡蛋	800	60	200	6
3	大米	900	20	300	3
4	白菜	200	10	500	2

解 设 x_j 为第 j 种食品每天购入量，根据题意建立如下线性规划模型。

$$\min\ 14x_1+6x_2+3x_3+2x_4$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ & 1000x_1+800x_2+900x_3+200x_4\geqslant3000\\ & 50x_1+60x_2+20x_3+10x_4\geqslant55\\ & 400x_1+200x_2+300x_3+500x_4\geqslant800\\ & x_i\geqslant0(i=1,2,3,4)\end{aligned}$$

求解如下。

```
>>f=[14,6,3,2]';
A=[-1000,-800,-900,-200;-50,-60,-20,-10;
```

```
    -400,-200,-300,-500];
b=[-3000,-55,-800];
lb=zeros(4,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    0.0000
    0.0000
    3.3333
    0.0000
fval=
       10.0000
```

可见，每天买 3.3333kg 的大米即可满足营养的需要，且费用最少，为 10 元。

【例 2-23】 管道设计问题

某地区水源取自某水库，水库涵洞底标高为 45m，水输送到调节水池距离为 1470m，调节水池最高水位 35m（高差 10m），该段距离中要求输水量 174L/s；另一段，从调节水池输水到某水厂的距离为 4780m，调节水池低水位标高为 30m，水厂水池标高为 17.5m，高差 12.5m，要求输水量 116L/s。可供铺设的输水管有四种不同直径，它们的单位长度造价和水头损失列于表 2-17 中。问应如何适当选择输水管进行铺设，既能保证供水，又能使造价最低。

表 2-17 输水管道单位长度造价和水头损失

管径 ϕ	单价 /(元/m)	单位长度水头损失/(m/1000m)	
		Q=174L/s 时的水头损失 h/m	Q=116L/s 时的水头损失 h/m
600	110	0.873	0.419
500	70	2.160	1.030
400	54	6.760	3.120
300	36	31.000	13.800

解 ①对第一段水库到调节水池，设管径为 600、500、400、300 的输水管的铺设长度分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，为保证供水，要求

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1470$$

另外，要求输水量为 174L/s 时，该段总水头损失不超过 10m，即

$$0.873x_1+2.160x_2+6.760x_3+31.000x_4\leqslant 10\times 1000$$

而输水管道铺设的总造价为

$$110x_1+70x_2+54x_3+36x_4$$

由此得到如下线性规划模型为

$$\begin{aligned}&\min\ 110x_1+70x_2+54x_3+36x_4\\&\text{s.t.}\ \ 0.873x_1+2.160x_2+6.760x_3+31.000x_4\leqslant 10000\\&\qquad x_1+x_2+x_3+x_4=1470\\&\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{aligned}$$

求解如下。

```
>>f=[110,70,54,36]';
A=[0.873,2.160,6.760,31.000];
b=[10000];
Aeq=[1,1,1,1];
beq=[1470];
lb=zeros(4,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb) ↵
```

结果输出为

```
x=
    1.0e+0.03*
    0.0000
    0.0000
    1.4674
    0.0026
fval=
```

7.9333e+004

② 对第二段调节水池到水厂，根据题意，可建立线性规划模型为

$$\min\ 110x_1+70x_2+54x_3+36x_4$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 0.419x_1+1.030x_2+3.120x_3+13.800x_4 \leqslant 12500 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=4780 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

同理求解如下。

```
>>f=[110,70,54,36]';
A=[0.419,1.030,3.120,13.800];
b=[12500];
Aeq=[1,1,1,1];
beq=[4780];
lb=zeros(4,1);
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb) ↵
```

结果为

```
x=
    1.0e+003*
    0.0000
    1.1548
    3.6252
    0.0000
fval=
        2.7660e+005
```

可见，当第一段中管径为 400 的输水管铺设 1467.4m 及管径为 300 的输水管铺设 2.6m 时，可使该段总造价最低为 79333 元；而当第一段中管径为 500 的输水管铺设 1154.8m 及管径为 400 的输水管铺设 3625.2m 时，该段总造价最低为 276600 元；整个输水管铺设工程总造价为 355933 元。

习　题

1. 用图解法解下列线性规划问题，并指出问题是具有惟一解、无穷多解、无解还是无可行解？

(1) $\max\ x_1+3x_2$

s.t. $5x_1+10x_2\leqslant 5$

$x_1+x_2\geqslant 1$

$x_2\leqslant 4$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

(2) $\min\ x_1+1.5x_2$

s.t. $x_1+3x_2\geqslant 3$

$x_1+x_2\geqslant 2$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

(3) $\max\ 2x_1+2x_2$

s.t. $x_1-x_2\geqslant -1$

$-0.5x_1+x_2\leqslant 2$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

(4) $\max\ x_1+x_2$

s.t. $x_1-x_2\geqslant 0$

$3x_1-x_2\leqslant -3$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

2. 将下列线性规划问题化为标准形。

(1) $\max\ 2x_1+x_2-x_3$

s.t. $x_1+x_2+2x_3\leqslant 6$

$x_1+4x_2-x_3\leqslant 4$

$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0$

(2) $\min\ -x_1+x_2-x_3$

s.t. $x_1-2x_2+x_3\geqslant 1$

$-x_1+x_2+x_3=2$

$x_1\geqslant -1;\ x_2,\ x_3\geqslant 0$

3. 用单纯形法求解下列线性规划问题。

(1) $\max\ 2x_1+x_2$

s.t. $3x_1+5x_2\leqslant 15$

$6x_1+2x_2\leqslant 24$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

(2) $\max\ 2x_1+5x_2$

s.t. $x_1\leqslant 4$

$x_2\leqslant 6$

$3x_1+2x_2\leqslant 18$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

4. 用大 M 法求解下列线性规划问题。

(1) $\min\ 2x_1+3x_2$

s.t. $2x_1+x_2=7$

$3x_1-x_2\geqslant 3$

$x_1+x_2\leqslant 5$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

(2) $\min\ -3x_1+x_2+x_3$

s.t. $x_1-2x_2+x_3\leqslant 11$

$-4x_1+x_2+2x_3\geqslant 3$

$-2x_1+x_3=1$

$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0$

5. 靠近某河流有两座化工厂，流往第一个化工厂的河水流量是每天500万立方米。在这两个化工厂之间有一条流量为每天200万立方米的支流注入，两座化工厂都向临近的河流中排放工业污水，第一个工厂每天排放工业污水2万立方米，第二个工厂每天排放工业污水1.4万立方米，从第一个工厂排放的工业污水流到第二个工厂之前，有20%可自然净化。根据环境标准，河水中工业污水的含量不能超过0.2%，若这两个化工厂都各自处理一部分污水，则第一个厂的处理成本是每万立方米1000元，第二个厂的处理成本是每万立方米800元。在符合环境标准的条件下，两个厂各应处理多少污水才能使两厂总污水处理费用最小？

6. 某工厂在一个工班内生产 X 个产品，这种产品卖1000元一个，生产成本270元，在生产每个产品的过程中，产生3t废水，其中一部分 Y 可直接排入一条河里，其余的可以经过附近一座处理效率为85%的水处理厂后再排入河里。该水处理厂的最大处理能力是每工班处理900t，处理成本是每100t废水5元，国家对排入河中的每100t废水收排污费10元，而且进一步要求，每工班排入河流中的废水最多不超过500t，为了得到最大利润，工厂应如何选择 X，Y？

7. 某造纸厂用废布、废纸、木材、纸浆作原料，生产甲、乙两种纸，甲种纸每吨产值50元，乙种纸每吨产值70元，生产每一种纸1t所需原料如表2-18所示。现有废布100t，废纸660t，木材纸浆270t，问该厂如何安排这两种纸的生产，才能使产值最大？

表2-18　生产每种纸所需原料

产　品	原　　料		
	废布	废纸	木材纸浆
甲种纸	4	18	3
乙种纸	1	15	9

8. 某车间拟用甲、乙两台设备生产A、B两种产品，已知生产一件A产品所消耗甲、乙设备的生产时间分别为2h和3h，生产一件B产品所消耗甲、乙设备的生产时间分别为4h和2h，而甲、乙两台设备每月用于生产这两种产品的时间分别为180h和150h。如果生产每件A、B的利润分别为40元和60元，A、B两种产品的生产总量必须为57件，B产品的最低产量为22件。问应如何制定A、B两种产品的生产计划，才能使所获利润最大？

9. 某养猪场所用的饲料是由6种饲料混合而成的，其中包括苜蓿、玉米、大麦、肉渣、燕麦及黄豆。各种饲料每单位所含营养成分如表2-19所示。要求所配饲料每单位的营养标准为：蛋白质含量不少于21%，纤维含量不少于5%，脂肪不少于3.4%，铁不少于1%但不得大于1.05%，钙不少于0.45%但不得大于0.6%。问成本最低的配比是什么？

表2-19 各种饲料每单位所含营养成分

饲料名称	所含营养成分					价格/(元/单位)
	蛋白质	纤维	脂肪	铁	钙	
苜蓿	0.19	0.17	0.023	0.016	0.0007	0.21
玉米	0.082	0.022	0.036	0.0006	0.0022	0.16
大麦	0.11	0.076	0.017	0.0057	0.0012	0.22
肉渣	0.048	0.09	0.072	0.048	0.027	0.41
燕麦	0.115	0.119	0.038	0.0009	0.0011	0.18
黄豆	0.048	0.028	0.005	0.0024	0.0019	0.32

10. 某公司在四个地点M_1、M_2、M_3和M_4中选择三个地点设置三个仓库F_1、F_2和F_3。已知F_1设在M_1、M_2、M_3和M_4的造价分别为13万元、10万元、12万元和11万元；F_2设在M_1、M_3和M_4的造价分别为15万元、13万元和20万元，但F_2不能设在M_2；F_3设在M_1、M_2、M_3和M_4的造价分别为5万

元、7 万元、10 万元和 6 万元。问应如何合理选点才能使总造价最低？

11. 某地区在今后三年内有四种投资机会，第一种是在三年内每年年初投资，年底获利 20%，并可将本金收回；第二种是在第一年年初投资，第二年年底可获利 50%，并将本金收回，但该项投资不得超过 200 万元；第三种是在第二年年初投资，第三年年底收回本金，并获利 60%，该项投资不得超过 150 万元；第四种是在第三年年初投资，于该年年底收回本金，获利 40%，该项投资不得超过 100 万元。现在该地区准备拿出 300 万元，问应如何制定投资计划，使到第三年年末本利和最大？

12. 某工厂用甲、乙两种原料生产 A、B、C、D 四种产品，每种产品消耗原料定额如表 2-20 所示。现有甲原料 18t，乙原料 3t。

表 2-20 原料消耗定额

原料	每种产品消耗原料定额/(t/件)			
	A	B	C	D
甲	2	3	10	4
乙	—	—	2	0.5
单位利润/(万元/万件)	9	8	50	19

(1) 求使总利润最大的生产计划。

(2) 求以上四种产品的单位利润各在什么范围内变动，以上最优计划的生产品种不变？

(3) 两种原料的数量各在什么范围内变动，以上最优生产品种不变？如果原料已增加到 5t，新的最优解是什么？

(4) 在原来的最优生产计划下，哪一种原料更紧缺？如果甲原料增加 12t，这种紧缺程度是否有变化？

13. 某商店有 100 万元资金准备经营 A、B、C 三种商品，其中商品 A 有两种型号 A_1、A_2，商品 B 也有两种型号 B_1、B_2，每

种商品的利润率见表 2-21 所示。

表 2-21 每种商品的利润率

商品	A		B		C
	A_1	A_2	B_1	B_2	
利润率/%	7.3	10.3	6.4	7.5	4.5

设在经营中有如下限制，即

(1) A 或 B 的资金各自都不能超过总资金的 50%；

(2) C 的资金不能少于 B 的资金的 25%；

(3) A_2 的资金不能超过 A 的资金的 60%。

试求总利润最大的经营方案。

3 非线性规划与 MATLAB 实现

本章提要

非线性规划问题也是运筹学中的重要分支之一，广泛应用于最优设计、管理科学及系统控制等领域。本章简要介绍了非线性规划的基本概念及分类，阐述了无约束非线性规划和有约束非线性规划的主要解法，介绍了一维搜索、惩罚函数法及二次规划等的应用，并通过大量的实例重点介绍了 MATLAB 优化工具箱中的相关函数的应用。

3.1 非线性规划基本概念及分类

当目标函数或约束条件中有一个或多个为非线性规划函数，就称这样的规划问题为非线性规划（Nonlinear Programming）。工程应用中所遇到的问题大量是非线性的，其数学模型为

$$
\begin{aligned}
&\min(\text{或}\max)\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\
&\text{s. t.}\ \ g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant(=,\leqslant)0\\
&\qquad x_j\geqslant 0\\
&\qquad i=1,2,\cdots,m\\
&\qquad j=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

【例 3-1】 某城市有 n 个工厂排放污水，拟集中于污水处理厂进行污水处理。已知工厂 i 的污水排放量为 Q_i，由工厂 i 排到污水处理厂，输送每一立方米污水的每公里费用为 c_i。设工厂到污水处理厂的路程可简化为图 3-1 所示。试决定污水处理厂的位置，以使总输水投资最小。

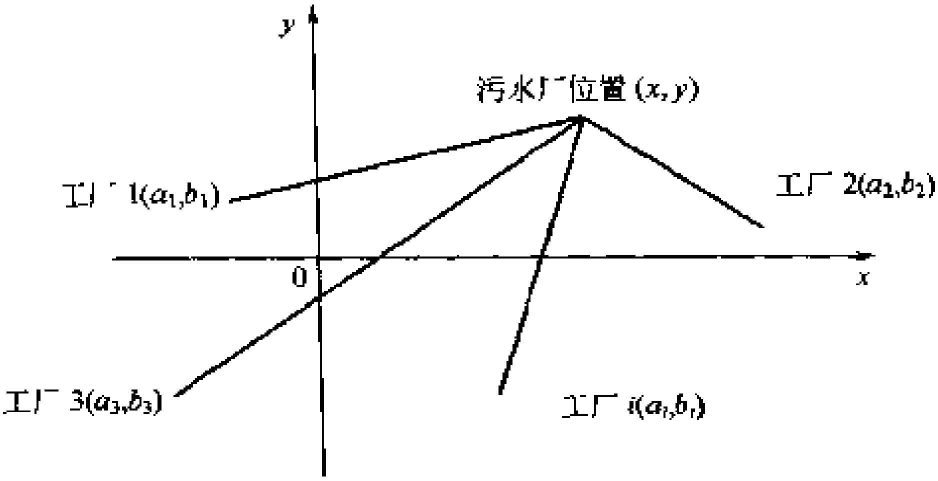

图 3-1　工厂到污水处理厂的路程

解　设污水处理厂的位置为 (x, y)，则从工厂 i 到污水处理厂的输水费用为

$$Q_i c_i \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}$$

因此 n 个工厂的总费用为

$$f(x, y)=\sum_{i}^{n} Q_i c_i \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}$$

所以，问题归结为求总费用函数的最小值。

非线性规划问题远比线性规划问题复杂，可分为无约束的非线性规划问题和有约束的非线性规划问题两大类。如果在例 3-1 中没有什么约束，即为无约束非线性最优化问题。非线性规划问题的求解方法大体可分为两类：一类是将非线性规划问题化为线性问题来求解；另一类是直接求解。

3.2　无约束非线性规划

3.2.1　最优性条件

由于求 $\max f(x)$ 等价于求 $\min[-f(x)]$，因此仅讨论无约束极小化问题的最优性条件。

现有多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若点 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^{\mathrm{T}}$

存在一邻域 $\delta[x^{(0)}]$，使对存在 $x\in\delta[x^{(0)}]$，均有 $f[x^{(0)}]\leqslant f(x)$，则称 $x^{(0)}$ 为 $f(x)$ 的局部极小点。

无约束问题 $\min f(x)$ 的最优解必是 $f(x)$ 的局部极小点，由一元函数极值的必要条件可知必有

$$\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x_i}\right|_{x_i=x_i^0}=\left.\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\right|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)}=0$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

因此有下列定理成立。

定理 3-1（局部极小点的一阶必要条件） 设函数 $f(x)$ 在点 $x^{(0)}$ 处可微，且 $x^{(0)}$ 为局部极小点，则必有梯度 $\nabla f[x^{(0)}]=0$。

在一元函数的讨论中，已知满足一阶必要条件的点未必是局部极小点，对于多元函数也是如此，因此可仿照一元函数的情形，利用泰勒公式来导出局部极小点的充分条件。

利用局部极小点的一阶必要条件，求函数极值的问题往往化为求解 $\nabla f(x)=0$，即求 x，使满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}=0\\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n}=0\end{cases}$$

求解无约束极值问题常用数值解法，而数值解法中最常见的方法是迭代法。迭代法的基本思想是：在给出 $f(x)$ 的极小点位置的一个初始估计 $x^{(0)}$（称为初始点）后，计算一系列的 $x^{(k)}$（$k=1,2,\cdots$），希望点列 $\{x^{(k)}\}$ 的极限 x^* 就是 $f(x)$ 的一个极小点。下面的问题是怎样产生这样一个点列。当有了迭代点 $x^{(k)}$，下一个迭代点为 $x^{(k+1)}$，二者之差是一个由 $x^{(k)}$ 指向 $x^{(k+1)}$ 的向量，而一个向量总是由方向和长度所决定的，即总可以写成

$$x^{(k+1)}-x^{(k)}=\lambda_k \boldsymbol{d}^{(k)}$$

或
$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\lambda_k \boldsymbol{d}^{(k)}$$

其中，$\boldsymbol{d}^{(k)}$ 为一向量，λ_k 为一个实数（成为步长）。当 λ_k 与 $\boldsymbol{d}^{(k)}$ 确定之后，由 $x^{(k)}$ 就可以惟一确定 $x^{(k+1)}$。依次下去，从给定

的 $x^{(0)}$ 便可求出 $x^{(1)}$，由 $x^{(1)}$ 确定 $x^{(2)}$ 等，从而得到了一个点列 $\{x^{(k)}\}$。如果这个点列逼近要求的极小点 x^*，便称这个序列 $\{x^{(k)}\}$ 为极小化序列。对于每一迭代点 $x^{(k)}$，如能设法给出 $\boldsymbol{d}^{(k)}$、λ_k，则算法就确定了。各种迭代法的区别在于得出方向 $\boldsymbol{d}^{(k)}$ 和步长 λ_k 的方式不同，特别是方向的产生在方法中起着关键的作用。

既然选取的方法有多种多样，那么应该怎样建立它们的原则呢？显然，要求构造出来的极小化序列 $\{x^{(k)}\}$ 对应的函数值 $f[x^{(k)}]$应该是逐渐减小的，即具有

$$f[x^{(0)}]\geqslant f[x^{(1)}]\geqslant\cdots\geqslant f[x^{(k)}]\geqslant\cdots$$

这种性质的算法称为下降算法。

另外还要求算法应该具有收敛性，即所产生的序列具有这样的性质，或者序列中的某一点 $x^{(n)}$ 本身是 $f(x)$ 的极小点；或者有一个极限点 x^*，它是 $f(x)$ 的极小点。这个要求是必不可少的。因为极小化序列不能收敛到极小点，那么构造的序列与函数的极小点没有关系，因而也就失去意义了，但是这个要求却不容易做到。

一般把最优化算法的迭代过程由下列四步组成。

① 选择初始点 $x^{(0)}$。

② 已得出迭代点 $x^{(k)}$ 不是最优解，则建立一套规律以产生方向 $\boldsymbol{d}^{(k)}$，使得目标函数 $f(x)$ 从 $x^{(k)}$ 出发，沿方向可以找到 $x^{(k+1)}$，有所下降。

③ 方向 $\boldsymbol{d}^{(k)}$ 确定后，在射线 $x^{(k)}+\lambda_k\boldsymbol{d}^{(k)}$ $(\lambda\geqslant 0)$ 上选取步长 λ_k，使得 $f[x^{(k)}+\lambda_k\boldsymbol{d}^{(k)}]<f[x^{(k)}]$。如此确定下一个点 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\lambda_k\boldsymbol{d}^{(k)}$。在大多数算法中，$\lambda_k$ 的选取是使 $f(x)$ 下降得最多，即沿射线 $x^{(k)}+\lambda_k\boldsymbol{d}^{(k)}$ 求 $f(x)$ 的极小值，这是单变量 λ 的函数求极小点的问题，称为一维搜索，也称为线搜索。

④ 检验新得出的迭代点 $x^{(k+1)}$ 是否为最优解，或是否为最优解的近似解。如 $x^{(k+1)}$ 是近似最优解，则迭代过程终止，否则继续迭代。

3.2.2 一维搜索

一维搜索可归结为单变量函数的极小化问题。设目标函数为

$f(x)$，过点 $x^{(k)}$ 沿 $\boldsymbol{d}^{(k)}$ 方向的直线可用点集表示，记为

$$L=\{x \mid x=x^{(k)}+\lambda \boldsymbol{d}^{(k)},-\infty<\lambda<+\infty\}$$

求 $f(x)$ 在直线 L 上的极小点转化为求一元函数

$$\varphi(\lambda)=f[x^{(k)}+\lambda \boldsymbol{d}^{(k)}]$$

的极小点。

如果 $\varphi(\lambda)$ 的极小点为 λ_k，通常称 λ_k 为沿方向 $\boldsymbol{d}^{(k)}$ 的步长因子，或简称为步长．那么函数 $f(x)$ 在直线上的极小点就是

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\lambda_k \boldsymbol{d}^{(k)}$$

一维搜索方法有以下几种类型。

① 精确线搜索，即利用高等数学中的相关方法，即解方程 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=0$。

② 试探法，即按某种方式找试探点，通过一系列试探点的比较确定极小点。

③ 函数逼近法，即用较简单的曲线近似代替原来的曲线，用近似曲线的极小点来估计原来曲线的极小点。

下面几节分别介绍几种较为常用的方法。

3.2.2.1 平分法

在 $f(x)$ 极小点 x^* 处的 $f(x^*)=0$，且当 $x<x^*$ 时，函数是递减的，即 $f(x)<0$；而当 $x>x^*$ 时，函数是递增的，即 $f(x)>0$。若找到区间 $[a,b]$，具有性质 $f(a)<0$，$f(b)>0$，则在 a、b 之间必有 $f(x)$ 的极小点 x^*，并且 $f(x^*)=0$。于是，取 $x_0=(a+b)/2$，若 $f(x_0)>0$，则在区间 $[a,x_0]$ 中有极小点，这时以 $[a,x_0]$ 作为新的区间；若 $f(x_0)<0$，则在区间 $[x_0,b]$ 中有极小点，则以 $[x_0,b]$作为新的区间。如此继续，逐步将区间缩小，当区间 $[a,b]$ 充分小时，或者当 $f(x_0)$ 充分小时，即可将 $[a,b]$ 的中点取作极小点的近似值。这时有明显的估计

$$\left|x^*-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$$

至于初始区间 $[a,b]$ 的确定，一般可采取下述方法，即先取

一初始点 x_0，若 $f(x_0)<0$，则在 x_0 的右方取点 $x_1=x_0+\Delta x$（Δx 为事先给定的一个步长）；若 $f(x_0)>0$，则令 $a=x_0$，$b=x_1$；若仍有 $f(x_1)<0$，则取点 $x_2=x_1+\Delta x$（或先将 Δx 扩大一倍，再令 $x_2=x_1+\Delta x$）；若 $f(x_2)>0$，则以 $[x_1,x_2]$ 作为区间 $[a,b]$，否则继续做下去。对于 $f(x_0)>0$ 的情况，则作类似 $f(x_0)<0$ 的情况去讨论。

3.2.2.2　黄金分割法（0.618 法）

0.618 法适用于单峰函数，即在所论区间 $[a,b]$ 上，函数只有一个极小点，在其左边，函数单调下降，在其右边，函数单调上升。

于是，对于单峰函数，只需选择两个试探点 x_1、$x_2\in[a,b]$，且 $x_1<x_2$，就可将包含极小点$\bar{x}$的区间缩短。根据此性质，可不断迭代缩小包含极小点的区间（可称为搜索区间）。若进行 k 次迭代后，有$\bar{x}\in[a_k,b_k]$，取两个试探点 λ_k、$\mu_k\in[a_k,b_k]$，并规定 $\lambda_k<\mu_k$，计算函数值 $f(\lambda_k)$ 及 $f(\mu_k)$。若 $f(\lambda_k)>f(\mu_k)$，则令 $a_{k+1}=\lambda_k$，$b_{k+1}=b_k$；若 $f(\lambda_k)\leqslant f(\mu_k)$，则令 $a_{k+1}=a_k$，$b_{k+1}=\mu_k$，如此继续。于是余下来的问题是如何合理选取 λ_k、μ_k。

① 可通过比较后，有可能去掉搜索区间中的 $[a_k,\lambda_k]$ 部分，也可能去掉 $[\mu_k,b_k]$ 部分，因此 λ_k、μ_k 取在 $[a_k,b_k]$ 中的对称位置是合理的。

② 在把 $[a_k,b_k]$ 缩短为 $[a_{k+1},b_{k+1}]$ 后，λ_k、μ_k 必有一个仍属于 (a_{k+1}, b_{k+1})，它当然可作为下一步试探点之一，因此能使它保持在相应的位置，即使每次迭代区间长缩短比率相同，也是合理的考虑。

基于这两点考虑，即应有

$$b_k-\lambda_k=\mu_k-a_k$$

$$b_{k+1}-a_{k+1}=\alpha(b_k-a_k)$$

由此得到

$$\lambda_k=a_k+(1-\alpha)(b_k-a_k)$$

$$\mu_k=a_k+\alpha(b_k-a_k)$$

不妨设在第 k 次迭代得出

$$f(\lambda_k) \leqslant f(\mu_k)$$

于是 $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, \mu_k]$，则

$$\mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \alpha^2(b_k - a_k)$$

若令 $\alpha^2 = 1-\alpha$，则由式 $\lambda_k = a_k + (1-\alpha)(b_k - a_k)$ 和式 $\mu_{k+1} = a_k + \alpha^2(b_k - a_k)$ 可知，μ_{k+1} 即为留在 $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ 中已经算过函数值的试探点 λ_k。

解方程

$$\alpha^2 = 1-\alpha$$

得

$$\alpha \approx 0.618$$

另一根为负数，故舍去。

当 $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ 时，同理可得 $\alpha \approx 0.618$。

因此，0.618 法取试探点的规则为

$$\lambda_k = a_k + 0.382(b_k - a_k)$$

$$\mu_k = a_k + 0.618(b_k - a_k)$$

详细计算步骤如下。

① 置初始区间 $[a, b]$ 及精度要求 $\varepsilon > 0$，计算试探点

$$\lambda_1 = a_1 + 0.382(b_1 - a_1)$$

$$\mu_1 = a_1 + 0.618(b_1 - a_1)$$

和函数值 $f(\lambda_1)$ 和 $f(\mu_1)$，令 $k=1$。

② 若 $b_k - a_k < \varepsilon$，停止计算，$[a_k, b_k]$ 中任意点均可作为所求极小点的近似值；否则当 $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ 时，转③；当 $f(\lambda_k) \leqslant f(\mu_k)$ 时，转④。

③ 置 $a_{k+1} = \lambda_k$，$b_{k+1} = b_k$，$\lambda_{k+1} = \mu_k$，计算

$$\mu_{k+1} = a_{k+1} + 0.618(b_{k+1} - a_{k+1})$$

及 $f(\mu_{k+1})$，转⑤。

④ 置 $a_{k+1} = a_k$，$b_{k+1} = \mu_k$，$\mu_{k+1} = \lambda_k$，计算

$$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + 0.382(b_{k+1} - a_{k+1})$$

及 $f(\lambda_{k+1})$，转⑤。

⑤ 令 $k=k+1$，回②。

【例 3-2】 用 0.618 法求解下列问题，即

$$\min f(x)=2x^2-x-1$$

初始区间为 $[a_1,b_1]=[-1,1]$，$\varepsilon=0.16$。

解 计算结果如表 3-1 所示，即

表 3-1 计算结果列表

k	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$f(\lambda_k)$	$f(\mu_k)$
1	−1	1	−0.236	0.236	−0.653	−1.125
2	−0.236	1	0.236	0.528	−1.125	−0.970
3	−0.236	0.528	0.056	0.236	−1.050	−1.125
4	0.056	0.528	0.236	0.348	−1.125	−1.106
5	0.056	0.348	0.168	0.236	−1.112	−1.125
6	0.168	0.348	0.236	0.279	−1.125	−1.123
7	0.168	0.279				

经 6 次迭代达到

$$b_7-a_7=0.111<0.16$$

满足精度要求，极小点$\bar{x}\in[0.168,\ 0.279]$

实际上，问题的最优解 $x^*=0.25$，可取 $(0.168+0.279)/2\approx 0.23$ 作为近似解。

实际问题中，目标函数在其定义域内不一定是单峰，因此需要首先确定单峰区间，然后再使用 0.618 法的计算公式。

3.2.2.3 牛顿法

牛顿法是函数逼近法中的一种，它的基本思想是：在迭代点附近用二阶泰勒多项式近似目标函数 $f(x)$，进而求出极小点的估计值。

考虑问题

$$\min f(x)$$
$$x\in \mathrm{R}^1$$

令

$$\varphi(x)=f(x_k)+f(x_k)(x-x_k)+f'(x_k)(x-x_k)^2/2$$

$$\varphi'(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

利用该迭代公式可得到一个点列 $\{x_k\}$，在一定条件下，这个点列收敛于原问题的最优解，且具有二阶收敛速度。

运用牛顿法时，初始点的选择非常重要。如果初始点 x_0 靠近极小点，则收敛速度可能很快；如果初始点远离极小点。则迭代产生的点列还有可能不收敛于极小点。

3.2.3 无约束非线性规划的 MATLAB6.5 辅助计算及工程应用实例

3.2.3.1 MATLAB 优化工具箱函数选用

用于求解单变量无约束非线性规划的 MATLAB 函数为 fminbnd、fminsearch 和 fminunc；用于求解多变量无约束非线性规划的 MATLAB 函数为 fminsearch 和 fminunc。

① fminbnd 函数　利用 fminbnd 函数可求解区间 $[x_1, x_2]$ 内单变量函数的最小值，工程应用中常用的调用格式如下。

a. [x,fval]=fminbnd(fun,x_1,x_2)，返回区间上最小解 x 及解 x 处的目标函数值。

b. [x,fval]=fminbnd(fun,x_1,x_2,options)，采用 options 参数指定的优化参数进行最小化；若没有设置 options 选项，可令 options=[]，同时返回最小解 x 及解 x 处的目标函数值。

c. x=fminbnd(…)，仅返回解 x 的数值，不返回目标函数值。

② fminunc 函数　利用 fminunc 函数可求解单变量及多变量函数的最小值，工程应用中常用的调用格式如下。

a. [x,fval]=fminunc(fun,x_0)，给定初值 x_0，返回目标函数的极小值 x 和目标函数值。

b. [x,fval]=fminunc(fun,x_0,options)，给定初值 x_0，用 options 参数指定的优化参数进行最小化；若没有设置 options 选项，可令 options=[]，同时返回目标函数的极小值 x 和目标函

