高等概率论

菠萝包萝卜

2025 年 11 月 28 日

参考书:《Probability: Theory and Examples》-Rick Durette,《概率论》-应坚刚，何萍

1 初等概率论

2 概率空间和随机变量的分布

3 独立性

4 积分论

5 期望

6 独立性与期望

7 大数定律

8 强大数定律

9 随机序列的收敛性

10 中心极限定理：引子

10.1 棣莫弗-拉普拉斯定理

首先引进一个分析学的重要公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

然后我们就可以导出第一个中心极限定理，设 X_n $i.i.d.$, $P(X_i=1)=P(X_i=-1)=\frac{1}{2}, S_n = X_1+\ldots+X_n$，那么

$$P(S_n=2k) \sim (1-\frac{k^2}{n^2})^{-n}(1+\frac{k}{n})^{-k}(1-\frac{k}{n})^{k}(\pi n)^{-1/2}(1+\frac{k}{n})^{-1/2}(1-\frac{k}{n})^{-1/2} \to \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi n}}$$

如果 $\frac{2k}{\sqrt{2n}} \to x$ 成立，那么上面的极限过程成立，也就是

Theorem 10.1. 如果 $\frac{2k}{\sqrt{2n}} \to x$ 那么上面概率分布有 $P(S_{2n}=2k) \sim (\pi n)^{-1/2}e^{-x^2/2}$，进一步

$$P(a\sqrt{2n} \le S_{2n} \le b\sqrt{2n}) \to \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

Theorem 10.2. 如果 $a<b$ 那么当 $m\to\infty$ 的时候

$$P(a \le \frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} \le b) \to \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

10.2 弱收敛

Definition 10.1. 设 F_n 是一列分布函数，F 是一个分布函数，如果对于 F 的每一个连续点 $x\in\mathbb{R}$ 都有

$$F_n(x) \to F(x)$$

称 F_n 弱收敛于 F 记作

$$F_n \xrightarrow{w} F$$

如果随机变量序列 ξ_n 的分布函数弱收敛于 ξ 的分布函数，称为 ξ_n 依分布收敛到 ξ 记作

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$$

Theorem 10.3. 如果 $f_n \to f$ 为密度，那么 $\forall$ 博雷尔集 B 都有

$$|\int_B f_n dx - \int_B f dx| \le \int |f_n - f|dx = \int (f_n-f)^+ + (f_n-f)^- dx$$

另外

$$\int_B f_n - f dx = \int_B (f_n-f)^+ - (f_n-f)^- dx = 0$$

所以

$$|\int_B f_n dx - \int_B f dx| \le \int (f_n-f)^+ + (f_n-f)^- dx = 2\int_B (f-f_n)^+ dx \to 0$$

另外如果如果写为测度形式就是

$$||\mu_n - \mu|| = \sup_B |\mu_n(B) - \mu(B)| \to 0$$

Theorem 10.4. 如果 $F_n \xrightarrow{d} F$ 那么 $\exists r.v. Y_n \sim F_n$ 使得 $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y_\infty$，也就是说从分布函数弱收敛出发，可以得到一个 $a.s.$ 收敛的对应随机序列。

Remark. 其实只需要利用广义逆 $Y_n = F_n^{-1}(X), X \sim U(0,1)$ ，这个 X 对于所有的 n 是一致的。

Theorem 10.5. $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$ 如果对于任意有界连续函数 g 有 $Eg(X_n) \to Eg(X_\infty)$;
也就是说，如果 $F_n \xrightarrow{w} F$ 是分布，如果可积的话，对于有界连续的 g，总是会有

$$\int g(x)dF_n(x) = \int g(x)dF(x)$$

更进一步如果 $F_n \xrightarrow{w} F$ 但他们知识单调不减的右连续函数（不一定为分布），对于任意 F 的两个连续点 $a < b$,g 是 $[a,b]$ 上的连续函数，我们就有

$$\int_a^b g(x)dF_n(x) \to \int_a^b g(x)dF(x)$$

Theorem 10.6. g 是一个可测映射 $D_g = \{x : x\text{是}g(\cdot)\text{的连续点}\}$，如果 $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$，$P(X_\infty \in D_g) = 0$ 那么

