第3讲 生成函数

汪小林

北京大学 信息科学技术学院

1、生成函数

- 定义1 给的序列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$（即$\{a_n\}$），称函数

$$A(z)=\sum_{k\geq 0} a_k z^k$$

为该序列的常规生成函数（OGF），

用记号 $[z^k]A(z)$ 表示系数 a_k。

- 定义2 给的序列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$（即$\{a_n\}$），称函数

$$A(z)=\sum_{k\geq 0} a_k \frac{z^k}{k!}$$

为该序列的指数生成函数（EGF），

用记号 $k![z^k]A(z)$ 表示系数 a_k。

表1 基本的常规生成函数

$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{N\geq 0} z^N$
$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, N, \ldots$	$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{N\geq 1} Nz^N$
$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, \binom{N}{2}, \ldots$	$\frac{z^2}{(1-z)^3} = \sum_{N\geq 2} \binom{N}{2} z^N$
$0, \ldots, 0, 1, M+1, \ldots, \binom{N}{M}, \ldots$	$\frac{z^M}{(1-z)^{M+1}} = \sum_{N\geq M} \binom{N}{M} z^N$
$1, M, \binom{M}{2}, \ldots, \binom{M}{N}, \ldots, M, 1$	$(1+z)^M = \sum_{N\geq 0} \binom{M}{N} z^N$
$1, M+1, \binom{M+2}{2}, \binom{M+3}{3}, \ldots$	$\frac{1}{(1-z)^{M+1}} = \sum_{N\geq 0} \binom{N+M}{N} z^N$

表1 基本的常规生成函数（续）

$$1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots \qquad \frac{1}{1-z^2} = \sum_{N\geq 0} z^{2N}$$

$$1, c, c^2, c^3, \ldots, c^N, \ldots \qquad \frac{1}{1-cz} = \sum_{N\geq 0} c^N z^N$$

$$1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots \frac{1}{N!}, \ldots \qquad e^z = \sum_{N\geq 0} \frac{z^N}{N!}$$

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{N}, \ldots \qquad \ln\frac{1}{1-z} = \sum_{N\geq 1} \frac{z^N}{N}$$

$$0, 1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, H_N, \ldots \qquad \frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{N\geq 1} H_N z^N$$

$$0, 0, 1, 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right), \ldots, N(H_N-1), \ldots \qquad \frac{z}{(1-z)^2}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{N\geq 0} N(H_N-1)z^N$$

表2 关于常规生成函数的运算

	$A(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$	$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
	$B(z)=\sum_{n\geq 0} b_n z^n$	$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$
右移	$zA(z)=\sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n$	$0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots$
左移	$\dfrac{A(z)-a_0}{z}=\sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$	$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots$
下标乘（微分）	$A'(z)=\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1} z^n$	$a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, (n+1)a_{n+1}, \ldots$
下标除（积分）	$\int_0^z A(t)dt=\sum_{n\geq 1}\dfrac{a_{n-1}}{n} z^n$	$0, a_0, \dfrac{a_1}{2}, \dfrac{a_2}{3}, \ldots, \dfrac{a_{n-1}}{n}, \ldots$

表2 关于常规生成函数的运算（续）

比例因子	$A(\lambda z)=\sum_{n\geq 0}\lambda^n a_n z^n$	$a_0,\lambda a_1,\lambda^2 a_2,\dots,\lambda^n a_n,\dots$
相加	$A(z)+B(z)=\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$	$a_0+b_0,a_1+b_1,\dots,a_n+b_n,\dots$
差分	$(1-z)A(z)=a_0+\sum_{n\geq 1}(a_n-a_{n-1})z^n$	$a_0,a_1-a_0,\dots,a_n-a_{n-1},\dots$
卷积	$A(z)B(z)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}a_k b_{n-k}\right)z^n$	$a_0+b_0,a_1b_0+a_0b_1,$ $\dots,\sum_{0\leq k\leq n}a_k b_{n-k},\dots$
部分和	$\frac{A(z)}{1-z}=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}a_k\right)z^n$	$a_0,a_0+a_1,\dots,\sum_{0\leq k\leq n}a_k,\dots$

