高等概率论

菠萝包萝卜

2025 年 10 月 18 日

参考书:《Probability: Theory and Examples》-Rick Durette,《概率论》-应坚刚，何萍

1 初等概率论

1.1 历史

从略

1.2 计数

n 个中取 r 个

排列数: 无放回下是 $\frac{n!}{(n-r)!}$，有放回下 n^r

组合数：$C_n^r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

1.3 古典概率论

Definition. 随机试验的样本空间 Ω，其中 Ω 样本的个数有限且等可能出现，那么对事件 $A \subset \Omega$ 定义

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

对于 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$，有

$$p(\omega_i) = \frac{1}{n}$$

值得一提的是，上述 A 是由若干基本事件 ω_i 组成的，$|A|$ 就是它所含 ω_i 的个数，如果有 l 个，那么

$$P(A) = \frac{l}{n}$$

样本空间 Ω 是全集；事件的集合又叫集族（簇）$\mathcal{F}$，它是以 Ω 某些子集为元素的集合；概率 P 是一个实值集函数，它的定义域是 $\mathcal{F}$ 值域是 $\mathbb{R}$。

容易看出，在古典的情况下，我们的 P 总是满足

1) 非负：$\forall A \subset \Omega, P(A) \geq 0$

2) 正则：$P(\Omega) = 1$

3) 有限可加:$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3’) 可列可加:A_i 互不相容则 $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

独立随机试验中的事件 $A \subset \Omega_1, B \subset \Omega_2, A \times B \subset \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, 我们有

$$P(A \times B) = P_1(A)P_2(B)$$

Theorem 1.1. 容斥原理：如果 $A_1 \cdots A_n \in \mathcal{F}$ ，我们有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Proof. 利用数学归纳法，$n = 2$ 的时候显然
假设 $n-1$ 的时候成立，$P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n)$ 再利用集合性质即可。 □

Problem 1.1. 匹配问题：n 个人取自己的帽子，恰有 k 个人拿到自己的帽子的概率。

Solution. 我们先取定 k 个人，有 C_n^k 种取法，这 k 个人全部拿对，则概率为 $\frac{1}{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}$，其余的 $n-k$ 个人全拿错，也就是全部没匹配上 $1 - \sum\limits_{i=1}^{n-k} (-1)^{i-1} \frac{1}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}$，组合起来概率就是

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

□

1.4 几何概型

Definition. 在一个有界区域 Ω 上随机地取一个点，落在子区域 D 上点概率是

$$P(\text{落在 D 中}) = \frac{m(D)}{m(\Omega)}$$

Problem 1.2. 约会问题：从略

2 概率空间和随机变量的分布

2.1 概率空间

Definition 2.1. 三元体 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间如果:
1.Ω 是所有结果的集合
2.$\mathcal{F}$ 是 Ω 子集的非空集合
3.P 是定义在 $\mathcal{F}$ 上的实值集函数，值域是 $[0,1]$
且 $\mathcal{F}$ 是一个 $\sigma-$ 代数，所谓 $\sigma-$ 代数是指
a.$\Omega \in \mathcal{F}$ 即全集在 $\mathcal{F}$ 里面
b. 若 $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ 即对补封闭
c. 一列 $A_i \in \mathcal{F}$ 有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

即对可列并封闭

Definition 2.2. 可测空间 (measurable space):$(\Omega, \mathcal{F})$ 的 $\mathcal{F}$ 是 $\sigma-$ 代数，且能够在 $\mathcal{F}$ 上定义测度。称定义在 $\mathcal{F}$ 上的实值集函数 μ 为测度，如果 μ 满足
1.$\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
2. 一列两两不交的 $A_i \in \mathcal{F}$ 有

$$\mu(+_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

3. 如果 $\mu(\Omega) = 1$ 称 μ 为概率测度

Theorem 2.1. *设 μ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个测度，则 μ 满足*
1. 单调性：$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2. 次可加：$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \mu(A) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$
3. 连续性：A_i 递增收敛于 A 则 $\mu(A_i) \to \mu(A)$，递减相同

Proof. 1.$B = A \cup (B - A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$

2. 进入首次分解 $A'_n = A_n \cap A, B_1 = A'_1$; 当 $n > 1$ 令 $B_n = A'_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A'_i$ 从而它们互不相容，容易证明一件事 $\cup_{i=1}^{n} B_i = \cup_{i=1}^{n} A'_i$ 对任意 n 成立，以及 $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} A'_i$
由于

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow A = A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i$$

通过性质 1 以及 $B_i \subset A_i$ 我们就有

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_m) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

3. 设 $B_n = A_n - A_{n-1}$ 于是他们两两不交，有 $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = A, \cup_{i=1}^{n} B_i = A_n$，从而

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

□

Example 2.1. 如伯努利试验 $(\Omega=\{A,\bar{A}\},\mathcal{F}=\{\emptyset,A,\bar{A},\Omega\},P)$，其中

$$P(\emptyset)=0,P(\Omega)=1,P(A)=p,P(\bar{A})=1-p$$

Claim 2.2. $\alpha\in A$ 若 $\mathcal{F}_\alpha$ 是 $\sigma-$ 代数，则 $\bigcap\limits_{\alpha\in A}\mathcal{F}_\alpha$ 仍然是 $\sigma-$ 代数

Proof. 1. 首先对于这些 $\mathcal{F}_\alpha$ 都有 $\Omega\in\mathcal{F}_\alpha$ 从而 $\Omega\in\cap_\alpha\mathcal{F}_\alpha$

2. 设 $A\in\cap_\alpha\mathcal{F}_\alpha$，于是 $A\in\mathcal{F}_\alpha,\forall\alpha\in A$，从而 $\bar{A}\in\mathcal{F}_\alpha,\forall\alpha\in A$ ，因此 $\bar{A}\in\cap_\alpha\mathcal{F}_\alpha$

