Homework 5

菠萝包萝卜

2025 年 11 月 28 日

1 HW-5

Problem 1.1. 2.5.1. Suppose $X_1, X_2, \ldots$ are i.i.d. with $EX_i = 0$, $\text{var}(X_i) = C < \infty$. Use Theorem 2.5.5 with $n = m^\alpha$ where $\alpha(2p-1) > 1$ to conclude that if $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ and $p > 1/2$ then $S_n/n^p \to 0$ almost surely.

Solution. 取 $n_k = [k^\alpha]$，其中 [] 是下取整号，对于任意整数 n，存在唯一的 k 使得 $n_k \le n < n_{k+1}$。在此区间内，由于分母 $n^p \ge n_k^p$ 且分子 $|S_n| \le \max_{1\le i\le n_{k+1}} |S_i|$，我们有如下放缩：

$$\frac{|S_n|}{n^p} \le \frac{\max_{1\le i\le n_{k+1}} |S_i|}{n_k^p}$$

对于任意 $\epsilon > 0$，定义事件 $E_k = \{\max_{1\le i\le n_{k+1}} |S_i| > \epsilon n_k^p\}$。根据 Kolmogorov 极大值不等式：

$$P(E_k) \le \frac{\text{Var}(S_{n_{k+1}})}{(\epsilon n_k^p)^2} = \frac{n_{k+1} C}{\epsilon^2 n_k^{2p}}$$

由于 $n_k \sim k^\alpha, n_{k+1} \sim (k+1)^\alpha \sim k^\alpha$，对于充分大的 k，存在常数 C', C'' 使得：

$$P(E_k) \le \frac{C n_{k+1} C'}{\epsilon^2 k^{2p\alpha}} \le \frac{C''}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{k^{\alpha(2p-1)}}$$

利用题目给定条件 $\alpha(2p-1) > 1$，可知级数 $\sum_{k=1}^\infty P(E_k)$ 收敛。由 Borel-Cantelli 引理可得 $P(E_k \text{ i.o.}) = 0$。

这意味着对于充分大的 k，几乎处处地有 $\max_{1\le i\le n_{k+1}} |S_i| \le \epsilon n_k^p$。因此：

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n^p} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{\max_{1\le i\le n_{k+1}} |S_i|}{n_k^p} \le \epsilon$$

由于 ϵ 的任意性，我们得出结论：$S_n/n^p \to 0 \ a.s.$ □

Problem 1.2. 3.2.4. Fatou's lemma. Let $g \ge 0$ be continuous. If $X_n \Rightarrow X_\infty$ then

$$\liminf_{n\to\infty} Eg(X_n) \ge Eg(X_\infty)$$

Solution. 这是依分布收敛的法图引理，对于任意常数 $M > 0$，定义截断函数 $g_M(x) = \min(g(x), M)$。由于 g 是连续的且 M 是常数，函数 g_M 也是连续的。同时，g_M 是有界的 $(0 \le g_M(x) \le M)$。

根据海莱定理，对于有界连续函数 g_M，有：

$$\lim_{n\to\infty} E[g_M(X_n)] = E[g_M(X_\infty)]$$

由于 $g(x) \geq g_M(x)$ 对所有 x 成立，我们有 $E[g(X_n)] \geq E[g_M(X_n)]$。对不等式两边取下极限：

$$\liminf_{n\to\infty} E[g(X_n)] \geq \liminf_{n\to\infty} E[g_M(X_n)] = \lim_{n\to\infty} E[g_M(X_n)] = E[g_M(X_\infty)]$$

该不等式 $\liminf_{n\to\infty} E[g(X_n)] \geq E[g_M(X_\infty)]$ 对任意 $M > 0$ 都成立。现在令 $M \to \infty$。由于 $g(x) \geq 0$，当 $M \uparrow \infty$ 时，$g_M(X_\infty)$ 单调递增收敛于 $g(X_\infty)$。根据单调收敛定理

$$\lim_{M\to\infty} E[g_M(X_\infty)] = E[g(X_\infty)]$$

因此，结论成立：

$$\liminf_{n\to\infty} E[g(X_n)] \geq E[g(X_\infty)]$$

$\square$

Problem 1.3. 3.3.7. Suppose that $X_n \Rightarrow X$ and X_n has a normal distribution with mean 0 and variance σ_n^2. Prove that $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \in [0, \infty)$.