数值。

c. x=fminunc(…)，仅返回解 x 的数值，不返回目标函数值。

③ fminsearch 函数　利用 fminsearch 函数可求解单变量及多变量函数的最小值，工程应用中常用的调用格式如下。

a. [x,fval]=fminsearch(fun,x_0)，初值为 x_0，返回目标函数的极小值 x 和目标函数值。

b. [x,fval]=fminsearch(fun,x_0,options)，初值为 x_0，用 options 参数指定的优化参数进行最小化；如果没有设置 options 选项，则令 options=[]，同时返回目标函数的极小值 x 和目标函数值。

c. x=fminsearch(…)，仅返回解 x 的数值，不返回目标函数值。

④ 参数说明

a. fun，为目标函数，若对应的函数采用 M 文件表示，即 fun='myfun'，则 myfun. m 必须采用下面的形式，即

```
function f=myfun(x)
f=…
```

b. options，为优化参数选项，可以通过 optimset 函数设置或改变这些参数。

⑤ 注意事项

a. 三个函数均可能只输出局部最优解。

b. 三个函数均只对变量为实数的问题进行优化。

c. fminbnd 函数和 fminunc 函数要求目标函数必须连续。

d. 若变量为复数，对于 fminunc 函数和 fminsearch 函数来说，需将相应的复数分为实部和虚部两部分分别进行优化计算。

3.2.3.2　工程应用实例

【例 3-3】 某工厂有一张边长为 5m 的正方形的铁板，欲制成一个方形无盖水槽，问在该铁板的 4 个角处剪去多大的相等的正方形才能使水槽的容积最大？

解　设剪去的正方形的边长为 x，则水槽的容积为

$$f(x)=(5-2x)^2x$$

分析可知，剪去的正方形的边长不超过 2.5m，即 x 位于区间（0，2.5）上。现要求确定该区间上的一个 x，使 $f(x)$ 达最大，按照 MATLAB 的要求，将目标函数最小化，即得到如下函数模型。

$$\min\ -f(x)=-(5-2x)^2x$$

① MATLBA 求解程序清单一

```
>>[x,fval]=fminbnd('-(5-2*x)^2*x',0,2.5)↵
```

结果输出为

```
x=
   0.8333
fval=
      -9.2593
```

② MATLBA 求解程序清单二

首先，在 M-file editor 中编写如下 M 文件。

```
function f=myfun(x)
f=-(5-2*x)^2*x;
```

以文件名 myfun3_1 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中。

然后，在 MATLAB 命令窗口中调用 fminbnd 函数

```
>>[x,fval]=fminbnd('myfun3_1',0,2.5)↵
```

结果同样输出为

```
x=
   0.8333
fval=
      -9.2593
```

可见，剪掉正方形的边长为 0.8333m 时，水槽的容积最大，且最大容积为 9.2593m^3。

【例 3-4】 求 $\min\ e^{-x}+x^2$，搜索区间为（0,1）。

解 MATLAB 求解程序清单为

```
x1=0;
x2=1;
[x,fval]=fminbnd('exp(-x)+x^2',x1,x2)↵
```
结果输出为

```
x=
   0.3517
fval=
     0.8272
```
同样，也可在 M-file editor 中编写 M 文件来定义函数。

【例 3-5】 求 $\min e^{x_1}(4x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2+2x_2+1)$

解 MATLAB 求解程序清单为

```
>>x0=[-1,1];（注：x0 为初始值）
[x,fval]=fminunc('exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+
        4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1)',x0)↵
```
结果输出为

```
x=
   0.5000-1.0000
fval=
     1.3028e-010
```
同样，也可在 M-file editor 中编写 M 文件来定义函数。

【例 3-6】 求 $\min 3x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

解 MATLBA 求解程序清单为

```
>>x0=[1,1];（注：x0 为初始值）
[x,fval]=fminunc('3*x(1)^2+2*x(1)*x(2)+x(2)^2',x0)↵
```
结果输出为

```
x=
   1.0e-0.08*
   -0.7512  0.2479
fval=
```

1.3818e−016

【例 3-7】 求 min $e^{-x}+x^2$

解 ① MATLAB 求解程序清单一

首先，在 M-file editor 中定义函数

function f=fun(x)

$f=\exp(-x)+x\hat{}2$

以文件名 myfun3_2 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中。

然后，在 MATLAB 命令窗口调用 fminsearch 函数

```
>>x0=1;（注:x0 为初始值）
[x,fval]=fminsearch('myfun3_2',x0)↵
```

结果输出为

```
x=
   0.3517
fval=
       0.8272
```

② MATLBA 求解程序清单二

```
>>x0=1;
[x,fval]=fminsearch('exp(-x)+x^2',x)↵
```

结果输出为

```
x=
   0.3517
fval=
       0.8272
```

【例 3-8】 求 $\min(\sin^2(x)+5)$

解 MATLBA 求解程序清单为

```
>>x0=2;（注:x0 为初始值）
[x,fval]=fminsearch('sin(x)^2+5',x0)↵
```

结果输出为

```
x=
    3.1416
fval=
      5.0000
```

3.3 有约束非线性规划

3.3.1 最优性条件

（1）等式约束极小的最优条件

对于一般的等式约束问题

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } h_j(x)=0, j=1,2,\cdots,n$$

其中，f 和 h_j 均可微，在最优解 x^* 处，必存在数值（μ_1^*，μ_2^*，…，μ_l^*）使梯度

$$\nabla f(x^*)=\sum_{j=1}^{l}\mu_j^*\ \nabla h_j(x^*)$$

对于该约束问题，若 f、$h_j\in C'$，$j=1,2,\cdots,n$ 且 ∇h_1（x^*），∇h_2（x^*），…，∇h_j（x^*）线性无关，则存在最优解 x^* 的必要条件为：存在相应的拉格朗日乘子（$\mu_1^*,\mu_2^*,\cdots,\mu_l^*$）$^{\mathrm{T}}$，使得

$$\nabla_x L(x^*,\mu^*)=\nabla f(x^*)-\sum_{j=1}^{n}\mu_j^*\ \nabla h_j(x^*)=0$$

【例 3-9】 求曲面 $4z=3x^2-2xy+3y^2$ 到平面 $x+y-4z=1$ 的最短距离。

解 首先，取点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，令 A 是曲面上的点，B 是平面上的点，则 A、B 间的最小距离即为问题的解，则建立如下数学模型。

$$\min f(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$
$$\text{s.t. } h_1(x_1,y_1,z_1)=3x_1^2-2x_1y_1+3y_1^2-4z_1=0$$
$$h_2(x_2,y_2,z_2)=x_2+y_2-4z_2-1=0$$

其中已将距离最小等价为距离的平方值最小，以简化目标函数。

然后，根据等式约束极小的最优条件求解

$$L(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\mu_1,\mu_2)=f-\mu_1h_1-\mu_2h_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-x_2)-\mu_1(6x_1-2y_1)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1}=2(y_1-y_2)-\mu_1(-2x_1+6y_1)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_1}=2(z_1-z_2)+4\mu_1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=-2(x_1-x_2)-\mu_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2}=-2(y_1-y_2)-\mu_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_2}=-2(z_1-z_2)+4\mu_2=0$$

再加约束条件（或理解为$\frac{\partial L}{\partial \mu_1}=0$和$\frac{\partial L}{\partial \mu_2}=0$）

$$3x_1^2-2x_1y_1+3y_1^2-4z_1=0$$

$$x_2+y_2-4z_2-1=0$$

由上述方程组解得 $x_1=y_1=\frac{1}{4}$，$z_1=\frac{1}{16}$，$x_2=y_2=\frac{7}{24}$，$z_2=-\frac{5}{48}$，相应目标函数值为$\frac{\sqrt{2}}{8}$。

（2）一般线性规划的最优性条件

现考虑问题

$$\begin{aligned}&\min f(x_1,x_2,x_3)\\&\text{s.t. } g_1(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0\\&\qquad g_2(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0\end{aligned}$$

其中，f、g_1 和 g_2 均可微。设 $x^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*)$ 为问题的最优解，且设

$$g_1(x_1^*,x_2^*,x_3^*)=0，\ g_2(x_1^*,x_2^*,x_3^*)>0$$

由于 x^* 为区域 $\{(x_1,x_2,x_3)\mid g_1(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0\}$ 的内点，所以

对于 x^* 而言，约束 $g_2(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$ 实际上并没起作用。于是实际上 x^* 也是问题

$$\min f(x_1,x_2,x_3)$$
$$\text{s.t. } g_1(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$$

的最优解，则必有 λ_1^*，使

$$\nabla f(x^*)-\lambda_1^*\nabla g_1(x^*)=0 \tag{3-1}$$

说明在几何上 $\nabla f(x^*)$ 和 $\nabla g_1(x^*)$ 都通过 x^* 且共线。

为使形式整齐起见，引进 $\lambda_2^*=0$，将上式改写为

$$\nabla f(x^*)-\lambda_1^*\nabla g_1(x^*)-\lambda_2^*\nabla g_2(x^*)=0 \tag{3-2}$$

而把 $g_1(x_1^*,x_2^*,x_3^*)=0$ 和 $\lambda_2^*=0$ 统一写成

$$\lambda_i^* g_i(x_1^*,x_2^*,x_3^*)=0, i=1,2 \tag{3-3}$$

注意到梯度，$\nabla f(x^*)$ 和 $\nabla g_1(x^*)$ 均分别指向函数值 $f(x)$ 及 $g_1(x)$ 增加的方向，因此 $\nabla f(x^*)$ 和 $\nabla g_1(x^*)$ 不仅共线，而且应是同方向，即 λ_1^* 应非负而 $\lambda_2^*=0$，所以统一写为

$$\lambda_i^*\geqslant 0,\ i=1,2$$

总之，问题的最优解 x^* 必满足条件式（3-1）、式（3-2）、式（3-3），将该结论推广到一般形式。

对于一般情形

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$$
$$h_j(x)=0, j=1,2,\cdots,n$$

其中，f、g_i 和 h_j 均可微，构造拉格朗日函数

$$L(x,\lambda,\mu)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)-\sum_{j=1}^{n}\mu_j h_j(x)$$

则得到 Kuhn-Tucher 条件（简称 K-T 条件）：对于非线性规划的一般情形，若 f、g_i 和 h_j 均可微且 $\nabla g_i(x^*)$，$i\in I(x^*)$ 与 $\nabla h_j(x^*)$，$j=1,2,\cdots,n$ 线性无关，则存在最优解 x^* 的必要条件为存在相应的拉格朗日乘子 λ^* 和 μ^*，使

$$\nabla_x L(x^*,\lambda^*,\mu^*)=\nabla f(x^*)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\nabla g_i(x^*)-$$

$$\sum_{j=1}^{n}u_j^*\nabla h_j(x^*)=0$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*)=0, i=1,2,\cdots,m$$

$$\lambda_i^*\geqslant 0, i-1,2,\cdots,m$$

其中，$I(x^*)=\{i \mid g_i(x^*)=0\}$称为 x^* 的有效约束指标集。

3.3.2 惩罚函数法

在有约束最优化问题中，通常要将该问题转换为更简单的子问题，这些子问题可以求解并作为迭代过程的基础。常用的求解方法是通过构造惩罚函数等来将有约束的最优化问题转换为无约束最优化问题进行求解。

惩罚函数法的基本思想是借助惩罚函数把约束问题转化为无约束问题，进而用无约束最优化方法来求解。由于约束的非线性，不能用消元法将问题转化为无约束问题，因此，在求解时必须同时兼顾到既使目标函数值下降，又要满足约束条件这两个方面。实现这一点的途径是由目标函数和约束函数组成辅助函数，把原来的约束问题转化为极小化辅助问题的无约束问题。惩罚函数法包括外部惩罚函数法（又称外点法）、内部惩罚函数法（又称内点法）及乘子法。

(1) 外点法

外点法的基本思想是对违反约束的点在目标函数中加入相应的“惩罚”，而对可行点不予惩罚。此法的迭代点一般在可行域外部移动。

① 考虑等式约束问题

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } h_j(x)=0, j=1,2,\cdots,n$$

可定义辅助函数

$$F_1(x)=f(x)+\sigma\sum_{j=1}^{n}h_j^2(x)$$

式中，参数 σ 是很大的正数，常称作惩罚因子。这样就把问题转化为无约束问题。

$$\min F_1(x,\sigma)$$

显然，上式的最优解必定使 $h_j(x)$ 接近 0，否则原问题的约束条件将是很大的正数，因此求解问题 $\min F_1(x,\sigma)$ 能够得到问题 $\min f(x)$ 的近似解。

② 考虑不等式约束问题

$$\begin{aligned}&\min f(x)\\&\text{s. t. } g_i(x)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

辅助函数的形式与等式约束情形不同，但构造辅助函数的基本思想是一致的，这就是在可行点辅助函数值等于原来的目标函数值；在不可行点，辅助函数值等于原来的目标函数值加上一个很大的正数，由此定义辅助函数。

$$F_2(x,\sigma) = f(x) + \sigma\sum_{i=1}^{m}[\max\{0, -g_i(x)\}]^2$$

当 x 为可行点时，$\max\{0,-g_i(x)\}=0$；当 x 为不可行点时，$\max\{0,-g_i(x)\}=-g_i(x)$；这样，可将问题 $\min f(x)$ 转化为无约束问题。

$$\min F_2(x,\sigma)$$

③ 考虑一般情形

$$\begin{aligned}&\min f(x)\\&\text{s. t. } h_j(x)=0, j=1,2,\cdots,n\\&\qquad g_i(x)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

定义辅助函数

$$F_2(x,\sigma)=f(x)+\sigma P(x)$$

其中 $P(x)$ 可取如下形式，即

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m}[\max\{0, -g_i(x)\}]^\alpha + \sum_{j=1}^{n}|h_j(x)|^\beta$$

这样，即得到无约束问题

$$\min F_2(x,\sigma)=f(x)+\sigma P(x)$$

式中，σ 是很大的正数。

由构造可知，当 x 为问题的可行点时，$P(x)=0$，从而有 $F(x,\sigma)=f(x)$；当 x 不是问题的可行点时，$\sigma P(x)$ 是很大的正数，可视为对 x 脱离可行域的一种惩罚，其作用是在极小化 $\min F(x,\sigma)=f(x)+\sigma P(x)$ 问题时迫使迭代点靠近原问题的可行域。因此，求解 $\min F(x,\sigma)=f(x)+\sigma P(x)$ 能得到原问题的近似解，而且 σ 越大，近似程度越好。

【例 3-10】 求解非线性规划

$$\min\ (x_1-1)^2+x_2^2$$
$$\text{s.t. } x_2-1\geqslant 0$$

解 定义惩罚函数

$$F(x,\sigma)=(x_1-1)^2+x_2^2+\sigma[\max\{0,-(x_2-1)\}]^2$$
$$=\begin{cases}(x_1-1)^2+x_2^2, x_2\geqslant 1\\(x_1-1)^2+x_2^2+\sigma(x_2-1)^2, x_2<1\end{cases}$$

用解析法求解 $F(x,\sigma)$，有

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=2(x_1-1),\quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=\begin{cases}2x_2,\ x_2\geqslant 1\\2x_2+2\sigma(x_2-1),\ x_2<1\end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=0$，$\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=0$，得到

$$x_\sigma^*=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\dfrac{\sigma}{1+\sigma}\end{bmatrix}$$

易见，当 $\sigma\to+\infty$ 时

$$x_\sigma^*\to x^*=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

x^* 恰为所求非线性规划最优解，目标函数值为 1。

用此法求得的无约束问题的最优解往往是满足约束条件的，它是从可行域外部，随着 σ 的增大而趋于 x^* 的，故此法又称为外点法。

(2) 内点法

内点法的基本思想是对企图从内部穿越可行域边界的点在目标函数中加入相应的“障碍”，距边界越近，障碍越大，在边界上给以无穷大的障碍，从而保障迭代一直在可行域内部移动。由于内点法总是从可行域的内点出发，并保持在可行域内部进行搜索，因此这种方法只适用于只有不等式约束的问题。

$$\begin{aligned}&\min f(x)\\&\text{s. t. } g_i(x)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

现将可行域记为

$$D=\{x\mid g_i(x)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m\}$$

保持迭代点含于 D 内部的方法是定义障碍函数

$$G(x,r)=f(x)+rB(x)$$

式中，$B(x)$ 是连续函数，当点 x 趋向 D 的边界时，$B(x)\to+\infty$。两种最重要的形式是

$$B(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}$$

及

$$B(x)=-\sum_{i=1}^{m}\lg g_i(x)$$

r 是很小的正数。这样，当 x 趋向边界时，$G(x,r)\to+\infty$；否则，由于 r 很小，则 $G(x,r)\approx f(x)$。因此，可通过求解问题

$$\begin{aligned}&\min G(x,r)\\&\text{s. t. } x\in \operatorname{int} D\end{aligned}$$

（式中，符号 int D 表示 D 的内部）来得到原问题的近似解。由于 $B(x)$的存在，在 D 的边界形成“围墙”，因此该问题从 D 的内部出发的迭代点必在 D 的内部。正由于 $B(x)$ 的阻挡作用，使 $x\in \operatorname{int} D$ 自动满足，故该问题实质上是一个无约束问题。

【例 3-11】 用内点法求解

$$\begin{aligned}&\min \frac{1}{12}(x_1+1)^3+x_2\\&\text{s. t. } x_1-1\geqslant 0\end{aligned}$$

$$x_2 \geqslant 0$$

解 定义障碍函数

$$G(x,r)=\frac{1}{12}(x_1+1)^3+x_2+r\left(\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2}\right)$$

用解析法求解，令

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}=\frac{1}{4}(x_1+1)^2-\frac{r}{(x_1-1)^2}=0$$

$$\frac{\partial G}{x_2}=1-\frac{r}{x_2^2}=0$$

解得

$$x_r^*=(x_1,x_2)=\sqrt{1+2\sqrt{r}},\sqrt{r}$$

当 $r \to 0$ 时，

$$x_r^* \to x^*=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

x^* 确为所求非线性规划最优解，目标函数值为 2/3。

3.3.3 约束非线性规划的 MATLAB6.5 辅助计算及工程应用实例

3.3.3.1 MATLAB 优化工具箱函数选用

用于求解多变量有约束非线性函数最小化的 MATLAB 函数主要是 fmincon 函数，数学模型为

$$\begin{aligned}
&\min\ f(x)\\
&\text{s.t. } \boldsymbol{c}(x)\leqslant 0\\
&\qquad \mathbf{ceq}(x)=0\\
&\qquad \boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{b}\\
&\qquad \mathbf{Aeq}*\boldsymbol{x}=\mathbf{beq}\\
&\qquad \mathbf{lb}\leqslant \boldsymbol{x}\leqslant \mathbf{ub}
\end{aligned}$$

工程应用中常用 fmincon 函数调用格式如下。

① [$\boldsymbol{x}$,fval]=fmincon(fun,$\boldsymbol{x}_0$,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$)，给定初值 $\boldsymbol{x}_0$，求解目标函数的最小值 $\boldsymbol{x}$，约束条件为 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$，同时返回解 $\boldsymbol{x}$ 处的目标函数值。

② $[\boldsymbol{x},\mathrm{fval}]=\mathrm{fmincon}(\mathrm{fun},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathbf{Aeq},\mathbf{beq})$，给定初值 $\boldsymbol{x}_0$，求解目标函数的最小值 $\boldsymbol{x}$，约束条件为 $\mathbf{Aeq}*\boldsymbol{x}=\mathbf{beq}$ 和 $\mathbf{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$；若没有不等式约束条件存在，则设 $\mathbf{A}=[\ ]$，$\boldsymbol{b}=[\ ]$，同时返回解 $\boldsymbol{x}$ 处的目标函数值。

③ $[\boldsymbol{x},\mathrm{fval}]=\mathrm{fmincon}(\mathrm{fun},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathbf{Aeq},\mathbf{beq},\mathbf{lb},\mathbf{ub})$，给定初值 $\boldsymbol{x}_0$，求解目标函数的最小值 $\boldsymbol{x}$，约束条件为 $\mathbf{Aeq}*\boldsymbol{x}=\mathbf{beq}$ 和 $\mathbf{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$，定义变量 $\boldsymbol{x}$ 的下界 **lb** 和上界 **ub**。若无等式约束条件存在，则设 $\mathbf{Aeq}=[\ ]$，$\mathbf{beq}=[\ ]$；若没有不等式约束条件存在，则设 $\mathbf{A}=[\ ]$，$\boldsymbol{b}=[\ ]$，同时返回解 $\boldsymbol{x}$ 处的目标函数值。

④ $[\boldsymbol{x},\mathrm{fval}]=\mathrm{fmincon}(\mathrm{fun},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathbf{Aeq},\mathbf{beq},\mathbf{lb},\mathbf{ub},\mathrm{nonlcon})$，在上面的基础上，在 nonlcon 参数中提供非线性不等式 $\boldsymbol{c}(x)$ 或等式 $\mathbf{ceq}(x)$，要求 $\boldsymbol{c}(x)\leqslant 0$ 且 $\mathbf{ceq}(x)=0$。当非线性不等式 $\boldsymbol{c}(x)$ 或等式 $\mathbf{ceq}(x)$ 不同时存在时，可令 $\boldsymbol{c}=[\ ]$ 或 $\mathbf{ceq}=[\ ]$；当无边界存在时，令 $\mathbf{lb}=[\ ]$ 和（或）$\mathbf{ub}=[\ ]$，同时返回解 $\boldsymbol{x}$ 处的目标函数值。

⑤ $[\boldsymbol{x},\mathrm{fval}]=\mathrm{fmincon}(\mathrm{fun},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\mathbf{Aeq},\mathbf{beq},\mathbf{lb},\mathbf{ub},\mathrm{nonlcon},\mathrm{options})$，在上面的基础上，用 options 参数指定的参数进行最小化。

⑥ $\boldsymbol{x}=\mathrm{fmincon}(\cdots)$，仅返回解 $\boldsymbol{x}$ 的值，不返回目标函数的值。

参数说明如下。

nonlcon 参数用于计算非线性不等式约束 $\boldsymbol{c}(x)\leqslant 0$ 和非线性等式约束 $\mathbf{ceq}(x)=0$。若对应的函数采用 M 文件表示，即 nonlcon＝'mycon'，则 M 文件 mycon.m 具有下面的形式，即

```
function[c,ceq]=mycon(x)
c=…        （计算 x 处的非线性不等式）
ceq=…      （计算 x 处的非线性等式）
```

注意　目标函数和约束函数都必须是连续的，且都必须是实数，可能会给出局部最优解。

3.3.3.2　工程应用实例

【例 3-12】　利用 fmincon 函数求解例 3-9 中曲面 $4z=3x^2-$

$2xy+3y^2$ 到平面 $x+y-4z=1$ 的最短距离。

解 先将曲面和平面的方程改写为

$$4x_3=3x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2$$

$$x_4+x_5-4x_6=1$$

取点 $A(x_1,x_2,x_3)$、$B(x_4,x_5,x_6)$，令 A 是曲面上的点，B 是平面上的点，则 A、B 间的最小距离即为问题的解，则建立数学模型为

$$\min f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(x_1-x_4)^2+(x_2-x_5)^2+(x_3-x_6)^2$$

$$\text{s. t. } h_1(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2-4x_3=0$$

$$h_2(x_4,x_5,x_6)=x_4+x_5-4x_6-1=0$$

MATLBA 求解程序清单如下。

首先，编写 M 文件来定义函数

```
function f=myfun(x)
f=(x(1)-x(4))^2+(x(2)-x(5))^2+(x(3)-x(6))^2;
```

以文件名 myfun3_3 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中；

其次，由于约束条件是非线性等式约束，因此需要编写一个约束条件的 M 文件，即

```
function[c,ceq]=mycon(x)
c=[];
ceq(1)=3*x(1)^2-2*x(1)*x(2)+3*x(2)^2-4*x(3);
ceq(2)=x(4)+x(5)-4*x(6)-1;
```

以文件名 mycon3_1 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中；

最后，调用 fmincon 函数

```
>>x0=[0,0,0,0,0,0];
[x,fval]=fmincon('myfun3_3',x0,[],[],[],[],[],[],
        'mycon3_1')↵
```

结果输出为

```
x=
   0.2500   0.2500   0.0625   0.2917   0.2917   -0.1042
fval=
     0.0312
```

再输入

```
>>sqrt(fval) ↵
```

结果为

```
ans=
     0.1768
```

可见，计算结果与采用等式约束极小的最优条件所得到的结果完全吻合。

【例 3-13】 利用 fmincon 函数求解例 3-10 中的非线性规划问题。

$$\min\ (x_1-1)^2+x_2^2$$
$$\text{s.t. } x_2-1\geqslant 0$$

解 MATLBA 求解程序清单为

```
A=[0,-1];
b=[-1];
x0=[0;0];
[x,fval]=fmincon('(x(1)-1)^2+x(2)^2',x0,A,b) ↵
```

结果输出为

```
x=
   1
   1
fval=
     1
```

可见，结果与利用外点法算出来的函数值一致。

【例 3-14】 利用 fmincon 函数求解例 3-11 中的非线性规划问题。

$$\min \frac{1}{12}(x_1+1)^3+x_2$$

$$\text{s.t. } x_1-1\geqslant 0$$

$$x_2\geqslant 0$$

解 MATLBA 求解程序清单为

```
A=[-1,0;0,-1];
b=[-1,0];
x0=[0;0];
[x,fval]=fmincon('((x(1)+1)^3)/12+x(2)',x0,A,b)↵
```

结果输出为

```
x=
    1.0000
    0.0000
fval=
      0.6667
```

可见，结果与利用内点法算出来的函数值一致。

【例 3-15】 求解约束非线性规划

$$\min -x_1x_2x_3$$

$$\text{s.t. } 0\leqslant x_1+2x_2+2x_3\leqslant 27$$

初始值 x_0 分别取 1。

解 将模型化为下列形式，即

$$\min -x_1x_2x_3$$

$$\text{s.t. } -x_1-2x_2-2x_3\leqslant 0$$

$$x_1+2x_2+2x_3\leqslant 27$$

MATLBA 求解程序清单为

```
A=[-1,-2,-2;1,2,2];
b=[0;27];
x0=[1;1;1];
[x,fval]=fmincon('-x(1)*x(2)*x(3)',x0,A,b)↵
```

结果输出为

```
x=
    9.0000
    4.5000
    4.5000
fval=
      -182.2500
```

【例 3-16】 求解约束非线性规划

$$\min\ e^{x1}(4x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2+2x_2+1)$$
$$\text{s.t. } 1.5+x_1x_2-x_1-x_2\leqslant 0$$
$$-x_1x_2-10\leqslant 0$$

解 首先，编写 M 文件来定义函数

```
function f=myfun(x)
f=exp(x(1)) * (4 * x(1)^2+2 * x(2)^2+4 * x(1) * x(2)+
   2 * x(2)+1);
```

以文件名 myfun3_4 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中；

其次，由于约束条件是非线性不等式约束，因此需要编写一个约束条件的 M 文件，即

```
function[c,ceq]=mycon(x)
c(1)=1.5+x(1) * x(2)-x(1)-x(2);
c(2)=-x(1) * x(2)-10;
ceq=[];
```

以文件名 mycon3_2 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中；

最后，调用 fmincon 函数

```
>>x0=[-1,1];
[x,fval]=fmincon('myfun3_4',x0,[],[],[],[],[],[],'my-
          con3_2')↵
```

结果输出为

```
x=
```

    -9.5474   1.0474
fval=
        0.0236

【例 3-17】 求表面积为 $300m^2$ 的体积最大的圆柱体体积。

解 设该圆柱体的半径和高分别为 x_1、x_2，根据题意建立下面的数学模型，即

$$\begin{aligned}&\max\ \pi x_1^2 x_2\\&\text{s. t.}\ 2\pi x_1 x_2+2\pi x_1^2=300\\&\qquad x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

即求解

$$\begin{aligned}&\min\ -\pi x_1^2 x_2\\&\text{s. t.}\ \pi x_1 x_2+\pi x_1^2=150\\&\qquad x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

MATLAB求解程序清单如下。

首先，编写 M 文件来定义函数

```
function f=myfun(x)
f=-3.14 * x(1) * x(1) * x(2);
```

以文件名 myfun3 _ 5 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中；

其次，由于约束条件是非线性等式约束，因此需要编写一个约束条件的 M 文件，即

```
function[c,ceq]=mycon(x)
c=[];
ceq=3.14 * x(1) * x(2)+3.14 * x(1)^2-150;
```

以文件名 mycon3 _ 3 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中；

最后，调用 fmincon 函数

```
>>x0=[1,1];
lb=zeros(2,1);
[x,fval]=fmincon('myfun3_5',x0,[],[],[],[],lb,[],'my-
```

```
        con3_3')↵
```

结果输出为

```
x=
    3.9904   7.9809
fval=
        -399.0434
```

可见，当圆柱体的半径和高分别为 4m、8m 时圆柱体的体积最大，为 399m^3。

【例 3-18】 某公司经营两种设备，第一种设备每件售价 30 元，第二种设备每件售价 450 元。根据统计，售出一件第一种设备所需的营业时间平均为 0.5h，第二种设备是 $(2+0.25x_2)$h，其中 x_2 是第二种设备的售出数量。已知该公司在这段时间内的总营业时间为 800h，试确定使营业额最大的营业计划。

解 设该公司计划经营第一种设备 x_1 件，第二种设备 x_2 件。根据题意，建立如下数学模型。

$$\begin{aligned}&\max\ f(x)=30x_1+450x_2\\&\text{s.t.}\ \ 0.5x_1+(2+0.25x_2)x_2=800\\&\qquad\ \ x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

将该模型转换为

$$\begin{aligned}&\max\ f(x)=30x_1+450x_2\\&\text{s.t.}\ \ 0.5x_1+(2+0.25x_2)x_2\leqslant 800\\&\qquad\ \ x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

首先，编写 M 文件来定义函数。

```
function f=myfun(x)
f=-30*x(1)-450*x(2);
```

以文件名 myfun3_6 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中；

其次，由于约束条件是非线性不等式约束，因此需要编写一个约束条件的 M 文件，即

```
function[c,ceq]=mycon(x)
```

```
c=0.5*x(1)+2*x(2)+0.25*x(2)*x(2)-800;
ceq=[];
```

以文件名 mycon3_4 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中；

最后，调用 fmincon 函数

```
>>x0=[0,0];
lb=zeros(2,1);
[x,fval]=fmincon('myfun3_6',x0,[],[],[],[],lb,[],'my-
        con3_4')↵
```

结果输出为

```
x=
   1.0e+0.03*
   1.4955   0.0110
fval=
      -4.9815e+004
```

所以，该公司经营第一种设备 1496 件、经营第二种设备 11 件时，可使总营业额最大，为 49815 元。

【例 3-19】 资金使用问题

设有 400 万元资金，要求 4 年内使用完，若在第一年内使用资金 x 万元，则可得到效益 $x^{1/2}$ 万元（效益不能再使用），当年不用的资金可存入银行，年利率为 10%，试制订出资金的使用规划，以使 4 年效益之总和为最大。

解 设变量 x_i（$i=1,2,3,4$）分别表示第 i 年所使用的资金数，而目标为 4 年的效益总和最大。

则数学模型为

$$\min\ -(x_1^{1/2}+x_2^{1/2}+x_3^{1/2}+x_4^{1/2})$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. } & x_1\leqslant 400\\ & 1.1x_1+x_2\leqslant 440\\ & 1.21x_1+1.1x_2+x_3\leqslant 484\\ & 1.331x_1+1.21x_2+1.1x_3+x_4\leqslant 532.4\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$$

MATLAB 求解程序清单为

```
A=[1.1,1,0,0;1.21,1.1,1,0;1.331,1.21,1.1,1];
b=[440,484,532.4]';
lb=[0,0,0,0]';
ub=[440,1000,1000,1000]';
x0=[1,1,1,1]';
[x,fval]=fmincon('-sqrt(x(1))-sqrt(x(2))-sqrt(x(3))
        -sqrt(x(4))',x0,A,b,[],[],lb,ub)↵
```

或在 M-file editor 中定义函数

```
function f=myfun(x)
y=-sqrt(x(1))-sqrt(x(2))-sqrt(x(3))-sqrt(x(4))
```