3. 设 $A_1,\cdots,A_n\cdots\in\cap_\alpha\mathcal{F}_\alpha$，于是它们同时属于 $\mathcal{F}_\alpha,\forall\alpha\in A$，所以

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}_\alpha,\forall\alpha\in A$$

故

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\bigcap_{\alpha}\mathcal{F}_\alpha$$

□

Claim 2.3. 我们称 $\sigma(\mathcal{A})$ 是由 $\mathcal{A}$ 生成的 $\sigma-$ 域，如果 $\mathcal{A}$ 是一个 Ω 的集类，$\sigma(\mathcal{A})$ 是所有 $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}_\alpha$ 的 $\mathcal{F}_\alpha$ 的交

2.2 随机变量以及其分布

Definition 2.3. 称 X 是一个随机变量，如果 X 是一个 $\Omega\to\mathbb{R}$ 的实值函数，如果它满足 $\forall A\in\mathcal{B}$，满足

$$X^{-1}(A)=\{\omega:X(\omega)\in A\}\in\mathcal{F}$$

换句话说，对 *Borel* 集 A，使得 $X(\omega)$ 落在 A 上的这些 ω 形成的集合是在事件域 $\mathcal{F}$ 中的，我们就称 X 是 $\mathcal{F}-$ 可测的.
这里有一些要素，就是在概率论中我们讨论的 $\mathcal{F}$ 一般是不变的，而在随机分析中为了方便测度变换，我们的 $\mathcal{F}$ 不一定是不变的.

Example 2.2. 示性函数是可测的 $I_A(\omega)=\begin{cases}1,\omega\in A\\0,\omega\notin A\end{cases}$，其中 $A\in\mathcal{F}$.

Definition 2.4. 设 X 是一个随机变量，引入一个概率测度 $\mu(\cdot)$ 使得

$$\mu(A)=P(X\in A)=P(\{\omega:X(\omega)\in A\})=P(X^{-1}(A))$$

其中 $A\in\mathcal{B}$, 称这样的测度为 X 的概率分布.

Definition 2.5. 称 $F(x)$ 是一个分布函数，如果 P 是随机变量 X 的一个概率分布，且

$$F(x)=P(X\leq x)$$

Theorem 2.4. 分布函数 F 的性质

(i) 单调不减;

(ii) $F(+\infty)=1, F(-\infty)=0$;

(iii) 右连续 $\lim_{y\to x^+}F(y)=F(x)$

(iv) $F(x-)=\lim_{y\to x^-}F(y)\Rightarrow F(x-)=P(X<x)$

(v) $P(X=x)=F(x)-F(x-)$

Proof. (i) 如果 $x\le y$ 有 $\{X\le x\}\subset\{X\le y\}$，从而由概率测度的性质

$$F(x)\le F(y)$$

(ii) 因为 $\{X\le x\}\xrightarrow{x\to\infty}\Omega;\{X\le x\}\xrightarrow{x\to-\infty}\emptyset$ 从而

$$F(+\infty)=1, F(-\infty)=0$$

(iii) 由于 $y\searrow x\Rightarrow\{X\le y\}\searrow\{X\le x\}$，考虑 $y_n=x+\frac{1}{n}$ 它是从右边趋向 x 的，即 $\bigcap_1^\infty\{X\le y_n\}=\{X\le x\}$ 从而

$$F(x)=P(X\le x)=P(\bigcap_1^\infty\{X\le y_n\})=\lim_{n\to\infty}F(X\le y_n)=\lim_{n\to\infty}F(y_n)$$

(iv) 取 $y_n=x-\frac{1}{n}$ 同上即可

(v) 由 $\{X=x\}=\{X\le x\}/\{X<x\}$ 立得. □

Theorem 2.5. 如果一个函数满足刚才的前三条性质，则它是某个随机变量的分布函数.

Proof. 令 $\Omega=(0,1),\mathcal{F}=\mathcal{B},P$ 是 *Lebesgue* 测度，并设

$$X(\omega)=\sup\{y:F(y)<\omega\}$$

简单的说就是 $X(\omega)=$ 使得$F(y)<\omega$的最大y, 于是如果有

$$\{\omega:X(\omega)\le x\}=\{\omega:\omega\le F(x)\}$$

那么结论就可以得证，这是因为 $P(\omega\le F(x))=P(0<\omega\le F(x))=F(x)$ ，下面说明这件事

$\Leftarrow$ 如果$\omega\le F(x)$ 于是 $x\notin\{y:F(y)<\omega\}$ 从而由$X(\omega)$的定义得 $X(\omega)\le x$

$\Rightarrow$ 如果 $X(\omega)\le x$ ，假设$\omega>F(x)$ 于是由于F右连续, 存在一个$\epsilon>0,\omega>F(x+\epsilon)$

由$X(\omega)$的定义就有 $x+\epsilon\le X(\omega)\Rightarrow x<x+\epsilon\le X(\omega)$，这与$\omega\le F(x)$矛盾!

□

Remark. 称刚才的 $X(\omega)=F^{-1}$ 为 F 广义逆，并且有 $P(\{\omega:F^{-1}(\omega)\le x\})=F(x)$，从而我们作一个随机变量 $\xi\sim U(0,1)$，$F^{-1}(\xi)$ 就是以 F 为分布函数.

