高等概率论

菠萝包萝卜

2025 年 9 月 25 日

参考书:《Probability: Theory and Examples》-Rick Durette,《概率论》-应坚刚，何萍

1 初等概率论

1.1 历史

从略

1.2 计数

n 个中取 r 个
排列数: 无放回下是 $\frac{n!}{(n-r)!}$，有放回下 n^r
组合数：$C_n^r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

1.3 古典概率论

Definition. 随机试验的样本空间 Ω，其中 Ω 样本的个数有限且等可能出现，那么对事件 $A \subset \Omega$ 定义

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

对于 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$，有

$$p(\omega_i) = \frac{1}{n}$$

值得一提的是，上述 A 是由若干基本事件 ω_i 组成的，$|A|$ 就是它所含 ω_i 的个数，如果有 l 个，那么

$$P(A) = \frac{l}{n}$$

样本空间 Ω 是全集；事件的集合又叫集族（簇）$\mathcal{F}$，它是以 Ω 某些子集为元素的集合；概率 P 是一个实值集函数，它的定义域是 $\mathcal{F}$ 值域是 $\mathbb{R}$。

容易看出，在古典的情况下，我们的 P 总是满足

1) 非负：$\forall A \subset \Omega, P(A) \geq 0$

2) 正则：$P(\Omega) = 1$

3) 有限可加:$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3') 可列可加:A_i 互不相容则 $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

独立随机试验中的事件 $A \subset \Omega_1, B \subset \Omega_2, A \times B \subset \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, 我们有

$$P(A \times B) = P_1(A)P_2(B)$$

Theorem 1.1. 容斥原理：如果 $A_1 \cdots A_n \in \mathcal{F}$ ，我们有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Proof. 利用数学归纳法，$n = 2$ 的时候显然
假设 $n-1$ 的时候成立，$P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n)$ 再利用集合性质即可。 □

Problem 1.1. 匹配问题：n 个人取自己的帽子，恰有 k 个人拿到自己的帽子的概率。

Solution. 我们先取定 k 个人，有 C_n^k 种取法，这 k 个人全部拿对，则概率为 $\frac{1}{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}$，其余的 $n-k$ 个人全拿错，也就是全部没匹配上 $1 - \sum\limits_{i=1}^{n-k}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!} = \sum\limits_{i=0}^{n-k}(-1)^{i}\frac{1}{i!}$，组合起来概率就是

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \frac{1}{i!}$$

□

1.4 几何概型

Definition. 在一个有界区域 Ω 上随机地取一个点，落在子区域 D 上点概率是

$$P(\text{落在 D 中}) = \frac{m(D)}{m(\Omega)}$$

Problem 1.2. 约会问题：从略

2 概率空间和随机变量的分布

2.1 概率空间

Definition 2.1. 三元体 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间如果:
1.Ω 是所有结果的集合
2.$\mathcal{F}$ 是 Ω 子集的非空集合
3.P 是定义在 $\mathcal{F}$ 上的实值集函数，值域是 $[0,1]$
且 $\mathcal{F}$ 是一个 $\sigma-$ 代数，所谓 $\sigma-$ 代数是指
a.$\Omega \in \mathcal{F}$ 即全集在 $\mathcal{F}$ 里面
b. 若 $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ 即对补封闭
c. 一列 $A_i \in \mathcal{F}$ 有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

即对可列并封闭

Definition 2.2. 可测空间 (measurable space):$(\Omega, \mathcal{F})$ 的 $\mathcal{F}$ 是 $\sigma-$ 代数，且能够在 $\mathcal{F}$ 上定义测度。称定义在 $\mathcal{F}$ 上的实值集函数 μ 为测度，如果 μ 满足
1.$\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
2. 一列两两不交的 $A_i \in \mathcal{F}$ 有

$$\mu(+_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

3. 如果 $\mu(\Omega) = 1$ 称 μ 为概率测度

Theorem 2.1. *设 μ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个测度，则 μ 满足*
1. 单调性：$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2. 次可加：$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \mu(A) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$
3. 连续性：A_i 递增收敛于 A 则 $\mu(A_i) \to \mu(A)$，递减相同