表 3 基本的指数生成函数

$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$	$e^z = \sum_{N \geq 0} \frac{z^N}{N!}$
$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, N, \ldots$	$ze^z = \sum_{N \geq 1} \frac{z^N}{(N-1)!}$
$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, \binom{N}{2}, \ldots$	$\frac{1}{2} z^2 e^z = \frac{1}{2} \sum_{N \geq 2} \frac{z^N}{(N-2)!}$
$0, \ldots, 0, 1, M+1, \ldots, \binom{N}{M}, \ldots$	$\frac{1}{M!} z^M e^z = \frac{1}{M!} \sum_{N \geq M} \frac{z^N}{(N-M)!}$
$1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$	$\frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{N \geq 0} \frac{1+(-1)^N}{2} \frac{z^N}{N!}$
$1, c, c^2, c^3, \ldots, c^N, \ldots$	$e^{cz} = \sum_{N \geq 0} \frac{c^N z^N}{N!}$
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{N+1}, \ldots$	$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{N \geq 1} \frac{z^N}{(N+1)!}$
$1, 2, 6, 24, \ldots, N!, \ldots$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{N \geq 1} \frac{N!\, z^N}{N!}$

表4 关于指数生成函数的运算

	$A(z)=\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$	$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
	$B(z)=\sum_{n\geq 0} b_n \frac{z^n}{n!}$	$b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$
右移（积分）	$\int_0^z A(t)dt=\sum_{n\geq 1} a_{n-1} \frac{z^n}{n!}$	$0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots$
左移（微分）	$A'(z)=\sum_{n\geq 0} a_{n+1} \frac{z^n}{n!}$	$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots$
下标乘	$zA(z)=\sum_{n\geq 0} n a_{n-1} \frac{z^n}{n!}$	$0, a_0, 2a_1, 3a_2, \dots, na_{n+1}, \dots$
下标除	$\frac{A(z)-A(0)}{z}=\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{n+1} \frac{z^n}{n!}$	$a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots, \frac{a_{n+1}}{n+1}, \dots$

表4 关于指数生成函数的运算（续）

相加	$A(z)+B(z)=\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)\frac{z^n}{n!}$	$a_0+b_0,\ldots,a_n+b_n,\ldots$
差分	$A'(z)-A(z)=\sum_{n\geq 0}(a_{n+1}-a_n)\frac{z^n}{n!}$	$a_1-a_0,\ldots,a_{n+1}-a_n,\ldots$
卷积	$A(z)B(z)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}\right)\frac{z^n}{n!}$	$a_0+b_0, a_1b_0+a_0b_1,\ldots,\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k},\ldots$
部分和	$e^z A(z)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}a_k\right)\frac{z^n}{n!}$	$a_0, a_0+a_1,\ldots,\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}a_k,\ldots$

2、生成函数求解递推方程

- 利用常规生成函数求解递推方程的机械步骤
  - 在递推方程的两边乘以 z^n ，然后关于 n 求和。
  - 处理所得的各个和，导出一个关于 **OGF** 的函数方程。
  - 解这个方程，导出 **OGF** 的显示公式。
  - 将 **OGF** 展开为一个幂级数，从而得到系数表达式。
  - 这些系数就是原序列中的元素
- 同样的步骤也适用于指数生成函数
  - 只是递推方程两边乘以 $z^n/n!$，然后在关于 n 求和。

平凡线性递归

- 解递归方程

$$a_n = a_{n-1} + 1, a_0 = 0$$

- 两边乘以z^n，然后关于 n 求和

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^n = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n + \frac{z}{1-z}$$

- 由于生成函数

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

- 求得方程

$$A(z) = zA(z) + \frac{z}{1-z}$$

- 于是

$$A(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \Rightarrow a_n = n$$

简单指数型递归

- 解递归方程

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, a_0 = 1$$

- 两边乘以z^n，然后关于 n 求和

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^n = 2z\sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^{n-1} + \frac{z}{1-z}$$

- 由于生成函数

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ , } A(z) - 1 = 2zA(z) + \frac{z}{1-z}$$

- 求得方程

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)}$$

- 应用部分和

$$a_n = \sum\nolimits_{0\leq k\leq n} 2^n = 2^{n+1} - 1$$

简单指数型递归

- 分式和

$$A(z)=\frac{1}{(1-z)(1-2z)}=\frac{2}{1-2z}-\frac{1}{1-z}$$

- 求和展开

$$[z^n]A(z)=[z^n]\left(\frac{2}{1-2z}-\frac{1}{1-z}\right)=2^{n+1}-1$$

斐波那契数列

- 解递归方程

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1$$

- 由生成函数

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$$

- 满足

$$F(z) = zF(z) + z^2 F(z) + z$$

- 导出

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \phi z} - \frac{1}{1 - \widehat{\phi} z}\right)$$