Definition 2.6. 称随机变量 X,Y 同分布，如果对 $\forall x$ 成立

$$P(X\le x)=P(Y\le x)$$

Definition 2.7. 如果

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

我们称 X 有密度函数 $f \Leftrightarrow f \geq 0, \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

Remark. 在有密度的情况下 $P(X = x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(y)dy = 0$

Definition 2.8. 称 X 是一个随机变量，如果 X 是一个 $\Omega \to S$ 的映射，它把 $(\Omega, \mathcal{F})$ 映到了 $(S, \mathcal{S})$，对于 $\forall A \in \mathcal{S}$，满足

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$$

称 X 是 $\mathcal{F}-$ 可测映射；特别地，如果 $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$，则 X 为 d 维的随机向量。

Theorem 2.6. *如果* $\{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ *对任意的* $A \in \mathcal{A}$ *成立，其中* $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{A})$，*则* X *是* $\mathcal{S}$ *可测的.*

Proof. 注意到 $\{X \in B\} = \{\omega : X(\omega) \in B\}$，我们有

$$\{\omega : X(\omega) \in S\} = \Omega \in \mathcal{F}$$
$$\{X \in \cup_i B_i\} = \cup_i \{B_i\}$$
$$\{X \in B^c\} = \{X \in B\}^c$$

其中 S 是 $\mathcal{S}$ 对应空间，于是

$$\mathcal{B} = \{B : \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}\}$$

是一个 $\sigma-$ 代数，因为 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$，并且 $\mathcal{A}$ 生成了 $\mathcal{S}$，从而 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ □

由上我们得到了如果 $\mathcal{S}$ 是 $\sigma-$ 代数，则 $\{\{X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$ 是 $\sigma-$ 代数，它是使得 X 是可测映射的最小的 Ω上的$\sigma-$ 代数，我们称其为由 X 生成的 $\sigma-$ 域，记作 $\sigma(X) = \{\{X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$

Theorem 2.7. *如果* $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$，$f : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ *都是可测映射，那么* $f \circ X$ *是* $(\Omega, \mathcal{F}) \to (T, \mathcal{T})$ *的可测映射*

Proof. 令 $B \in \mathcal{T}$ 有

$$\{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \in B\} = \{\omega : X(\omega) \in f^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}$$

这是因为

$$f^{-1}(B) = \{A : f(A) \in B\} \in \mathcal{S}, X^{-1}(f^{-1}(B)) = \{\omega : X(\omega) \in f^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}$$

□

Theorem 2.8. *如果* $X_1, \cdots, X_n$ *是随机变量，并且，*$f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n) \to (\mathbb{R}, \mathcal{R})$ *是可测的，那么* $f(X_1, \cdots, X_n)$ *是一个随机变量*

Proof. 由于

$$\{(X_1,\cdots,X_n)\in A_1\times\cdots\times A_n\}=\bigcap_i\{X_i\in A_i\}\in\mathcal{F}$$

这样由上一个定理 $(X_1,\cdots,X_n):(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{R}^n)$ ，并且，$f:(\mathbb{R}^n,\mathcal{R}^n)\to(\mathbb{R},\mathcal{R})$ 可测，从而

$$f\circ[(X_1,\cdots,X_n)\circ(\omega)]$$

可测，也就是说是个随机变量. □

Theorem 2.9. 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是随机变量，那么 $X_1+\cdots+X_n$ 也是随机变量

Proof. 由上一个定理由于

$$\{(x_1,\cdots,x_n)|x_1+\cdots+x_n<a\}\in\mathcal{R}^n$$

于是显然可测. □

Theorem 2.10. 如果 $X_1,X_2\cdots$ 是随机变量，那么

$$\inf_n X_n,\sup_n X_n,\limsup_n X_n,\liminf_n X_n$$

都是随机变量.

Proof. 由于

$$\{\omega:\inf_n X_n(\omega)<a\}=\bigcup_n\{\omega:X_n(\omega)<a\}\in\mathcal{F}$$
$$\{\omega:\sup_n X_n(\omega)>a\}=\bigcup_n\{\omega:X_n(\omega)>a\}\in\mathcal{F}$$

从而前两个为随机变量，而后面的两个，我们用等价定义

$$\liminf_n X_n=\lim_n\inf_{m\geq n}X_m=\sup_n(\inf_{m\geq n}X_m)$$
$$\limsup_n X_n=\lim_n\sup_{m\geq n}X_m=\inf_n(\sup_{m\geq n}X_m)$$

再由前两个是随机变量，它们立为随机变量；等价定义的说明留个白，有时间再做补充。 □

Remark. $\Omega_0=\{\omega:\lim_n X_n\text{存在}\}=\{\omega:\limsup_n X_n-\liminf_n X_n=0\}$ 是一个可测集合，如果

$$P(\Omega_0)=1$$

那么称 X_n 几乎必然收敛，记作

$$X_n(\omega)\xrightarrow{a.s.}X(\omega)$$

3 独立性

3.1 两个对象

1. 两个事件 A, B 独立: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
2. 两个随机变量 X, Y 独立: $P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C)P(Y \in D)$ 对 $\forall C, D \in \mathcal{R}$ 成立
3. 两个 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 独立:$P(A \cap B) = P(A)P(B), \forall A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$

Theorem 3.1. *(i)$X \perp Y \Rightarrow \sigma(X) \perp \sigma(Y)$*
(ii)$\mathcal{F} \perp \mathcal{G}, X \in \mathcal{F}, Y \in \mathcal{G} \Rightarrow X \perp Y$

Proof. 回忆一下 $\sigma(X)$ 的定义:

$$\sigma(X) := \{\{\omega : X(\omega) \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$$

i) 现在，如果 $A \in \sigma(X)$，于是 $A = \{\omega : X(\omega) \in C\}, C \in \mathcal{R}$，类似的 $B = \{\omega : Y(\omega) \in D\}, D \in \mathcal{R}$，然后由随机变量独立的定义

$$P(A \cap B) = P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C)P(Y \in D) = P(A)P(B)$$

进而 $\sigma(X) \perp \sigma(Y)$
ii) 现在 $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$，如果 $X \in \mathcal{F}, Y \in \mathcal{G}$，且任意 $C, D \in \mathcal{R}$ 由定义就有

$$\{\omega : X(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}, \{\omega : Y(\omega) \in D\} \in \mathcal{G}$$