Proof. 1.$B = A \cup (B - A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$

2. 进入首次分解 $A'_n = A_n \cap A, B_1 = A'_1$; 当 $n > 1$ 令 $B_n = A'_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A'_i$ 从而它们互不相容，容易证明一件事 $\cup_{i=1}^{n} B_i = \cup_{i=1}^{n} A'_i$ 对任意 n 成立，以及 $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} A'_i$
由于

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow A = A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i$$

通过性质 1 以及 $B_i \subset A_i$ 我们就有

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_m) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

3. 设 $B_n = A_n - A_{n-1}$ 于是他们两两不交，有 $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = A, \cup_{i=1}^{n} B_i = A_n$，从而

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

$\square$

Example 2.1. 如伯努利试验 $(\Omega=\{A,\bar{A}\},\mathcal{F}=\{\emptyset,A,\bar{A},\Omega\},P)$，其中

$$P(\emptyset)=0,P(\Omega)=1,P(A)=p,P(\bar{A})=1-p$$

Claim 2.2. $\alpha\in A$ 若 $\mathcal{F}_\alpha$ 是 $\sigma-$ 代数，则 $\bigcap\limits_{\alpha\in A}\mathcal{F}_\alpha$ 仍然是 $\sigma-$ 代数

Proof. 1. 首先对于这些 $\mathcal{F}_\alpha$ 都有 $\Omega\in\mathcal{F}_\alpha$ 从而 $\Omega\in\cap_\alpha\mathcal{F}_\alpha$

2. 设 $A\in\cap_\alpha\mathcal{F}_\alpha$，于是 $A\in\mathcal{F}_\alpha,\forall\alpha\in A$，从而 $\bar{A}\in\mathcal{F}_\alpha,\forall\alpha\in A$ ，因此 $\bar{A}\in\cap_\alpha\mathcal{F}_\alpha$

3. 设 $A_1,\cdots,A_n\cdots\in\cap_\alpha\mathcal{F}_\alpha$，于是它们同时属于 $\mathcal{F}_\alpha,\forall\alpha\in A$，所以

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}_\alpha,\forall\alpha\in A$$

故

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\bigcap_{\alpha}\mathcal{F}_\alpha$$

□

Claim 2.3. 我们称 $\sigma(\mathcal{A})$ 是由 $\mathcal{A}$ 生成的 $\sigma-$ 域，如果 $\mathcal{A}$ 是一个 Ω 的集类，$\sigma(\mathcal{A})$ 是所有 $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}_\alpha$ 的 $\mathcal{F}_\alpha$ 的交

2.2 随机变量以及其分布

Definition 2.3. 称 X 是一个随机变量，如果 X 是一个 $\Omega\to\mathbb{R}$ 的实值函数，如果它满足 $\forall A\in\mathcal{B}$，满足

$$X^{-1}(A)=\{\omega:X(\omega)\in A\}\in\mathcal{F}$$

换句话说，对 *Borel* 集 A，使得 $X(\omega)$ 落在 A 上的这些 ω 形成的集合是在事件域 $\mathcal{F}$ 中的，我们就称 X 是 $\mathcal{F}-$ 可测的.

这里有一些要素，就是在概率论中我们讨论的 $\mathcal{F}$ 一般是不变的，而在随机分析中为了方便测度变换，我们的 $\mathcal{F}$ 不一定是不变的.

Example 2.2. 示性函数是可测的 $I_A(\omega)=\begin{cases}1,\omega\in A\\0,\omega\notin A\end{cases}$ ，其中 $A\in\mathcal{F}$.

Definition 2.4. 设 X 是一个随机变量，引入一个概率测度 $\mu(\cdot)$ 使得

$$\mu(A)=P(X\in A)=P(\{\omega:X(\omega)\in A\})=P(X^{-1}(A))$$

其中 $A\in\mathcal{B}$, 称这样的测度为 X 的概率分布.