Solution. 正态分布随机变量 $X_n \sim N(0, \sigma_n^2)$ 的特征函数为：

$$\varphi_n(t) = E[e^{itX_n}] = e^{-\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2}$$

因为 $X_n \Rightarrow X$，根据正极限定理，$\varphi_n(t)$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 逐点收敛于 X 的特征函数 $\varphi(t)$，并且 $\varphi(t)$ 在 $t = 0$ 处是连续的。

首先证明序列 $\{\sigma_n^2\}$ 是有界的。假设 $\{\sigma_n^2\}$ 无界，则存在子列 $\{\sigma_{n_k}^2\}$ 使得 $\sigma_{n_k}^2 \to \infty$。此时对于任意 $t \neq 0$：

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t) = \lim_{k\to\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{n_k}^2 t^2} = 0$$

而当 $t = 0$ 时，$\varphi_{n_k}(0) = 1$。因此，极限函数 $g(t)$ 为：

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

显然 $g(t)$ 在 $t = 0$ 处不连续，这与正极限定理的 $\varphi(t)$ 在 0 处连续性矛盾。因此 $\{\sigma_n^2\}$ 必须是有界的。

设 $\{\sigma_n^2\}$ 的任意两个收敛子列为 $\{\sigma_{n_k}^2\}$ 和 $\{\sigma_{m_j}^2\}$（由于序列有界，根据 Bolzano-Weierstrass 定理，至少存在一个收敛子列）。设它们的极限分别为 a 和 b（$a, b \in [0, \infty)$）。

对于子列 $\{\sigma_{n_k}^2\}$，其对应的特征函数收敛于：

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t) = e^{-\frac{1}{2}at^2}$$

对于子列 $\{\sigma_{m_j}^2\}$，其对应的特征函数收敛于：

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{m_j}(t) = e^{-\frac{1}{2}bt^2}$$

由于原序列 $\varphi_n(t)$ 收敛于唯一的 $\varphi(t)$，因此它的所有子列的极限必须相等。即对任意 t：

$$e^{-\frac{1}{2}at^2} = \varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}bt^2}$$

取 $t = 1$，由单调性则有 $e^{-a/2} = e^{-b/2} = e^{-\sigma^2/2}$，从而推出 $a = b$，换言之我们证明了有界的 σ_n^2 数列的任意收敛子列的极限相同且为 σ^2，从而 $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ $\square$

Problem 1.4. 3.3.8. Show that if X_n and Y_n are independent for $1 \le n \le \infty$, $X_n \Rightarrow X_\infty$ and $Y_n \Rightarrow Y_\infty$ then $X_n + Y_n \Rightarrow X_\infty + Y_\infty$.

Solution. 令 $\varphi_{X_n}(t)$ 和 $\varphi_{Y_n}(t)$ 分别为 X_n 和 Y_n 的特征函数。由于 X_n 与 Y_n 相互独立，它们的和 $S_n = X_n + Y_n$ 的特征函数为两者特征函数的乘积：

$$\varphi_{S_n}(t) = E[e^{it(X_n+Y_n)}] = E[e^{itX_n}]E[e^{itY_n}] = \varphi_{X_n}(t)\varphi_{Y_n}(t)$$

根据已知条件 $X_n \Rightarrow X_\infty$ 和 $Y_n \Rightarrow Y_\infty$，由正极限定理

$$\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_{X_\infty}(t) \quad \text{以及} \quad \varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_{Y_\infty}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

因此，对于乘积取极限：

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) \cdot \lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_\infty}(t)\varphi_{Y_\infty}(t)$$

注意到右边的 $\varphi_{X_\infty}(t)\varphi_{Y_\infty}(t)$ 正是两个独立随机变量 X_∞ 和 Y_∞ 之和 $X_\infty + Y_\infty$ 的特征函数（两个相互独立的随机序列极限必然也是独立的）。由于极限函数在 $t = 0$ 处显然连续（因为 φ_{X_∞} 和 φ_{Y_∞} 都是特征函数，且 $\varphi(0) = 1$），由逆极限定理，即可得出结论：

$$X_n + Y_n \Rightarrow X_\infty + Y_\infty$$

□

Problem 1.5. 3.3.16. Show that if $\lim_{t\downarrow 0}(\varphi(t) - 1)/t^2 = c > -\infty$ then $EX = 0$ and $E|X|^2 = -2c < \infty$. In particular, if $\varphi(t) = 1 + o(t^2)$ then $\varphi(t) \equiv 1$.