由于 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 独立，接着就有

$$P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C)P(Y \in D)$$

□

Remark. 注意对于 $X \in \mathcal{F}, Y \in \mathcal{G}$ 这种写法有点奇怪，实际上它是 X 是 $\mathcal{F}-$ 可测的,Y 是 $\mathcal{G}-$ 可测的；或者等价的我们说

$$\{\omega : X(\omega) \in B_1\} \in \mathcal{F}$$
$$\{\omega : X(\omega) \in B_2\} \in \mathcal{G}$$

对任意 Borel 集合 B_1, B_2 成立

Theorem 3.2. *(i) $A \perp B \Rightarrow A^c \perp B$*
(ii) $A \perp B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \perp \mathbf{1}_B$

Proof. (i)$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$

(ii) $\Rightarrow$ 如果 $C, D \in \mathcal{R}$，于是

$$\{\omega : \mathbf{1}_A(\omega) \in C\} \in \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \{\omega : \mathbf{1}_B(\omega) \in D\} \in \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$$

这样，只要有一个是空集或者全集，那么是一定符合独立定义的，而当两个都不是空集 or 全集的时候 $P(\mathbf{1}_A \in C, \mathbf{1}_B \in D) = P(\hat{A}, \hat{B}) = P(\hat{A})P(\hat{B})$ 进而满足随机变量独立的定义.

$\Leftarrow$ 反之 $\forall C, D \in \mathcal{R}$ 总有

$$P(\mathbf{1}_A \in C, \mathbf{1}_B \in D) = P(\mathbf{1}_A \in C)P(\mathbf{1}_B \in D)$$

同样由

$$\{\omega:\mathbf{1}_A(\omega)\in C\}\in\{\emptyset,A,A^c,\Omega\},\{\omega:\mathbf{1}_B(\omega)\in D\}\in\{\emptyset,B,B^c,\Omega\}$$

我们容易知道存在恰当的 C,D 使得

$$\{\omega:\mathbf{1}_A\in C\}=A,\{\omega:\mathbf{1}_B\in D\}=B$$

这样就得到了

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

□

3.2 有穷对象

(1) $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}_1\cdots\mathcal{F}_n$ 是独立的，如果

$$\forall A_i\in\mathcal{F}_i\Rightarrow P(\bigcap_1^n A_i)=\prod_i^n P(A_i)$$

(2) 随机变量 $X_1\cdots X_n$ 独立，如果

$$\forall B_i\in\mathcal{R}\text{有}P(\bigcap_i^n\{X_i\in B_i\})=\prod P(X_i\in B_i)$$

(3) 集合 $A_1\cdots A_n$ 独立，如果

$$\forall I\subset\{1,\cdots,n\},P(\bigcap_i A_i)=\prod_{i\in I}P(A_i)$$

Theorem 3.3. 设 $A_1\cdots A_n$ 是独立的，则有
(i) $A_1^c,A_2,\cdots,A_n$ 独立
(ii) $\mathbf{1}_{A_1}\cdots\mathbf{1}_{A_n}$ 独立

Proof. 从略 □

Definition 3.1. 两两独立 (pairwise independent)，一列事件 $A_1\cdots A_n$，如果对于 $i\neq j$，始终有

$$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)$$

Example 3.1. 经典的四面体染色，可以得到两两独立但是非相互独立

3.3 独立的其他说法

集类 $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_n\subset\mathcal{F}$ 是独立的，对于 $I\subset\{1,2\cdots,n\}$，如果

$$P(\bigcap_{i\in I}A_i)=\prod_{i\in I}P(A_i),\forall A_i\in\mathcal{A}_i$$

不失一般性，我们假设 $\Omega\in\mathcal{A}_i$，在这种情况下上述条件就是

$$P(\bigcap_1^n A_i)=\prod_1^n P(A_i),\forall A_i\in\mathcal{A}_i$$

Definition 3.2. 称集类 $\mathcal{A}$ 为 $\pi-$ 系，他的元素（集合）对交运算封闭:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

Theorem 3.4. $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ 是独立的并且各自是个 $\pi-$ 系，那么 $\sigma(\mathcal{A}_1) \cdots \sigma(\mathcal{A}_n)$ 是独立的。

Proof. 证明从略 □

Theorem 3.5. $\forall x_1 \cdots, x_n \in (-\infty, +\infty], P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i)$ 那么 $X_1 \cdots X_n$ 是独立的.

Proof. 设 $\mathcal{A}_i = \{\{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}, x_i \in (-\infty, +\infty]\}$ ，因为

$$\{\omega : X_i(\omega) \leq x\} \cap \{\omega : X_i(\omega) \leq y\} = \{X_i \leq \min\{x, y\}\}$$

所以 $\mathcal{A}_i$ 是个 $\pi-$ 系，注意到 $\Omega = \{X_i \leq \infty\} \in \mathcal{A}_i, i.e. x_i = \infty$ 由上一个定理就有 $\sigma(\mathcal{A}_1) \cdots \sigma(\mathcal{A}_n)$ 独立，再由作业 1.3.1, 由于诸 $\mathcal{A}_i = \{\{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}, x_i \in (-\infty, +\infty]\}$，所以说它生成了 $\sigma(X)$; 也就是说 $\sigma(\mathcal{A}_i) = \sigma(X_i) \Rightarrow \sigma(X_1) \cdots \sigma(X_n)$ 独立 □

Theorem 3.6. $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m(i)$ 是独立的，设

$$\mathcal{G}_i = \sigma(\bigcup_j \mathcal{F}_{ij})$$

则这些 $\mathcal{G}_i$ 相互独立.

Theorem 3.7. $X_{i,j}(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m(i))$ 是独立的，而函数 $f_i : \mathbb{R}^{m(i)} \to \mathbb{R}$ 是可测的，那么

$$f_i(X_{i,1}, \cdots, X_{i,m(i)})$$

是独立的.

