算法设计与分析

第8讲 拟阵理论

汪小林

北京大学 信息科学技术学院

拟阵理论

拟阵（matroid）

- 关于贪心算法的一种优美的理论
- 用于判断一个问题能否应用贪心策略求解
- 可涵盖很多贪心法求解的问题
- 但不是所有的贪心算法都符合拟阵理论

拟阵的定义

称一个有序对$M = (S, \ell)$为拟阵，如果

1) 有穷：S是一个有穷集合

2) 遗传（独立）：ℓ为S的一个非空**独立子集**的集合，满足如果$B \in \ell$且$A \subseteq B$，那么$A \in \ell$。我们称ℓ的这种性质为**遗传性**。显然空集$\emptyset \in \ell$

3) 交换：如果$A \in \ell$，$B \in \ell$，且$|A|<|B|$，则存在某个元素$x \in B-A$使得$A \cup \{x\} \in \ell$。我们称M满足**交换性**。

“拟阵”这个词由Hassler Whiteney最早开始使用的，他曾研究**矩阵拟阵**。其中S的元素是一个给定矩阵的各个行，如果某些行线性无关，则它们是独立的，以所有独立行集合构成ℓ，可以证明$M=(S, \ell)$是拟阵。

定义在无向图上的一个拟阵

对一个无向图$G=(V, E)$，定义有序对$M_G=(S_G, \ell_G)$如下：

- 集合S_G定义为E，即图G的边集。
- 如果A是E的子集，则$A \in \ell_G$当且仅当A中无回路。即一组边A是独立的，当且仅当子图$G_A=(V, A)$是一个森林。

定理16.5 对于无向图$G=(V, E)$，$M_G=(S_G, \ell_G)$是拟阵。

证明：显然，$S_G=E$是有穷集合；

- 并且，ℓ_G是遗传的，因为森林的子集还是森林。
- 现在，只需要证明M_G满足交换性。设$G_A=(V, A)$和$G_B=(V, B)$都是森林，且$|A|<|B|$。也就是说，B比A有更多的边。

定义在无向图上的一个拟阵

- 一个有k条边的森林恰好有$|V|-k$棵数。因为每增加一条边能且只能把森林中的两棵树合成一棵树。
- 于是森林G_A中有$|V|-|A|$棵树，森林G_B中有$|V|-|B|$棵树。
- 可见森林G_B中的树比森林G_A中少，因此森林G_B中存在一棵树T，T的顶点属于森林G_A中的两棵不同的树。而树T显然是连通图，因此T中存在一条边(u,v)，
使得结点u,v分别属于森林G_A中的两棵不同的树。
- 把边(u,v)加入到森林G_A，不会产生环，即$A+\{(u,v)\}\in \ell_G$
- 即M_G满足交换性。
- 由此根据拟阵的定义，$M_G=(S_G, \ell_G)$是拟阵。 ■

最大独立子集

- 扩张：对于拟阵$M = (S, \ell)$，集合$A \in \ell$，元素$x \notin A$，如果能保证把x加入到A中并保持A的独立性，即$A \cup \{x\} \in \ell$，则称x是A的一个扩张。
- 例如，对于图的拟阵M_G，如果A是一个独立的边集，则边e是A的一个扩张，当且仅当e不在A中，且将e加入到A中后不产生环。
- 最大独立子集：如果A是拟阵M的一个独立子集，且它没有任何扩张，则称A是最大独立子集。也就是说，A不被M中更大的独立子集所包含。

最大独立子集定理的证明

定理16.6 拟阵中所有最大的独立子集的大小都相同。

证明： 反证法。

- 设A是拟阵M的一个最大独立子集，假设存在M的另一个更大的独立子集B，则根据交换性，A可以扩张到一个更大的独立子集$A\cup\{x\}\in\ell$， $x\in B-A$。这与A是M的最大独立子集矛盾。证毕。 ■