$$g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$$

也就是说几乎处处连续的函数仍然保持了随机变量的依分布收敛。

Theorem 10.7. F_n 是一列分布函数，存在一个子列 F_{n_k} 和一个右连续的非递减的 F （不必为分布）使得对于 F 的每个连续点 x

$$F_{n_k}(x) \to F(x) \quad x \to \infty$$

Proof. 证明思路，就是用一个三角阵去从有理数点逼近，然后再利用稠密性去夹逼. □

Remark. 为什么可以不一定为分布，我们思考这样的一个东西，当 $a + b + c = 1$ ，并且 $F_n = a\mathbf{1}_{x\geq n} + b\mathbf{1}_{x\geq -n} + cG(x)$ 这里 G 是一个分布，那么

$$F_n(x) \to F(x) = b + G(x), \lim_{x\to-\infty} F(x) = b, \lim_{x\to+\infty} = b + c = 1 - a$$

总之这个极限不是分布。

Theorem 10.8. 上述极限 F 是一个分布函数，当且仅当如果 F_n 是紧的，也就是说 $\forall\epsilon > 0$, 存在一个M_ϵ $s.t.$

$$\limsup_{n\to\infty} 1 - F_n(M_\epsilon) + F_n(-M_\epsilon) \leq \epsilon$$

Theorem 10.9. $r.v. \xi_n \sim F_n, \xi \sim F$ 且 $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ 那么如果 $\forall x$ 是 F 的一个连续点，那么

$$F_n(x) \to F(x)$$

Proof. 自己之后补全 □

11 特征函数

Definition 11.1. 对于随机变量 X ，它的特征函数定义为

$$\phi_X(t) = Ee^{itX}$$

Theorem 11.1. 特征函数的性质

$a.|\phi(0)| = 1$

$b.\phi(-t) = \bar{\phi}(t)$

$c.|\phi(t)| = |Ee^{itX}| \leq E|e^{itX}| = 1$

$d.|\phi(t+h) - \phi(t)| \leq E|e^{ihX} - 1|$，$\phi$ 是一致连续的

$e.Ee^{it(aX+b)} = e^{itb}\phi_X(at)$

Theorem 11.2. X_1 和 X_2 独立，那么 $X_1 + X_2$ 的特征函数是

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)$$

Lemma 11.3. 如果 $F_1 \dots F_n$ 是分布函数列，拥有特征函数列 $\phi_1 \dots \phi_n$ 对于 $\lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$，那么 $\sum_{i=1}^n \lambda_i F_i$ 就有特征函数 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$

Proof. 积分可加性 □

Theorem 11.4. 逆转公式-设 $\phi(t) = \int e^{-itx}\mu(dx)$ 如果 $a < b$ 那么

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi(t)dt = \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\})$$

更进一步，测度在 a, b 的点连续的时候上式就是 $\mu(a,b)$

Lemma 11.5. 如果 $\phi(t)$ 是实值的，那么 X 和 $-X$ 同分布

Theorem 11.6. 如果 $\int |\phi(t)|dt < \infty$ 那么 μ 有一个连续型的密度

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ity}\phi(t)dt$$

Proof. 可以回顾书上证明. □

Theorem 11.7. 连续性定理，μ_n 是一列概率测度，特征函数 ϕ_n

如果 $\mu_n \xrightarrow{d} \mu_\infty$ 那么 $\phi_n(t) \to \phi_\infty(t)$

如果 $\phi_n(t) \to \phi_\infty(t)$ ，且 ϕ_∞ 在 0 连续，那么

$$\mu_n \xrightarrow{d} \mu_\infty$$

Theorem 11.8. 如果 $\int |x|^n \mu(dx) < \infty$ 那么特征函数 n 阶可导 $\phi^{(n)}(t) = \int (ix)^n e^{itx} \mu(dx)$，如此可以对特征函数作泰勒展开。

Proof. 证明参考林 □

12 中心极限定理

Theorem 12.1. 设 X_i 是独立同分布随机变量，$EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2 < \infty$ ，记 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 那么

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Proof. 利用特征函数泰勒展开 □

Theorem 12.2. *Lindeberg-Feller*：*Lindeberg* 条件 $\Leftrightarrow$ *Feller* 条件 *+clt*

13 条件期望

13.1 条件概率和全概率公式