Theorem 3.8. $X_1, \cdots, X_n$ 是独立的随机变量，X_i 有一个概率分布 μ_i，于是 $(X_1, \cdots, X_n)$ 有分布 $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$

Theorem 3.9. X, Y 是独立的，$F(x) = P(X \leq x), G(y) = P(Y \leq y)$，于是

$$P(X + Y \leq z) = \int F(z - y) dG(y)$$

Proof. 直接代换积分

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq z) &= \iint \mathbf{1}_{(x+y \leq z)} dF(x) dG(y) = \iint \mathbf{1}_{(x \leq z-y)} dF(x) dG(y) \\ &= \int F(z - y) dG(y) \end{aligned}$$

□

Theorem 3.10. 如果 X 有密度 f,Y 有分布函数 G, $X \perp Y$, 则 $X+Y$ 的密度是

$$\int f(x-y)dG(y)$$

当 Y 也有密度 g ，那么 $X+Y$ 的密度是

$$\int f(x-y)g(y)dy$$

4 积分论

4.1 定义积分

所谓积分就是要去研究三元体概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上定义的 $\int f d\mu$

路线：简单函数–> 有界函数–> 非负函数–> 一般函数

第一步：简单函数

Definition 4.1. 所谓简单函数，就是形如

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$$

其中这些 A_i 不交，且测度 $\mu(A_i) < \infty$

定义

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

称为 Ω 上 ϕ 的积分.

Definition 4.2. 称 $\phi \geq \psi$ *a.e.* （几乎处处），如果 $\mu(\{\omega : \phi(\omega) \geq \psi(\omega)\}) = 1$

Lemma 4.1. *设 ϕ, ψ 是简单函数，则*

(i) 如果 $\phi \geq 0$ a.e.，则 $\int \phi d\mu \geq 0$

(ii) 对于任意的 $a \in \mathbb{R}, \int a\phi d\mu = a \int \phi d\mu$

(iii)$\int \phi + \psi d\mu = \int \phi d\mu + \int \psi d\mu$

Proof. (i) 和 (ii) 由定义是显然的，而对于 (iii)

令 $\phi = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}, \psi = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{1}_{\mathbf{B_j}}$，这样

$$\phi + \psi = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (a_i b_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}$$

这里 $A_i \cap B_j$ 是不交的，且 $A_0 = \bigcup_i B_i - \bigcup_i A_i, B_0 = \bigcup_i A_i - \bigcup_i B_i, a_0 = b_0 = 0$ ，于是

$$\begin{aligned}
\int (\phi + \psi) d\mu &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i \mu(A_i) + \sum_{b=j}^{n} b_j \mu(B_j) = \int \phi d\mu + \int \psi d\mu
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.2. *如果 (i),(iii) 成立，那么*

(iv) 如果 $\phi \leq \psi$ a.e. 那么 $\int \phi d\mu \leq \int \psi d\mu$

(v) 如果 $\phi = \psi$ a.e. 那么 $\int \phi d\mu = \int \psi d\mu$

另外，(ii) 告诉我们当 $a=-1$ 我们又有 (vi) $|\int \phi d\mu| \leq \int |\phi| d\mu$

Proof. 由 (iii)，$\int \psi d\mu = \int \phi d\mu + \int (\psi - \phi) d\mu$，然后由条件，

$$\psi - \phi \geq 0 \ a.e.$$

这样第二项积分由 (i) 是非负的，进而 (iv) 得证

为了证明 (v)，由于 $\phi = \psi \ a.e. \Leftrightarrow \phi \geq \psi \ a.e.$且$\phi \leq \psi \ a.e.$，再回到 (iv) 就有

$$\int \phi d\mu \leq \int \psi d\mu, \int \psi d\mu \leq \int \phi d\mu \Rightarrow \int \phi d\mu = \int \psi d\mu$$

而对于 (vi)，注意到 $\phi \leq |\phi|, -\phi \leq |\phi|$，我们就可以知道

$$\int \phi d\mu \leq \int |\phi| d\mu, \int -\phi d\mu = -\int \phi d\mu \leq \int |\phi| d\mu$$

整合上面两个式子就是

$$\left| \int \phi d\mu \right| \leq \int |\phi| d\mu$$

□

第二步：在有限测度集上的有界函数

Definition 4.3. 令 E 是有限测度集合，并且 f 是定义在 E 上的有界函数，为了定义积分，我们注意到如果 ϕ, ψ 是简单函数，且 $\phi \leq f \leq \psi$ 我们就有

$$\int \phi d\mu \leq \int f d\mu \leq \int \psi d\mu$$

所以我们定义此时函数 f 的积分是

$$\int f d\mu = \sup_{\phi \leq f} \int \phi d\mu = \inf_{\psi \geq f} \int \psi d\mu$$

也就是说从 f 的下侧和上侧分别取两个简单函数来做逼近，下侧简单函数积分的上确界和上侧简单函数积分的下确界应该是相等的值

为什么相等？事实上由刚才的 (iv) 可以立即得到

$$\sup_{\phi \leq f} \int \phi d\mu \leq \inf_{\psi \geq f} \int \psi d\mu$$

我们现在需要证明

$$\sup_{\phi \leq f} \int \phi d\mu \geq \inf_{\psi \geq f} \int \psi d\mu$$

不妨设 $|f| \leq M$ 并且设

$$E_k = \{x \in E : \frac{kM}{n} \geq f(x) > \frac{(k-1)M}{n}\} \quad -n \leq k \leq n$$

$$\psi_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{kM}{n} \mathbf{1}_{E_k}, \phi_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(k-1)M}{n} \mathbf{1}_{E_k}$$