Solution. 已知 $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-1}{t^2} = c$。根据特征函数的共轭性质 $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$，我们考察实部 $\mathrm{Re}(\varphi(t))$。

先去证明二阶矩有限，考虑极限的实部，有 $\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{Re}(\varphi(t))-1}{t^2} = c$，即：

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \mathrm{Re}(\varphi(t))}{t^2} = -c$$

将特征函数写成积分形式 $\varphi(t) = \int e^{itx} dF(x)$，则实部为 $\int \cos(tx) dF(x)$。于是：

$$\frac{1 - \mathrm{Re}(\varphi(t))}{t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dF(x)$$

被积函数非负，且当 $t \to 0$ 时，$\frac{1-\cos(tx)}{t^2} \to \frac{x^2}{2}$。应用 Fatou 引理：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \liminf_{t\to 0} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dF(x) \le \liminf_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dF(x)$$

代入极限值，得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2} dF(x) \le -c \implies E[X^2] \le -2c < \infty$$

再考虑利用泰勒展开确定期望与方差，因为 $E[X^2] < \infty$，故 $E|X| < \infty$，且 $\varphi(t)$ 二阶连续可导。我们可以进行泰勒展开：

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + o(t^2)$$

已知 $\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=iE[X]$，$\varphi''(0)=i^2E[X^2]=-E[X^2]$。将展开式代入题目给定的极限条件：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-1}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{iE[X]t-\frac{1}{2}E[X^2]t^2+o(t^2)}{t^2}=c$$

为了使极限存在且为有限常数 c，分子中的一次项系数必须为 0，否则极限为 ∞。

$$\therefore iE[X]=0 \implies E[X]=0$$

此时极限值为二次项系数：

$$-\frac{1}{2}E[X^2]=c \implies E[X^2]=-2c$$

特别地，如果 $\varphi(t)=1+o(t^2)$，这对应于上述 $c=0$ 的情况。根据结论，$E[X^2]=0$。对于随机变量，$E[X^2]=0$ 意味着 $X=0\ a.s.$，退化为 0 的特征函数为 $\varphi(t)=E[e^{it\cdot 0}]=1$。故 $\varphi(t)\equiv 1$。 □

Problem 1.6. 3.4.5. Self-normalized sums. Let $X_1, X_2, ...$ be i.i.d. with $EX_i=0$ and $EX_i^2=\sigma^2\in(0,\infty)$. Then

$$\frac{\sum_{m=1}^n X_m}{(\sum_{m=1}^n X_m^2)^{1/2}}\Rightarrow\chi$$

Solution. 记 $S_n=\sum_{m=1}^n X_m$ 为分子，$V_n=(\sum_{m=1}^n X_m^2)^{1/2}$ 为分母。我们将分式上下同时除以 $\sqrt{n}$：

$$\frac{S_n}{V_n}=\frac{S_n/\sqrt{n}}{(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n X_m^2)^{1/2}}$$

对于分子，由于 X_i 独立同分布，$E[X_i]=0$，$\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2<\infty$。根据中心极限定理：

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Rightarrow N(0,\sigma^2)\overset{d}{=}\sigma Z$$

其中 $Z\sim N(0,1)$ 是标准正态分布变量。

对于分母根据强大数定律（其实弱大数定律这里也 ok），样本二阶矩几乎处处收敛于总体二阶矩：

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n X_m^2\xrightarrow{a.s.}E[X_1^2]=\sigma^2$$

由连续映射定理，分母收敛于：

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n X_m^2\right)^{1/2}\xrightarrow{a.s.}\sqrt{\sigma^2}=\sigma$$

我们有序列 $Y_n=\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sigma Z$ 以及 $W_n=\frac{V_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{p}\sigma$（常数）。由 Slutsky 定理

$$\frac{Y_n}{W_n}\Rightarrow\frac{\sigma Z}{\sigma}=Z$$

因此，题设随机序列收敛于标准正态分布 χ □