第7讲 贪心策略

汪小林

北京大学 信息科学技术学院

贪心法（Greedy Approach）

1. 贪心法的设计思想
2. 贪心法的正确性证明
3. 对贪心法得不到最优解情况的处理
4. 贪心法的典型应用
   - 最优前缀码
   - 最小生成树
   - 单源最短路径

1、贪心法的设计思想

活动选择问题

输入：$S=\{1, 2, \ldots, n\}$为n 项活动的集合，s_i, f_i 分别为活动 i 的开始和结束时间，活动 i 与 j 相容 $\Leftrightarrow$ $s_i \geq f_j$ 或 $s_j \geq f_i$.

求：最大的两两相容的活动集 A

实例

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	1	3	2	5	4	5	6	8	8	2
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	13

策略1：排序使得 $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$，从前向后挑选

策略2：排序使得 $f_1 - s_1 \leq f_2 - s_2 \leq \ldots \leq f_n - s_n$，从前向后挑选

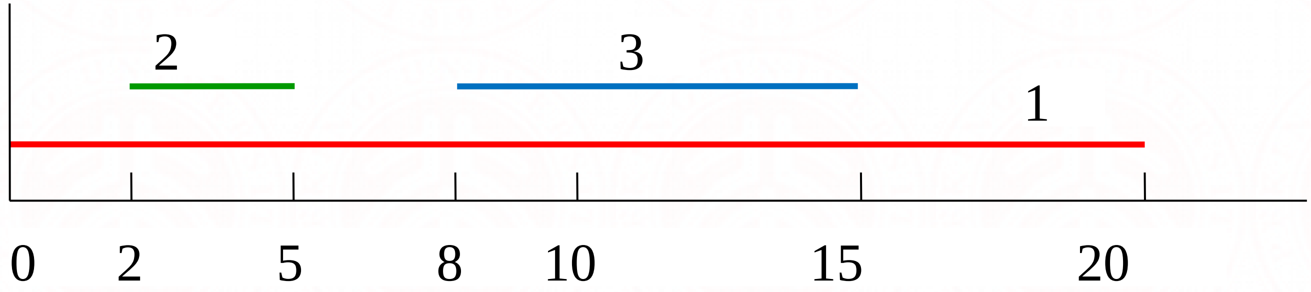
策略3：排序使得 $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$，从前向后挑选

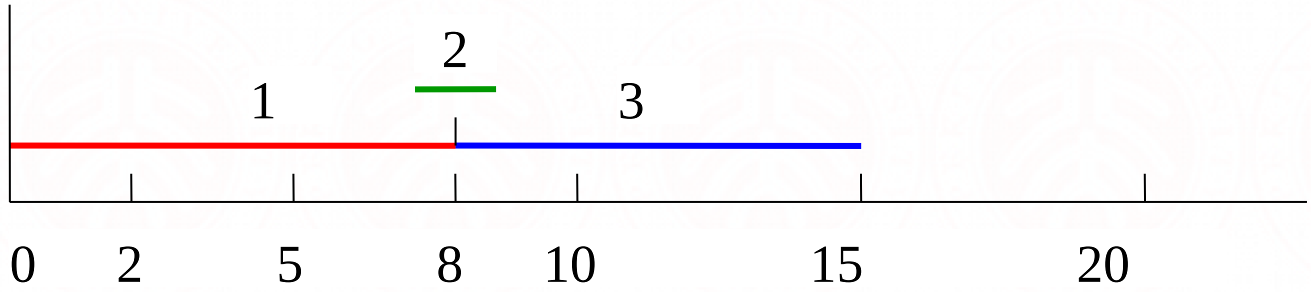
以上策略中的挑选都要注意满足相容性条件

两个反例

策略1： $S=\{1,2,3\}$，$s_1=0$, $f_1=20$, $s_2=2$, $f_2=5$, $s_3=8$, $f_3=15$

策略2： $S=\{1,2,3\}$，$s_1=0$, $f_1=8$, $s_2=7$, $f_2=9$, $s_3=8$, $f_3=15$





贪心算法

算法4.1 Greedy Select

输入：活动集S，s_i，f_i，i=1,2,…,n，且 $f_1 \le \ldots \le f_n$

输出：$A \subseteq S$，选中的活动子集

1. $n \leftarrow length[S]$ // 活动个数

2. $A \leftarrow \{1\}$

3. $j \leftarrow 1$ //已选入的最后一个活动的标号

4. for $i \leftarrow 2$ to n do

5. if $s_i \ge f_j$ //判断相容性

6. then $A \leftarrow A \cup \{i\}$

7. $j \leftarrow i$

8. return A

最后完成时间 $t = \max\{ f_k : k \in A \}$

算法运行实例

输入：S={1, 2, … , 10}

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

解：A = {1, 4, 8}，t =11

时间复杂度：排序+活动选择=$O(n\log n)+O(n)=O(n\log n)$

问题：如何证明该算法对所有的实例都能得到正确的解？

算法的正确性证明

定理4.1 算法Select 执行到第 k 步, 选择 k 项活动 $i_1 = 1, i_2, \ldots, i_k$, 那么存在最优解 A 包含 $i_1=1, i_2, \ldots, i_k$.

根据定理：算法至多到第 n 步得到最优解

证：$S=\{1, 2, \ldots, n\}$是活动集，且 $f_1 \le \ldots \le f_n$

归纳基础：$k=1$, 证明存在最优解包含活动1

任取最优解A, A中的活动按截止时间递增排列. 如果A的第一个活动为j，$j \neq 1$, 令

$$A' = (A - \{j\}) \cup \{1\},$$

由于 $f_1 \le f_j$, A'也是最优解，且含有1.

算法正确性证明（续）

归纳步骤：假设命题对 k 为真, 证明对 k+1 也为真.

算法执行到第 k 步, 选择了活动 $i_1=1, i_2, \ldots, i_k$, 根据归纳假设存在最优解 A 包含 $i_1= 1, i_2, \ldots , i_k$,
A中剩下的活动选自集合 $S'=\{ i \mid i\in S, s_i \geq f_{ik}\}$, 且

$$A = \{ i_1, i_2, \ldots , i_k \}\cup B$$

其中B是S'的最优解. （若不然, S'的最优解为B^*, B^*的活动比 B多，那么$B^*\cup\{1, i_2, \ldots , i_k\}$是 S 的最优解，且比 A的活动多,与 A 的最优性矛盾.）
根据归纳基础，存在 S'的最优解B'含有S'中的第一个活动，即i_{k+1}, 且$|B'|=|B|$, 于是

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}\cup B' = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}\}\cup(B'-\{i_{k+1}\})$$

也是原问题的最优解.

贪心算法的特点

设计要素：

(1)贪心法适用于组合优化问题.

(2)求解过程是多步判断过程，最终的判断序列对应于问题的最优解.

(3)判断依据某种“短视的”贪心选择性质，性质的好坏决定了算法的成败.

(4)贪心法必须进行正确性证明

贪心法的优势：

算法简单，时间和空间复杂性低

2、贪心法的正确性证明

数学归纳法

1. 叙述一个描述算法正确性的命题$P(n)$，n为算法步数或者问题规模
2. 归纳基础：$P(1)$ 或 $P(n_0)$为真，n_0为某个自然数
3. 归纳步骤：$P(k) \Rightarrow P(k+1)$　　第一数学归纳法
   $\forall k(k<n)P(k) \Rightarrow P(n)$　　第二数学归纳法

交换论证

1. 分析算法的解的结构特征
2. 从一个最优解逐步进行结构变换(替换成分、交换次序等)得到一个新的解（结构上与贪心算法的解更接近）
3. 证明：上述变换最终得到算法的解，且变换在有限步结束，每步变换都保持解的最优性不降低.

最优装载 Loading

例4.2 最优装载

n 个集装箱1, 2, …, n 装上轮船，集装箱 i 的重量 w_i, 轮船装载重量限制为C， 无体积限制. 问如何装使得上船的集装箱最多？不妨设 $w_i \leq c$.

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq C$$

$$x_i = 0,1 \quad i = 1,2,\ldots,n$$

贪心法：将集装箱按照从轻到重排序，轻者先装

正确性证明

定理4.2 对装载问题任何规模为k 的输入，算法得到最优解.

