高等概率论

菠萝包萝卜

2025 年 9 月 11 日

参考书:《Probability: Theory and Examples》-Rick Durette,《概率论》-应坚刚,何萍

1 初等概率论

1.1 历史

从略

1.2 计数

n 个中取 r 个

排列数: 无放回下是 $\frac{n!}{(n-r)!}$,有放回下 n^r

组合数:$C_n^r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

1.3 古典概率论

Definition. 随机试验的样本空间 Ω,其中 Ω 样本的个数有限且等可能出现,那么对事件 $A \subset \Omega$ 定义

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

对于 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$,有

$$p(\omega_i) = \frac{1}{n}$$

值得一提的是,上述 A 是由若干基本事件 ω_i 组成的,$|A|$ 就是它所含 ω_i 的个数,如果有 l 个,那么

$$P(A) = \frac{l}{n}$$

样本空间 Ω 是全集;事件的集合又叫集族(簇)$\mathcal{F}$,它是以 Ω 某些子集为元素的集合;概率 P 是一个实值集函数,它的定义域是 $\mathcal{F}$ 值域是 $\mathbb{R}$。

容易看出,在古典的情况下,我们的 P 总是满足

1) 非负:$\forall A \subset \Omega, P(A) \geq 0$

2) 正则:$P(\Omega) = 1$

3) 有限可加:$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3') 可列可加:A_i 互不相容则 $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

独立随机试验中的事件 $A \subset \Omega_1, B \subset \Omega_2, A \times B \subset \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, 我们有

$$P(A \times B) = P_1(A)P_2(B)$$

Theorem 1.1. 容斥原理：如果 $A_1 \cdots A_n \in \mathcal{F}$ ，我们有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Proof. 利用数学归纳法，$n = 2$ 的时候显然
假设 $n - 1$ 的时候成立，$P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n)$ 再利用集合性质即可。 □

Problem 1.1. 匹配问题：n 个人取自己的帽子，恰有 k 个人拿到自己的帽子的概率。

Solution. 我们先取定 k 个人，有 C_n^k 种取法，这 k 个人全部拿对，则概率为 $\frac{1}{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}$，其余的 $n - k$ 个人全拿错，也就是全部没匹配上 $1 - \sum\limits_{i=1}^{n-k}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{n-k}(-1)^{i}\frac{1}{i!}$，组合起来概率就是

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \frac{1}{i!}$$

□

1.4 几何概型

Definition. 在一个有界区域 Ω 上随机地取一个点，落在子区域 D 上点概率是

$$P(\text{落在 D 中}) = \frac{m(D)}{m(\Omega)}$$

Problem 1.2. 约会问题：从略

2 概率空间和随机变量的分布

2.1 概率空间

Definition 2.1. 三元体 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间如果:
1.Ω 是所有结果的集合
2.$\mathcal{F}$ 是 Ω 子集的非空集合
3.P 是定义在 $\mathcal{F}$ 上的实值集函数，值域是 $[0,1]$
且 $\mathcal{F}$ 是一个 $\sigma-$ 代数，所谓 $\sigma-$ 代数是指
a.$\Omega \in \mathcal{F}$ 即全集在 $\mathcal{F}$ 里面
b. 若 $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ 即对补封闭
c. 一列 $A_i \in \mathcal{F}$ 有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

即对可列并封闭

Definition 2.2. 可测空间 (measurable space):$(\Omega, \mathcal{F})$ 的 $\mathcal{F}$ 是 $\sigma-$ 代数，且能够在 $\mathcal{F}$ 上定义测度。称定义在 $\mathcal{F}$ 上的实值集函数 μ 为测度，如果 μ 满足
1.$\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
2. 一列两两不交的 $A_i \in \mathcal{F}$ 有

$$\mu(+_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

3. 如果 $\mu(\Omega) = 1$ 称 μ 为概率测度

Theorem 2.1. *设 μ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个测度，则 μ 满足*
1. 单调性：$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2. 次可加：$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \mu(A) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$
3. 连续性：A_i 递增收敛于 A 则 $\mu(A_i) \to \mu(A)$，递减相同

Proof. 1.$B = A \cup (B - A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$

2. 进入首次分解 $A'_n = A_n \cap A, B_1 = A'_1$; 当 $n > 1$ 令 $B_n = A'_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A'_i$ 从而它们互不相容，容易证明一件事 $\cup_{i=1}^{n} B_i = \cup_{i=1}^{n} A'_i$ 对任意 n 成立，以及 $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} A'_i$
由于

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow A = A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i$$

通过性质 1 以及 $B_i \subset A_i$ 我们就有

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_m) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

3. 设 $B_n = A_n - A_{n-1}$ 于是他们两两不交，有 $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = A, \cup_{i=1}^{n} B_i = A_n$，从而

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

□

Example 2.1. 如伯努利试验 $(\Omega = \{A, \bar{A}\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}, P)$，其中

$$P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1, P(A) = p, P(\bar{A}) = 1 - p$$

Claim 2.2. $\alpha \in A$ 若 $\mathcal{F}_\alpha$ 是 $\sigma-$ 代数，则 $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \mathcal{F}_\alpha$ 仍然是 $\sigma-$ 代数

Proof. 1. 首先对于这些 $\mathcal{F}_\alpha$ 都有 $\Omega \in \mathcal{F}_\alpha$ 从而 $\Omega \in \cap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$

2. 设 $A \in \cap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$，于是 $A \in \mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \in A$，从而 $\bar{A} \in \mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \in A$ ，因此 $\bar{A} \in \cap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$

3. 设 $A_i, \cdots, A_n \cdots \in \cap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$，于是它们同时属于 $\mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \in A$，所以

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \in A$$

故

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha$$

□