例如对于图G的拟阵M_G，M_G的每个最大独立子集都是一棵包含$|V|-1$条边且恰好连接了G中的所有顶点的自由的树。其实这就是一棵G的生成树。

加权拟阵

- 拟阵$M = (S, \ell)$是加权的，如果有加权函数w，

  $$w(x) \to R^+，x \in S$$

  加权函数w对与子集$A \subseteq S$有和式

  $$w(A) = \sum_{x \in A} w(x)$$

- 对于某个$A \in \ell$，如果$w(A)$最大，称A为拟阵M的**最优子集**

  最优子集一定是最大独立子集（因为$w(x)>0$，$x \in S$）

- 最小生成树到拟阵最优子集问题的映射
- 设$w(e)$，$e \in E$是图$G=(V, E)$上边的长度函数，定义拟阵M_G上的权函数$w'(e)=w_0-w(e)$，其中$w_0>\max\{w(e), e \in E\}$。则最小生成树$T=(V,A)$对应于最优子集$A$。

加权拟阵上的贪心算法

- **GREEDY(*M*, *w*)**

  1 $A \leftarrow \varnothing$

  2 对$S[M]$ 按权函数w降序排列

  3 **for each** $x \in S[M]$ ，按$w(x)$ 单调降序依次取出

  4 **do if** $A \cup \{x\} \in \ell[M]$

  5 **then** $A \leftarrow A \cup \{x\}$

  6 **return** A

- 其中$S[M]$ 和$\ell[M]$表示M的组成，w表示权函数
- 算法的执行时间分析，步骤2排序为$\Theta(n\lg n)$，步骤3~5对每个x做一次，设检验$A \cup \{x\}$独立性需要$f(n)$时间，则**GREEDY**算法的执行时间为$\Theta(n\lg n+nf(n))$

拟阵具有贪心选择性质

引理16.7 具有加权函数w的加权拟阵$M = (S, \ell)$，设S按权值的单调递减顺序排序。设x是S中第一个使$\{x\}$独立的元素。如果x存在，则存在一个包含x的最优独立子集A

证明：如果这样的x不存在，则唯一的独立集合为空集，证明结束。否则，设B为任意非空最优子集，并假设$x \notin B$（否则，让$A=B$，证明结束）。

- 可以证明，B中不存在权值大于$w(x)$的元素，对任意$y \in B$，有$w(x) \geq w(y)$。
- 根据交换性，我们从$\{x\}$开始，通过B一步一步构造最大独立子集A，最终$A=B-\{y\}+\{x\}$，其中$y \in B$，于是$w(A) = w(B)-w(y)+w(x) \geq w(B)$，故$A$是包含$x$的最优独立子集。 ■

贪心选择的过程不会遗漏

引理16.8 对拟阵$M = (S, \ell)$，对于任意的$x \in S$，如果x是S的独立子集A的一个扩张，则x也是$\varnothing$的一个扩张。

证明：如果x是独立子集A的一个扩张，则$A \cup \{x\}$是独立的，根据遗传性，$\{x\}$也是独立的，所以x也是$\varnothing$的一个扩张 ■

推论16.9 对拟阵$M = (S, \ell)$，如果某个$x \in S$不是$\varnothing$的一个扩张，则x也不会是S的任意独立子集A的一个扩张。

- 这个结论告诉我们，在拟阵中的贪心选择过程，在一开始选择时丢弃的元素，在后面的选择过程中也不再会用到。

拟阵具有最优子结构的性质

引理16.10 对加权拟阵$M = (S, \ell)$，设$x \in S$为在GREEDY算法中第一个选择的元素，则找一个包含x的最优子集问题可以归约为找出加权拟阵$M' = (S', \ell')$的最优子集问题，这里$S'=\{y \in S: \{x,y\} \in \ell\}$，$\ell'=\{B \subseteq S-\{x\}: B \cup \{x\} \in \ell\}$，其中$M'$的权函数为（受限于$S'$）$M$的权函数（称$M'$为$M$由$x$引起的收缩）