并以文件名 myfun3 _ 7 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中，然后在 MATLAB 命令窗口中输入

```
A=[1.1,1,0,0;1.21,1.1,1,0;1.331,1.21,1.1,1];
b=[440,484,532.4]';
lb=[0,0,0,0]';
ub=[440,1000,1000,1000]';
x0=[1,1,1,1]';
[x,fval]=fmincon('myfun3_7',x0,A,b,[],[],lb,ub)↵
```

结果输出为

```
x=
    84.2407
    107.6345
    128.9047
    148.2428
fval=
        -43.0821
```

可见，当第 1 年使用资金为 84.2407 万元、第 2 年为 107.6345 万元、第 3 年为 128.9047 万元和第 4 年为 148.2428 万

元时，4 年的效益之总和最大，为 43.0821 万元。

3.3.4 二次规划及其 MATLAB 实现

3.3.4.1 二次规划

二次规划问题是最简单的约束非线性规划问题，其研究成果比较成熟，较容易求解。通常把约束条件全为线性的而目标函数是二次函数的最优化问题称为二次规划。

二次规划问题的数学模型可表述为

$$\min\ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant \boldsymbol{b}\\ & \mathbf{Aeq}*\boldsymbol{x}=\mathbf{beq}\\ & \mathbf{lb}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\mathbf{ub}\\ & \boldsymbol{x}\geqslant 0\end{aligned}$$

3.3.4.2 MATLAB 优化工具箱函数选用

用于求解二次规划问题的 MATLAB 函数主要是 quadprog 函数，工程应用中常用的函数调用格式如下。

① [x,fval]=quadprog($\boldsymbol{H}$,f,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$)，返回向量 $\boldsymbol{x}$ 及解 x 处的目标函数值，约束条件为 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$。

② [x,fval]=quadprog($\boldsymbol{H}$,f,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,**Aeq**,**beq**)，返回向量 $\boldsymbol{x}$ 及解 x 处的目标函数值，约束条件为 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$ 及 $\mathbf{Aeq}*\boldsymbol{x}=\mathbf{beq}$。

③ [x,fval]=quadprog($\boldsymbol{H}$,f,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,**lb**,**ub**)，返回向量 $\boldsymbol{x}$ 及解 x 处的目标函数值，约束条件为 $\boldsymbol{A}*x\leqslant\boldsymbol{b}$，定义变量的下界 **lb** 和上界 **ub**。

④ [x,fval]=quadprog($\boldsymbol{H}$,f,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,**lb**,**ub**,x_0)，返回向量 $\boldsymbol{x}$ 及解 x 处的目标函数值，约束条件为 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$，定义变量的下界 **lb** 和上界 **ub**，并设置初值 x_0。

⑤ [x,fval]=quadprog（$\boldsymbol{H}$,f,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,**lb**,**ub**,x_0,options)，返回向量 $\boldsymbol{x}$ 及解 x 处的目标函数值，约束条件为 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$，定义变量的下界 **lb** 和上界 **ub**，设置初值 x_0，并根据 options 参数指定的优化参数进行优化计算。

⑥ x=quadprog(…)，仅返回解 x 的值，不返回解 x 处的目标函数值。

3.3.4.3 应用实例

【例 3-20】 求解下面的二次规划问题

$$\min \frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-x_1x_2-6x_1-2x_2$$

$$\text{s.t. } 2x_1+x_2\leqslant 3$$

$$-x_1+x_2\leqslant 1$$

$$x_1+2x_2\leqslant 2$$

$$x_1,x_2\geqslant 0$$

解 先将目标函数写成下面的矩阵形式，即

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-6\\ -2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

然后应用函数 quadprog 求解，程序清单如下。

依次输入

```
>>H=[1,-1;-1,2]↵
>>C=[-6,-2]↵
>>A=[2,1;-1,1;1,2]↵
>>b=[3,1,2]↵
>>lb=[0,0]↵
>>[x,fval]=quadprog(H,C,A,b,[],[],lb)↵
```

结果输出为

```
x=
    1.3333
    0.3333
fval=
      -8.1111
```

【例 3-21】 求解下面的二次规划问题

$$\min \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1-2x_1$$

$$\text{s.t.}\ 2x_1+3x_2\leqslant 6$$
$$x_1+4x_2\leqslant 5$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

解　先将目标函数写成下面的矩阵形式，即

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

然后应用函数 quadprog 求解，程序清单如下。

依次输入

```
>>H=[1,0;0,1]↵
>>C=[-1,-2]↵
>>A=[2,3;1,4]↵
>>b=[6,5]↵
>>lb=[0,0]↵
>>[x,fval]=quadprog(H,C,A,b,[],[],lb)↵
```

结果输出为

```
x=
    0.7647
    1.0588
fval=
        -2.0294
```

【例 3-22】　求解下面的二次规划问题

$$\min\ x_1^2+x_2^2+6x_1+9$$
$$\text{s.t.}\ 4-2x_1-x_2\leqslant 0$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

解　先求下面的二次规划问题

$$\min\ x_1^2+x_2^2+6x_1$$
$$\text{s.t.}\ -2x_1-x_2\leqslant -4$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

并将目标函数写成下面的矩阵形式，即

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

然后依次输入

```
≫H=[2,0;0,2]↵
≫C=[6,0]↵
≫A=[-2,-1]↵
≫b=[-4]↵
≫lb=[0,0]↵
≫[x,fval]=quadprog(H,C,A,b,[],[],lb)↵
```

结果输出为

```
x=
    1.0000
    2.0000
fval=
       11.0000
```

所以，原二次规划问题的最优值为 20。

【例 3-23】 求解下面的二次规划问题

$$\max\ -x_1^2-x_2^2+8x_1+10x_2$$
$$\text{s. t. } 3x_1+2x_2\leqslant 6$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

解 将上述二次规划改写成如下形式

$$\min\ x_1^2+x_2^2-8x_1-10x_2$$
$$\text{s. t. } 3x_1+2x_2\leqslant 6$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

然后将目标函数写成下面的矩阵形式，即

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-8\\-10\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

依次输入

```
≫H= [2, 0; 0, 2] ↵
```

```
>>C= [-8, -10] ↵
>>A= [3, 2] ↵
>>b= [6] ↵
>>lb= [0, 0] ↵
>> [x, fval] =quadprog (H, C, A, b, [], [], lb) ↵
```
结果输出为

```
x=
   0.3077
   2.5385
fval=
      -21.3077
```
所以,原二次规划问题的最优值为 21.3077。

习　题

1. 试求下列函数的极小点及极小值。

(1) $f(x)=x_1^2x_2+x_2^3-x_2$；(2) $f(x)=x_1x_2(a-x_1-x_2)$；

(3) $f(x)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-4x_1$

2. 试用 0.618 法求下列函数的极小点。

(1) $f(x)=x^2-6x+2$，区间为 $[0,10]$，精度取 0.08；

(2) $f(x)=e^{-x}+x^2$，区间为 $[0,1]$，精度取 0.03。

3. 试用外点法求解。

(1) $\min\{x_1^2+x_2^2\}$

$$\text{s.t. } x_1+1\leqslant 0$$

(2) $\max x_1$

$$\begin{aligned}\text{s.t. } &(x_2-2)+(x_1-1)^3\leqslant 0\\ &(x_1-1)^3-(x_2-2)\leqslant 0\\ &x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

4. 试用内点法求解。

(1) $\min \left\{\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2\right\}$

s. t. $1-x_1 \leqslant 0$

$x_2 \geqslant 0$

(2) $\min x$

s. t. $0 \leqslant x \leqslant 1$

5. 试写出下列非线性规划的 K-T 条件并进行求解。

(1) $\max (x-3)^2$

s. t. $1 \leqslant x \leqslant 5$

(2) $\min \{(x_1-2)^2+(x_2-1)^2\}$

s. t. $1-x_1^2-x_2^2 \geqslant 0$

6. 确定具有最小表面积的圆柱体的尺寸，此圆柱体的金属可以浇铸半径为 10 的金属球体。

7. 试解下列二次规划。

(1) $\min 2x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2-6x_1-3x_2$

s. t. $x_1+x_2 \leqslant 3$

$4x_1+x_2 \leqslant 9$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

(2) $\min 2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-4x_1-6x_2$

s. t. $x_1+x_2 \leqslant 2$

$x_1+5x_2 \leqslant 5$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

8. 一根铁丝截成两段，一段弯成圆圈，另一段弯成方形。问应以怎样的比例截断铁丝，才能使圆和方形面积之和为最小？

4 整数规划

本章提要

在工程和管理问题中，涉及了许多整数规划的问题。本章介绍了整数规划的概念及分类，通过实例重点介绍了整数规划求解的方法，即图解法、分支定界法和隐枚举法，并介绍如何利用 MATLAB 函数来实现分支定界法的求解。

4.1 概述

在前面讨论的线性规划问题中，有些最优解可能是分数或小数，也可能在某些具体问题上常要求最优解必须是整数的情形（称为整数解）。例如，要求机器的台数、完成工作的人数或装货的车数等。通常称这种问题为整数规划（Integer Programming），简称 IP，它是规划论中的一个分支。

整数规划中，所有变量都取整数值的称为纯整数规划（Pure Integer Programming）；部分变量取整数值的称混合整数规划（Mixed Integer Programming）；变量只取 0 或 1 两种值的整数规划称为 0-1 规划。

下面举例说明整数线性规划的一些特点。

【例 4-1】 背包问题

有一只背包（泛指仓库、火车、船舱、卫星舱等），最大装载质量为 w 单位，现有 k 种物品，每种物品的数量无限。第 i 种物品每件质量为 w_i，价值为 v_i。每种物品各取多少装入背包才能使其中的物品总价值最高？

解 设取第 i 种物品 x_i 件 $(i=1,2,\cdots,k)$，则

$$\max z=v_1x_1+v_2x_2+\cdots+v_kx_k$$
$$\text{s.t.}\quad w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_kx_k\leqslant w$$
$$x_i\geqslant 0 \text{ 且为整数}, \ i=1,2,\cdots,k$$

这是一个纯整数规划问题。

【例 4-2】 固定成本问题

高压容器公司制造小、中、大三种尺寸的金属容器，所用资源为金属板、劳动力和机器设备，制造一个容器所需的各种资源的数量如表 4-1 所示。不考虑固定费用，每种容器售出一只所得的利润分别为 4 万元、5 万元、6 万元，可使用的金属板有 500t，劳动力有 300 人/月，机器有 100 台/月，此外，不管每种容器制造的数量是多少，都要支付一笔固定的费用，即小号 100 万元，中号 150 万元，大号 200 万元。现在要制定一个生产计划，使获得的利润为最大。

表 4-1 制造一个容器所需的各种资源数量

资　源	小号容器	中号容器	大号容器
金属板/t	2	4	8
劳动力/(人/月)	2	3	4
机器设备/(台/月)	1	2	3

解 设 x_1、x_2、x_3 分别为小号容器、中号容器和大号容器的生产数量。各种容器的固定费用只有在生产该种容器时才投入，为了说明固定费用的这种性质，设 $y_i=1$（当生产第 i 种容器即 $x_i>0$ 时）或 0（当不生产第 i 种容器即 $x_i=0$ 时），引入约束条件 $x_i\leqslant My_i(i=1,2,3)$、$M$ 充分大，以保证当 $y_i=0$ 时，$x_i=0$。则可建立如下的数学模型。

$$\max z=4x_1+5x_2+6x_3-100y_1-150y_2-200y_3$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1+4x_2+8x_3\leqslant 500$$
$$2x_1+3x_2+4x_3\leqslant 300$$
$$x_1+2x_2+3x_3\leqslant 100$$

$x_i \leqslant My_i$，$i=1,2,3$，M 充分大

$x_i, y_i \geqslant 0$ 且 y_i 为 0-1 变量，$i=1,2,3$

这是一个整数规划问题。

【例 4-3】 投资场所的选择

京成畜产品公司计划在市区的东、西、南、北四区建立销售门市部，拟议中有 10 个位置 $A_j(j=1,2,\cdots,10)$ 可供选择，考虑到各地区居民的消费水平及居民居住密集度，规定如下。

① 在东区由 A_1，A_2，A_3 三个点中至多选择两个；

② 在西区由 A_4，A_5 两个点中至少选一个；

③ 在南区由 A_6，A_7 两个点中至少选一个；

④ 在北区由 A_8，A_9，A_{10} 三个点中至少选两个。

A_j 各点的设备投资及每年可获利润由于地点不同而不一样，预测情况见表 4-2 所示（单位：万元），但投资总额不能超过 720 万元，问应选择哪几个销售点，可使年利润为最大?

表 4-2 A_j 各点设备的预测情况

项目	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
投资额	100	120	150	80	70	90	80	140	160	180
利润	36	40	50	22	20	30	25	48	58	61

解 设 0-1 变量 $x_i=1$（A_i 点被选用）或 0（A_i 点没被选用），于是建立如下的数学模型。

$$\max z=36x_1+40x_2+50x_3+22x_4+20x_5+30x_6+25x_7+48x_8+58x_9+61x_{10}$$

$$\text{s.t.}\ 100x_1+120x_2+150x_3+80x_4+70x_5+90x_6+80x_7+140x_8+160x_9+180x_{10}\leqslant 720$$

$$x_1+x_2+x_3\leqslant 2$$

$$x_4+x_5\geqslant 1$$

$$x_6+x_7\geqslant 1$$

$$x_8+x_9+x_{10}\geqslant 2$$

$$x_i\geqslant 0 \text{ 且 } x_i \text{ 为 0-1 变量}，i=1,2,\cdots,10$$

这是一个 0-1 线性规划问题。

【例 4-4】 设厂问题

某企业在 A_1 地区已有一个工厂，其产品的生产能力为 30 千箱，为了扩大生产，打算在 A_2、A_3、A_4、A_5 地区再选择几个地方建厂。已知在 A_2、A_3、A_4、A_5 地区建厂的固定成本分别为 175 千元、300 千元、375 千元、500 千元；另外，A_1 的产量及 A_2、A_3、A_4、A_5 拟建厂的产量以及产地到销地的单位运价（每千箱运费）如表 4-3 所示。

表 4-3 各厂产量及产地到销地的单位运价

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量/千吨
A_1	8	4	3	30
A_2	5	2	3	10
A_3	4	3	4	20
A_4	9	7	5	30
A_5	10	4	2	40
销量/千吨	30	20	20	

问：①应该在哪几个地区建厂，在满足销量的前提下，使得其总的固定成本和总的运输费用之和最小？

② 如果由于政策要求必须在 A_2、A_3 地建一个厂，应在哪几个地方建厂？

解 ①设 x_{ij} 为从 A_i 地运往 B_j 地的运输量（单位：千箱），$y_i=1$(当 A_i 被选中时）或 0(当 A_i 没被选中时)，可建立如下数学模型。

$$\min z=175y_2+300y_3+375y_4+500y_5+8x_{11}+4x_{12}+3x_{13}+5x_{21}+2x_{22}+3x_{23}+4x_{31}+3x_{32}+4x_{33}+9x_{41}+7x_{42}+5x_{43}+10x_{51}+4x_{52}+2x_{53}$$

（其中前 4 项为固定投资额，后面的项为运输费用）

s. t. $x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 30$（$A_1$ 厂的产量限制）

$x_{21}+x_{22}+x_{0}\leqslant 10y_2$ （A_2 厂的产量限制）

$y_2+y_3=1$ （增加的约束）

$x_{31}+x_{32}+x_{33}\leqslant 20y_3$ （A_3 厂的产量限制）

$x_{41}+x_{42}+x_{43}\leqslant 30y_4$ （A_4 厂的产量限制）

$x_{51}+x_{52}+x_{53}\leqslant 40y_5$ （A_5 厂的产量限制）

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=30$ （B_1 销地的限制）

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=20$ （B_2 销地的限制）

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=20$ （B_3 销地的限制）

$x_{ij}\geqslant 0$，y_i 为 0-1 变量，$i=1,2,3,4,5$；$j=1,2,3$

这是一个混合整数规划问题。

【例 4-5】 指派问题

有 n 项不同的任务，恰好 n 个人可分别承担这些任务，但由于每人特长不同，完成各项任务的效率等情况也不同。现假设必须指派每个人去完成一项任务，怎样把 n 项任务指派给 n 个人，使得完成 n 项任务的总的效率最高，这就是指派问题。

有 4 个工人，要分别指派他们完成 4 项不同的工作，每人做各项工作所消耗的时间如表 4-4 所示，问应如何指派工作，才能使总的消耗时间为最少？

表 4-4 每人做各项工作所消耗的时间

工作 工人	A	B	C	D
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

解 引人 0-1 变量 x_{ij}，并令 $x_{ij}=1$（当指派第 i 人去完成第 j 项工作时）或 0（当不指派第 i 人去完成第 j 项工作时），建立如下 0-1 整数规划数学模型。

$\min z=15x_{11}+18x_{12}+21x_{13}+24x_{14}+19x_{21}+23x_{22}+22x_{23}+$

$18x_{24}+26x_{31}+17x_{32}+16x_{33}+19x_{34}+19x_{41}-21x_{42}+23x_{43}+17x_{44}$

s. t. $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$ （甲只能干一项工作）

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$ （乙只能干一项工作）

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$ （丙只能干一项工作）

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$ （丁只能干一项工作）

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$ （A 工作只能一人干）

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1$ （B 工作只能一人干）

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1$ （C 工作只能一人干）

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1$ （D 工作只能一人干）

x_{ij} 为 0-1 变量，$i,j=1,2,3,4$

这是一个 0-1 整数线性规划问题。

4.2 整数规划的图解法

对于只有两个最多三个变量的线性整数规划问题，可采取作图的方法求解，下面通过一个实例来说明图解法的解题方法。

【例 4-6】 某工厂在计划期内要安排甲、乙两种仪器设备的生产，已知生产仪器设备需要 A、B 两种材料的消耗以及资源的限制如表 4-5 所示。

表 4-5 A、B 两种材料的消耗及资源的限制

项　目	甲	乙	资源限制
材料 A	3	2	10
材料 B	0	2	5
单件获利/万元	1	1	

试问工厂应分别生产多少件甲、乙种仪器设备才能使工厂获利最多？

解 设工厂应分别生产甲、乙中仪器设备 x_1、x_2 件，根据题意建立如下数学模型。

$$\max\ x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 3x_1+2x_2\leqslant 10$$

$$2x_2\leqslant 5$$

$$x_1, x_2\geqslant 0 \text{ 且为整数}$$

根据数学模型绘制如下图形（见图 4-1）。

首先，不考虑整数约束得到最优解

$x_1=1.667$，$x_2=2.5$，目标函数值为 4.167

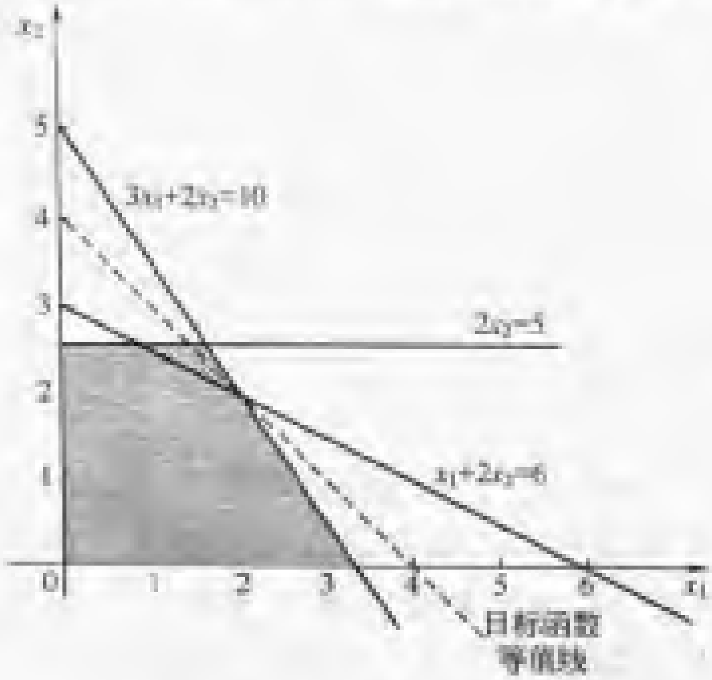

图 4-1　例 4-6 图

然后，考虑整数约束得到最优解

$x_1=2$，$x_2=2$，目标函数值为 4

可见，整数规划的最优目标值小于相应线性规划的最优目标值（相当于附加一个约束）。

4.3　分支定界法

在求解整数规划时，如果可行域是有界的，原始的解法为列举法（又称穷举法），即穷举变量的所有可行整数组合，然后比较它们的目标函数值以定出最优解。对于小型问题，变量较少，可行的

整数组合数也较少时，这个方法是可行的，也是有效的。而对于大型问题，可行的整数组合数非常大，很明显，采用穷举法所需的时间较长，实际上是不可取的，也是无效的。通常的方法一般是仅检查可行的整数组合的一部分，就能定出最优的整数解。分支定界法（Branch and Bound Method）就是常用的一种方法，它可用于求解纯整数或混合整数规划问题，其基本思路为：设有最小化的整数规划问题 A，与它相应的线性规划为问题 B，从解问题 B 开始，若其最优解不符合 A 的整数条件，那么 B 的最优目标函数必是 A 的最优目标函数值 z^* 的下界 $\underline{z}$，而 A 的任意可行解的目标函数值将是 z^* 的一个上界 $\bar{z}$，然后将 B 的可行域分成子区域（称为分支），逐步增大上界 z 和减小下界 $\underline{z}$，最终求到 z^*。

下面用一个实例来说明分支定界法的具体解法。

4.3.1 分支定界法基本解法

【例 4-7】 求解下面的线性整数规划模型（IL）的最优解

$$
\begin{aligned}
\min\ & z=x_1+4x_2 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1+x_2\leqslant 8 \\
& x_1+2x_2\geqslant 6 \\
& x_1,x_2\geqslant 0 \text{ 且为整数}
\end{aligned}
$$

解 ① 首先不考虑整数约束，作为一般线性规划问题，利用单纯形法求得最优解和最优值为 $x_1=10/3$，$x_2=4/3$，$z=26/3$。显然，若求得解恰好为整数，即为原问题的最优解。本例得到的解为非整数解，先采用分支的方法排除，即任意利用一个取非整数的变量如 $x_1=10/3$ 把可行域分解成 $x_1\leqslant[10/3]=3$ 和 $x_1\geqslant[10/3]+1=4$ 的两部分，这样既把点 $(10/3,\ 4/3)^{\mathrm{T}}$ 排除了，又保证不会排除要求的最优点。相应的 z 值即为（IL）最优值的下界。以下分别在 $x_1\leqslant 3$ 和 $x_1\geqslant 4$ 两个部分内搜索。

② 先考虑 $x_1\leqslant 3$ 的部分，即求解

$$
\begin{aligned}
\min\ & z=x_1+4x_2 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1+x_2\leqslant 8 \\
& x_1+2x_2\geqslant 6
\end{aligned}
$$

$$x_1 \leqslant 3$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数}$$

在这个分支中仍不考虑整数限制，利用单纯形法求得最优值为 $x_1=3$，$x_2=3/2$，$z=9$。因 x_2 为非整数，故仍不是 $x_1 \leqslant 3$ 这一部分内的最优解，而 $z=9$ 类似作为 $x_1 \leqslant 3$ 时的所有可行解集的下界。继续分支，利用 $x_2=3/2$，分成 $x_2 \leqslant [3/2]=1$ 和 $x_2 \geqslant [3/2]+1=2$ 两部分。为明了起见，画出分支图 4-2，在支梢末画圈的表示此分支尚未考察过，圈内的数字表示考察的序号。

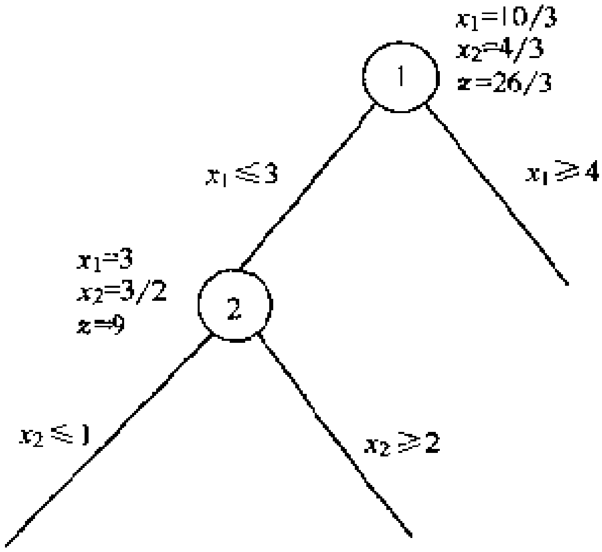

图 4-2　例 4-7 分支图

③ 任选尚未考虑过的一个分支进行考察，如任选 $x_1 \leqslant 3$，再加上限制 $x_2 \leqslant 1$ 的部分，即解

$$\begin{aligned} \min\ & z = x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t. } & 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ & x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\ & x_1 \leqslant 3 \\ & x_2 \leqslant 1 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数} \end{aligned}$$

仍不考虑整数限制，求得此线性规划无解，即表明要求的最优解肯定不在这部分内，这部分已经查明，在分支图上作出标记，如图 4-3 所示，图中打 * 的支梢表示在原来约束的基础上再加 $x_1 \leqslant 3$ 和

$x_2 \geqslant 2$ 的约束条件。

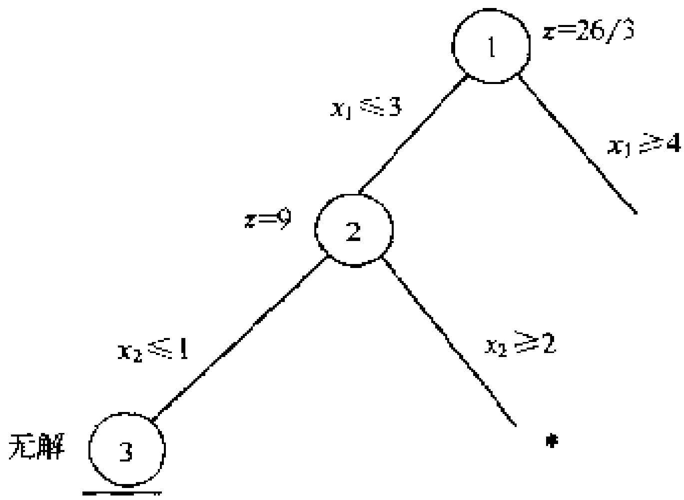

图 4-3　在分支图作出标记

④ 考察分支 $x_1 \leqslant 3$ 和 $x_2 \geqslant 2$，即解

$$
\begin{aligned}
\min\ & z = x_1 + 4x_2 \\
\text{s. t.}\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\
& x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\
& x_1 \leqslant 3 \\
& x_2 \geqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数}
\end{aligned}
$$

仍不考虑整数限制，求得最优解和最优值为 $x_1 = 2$，$x_2 = 2$，$z = 10$。该解恰好为整数解，也即为原问题的一个可行解。但是否为最优解？有两种情况可以下断言。

a. 所有分支都已查清，而它是各种分支中所得到的整数解中最好者；

b. 它所对应的目标函数值等于原问题最优值的下界。

由图 4-4 可知，目前均不属于这两种情形，还需考察有待检查的分支。可将 $z = 10$ 作为原函数的上界，若上、下界相差很小，在要求的误差范围内，也可停止，所得的最好整数解作为近似解。

⑤ 求解

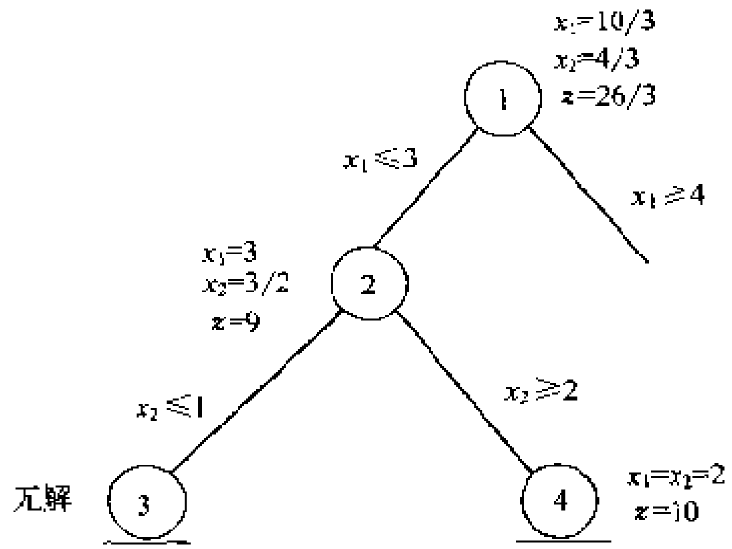

图 4-4　判断是否为最优解

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.}\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 8 \\
x_1 + 2x_2 &\geqslant 6 \\
x_1 &\geqslant 4 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0\ \text{且为整数}
\end{aligned}
$$

不考虑整数限制，得出无解。由于所有分支均已查清，标示于图 4-5 中，故所得的最好整数解即为原问题的最优解。

结论　本例最优解和最优值为 $x_1^* = x_2^* = 2$，$z^* = 10$。

相对于求 min 的整数规划问题而言，采用分支定界法求解可归纳如下。

① 一个分支是否查清的标志是下面各条之一。

a. 不考虑整数约束后的线性规划无解；

b. 不考虑整数约束后的线性规划的最优解是整数解；

c. 不考虑整数约束后的线性规划的最优值超过原问题最优值的上界，说明原问题的最优解肯定不在这个部分。

② 整个问题解完的标志是下面各条之一。

a. 各分支均已查清，则所得整数解中最好者即为原问题的最优解；

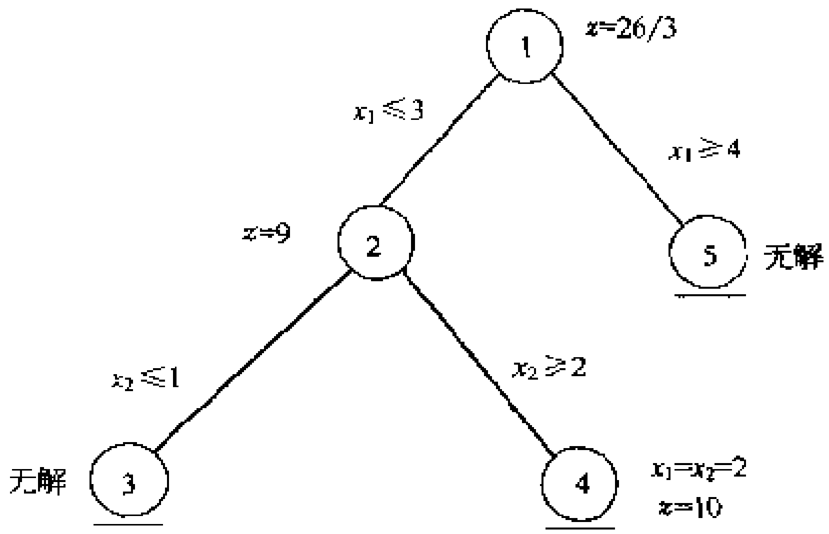

图 4-5　查清所有分支

b. 某个分支中，得到整数解且相应的目标函数值等于原问题最优值的下界，则该整数解即为原问题的最优解。

4.3.2　分支定界法的 MATLAB 实现

仍以例 4-7 为例，下面介绍如何利用 MATLAB 求解线性整数规划问题。

【例 4-8】　利用 MATLAB 求解例 4-6

$$\min z = x_1 + 4x_2$$
$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 \leqslant 8$$
$$x_1 + 2x_2 \geqslant 6$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数}$$

解　① 在 MATLAB 命令窗口输入

```
>>f=[1,4]';
A=[2,1;-1,-2];
b=[8,-6];
lb=[0,0];
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb)↵
```