证明法 对问题规模归纳. 设集装箱从轻到重记为1, 2, … , k.

证： k=1, 只有1个箱子，算法显然正确.

假设对于 k 个集装箱的输入，贪心法都可以得到最优解，考虑 输入 $N = \{1, 2, \ldots, k+1\}$, 其中 $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_{k+1}$.

由归纳假设，对于$N' = \{2,3,\ldots,k+1\}$，$C' = C-w_1$, 贪心法 得到最优解 I'. 令 $I = \{1\} \cup I'$，则 I (算法解)是关于 N 的最优解.

若不然，存在包含 1 的关于 N 的最优解 I^*（<u>如果 I^* 中没有1, 用 1 替换 I^* 中的第一个元素得到的解也是最优解</u>），且$|I^*| > |I|$； 那么 $I^* - \{1\}$是关于 N' 和C'的解且

$$|I^* - \{1\}| > |I - \{1\}| = |I'|$$

与 I' 的最优性矛盾.

最小延迟调度

例4.3 最小延迟调度

给定客户集合A，$\forall i\in A$，t_i为服务时间，d_i为完成时间，t_i, d_i为正整数. 一个调度是函数 $f: A\to \mathrm{N}$，$f(i)$为客户 i 的开始时间. 求最大延迟达到最小的调度，即求 f 使得

$$\min_f\{\max_{i\in A}\{f(i)+t_i-d_i\}\}$$

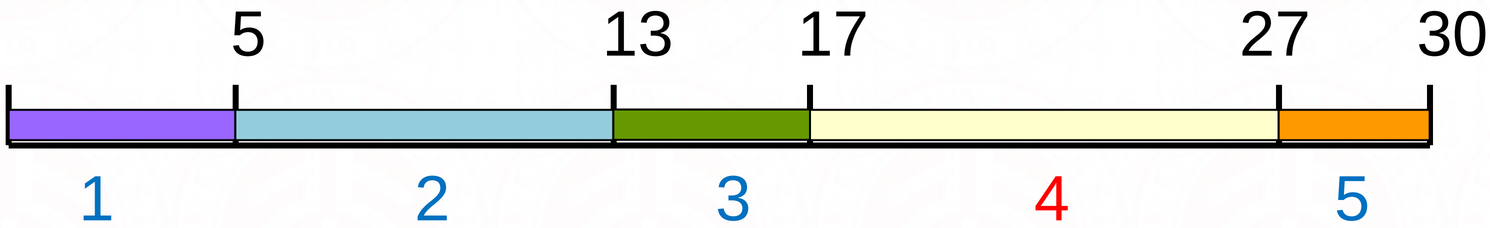
$$\forall i, j\in A, i\neq j, f(i)+t_i\leq f(j) \text{ or } f(j)+t_j\leq f(i)$$

实例

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T=<5, 8, 4, 10, 3>$, $D=<10, 12, 15, 11, 20>$

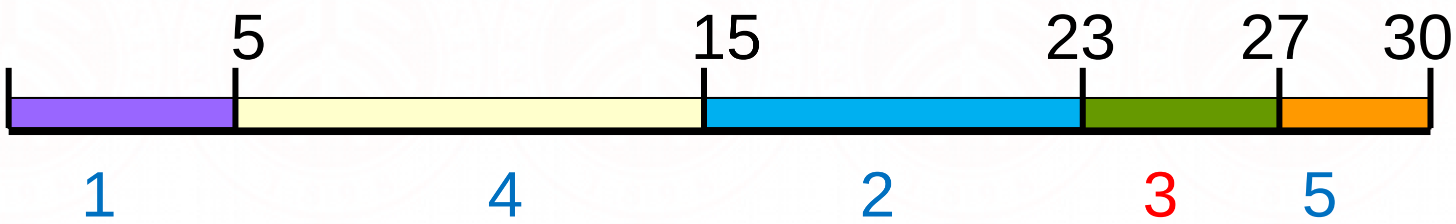
调度1： $f_1(1)=0$, $f_1(2)=5$, $f_1(3)=13$, $f_1(4)=17$, $f_1(5)=27$

各任务延迟：0, 1, 2, **16**, 10； 最大延迟：16



调度2： $f_2(1)=0$, $f_2(2)=15$, $f_2(3)=23$, $f_2(4)=5$, $f_2(5)=27$

各任务延迟：0, 11, **12**, 4, 10；最大延迟：12



贪心策略选择

贪心策略1：按照 t_i 从小到大安排任务

贪心策略2：按照 $d_i - t_i$ 从小到大安排任务

贪心策略3：按照 d_i 从小到大安排任务

策略1 对某些实例得不到最优解.

反例：$t_1=1, d_1=100, t_2=10, d_2=10$

策略2 对某些实例得不到最优解.

反例：$t_1=1, d_1=2, t_2=10, d_2=10$

算法设计

算法4.3 Schedule

输入：A, T, D

输出：f

1. 排序A使得 $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$
2. $f(1) \leftarrow 0$
3. $i \leftarrow 2$
3. while $i \le n$ do
4. $\quad f(i) \leftarrow f(i-1) + t_{i-1}$ //任务i-1结束时刻是任务i开始时刻
5. $\quad i \leftarrow i+1$

设计思想：按完成时间从早到晚安排任务，没有空闲

交换论证：正确性证明

算法的解的性质：

(1) 没有空闲时间，没有逆序.

(2) 逆序 (i, j): $f(i) < f(j)$ 且 $d_i > d_j$

引理4.1 所有没有逆序、没有空闲时间的调度具有相同的最大延迟.

证： 设 f 没有逆序，在 f 中具有相同完成时间的客户 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 必被连续安排. 在这 k 个客户中最大延迟是最后一个客户，被延迟的时间是

$$t_0 + \sum_{j=1}^{k} t_{i_j} - d$$

与 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 的排列次序无关.

交换论证

证明思想：从一个没有空闲时间的最优解出发，在不改变最优性的条件下，转变成没有逆序的解. 根据引理 1，这个解和算法的解具有相同的最大延迟.

证明要点

(1) 相邻逆序的存在性：如果一个最优调度存在逆序，那么存在 $i < n$ 使得 $(i, i+1)$ 构成一个逆序.

(2) 交换相邻的逆序 i 和 j，得到的解的调度仍旧最优.

(3) 每次交换后逆序数减1，至多经过 $n(n-1)/2$ 次交换得到一个没有逆序的最优调度.

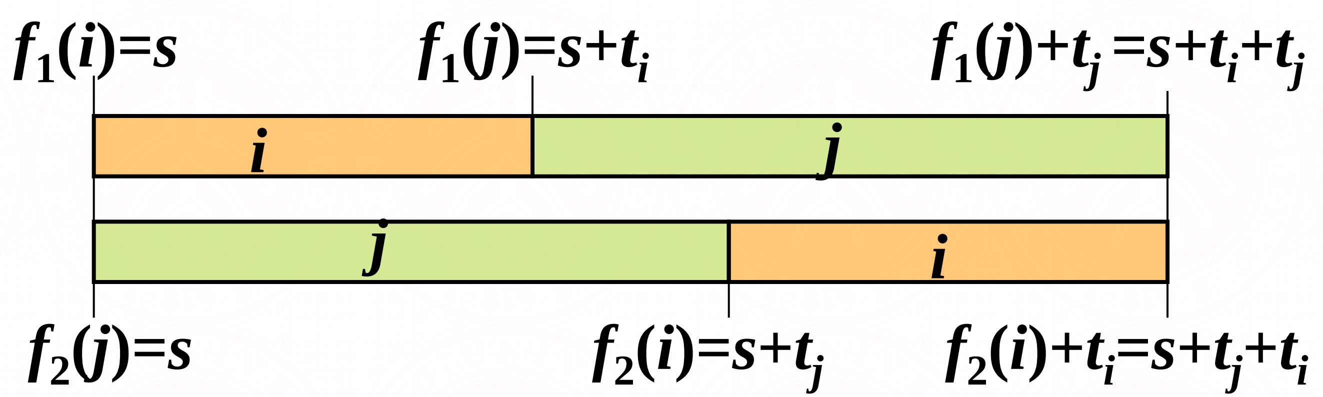
定理4.3 在一个没有空闲时间的最优解中，最大延迟是r，如果仅对具有相邻逆序的任务进行交换，得到的解的最大延迟不会超过r。

交换相邻逆序 (i, j)不影响最优性

(1) 交换 i, j 对其他客户的延迟时间没影响

(2) 交换后不增加 j 的延迟

(3) i 在 f' 的延迟delay(f',i)小于 j 在 f 的延迟 delay(f,j), 因此小于f 的最大延迟 r



delay(f',i)$=s+t_j+t_i-d_i<$delya(f,j)$\leq r$

delay(f, j)$=s+t_i+t_j-d_j$

$$\boxed{d_j < d_i \Rightarrow L_{2i} < L_{1j}}$$

3、得不到最优解的处理方法

讨论对于哪些输入贪心法能得到最优解：输入条件

讨论贪心法的解最坏情况下与最优解的误差（见第8章）

例4.4 找零钱问题

设有 n 种零钱， 重量分别为$w_1, w_2, \ldots, w_n$, 价值分别为 $v_1=1, v_2, \ldots, v_n$. 需要付的总钱数是 Y.不妨设币值和钱数都为正整数. 问：如何付钱使得所付钱的总重最轻?

