

## 第二次书面作业

### 1. (生成函数)

已知  $\frac{1}{1-z} \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n \geq 1} H_n z^n$  和  $\frac{z}{(1-z)^2} \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n \geq 0} N(H_n - 1) z^n$

请利用生成函数性质与运算, 证明:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} H_k = (N+1)(H_{n+1} - 1)$$

其中  $H_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ 。

### 2. (生成函数)

求以下递推方程:

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}, (n > 2, a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1)$$

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}, (n > 2, a_0 = 0, a_1 = a_2 = 1)$$

### 3. (生成函数)

求以下递推方程:

$$(n+1)a_{n+1} = (n+t)a_n, (n \geq 0, a_0 = 1)$$

说明: 请使用求解生成函数方程的形式求解该问题。

### 4. (分治策略)

利用求解找好芯片的算法, 也可以求解在  $n$  个数中查找出现次数严格多于一半的数的问题。如果现在想在  $n$  个数中找出所有出现次数严格多余三分之一数, 你会怎样设计你的算法(伪码表示, 并用文字简要描述), 这个算法的时间复杂度是多少?