结果输出为

```
x=
```

```
    3.3333
    1.3333
fval=
        8.6667
```

不符合整数解的要求，确定分支 $x_1 \leqslant 3$ 和 $x_1 \geqslant 4$ 两部分。

② 先考虑 $x_1 \leqslant 3$ 的部分，即求解

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\
& x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\
& x_1 \leqslant 3 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数}
\end{aligned}
$$

在 MATLAB 命令窗口中输入

```
>>f=[1,4]';
A=[2,1;-1,-2;1,0];
b=[8,-6,3];
lb=[0,0];
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb)↵
```

结果为

```
x=
    3.0000
    1.5000
fval=
        9.0000
```

仍然不满足全部为整数解的要求。

③ 考察分支 $x_1 \leqslant 3$，再加上限制 $x_2 \leqslant 1$，求解

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\
& x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\
& x_1 \leqslant 3 \\
& x_2 \leqslant 1
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数}$$

```
≫f=[1,4]';
A=[2,1;-1,-2;1,0;0,1];
b=[8,-6,3,1];
lb=[0,0];
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb)↵
```

结果出现错误信息提示，但仍输出为

```
x=
    3.0000
    1.5000
fval=
       9.0000
```

因为有出错信息，说明该解有问题，而且也不符合整数解要求，继续求解。

④ 考察分支 $x_1 \leqslant 3$ 和 $x_2 \geqslant 2$，即求解

$$
\begin{aligned}
\min\ & z = x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\
& x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\
& x_1 \leqslant 3 \\
& x_2 \geqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数}
\end{aligned}
$$

```
≫f=[1,4]';
A=[2,1;-1,-2;1,0;0,-1];
b=[8,-6,3,-2];
lb=[0,0];
[x,fval]=linprog(f,A,b,[],[],lb)↵
```

结果为

```
x=
    2.0000
    2.0000
```

fval=

    10.0000

此时，解全部为整数，但是否为最优解尚需对其他没有考察的分支进行进一步的计算，最后得到结论，即

$$x_1^* = x_2^* = 2, \ z^* = 10$$

从上例的求解过程可知，采用 MATLAB 作为考察整数规划的各个分支的计算工具比采用单纯形法简单、快捷，但如果分支较多，计算过程也是较繁琐的，但它仍然较单纯形法节省了大量的计算时间，不失为一种求解整数规划问题的算法。

4.4　0-1 型线性整数规划及其隐枚举法

0-1 规划是整数规划中的特殊情形，要求变量仅取 0 或 1，所以可以取所有变量可能取值的一切组合解，然后从中比较得出最优解，这种方法称为全枚举法或显枚举法。计算函数值次数为 2^n 次，其中 n 为变量个数，当 n 很大时，该法变得不现实。隐枚举法是设法只检查一部分变量组合，在这过程中根据已有信息自动舍弃许多不可能成为最优解的组合，而求得最优解，从而大大减少工作量。

隐枚举法的求解思路和改进措施如下。

① 先将 n 个 0-1 变量共有的各种组合按一定的次序排列，逐个计算目标函数值和依次检查 m 个约束条件是否满足，若有一个约束条件不满足，则后面的约束条件自然就不必检查了。

② 若检查得到一个可行解，如对求极大值，则即刻加一过滤条件，凡目标函数值小于该可行解，则肯定不是最优解，因而不必检查其是否满足约束条件了。

【例 4-9】 求解

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2 && (1) \\ & x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 4 && (2) \\ & x_1 + x_2 \leqslant 3 && (3) \end{aligned}$$

$$4x_2+x_3\leqslant 6 \qquad (4)$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ 为 0 或 1}$$

解法一　先将三个 0-1 变量共有的各种组合按一定的次序排列，利用计算机 Excel 程序逐个计算目标函数值和依次检查 4 个约束条件是否满足，得到结果如表 4-6 所示。

表 4-6　计算目标函数值并依次检查 4 个约束条件是否满足的结果

组合点 (x_1,x_2,x_3)	x_1	x_2	x_3	约束条件 (1)	约束条件 (2)	约束条件 (3)	约束条件 (4)	是否可能为最优解 [是(√),否(×)]	过滤条件 z值
(0,0,0)	0	0	0	0	0	0	0	√	0
(0,0,1)	0	0	1	−1	1	0	1	√	5
(0,1,0)	0	1	0	2	4	1	4	×	
(0,1,1)	0	1	1	1	5	1	5	×	
(1,0,0)	1	0	0	1	1	1	0	×	
(1,0,1)	1	0	1	0	2	1	1	√	8
(1,1,0)	1	1	0	3	5	2	4	×	
(1,1,1)	1	1	1	2	6	2	5	×	

得最优解 $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,1)$，最优目标函数值为 8。

解法二　为减少求解 0-1 规划的计算量可采取以下解题技巧。

首先，作变量置换：$x_2'=1-x_2$，将目标函数中所有变量的系数全部变为非负，即

$$\max z=3x_1+2x_2'+5x_3-2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1-2x_2'-x_3+2\leqslant 2$$

$$x_1-4x_2'+x_3+4\leqslant 4$$

$$x_1-x_2'+1\leqslant 3$$

$$-4x_2+x_3+4\leqslant 6$$

$$x_1,x_2',x_3 \text{ 为 0 或 1}$$

其次，将变量重新排序，使目标函数中变量的系数由大至小排列，即成为

$$\max z=5x_3+3x_1+2x_2'-2$$

$$\text{s.t.}\quad -x_3+x_1-2x_2'\leqslant 0$$
$$x_3+x_1-4x_2'\leqslant 0$$
$$x_1-x_2'\leqslant 2$$
$$x_3-4x_2'\leqslant 2$$
$$x_3,x_1,x_2' \text{为 0 或 1}$$

由于本例求极大值，目标函数中变量的系数均为正数，因此，按目标函数值由大至小的变量组合排列为 $(x_3,x_1,x_2')=(1,1,1)$，$(1,1,0)$，$(1,0,1)$，$(1,0,0)$，$(0,1,1)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$，$(0,0,0)$。于是，按这个次序检查各组和的可行性，则得到的第一个可行解即为最优解，本例第一个组合 $(x_3,x_1,x_2')=(1,1,1)$ 即为可行解，所以也即为最优解，回复至原来的变量，即 $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,1)$ 为最优解。

习　题

1. 利用图解法求解下面整数规划问题。

(1) $\min z=-5x_1-4x_2$

$$\text{s.t.}\ 3x_1-4x_2\leqslant 24$$
$$9x_1+5x_2\leqslant 45$$
$$x_1,x_2\geqslant 0 \text{ 且为整数}$$

(2) $\max z=3x_1+2x_2$

$$\text{s.t.}\ 2x_1-3x_2\leqslant 14$$
$$2x_1+x_2\leqslant 9$$
$$x_1,x_2\geqslant 0 \text{ 且为整数}$$

2. 用分支定界法求下列整数规划问题。

$$\max z=x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1-\frac{9}{14}x_2\leqslant\frac{51}{14}$$
$$-2x_1+x_2\leqslant\frac{1}{3}$$
$$x_1,x_2\geqslant 0 \text{ 且为整数}$$

3. 用隐枚举法求解下列 0-1 规划问题。

$$\max z=15x_1+10x_2+7x_3$$
$$\text{s.t.}\quad 5x_1-10x_2+7x_3\leqslant 8$$

$$6x_1+4x_2+8x_3\leqslant 12$$
$$-3x_1+2x_2+2x_3\leqslant 10$$
$$x_i=0\text{ 或 }1,\ i=1,2,3$$

4. 已知卡车最大装载质量为 90 个单位，可被装载的物质序号、质量及价值见下表。

物质序号	质量	价值	物质序号	质量	价值
1	30	10	4	10	50
2	40	40	5	60	30
3	25	25			

问卡车应装载哪些物质才能使总价值最大？

5. 某建筑公司拟计划建造一批房屋。现有资金为 2000 万元，公司已初步选定 6 个房址，在 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 地上建房费用为 300 万元，因 4 个房址环境各异，故房屋的造价及式样也不相同，售出房产 j 的收益为 10 万元，公司因资产 2000 万元的限制，只能从 6 个房址中选定 4 个。问如何选择建房地点使期望收益值最大？

6. 某车场有 3 辆性能各不相同的卡车，需指派前往 3 个不同的地点。i 卡车被派往 j 地的运送成本为 1000 元。求使总成本最低的指派方案。

5 动态规划

本章提要

实际工作中，经常会碰到最优决策由一系列部分决策构成的及多阶段的决策问题。解决多阶段问题通常采用动态规划方法。本章介绍了动态规划的基本概念、基本方法及解题的基本思路，并通过实际应用来说明动态规划的求解过程。

5.1 动态规划的基本方法

在一般最优决策问题中，包含目标函数和约束条件，并在静态条件下求得某些最优结果。但实际工作中有时会碰到最优决策是由一系列部分决策构成的，即一个系统的最优决策包含多阶段的决策，且随时间变化而变化。解决这类问题，通常采用动态规划方法。

动态规划是解决多阶段决策过程最优化的一种数学方法，是根据一类多阶段决策问题的特点，把多阶段决策问题变换为一系列互相联系的单阶段问题，然后逐个加以解决。在多阶段决策问题中，各个阶段采取的决策，一般来说是与时间有关的，决策依赖于当前的状态，又随即引起状态的转移，一个决策序列就是在变化的状态中产生出来的，即为动态规划。

但是，一些与时间没有关系的静态规划问题，只要人为地引进时间因素，也可把它视为多阶段决策问题，用动态规划去处理。

因此，动态规划的方法就是把一个“动态过程”的优化决策问题分成一些相互联系的阶段后，把每个阶段作为一个静态问题来

分析。

5.1.1 动态规划的基本概念

(1) 阶段

在研究问题的过程中，根据其特性可将其恰当地划分为若干个相互联系的阶段，以便于问题的求解。描述阶段的变量称为阶段变量，常用 k 表示。阶段的划分，一般是根据时间和空间的自然特征来划分，但要便于把问题的过程能转化为多阶段决策的过程。

(2) 状态和状态变量

状态表示每个阶段开始所处的自然状况或客观条件，它描述了问题过程的状态，又称为不可控因素。状态是某阶段的出发位置，它既是该阶段某支路的起点，也是前一阶段某支路的终点。通常一个阶段包含若干状态。

描述过程状态的变量称为状态变量．可用一个数、一组数或一个向量来描述，常用 x_k 表示在第 k 阶段的状态变量。

状态应具备下面的性质：如果某阶段状态给定后，则在这阶段以后过程的发展不受这阶段以前各段状态的影响。这个性质称为无后效性（即马尔科夫性）。

(3) 决策和决策变量

决策就是在某阶段状态给定以后，从该状态演变到下一阶段某状态所作的选择。

描述决策的变量称为决策变量，也可用一个数、一组数或一个向量来描述。常用 $u_k(x_k)$ 表示第 k 段当状态处于 x_k 的决策变量。在实际问题中，决策变量的取值往往被限制在某一范围内，此范围称为允许决策集合。通常以 $D_k(x_k)$ 表示第 k 段的允许决策集合。

(4) 策略

策略是一个按顺序排列的决策组成的集合。由过程的第一阶段开始到终点为止的过程，称为问题的全过程。由每段的决策组成的决策函数序列称为全过程策略，简称策略。

由第 k 段开始到终点的过程称为原过程的后部子过程，其决策

函数序列称为 k 子过程策略，简称子策略。

实际问题中，可供选择的策略范围称为允许策略集合，动态规划的任务就是从允许策略集合中寻找最优效果的最优策略。

(5) 状态转移方程

状态转移方程是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。若给定第 k 阶段状态变量 x_k 的值，如果该段的决策变量 u_k 一经确定，第 $k+1$ 阶段的状态变量 x_{k+1} 的值也就完全确定，即 x_{k+1} 的值随 x_k 和 u_k 的值变化而变化，这种确定的对应关系，记为 $x_{k+1}=T_k(x_k,u_k)$。它描述了由 k 阶段到 $k+1$ 阶段的状态转移规律，称为状态转移方程，T_k 称为状态转移函数。

(6) 指标函数和最优指标函数

在多阶段决策过程中衡量所实现过程优劣的数量指标称为指标函数。它是一个定义在全过程和所有后部子过程上的确定数量函数，常用 $V_{k,n}$ 表示，它可表示为距离、利润、费用、产品、产量或资源的消耗等。以 $d_k(x_k, u_k)$ 表示阶段指标。

指标函数 $V_{k,n}$ 的最优值，称为相应的最优指标函数，记为 $f_k(x_k)$。

5.1.2 动态规划的基本方程及基本思路

多阶段决策问题，是指这样一类活动过程，即根据所研究问题的特性，将过程划分为若干相互联系的阶段，在它们的每一个阶段都需要作出决策，并且一个阶段的决策确定以后，常影响下一阶段的决策，从而影响整个过程的活动路线。在每一个阶段的可供选择的策略中选出一个最优决策，使在预定的标准下达到最优的效果。解决这类问题可采用动态规划的方法。

现在把动态规划的基本思想归纳如下。

① 动态规划方法的关键在于正确写出基本递推关系式和恰当的边界条件（简称为基本方程)。要做到这一点，必须先将问题的过程分成几个相互联系的阶段，恰当地选取状态变量和决策变量，并定义最优函数，从而把一个大问题化成一族同类型的子问题，然后逐个求解。即从边界条件开始，逐段递推寻优，在每一个子问题

的求解中，均利用了它前面的子问题的最优化结果，依次进行，最后一个子问题的最优解即为整个问题的最优解。

一般情况，动态规划的基本方程可用下列递推关系式表示。

a. 逆推法：为 k 阶段与 $k+1$ 阶段的递推关系式，即

$f_k(x_k)=\max(\text{或}\min)\{d_k[x_k,u_k(x_k)]+f_{k+1}[u_k(x_k)]\}\quad k=n,n-1,\cdots,1$

边界条件为

$f_{k+1}(x_{k+1})=0$ 或 $f_n(x_n)=\max(\text{或}\min)\{d_n[x_n,u_n(x_n)]\}$

计算方法是按 $f_n\rightarrow f_{n-1}\rightarrow\cdots\rightarrow f_2\rightarrow f_1$ 的次序进行。

b. 顺推法：为 k 阶段与 $k-1$ 阶段的递推关系式，即

$f_k(x_k)=\max(\text{或}\min)\{d_k[x_k,u_k(x_k)]+f_{k-1}[u_k(x_k)]\}\quad k=n,n-1,\cdots,1$

边界条件为

$f_0(x_0)=0$ 或 $f_1(x_1)=\max(\text{或}\min)\{d_1[x_1,u_1(x_1)]\}$

计算方法是按 $f_1\rightarrow f_2\rightarrow\cdots\rightarrow f_{n-1}\rightarrow f_n$ 的次序进行。

② 在多阶段决策过程中，动态规划方法是既把当前一段和未来各段分开，又把当前效益和未来效益结合起来考虑的一种优化方法。因此，每段决策的选取是从全局来考虑的，与该段的最优选择答案一般是不同的。

③ 在求整个问题的最优策略时，由于初始状态是已知的，而每段的决策都是该段状态的函数，故最优策略所经过的各段状态便可逐次变换得到，从而确定了最优路线。

5.2 动态规划应用举例

5.2.1 最短路问题

由生活中的常识可知，最短路线有一个重要特性，即如果由起点 A 经过 P 点和 H 点而到达终点 G 是一条最短路线，则由点 P 出发经过 H 点到达终点 G 的这条子路线，对于从点 P 出发到达终点的所有可能选择的不同路线来说，必定也是最短路线。

根据最短路线这一特性，寻找最短路线的方法，就是从最后一段开始，用由后向前逐步递推的方法，求出各点到 G 点的最短路线，最后求得由 A 点到 G 点的最短路线。所以，动态规划的方法是从终点逐段向始点方向寻找最短路线的一种方法。

【例 5-1】 如图 5-1 所示，给定一个线路网络，两点之间连线上的数字表示两点间的距离（或费用），试求一条由 A 到 G 的铺管线路，使总距离为最短（或总费用最小）。

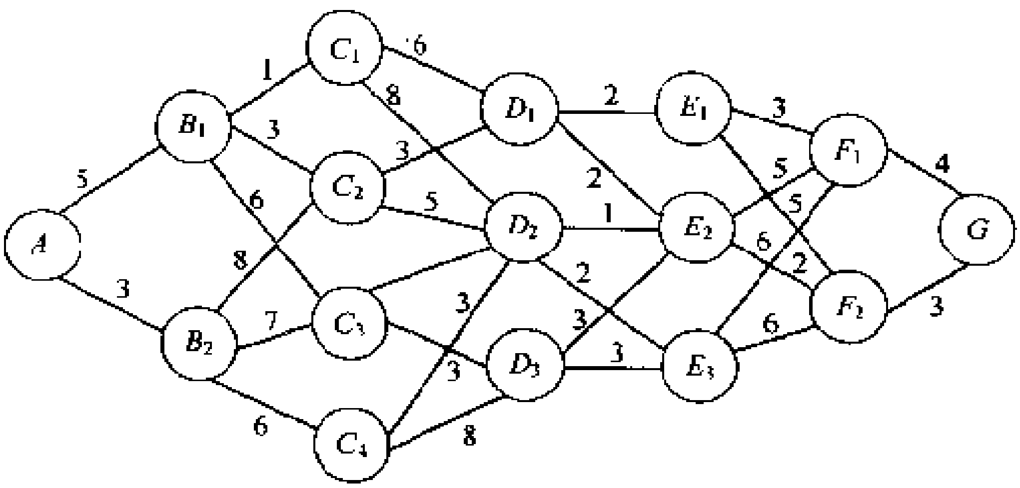

图 5-1　给定线路网络

解　由图中可知，从 A 点到 G 点可以分为 6 个阶段，即从 A 到 B 为第一阶段，B 到 C 为第二阶段…F 到 G 为第六阶段。按照动态规划的方法，从最后一段开始计算，由后向前逐步推移至 A 点。

① $k=6$ 时，出发点有 F_1、F_2 两个，到 G 点有两条路线即 $F_1 \to G$ 和 $F_2 \to G$，则 $f_6(F_1)=4$，$f_6(F_2)=3$。

② $k=5$ 时，出发点有 E_1、E_2、E_3 三个，到 F 点有六条路线，则

$$f_5(E_1)=\begin{Bmatrix} d_5(E_1, F_1)+f_6(F_1) \\ d_5(E_1, F_2)+f_6(F_2) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 3+4 \\ 5+3 \end{Bmatrix}=7$$

相应的决策为 $u_5(E_1)=F_1$，即由 E_1 至终点 G 的最短距离为 7，其最短路线是 $E_1 \to F_1 \to G$；

同理，从 E_2 和 E_3 出发，则有

$$f_5(E_2)=\begin{Bmatrix}d_5(E_2,F_1)+f_6(F_1)\\d_5(E_2,F_2)+f_6(F_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}5+4\\2+3\end{Bmatrix}=5$$

相应的决策为 $u_5(E_2)=F_2$。

$$f_5(E_3)=\begin{Bmatrix}d_5(E_3,F_1)+f_6(F_1)\\d_5(E_3,F_2)+f_6(F_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}6+4\\6+3\end{Bmatrix}=9$$

相应的决策为 $u_5(E_3)=F_2$。

③ $k=4$ 时，类似有

$$f_4(D_1)=7,\ u_4(D_1)=E_2;$$
$$f_4(D_2)=6,\ u_4(D_2)=E_2;$$
$$f_4(D_3)=8,\ u_4(D_3)=E_2;$$

④ $k=3$ 时、有

$$f_3(C_1)=13,\ u_3(C_1)=D_1;$$
$$f_3(C_2)=10,\ u_3(C_2)=D_1;$$
$$f_3(C_3)=9,\ u_3(C_3)=D_2;$$
$$f_3(C_4)=12,\ u_3(C_4)=D_3;$$

⑤ $k=2$ 时，有

$$f_2(B_1)=13,\ u_2(B_1)=C_2;$$
$$f_2(B_2)=16,\ u_2(B_2)=C_3;$$

⑥ $k=1$ 时，出发点只有一个 A 点，则

$$f_1(A)=\begin{Bmatrix}d_1(A,B_1)+f_2(B_1)\\d_1(A,B_2)+f_2(B_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}5+13\\3+16\end{Bmatrix}=18$$

且 $u_1(A)=B_1$，于是得到从起点 A 到终点 G 的最短距离为 18。

为了找出最短路线，按计算的顺序反推，可求出最优决策函数序列 $\{u_1\}$，即由 $u_1(A)=B_1$、$u_2(B_1)=C_2$，$u_3(C_2)=D_1$，$u_4(D_1)=E_2$，$u_5(E_2)=F_2$，$u_6(F_2)=G$ 组成一个最优策略，因而找出相应的最短路线为 $A\to B_1\to C_2\to D_1\to E_2\to F_2\to G$。

5.2.2 资源分配问题

所谓资源分配问题，就是将数量一定的一种或若干种资源（例如原材料、资金、机器设备、劳力、食品等）恰当地分配给若干个

使用者，从而使目标函数最优。

设有某种原料，总数量为 a，用于生产 n 种产品，若分配数量 x_i 用于生产第 i 种产品，其收益为 $g(x_i)$。问应如何分配才能使生产 n 种产品的总收入最大？

此问题可写成静态规划问题

$$\max \{g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_n(x_n)\}$$
$$\text{s.t.}\ x_1+x_2+\cdots+x_n=a$$
$$x_i>=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

当 $g_i(x_i)$ 都是线性函数时，它是一个线性规划问题，当 $g_i(x_i)$ 是非线性函数时，它是一个非线性规划问题。由于这类问题的特殊结构，可将它看成一个多阶段决策问题，并利用动态规划的递推关系来求解。

在应用动态规划方法处理这类“静态规划”问题时，通常以把资源分配给一个或几个使用者的过程作为一个阶段，把问题中的变量 x_i 作为决策变量，将累计的量或随递推过程变化的量作为状态变量。

设状态变量 s_k 表示分配用于第 k 种产品至第 n 种产品的原料数量。决策变量 u_k 表示分配给生产第 k 种产品的原料数，即 $u_k=x_k$。

状态转移方程为

$$s_{k+1}=s_k-u_k=s_k-x_k$$

允许决策集合为

$$D_k(s_k)=\{u_k|0\leqslant u_k=x_k\leqslant s_k\}$$

令最优函数表示以数量为状态变量的原料分配给第 k 种产品至第 n 种产品所得的最大总收入，因而得到动态规划递推关系式为

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant s_k}\{g_k(x_k)+f_{k+1}(s_k-x_k)\} & k=n-1,\cdots,1 \\ f_n(s_n)=\max\limits_{x_n=s_n}g_n(x_n) \end{cases}$$

利用这个递推关系式进行逐段计算，最后求得的即为所求问题的最大总收入。

【例 5-2】 某企业集团有 5 台设备分配给所属的 A、B、C 三个工厂。这三个工厂获得这种设备后可获得的效益如表 5-1 所示。问分配给各工厂该种设备多少台才能使总的经济效益最大?

表 5-1 三个工厂获得设备后可获得的效益

设备台数	获得效益		
	A	B	C
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

解 把工厂 A、B、C 分别编号为 1、2、3,设 x 表示分配给第 k 个工厂至第 n 个工厂的设备台数,x_k 表示分配给第 k 个工厂的设备台数,则分配给第 $k+1$ 个工厂至第 n 个工厂的设备台数为 $x_{k+1}=x-x_k$。

以 $P_k(x_k)$ 表示将 x_k 台设备分配给第 k 个工厂所得到的效益,以 $f_k(x)$ 表示将 x 台设备分配给第 k 个工厂至第 n 个工厂时所得到的效益,因而建立如下的动态规划模型。

$$\begin{cases} f_k(x)=\max\limits_{0\leqslant x_k\leqslant x}\{P_k(x_k)+f_{k+1}(x-x_k)\} \\ f_4(x)=0, k=3,2,1 \end{cases}$$

计算过程如下。

① 当 $k=3$ 时,有

$$f_3(x)=\max_{x_3}\{P_3(x_3)\}=P_3(x_3)$$

即将全部设备分配给工厂 C。

② 当 $k=2$ 时,有

$$f_2(x)=\max_{x_2}\{P_2(x_2)+f_3(x-x_2)\}$$

即将 5 台设备分配给工厂 B 和工厂 C。

可以算得

$$f_2(0)=\max_{x_2=0}\{P_2(x_2)+f_3(0-x_2)\}$$
$$=P_2(0)+f_3(0)=P_2(0)+P_3(0)=0$$

此时最优决策为 $u_2(x_2)=0$。

$$f_2(1)=\max_{x_2=0,1}\{P_2(x_2)+f_3(1-x_2)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix}P_2(0)+f_3(1-0)\\P_2(1)+f_3(1-1)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+4\\5+0\end{Bmatrix}=5$$

此时最优决策为 $u_2(x_2)=1$。

$$f_2(2)=\max_{x_2=0,1,2}\{P_2(x_2)+f_3(2-x_2)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix}P_2(0)+f_3(2-0)\\P_2(1)+f_3(2-1)\\P_2(2)+f_3(2-2)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+6\\5+4\\10+0\end{Bmatrix}=10$$

此时最优决策为 $u_2(x_2)=2$。

$$f_2(3)=\max_{x_2=0,1,2,3}\{P_2(x_2)+f_3(3-x_2)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix}P_2(0)+f_3(3-0)\\P_2(1)+f_3(3-1)\\P_2(2)+f_3(3-2)\\P_2(3)+f_3(3-3)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+11\\5+6\\10+4\\11+0\end{Bmatrix}=14$$

此时最优决策为 $u_2(x_2)=2$。

$$f_2(4)=\max_{x_2=0,1,2,3,4}\{P_2(x_2)+f_3(4-x_2)\}$$
$$=\max\begin{Bmatrix}P_2(0)+f_3(4-0)\\P_2(1)+f_3(4-1)\\P_2(2)+f_3(4-2)\\P_2(3)+f_3(4-3)\\P_2(4)+f_3(4-4)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+12\\5+11\\10+6\\11+4\\11+0\end{Bmatrix}=16$$

此时最优决策为 $u_2(x_2)=1$ 或 2。

$$f_2(5)=\max_{x_2=0,1,2,3,4,5}\{P_2(x_2)+f_3(5-x_2)\}$$

$$
=\max\begin{Bmatrix} P_2(0)+f_3(5-0) \\ P_2(1)+f_3(5-1) \\ P_2(2)+f_3(5-2) \\ P_2(3)+f_3(5-3) \\ P_2(4)+f_3(5-4) \\ P_2(5)+f_3(5-5) \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 0+12 \\ 5+12 \\ 10+11 \\ 11+6 \\ 11+4 \\ 11+0 \end{Bmatrix}=21
$$

此时最优决策为 $u_2(x_2)=2$。

③ 当 $k=1$ 时，有

$$
f_1(5)=\max_{x_2=0,1,2,3,4,5}\{P_1(x_1)+f_2(5-x_1)\}
$$

$$
=\max\begin{Bmatrix} P_1(0)+f_2(5-0) \\ P_1(1)+f_2(5-1) \\ P_1(2)+f_2(5-2) \\ P_1(3)+f_2(5-3) \\ P_1(4)+f_2(5-4) \\ P_1(5)+f_2(5-5) \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 0+21 \\ 3+16 \\ 10+11 \\ 7+14 \\ 9+10 \\ 13+0 \end{Bmatrix}=21
$$

此时最优决策为 $u_1(x_1)=0$ 或 2。

因此，最优分配方案有两个。

a. 工厂 A 分配 0 台设备，这时还有 5 台设备可分配给工厂 B 和 C，于是在 $k=2$ 阶段中，$f_2(5)$ 的最优决策中可知工厂 B 应分配 2 台设备，则工厂 C 应分配 3 台设备。

b. 工厂 A 分配 2 台设备，这时还有 3 台设备可分配给工厂 B 和 C，于是在 $k=2$ 阶段中，$f_2(3)$ 的最优决策中可知工厂 B 应分配 2 台设备，则工厂 C 应分配 1 台设备。

这两种分配方案中，三个工厂的总经济效益都是 21。

5.2.3 生产与存储问题

在生产和经营管理中，经常遇到要合理地安排生产（或购买）与库存的问题，达到既要满足社会的需要，又要尽量降低成本费用。因此，正确制定生产（或采购）策略，确定不同时期的生产量（或采购量）和库存量，以使总的生产成本费用和库存费用之和最

小，这就是生产和存储问题的最优化目标。

设某公司对某种产品要制订一项 n 个阶段的生产（或购买）计划。已知它的初始库存量为 0，每阶段生产（或购买）该产品的数量有上限的限制；每阶段社会对该产品的需求量是已知的，公司必须保证供应；在 n 阶段末的终结库存量为 0。问该公司如何制订每个阶段的生产（或购买）计划，从而使总成本最小。

设 x_k 为第 k 季度的生产量（或采购量），d_k 为第 k 季度的需求量，u_k 为第 k 季度的库存量，则有 $u_k=u_{k-1}+x_k-d_k$。

$C_k(x_k)$ 表示第 k 阶段生产产品 x_k 时的成本费用，它包括生产准备成本 K 和产品成本 ax_k（其中 a 是单位成本）两项费用，即

$$C_k(x_k)=\begin{cases}0,\ x_k=0\\ K+ax_k,\ 0<x_k\leqslant m,\text{且为整数}\\ \infty,\ x_k>m\end{cases}$$

其中，m 表示每阶段最多能生产该产品的上限数。

$D_k(u_k)$ 表示第 k 阶段末库存量为 u_k 时的存储费用。

故第 k 阶段的总成本费用为 $C_k(x_k)+D_k(u_k)$，则上述问题的数学模型为

$$\min\sum_{k=1}^{n}[C_k(x_k)+D_k(u_k)]$$

$$\text{s. t.}\quad v_0=0,\ v_h=0$$

$$u_k=\sum_{j=1}^{k}(x_j-d_j)\geqslant 0,\ k=2,3,\cdots,n-1$$

$$0\leqslant x_k\leqslant m,\text{且为整数},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

用动态规划方法来求解，把它看做一个 n 阶段决策问题。令 u_{k-1} 为状态变量，则有状态转移方程为

$$u_k=u_{k-1}+x_k-d_k\quad k=1,2,\cdots,n$$

最优值函数 $f_k(u_k)$ 表示从第 1 阶段初始库存量为 0 到第 n 阶段库存量为 u_k 时的最小总费用，则得到动态规划顺序递推关系式为

$$f_k(u_k)=\min_{0\leqslant x_k\leqslant \sigma_k}\{C_k(x_k)+D_k(u_k)+f_{k-1}(u_{k-1})\},\ k=1,2,\cdots,n$$

式中，$\sigma_k=\min(u_k+d_{k,m})$。这是因为一方面每阶段生产的上限为 m，另一方面由于保证供应，则第 $k-1$ 阶段末的库存量 u_{k-1} 必须非负，即 $u_k+d_k-x_k\geqslant 0$，所以 $x_k\leqslant u_k+d_k$。

边界条件为 $f_0(u_0)=0$ 或 $f_1(u_1)=\min\limits_{x_1=\sigma_1}\{C_1(x_1)+D_1(u_1)\}$

从边界条件出发，利用上面的递推关系式，对每个 k 计算出 $f_k(u_k)$ 中的 u_k 在 0 至 $\min\left[\sum\limits_{j=k+1}^{n}(d_j\cdot m-d_k)\right]$ 之间的值，最后求得的 $f_n(0)$ 即为所求的最小总费用。

如果每阶段生产产品的数量无上限的限制，则只要改变 $C_k(x_k)$ 和 σ_k 就行，即

$$C_k(x_k)=\begin{cases}0, & x_k=0\\ K+ax_k, & x_k=1,2\cdots\\ \sigma_k=u_k+d_k\end{cases}$$