令选用第 i 种硬币的数目是 x_i，$i=1,2,\ldots,n$

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = Y, \quad x_i \in \mathrm{N}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

动态规划算法

属于整数规划问题，动态规划算法可以得到最优解

设 $F_k(y)$ 表示用前 k 种零钱，总钱数为 y 的最小重量

递推方程

$$F_{k+1}(y) = \min_{0 \le x_{k+1} \le \left\lfloor \frac{y}{v_{k+1}} \right\rfloor} \{F_k(y - v_{k+1}x_{k+1}) + w_{k+1}x_{k+1}\}$$

$$F_1(y) = w_1 \left\lfloor \frac{y}{v_1} \right\rfloor = w_1 y$$

$$k = 2,\ldots,n, \quad y = 0,1,\ldots,Y$$

Greedy算法

假设 $\frac{w_1}{v_1} \geq \frac{w_2}{v_2} \geq \ldots \geq \frac{w_n}{v_n}$

使用前 k 种零钱，总钱数为 y
贪心法的总重为 $G_k(y)$，则有如下递推方程

$$G_{k+1}(y) = w_{k+1}\left\lfloor \frac{y}{v_{k+1}} \right\rfloor + G_k(y \bmod v_{k+1}) \quad k > 1$$

$$G_1(y) = w_1\left\lfloor \frac{y}{v_1} \right\rfloor = w_1 y$$

n=1, 2 贪心法得到最优解

n = 1 只有一种零钱，$F_1(y) = G_1(y)$， $F_2(y) = G_2(y)$

n = 2, 使用价值大的钱越多(x_2越大)，得到的解越好

$$\boxed{F_2(y) = \min_{0 \le x_2 \le \lfloor y/v_2 \rfloor} \{F_1(y - v_2 x_2) + w_2 x_2\}}$$

$$\begin{aligned}
&[F_1(y - v_2 x_2) + w_2 x_2] \\
&-[F_1(y - v_2(x_2 + \delta)) + w_2(x_2 + \delta)] \\
=&[w_1(y - v_2 x_2) + w_2 x_2] \\
&-[w_1(y - v_2 x_2 - v_2\delta) + w_2 x_2 + w_2\delta] \\
=&-w_1 v_2 \delta + w_2 \delta = \delta(-w_1 v_2 + w_2) \ge 0
\end{aligned}$$

$n>2$得到最优解的判定条件

定理4.5 对每个正整数 k，假设对所有非负整数 y 有$G_k(y)=F_k(y)$，那么 $G_{k+1}(y)\le G_k(y) \Leftrightarrow F_{k+1}(y)=G_{k+1}(y)$

定理4.6 对每个正整数k，假设对所有非负整数 y 有$G_k(y)=F_k(y)$ 且存在 p 和 δ 满足

$$v_{k+1}=pv_k-\delta,\ 其中0\le\delta<v_k，p为正整数，$$

则下面的命题等价：

(1) $G_{k+1}(y)=F_{k+1}(y)$ 对一切正整数y；

(2) $G_{k+1}(pv_k)=F_{k+1}(pv_k)$；

(3) $w_{k+1}+G_k(\delta)\le pw_k$.

条件(3)需 $O(k)$ 时间验证 $G_{k+1}(y)=F_{k+1}(y)$，整个验证时间$O(n^2)$

定理4.6证明

- (1) => (2) 只需令 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}$
- (2) => (3) 额外限制条件($\delta < \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}+1}$)下
  - $G_{k+1}(px_k) = G_{k+1}(x_{k+1} + \delta) = w_{k+1} + G_{k+1}(\delta)$
  - $G_{k+1}(\delta) = G_k(\delta)$ for $\delta < x_{k+1}$
  - $F_{k+1}(px_k) \leq F_k(px_k) = G_k(px_k) = pw_k$
  - $\therefore\ w_{k+1} + G_k(\delta) = G_{k+1}(px_k) = F_{k+1}(px_k) \leq pw_k$
- (3) => (1) 根据$G_{k+1}(y) \leq G_k(y) \leftrightarrow F_{k+1}(y) = F_k(y)$反正
  - 假设存在y^*是满足$G_{k+1}(y) > G_k(y)$最小的值，自然有$y^* \geq x_{k+1}$
  - $w_{k+1} + G_k(\delta) + G_{k+1}\,(y^* - x_{k+1}) = G_k(\delta) + G_{k+1}\,(y^*) > G_k(\delta) + G_k\,(y^*) > G_k\,(y^* + \delta) = G_k\,(y^* + px_k - x_{k+1}) = pw_k + G_k(y^* - x_{k+1})$
  - $G_{k+1}\,(y^* - x_{k+1}) < \ G_k(y^* - x_{k+1})$
  - $\therefore w_{k+1} + G_k(\delta) > pw_k$矛盾
  - $\therefore G_{k+1}(y) \leq G_k(y) \Rightarrow\ F_{k+1}(y) = F_k(y)$

实例

$$v_{k+1} = pv_k - \delta,\quad 0 \le \delta < v_k,\quad p \in Z^+$$
$$w_{k+1} + G_k(\delta) \le pw_k$$

例4.5 $v_1=1, v_2=5, v_3=14, v_4=18, w_i=1, i=1, 2, 3, 4.$

对一切 y 有$G_1(y)=F_1(y), G_2(y)=F_2(y)$.

验证 $G_3(y) = F_3(y)$

$v_3=pv_2-\delta \Rightarrow p=3, \delta=1.$

$w_3+G_2(\delta)=1+1 = 2$

$pw_2=3\times 1=3$

$w_3+G_2(\delta)\le p\, w_2$

$v_4= pv_3-\delta \Rightarrow p=2, \delta=10$

$w_4+G_3(\delta)=1+2=3$

$pw_3=2\times 1=2$

$w_4+G_3(\delta) > pw_3$

结论：$G_3(y)=F_3(y)$, 对于$y=pv_3=28$，$G_4(y)>F_4(y)$

4、贪心法的典型应用

应用1、最优前缀码

二元前缀码

用0-1字符串作为代码表示字符，要求任何字符的代码都不能作为其它字符代码的前缀

非前缀码的例子

a: 001, *b*: 00, *c*: 010, *d*: 01

解码的歧义，例如字符串 0100001

解码1: 01, 00, 001 *d, b, a*

解码2: 010, 00, 01 *c, b, d*

前缀码的二叉树及权值

前缀码： { 00000，00001，0001，001，01, 100, 101, 11}

频率： 00000: 5%， 000001: 5%， 0001: 10%， 001: 15%，
01: 25%，100: 10%，101: 10%，11: 20%