证明： 如果A是包含x的M的独立子集，那么$A'=A-\{x\}$就是M'的一个独立子集。反之，由M'的独立子集A'可得M的一个独立子集$A=A' \cup \{x\}$。而两种情形中都有$w(A)=w(A')+w(x)$，因此由M中包含x的一个最大权值解可以得M'中的一个最大权值解，反之亦然。■

拟阵上贪心算法的正确性

定理16.7 GREEDY(M,w)返回M=(S,ℓ)一个最优子集。

证明：分析算法的整个过程：

- 根据推论16.9，一开始被略去的那些不是Ø的扩张的元素可以不考虑；
- 一旦选择了第一个元素x，由引理16.7可知，将x加入A是正确的，因为存在包含x的最优子集。
- 最后，由引理16.10，隐含着余下的问题就是一个在M的由x引起的收缩M'中寻找一个最优子集的问题（B在M'中独立等价于$B\cup\{x\}$在M中独立，其中$B\in\ell'$），剩余步骤可找出M'中一个最优子集。
- 整个步骤的结果就是M的最优子集。■

拟阵证明练习

1. 证明：(S, ℓ_k)是拟阵，其中S为任意有穷集合，ℓ_k为S的所有阶最多为k的子集构成的集合，$k \leq |S|$。
2. 证明：关于矩阵T的(S, ℓ)是拟阵，其中S为T的所有的列构成的集合，且$A \in \ell$当且仅当A中的各列是线性无关的。

练习题解

问题1的证明：

- S本身就是有穷集合；
- 对于任意$B \in \ell_k$和任意$A \subseteq B$，都有$|A| \leq |B| \leq k$，
  所以$A \in \ell_k$，满足遗传性；
- 又对于任意的$A, B \in \ell_k$且$|A| < |B|$，
  任取$x \in B - A$，则$|A \cup \{x\}| = |A| + 1 \leq |B| \leq k$，
  所以$A \cup \{x\} \in \ell_k$，满足交换性。
- 故(S, ℓ_k)是拟阵。■

练习题解

问题2的证明：

- S本身就是有穷集合；
- 对于任意$A\in\ell$，A中各列线性无关，则A的任意子集中的各列也线性无关，所以满足遗传性；
- 对于阶更大的独立子集B，假设B中的任意一列都和A中的列线性相关，因为$|A|<|B|$，可以得出B中的各列线性相关，这与B是独立子集矛盾；
- 故必定存在$x\in B\text{-}A$，x与A中的各列和在一起仍线性无关，即$A\cup\{x\}\in\ell$，故满足交换性。
- 于是(S, ℓ)是拟阵。 ■

一个任务调度问题

——拟阵的应用

一个任务调度问题

在单处理器上对若干单位时间任务进行最优调度，其中每个任务都有一个截止时间和超时惩罚。

- 包含n个单位时间任务的集合$S=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- n个整数值的期限$d_1, d_2, ..., d_n$，每个d_i满足$1 \le d_i \le n$且任务a_i要求在d_i前完成
- n个非负的权（或惩罚）$w_1, w_2, ..., w_n$，如果任务a_i没有在时间d_i前结束，则导致惩罚w_i，而如果任务在期限之前完成，则没有惩罚。

问题：

找出S的一个调度，使之最优化因延期调度而导致的总惩罚。

早任务优先

- 对于一个给定的调度，一个任务在调度中迟了，如果它在规定期限之后完成；否则这个任务在调度中是早的。
- 任何一个调度总可以安排成**早任务优先**的形式，即早任务总是安排在迟任务之前。因为：对处于迟任务a_j后的早任务a_i，交换a_i和a_j不影响a_i是早的和a_j是迟的。
- 早任务优先调度的规范形式：
早任务先于迟任务，且按期限的递增序对早任务进行调度。
- 对某调度，首先将其安排成按早任务优先的形式，然后只要有两个分别完成于时间k和$k+1$的早任务a_i和a_j使得$d_j < d_i$，则交换a_i和a_j。
- 容易看出，交换后a_j显然仍是早的，因为我们提前了a_j。
- 而对于a_i，因为$k+1 \le d_j$（因为交换前a_j是早的），于是$k+1 < d_i$，所以交换后a_i也是早的。