由定义 $\psi_n(x) - \phi(x) = \frac{M}{n} \mathbf{1}_E$ 于是

$$\int \psi_n(x) - \phi_n(x) d\mu = \frac{M}{n} \mu(E)$$

因为 $\phi_n(x)\le f(x)\le\psi(x)$，由简单函数积分保号性

$$\sup_{\phi\le f}\int\phi d\mu\ge\int\phi_n d\mu=\frac{-M}{n}\mu(E)+\int\psi_n d\mu\ge\frac{-M}{n}\mu(E)+\inf_{\psi\ge f}\int\psi d\mu$$

这里令 $n\to\infty$ 就证明了 $\sup_{\phi\le f}\int\phi d\mu\ge\inf_{\psi\ge f}\int\psi d\mu$

Lemma 4.3. 如果 f,g 是在 E 上的有界函数，其中 $\mu(E)<\infty$，那么
(i) 如果 $f\ge0$ *a.e.*，那么 $\int fd\mu\ge0$
(ii) 对于任意 $a\in\mathbb{R}$,$\int afd\mu=a\int fd\mu$
(iii) $\int f+g\ d\mu=\int fd\mu+\int gd\mu$
(iv) 如果 $g\le f$ *a.e.* 那么 $\int gd\mu\le\int fd\mu$
(v) 如果 $g=f$ *a.e.* 那么 $\int gd\mu=\int fd\mu$
(vi)$|\int fd\mu|\le\int|f|d\mu$

Proof. (i) 我们在之前的下侧 ϕ 中取 $\phi=0$ ，于是显然成立

(ii) 注意到如果 $a>0$ 那么 $a\phi\le af\Leftrightarrow\phi\le f$ 所以

$$\int afd\mu=\sup_{\phi\le f}\int a\phi d\mu=\sup_{\phi\le f}a\int\phi d\mu=a\sup_{\phi\le f}\int\phi d\mu=a\int fd\mu$$

如果 $a<0$ 那么有 $a\phi\le af\Leftrightarrow\phi\ge f$ 所以

$$\int afd\mu=\sup_{\phi\ge f}\int a\phi d\mu=\sup_{\phi\ge f}a\int\phi d\mu=a\inf_{\phi\ge f}\int\phi d\mu=a\int fd\mu$$

(iii) 假设 $\psi_1\ge f,\psi_2\ge g$ 那么 $\psi_1+\psi_2\ge f+g$, 换句话说

$$A:=\{\psi|\psi\ge f+g\},B:=\{\psi_1+\psi_2|\psi_1\ge f,\psi_2\ge g\}$$

如果一个函数 $h\in B$ 那么 $h\ge f+g$ 所以 $h\in A$，即 $B\subset A$，也就是 A 的函数选择会更多; 于是

$$\inf_{h\in A}\int hd\mu\le\inf_{h\in B}\int hd\mu$$

等价地就是

$$\inf_{\psi\ge f+g}\int\psi d\mu\le\inf_{\psi_1\ge f,\psi_2\ge g}\int\psi_1+\psi_2 d\mu$$

这样就有

$$\int f+gd\mu\le\int fd\mu+\int gd\mu$$

然后把刚才的结论用在 $-f,-g$ 上又可以得到

$$-\int f+gd\mu\le-\int fd\mu-\int gd\mu$$

(iv)-(vi) 的话仿照之前的办法，并利用这里的 (i)-(iii) 就可以证明 □

Remark. 我们在 E 上的积分总是满足

$$\int_E fd\mu=\int_\Omega f\mathbf{1}_E d\mu$$

第三步：非负函数

Definition 4.4. 如果 $f \geq 0$，我们定义

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int h d\mu : 0 \leq h \leq f, h\text{是有界的并且}\mu(\{x : h(x) > 0\} < \infty)\right\}$$

也就是说我们从 f 的下方来对他进行逼近，从而用逼近函数的积分值上确界来估计这个积分

Lemma 4.4. 设 $E_n \uparrow \Omega$ 有 $\mu(E_n) < \infty$ 并且设 $a \wedge b = \min(a, b)$ ，那么有

$$\int_{E_n} f \wedge n d\mu \uparrow \int f d\mu \text{ 当} n \uparrow \infty$$

Proof. 从 Lemma 4.3 的 (iv) 可以知道 $\int_{E_n} f \wedge n d\mu$ 是随着 n 递增的，不仅因为 $h = (f \wedge n)\mathbf{1}_{E_n}$ 中的 $f \wedge n \leq f \wedge (n+1)$，而且非负函数的区域 $E_n \subset E_{n+1}$，这样显然是有

$$\int_{E_n} f \wedge n d\mu = \int_{E_n} h d\mu \leq \int h d\mu \leq \int f d\mu$$

当然取个上极限就是

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{E_n} f \wedge n d\mu \leq \int f d\mu$$

现在的问题是要证明极限是 $\int f d\mu$，找一个 h 使得 $0 \leq h \leq f$ ，存在 M 使得 $0 \leq h \leq M$ $\mu(\{x : h(x) > 0\}) < \infty$，对于 $n \geq M$ 我们有

$$\int_{E_n} f \wedge n d\mu \geq \int_{E_n} h d\mu = \int h d\mu - \int_{E_n^c} h d\mu$$

现在 $0 \leq \int_{E_n^c} h d\mu \leq M\mu(E_n^c \cap \{x : h(x) > 0\}) \to 0$ ，因为 $E_n \uparrow \Omega \Rightarrow E_n^c \to \emptyset$，因此

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{E_n} f \wedge n d\mu \geq \int h d\mu$$

再由 h 任意性

$$\int f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{E_n} f \wedge n d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{E_n} f \wedge n d\mu \geq \sup \int h d\mu = \int f d\mu$$