对每个 k 需计算 $f_k(u_k)$ 中的 u_k 在 0 至 $\min\sum\limits_{j=k-1}^{n}d_j$ 之间的值。

【例 5-3】 某企业通过市场预测，了解到市场对企业所生产的主要产品在今后的四个季度内的需求分别为 2、3、2、4 个单位。假定该厂生产每批产品的固定成本为 3 千元，若不生产则固定成本为 0；此外，每生产一个单位产品的成本为 1 千元，每个时期企业生产能力所允许的最大生产批量不超过 6 个单位。若每个时期末未售出的产品的库存总费用为 0.5 千元。还假定第一季度的初始库存量为 0，第四季度末的库存量也为 0。现要为企业确定一个生产与库存方案，使企业既能满足市场需要，又使生产与库存总费用最低。

解 按 4 个季度将问题分为 4 个阶段，设第 k 季度的生产量为 x_k，第 k 季度的需求量为 d_k，第 k 季度的库存量为 u_k，则有 $u_k=u_{k-1}+x_k-d_k$。

由题意可知，在第 k 季度内企业的生产成本为

$$C_k(x_k)=\begin{cases}3+x_k, & 0<x_k\leqslant 6\\ 0, & x_k=0\end{cases}$$

第 k 季度末库存量为 u_k 时的费用为

$$D_k(u_k)=0.5u_k$$

因此，第 k 季度的总费用为

$$C_k(x_k)+D_k(u_k)$$

于是建立如下动态规划顺序递推关系式。

$$\begin{cases} f_k(u_k)=\min\limits_{0\leqslant x_k\leqslant\sigma_k}\{C_k(x_k)+D_k(u_k)+f_{k-1}(u_{k-1})\},\ k=1,2,3,4 \\ f_1(u_1)=\min\limits_{x_1=\min(u_1+d_1,6)}\{C_1(x_1)+D_1(u_1)\} \end{cases}$$

由于第一季度的需求量为 2，即 $d_1=2$，于是有

$$\begin{cases} f_k(u_k)=\min\limits_{0\leqslant x_k\leqslant\sigma_k}\{C_k(x_k)+D_k(u_k)+f_{k-1}(u_k+d_k-x_k)\},k=1,2,3,4 \\ f_1(u_1)=\min\limits_{x_1=\min(u_1+2,6)}\{C_1(x_1)+D_1(u_1)\} \end{cases}$$

其中
$$\sigma_k=\min(u_k+d_k,6)$$

计算如下。

① 当 $k=1$ 时，由 $f_1(u_1)=\min\limits_{x_1=\min(u_1-2,6)}\{C_1(x_1)+D_1(u_1)\}$

对 u_k 在 0 至 $\min\left[\sum\limits_{j=1+1}^{4}(d_j,m-d_1)\right]=[9,(6-2)]=4$ 之间的值分别进行计算。

$u_1=0$ 时，$f_1(0)=\min\limits_{x_1=\min(0+2,6)}\{C_1(x_1)+D_1(u_1)\}=3+2+0=5$，得 $x_1=2$；

$u_1=1$ 时，$f_1(1)=\min\limits_{x_1=3}\{C_1(x_1)+D_1(u_1)\}=3+3+0.5=6.5$，得 $x_1=3$；

$u_1=2$ 时，$f_1(2)=\min\limits_{x_1=4}\{C_1(x_1)+D_1(u_1)\}=3+4+1=8$，得 $x_1=4$；

$u_1=3$ 时，$f_1(3)=\min\limits_{x_1=5}\{C_1(x_1)+D_1(u_1)\}=3+5+1.5=9.5$，得 $x_1=5$；

$u_1=4$ 时，$f_1(4)=\min\limits_{x_1=6}\{C_1(x_1)+D_1(u_1)\}=3+6+2=11$，得 $x_1=6$。

② 当 $k=2$ 时，$d_2=3$，$\sigma_2=\min(u_2+d_2,6)=\min(u_2+3,6)$，$u_2$ 在 0 至 $\min\left[\sum_{j=2-1}^{4}(d_j,m-d_2)\right]=[6,(6-3)]=3$ 之间取值，有

$$f_2(u_2)=\min_{0\leqslant x_2\leqslant\sigma_2}\{C_2(x_2)+D_2(u_2)+f_1(u_2+3-x_2)\}$$

则有

$$u_2=0\text{ 时，}f_2(0)=\min_{0\leqslant x_2\leqslant 3}\{C_2(x_2)+D_2(0)+f_1(3-x_2)\}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}C_2(0)+D_2(0)+f_1(3)\\C_2(1)+D_2(0)+f_1(2)\\C_2(2)+D_2(0)+f_1(1)\\C_2(3)+D_2(0)+f_1(0)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}0+0-9.5\\4+0-8\\5+0+6.5\\6+0+5\end{Bmatrix}=9.5$$

得 $x_2=0$。

同理计算 $u_2=0,1,2,3$ 时的 $f_2(u_2)$，如表 5-2 所示。

表 5-2 $u_2=1,2,3$ 时的计算

u_2	x_2	$C_2(x_2)$	$D_2(u_2)$	$f_1(u_2+3-x_2)$	$f_2(u_2)$	min	最优决策
0	0	0	0	9.5	9.5	9.5	$x_2=0$
	1	4	0	8	12		
	2	5	0	6.5	11.5		
	3	6	0	5	11		
1	0	0	0.5	11	11.5	11.5	$x_2=0$
	1	4	0.5	9.5	14		
	2	5	0.5	8	13.5		
	3	6	0.5	6.5	13		
	4	7	0.5	5	12.5		

续表

u_2	x_2	$C_2(x_2)$	$D_2(u_2)$	$f_1(u_2+3-x_2)$	$f_2(u_2)$	min	最优决策
2	0	0	1	∞	∞	14	$x_2=5$
	1	4	1	11	16		
	2	5	1	9.5	15.5		
	3	6	1	8	15		
	4	7	1	6.5	14.5		
	5	8	1	5	14		
3	0	0	1.5	∞	∞	15.5	$x_2=6$
	1	4	1.5	∞	∞		
	2	5	1.5	11	17.5		
	3	6	1.5	9.5	17		
	4	7	1.5	8	16.5		
	5	8	1.5	6.5	16		
	6	9	1.5	5	15.5		

注意 在计算 $f_2(2)$和 $f_2(3)$时，由于每个时期的最大生产量为 6 个单位，故 $f_1(5)$和 $f_1(6)$是无意义的，可取 $f_1(5)=f_1(6)=\infty$，余下类推。

③ 当 $k=3$ 时，$d_3=2$，$\sigma_3=\min(u_3+2,\ 6)$，u_3 在 0 至 min $[4,(6-2)]$ 之间取值，有

$$f_3(u_3)=\min_{0\leqslant x_3\leqslant \sigma_3}\{C_3(x_3)+D_3(u_3)+f_2(u_3+2-x_3)\}$$

列出 $u_3=0,1,2,3,4$ 时的计算如表 5-3 所示。

表 5-3 $u_3=0$，1，2，3，4 时的计算

u_3	x_3	$C_3(x_3)$	$D_3(u_3)$	$f_2(u_2+2-x_3)$	$f_3(u_3)$	min	最优决策
0	0	0	0	14	14	14	$x_3=0$
	1	4	0	11.5	15.5		
	2	5	0	9.5	14.5		

续表

u_3	x_3	$C_3(x_3)$	$D_3(u_3)$	$f_2(u_2+2-x_3)$	$f_3(u_3)$	min	最优决策
1	0	0	0.5	15.5	16	16	$x_3=0$
	1	4	0.5	14	18.5		
	2	5	0.5	11.5	17		
	3	6	0.5	9.5	16		
2	0	0	1	∞	∞	17.5	$x_3=4$
	1	4	1	15.5	20.5		
	2	5	1	14	20		
	3	6	1	11.5	18.5		
	4	7	1	9.5	17.5		
3	0	0	1.5	∞	∞	19	$x_3=5$
	1	4	1.5	∞	∞		
	2	5	1.5	15.5	22		
	3	6	1.5	14	21.5		
	4	7	1.5	11.5	20		
	5	8	1.5	9.5	19		
4	0	0	2	∞	∞	20.5	$x_3=6$
	1	4	2	∞	∞		
	2	5	2	∞	∞		
	3	6	2	15.5	23.5		
	4	7	2	14	23		
	5	8	2	11.5	21.5		
	6	9	2	9.5	20.5		

④ 当 $k=4$ 时，$d_4=4$，因要求第 4 季度末的库存量为 0，即 $u_4=0$，则 $\sigma_4=\min(0+4,\ 6)$，有

$$f_4(0)=\min_{0\leqslant x_4\leqslant 4}\{C_4(x_4)+D_4(0)+f_2(4-x_4)\}$$

$$
=\min\begin{Bmatrix} C_4(0)+f_3(4) \\ C_4(1)+f_3(3) \\ C_4(2)+f_3(2) \\ C_4(3)+f_3(1) \\ C_4(4)+f_3(0) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 0+20.5 \\ 4+19 \\ 5+17.5 \\ 6+16 \\ 7+14 \end{Bmatrix}=20.5
$$

得 $x_4=0$。

按计算的顺序反推，则得到

① 每个时期的最优生产决策为

$$x_1=5,\ x_2=0,\ x_3=6,\ x_4=0$$

② 每个时期的最优存储决策为

$$u_1=3,\ u_2=0,\ u_3=4,\ u_4=0$$

其相应的最小成本为 20.5 千元。

【例 5-4】 某工业区有三个排放粉尘的污染源：两个发电厂，一个水泥厂。发电厂的排尘率为 95kg/t(煤)；水泥厂的排尘率为 85kg/t(水泥)。两个发电厂的燃煤量分别为 40 万吨/年和 30 万吨/年，水泥厂的产量为 25 万吨/年。根据工业区的环境目标要求，粉尘排放量需削减 80%，每个污染源可选择不同的控制方法和控制程度，试确定最后的决策方案。已知控制方法及其去除率见表5-4，可行控制方法的费用见表 5-5。

表 5-4 污染控制方法及其去除率

序号	控制方法	去除率/%
1	隔板沉淀槽	59
2	多级除尘器	74
3	长锥除尘器	84
4	喷雾洗涤塔	94
5	静电除尘器	97

表 5-5 可行控制方法的费用

序号	控制方法	1 号电厂/(元/t)	2 号电厂/(元/t)	水泥厂/(元/t)
1	隔板沉淀槽	8	11.2	8.8
2	多级除尘器	—	—	9.6

续表

序号	控制方法	1号电厂/(元/t)	2号电厂/(元/t)	水泥厂/(元/t)
3	长锥除尘器	—	—	12
4	喷雾洗涤塔	16	17.6	24
5	静电除尘器	22.4	24	—

解 用每个污染源的粉尘排放量作为决策变量，定义为 X_{ij}，i 表示污染源，j 表示控制方法，列于表 5-6 中。

表 5-6 污染源对应不同控制方法的决策变量

控制方法	1号电厂(1)	2号电厂(2)	水泥厂(3)
不控制(0)	X_{10}	X_{20}	X_{30}
隔板沉淀槽(1)	X_{11}	X_{21}	X_{31}
多级除尘器(2)	—	—	X_{32}
长锥除尘器(3)	—	—	X_{33}
喷雾洗涤塔(4)	X_{14}	X_{24}	X_{34}
静电除尘器(5)	X_{15}	X_{25}	—

大气污染控制目的是使粉尘总排放量削减 80%，则总排放量为

1 号电厂 (1)：$400000\times95=3.8\times10^{7}$ kg/年

2 号电厂 (2)：$300000\times95=2.85\times10^{7}$ kg/年

水泥厂 (3)：$250000\times85=2.125\times10^{7}$ kg/年

总计：8.775×10^{7} kg/年

则最大允许排放量为 $8.775\times10^{7}\times(1-80\%)=1.755\times10^{7}$ kg/年

根据排放系数和去除效率计算实际粉尘总排放量，如 1 号电厂年粉尘排放量为 $95(X_{10}+0.41X_{11}+0.06X_{14}+0.03X_{15})$。

根据题意建立如下规划模型。

$$\min\ 8X_{11}+16.0X_{14}+22.4X_{15}+11.2X_{21}+17.6X_{24}+24X_{25}+8.8X_{31}+9.6X_{32}+12X_{33}+24X_{34}$$

$$\text{s. t.}\ 95X_{10}+39X_{11}+5.7X_{14}+2.9X_{15}+95X_{20}+39X_{21}+$$
$$5.7X_{24}+2.9X_{25}+85X_{30}+34.9X_{31}+22.1X_{32}+$$
$$13.6X_{33}+5.1X_{34}\leqslant 1.755\times 10^7$$
$$X_{10}+X_{11}+X_{14}+X_{15}=400000$$
$$X_{20}+X_{21}+X_{24}+X_{25}=300000$$
$$X_{30}+X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}=250000$$
$$X_{ij}\geqslant 0$$

该模型既可用下列动态规划递推方法求解，也可用 MATLAB 线性规划函数求解。

① 动态规划求解方法　设污染源 k 的粉尘排放量为 X_k（10^6kg/年），$C_k(X_k)$ 为污染源 k 采用控制方法，使粉尘排放量为 X_k 所需的费用（10^3 元/年），将污染源当作阶段，设状态变量为 S_k（10^6kg/年），表示能分配到其余 $3-k+1$ 污染源或阶段的粉尘排放量，$f_k(S_k)$ 为污染源的排放粉尘为 S_k 时，其余 $3-k+1$ 污染源的最小费用，则建立动态规划递推方程为

$$f_k(S_k)=\min[C_k(X_k)+f_{k+1}(S_k-X_k)]$$
$$X_k\leqslant S_k$$
$$k=1,2,3$$

计算过程略。

② 应用 MATLAB 的 linprog 函数求解程序清单为

```
>>f=[0,8,0,0,16,22.4,0,11.2,0,0,17.6,24,0,8.8,9.6,12,
24,0]';
Aeq=[95,39,0,0,5.7,0,95,39,0,0,5.7,2.9,85,34.9,22.1,
13.6,5.1,0;1,1,0,0,1,1.0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;0,0,0,0,0,
0,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0;0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,
1,0];
beq=[17550000,400000,300000,250000]';
lb=zeros(18,1);
[x,fval]=linprog(f,[ ],[ ],Aeq,beq,lb)↵
```

结果输出为

```
x=
    1.0e+005 *
    0.0000
    2.4129
    0
    0
    1.5871
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0
    0
    3.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    2.5000
    0.0000
    0.0000
    0
fval=
        1.2150e+007
```

可见，1 号电厂采用隔板沉淀槽的排尘量为 2.4129×10^5 kg/年，1 号电厂采用喷雾洗涤塔的排尘量为 1.5871×10^5 kg/年，2 号电厂采用喷雾洗涤塔的排尘量为 3.0×10^5 kg/年，水泥厂采用多级除尘器的排尘量为 2.5×10^5 kg/年，最小控制费用为 1.215×10^7 元/年。

5.2.4 信贷投资问题

【例 5-5】 某地区银行拟将 8000 万元资金投资给编号为 1、2、3 的三个工厂作为扩大生产的流动基金。已知每个工厂的信贷偿还能力与投资额有关，相关系数如表 5-7 所示。银行应如何向这三个

工厂投资，才能使总的信贷偿还能力最大?

表 5-7　相关系数

工厂	投资								
	0	10	20	30	40	50	60	70	80
1	0	0.5	1.5	4	8	9	9.5	5.8	10
2	0	0.5	1.5	4	6	7	7.3	7.4	7.5
3	0	0.5	2.6	4	4.5	5	5.1	5.2	5.3

解　设 u_k 表示对第 k 个工厂的投资额，x_k 表示第 k 阶段银行可使用的投资额，$p_k(u_k)$ 表示工厂 k 得到投资 u_k 时的偿还能力，$f_k(x_k)$ 表示从第 k 阶段的状态开始采用最优决策时，从第 k 个工厂起的各工厂的总偿还能力。

将对三个工厂的投资分别看成是三个阶段，则各阶段的允许决策集合为

$$D_k(x_k)=\{u_k|0\leqslant u_k\leqslant x_k\}$$

依据题意建立如下动态规划模型。

$$f_k(x_k)=\max_{u_k\in D_k(x_k)}\{p_k(u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\},\ k=3,2,1$$

$$f_4(x_4)=0$$

考虑到状态转移律为

$$x_{k+1}=x_k-u_k,\ \ k=1,2$$

模型也可改写为

$$f_k(x_k)=\max_{u_k\in D_k(x_k)}\{p_k(u_k)+f_{k+1}(x_k-u_k)\},\ k=3,2,1$$

$$f_4(x_4)=0$$

计算如下。

① 当 $k=3$ 时，有

$$f_3(x_3)=\max_{u_1\in D_1(x_1)}\{p_3(u_3)+f_4(x_4)\}=\max_{u_1\in D_1(x_1)}\{p_3(u_3)\}=5.3$$

即银行将全部资金投资给工厂 3；

② 当 $k=2$ 时，有

$$f_2(x_2)=\max_{u_2\in D_2(x_2)}\{p_2(u_2)+f_3(x_2-u_2)\}$$

可以算得

$$f_2(0)=\max_{u_2=0}\{p_2(u_2)+f_3(0-u_2)\}=\max\{p_2(0)+f_3(0)\}=0$$

$$f_2(10)=\max_{u_2=0,10}\{p_2(u_2)+f_3(10-u_2)\}$$

$$=\max\begin{Bmatrix}p_2(0)+f_3(10)\\p_2(10)+f_3(10-10)\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}0+0.4\\0.5+0\end{Bmatrix}=0.5$$

计算如表 5-8 所示。

表 5-8　计算表（一）

x_2	u_2	$p_2(u_2)$	$f_3(x_2-u_2)$	$p_2(u_2)+f_3(x_2-u_2)$	max	最优决策
0	0	0	0	0	0	
10	0	0	0.4	0.4	0.5	$u_2=10$
	10	0.5	0	0.5		
20	0	0	2.6	2.6	2.6	$u_2=0$
	10	0.5	0.4	0.9		
	20	1.5	0	1.5		
30	0	0	4	4	4	$u_2=0$ 或 30
	10	0.5	2.6	3.1		
	20	1.5	0.4	1.9		
	30	4	0	4		
40	0	0	4.5	4.5	6	$u_2=40$
	10	0.5	4	4.5		
	20	1.5	2.6	4.1		
	30	4	0.4	4.4		
	40	6	0	6		
50	0	0	5	5	7	$u_2=50$
	10	0.5	4.5	5		
	20	1.5	4	5.5		
	30	4	2.6	6.6		
	40	6	0.4	6.4		
	50	7	0	7		

续表

x_2	u_2	$p_2(u_2)$	$f_3(x_2-u_2)$	$p_2(u_2)+f_3(x_2-u_2)$	max	最优决策
60	0	0	5.1	5.1	8.6	$u_2=40$
	10	0.5	5	5.5		
	20	1.5	4.5	6		
	30	4	4	8		
	40	6	2.6	8.6		
	50	7	0.4	7.4		
	60	7.3	0	7.3		
70	0	0	5.2	5.2	10	$u_2=40$
	10	0.5	5.1	5.6		
	20	1.5	5	6.5		
	30	4	4.5	8.5		
	40	6	4	10		
	50	7	2.6	9.6		
	60	7.3	0.4	7.7		
	70	7.4	0	7.4		
80	0	0	5.3	5.3	11	$u_2=50$
	10	0.5	5.2	5.7		
	20	1.5	5.1	6.6		
	30	4	5	9		
	40	6	4.5	10.5		
	50	7	4	11		
	60	7.3	2.6	9.9		
	70	7.4	0.4	7.8		
	80	7.5	0	7.5		

③ 当 $k=1$ 时，有

$$f_1(80)=\max_{u_2\in D_2(x_2)}\{p_1(u_1)+f_2(80-u_1)\}$$

计算如表 5-9 所示。

表 5-9 计算表（二）

u_1	$p_1(u_1)$	$f_2(80-u_1)$	$p_1(u_1)+f_2(80-u_1)$	max	最优决策
0	0	11	11	14	$u_1=40$ $u_2=40$ $u_3=0$
10	0.5	10	10.5		
20	1.5	8.6	10.1		
30	4	7	11		
40	8	6	14		
50	9	4	13		
60	9.5	2.6	12.1		
70	5.8	0.5	6.3		
80	10	0	10		

通过计算可得，银行贷给 1 工厂 4000 万元，2 工厂 4000 万元，3 工厂 0 万元，可使三个工厂得总信贷偿还能力最大，为 14。

习　题

1、计算由图 5-2 中从 A 到 E 的最短路线。

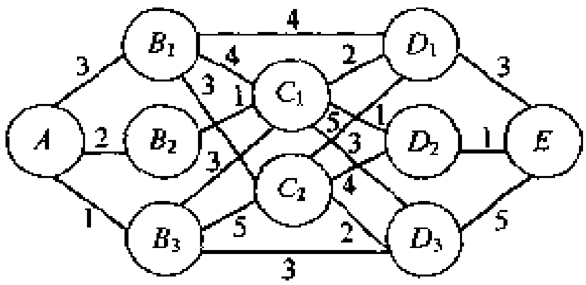

图 5-2 题 1 图

2. 如图 5-3 所示，设从地点 A 要铺设一条煤气管道到地点 F，中间必须经过 4 个中间站。可用相连的两站之间的距离以图中两点连线上的数字表示。两点间没有连线的表示相应两地点之间不能铺设管道。试确定一条从 A 点到 F 点的铺管路线，使总距离最短。

3. 设有三种资源，每单位的成本分别为 a、b、c。给定的利润函数为 $r_i(x_i, y_i, z_i)(i=1,2,\cdots,n)$。现有资金为 W，应购买各种

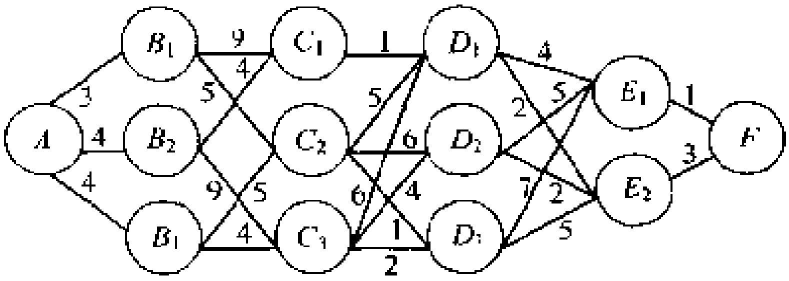

图 5-3　题 2 图

资源多少单位分配给 n 个行业才能使总利润最大？试给出动态规划的公式，并写出一级递推关系式。

4. 某工厂有 100 台机器，拟分四期使用，在每一个周期有两种生产任务。已知要把 x_1 台机器投入第一种生产任务，则在一个生产周期中将有 $x_1/3$ 台机器报废；余下的机器全部投入第二种生产任务，则在一个生产周期中将有 1/10 台机器报废。如果在一个生产周期中作第一种生产任务每一台机器可收益 10，作第二种生产任务每一台机器可收益 7。问如何分配机器总收益最大？

5. 某电视机厂为生产电视机而需生产喇叭。根据以往的记录，一年的四个季度需要喇叭分别为 3 万只、2 万只、3 万只、2 万只。设每万只存放在仓库内一个季度的存储费为 0.2 万元，每生产一批的装配费为 2 万元，每万只喇叭的生产成本为 1 万元。问应该怎样安排四个季度的生产才能使总的费用最小？

6. 有 20 个单位资金可分配给三项任务，它们的回收额分别为

$$f_1(x)=5\sqrt{x},\ 0\leqslant x\leqslant 20$$

$$f_2(x)=x,\ 0\leqslant x\leqslant 20$$

$$f_3(x)=0.07x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 20$$

问如何确定投资分配方案可使总回收额为最大？

7. 某工厂按市场需要交货，情况如表 5-10 所示。

表 5-10　题 7 表

月份	1	2	3	4	5	6
货物量/百件	1	2	5	3	2	1

交货时间为每月底。该厂的生产能力为每月400件，仓库的存货能力为300件。已知每百件货物的生产费用为1000元，在进行生产的月份，工厂要支出经常性费用4000元，仓库保管费为每百件货物每月1000元。假定开始时及6月底交货后无存货。试问应在每个月各生产多少件货物才能既满足交货任务又使总费用最低？

8. 某厂生产一种产品，估计该产品在未来四个月的销售量分别为400件、500件、300件、200件。该项产品的生产准备费用每批为500元，每件的生产费用为1元，存储费用每件每月为1元。假定1月初的存货为100件，4月底的存货为0。试求该厂在这4个月内的最优生产计划。

9. 某公司需要对某产品决定未来半年内每个月的最佳存储量，以使总费用最小。已知半年里对该产品的需求量和单位订货费用、单位储存费用的数据如表5-11所示。

表5-11 相关费用的数据

月份 k	1	2	3	4	5	6
需求量 d_k	50	55	50	45	40	30
单位订货费用 c_k	825	775	850	850	775	825
单位储存费用 u_k	40	30	35	20	40	

10. 某工厂生产三种产品，各产品质量与利润关系如表5-12所示。现将此三种产品运往市场出售，运输能力总质量不超过6t。问如何安排运输总利润最大？

表5-12 产品质量与利润关系

种类	1	2	3
质量	2	3	4
利润	80	130	180

6　多目标规划与 MATLAB 实现

本章提要

本章介绍了多目标规划的基本理论和求解的基本方法——评价函数法，并介绍了几种常用的构造评价函数的思路，通过大量的实例，着重介绍了如何应用 MATLAB 优化工具箱求解多目标规划问题。

6.1　多目标规划基本理论

在生产、经济、科学和工程应用等许多实际问题中，经常需要对多个目标（指标）的方案、计划、设计进行判断，希望多个目标（指标）都实现最优化，因此这些问题就含有多个目标函数。解决这类问题有很多种方法，针对不同的问题可采取不同的方法来解决。如选择新厂的厂址时，除考虑运费、造价、燃料供应费用等经济指标最优化外，还要考虑对环境的污染等社会因素；又如，在一个生产过程中，人们总是期望高产出、低消耗、省工时等。只有对各种因素的指标进行综合衡量后，才能作出合理的决策，这种问题称为多目标最优化问题。

【例 6-1】 物资调运问题

某种物资存放在三个仓库 A_1、A_2、A_3，存放量分别为 a_1、a_2、a_3（单位：t）；现要将这些物资运往四个销售点 B_1、B_2、B_3、B_4，其需要量分别为 b_1、b_2、b_3、b_4（且 $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$），已知 A_i 到 B_j 的距离和单位运价分别为 d_{ij}（km）和 c_{ij}（元）。现要决定

如何调运（即从 A_i 运给 B_j）才能使总的吨公里数和总运费都尽量少。

解 设变量 x_{ij}，$i=1, 2, 3$；$j=1, 2, 3, 4$ 表示由 A_i 运往 B_j 的货物数，于是总吨公里数为 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}d_{ij}x_{ij}$，总运费为 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}$，问题化为

$$\min\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}d_{ij}x_{ij}$$

$$\min\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{4}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,3,4$$

$$x_{ij}\geqslant 0$$

由于求最大都可转化为求最小，所以多目标最优化问题的一般形式为

$$(\text{vp})\begin{cases}\min\ [f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x)]^{\mathrm{T}},\ p>1,\ x\in E^p\\ \text{s.t.}\ \ g_i(x)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\\ h_i(x)=0,\ i=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

或者记为 $\min\limits_{x\in D}f(x)$，$D=\{x\in E^p\,|\,g(x)\geqslant 0,\ h(x)=0\}$

其中
$$f(x)=[f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x)]^{\mathrm{T}},$$
$$g(x)=[g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x)]^{\mathrm{T}},$$
$$h(x)=[h_1(x),h_2(x),\cdots,h_l(x)]^{\mathrm{T}}。$$

当 $p=1$ 时，（vp）就是非线性规划，为区别起见，称为单目标规划。

求解多目标规划的最基本方法为评价函数法，其基本思想是：借助几何或应用中的直观背景，构造所谓评价函数，将多目标优化问题转化为单目标优化问题，然后利用单目标优化问题的求解方法

求出最优解，并把这种最优解当作多目标优化问题的最优解。

所谓评价函数，是利用（vp）的目标函数 $f(x)$，构造一个复合函数 $\varphi[f(x)]$。然后在（vp）的约束集 D 上极小化 $\varphi[f(x)]$。

下面几节将介绍几种常见构造评价函数的思路。

6.1.1 理想点法及其 MATLAB 实现

在（vp）中，先求解 p 个单目标问题

$$\min_{x\in D} f_j(x),\ j=1,2,\cdots,p$$

设其最优值为 f_j^*，称 $\boldsymbol{f}^*=(f_1^*,\cdots,f_p^*)^{\mathrm{T}}$ 为值域中的一个理想点，因为一般很难达到。于是，在期望的某种度量下，寻求距离 $\boldsymbol{f}^*$ 最近的 $\boldsymbol{f}$ 作为近似值。一种最直接的方法是构造评价函数

$$\varphi(z)=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(z_i-f_i^*)^2}$$

然后极小化 $\varphi[f(x)]$，即求解

$$\min_{x\in D}\varphi[f(x)]=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}[f_i(x)-f_i^*]^2}$$

并将它的最优解 x^* 作为（vp）在这种意义下的“最优解”。

【例 6-2】 利用理想点法求解

$$\begin{aligned}
\max\ & f_1(x)=-3x_1+2x_2\\
\max\ & f_2(x)=4x_1-3x_2\\
\text{s.t.}\ & 2x_1+3x_2\leqslant 18\\
& 2x_1+x_2\leqslant 10\\
& x_1,x_2\geqslant 0,x\in E^2
\end{aligned}$$

解 先分别对单目标求解。

① 求 $f_1(x)$ 最优解的 MATLAB 清单为

```
>>f=[3,-2]';
A=[2,3;2,1];
b=[18,10]';
lb=[0,0]';
[x,fval]=linprog(f,A,b,[ ],[ ],lb)↵
```

结果输出为

```
x=
    0.0000
    6.0000
fval=
        -12.0000
```

即最优解为 12。

② 求 $f_2(x)$ 最优解的 MATLAB 清单为

```
>>f=[-4,-3]';
A=[2,3;2,1];
b=[18,10]';
lb=[0,0]';
[x,fval]=linprog(f,A,b,[ ],[ ],lb)↵
```

结果输出为

```
x=
    3.0000
    4.0000
fval=
        -24.0000
```

即最优解为 24。

这时得到理想点为（12,24）。

然后求如下模型的最优解。

$$\min_{x\in D}\varphi[f(x)]=\sqrt{[f_1(x)-12]^2+[f_2(x)-24]^2}$$

$$=\sqrt{(-3x_1+2x_2-12)^2+(4x_1+3x_2-24)^2}$$

$$\text{s.t. } 2x_1+3x_2\leqslant 18$$

$$2x_1+x_2\leqslant 10$$

$$x_1,x_2\geqslant 0,x\in E^2$$

利用 MATLAB 求解清单为

```
>>A=[2,3;2,1];
```

```
b=[18;10];
x0=[1;1];
x=fmincon((-3 * x(1) + 2 * x(2) - 12)^2 + (4 * x(1) + 3 *
x(2) - 24)^2)^(1/2)',x0,A,b)↵
```

结果输出为

```
x=
    0.5268
    5.6488
```

则对应的目标值分别为 $f_1(x)=9.7172$，$f_2(x)=19.0536$。

6.1.2 线性加权和法及其 MATLAB 实现

在具有多个指标的问题中，人们总希望对那些相对重要的指标给予较大的权系数，因而将多目标向量问题转化为所有目标的加权求和的标量问题。基于这个现实，构造如下评价函数，即

$$\min_{x\in\Omega} f(x) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i F_i(x)^2$$