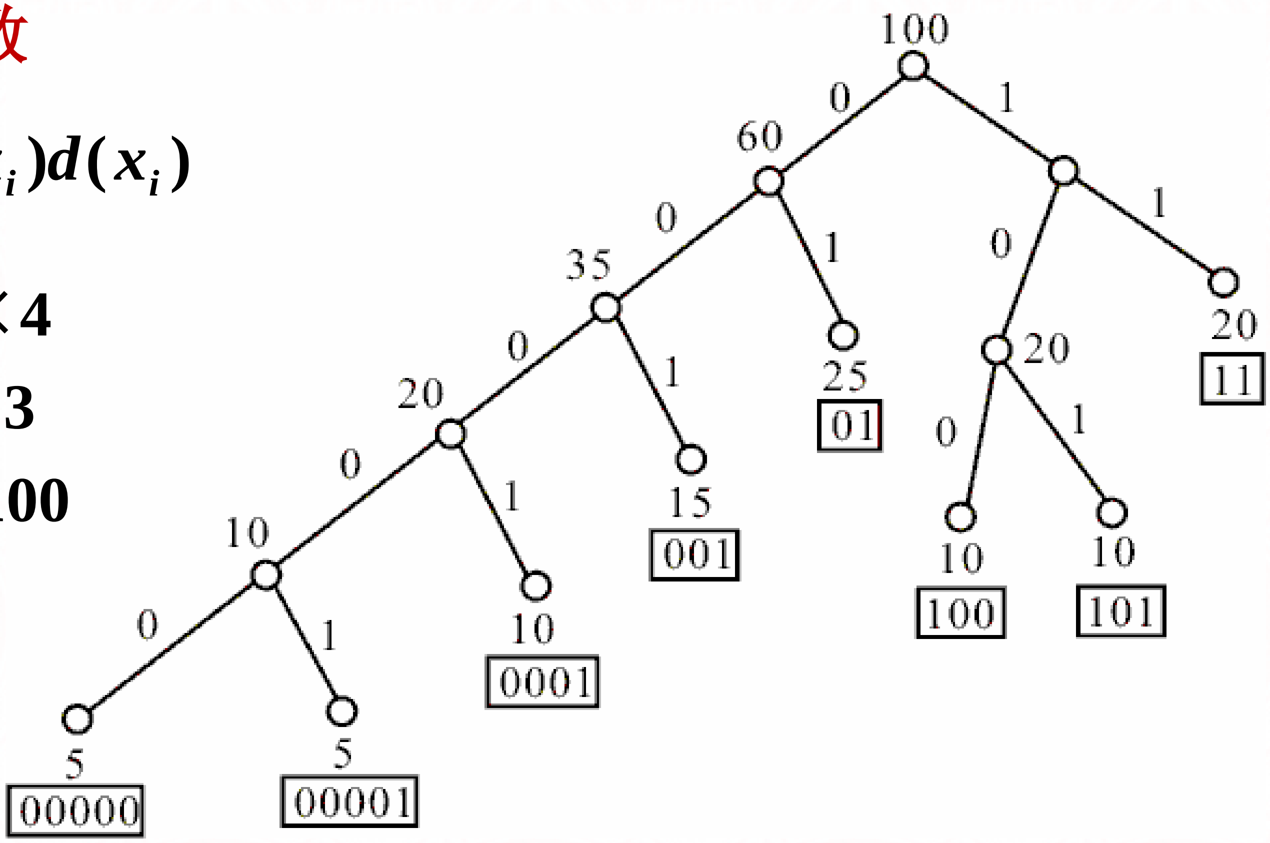
平均的二进制位数

$$B = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) d(x_i)$$

B=[(5+5)×5+10×4
+(15+10+10)×3
+(25+20)×2]/100
=2.85

最优前缀码

权值B最小



最优前缀码问题

例4.6 最优前缀码 给定字符集 $C=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$和每个字符的频率$f(x_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, 求关于C 的一个最优前缀码.

算法4.4 Huffman(C)

输入：$C=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$， $f(x_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

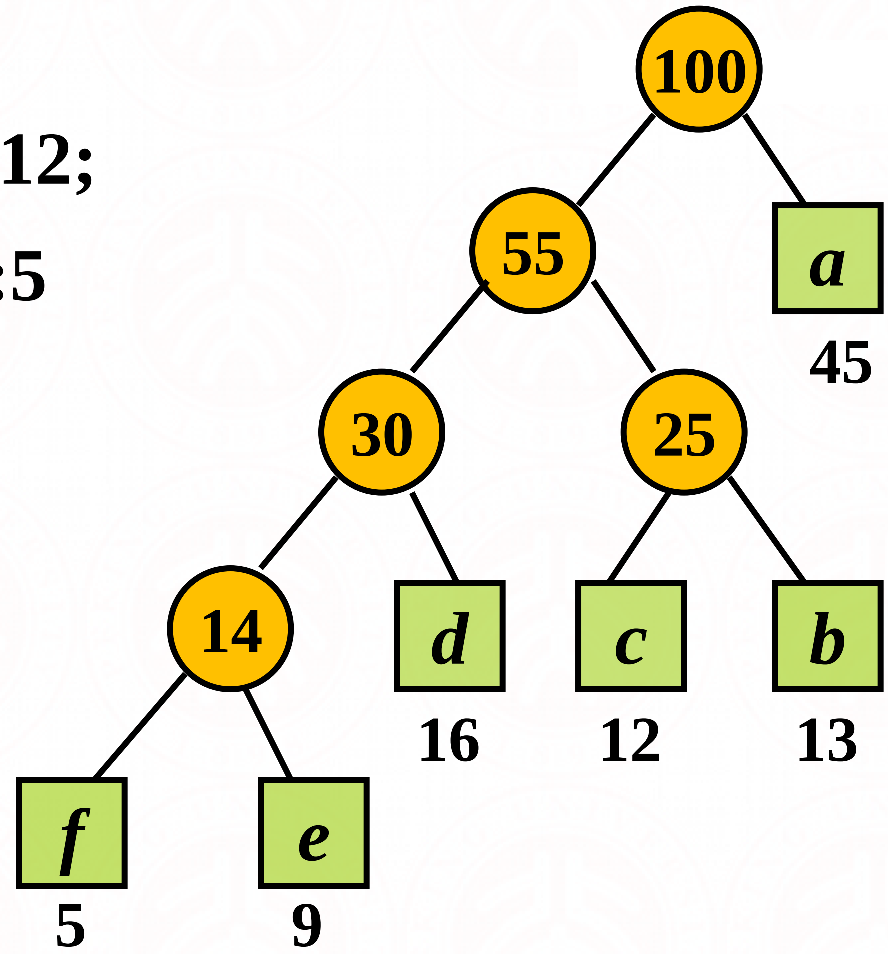
输出：Q / /队列

1. $n \leftarrow |C|$
2. $Q \leftarrow C$ //按频率递增构成队列Q
3. for $i \leftarrow 1$ to $n-1$ do
4. $z \leftarrow$ Allocate-Node() // 生成结点 z
5. $z.left \leftarrow Q$中最小元 // 取出Q最小元作z的左儿子
6. $z.right \leftarrow Q$中最小元 // 取出Q最小元作z的右儿子
7. $f(z) \leftarrow f(x)+f(y)$
8. Insert(Q,z) // 将 z 插入Q
9. return Q

实例

例如 a:45, b:13; c:12;

d:16; e:9; f:5



编码:

f--0000, e--0001,

d--001, c--010,

b—011, a--1

平均位数:

$4\times(0.05+0.09)$

$+3\times(0.16+0.12+0.13)+1\times0.45= 2.24$

算法正确性证明:引理4.2

引理4.2 设C是字符集，$\forall c\in C$, $f(c)$为频率，$x, y\in C$, $f(x)$, $f(y)$频率最小，那么存在最优二元前缀码使得 x, y 的码字等长，且仅在最后一位不同.