证毕. □

Lemma 4.5. 假设 $f, g \geq 0$

(i) $\int f d\mu \geq 0$

(ii) 如果 $a > 0$ 那么 $\int a f d\mu = a \int f d\mu$

(iii) $\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

(iv) $0 \leq g \leq f$ *a.e.* 那么 $\int g d\mu \leq \int f d\mu$

(v) $0 \leq g = f$ *a.e.* 那么 $\int g d\mu = \int f d\mu$

这里我们丢弃了 *(vi)* 性质因为对于 $f \geq 0$ 绝对值符号可以去掉，然后显然成立！

Proof. (i) 取个 $h = 0$ ，由定义 4.4 ，就有 $\int f d\mu \geq 0$

(ii) 当 $a > 0$，则 $ah \leq af \Leftrightarrow h \leq f$，我们就有

$$\int a h d\mu = a \int h d\mu$$

这样在定义空间里取个 sup 就是

$$\int afd\mu = \sup_h \int ahd\mu = \sup_h a \int hd\mu = a\sup_h \int hd\mu = a\int fd\mu$$

(iii) 我们观察到如果 $f \geq h, g \geq k$ 那么 $f+g \geq h+k$ ，就像引理 4.3(iii) 的证明一样，取 sup 就是

$$\int f+gd\mu \geq \int fd\mu + \int gd\mu$$

然后还要证明不等式另一边才能说明相等，由于对于非负的 a, b有$(a+b)\wedge n \leq (a\wedge n)+(b\wedge n)$(这是因为 $a+b \leq n$ 时有 $a, b \leq n$ 从而右边为 $a+b$,$a+b>n$ 时右边可以是 $n+a$ $n+b, a+b$ 均比 n 大，进而不等式成立)，所以有

$$\int_{E_n} (f+g)\wedge nd\mu \leq \int_{E_n} f\wedge nd\mu + \int_{E_n} g\wedge nd\mu$$

由 4.4 的引理，$n\to\infty$ 的时候就有

$$\int f+gd\mu \leq \int fd\mu + \int gd\mu$$

这样 (iii) 也证明好了

(iv)(v) 利用前面的三条几乎是显然的. □

最后一步：一般函数

Definition 4.5. 我们说 f 是可积的，如果 $\int |f|d\mu < \infty$，设

$$f^+(x) = f(x)\vee 0, f^-(x) = (-f(x))\vee 0$$

显然有

$$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$$

并且 $f^+, f^- \leq |f|$，这样定义 f 的积分就是

$$\int fd\mu = \int f^+d\mu - \int f^-d\mu$$

我们给出如下两个引理

Lemma 4.6. 如果 $f = f_1 - f_2$ ，这里 $f_1, f_2 \geq 0$ 且 $\int f_i d\mu < \infty$ 那么

$$\int fd\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$$

Proof. 事实上由 $f = f^+ - f^-$ 我们就有 $f_1 + f^- = f_2 + f^+$ 注意到它们非负，由引理 4.5 就有

$$\int f_1 d\mu + \int f^- d\mu = \int f_1 + f^- d\mu = \int f_2 + f^+ d\mu = \int f_2 d\mu + \int f^+ d\mu$$

移项就是

$$\int fd\mu = \int f^+d\mu - \int f^-d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$$

□

Lemma 4.7. 假设 f, g 是可积的，那么

(i) 如果 $f \geq 0$ $a.e.$ 那么 $\int f d\mu \geq 0$

(ii) 对于任意 $a \in \mathbb{R}$ 有 $\int af d\mu = a \int f d\mu$

(iii) $\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

(iv) 如果 $g \leq f$ $a.e.$ 那么 $\int g d\mu \leq \int f d\mu$

(v) 如果 $g = f$ $a.e.$ 那么 $\int g d\mu = \int f d\mu$

(vi) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$

Proof. (i) $f = f^+ - f^-$ 这里由于 $f \geq 0$ $a.e.$ 所以 $\mu(\{x : f^-(x) > 0\}) = 0$，于是

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int_{\{x:f^-(x)>0\}} f^- d\mu = \int f^+ d\mu \geq 0$$

(ii)$a = 0$ 显然成立，当 $a > 0$ 时，$(af)^+ = af^+$ 其他同理，就得到

$$\int af d\mu = \int (af)^+ - (af)^- d\mu = a \int f^+ d\mu - a \int f^- d\mu = a \int f d\mu$$

当 $a < 0$ 时，$(af)^+ = -af^-$ 其他同理，就有

$$\int af d\mu = \int (af)^+ - (af)^- d\mu = a \int -f^- d\mu + a \int f^+ d\mu = a \int f d\mu$$

(iii) 注意到 $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ 用引理 4.6 就有

$$\int f + g d\mu = \int (f^+ + g^+) - (f^- + g^-) d\mu = \int f^+ - f^- d\mu + \int g^+ - g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

最中间的等号隐去了使用引理的那一步. □

Remark. 几种值得注意的情况

(a) 当概率空间是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}^d, \lambda)$，我们写为 $\int f(x) dx$

(b) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ 且 $E = [a, b]$ 写为 $\int_a^b f(x) dx$

(c) $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mu)$ ，其中 $\mu((a, b]) = G(b) - G(a)$,，我们写为 $\int f(x) dG(x)$

(d) 当 Ω 是个可数集，$\mathcal{F}$ 是 Ω 所有子集形成的集类，我们写为 $\sum_{i \in \Omega} f(i)$

4.2 积分的一些性质

Theorem 4.8. *Jensen's-Inequality:* 假设 ϕ 是下凸的，也就是说

$$\lambda \phi(x) + (1 - \lambda) \phi(y) \geq \phi(\lambda x + (1 - \lambda) y)$$

对于任意 $\lambda \in (0, 1), x, y \in \mathbb{R}$ 成立；如果 μ 是一个概率测度，并且 $f, \phi(f)$ 是可积的，那么

$$\phi(\int f d\mu) \leq \int \phi(f) d\mu$$

(下凸内期望小)

Proof. 令 $c = \int f d\mu$ 并令 $l(x) = ax + b$ 满足 $l(c) = \phi(c), \phi(x) \geq l(x)$；这样的 l 一定是存在的，我们有

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\phi(c) - \phi(c - h)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{\phi(c + h) - \phi(c)}{h}$$

至少上面这两个单侧极限是存在的，因为凸性保证了割线斜率的单调性和局部有界性。然后设 a 是任意一个介于上面两个极限的值，并设

$$l(x) = a(x - c) + \phi(c)$$

这样 l 就有我们需要的两个性质；然后由积分的性质

$$\int \phi(f)d\mu \geq \int (af + b)d\mu = a\int f d\mu + b = l\left(\int f d\mu\right) = \phi\left(\int f d\mu\right)$$

最后一步是 $c = \int f d\mu, l(c) = \phi(c)$ 得到的。 □

Definition 4.6. 函数 f 的 L_p 范数:$||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$

Lemma 4.9. *Young's-Inequality:*$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ 对于 $x, y > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 总是成立的.