式中，ω_i 为加权因子。其选取的方法很多，有专家打分法、容限法和加权因子分解法等。

该问题可以用标准的无约束最优化方法进行求解。

【例 6-3】 利用线性加权和法求解

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1-1)^2+(x_2-2)^2-(x_3-3)^2 \\ &\min\ x_1^2+2x_2^2+3x_3^2 \\ &\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3=6 \\ &\qquad\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{aligned}$$

权系数分别取 $u_1=0.36$，$u_2=0.64$。

解 构造如下评价函数，即

$$\begin{aligned} &\min\ \{0.36\times[(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2]^2+0.64\times \\ &\qquad (x_1^2+2x_2^2+3x_3^2)^2\} \\ &\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3=6 \\ &\qquad x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{aligned}$$

利用 MATLAB 求解清单为

```
>>Aeq=[1,1,1];
beq=[6];
x0=[1;1;1];
lb=[0,0,0];
x=fmincon('0.36*((x(1)-1)^2+(x(2)-2)^2+(x(3)-3)^2)^2+0.64*(x(1)^2+2*x(2)^2+3*x(3)^2)^2',x0,[ ],[ ],Aeq,beq)。
```

结果输出为

```
x=
    3.0085
    1.7349
    1.2566
```

故对应的目标值分别为 7.1438 和 19.808。

6.1.3 最大最小法及其 MATLAB 实现

在决策时，采取保守策略是稳妥的，即在最坏的情况下，寻求最好的结果，按照此想法，可构造如下评价函数，即

$$\varphi(z)=\max_{1\leqslant i\leqslant p} z_i$$

然后求解

$$\min_{x\in D}\varphi[f(x)]=\min_{x\in D}\max_{1\leqslant i\leqslant p} f_i(x)$$

并将它的最优解 x^* 作为（vp）在这种意义下的最优解。

MATLAB 中常用于求解最大最小化问题的函数为 fminimax。

最大最小化问题的数学模型为

$$\begin{aligned}&\min_{x\in F_i}\max\{F_i(x)\}\\ \text{s.t. }\ &\boldsymbol{c}(x)\leqslant 0\\ &\mathbf{ceq}(\mathrm{x})=0\\ &\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\mathbf{b}\\ &\mathbf{Aeq}*\boldsymbol{x}=\mathbf{beq}\\ &\mathbf{lb}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\mathbf{ub}\end{aligned}$$

工程应用中 fminimax 函数的常用的调用格式如下。

① [x,fval]=fminimax(fun,x_0)，初值为 x_0，求解目标函数的最大最小化解 x，同时返回解 x 处的目标函数值。

② [x,fval]=fminimax(fun,x_0,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$)，初值为 x_0，给定线性不等式 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$，求解目标函数的最大最小化解 x，同时返回解 x 处的目标函数值。

③ [x,fval]=fminimax(fun,x_0,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,**Aeq**,**beq**)，初值为 x_0，给定线性不等式 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$ 和线性等式 **Aeq** $*\ \boldsymbol{x}$=**beq**。如果没有不等式存在，则令 **A**=[ ]，$\boldsymbol{b}$=[ ]，求解目标函数的最大最小化解 x，同时返回解 x 处的目标函数值。

④ [x,fval]=fminimax(fun,x_0,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,**Aeq**,**beq**,**lb**,**ub**)，初值为 x_0，给定线性不等式 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$ 和线性等式 **Aeq** $*\ \boldsymbol{x}$=**beq**。如果没有不等式存在，则令 **A**=[ ]，$\boldsymbol{b}$=[ ]，定义变量的下限 **lb** 和上限 **ub**，求解目标函数的最大最小化解 x，同时返回解 x 处的目标函数值。

⑤ [x,fval]=fminimax(fun,x_0,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,**Aeq**,**beq**,**lb**,**ub**,nonlcon)，初值为 x_0，给定线性不等式 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$ 和线性等式 **Aeq** $*\ \boldsymbol{x}$=**beq**。如果没有不等式存在，则令 **A**=[ ]，$\boldsymbol{b}$=[ ]，定义变量的下限 **lb** 和上限 **ub**；若没有边界存在，则令 **lb**=[ ]和（或）**ub**=[ ]，在 nonlcon 参数中给定非线性不等式约束 $\boldsymbol{c}(x)$ 或等式约束**ceq**(x)，要求 $\boldsymbol{c}(x)\leqslant 0$ 且 **ceq**(x)=0，求解目标函数的最大最小化解 x，同时返回解 x 处的目标函数值。

⑥ [x,fval]=fminimax(fun,x_0,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,**Aeq**,**beq**,**lb**,**ub**,nonlcon,options)，用 options 给定的参数进行目标函数的最大最小化优化求解。

⑦ x=fminimax(…)，仅找出解 x 的值，不返回解 x 处的目标函数值。

注意　目标函数必须连续，有时可能给出局部最优解。

【例 6-4】　利用最大最小法求解下列各函数的最大最小值

$$f_1(x)=x_1^2+2x_2^2-28x_1+50x_2+250$$

$$f_2(x)=x_1^2-5x_2^2$$
$$f_3(x)=2x_1+3x_2-10$$
$$f_4(x)=-5x_1-4x_2$$
$$f_5(x)=2x_1+x_2-5$$
$$f_6(x)=x_1^2+3x_2$$

解 首先，编写 M 文件。

```
function f=myfun(x)
f(1)=x(1)^2+2*x(2)^2-28*x(1)+50*x(2)+250;
f(2)=x(1)^2+5*x(2)^2;
f(3)=2*x(1)+3*x(2)-10;
f(4)=-5*x(1)-4*x(2);
f(5)=2*x(1)+x(2)-5;
f(6)=x(1)^2+3*x(2);
```

以文件名 myfun6_1 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中。

其次，调用 fminimax 函数

```
>>x0=[1;1];
[x,fval]=fminimax('myfun6_1',x0)↵
```

结果输出为

```
x=
    4.7007
    -2.1024
fval=
    44.1971   44.1971   -6.9057   -15.0942   2.2991
    15.7898
```

6.2 多目标规划问题的 MATLAB6.5 辅助计算及工程应用实例

6.2.1 MATLAB 优化工具箱函数选用

MATLAB 中常用于求解多目标达到问题的函数为 fgoalattain。

假设多目标规划问题的数学模型为

$$\begin{aligned}
&\min_{x,\gamma} \gamma \\
&\text{s.t. } F(x)-\text{weight} * \gamma \leqslant \text{goal} \\
&\qquad c(x) \leqslant 0 \\
&\qquad \text{ceq}(x)=0 \\
&\qquad A * x \leqslant b \\
&\qquad \text{Aeq} * x=\text{beq} \\
&\qquad \text{lb} \leqslant x \leqslant \text{ub}
\end{aligned}$$

工程应用中 fgoalattain 函数的常用调用格式如下。

① [x, fval] = fgoalattain(fun, x_0, **goal**, **weight**)，初值为 x_0，**goal** 为目标函数的目标，**weight** 参数为指定权重，同时返回解 x 的值及解 x 处的目标函数值。

② [x, fval] = fgoalattain(fun, x_0, **goal**, **weight**, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$)，初值为 x_0，**goal** 为目标函数的目标，**weight** 参数为指定权重，约束条件为线性不等式 $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$，同时返回解 x 的值及解 x 处的目标函数值。

③ [x, fval] = fgoalattain(fun, x_0, **goal**, **weight**, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, **Aeq**, **beq**)，初值为 x_0，**goal** 为目标函数的目标，**weight** 参数为指定权重，约束条件为线性不等式 $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$ 及线性等式 **Aeq** * $\boldsymbol{x}$ = **beq**。若没有不等式存在时，设 $\boldsymbol{A}$=[ ]，$\boldsymbol{b}$=[ ]，同时返回解 x 的值及解 x 处的目标函数值。

④ [x, fval] = fgoalattain(fun, x_0, **goal**, **weight**, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, **Aeq**, **beq**, lb, ub)，初值为 x_0，**goal** 为目标函数的目标，**weight** 参数为指定权重，约束条件为线性不等式 $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$ 及线性等式 **Aeq** * $\boldsymbol{x}$ = **beq**。若没有不等式存在时，设 $\boldsymbol{A}$=[ ]，$\boldsymbol{b}$=[ ]，定义变量 x 的下界 **lb** 和上界 **ub**，同时返回解 x 的值及解 x 处的目标函数值。

⑤ [x, fval] = fgoalattain(fun, x_0, **goal**, **weight**, **A**, $\boldsymbol{b}$, **Aeq**, **beq**, **lb**, **ub**, nonlcon)，初值为 x_0，**goal** 为目标函数的目标，**weight** 参数为指定权重，约束条件为线性不等式 $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$ 及线性等式 **Aeq** * $\boldsymbol{x}$ = **beq**。若没有不等式存在时，设 **A**=[ ]，$\boldsymbol{b}$=[ ]，定义变量 x 的下界 **lb** 和上界 **ub**，nonlcon 参数中定义非线性不等式 $\boldsymbol{c}(x)$

或 **ceq**(x)，要求 $c(x)\leqslant 0$ 和 $\mathbf{ceq}(x)=0$；若不存在边界，则设 **lb**=[ ]和（或）**ub**=[ ]，同时返回解 x 的值及解 x 处的目标函数值。

⑥ [x,fval]=fgoalattain(fun,x_0,**goal**,**weight**,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{b}$,**Aeq**,**beq**,**lb**,**ub**,nonlcon,options)，用 options 参数中设置的优化参数进行多目标问题的求解。

⑦ x=fgoalattain(…)，仅返回解 x 的值，不返回解 x 处的目标函数值。

参数说明如下。

① **goal** 变量为目标函数的目标值，为向量，其长度与目标函数返回的目标数 F 相等。

② nonlcon 参数，计算非线性不等式约束 $c(x)\leqslant 0$ 和非线性等式约束 **ceq**（x）= 0。若 nonlcon 参数采用 M 文件表述，即 nonlcon='mycon'，则 M 文件 mycon. m 具有下面的形式，即

function[**c**,**ceq**]=mycon(x)
c=…　　（计算 x 处的非线性不等式）
ceq=…　（计算 x 处的非线性等式）

③ **weight** 变量为权重，也为向量，用于控制低于或超过 fgoalattain 函数指定目标的相对程度。

注意　目标函数必须是连续的，有时函数将只给出局部最优解。

6.2.2　工程应用实例

【例 6-5】　利用 fgoalattain 函数求解例 6-2

$$\max f_1(x)=-3x_1+2x_2$$
$$\max f_2(x)=4x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}\ \ 2x_1+3x_2\leqslant 18$$
$$2x_1+x_2\leqslant 10$$
$$x_1,x_2\geqslant 0,\ x\in E^2$$

解　① 编写目标函数的 M 文件

```
function f=myfun(x)
f(1)=3 * x(1)-2 * x(2);
```

```
f(2)=-4*x(1)-3*x(2);
```

以文件名 myfun6_2 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中。

② 给定目标，权重按目标的比例确定，给出初值，调用优化函数

```
>>goal=[18,10];
weight=[18,10];
x0=[1,1];
A=[2,3;2,1];
b=[18,10];
lb=zeros(2,1);
[x,fval]=fgoalattain('myfun6_2',x0,goal,weight,A,b,[ ],[ ],lb,[ ]) ↵
```

结果输出为

```
x=
    -0.0000   6.0000
fval=
      -12.0000   -18.0000
```

故对应的目标值分别为 12 和 18。

【例 6-6】 利用 fgoalattain 函数求解例 6-3

$$\min\ (x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2$$

$$\min\ x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2+x_3=6$$

$$x_1,x_2,x_3\geqslant 0$$

解 MATLAB 求解程序清单如下。

① 编写目标函数的 M 文件

```
function f=myfun(x)
f(1)=(x(1)-1)^2+(x(2)-2)^2+(x(3)-3)^2;
f(2)=x(1)^2+2*x(2)^2+3*x(3)^2;
```

以文件名 myfun6_3 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件

夹中。

② 给定目标均为1，权重按目标的比例确定，给出初值，调用优化函数

```
>>goal=[1,1];
weight=[1,1];
x0=[1,1,1];
Aeq=[1,1,1];
beq=[6];
lb=zeros(3,1);
[x,fval]=fgoalattain('myfun6_3',x0,goal,weight,[ ],[ ],
Aeq,beq,lb,[ ])↵
```

结果输出为

```
x=
   3.2727   1.6364   1.0909
fval=
      8.9422   19.6364
```

【例 6-7】 利用 fgoalattain 函数求解例 6-4

$$f_1(x)=2x_1^2+x_2^2-48x_1-40x_2+304$$

$$f_2(x)=-x_1^2-3x_2^2$$

$$f_3(x)=x_1+3x_2-18$$

$$f_4(x)=-x_1-x_2$$

$$f_5(x)=x_1+x_2-8$$

解 首先如例 6-4 编写 M 文件名，然后调用 fgoalattain 函数

```
>>goal=[1,1,1,1,1];
weight=[1,1,1,1,1];
x0=[1,1];
[x,fval]=fgoalattain('myfun6_1',x0,goal,weight)↵
```

结果输出为

```
x=
   4.0000   4.0000
```

fval=

    0.0000   -64.0001   -2.0000   -8.0000   -0.0000

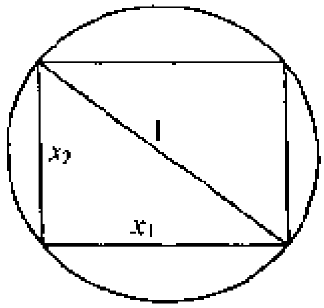

图 6-1　例 6-8 图

【例 6-8】 用直径为 1（单位长）的圆木制成截面为矩形的梁，如图 6-1 所示。为使梁质量最轻而强度最大，问截面的高与宽应取何尺寸？

解　设矩形截面的高与宽分别为 x_1 和 x_2。这时梁的面积为 x_1x_2，它决定质量，而梁的强度取决于截面矩量 $(x_1x_2^2)/6$。故梁的数学模型为

$$\min\ x_1x_2$$

$$\max\ \frac{1}{6}(x_1x_2^2)$$

$$\text{s.t.}\ \ x_1^2+x_2^2=1$$

$$x_1,x_2\geqslant 0$$

MATLAB 求解程序清单如下。

① 编写目标函数和约束条件的 M 文件

```
function f=myfun(x)
f(1)=x(1)*x(2);
f(2)=-(x(1)*x(2)^2)/6;
```

以文件名 myfun6_4 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中；

```
function [c,ceq]=mycon(x)
c=[ ];
ceq=x(1)^2+x(2)^2-1;
```

以文件名 mycon6_1 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中。

② 给定目标均为 1，权重按目标的比例确定，给出初值，调用优化函数

```
>>goal=[1,1];
weight=[1,1];
x0=[1,1];
```

```
lb=zeros(2,1);
[x,fval]=fgoalattain('myfun6_4',x0,goal,weight,[ ],[ ],
[ ],[ ],lb,[ ],'mycon6_1').
```

结果输出为

```
x=
   0.7071   0.7071
fval=
      0.5000   -0.0589
```

可见，当截面的高与宽均取 0.7071 时，梁的质量最轻而强度最大，分别为 0.5000 和 0.0589。

【例 6-9】 某化工厂拟生产两种产品 A 和 B，它们都将造成环境污染，其公害损失可折算成费用，有关数据见表 6-1 所示。

表 6-1 有关数据

产品	公害损失/(万元/t)	生产设备费/(万元/t)	最大生产能力/(t/月)
A	4	2	5
B	1	5	6

问该工厂应如何安排每月的生产计划，使每月供应市场总量不少于 7t 的前提下，公害损失和设备投资均达到最小？

解 设工厂每月生产 A、B 两种产品的数量分别为 x_1t、x_2t，设备投资费为 $f_1(x)$，公害损失费为 $f_2(x)$，则得到下面的多目标优化问题。

$$
\begin{aligned}
\min\ & f_1(x)=2x_1+5x_2 \\
\min\ & f_2(x)=4x_1+x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1\leqslant 5 \\
& x_2\leqslant 6 \\
& x_1+x_2\geqslant 7 \\
& x_1,x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

MATLAB 求解程序清单如下。

① 编写目标函数的 M 文件

```
function f=myfun(x)
f(1)=2*x(1)+5*x(2);
f(2)=4*x(1)+x(2);
```

以文件名 myfun6_5 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中。

② 给定目标，权重按目标的比例确定，给出初值，调用优化函数

```
>>goal=[40,26];
weight=[40,26];
x0=[5,6];
A=[1,0;0,1;-1,-1];
b=[5;6;-7];
lb=zeros(2,1);
[x,fval]=fgoalattain('myfun6_5',x0,goal,weight,A,b,[ ],
[ ],lb,[ ]);
```

结果输出为

```
x=
   3.1818   3.8182
fval=
      25.4545   16.5455
```

可见，当工厂每月生产产品 A 3.1818t、B 3.8182t 时，设备投资费和公害损失费均达到最小值，分别为 25.4545 万元、16.5455 万元。

【例 6-10】 某钢铁公司因生产需要欲采购一批钢材，市面上的钢材有两种规格，第 1 种规格的单价为 3500 元/t，第 2 种规格的单价为 4000 元/t。要求购买钢材的总费用不超过 1000 万元，购得钢材总量不少于 2000t。问如何确定最好的采购方案，使购买钢材的总费用最少且购买的总量最多？

解 设采购第 1、2 种规格的钢材数量分别为 x_1t 和 x_2t。根据题意建立如下的多目标优化问题的数学模型。

$$\min f_1(x)=3500x_1+4000x_2$$

$$\max\ f_2(x)=x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\ 3500x_1+4000x_2\leqslant 100000$$
$$x_1+x_2\geqslant 2000$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

MATLAB求解程序清单如下。

① 编写目标函数的M文件

```
function f=myfun(x)
f(1)=3500*x(1)+4000*x(2);
f(2)=-x(1)-x(2);
```

以文件名myfun6_6保存在MATLAB目录下的work文件夹中。

② 给定目标，权重按目标的比例确定，给出初值，调用优化函数

```
>>goal=[10000000,-2000];
weight=[10000000,-2000];
x0=[1000,1000];
A=[3500,4000;-1,-1];
b=[100000;-2000];
lb=[0,0];
[x,fval]=fgoalattain('myfun6_6',x0,goal,weight,A,b,[ ],
[ ],lb,[ ])↵
```

结果输出为

```
x=
   1.0e+003*
     0.9993   1.0015
fval=
       1.0e+006*
         7.5037   -0.0020
```

所以，当采购第1、2种规格的钢材分别为999.3t和1001.5t时，可使购买钢材的总费用最少，为7503700元，购买钢材的总量最多，为2000t。

【例 6-11】 某化工厂生产两种混凝剂 A 和 B。已知生产 A、B 产品 1kg 需要的时间分别为 2h 和 3h，假定每天工作时间不超过 8h。这两种产品每千克分别获利 200 元和 300 元。问应如何安排生产计划，才能使总生产时最小及总利润最大?

解 设工厂生产 A、B 两种混凝剂的数量分别为 x_1 kg 和 x_2 kg。根据题意建立如下多目标优化问题的数学模型。

$$\begin{aligned} &\min\ f_1(x)=2x_1+3x_2 \\ &\max\ f_2(x)=200x_1+300x_2 \\ &\text{s.t.}\ \ 2x_1+3x_2\leqslant 8 \\ &\qquad\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

MATLAB 求解程序清单如下。

① 编写目标函数的 M 文件

```
function f=myfun(x)
f(1)=2*x(1)+3*x(2);
f(2)=-200*x(1)-300*x(2);
```

以文件名 myfun6_7 保存在 MATLAB 目录下的 work 文件夹中。

② 给定目标，权重按目标的比例确定，给出初值，调用优化函数

```
>>goal=[8,-500];
weight=[8,-500];
x0=[2,2];
A=[2,3];
b=[8];
lb=[0,0];
[x,fval]=fgoalattain('myfun6_7',x0,goal,weight,A,b,[ ],
[ ],lb,[ ])↵
```

结果输出为

```
x=
    1.6923    1.5385
fval=
       8    -800
```

所以，该工厂每天生产 A、B 两种混凝剂的数量分别为 1.6923kg 和 1.5385kg 时，可获得最大利润，为 800 元，最少需要生产 8h。

习　题

1. 分别用线性加权和法和 fgoalattain 函数求解下列多目标问题。

$$
\begin{aligned}
&\min\ (x_1-1)^2+2(x_2-2)^2+3(x_3-3)^2\\
&\min\ x_1^2+x_2^2+x_3^2\\
&\text{s.t.}\ \ x_1+x_2+x_3=16\\
&\qquad x_1, x_2, x_3\geqslant 0
\end{aligned}
$$

采用线性加权和法的权值取 $u_1=0.36$，$u_2=0.64$。

2. 分别用理想点法和 MATLAB 函数求解下列多目标问题。

$$
\begin{aligned}
&\max\ f_1(x)=-2x_1+3x_2\\
&\max\ f_2(x)=3x_1+4x_2\\
&\text{s.t.}\ \ 3x_1+2x_2\leqslant 20\\
&\qquad x_1+2x_2\leqslant 8\\
&\qquad x_1, x_2\geqslant 0, x\in E^2
\end{aligned}
$$

3. 利用最大最小法求解下列各函数的最大最小值。

$$
\begin{aligned}
&f_1(x)=x_1^2+2x_2^2+25\\
&f_2(x)=2x_1^2+3x_2\\
&f_3(x)=5x_1+3x_2-18\\
&f_4(x)=-9x_1-7x_2\\
&f_5(x)=2x_1+5x_2-8
\end{aligned}
$$

4. 某木材加工厂欲采购一批木材，市场上的这种木材有两种等级，一级单价 2000 元/m^3，二级单价 1500 元/m^3。要求购买木材的总费用不超过 20000 元，购得木材总量不少于 100m^3，其中二级木材不少于 60m^3，问如何确定最佳采购方案？

5. 有甲、乙、丙三块地，相应面积的产量（单位：kg）见表 6-2。

表 6-2 甲、乙、丙三块地相应面积产量

地名	面积/km^2	水稻/元	大豆/元	玉米/元
甲	20	7500	4000	10000
乙	40	6500	4500	9000
丙	60	6000	3500	8500

种植水稻、大豆和玉米的单位面积投资分别为 200 元、500 元和 100 元。现要求最低产量分别为 25×10^4kg、8×10^4kg 和 50×10^4kg 时，如何制定种植计划才能使总产量最高，而总投资最少？

6. 某工厂计划生产甲、乙两种产品，分别需用自产原料 A、自产能源 B、外购能源 D 及外购原料 C。已知每生产一件甲产品分别需要 A、B、C、D 的数量为 2、1、4、0 个单位，每生产一件乙产品分别需要 A、B、C、D 的数量为 2、2、0、4 个单位。又知 A、B、C、D 的计划供应能力为 12、8、16、12，每生产一件甲、乙产品工厂可分别获利 2 万元、3 万元。问应如何安排生产才能实现利润最大，且对自产原料和自产能源的利用最少？

7. 某电视机厂有两条生产线，甲生产线每小时生产 2 台电视机，乙生产线每小时生产 1.5 台电视机，甲、乙两条生产线每周正常工作时间都是 40h，每台电视机的利润是 100 元。问应如何利用甲、乙两条生产线的生产能力，才能使每周生产的总利润最大且两条生产线的总生产时间最省？已知每周工作 5 天，每天 8h。

7 图与网络分析技术

本章提要

图与网络分析是应用十分广泛的最优化技术，本章介绍了图与网络的基本概念，图的绘制方法，最短路问题与最大流问题，并介绍了网络计算技术在工程实践中的应用。

7.1 引言

在人们所从事的各种生产活动及日常生活中，一些系统的结构模型可清楚地表示系统内部物流、能流和信息流的传递，且其单元之间的关系四通八达，构成一个网状图形，例如给水、排水管道图，城市交通图，铁路运输图，油田输油管或输气管图，有线或无线通讯图，计算机网络通讯图等。这些图的共同特点是表达了某些图之间的某些特定关系。无论图的内容如何，它都包含两个基本要素，即对象及对象之间的某种特定关系。通常，用一个点（称为节点）来表示一个对象，用点与点之间的连线（边）来反映相应对象之间的特定关系，如图 7-1 反映了 A、B、C、D 四个城市之间的公路分布情况，A、B 间有公路相通，就记为 A-B，这里 A、B 分别表示 A、B 两个城市（两点），连线表示两地之间有“公路相通”这一特定关系。

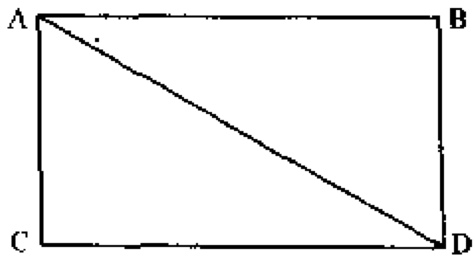

图 7-1　A、B、C、D 四个城市公路分布图

一般来说，如果知道了某些对象及这些对象之间的特定关系，

就可以用一个图来反映。

最优化方法中研究的图与几何学中研究的图是不一样的，在这里，节点的准确位置、节点与节点之间连线的长短曲直都无关紧要，重要的是节点与边之间的衔接关系。两个图只要它们的边与节点之间的衔接关系相同，则认为这两个图是相同的。

在实际问题中，仅给出一个图是不够的，例如，要了解某城市的公路交通情况，不仅要了解每一条公路的分布状况，还要了解每一条公路的长度，因此和图连在一起的，通常还有与节点或边有关的某些数量指标，称为权。把这种各条边上赋有权数的图称为网络图或简称为网络（network）。

广义地说，系统都是以网络的形式构成的。网络理论就是撇开各种图的具体内容来讨论由点、线段构成的抽象形式的图，从中研究其一般规律。对某些系统，网络分析技术是解决其优化问题的主要手段。

网络分析技术是最优化技术中的重要组成部分，广泛应用于物理学、化学、控制学、信息论、科学管理、电子计算机等各个领域中，取得了十分显著的成效。例如，在组织生产中，为完成某项生产任务，各工序之间怎样衔接才能使生产任务完成得既快又好；又如汽车大修任务，可以将之看成是一个统一的系统，是由许多工序组成的，如拆卸、清洗、检查、零件修理、零件加工、电气检修与安装、车的组合、部件组装，最后进行总装和试车等，这些工作可以说是技术性工作，但同时也是汽车大修过程的组织工作，在同等的技术条件下，工序的组织安排合理与否，会直接影响大修的质量、速度和费用等指标。应用网络分析技术求解这些问题都很简便。

网络分析技术的基本原理为统筹兼顾、求快、求好、求省，是将研究与开发的规划项目和控制过程作为一个系统去加以处理，将组成系统的各项任务的各个阶段和先后顺序，通过网络的形式统筹规划，使此系统对资源、人力、物力、财力等进行合理的安排，有效地加以利用，达到以最少的时间和资源消耗来完成整个系统的预

期目标，取得良好经济效益的目标。

【例 7-1】 有甲、乙、丙、丁、戊、己六名运动员，报名参加 A、B、C、D、E、F 六个项目的比赛（如表 7-1 所示）。表中打"√"的是各运动员报名参加的比赛项目。问六个项目的比赛顺序应如何安排，才能做到每名运动员不连续参加两项比赛？

表 7-1 运动员报名表

姓名	A	B	C	D	E	F
甲				√		√
乙	√	√		√		
丙			√		√	
丁	√				√	
戊		√			√	
己		√		√		

解 把比赛项目作为研究对象，用点表示，如果两个项目没有同一名运动员参加，则表明他们在比赛顺序上可紧排在一起，在代表这两个项目的点之间用直线相连，如图 7-2 所示。

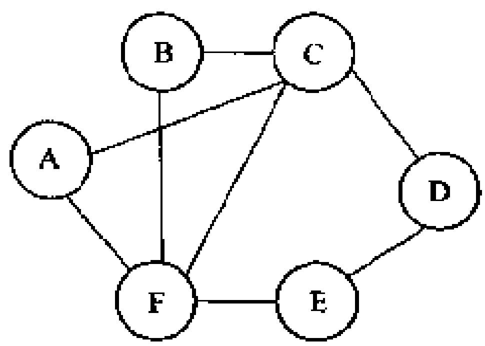

图 7-2 例 7-1 图

要满足问题的要求，只需在图中找出一条包含全部顶点的路即可。这样的路共有八条，即比赛项目按以下任一顺序排均可：A-F-E-D-C-B，B-C-D-E-F-A，A-F-B-C-D-E，E-D-C-B-F-A，A-C-B-F-E-D，D-E-F-B-C-A，A-C-D-E-F-B，B-F-E-D-C-A。

7.2 图和网络的基本概念

7.2.1 图

图是反映对象之间关系的一种工具，是由一些点及点之间的连

线（可带箭头，也可不带箭头）组成，带箭头的连线称为边，不带箭头的连线称为弧。图中常用的基本概念如下。

① 节点、边　图中表示各组成系统对象的点叫图的节点，连接两个节点的线段称为边。

② 路径　网络图中一个前后相继并且方向相同的边序列 $p=\{(i_0,i_1),(i_1,i_2),\cdots,(i_{p-1},i_p)\}$ 称为路径。图 7-2 中 $p=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ 即为一条路径。

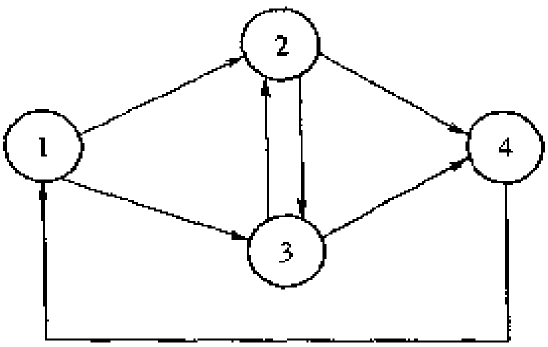

图 7-3　网络图

③ 链　网络中一个前后相继并且方向不一定相同的边序列 $C=\{(i_0,i_1),(i_1,i_2),\cdots,(i_{p-1},i_p)\}$ 称为链。

④ 回路　闭合的路径称为回路，回路中各边的方向是一致的，如图 7-3 中 $R=\{(1,3),(3,2),(2,4),(4,1)\}$ 即为一个回路。

⑤ 圈　闭合的链称为圈。

⑥ 连通图　如果网络中任何两个节点之间都有一条链，则称为连通图。

7.2.2　树

树是指无圈的连通图，即连接图中所有节点的最少边的集合，其性质如下。

① 树中任意两个节点之间必然有一条且仅有一条路。因为树是连通的，因此树中任意两点之间必有路，如果两点之间存在两条路，则将有回路出现，这与树的定义相矛盾。

② 把一个树的任意边移去，则树变成不连通图。因为被移去的边是连接其两个端点的惟一一条路，故移去此边后，该两端点便不连通。

③ 在树中不相邻的两个点间添上一条边，则得到一个圈。

在一个图中，若只有一边与顶点衔接，则该顶点称为悬挂点，一个树至少有两个悬挂点。

7.2.3 割集

设 G 是一连通图，满足下列条件的边的集合叫割集。

① 把这些边全部从图 G 中去掉，图 G 则成为不连通的两部分。

② 把该边集合的任何子集从图 G 中去掉，图 G 仍是连通的。

7.3 网络分析技术的工程应用

7.3.1 最短路问题

求最短路问题的算法目前公认最好的方法是 Dijkstra 算法，它是由 Dijkstra 于 1959 年提出来的。下面结合一个例子来介绍 Dijkstra 算法。

【例 7-2】 图 7-4 是各城市之间的交通网，箭头表示走向，边旁的数字称为权（权可表示距离、费用、时间等），这样的图称为赋权图。现要求 v_0 至其他各点的最短路程。

