第七次书面作业

（注：请大家仔细理解Karp论文中21个NPC问题的证明。可以基于Karp论文中的结论，或课本上以及讲过的NPC问题，完成对这些问题是NPC的证明。证明的关键是给出多项式时间的规约关系。并不要求全部完成，所以尽量独立思考）

1. 有效招聘

假设你正在帮助组织一个夏季运动营，遇到了下面的问题：有 n 项运动（排球、足球等），每一项都应该至少有一位熟悉的管理人员。现在已经收到了 m 个人的工作申请。对每项运动，都有一个或多个申请者能够胜任作为管理人员。问题是：对给定的数 $k<m$，能够至多聘用 k 位管理人员，并且对这 n 项运动中的每一项至少有一位管理人员是胜任的吗？称这个问题为**有效招聘**问题。

证明**有效招聘**是 NP 完全的。

2. 交集推理

考虑根据一个集合与其他集合交集的大小判断它的身份的推理问题。给你一个大小为 n 的有穷集合 U 和 U 的一组子集$A_1, A_2, \dots, A_m$，又给你一组数$c_1, c_2, \dots, c_m$。问题是：是否存在集合$X \subset U$，使得对每一个$i = 1,2,\dots,m$， $|X \cap A_i| = c_i$？我们说这是**交集推理**问题的一个实例，其输入为U，$\{A_i\}$和$\{c_i\}$。

证明**交集推理**是 NP 完全的。

3. 强独立集

给定图$G = (V, E)$和整数k。如果任意两个结点$v, u \in I$，边$(v, u) \notin E$，并且也没有u从v到的两条边的路径，即没有结点w使得$(v, w) \in E \wedge (w, u) \in E$，则称集合$I \subseteq V$是**强独立的**。强独立集问题是要确定$G$是否有一个大小不小于$k$的强独立集。

证明**强独立集**是 NP 完全的。

4. 资源预定

假设你正在为一个高性能实时系统的管理小组做咨询，在这个系统中异步进程使用共享的资源。系统有 n 个进程和 m 个资源。在任一给定的时刻，每一个进程指定一个它需要使用的资源的集合。每一个资源可能同时被多个进程需要，但它每次只能被一个进程使用。你的工作是把资源分配给那些需要它们的进程。如果一个进程分配到它需要的所有资源，那么说它是激活的；否则它是封锁的。你希望完成分配使得尽可能多的进程是激活的。于是，我们定义**资源预订**问题如下：给定进程集合和资源集合，每一个进程有一个它需要的资源子集，此外还有一个数 k，能够给进程分配资源使得至少有 k 个激活的进程吗？

考虑下述问题，对每个问题，或者给出它的多项式时间算法，或者证明它是 NP 完全的。

（a） 上述定义的一般的**资源预订**问题。

（b） 当 k=2 时的特殊情况。

（c） 问题的下述特殊情况：有两种类型的资源，并且对每种类型的资源，每个进程最多需要一个。

（d） 每个资源最多被两个进程需要的特殊情况。

5. 少量真变量单调可满足性

考虑可满足性问题的一个实例，它由布尔变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$上的子句$C_1, C_2, \ldots, C_m$给出。如果每个子句的每一项都是一个不带否定符的变量，即每一项等于某个x_i，而不是$\overline{x_i}$，则称这个实例是单调的。

给定可满足性的一个单调实例和一个数k，少量真变量单调可满足性问题问：这个实例有置 1 的变量数不超过k的满足赋值吗？证明这个问题是 NP 完全的。

6. 路径选择

路径选择问题问：给定有向图$G = (V, E)$，以及G上的路径$P_1, P_2, \ldots, P_m$和正整数k，问至少选择k条路径，并且任意两条选出的路径都不共享结点是可能的吗？证明这个问题是 NP 完全的。

7. 击中集

考虑集合$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$和$A$的子集$B_1, B_2, \ldots, B_m$（即对每一个$i$，$B_i \subseteq A$）。如果集合$H \subseteq A$至少包含每一个$B_i$的一个元素，即对每一个$i$，$H \cap B_i$非空（从而$H$“击中”所有的集合$B_i$），则称$H$是关于$B_1, B_2, \ldots, B_m$的击中集。

现在定义击中集问题如下，给定集合$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$和$A$的子集$B_1, B_2, \ldots, B_m$以及数 k，问：存在关于$B_1, B_2, \ldots, B_m$大小不超过 k的击中集$H \subseteq A$吗？证明这个问题是 NP 完全的。

8. 游戏装备交换

在某款游戏中，设有 n 个玩家 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 和 m 件游戏装备 $a_1, a_2, \ldots, a_m$。每个玩家 p_i 对游戏装备 a_j 都有一个心中的估价 $v_i(a_j)$，估价值为正整数。现 m 件游戏装备分别属于 n 个玩家。

本着利人利己的原则，玩家间可以交换游戏装备，当且仅当存在两个玩家 p_i 和 p_j，存在两个物品子集 A_i 和 A_j，A_i 被 p_i 拥有，A_j 被 p_j 拥有，满足

$$v_i(A_j) > v_i(A_i) \text{ 并且 } v_j(A_i) > v_j(A_j)$$

此时，p_i 可以拿 A_i 和 p_j 交换 A_j（注意 A_i 和 A_j 不必是 p_i 和 p_j 所拥有的全部装备）。显然在交换后，两个玩家都觉得自己所拥有装备的总价值更大了。

现需判断：在当前游戏状态下，是否存在两个玩家，他们之间可以交换游戏装备？证明该问题是 NP 完全的。