Proof. 由古典分析的 Jensen's-Inequality

$$xy = e^{\frac{\ln x^p}{p} + \frac{\ln y^q}{q}} \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

□

Theorem 4.10. *Hölder-Inequality:* 如果 $p, q \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，那么

$$\int |fg|d\mu \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

Proof. 如果 $||f||_p, ||g||_q$ 中有一个为零，那么 $|fg| = 0$ $a.e.$ 于是不等式显然成立，下面讨论两个均非零的情况

令 $\tilde{f} = \frac{f}{||f||_p}, \tilde{g} = \frac{g}{||g||_q}$，于是

$$||\tilde{f}||_p = 1 = ||\tilde{g}||_q$$

然后

$$|\tilde{f} \cdot \tilde{g}| \leq \frac{|\tilde{f}|^p}{p} + \frac{|\tilde{g}|^q}{q}$$

由 Young's 取积分立即得

$$\int |fg|d\mu \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

□

Remark. $p = q = 2$ 的时候为 Cauchy-Inequality

接下来探讨积分与极限的换序操作。

Definition 4.7. 依测度收敛：称函数列 f_n 依测度收敛到 f ，如果对于 $\forall \epsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$$

记作

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

Theorem 4.11. 有界收敛定理：设 E 是一个有限测度集，f_n 定义在 E 上，若 $|f_n(x)| \leq M$，并且 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 那么

$$\int f d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Proof. $\forall \epsilon > 0$ 设 $G_n = \{x : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\}$，$B_n = E - G_n$，我们有

$$\begin{aligned} |\int f d\mu - \int f_n d\mu| = |\int (f - f_n) d\mu| &\leq \int |f - f_n| d\mu \\ &= \int_{G_n} |f - f_n| d\mu + \int_{B_n} |f - f_n| d\mu \\ &\leq \epsilon\mu(E) + 2M\mu(B_n) \end{aligned}$$

由于 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 所以上式子小于某个 $C\epsilon$，证毕. □

Lemma 4.12. *Fatou's-Lemma*：如果 $f_n \geq 0$ 则

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

Proof. 设 $g_n(x) = \inf_{m\geq n} f_m(x)$ 于是 $f_n(x) \geq g_n(x)$，$n \to \infty$ 时有

$$g_n(x) \uparrow g(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

显然 $\int f_n d\mu \geq \int g_n d\mu$，我们只需证下面这个式子就好了

$$\liminf_{n\to\infty} \int g_n d\mu \geq \int g d\mu$$

设 $E_m \uparrow \Omega$ 是一列有限测度集，由于 $g_n \geq 0$ 且对于固定的 m

$$(g_n \wedge m) \cdot \mathbf{1}_{E_m} \to (g \wedge m) \cdot \mathbf{1}_{E_m} \ a.e.$$

上面这一步是因为 $g_n(x)$ 点态收敛到 $g(x)$，然后在 E_m 中两个部分是 $g_n \wedge m = \frac{g_n + m - |g_n - m|}{2}, g \wedge m = \frac{g + m - |g - m|}{2}$ 是关于 g_n, m, g 的一些连续映射。由于

$$\int g_n d\mu \geq \int_{E_m} g_n \wedge m d\mu$$

再由有界收敛定理

$$\liminf_{n\to\infty} \int g_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_{E_m} g_n \wedge m d\mu \to \int_{E_m} g \wedge m d\mu$$

再对积分取个 sup

$$\liminf_{n} \int g_n d\mu \geq \sup_{m} \int_{E_m} g \wedge m d\mu = \int g d\mu$$

代入 $g(x) = \liminf_n f_n(x)$ 就有

$$\liminf_{n} \int f_n d\mu \geq \liminf_{n} \int g_n d\mu \geq \int g d\mu$$

□

Theorem 4.13. 单调收敛定理：如果 $f_n \geq 0$ 并且 $f_n \uparrow f$ 那么

$$\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$$

Proof. 由法图引理有

$$\liminf_n \int f_n d\mu \geq \int \liminf_n f_n d\mu = \int f d\mu$$

另一方面

$$f_n \leq f$$

这样就有

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

□

Remark. 事实上可以把 $f_n \geq 0$ 换成一个 $f_n \geq g$ 其中 g 是个可积函数，结论仍然成立.

Theorem 4.14. 控制收敛定理：如果 $f_n \to f$ *a.e.*，$|f_n| \leq g$ 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立，并且 g 是可积的，那么

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

Proof. 由 $|f_n| \leq g \Rightarrow -g \leq f_n \leq g \Rightarrow f_n + g \geq 0$ 然后由法图引理就有

$$\liminf_n \int f_n + g d\mu \geq \int f + g d\mu$$

由于 g 与 n 无关，利用可加性和可积性拆掉它

$$\liminf_n \int f_n d\mu \geq \int f d\mu$$

类似的通过 $g - f_n \geq 0$，再利用法图引理是

$$\liminf_n \int g - f_n d\mu \geq \int g - f d\mu \Rightarrow \limsup_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

这样就有

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \leq \limsup_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

两边夹，证毕. □