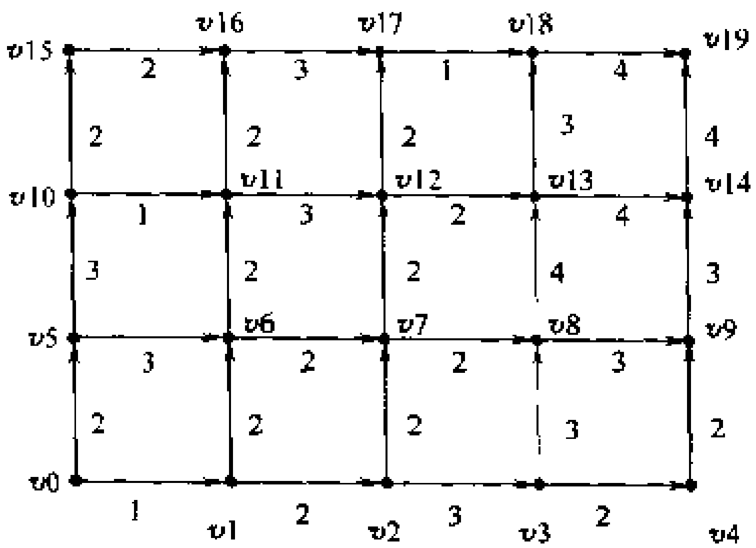

图 7-4 各城市之间的交通网

解 容易看到，最短路径具有如下性质：若路径 $v_0 v_{i1} v_{i2} \cdots v_{in}$ 为 v_0 至 v_{in-1} 的最短路径，则 $v_0 v_{i1} v_{i2} \cdots v_{in-1}$ 必然就是 v_0 至 v_{in-1} 的最短路径。求解过程如下。

① 与 v_0 点相连的顶点有 v_1、v_5 两点，v_1 最接近于 v_0，于是连 v_0v_1，且令 $l_{0\text{-}1}=1=l_1$（l 为 v_0 至 v_1 的权系数），令顶点集 $S=\{v_0,v_1\}$；

② 与 $S=\{v_0,v_1\}$ 相邻接的点有 v_2、v_5、v_6，且

$l_{0\text{-}1\text{-}2}=l_{0\text{-}1}+l_{1\text{-}2}=1+2=3=l_2$

$l_{0\text{-}5}=2=l_5$

$l_{0\text{-}1\text{-}6}=l_{0\text{-}1}+l_{1\text{-}6}=1+2=3$

$\min\{l_2,l_5,l_{0\text{-}1\text{-}6}\}=l_5=2$

故连接 v_0v_5，并令 $S=\{v_0,\ v_1,\ v_5\}$；

③ 与 $S=\{v_0,\ v_1,\ v_5\}$ 相邻接的点有 v_2、v_6、v_{10}，计算

$$l_{0\text{-}1\text{-}2}=l_{0\text{-}1}+l_{1\text{-}2}=1+2=3=l_2,$$

$$\min\{l_{0\text{-}1}+l_{1\text{-}6},l_{0\text{-}5}+l_{5\text{-}6}\}=l_{0\text{-}1\text{-}6}=3=l_6,$$

$$l_{0\text{-}5\text{-}10}=l_{0\text{-}5}+l_{5\text{-}10}=2+3=5=l_{10},$$

$$\min\{l_2,l_6,l_{10}\}=l_2=l_6=3,$$

于是连接 v_1v_2，v_1v_6，并将 v_2、v_6 加入 S。

④ 与 $S=\{v_0,v_1,v_2,v_5,v_6\}$ 相邻接的点有 v_3、v_7、v_{10}、v_{11}，分别计算

$l_{0\text{-}1\text{-}2\text{-}3}=l_{0\text{-}1}+l_{1\text{-}2}+l_{2\text{-}3}=1+2+3=6=l_3$,

$\min\{l_6+l_{6\text{-}7},l_2+l_{2\text{-}7}\}=\{5,5\}=5=l_7$,

$l_{10}=l_{0\text{-}5}+l_{5\text{-}10}=2+3=5$,

$l_{11}=l_6+l_{6\text{-}11}=3+2=5$,

$\min\{l_3,l_7,l_{10},l_{11}\}=l_7=l_{10}=l_{11}=5$,

于是连接 v_6v_7，v_5v_{10}，v_6v_{11}，且将 v_7、v_{10}、v_{11} 加入 S。

⑤ 如此依次反复进行到所有顶点都连接起来，即等同于所有顶点都已进入 S，终止时所连接的路径即为 v_0 至各点的最短路径。结果如图 7-5 所示。

7.3.2 网络最大流问题

网络由节点和边组成。在网络中，边可以是有向的，也可以是无向的，对于有向边 (i,j)，i 是起点，j 是终点。

"流"就是将对象由一个地点送至另一个地点，如产品、信件、

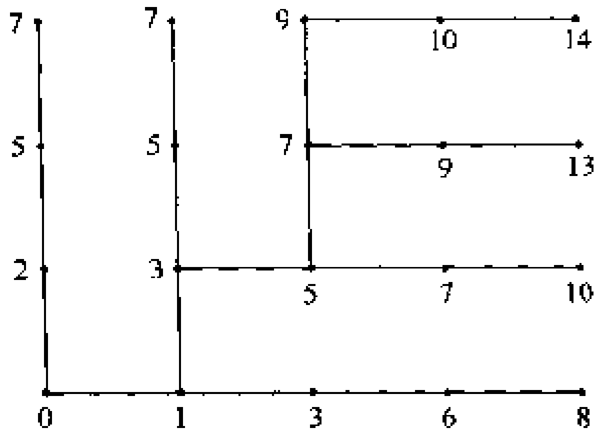

图 7-5　v_0 至各点的最短路径图

人员的运送及水库向需水地区输送水等。虽然流的形式不同，但有一个共同问题，即希望用已有的网络，从一个地点输送尽可能多的物资至另一地点，这即是最大流问题。求最大流问题的方法是逐步扩大的办法或增广图法。

【例 7-3】 从图 7-6 所表示的运输网络图中，求由出发点 v_0 至点 v_3 的最大流。图中边的权数为该路的最大通过量，称为容量。

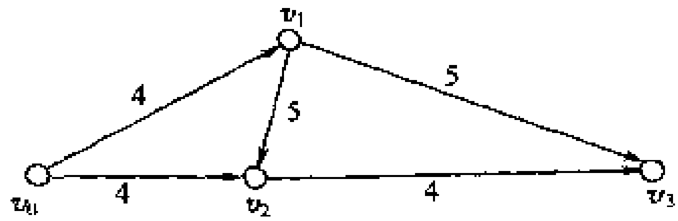

图 7-6　运输网络

解　先任意作一个可行的运输方案，在每条边的权数旁再作一个数字，表示在方案上这条边上的运输数量。如作初始方案为从 $v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_3$ 运送 4 个单位，标在图 7-7 上。

然后检查在现有方案基础上能否增加运量，若不能再增加，则现有方案即为最大流方案，否则，再在原方案基础上再增加运量，得一修改方案。接着检查修改方案能否增加运量，如此继续，直至得到最大流方案为止。

检查方法是：针对现有方案图画一张增广图，然后在增广图中任意找一条由出发点至终点的路，并在容量的范围内分配流量，叠

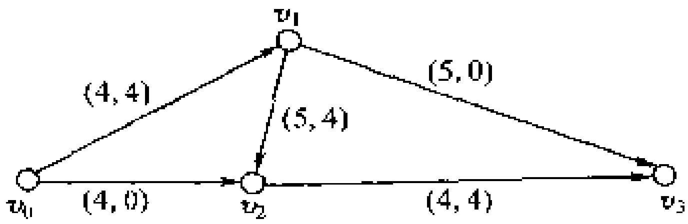

图 7-7　初始方案

加至原来的方案，得到增加了的流量修改方案，若增广图中已不存在由始点至终点的路，则原方案即为最大流方案。

增广图的画法如下。

① 凡是已分配有流量的边，均画一反向边，反向边的容量为现有方案中分配的流量数。

② 凡是分配的流量小于容量的边照常画，但容量改为它们的差（即容量减分配的流量），因此当分配的流量已达到通过能力的极限（即等于容量），该条边即可不画。

由此，得到图 7-6 的增广图 7-8，从中可找到 v_0 至 v_3 的路，如 $v_0 \to v_2 \to v_1 \to v_3$，能分配的流量当然只能取各边容量中最大者 4，即把图 7-9 叠加至图 7-8，得到一增加总流量的修改方案，标为图 7-10。针对图 7-10 再画增广图 7-11，已找不到由 v_0 至 v_3 的路，故图 7-10 所表示的方案即为最大流方案。

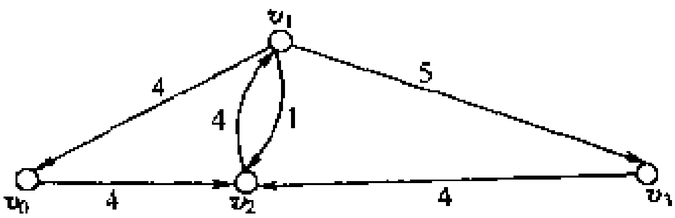

图 7-8　图 7-7 的增广图

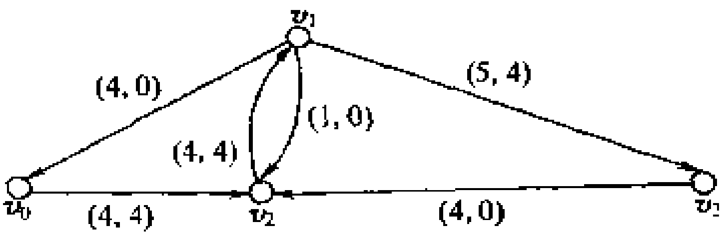

图 7-9　图 7-8 的增广图

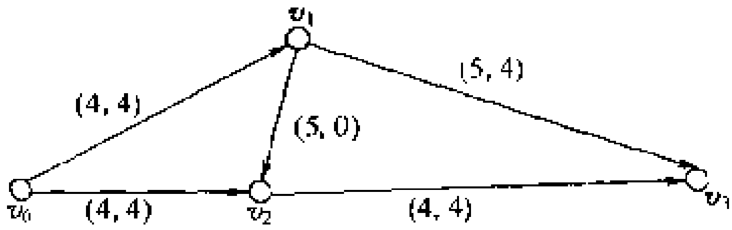

图 7-10　增加总流量的修改方案

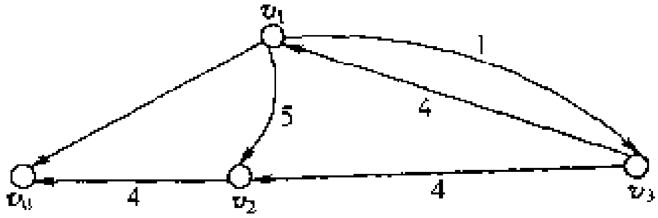

图 7-11　图 7-10 的增广图

7.3.3　管路铺设问题——求最小生成树问题

管路铺设问题就是要在管网中找出一棵树，而且要使权数总和尽量小，因此，管路铺设问题又称为最小生成树问题。解决这类问题的常用解法为破圈法。破圈法就是在所绘图中任意找出一个圈，然后把构成这个圈的权数最大的一条边去掉。如此继续，直到所剩的图中不存在圈为止，则所剩的图即为所求的最小生成树。下面通过一个实例来说明破圈法的解法。

【例 7-4】 设自来水公司要为四个新居民区供水，已知自来水公司和四个居民区的位置、可供铺设管线的地方及距离，选择管线总长度最短的铺设方案。

解　如图 7-12 所示，其中点 v_0 表示自来水公司，v_1，v_2，v_3，v_4 分别表示四个居民区，各条边分别表示可供铺设管线的位置，边上的数字（即权数）表示相应的距离。

首先，把权数最大为 10 的这条边去掉，然后逐步将较大的边去掉，最后得到所求的最小生成树见图 7-13～图 7-16。

7.3.4　运货汽车调度问题——网络优化问题

在汽车运输工作中，如果能合理组织行车路线，使里程利用率（重复驶行程/总行程）提高 1%，则每 4 辆运输车就可降低成本 30

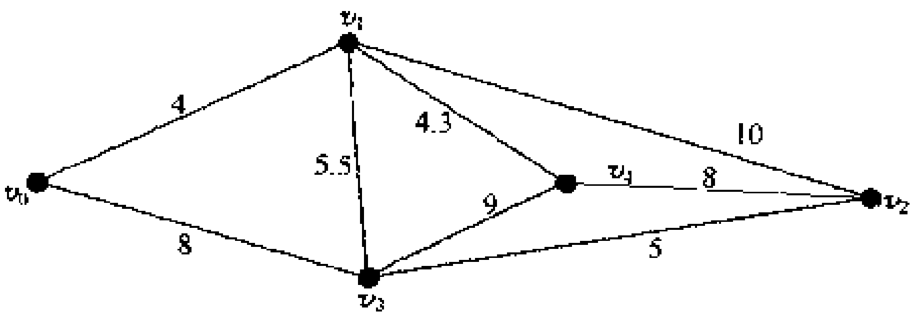

图 7-12　例 7-4 图（一）

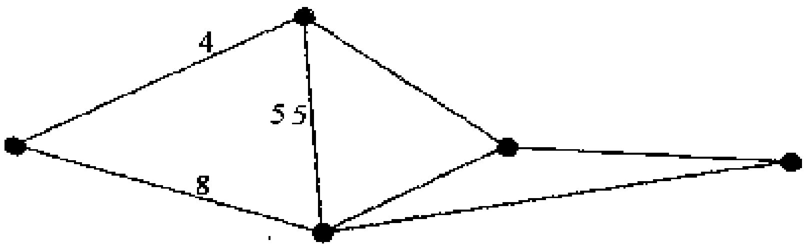

图 7-13　例 7-4 图（二）

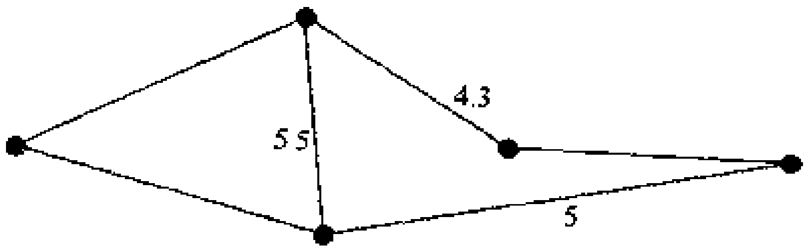

图 7-14　例 7-4 图（三）

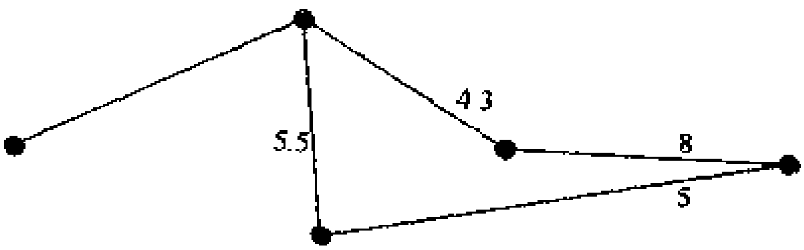

图 7-15　例 7-4 图（四）

万元。因此，合理调度运输汽车显得尤为重要。目前，我国的汽车运输业采用的调度方式为车队自行组织货源，统一调度后由本车队自行完成。

【例 7-5】 某车队有 n 项待运业务，设第 i 项业务的装货点到卸货点的最短路长为 d_i，运量为 w_i（不妨设 w_i 为整数，$i=1,2,\cdots,$

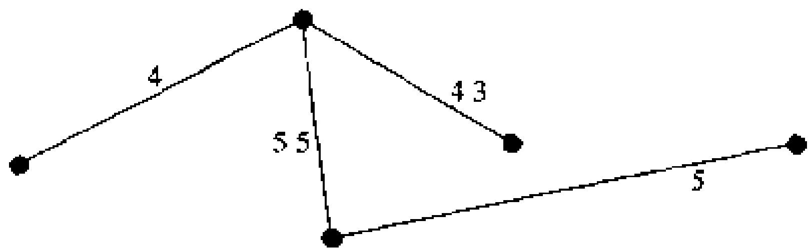

图 7-16 例 7-4 图（五）

n)。该车队的车场为 p，拥有 k 辆载重汽车，其载重量为 1，每辆汽车执行任务的路线是从车场出发，到第一个装货点装货，运送到第一个卸货点卸货后再到第二个装货点，直至最后一个卸货点返回车场的闭合回路，其中行程通常控制在 $[a,b]$ 之间。问应如何安排车辆并确定每辆车的行驶路线，使得在完成 n 项托运业务的前提下，总空驶行程最小（假设该车队有足够多的车辆完成这些业务）？

解 将该车辆调度问题转化为一个网络优化问题。

首先，构造 n 个节点的有向网络（图 7-17 表示 $n=3$ 的情形），构造方法如下。

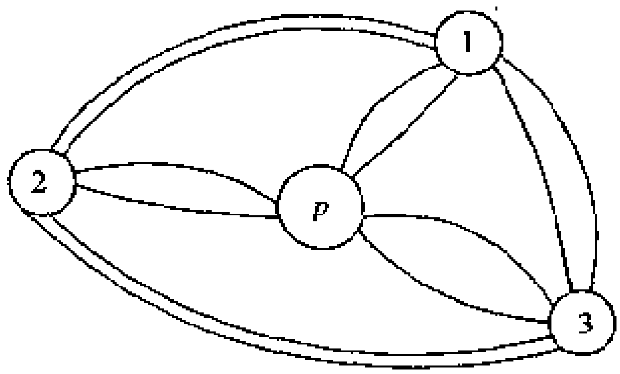

图 7-17 例 7-5 图

① 用 n 个节点①，②，…，ⓝ分别代表 n 项业务。

② 每个节点都有权 d_i（$i=1,2,\cdots,n$），d_i 表示第 i 项业务从装点到收点的最短路长。

③ 对任意 $i,j(i,j\leqslant n)$ 都有一条从节点ⓘ到节点ⓙ的有向弧，其权为 d_{ij}，表示第 i 项业务的卸点到第 j 项业务装点间的最短路长。

④ 用节点ⓟ表示车场，ⓟ与ⓘ和从ⓘ到ⓟ的弧，分别具有权 d_{pi} 和 d_{ip}，其中 d_{pi} 表示车场 p 到第 i 项业务装点间的最短路长，d_{ip} 表示第 i 项业务的卸点到车场 p 的最短路长。

这样，上述调度问题就变成在一个完全有向网络上寻求若干条由某点出发再返回该点的闭回路，满足如下三点。

① 每条回路上的弧权和点权之和介于 $[a,b]$ 之间。

② 所有回路经过 i 的次数为 w_i。

③ 所有回路上弧权的和达到最小。

具体求解的实例可以参考运筹学的有关章节。

7.4 网络计划技术

用网络分析的方法编制的计划称为网络计划，它是 20 世纪 50 年代末发展起来的一种编制大型工程进度计划的有效方法。1956 年，美国杜邦公司在制定企业不同业务部门的系统规划时，制定了第一套网络计划。这种计划借助于网络表示各项工作与所需要的时间及各项的相互关系，通过网络分析研究工程费用与工期的相互关系，并找出在编制计划时及计划执行过程中的关键路线，这种方法称为关键路线法（Critical Path Method），简称 CPM 法。这种方法的特点是：要求每项工作具有肯定的持续时间，各项工作之间有确定的、肯定的相互联系的逻辑关系。

通过关键路线分析可以帮助人们决定合理的工期，掌握好进度，也就是说在大量复杂的工序中，要事先分析出几条流水作业线，使整个工程完工有一个清晰的图景。

7.4.1 网络图及网络图的绘制

网络图是由节点、弧及权构成的有向图，又叫有向赋权图。节点表示一个事项（或事件），它是一个或若干个工序的开始或结束，是相邻工序在时间上的分界点。节点用圆圈和里面的数字表示，如①、②…弧表示一个工序，是指为了完成工程项目，在工艺技术和组织管理上相对独立的工作或活动。一个工程由若干个工序组成。

工序需要一定的人力、物力等资源和时间。弧用箭头“→”表示。权表示为完成某个工序所需的时间或资源等数据，通常标注在箭线下面或其他合适的地方。

网络图是网络分析技术的基础，其绘制一般可分为以下三个步骤。

① 任务分解　就是首先将一个工作系统根据需要分解为一定数目的子系统，然后再确定各个子系统之间的相互联系和相互制约的关系，即确定各子系统的紧前工序或是紧后工序。任务经过分析和分解以后，可以将工序的名称以及本工序与前后工序的联系编制成明细表。

② 作图　是按照任务分解明细表所标明的各项工序的先后次序，在相邻工序的交接处画上一个事项符号“○”表示相邻两个工序的衔接点，然后用箭线相连，就可绘出一个网络图。为正确反映工程中各个工序的相互关系，在绘制网络图时，应遵循以下规则。

a. 网络图是有向图，按照工序流程的顺序，规定工序从左向右排列，网络中各个节点都有一个时间，一般按各个节点的时间顺序编号。

b. 事项的序号，不能重复。

c. 相邻的两个节点之间只能有一条弧。

d. 不允许出现循环回路，如图 7-18 出现了循环回路，故作图错误。

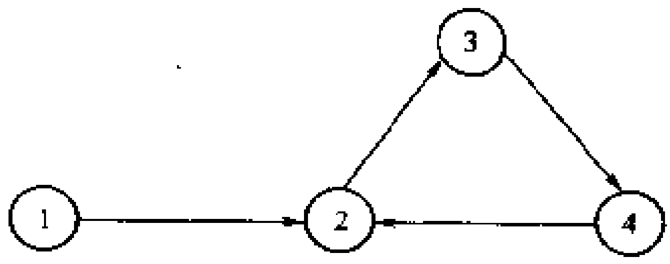

图 7-18　网络图

e. 任何一个箭线和它的相关事项只代表一项工序。

f. 为表示工程的开始和结束，网络图只有一个始点和一个终点。

g. 为了表示相邻工序之间的衔接关系，可引进并不存在的虚工序，它不需要人力、物力等资源和时间，用虚线箭头表示。

h. 对于较长时间才能完成的一些工序，在工艺流程与生产条件允许的情况下，可进行交叉作业。

i. 网络图可进行简化与合并，简化与合并只能用于开工事项与完工事项之间的部分，且简化部分的线路长即为被简化部分的关键路径长。

j. 网络图中，尽可能将关键路线布置在中心位置，并尽量将联系紧密的工作布置在相近的位置；为使网络图清楚和便于在图上填写有关的时间数据和其他数据，弧线尽量用水平线或具有一段水平的折线。

③ 编号　为了便于管理、控制和计算，网络图中的事项要统一进行编号。每个事项均应编排一个顺序号，由左向右，不许重复，一项工作的两个相关事项用箭线连接。简单的编号法可采用垂直编号法，即从始点开始，从左至右逐列编号，每列则自上而下从箭尾编起。在编号时，有时考虑到将来一个任务有可能分成几个，允许在编号时留有余号。

【例 7-6】 一项新产品的开发研究与市场化工作是一项系统工程，该产品的研发计划如表 7-2 所示，试编制该项工程的网络图。

表 7-2　产品研发计划

工作内容	工作标号	作业编号	紧前工作	工作所需时间
市场调查	A	1—2	—	6
产品研制	B	1—4	—	12
资金筹备	C	1—7	—	13
需求分析	D	2—3	A	3
产品设计	E	4—6	B	6
成本计划	F	3—5	D	4
生产计划	G	5—6	E	2

续表

工作内容	工作标号	作业编号	紧前工作	工作所需时间
设备计划	H	6—8	E、G	5
物资筹备	I	7—11	C、E、G	12
设备筹备	J	8—10	C、H	10
人员计划	K	8—9	C、H	9
设备布置	L	10—11	J	8
人员安排	M	9—11	K	4
生产	N	11—12	I、L、M	11

解 根据产品研发计划表绘制网络图如图 7-19 所示（注意在绘图中不同作业之间前后的逻辑关系）。

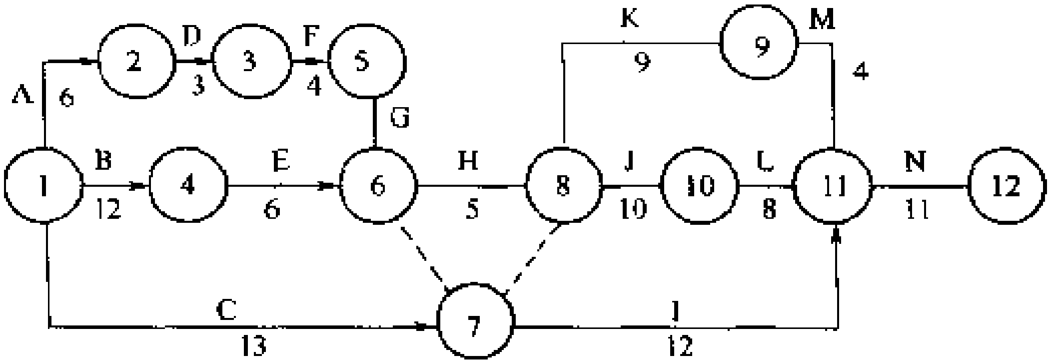

图 7-19 根据产品研发计划表绘制的网络图

7.4.2 网络图的时间参数计算

网络图的时间参数计算是网络分析的重要环节，通过时间参数的计算，可为编制网络计划、寻求关键线路和网络分析提供科学依据。

(1) 作业时间

作业时间也称工作时间，为完成一项工序所需要的时间，一般用 T_{ij} 表示。作业时间是编制网络计划的重要数据，直接关系到整个工程的工期，同时又是确定其他各项时间值的依据，其单位可以采用小时、日、周、月等，视工作性质而定。确定作业时间有以下两种方法。

① 一点时间估计法，即在具备劳动定额资料的条件下或在具

有类似工序的作业时间消耗的统计资料时，用分析对比的方法确定作业时间，并只给出一个时间值。

② 三点时间估计法，即在不具备劳动定额资料和类似工序的作业时间消耗的统计资料，且作业时间较长，未知的和难以估计的因素较多的条件下，对完成工序这时可采取预估出完成作业所需的最快、最慢和可能的三种时间，然后计算它们的平均时间作为该工序的作业时间。根据概率和数理统计的原理，按下面的公式计算该项作业完成时间的加权平均值，即

$$T_{ij}=\frac{a+4m+b}{6}$$

式中，T_{ij} 为加权平均作业时间；a 为最快可能完成的估计工时；b 为最慢可能完成的估计工时；m 为最大可能完成的估计工时。

【例 7-7】 有一任务，在一切条件顺利时最快可能 6 周完成，在最困难的情况下 14 周完成，估计最可能的情况是 7 周完成。试计算该项任务完成的时间。

解 根据题意有

$$T_{ij}=\frac{a+4m+b}{6}=\frac{6-4\times7+14}{6}=8$$

所以该任务估计完成的时间为 8 周。

这种估计方法用概率的观点来衡量，偏差是不可避免的，但是从总的趋势看，是有参考价值的。

(2) 事项的时间

① 事项的最早开始时间　若事项为某一工序或若干工序的箭尾事项时，事项的最早开始时间为各工序的最早可能开始时间；若事项为某一或若干工序的箭头事项时，事项的最早开始时间为各工序的最早可能结束时间。通常是按箭头事项计算事项最早开始时间，用 $T_E(j)$ 表示，它等于从始点事项起到本事项最长线路的时间长度。计算事项最早时间是从始点事项开始，自左向右逐个事项向前计算，直至最后一个事项（终点事项止）。箭头事项的最早开