- 相加减

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \widehat{\phi}^n\right)$$

高阶线性递归

- 解递归方程

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, a_0 = 0, a_1 = 1$$

- 由生成函数

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

- 满足

$$A(z) - z = 5zA(z) - 6z^2 A(z)$$

- 导出

$$A(z) = \frac{z}{1 - 5z + 6z} = \frac{1}{1 - 3z} - \frac{1}{1 - 2z}$$

- 于是

$$a_n = (3^n - 2^n)$$

定理 求解高阶递归方程

- 对于高阶方程：

$$a_n = x_1 a_{n-1} + x_2 a_{n-2} + \cdots + x_t a_{n-t}$$

- 其生成函数

$$a(z) = \sum\nolimits_{\mathrm{n} \geq 0} a_n z^n$$

- 为有理函数

$$a(\mathrm{z}) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

- 其中

$$\mathrm{g}(z) = 1 - x_1 z - x_2 z^2 - \cdots - x_t z^t$$

- 而$f(z)$由数列初值

$$a_0, a_1, \ldots, a_t$$

决定，且次数小于t。

证明

证明：

$$\sum_{n\geq t} a_n z^n = x_1 \sum_{n\geq t} a_{n-1} z^n + x_2 \sum_{n\geq t} a_{n-2} z^n + \cdots + x_t \sum_{n\geq t} a_{n-t} z^n$$

$$\begin{aligned} a(z) - u_0(z) \\ &= \left(x_1 z a(z) - u_1(z)\right) + \left(x_2 z^2 a(z) - u_2(z)\right) + \cdots \\ &+ \left(x_t z^t a(z) - u_t(z)\right) \end{aligned}$$

其中$u_i(z), 0 \leq i \leq t$至多是 t-1 次的。

设

$$f(z) \equiv u_0(z) - u_1(z) - u_2(z) - \cdots - u_t(t)$$

则

$$a(z) = \frac{u_0(z) - u_1(z) - u_2(z) - \cdots - u_t(t)}{1 - x_1 z - x_2 z^2 - \cdots - x_t z^t} = \frac{f(z)}{g(z)}$$

■

例题

由$f(z)$次数小于 t，并且$f(z)=a(t)g(t)$，则必然有

$$f(z)=g(t)\sum_{0\le n<t} a_n z^n \pmod{z^t}$$

例题

$$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}\,(n>2, a_0=0, a_1=a_2=1)$$

$$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}\,(n>2, a_0=a_1=a_2=1)$$

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2a_{n-3}\,(n>2, a_0=1, a_1=0, a_2=-1)$$

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2a_{n-3}\,(n>2, a_0=0, a_1=1, a_2=4)$$

求解高阶递推方程的一般方法

- 有递推方程导出 ***g*(z)**
- 由 ***g*(z)** 和初始条件计算 ***f*(z)**
- 消去 ***f*(z)/*g*(z)** 中的公共因子
- 利用部分分式将 ***f*(z)/*g*(z)** 表示为形如 $(1-\beta z)^{-j}$ 的项的线性组合
- 将每个部分分式按一下公式展开

$$[z^n](1-\beta z)^{-j}=\binom{n+j-1}{j-1}\beta^n$$

快速排序的递归求解

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{1 \le k \le n} C_{k-1}, n \ge 1, C_0 = 0$$

$$nC_n = (n+1)n + 2 \sum_{1 \le k \le n} C_{k-1}$$

定义生成函数：

$$C(z) = \sum_{n \ge 0} C_n z^n$$

关于 n 求和：

$$\sum_{n \ge 1} nC_n z^n = \sum_{n \ge 1} (n+1)nz^n + 2 \sum_{n \ge 1} \sum_{1 \le k \le n} C_{k-1} z^n$$

快速排序的递归求解

由于

$$\sum_{n\geq 1} nC_n z^n = z\sum_{n\geq 1} nC_n z^{n-1} = z\sum_{n\geq 0}(n+1)C_{n+1}z^n = zC'(z)$$

$$\sum_{n\geq 1}(n+1)nz^n = z\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{1\leq k\leq n} C_{k-1}z^n = z\sum_{n\geq 0}\sum_{0\leq k\leq n} C_k z^n = \frac{zC(z)}{1-z}$$

可得生成函数的微分方程：

$$C'(z) = \frac{2}{(1-z)^3} + \frac{2C(z)}{1-z}$$

快速排序的递归求解

$$C'(z) - \frac{2}{1-z}C(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$(1-z)^2C'(z) - 2(1-z)C(z) = \frac{2}{1-z}$$

$$\left((1-z)^2C(z)\right)' = \frac{2}{1-z}$$

$$(1-z)^2C(z) = 2\ln\frac{1}{1-z} \Rightarrow C(z) = \frac{2}{(1-z)^2}\ln\frac{1}{1-z}$$

$$C_n = [z^n]\frac{2}{(1-z)^2}\ln\frac{1}{1-z} = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$$