归约为早任务集合问题

- 根据早任务优先调度的规范形式，寻找最优化调度问题可归约为寻找最优调度中早任务构成的集合A的问题。
- 一旦A确定，可按期限单调递增的顺序列出A中的所有任务，然后按任意顺序输出迟任务$(S-A)$，就可产生出最优调度的一个规范形式。
- 如果存在关于A中任务的一个调度，使得A中的任务都不迟，称一个任务集合A是独立的。
- 某一个调度中的早任务集合就构成了一个独立的任务集。
- 设ℓ是所有独立的任务集构成的集合。
- 如何判断任务集A是否是**独立的**？
- 设$N_t(A)$表示A中期限为t或更早的任务的个数（t早任务个数），$t = 0, 1, ..., n$ ，其中$N_0(A)=0$。

关于任务集A是否独立的引理

引理16.12 对于任意的任务集合A，下列命题等价：

1) 集合A是独立的；2) 对于$t = 0, 1, ..., n$，有$N_t(A) \le t$；

3) 如果对A的任务按期限的单调递增的顺序进行调度，则没有一个任务是迟的。

证明：假设存在t使得$N_t(A)>t$，则不存在A的无迟任务的调度，因为有多于t个任务要在时间t之前完成，与A独立矛盾，故**1**到**2**成立。

2到**3**是显然的，因为按期限单调递增进行调度不可能出现迟任务。

最后，**3**到**1**可根据独立任务集的定义直接得出。■

- 最小化迟任务的惩罚之和等价于最大化早任务惩罚之和
- 只要找出一个拟阵，即可按加权拟阵的贪心算法解此问题

单位时间调度问题的拟阵

定理16.13 如果S是一个带期限的单位时间任务的集合，且ℓ为所有独立的任务集构成的集合，则(S, ℓ)是拟阵。

证明：一个独立的任务集的每个子集肯定是独立的。

为证明交换性，设B和A为独立任务集，且$|B|>|A|$，设k为使$N_t(B) \le N_t(A)$成立的最大的t（这样的t一定存在，因为$N_0(B)=N_0(A)=0$）。

又有$N_n(B)=|B|>|A|=N_n(A)$，故有$k<n$且对$k+1 \le j \le n$中的所有j，$N_j(B)>N_j(A)$，所以B中比A中包含了更多的期限为$k+1$的任务。

设a_i为$B-A$中具有期限$k+1$的一个任务，并令$A'=A \cup \{a_i\}$。

根据定理16.12中的2)，当$0 \le t \le k$时，$N_t(A') \le N_t(A) \le t$；

当$k+1 \le t \le n$时，$N_t(A') \le N_t(B) \le t$；所以A'也是独立的，即$A' \in \ell$。■

用GREEDY算法求解

- 可以先用**GREEDY**算法找出具有最大权值的独立任务集A
- 然后再以A的任务作为早任务得到一个最优调度
- 此算法的运行时间为$O(n^2)$，因为算法中$O(n)$次的独立性检查，每次开销为$O(n)$时间。
- 一个例子：

a_i	1	2	3	4	5	6	7
d_i	4	2	4	4	1	4	7
w_i	70	60	50	40	30	20	10

其中总的罚值为$w_5 + w_6 = 50$.

拟阵理论与贪心法的思考

- 并非所有的贪心问题都满足拟阵理论
  - 如活动安排问题、霍夫曼编码问题等
- 一个问题往往并不直接对应与拟阵
  - 需要对问题进行一定的变换
- 拟阵的**GREEDY**算法至少最基本的贪心算法
  - 针对问题特性的优化会提高贪心算法的性能