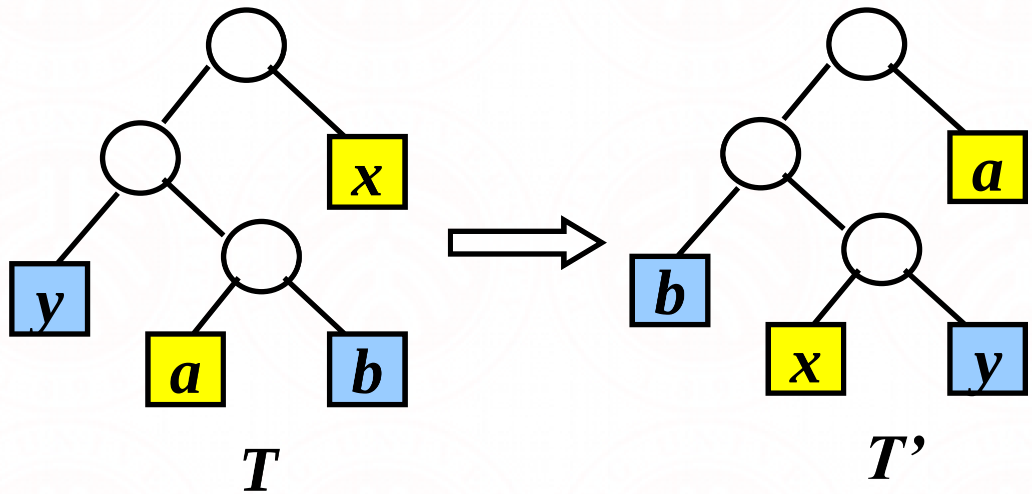
$T\to T'$

$f[x]\le f[a]$

$f[y]\le f[b]$

a与 x 交换

b与 y 交换



则T与T'的权之差为

$$B(T)-B(T')=\sum_{i\in C} f[i]d_T(i)-\sum_{i\in C} f[i]d_{T'}(i)\ge 0$$

其中$d_T(i)$为i 在T 中的层数（i 到根的距离）

引理4.3

引理4.3 设 T 是二元前缀码所对应的二叉树，$\forall\, x, y \in T$, x, y是树叶兄弟，z 是 x, y 的父亲，令$T' = T - \{x, y\}$, 且令 z 的频率 $f(z) = f(x)+f(y)$，T'是对应于二元前缀码 $C' = (C-\{x, y\}) \cup \{z\}$ 的二叉树，那么

$$B(T)=B(T')+f(x)+f(y).$$

证 $\forall c \in C-\{x,y\}$,有 $d_T(c) = d_{T'}(c) \Rightarrow f(c)d_T(c)=f(c)d_{T'}(c)$

$$d_T(x) = d_T(y) = d_{T'}(z) +1.$$

$$B(T) = \sum_{i \in T} f(i) d_T(i) = \sum_{i \in T, i \neq x, y} f(i) d_T(i) + f(x) d_T(x) + f(y) d_T(y)$$

$$= \sum_{i \in T', i \neq z} f(i) d_{T'}(i) + f(z) d_{T'}(z) + (f(x) + f(y))$$

$$= B(T') + f(x) + f(y)$$

证明：归纳法

定理4.7 **Haffman 算法对任意规模为n（$n\geq 2$）的字符集C 都得到关于C 的最优前缀码的二叉树.**

归纳基础 $n=2$，字符集$C=\{x_1,x_2\}$，Huffman算法得到的代码是0和1，是最优前缀码.

归纳步骤 假设Huffman算法对于规模为k 的字符集都得到最优前缀码. 考虑规模为k+1的字符集$C=\{x_1, x_2, ..., x_{k+1}\}$, 其中$x_1$, $x_2 \in C$是频率最小的两个字符. 令

$$C'=(C-\{x_1,x_2\})\cup\{z\}, \quad f(z)=f(x_1)+f(x_2)$$

根据归纳假设，Huffman算法得到一棵关于字符集C'、频率$f(z)$和$f(x_i)$（i=3,4,...,k+1）的最优前缀码的二叉树T'.

证明：归纳法(续)

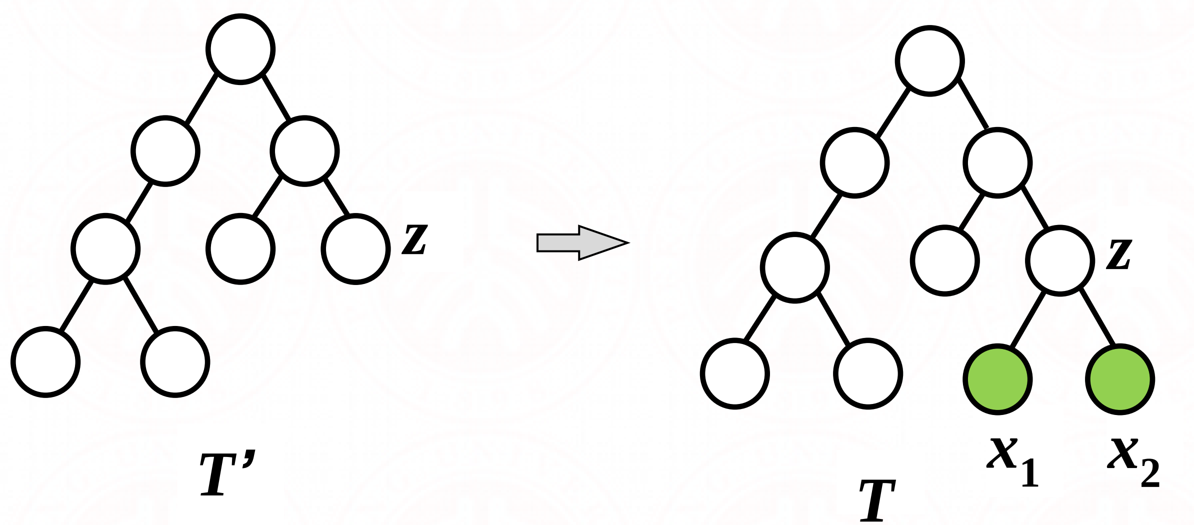
把x_1和 x_2作为 z 的儿子附加到T'上，得到树T，那么T是关于字符集$C=(C'-\{z\})\cup\{x_1,x_2\}$ 的最优前缀码的二叉树.

如若不然，存在更优的树T^*. 根据引理1，其最深层树叶是

x_1, x_2，且$B(T^*)<B(T)$. 去掉T^*中的x_1和x_2，根据引理2，所得二叉树$T^{*\prime}$满足

$$B(T^{*\prime})=B(T^*)-(f(x_1)+f(x_2))<B(T)-(f(x_1)+f(x_2))=B(T')$$

与T'是一棵关于C'的最优前缀码的二叉树矛盾.



Huffman树应用:文件归并

例4.7 问题：给定一组不同长度的排好序文件构成的集合

$$S = \{ f_1, \ldots , f_n\}$$

其中 f_i 表示第 i 个文件含有的项数. 使用二分归并将这些文件归并成一个有序的文件.

归并过程对应于二叉树：文件为树叶. f_i与f_j 归并的文件是它们的父结点.

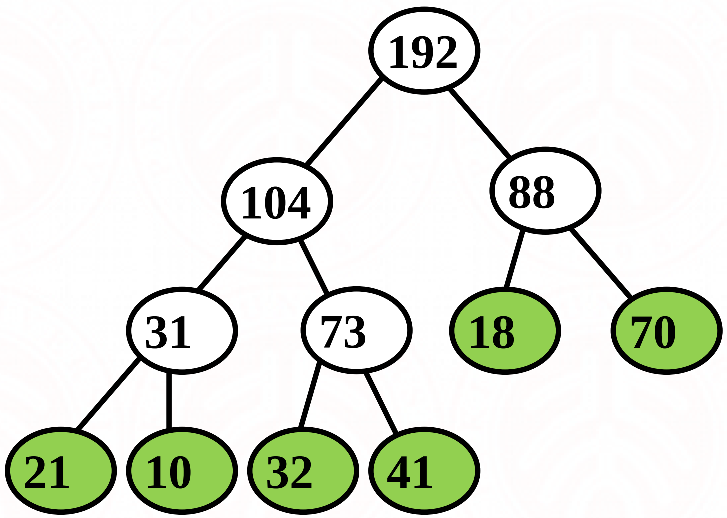
归并代价(最多的比较次数)：结点 f_i与 f_j 归并代价为 f_i+f_j–1.