始时间等于箭尾事项最早开始时间加上作业时间。当同时有两个或若干个箭线指向箭头事项时，选择各工序的箭尾事项最早开始时间与各自工序作业时间的最大值，即

$$T_E(1)=0$$

$$T_E(j)=\max\{T_E(i)+T(i,j)\}(j=2,3,\cdots,n)$$

式中，$T_E(j)$ 为箭头事项的最早开始时间；$T_E(i)$ 为箭尾事项的最早开始时间。

② 事项的最迟结束时间　事项的最迟结束时间即箭头事项各工序最迟必须完成的时间，或箭尾事项各工序的最迟必须开始的时间。通常按箭尾事项的最迟时间计算，自右向左反顺序进行，直到最前一个事项（始点事项）止，以 $T_L(i)$ 表示。当箭尾事项同时引出两个以上箭线，该箭尾事项的最迟结束时间必须同时满足这些工序的最迟必须开始时间，所以选择各工序的最迟必须开始时间的最小值，即

$$T_L(n)=T_E(n)$$

$$T_L(i)=\min\{T_L(j)-T(i,j)\}(i=n-1,\cdots,2,1)$$

式中，n 为终点事项；$T_L(i)$ 为箭尾事项的最迟结束时间；$T_L(j)$ 为箭头事项的最迟结束时间。

③ 事项的时差　一个事项的完工期可以推迟多少时间才不至于影响整个工程的完工期或下一个事项的最早可能开工期，这样的时间称为事项的时差。时差表明事项有多大的机动时间可以利用，时差越大，则时间潜力也越大，也就是说可以将该事项的资源暂时调去支援关键性的线路。关键性线路上的事项的时差为零，所以将时差为零的事项串联起来，就是所求的关键线路，事项的时差用 $S(1)$ 代表，计算的公式为

$$S(1)=T_L(1)-T_E(1)$$

式中，$T_L(1)$ 为事项的最迟结束时间；$T_E(1)$ 为事项的最早开始时间。

【例 7-8】 有一网络图的结构和 a、m、b 三时间工作如图 7-20 所示，试计算各事项的时间参数并求出关键线路。

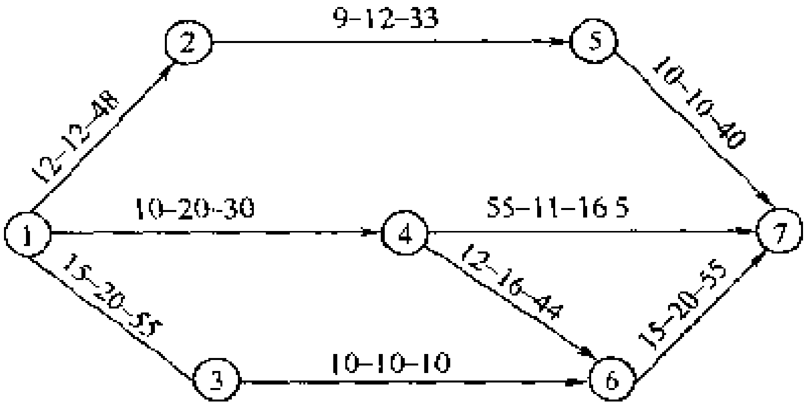

图 7-20　例 7-8 图（一）

解　先求出每道工序的平均工作时间，标注于图 7-21 箭线下面，已知各工序的工作时间后，即可进一步计算各事项的最早开始时间和最迟完成时间。

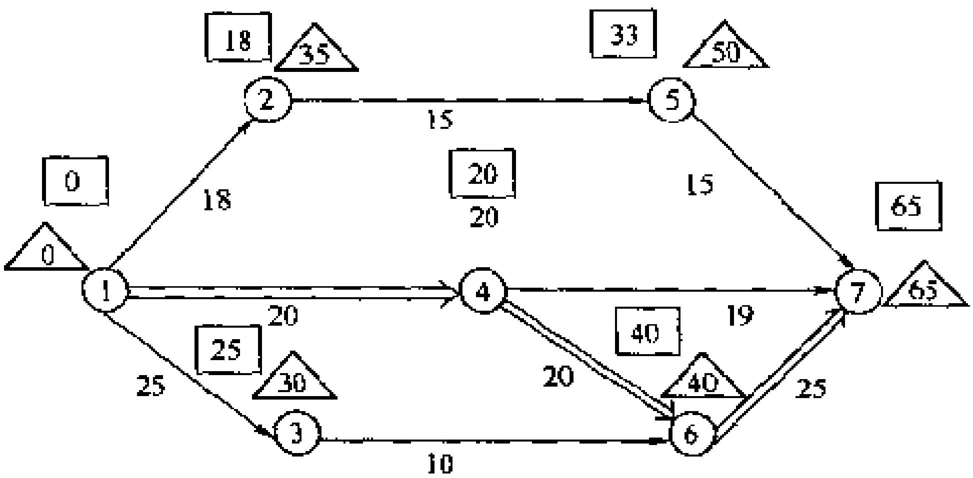

图 7-21　例 7-8 图（二）

① 求出每道工序的三点估计作业时间，标注在箭线下面。

$$T_{12}=\frac{12+4\times12+48}{6}=18$$

$$T_{25}=\frac{9+4\times12+33}{6}=15$$

$$T_{57}=\frac{10+4\times10+40}{6}=15$$

$$T_{13}=\frac{15+4\times20+55}{6}=25$$

$$T_{36}=\frac{10+4\times10+10}{6}=10$$

$$T_{67}=\frac{15+4\times20+55}{6}=25$$

$$T_{14}=\frac{10+4\times20+30}{6}=20$$

$$T_{47}=\frac{55+4\times11+16.5}{6}=19$$

$$T_{46}=\frac{12+4\times16+44}{6}=20$$

② 图中路线有多条，①是起点事项，⑦是终点事项，其中最长的一条路线为关键路线，即

①⟶④⟶⑥⟶⑦

③ 计算各事项的最早开始时间

$T_E(1)=0$

$T_E(2)=0+18=18$

$T_E(3)=0+25=25$

$T_E(4)=0+20=20$

$T_E(5)=18+15=33$

$T_E(6)=\max\{20+20,25+10\}=40$

$T_E(7)=\max\{20+11,33+15,40+25\}=65$

④ 计算各事项的最迟结束时间

$T_L(7)=65$

$T_L(6)=65-25=40$

$T_L(5)=65-15=50$

$T_L(4)=\min\{65-11,40-20\}=20$

$T_L(3)=40-10=30$

$T_L(2)=50-15=35$

$T_L(1)=\min\{35-8,20-20,30-25\}=0$

⑤ 计算各事项的时差

$S(1)=0$

$$S(2)=35-18=17$$
$$S(3)=30-25=5$$
$$S(4)=20-20=0$$
$$S(5)=50-35=15$$
$$S(6)=40-40=0$$
$$S(7)=65-65=0$$

⑥ 验证：关键路线也就是时差为零的路线。

(3) 工序的时间

① 工序最早开始时间　任何一个工序都必须在其紧前工序结束后才能开始。紧前工序最早结束时间即为工序最早可能开始时间，简称为工序的最早开始时间，用 $T_{ES}(i,j)$ 表示，它等于该工序箭尾事项的最早开始时间，即

$$T_{ES}(i,j)=T_E(i)$$

② 工序的最早结束时间　一个工序的最早可能结束时间简称为工序的最早结束时间，等于工序最早开始时间加上该工序的作业时间，用 $T_{EF}(i,j)$ 表示，即

$$T_{EF}(i,j)=T_{ES}(i,j)+T(i,j)=T_E(i)+T(i,j)$$

③ 工序的最迟结束时间　在不影响工程最早结束时间的条件下，工序最迟必须开始的时间，简称为工序最迟结束时间，等于工序的箭头事项的最迟时间，以 $T_{LF}(i,j)$ 表示，即

$$T_{LF}(i,j)=T_L(j)$$

④ 工序最迟开始时间　在不影响工程最早结束时间的条件下，工序最迟必须开始的时间，简称为工序最迟开始时间，等于工序的最迟结束时间减去工序的作业时间，以 $T_{LS}(i,j)$ 表示，即

$$T_{LS}(i,j)=T_{LF}(i,j)-T(i,j)$$

⑤ 工序的总时差与单时差　在不影响工程最早结束时间的条件下，工序最早开始（或结束）时间可以推迟的时间，称为该工序的总时差，用 $TF(i,j)$ 表示，即

$$TF(i,j)=T_{EF}(i,j)-T_{ES}(i,j)$$

或者

$$=T_{LF}(i,j)-T_{LS}(i,j)$$

工序总时差越大，表明该工序在整个网络中的机动时间越大，可以在一定范围内将该工序的人力、物力资源利用到关键工序上去，以达到缩短工程结束时间的目的。

在不影响紧后工序最早开始时间的条件下，工序最早结束时间可以推迟的时间，称为该工序的单时差，用 $FF(i,j)$ 表示，即

$$FF(i,j)=T_{ES}(j,k)-T_{EF}(i,j)$$

式中，$T_{ES}(j,k)$ 为工序 $i\rightarrow j$ 的紧后工序的最早开始时间。

(4) 关键路径确定的条件

总时差为零的工序，开始和结束的时间没有一点机动的余地，由这些工序所组成的路线就是网络中的关键路线，这些工序就是关键工序。用计算工序总时差的方法确定网络中的关键工序和关键路线是确定关键路线最常用的方法。在只要求确定关键路线时，可以用寻求最小树的原理和方法，只不过是求最大树，而不是求最小树。

在网络图中，有时出现多条关键路线，表明各个工序的工期都很紧张，必须加强管理、严格控制，以保证任务按期完成。

7.4.3 网络计划的平衡与优化

实际工作中，由于技术水平的高低、原料供应的优劣、管理的先进程度、生产过程组织的好坏等因素的影响，使计划的实现过程处于千变万化之中，如何适时进行工序间的调整与调度就是网络计划的平衡与优化问题。它实质上是一个经济效果问题，即在一定的时间周期条件下，使人力、物力、资金的安排与使用尽可能均衡，或在人力、物力、资金有限的情况下，实现占用时间最短的目标。下面介绍几种典型优化平衡的方法。

(1) 工期有限，力求资源量均衡

在网络参数已计算出来的基础上，通过充分利用各工序间的时间关系来实现人力（或资金）的均衡，使工程按正常节奏进行。

网络计划平衡优化的程序如下。

① 绘制网络图，计算网络参数，找出关键路线。

② 以关键线路为骨干，将各作业绘在带有坐标的进度表上。

③ 画出资源分布。

④ 调整，实现资源平衡，劳力调配合理。

【例 7-9】 以人力资源为例。图 7-22 所示的网络图已计算出关键路线为①—②—③—⑤—⑥，总工期为 11 天。箭杆上△中标注数字为工作每天所需人力数（假设所有工作都需要同一种专业工人），画出带日程的网络图及资源动态曲线，如图 7-23 所示（图中虚线为非关键工作的总时差）。

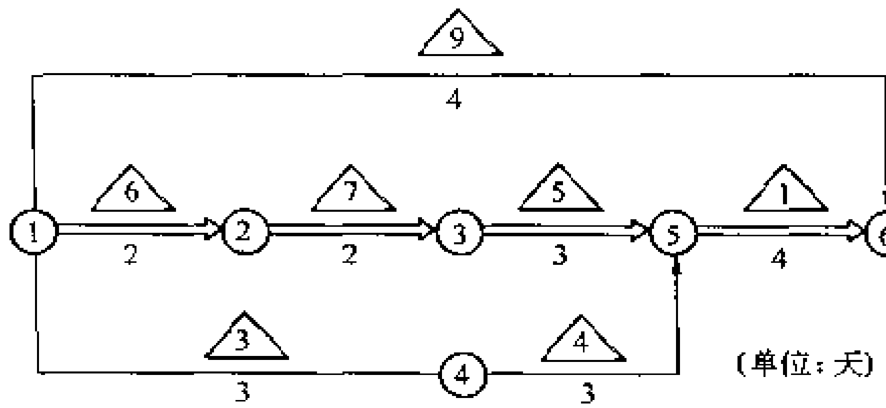

图 7-22 例 7-9 图（一）

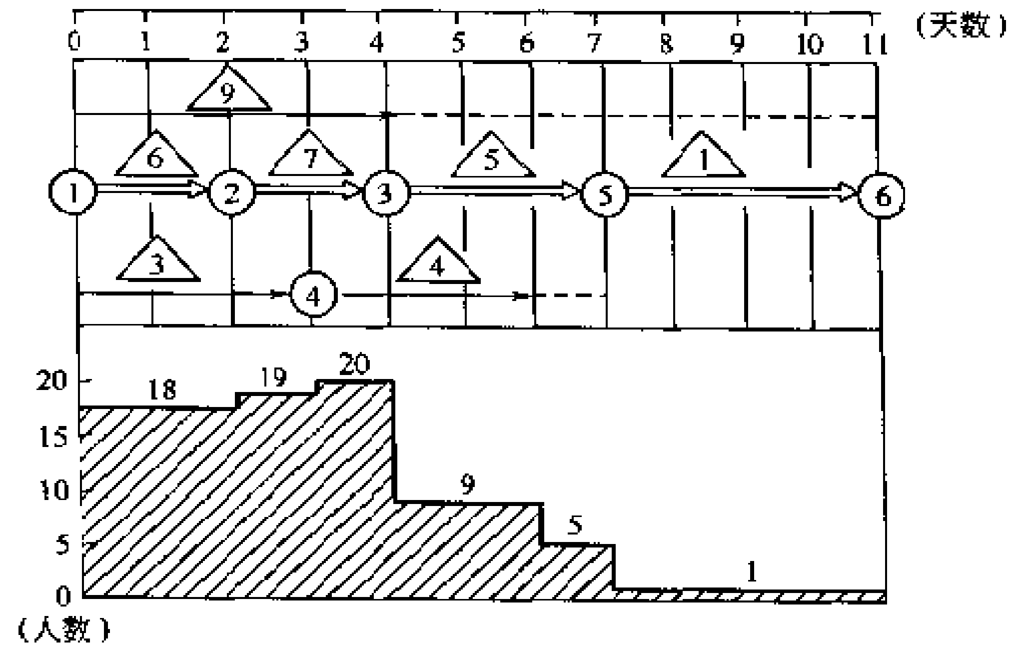

图 7-23 例 7-9 图（二）

由图可见，若按每道工作的最早开工时间安排，人力需求很不

均匀，最多者为20人/天，最少者为1人/天，这种安排即使在人力资源充足条件下也是很不经济的。现假设资源有限，每天可用人力为10人，下面进行计划调整，希望能不延迟总工期或尽量少延迟。

调整的基本原则如下。

① 尽量保证关键工作的日资源需求量。

② 利用非关键工作的时差错开各工作的使用资源时间。

③ 在技术章程允许条件下，可适当延长时差较大段工作者的工作时间或切断某些非关键工作，以减少日总需求量。

具体方法是按资源的日需求量所划分的时间段逐步从始点向终点进行调整，本例中，第一个时间段为 [0,2)，需求量为18人/天，在调整时要对本时间段内各工作按照总时差的递增顺序排队编号，如下所示。

工作 (1,2)，总时差 0，编为 1。

工作 (1,4)，总时差 1，编为 2。

工作 (1,6)，总时差 7，编为 3。

对编号小的优先满足资源需求量。当累计和超过10人时，未得到人力安排的工作应移入下一时间段. 本例中工作 (1,2) 与 (1,4) 人力日需求量为 9，而工作 (1,6) 需 9 人/天，所以应把 (1,6) 移出 (0,2) 时间段后开工，见图 7-24。

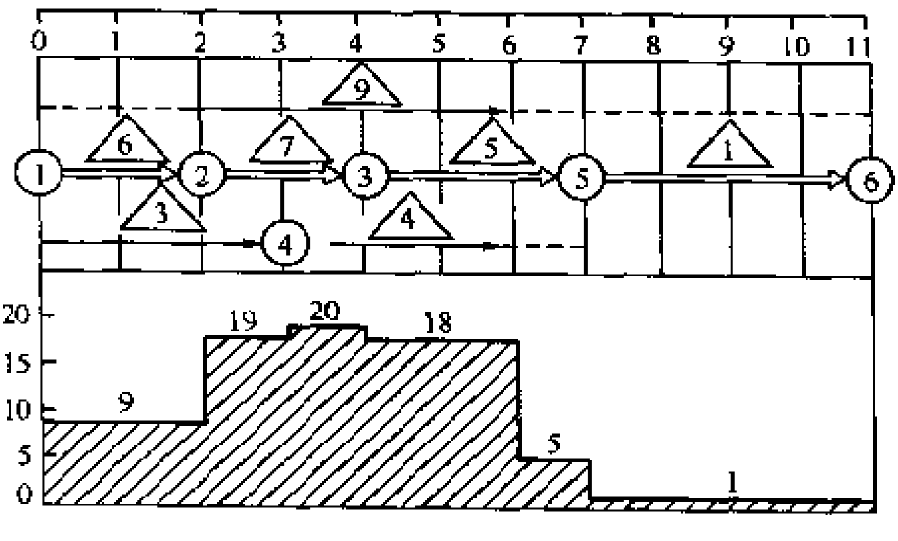

图 7-24 例 7-9 图（三）

接着调整（2,3）时间段。在编号时注意，如果已进行的非关键工作不允许中断，则编号要优先考虑，把它们按照新的总时差与最早开始时间之和的递增顺序排列，否则同第一段的编号规则。

本例中（1,4）为已进行中工作，假设不允许中断。而（2,3）为关键工作，（1,6）还有时差5天，则编号顺序为

工作（1,4），总时差1，编为1；

工作（2.3），总时差0，编为2；

工作（1,6），总时差5，编为3；

累加所需人力资源数，工作（1,4）与（2,3）共需10人/天，所以工作（1,6）要移出（2,3）时间段，调整结果见图7-25。以后各时间段作类似处理，经过几次调整，可得图7-26。此时人力日需求量已满足不超过10人的限制，总工期未受影响，必要时总工期可能会延迟。这种方法也可用于多种资源分配问题。

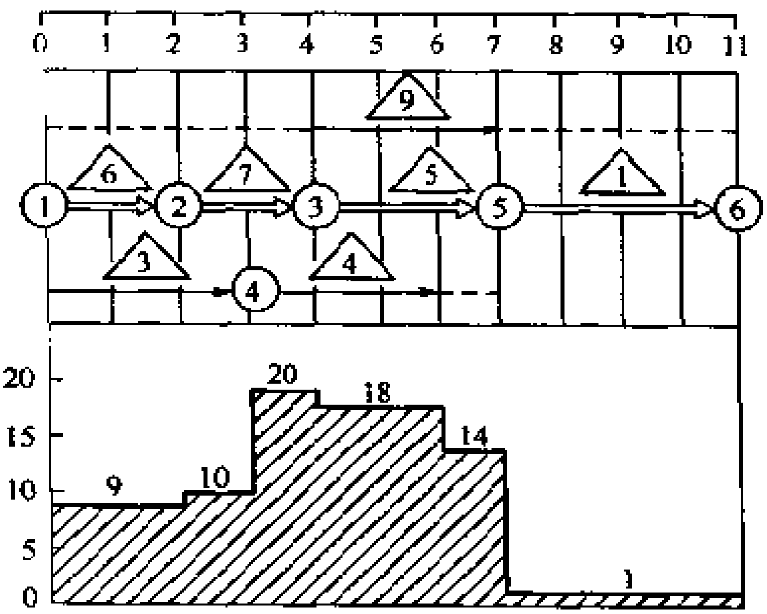

图7-25　例7-9图（四）

（2）资源有限力求最短工期完成施工

当各工序的资源（如人力、资金）一定时，力求最短工期的步骤如下。

① 根据网络计划按最迟开始时间绘出横道图，以便分析确定在各种情况下实际上会出现的工期最小延长时间。

② 从横道图根据按资源量变化所划分的时间区段绘制资源需求图，分别求出资源强度（单位时间内需要的资源量之和）。

③ 确定资源供应函数。

④ 分析供应量与需要量。

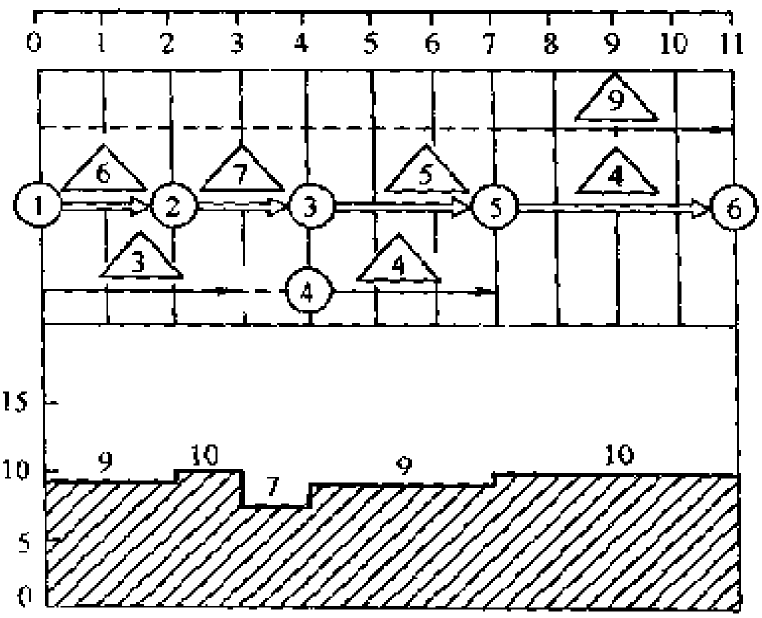

图 7-26　例 7-9 图（五）

（3）时间-费用优化（又称经济赶工法）

时间-费用优化主要是寻求相应于工程成本最低的最优工期或者是当原计划超过规定工期时，确定缩短哪些项目的作业时间最为经济，即经济赶工。

赶工的原则如下。

① 赶工必须是缩短关键线路上的作业时间，而且应在关键工序上选择成本斜率最小的工序来缩短时间。

② 关键线路缩短后，可能原来的非关键路线变成关键路线，需重新进行网络参数计算，找出新的关键路线。

③ 当有多条关键路线时，应优先考虑缩短它们的公共作业时间。

【例 7-10】 已知网络计划各工作的正常工时、特急工时及相应费用如表 7-3 所示，网络图如图 7-27 所示。

表 7-3 网络计划各工作的正常工时、特急工时及相应费用

工 作	正常工时		特急工时		成本斜率 /(元/天)
	时间/天	费用/元	时间/天	费用/元	
①→②	24	5 000	16	7 000	250
①→③	30	9 000	18	10 200	100
②→④	22	4 000	18	4 800	200
③→④	26	10 000	24	10 300	150
③→⑤	24	8 000	20	9 000	250
④→⑥	18	5 400	18	5 400	—
⑤→⑥	18	6 400	10	6 800	50

按正常工时从图 7-27 中计算出总工期为 74 天。关键路线为①—③—④—⑥，由表 7-3 可计算出正常工时情况下总直接费用为 47800 元。

设正常工时下，任务总间接费用为 18000 元，工期每缩短一天，间接费用可节省 330 元，求最低成本日程。

解 以图 7-26 所示的原始网络为基础，计算按下列步骤进行。

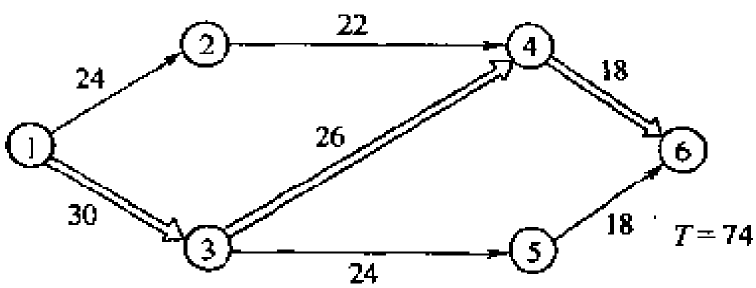

图 7-27 例 7-10 图 (一)

① 从关键工作中选出缩短工时所需直接费用最少的方案，并确定该方案可能缩短的天数。

② 按照工作的新工时，重新计算网络计划的关键路线及关键工作。

③ 计算由于缩短工时所增加的直接费用。

不断重复上述三个步骤，直到工期不能再缩短为止。

下面结合例子说明。

从图 7-27 看出，关键路线上的三道关键工作（1,3），（3,4），（4,6）中，工作（1,3）的成本斜率相比之下最小，应选择在工作（1,3）上缩短工时，查表 7-3 知，最多可缩短 12 天，即取工作（1,3）新工时为 30－12＝18 天。重新计算网络图时间参数，结果如图 7-28(a) 所示，关键路线为①—②—④—⑥，工期为 64 天，实际只缩短了 10 天。这意味着（1,3）工作没有必要减少 12 天，（1,3）工时应取 30－10＝20 天。重新计算，结果如图 7-28(b) 所示，总工期为 64 天，有两条关键路线：①—②—④—⑥与①—③—④—⑥。此次调整增加直接费用 10×100＝1000 元。

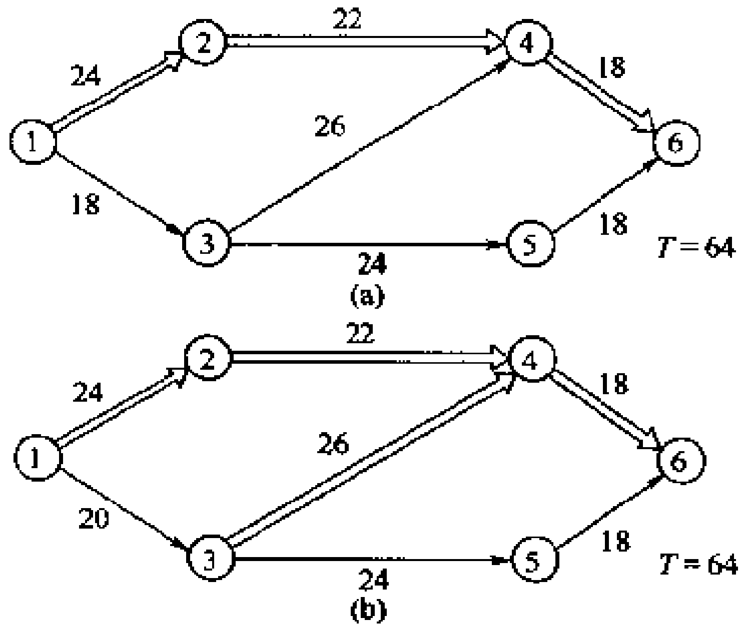

图 7-28　例 7-10 图（二）

重复步骤①、②、③，必须注意两条关键路线应同时缩短。有如下几个方案可选择。

① 在（1,3）与（1,2）上同时缩短一天，需费用 100＋250＝350 元。

② 在（1,3）与（2,4）上同时缩短一天，需费用 100＋200＝300 元。

③ 在（3,4）与（1,2）上同时缩短一天，需费用 150＋250＝400 元。

④ 在（3,4）与（2,4）上同时缩短一天，需费用 150＋200＝350 元。

取费用最小方案为方案②，（1,3）最多可缩短 2 天，（2,4）可缩短 4 天，取其中小者，即将（1,3）与（2,4）的工时分别改为 20－2＝18 天，22－2＝20 天。重新计算网络图时间参数，结果见图 7-29。总工期为 62 天，这时关键路线仍为 2 条：①—②—④—⑥与①—③—④—⑥。增加直接费用 2×300＝600 元。

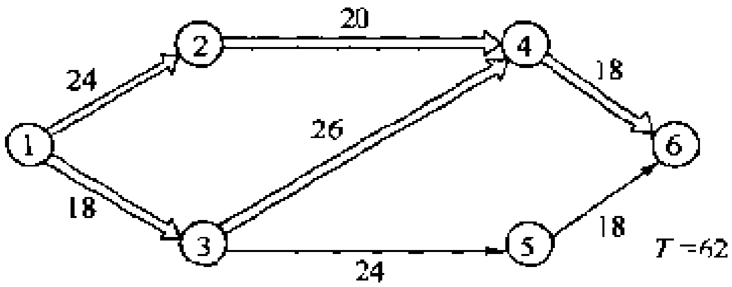

图 7-29　例 7-10 图（三）

第三次调整：选择费用最小的方案，在工作（2,4）与（3,4）上各缩短 2 天，即（2,4）与（3,4）的工时分别改为 20－2＝18 天，26－2＝24 天，重新计算网络图时间参数，结果见图 7-30。总工期为 60 天，关键路线为①—②—④—⑥，①—③—④—⑥和①—③—⑤—⑥，所增加的直接费用为 2×350＝700 元。

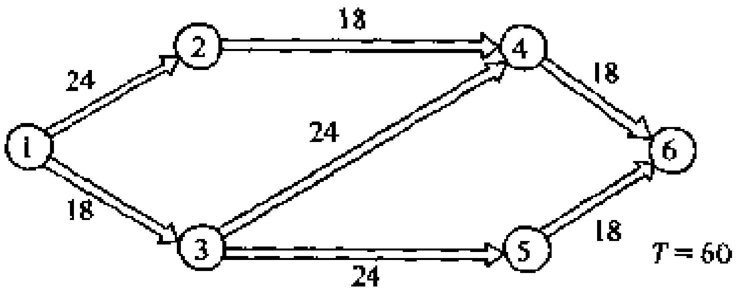

图 7-30　例 7-10 图（四）

由于一条关键路线①—②—④—⑥上各工作工时已不能缩短，计算结束。

全部计算过程及相应费用变化也可以列表表示。由表中可见，最低成本日程为 62 天，总成本为 63 440 元。

习　　题

1. 如图 7-31 所示，v_1 为水源，v_2、v_3、…、v_{12} 为若干居民点和工业区。现要从水源铺设管道，把水引到各个供水点，要求水源与各点相通，试确定各供水点到水源间路径最短。

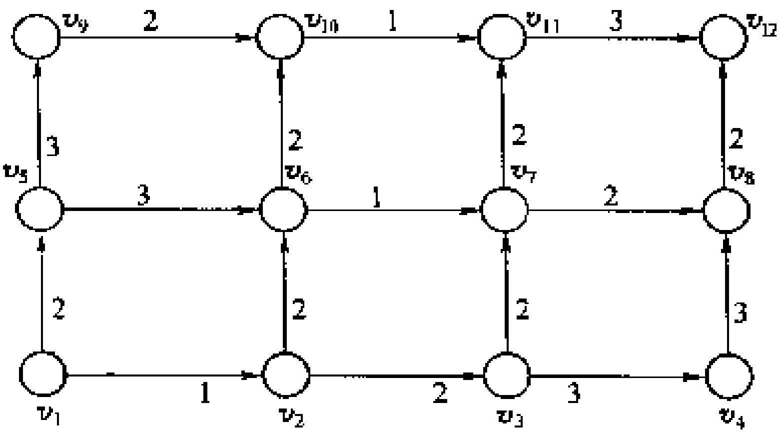

图 7-31　题 1 图

2. 用破圈法求下列图 7-32(a)、(b) 中的最小生成树。

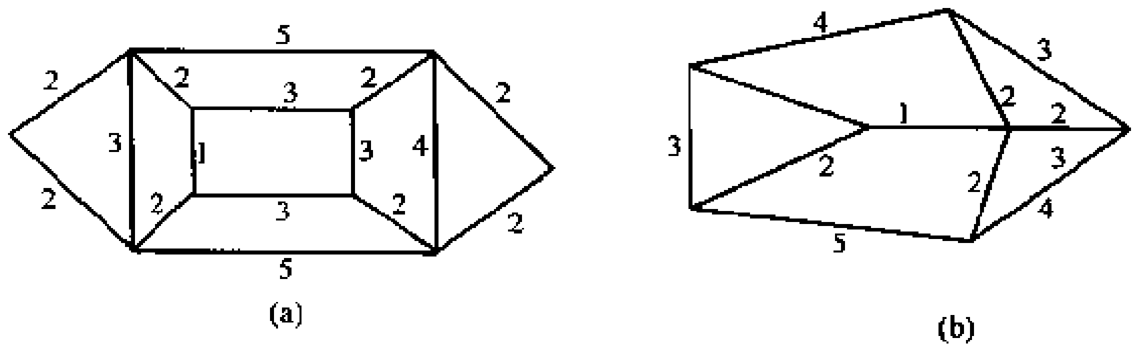

图 7-32　题 2 图

3. 已知世界六大城市 A、B、C、D、E、F，试在由表 7-4 所示的交通网络的数据中确定最小生成树。

4. 某工厂内连接 6 个车间的道路网络图如图 7-33 所示。已知每条道路的长，要求沿道路架设连接 6 个车间的电话线网，使电话线的总长最小。（提示：用破圈法求解）

表 7-4　交通网络数据

项　目	A	B	C	D	E	F
A	×	13	51	77	68	50
B	13	×	60	70	67	59
C	51	60	×	57	36	2
D	77	70	57	×	20	55
E	68	67	36	20	×	34
F	50	59	2	55	34	×

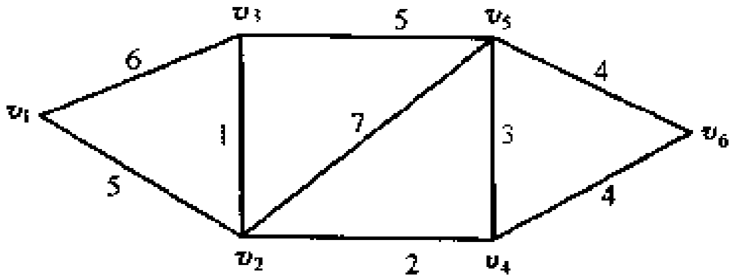

图 7-33　题 4 图

5. 求图 7-34 所示的网络最大流。

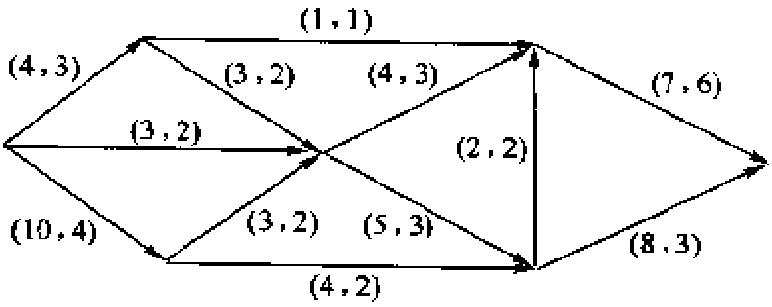

图 7-34　题 5 图

6. 已知资料如表 7-5 所示。

(1) 绘制网络图。

(2) 计算各项时间参数。

(3) 确定关键路线。

表 7-5　题 6 表

工序	紧前工序	工序时间	工序	紧前工序	工序时间
a	—	60	j	d,g	10
b	a	14	k	h	25
c	a	20	l	j,k	10
d	a	30	m	j,k	5
e	a	21	n	i,l	15
f	a	10	o	n	2
g	b,c	7	p	m	7
h	e,f	12	q	o,p	5
i	f	60			

参 考 文 献

1 苏金明等. MATLAB 工具箱应用. 北京：电子工业出版社，2004

2 苏金明等. MATLAB6.1 实用指南. 北京：电子工业出版社，2002

3 王沫然. MATLAB 与科学计算. 北京：电子工业出版社，2003

4 张瑞丰. 精通 MATLAB6.5. 北京：中国水利水电出版社，2004

5 飞思科技产品研发中心. MATLAB6.5 辅助优化计算与设计. 北京：电子工业出版社，2003

6 钟海燕等. 线性代数与最优化方法. 广州：广东高等教育出版社，2001

7 施光燕，董加礼. 最优化方法. 北京：高等教育出版社，1999

8 韦鹤平. 环境系统工程. 上海：同济大学出版社，1993

9 《运筹学》教材编写组. 运筹学. 修订版. 北京：清华大学出版社，1990

10 范鸣玉，张莹. 最优化技术基础. 北京：清华大学出版社，1982

11 谢胜智等. 最优规划与统筹方法（经济应用数学 4）. 成都：四川科学技术出版社，1988