总的代价：每个文件(树叶)的深度乘以文件大小之和再减掉归并次数 n–1

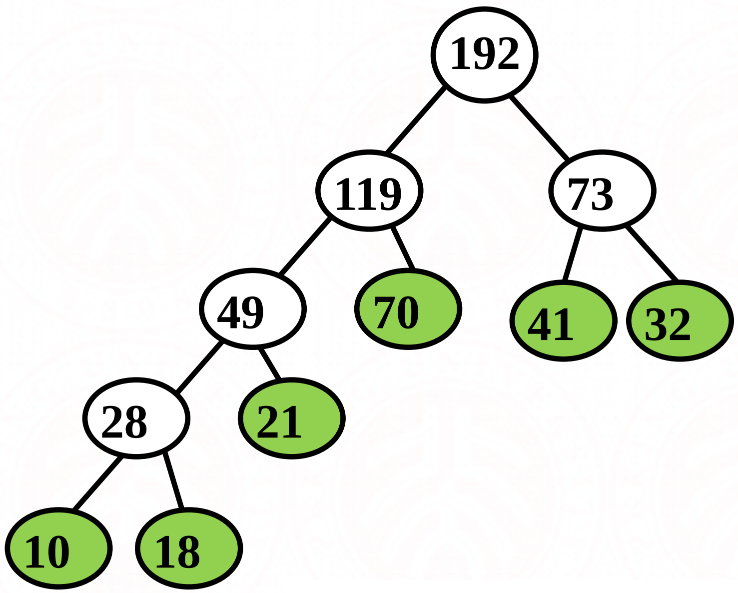
$$\sum_{i\in S} d(i) f_i - (n-1)$$

实例

实例：$S = \{ 21,10,32,41,18,70 \}$



顺序归并



Huffman树归并

代价

顺序归并：　$(21+10+32+41)\times3+(18+70)\times2-5=483$

Huffman树归并：$(10+18)\times4+21\times3+(70+41+32)\times2-5=456$

应用2、最小生成树

无向连通带权图$G=(V,E,W)$，$w(e)\in W$是边e的权. G的一棵生成树是包含了G的所有顶点的树, 树中各边的权之和称为树的权，具有最小权的生成树称为G的**最小生成树**.

命题4.1 设G是 n阶连通图，那么

(1) T是G 的生成树当且仅当 T 有$n-1$条边.

(2)如果T是G的生成树，$e\notin T$，那么$T\cup\{e\}$含有一个圈 (回路).

问题：给定连通带权图G，求G的一棵最小生成树.

算法：**Prim算法**和**Kruskal算法**

Prim算法

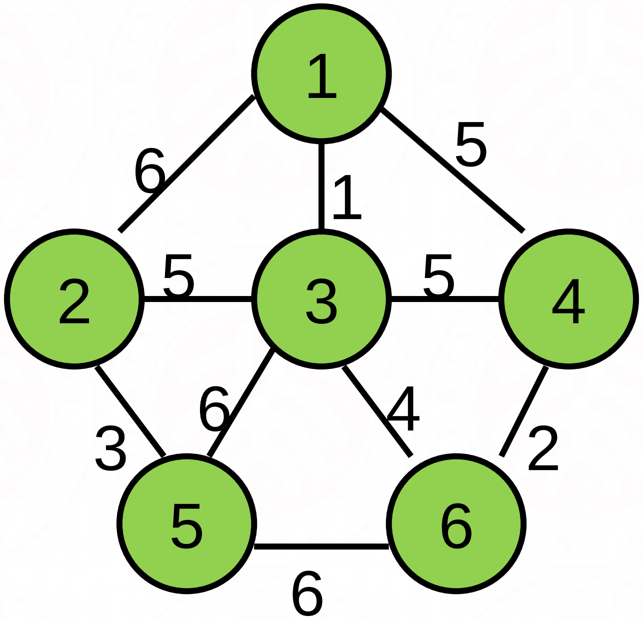
算法4.5 Prim(*G*,*E*,*W*)

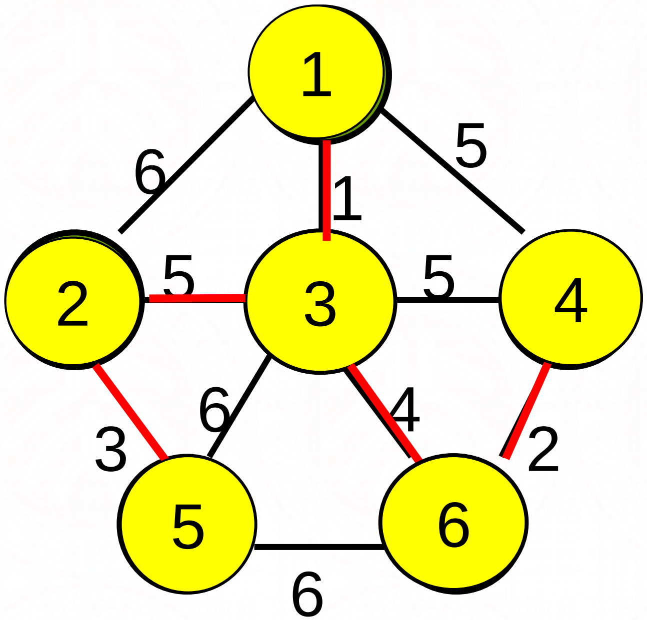
1． $S \leftarrow \{1\}$； $T \leftarrow \varnothing$

2． while $V-S \neq \varnothing$ do

3． 从$V-S$中选择 j 使得 j 到 S 中顶点的边e的权最小

4． $S \leftarrow S \cup \{j\}$, $T \leftarrow T \cup \{e\}$





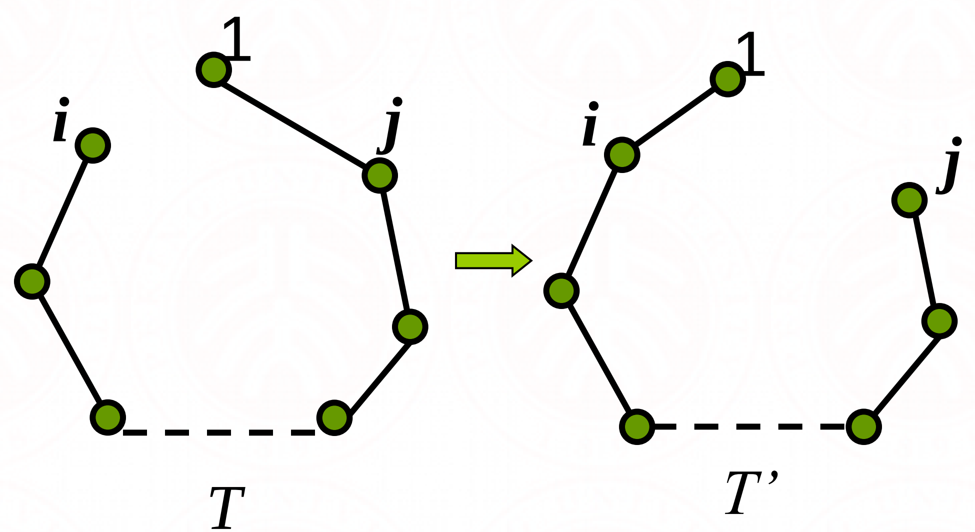
正确性证明

对步数归纳

定理4.8 对于任意 $k < n$, 存在一棵最小生成树包含算法前 k 步选择的边

归纳基础：k=1, 存在一棵最小生成树 T 包含边e={1,i}, 其中{1,i}是所有关联 1 的边中权最小的.

设T 为一棵最小生成树，假设T 不包含{1,i}, 则$T\cup$\{{1,i}}含有一条回路，回路中关联1的另一条边为{1,j}，令 $T'=(T-\{\{1,j\}\})\cup\{\{1,i\}\}$，则$T'$也是生成树，且$W(T')\le W(T)$.



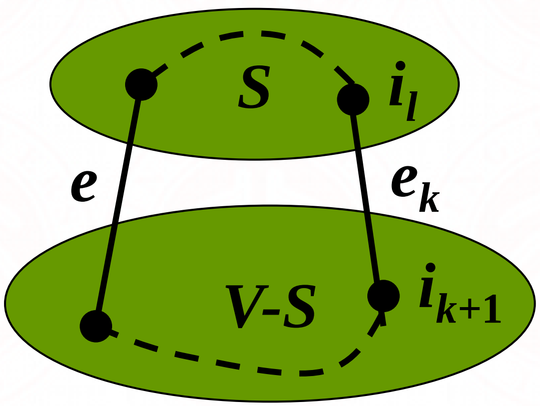
正确性证明(续)

归纳步骤:

假设算法进行了$k-1$步，生成树的边为$e_1,e_2,\ldots,e_{k-1}$，这些边的 k 个端点构成集合S. 由归纳假设存在G 的一棵最小生成树T 包含这些边.

算法第k 步选择了顶点 i_{k+1}, 则 i_{k+1}到S中顶点的边权最小, 设这条边为 $e_k=\{i_{k+1},i_l\}$. 假设T不含有e_k，则将 e_k 加到T 中形成一条回路. 这条回路有另外一条连接S与$V-S$中顶点的边e, 令

$$T^*=(T-\{e\})\cup\{e_k\},$$



则T^*是G 的一棵生成树，包含$e_1,e_2,\ldots,e_k$, $W(T^*)\le W(T)$.

算法时间：$T(n)=O(n^2)$

Kruskal算法

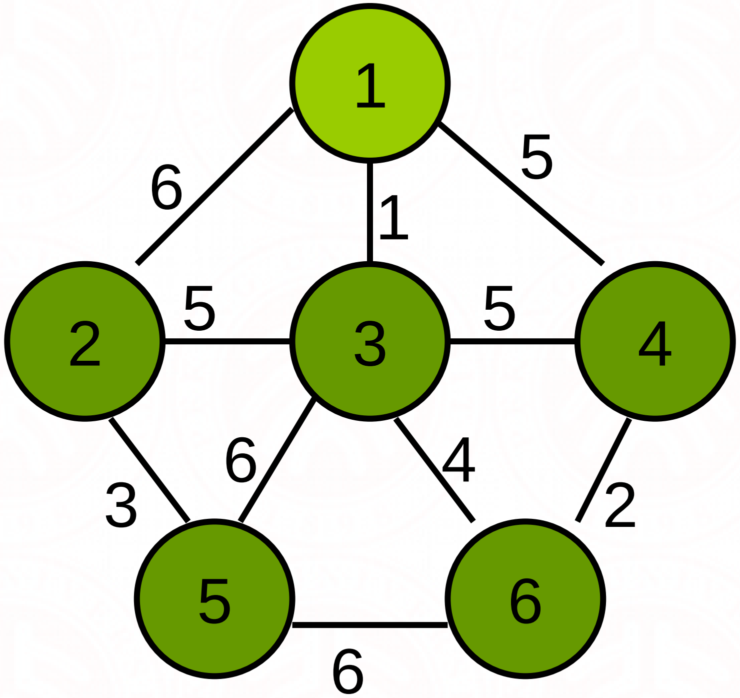
算法4.6 Kruskal

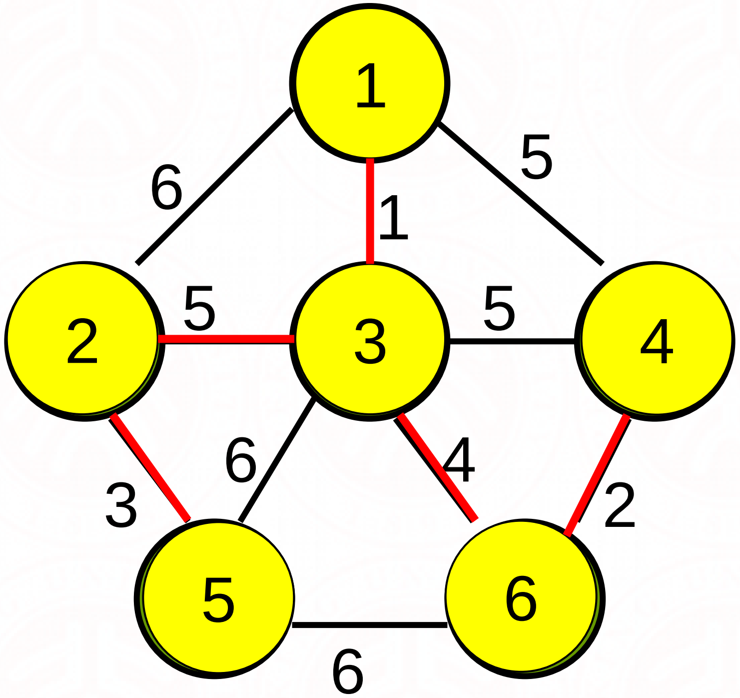
输入：连通图G　　　　// 顶点数n，边数m

输出：G的最小生成树

1. 按权从小到大排序G中的边，使得$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$
2. $T \leftarrow \varnothing$
3. repeat
4. 　　$e \leftarrow E$中的最短边
5. 　　if e的两端点不在同一个连通分支
6. 　　then $T \leftarrow T \cup \{e\}$
7. 　　$E \leftarrow E - \{e\}$
8. until T包含了$n-1$条边

实例





Kruskal算法正确性证明

定理4.9 对任意 $n>1$, 算法对 n 阶图得到一棵最小生成树.

证明 $n=2$, 只有一条边，命题显然为真.
假设对于n个顶点的图算法正确，考虑$n+1$个顶点的图G, G中最小权边 $e=\{i, j\}$，从G 中短接 i 和 j，得到图G'. 根据归纳假设，由算法存在G'的最小生成树T'.令$T=T'\cup\{e\}$, 则T 是关于G 的最小生成树.

否则存在G 的含边e 的最小生成树T^*，$W(T^*)<W(T)$. (如果 $e\notin T^*$, 在T^*中加边e，形成回路. 去掉回路中任意别的边所得生成树的权仍旧最小). 在T^*中短接 e 得到G'的生成树$T^*-\{e\}$, 且

$$W(T^*-\{e\})=W(T^*)-w(e)<W(T)-w(e)=W(T'),$$

与T'的最优性矛盾.

算法的实现与时间复杂度

数据结构：

建立FIND数组，FIND[i] 是结点 i 的连通分支标记.

(1) 初始FIND[i]=i.

(2) 两个连通分支合并，则将较小分支结点的FIND值更新为较大分支的标记

时间复杂度：

(1)每个结点至多更新log$n$次，建立和更新FIND数组的总时间为$O(n\log n)$

(2) 算法时间为

$$\underbrace{O(m\log m)}_{\text{边排序}} + \underbrace{O(n\log n)}_{\text{FIND数组}} + \underbrace{O(m)}_{\text{其他}} = O(m\log n)$$

应用3、单源最短路径

给定带权有向网络$G=(V,E,W)$,每条边$e=<i,j>$的权$w(e)$为非负实数，表示从i到j 的距离. 源点$s\in V$，求从 s 出发到达其它结点的最短路径.

Dijkstra算法：

$x\in S \Leftrightarrow x\in V$ 且从 s 到 x 的最短路径长度已知

初始：$S=\{s\}$ ，$S=V$ 时算法结束

从 s 到 u 相对于S 的最短路径：从 s 到 u且仅经过S 中顶点的最短路径

$dist[u]$：从 s 到 u 的相对于S 的最短路径的长度

$short[u]$：从 s 到 u 的最短路径的长

$dist[u] \geq short[u]$

Dijkstra算法

算法4.7 Dijkstra

输入：带权有向图$G=<V,E,W>$，源点$s\in V$

输出：从 s 到每个结点 i 的最短路径

$S\leftarrow\{s\}$

$dist[s]\leftarrow 0$

for $i\in V-\{s\}$ **do**

  $dist[i]\leftarrow w(s,i)$ // 如果s到i没有边, $w(s,i)=\infty$

while $V-S\neq\varnothing$ **do**

  从$V-S$中取出具有相对S的最短路径的顶点 j

  $S\leftarrow S\cup\{j\}$;

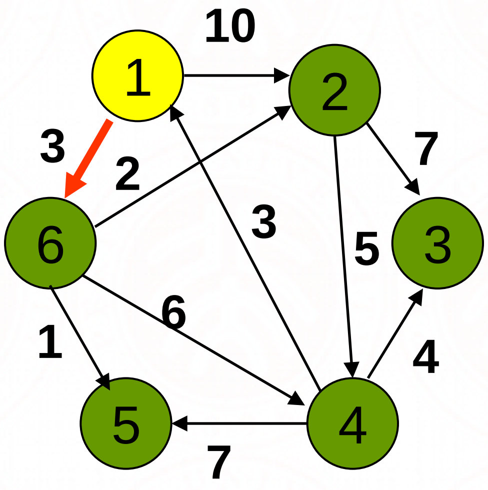
  for $i\in V-S$ **do**

    if $dist[j]+w(j,i)<dist[i]$

    then $dist[i]\leftarrow dist[j]+w(j,i)$ // 更新$dist[i]$

实例

输入：$G=<V,E,W>$， 源点 1
$V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

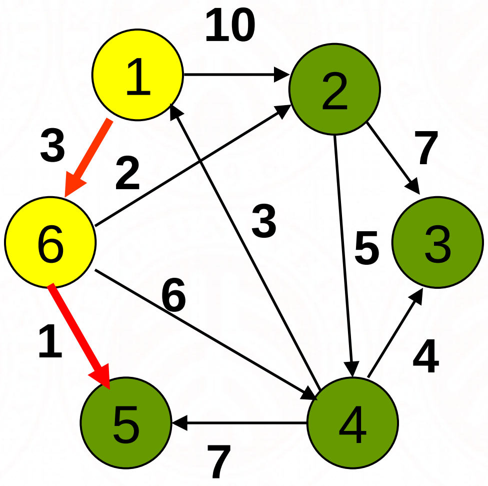


$S=\{1\}$,

$dist[1]=0$

$dist[2]=10$, $dist[6]=3$

$dist[3]=dist[4]=dist[5]=\infty$



$S=\{1,6\}$,

$dist[1]=0$, $dist[6]=3$

$dist[2]=5$, $dist[4]=9$, $dist[5]=4$

$dist[3]=\infty$

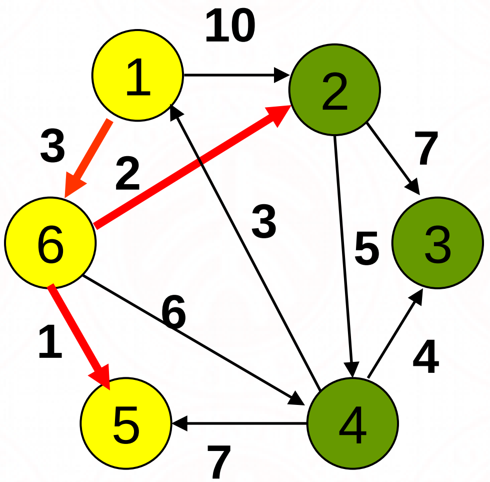
实例（续）

S={1,6,5},

dist[1]=0, *dist*[6]=3, *dist*[5]=4

dist[2]=5, *dist*[4]=9,

dist[3]=∞



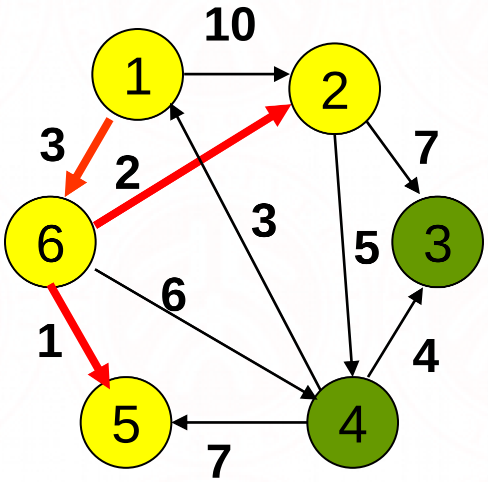
S={1,6,5,2},

dist[1]=0, *dist*[6]=3, *dist*[5]=4

dist[2]=5

dist[3]=12

dist[4]=9



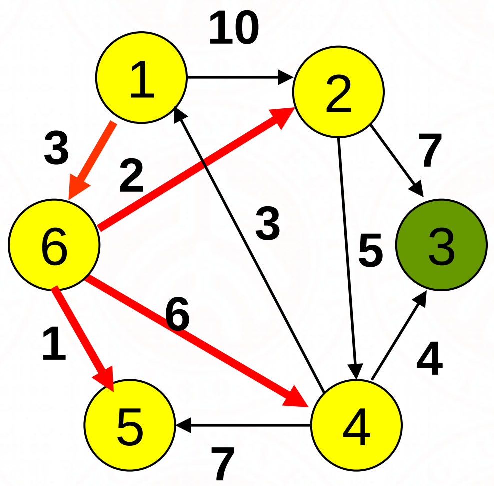
实 例（续）

S={1,6,5,2,4},

dist[1]=0, *dist*[6]=3, *dist*[5]=4

dist[2]=5, *dist*[4]=9,

dist[3]=12

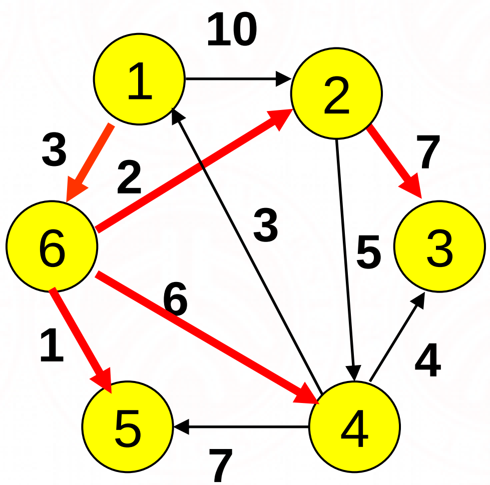


S={1,6,5,2,4,3},

dist[1]=0, *dist*[6]=3, *dist*[5]=4

dist[2]=5, *dist*[4]=9

dist[3]=12



解：

short[1]=0, short[2]=5,

short[3]=12, short[4]=9,

short[5]=4, short[6]=3.

算法正确性证明

定理4.10 当算法进行到第 k 步时，对于S 中每个结点 i，

$$dist[i] = short[i]$$

归纳基础 k=1, S={s}, $dist[s]=short[s]=0$, 命题为真.

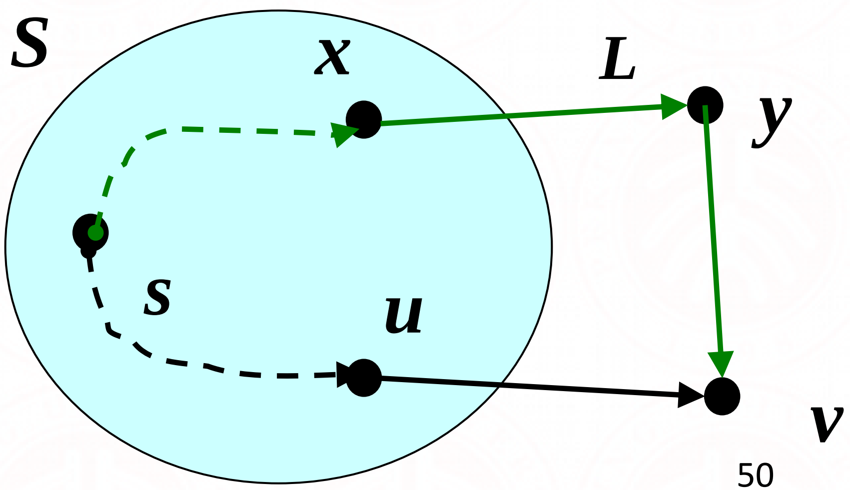
归纳步骤 假设命题对于k 为真. 考虑 k+1步, 选择顶点v (边{u,v}). 假若存在另一条 s-v 路径 L (绿色)，最后一次出S 的顶点为 x, 在这次从S 中出来后经过V–S 的第一个顶点为 y.

$dist[v] \le dist[y]$ //v先被选

$\le dist[y]+d(y,v) \le L$

$dist[v]=short[v]$

时间复杂度 $T(n)=O(n^2)$



贪心法小结

(1) 适用于组合优化问题， 求解过程是多步判断. 判断的依据是局部最优策略，使目标值达到最大(或最小)，与前面的子问题计算结果无关.

(2) 局部最优策略的选择是算法正确性的关键.

(3) 正确性证明方法：数学归纳法、交换论证. 使用数学归纳法主要通过对算法步数或者问题规模进行归纳. 如果要证明贪心策略是错误的，只需举出反例.

(4) 自顶向下求解，通过选择将问题归约为小的子问题.

(5) 如果贪心法得不到最优解，可以对问题的输入进行分析或者估计算法的近似比.

(6) 如果对原始数据排序之后，贪心法往往是一轮处理，时间复杂度和空间复杂度低.