Definition 2.5. 称 $F(x)$ 是一个分布函数，如果 P 是随机变量 X 的一个概率分布，且

$$F(x)=P(X\leq x)$$

Theorem 2.4. 分布函数 F 的性质

(i) 单调不减;

(ii) $F(+\infty)=1, F(-\infty)=0$;

(iii) 右连续 $\lim_{y\to x^+}F(y)=F(x)$

(iv) $F(x-)=\lim_{y\to x^-}F(y)\Rightarrow F(x-)=P(X<x)$

(v) $P(X=x)=F(x)-F(x-)$

Proof. (i) 如果 $x\le y$ 有 $\{X\le x\}\subset\{X\le y\}$，从而由概率测度的性质

$$F(x)\le F(y)$$

(ii) 因为 $\{X\le x\}\xrightarrow{x\to\infty}\Omega;\{X\le x\}\xrightarrow{x\to-\infty}\emptyset$ 从而

$$F(+\infty)=1, F(-\infty)=0$$

(iii) 由于 $y\searrow x\Rightarrow\{X\le y\}\searrow\{X\le x\}$，考虑 $y_n=x+\frac{1}{n}$ 它是从右边趋向 x 的，即 $\bigcap\limits_1^\infty\{X\le y_n\}=\{X\le x\}$ 从而

$$F(x)=P(X\le x)=P(\bigcap_1^\infty\{X\le y_n\})=\lim_{n\to\infty}F(X\le y_n)=\lim_{n\to\infty}F(y_n)$$

(iv) 取 $y_n=x-\frac{1}{n}$ 同上即可

(v) 由 $\{X=x\}=\{X\le x\}/\{X<x\}$ 立得. $\square$

Theorem 2.5. 如果一个函数满足刚才的前三条性质，则它是某个随机变量的分布函数.

Proof. 令 $\Omega=(0,1),\mathcal{F}=\mathcal{B},P$ 是 *Lebesgue* 测度，并设

$$X(\omega)=\sup\{y:F(y)<\omega\}$$

简单的说就是 $X(\omega)=$ 使得$F(y)<\omega$的最大y, 于是如果有

$$\{\omega:X(\omega)\le x\}=\{\omega:\omega\le F(x)\}$$

那么结论就可以得证，这是因为 $P(\omega\le F(x))=P(0<\omega\le F(x))=F(x)$ ，下面说明这件事

$\Leftarrow$ 如果$\omega\le F(x)$ 于是 $x\notin\{y:F(y)<\omega\}$ 从而由$X(\omega)$的定义得 $X(\omega)\le x$

$\Rightarrow$ 如果 $X(\omega)\le x$ ，假设$\omega>F(x)$ 于是由于F右连续, 存在一个$\epsilon>0,\omega>F(x+\epsilon)$

由$X(\omega)$的定义就有 $x+\epsilon\le X(\omega)\Rightarrow x<x+\epsilon\le X(\omega)$，这与$\omega\le F(x)$矛盾!

$\square$

Remark. 称刚才的 $X(\omega)=F^{-1}$ 为 F 广义逆，并且有 $P(\{\omega:F^{-1}(\omega)\le x\})=F(x)$，从而我们作一个随机变量 $\xi\sim U(0,1)$，$F^{-1}(\xi)$ 就是以 F 为分布函数.

Definition 2.6. 称随机变量 X,Y 同分布，如果对 $\forall x$ 成立

$$P(X\le x)=P(Y\le x)$$

Definition 2.7. 如果

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

我们称 X 有密度函数 $f \Leftrightarrow f \ge 0, \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

Remark. 在有密度的情况下 $P(X = x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(y)dy = 0$

Definition 2.8. 称 X 是一个随机变量，如果 X 是一个 $\Omega \to S$ 的映射，它把 $(\Omega, \mathcal{F})$ 映到了 $(S, \mathcal{S})$，对于 $\forall A \in \mathcal{S}$，满足

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$$

称 X 是 $\mathcal{F}-$ 可测映射；特别地，如果 $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$，则 X 为 d 维的随机向量。

Theorem 2.6. *如果 $\{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ 对任意的 $A \in \mathcal{A}$ 成立，其中 $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{A})$，则 X 是 $\mathcal{S}$ 可测的.*

Proof. 注意到 $\{X \in B\} = \{\omega : X(\omega) \in B\}$，我们有

$$\{\omega : X(\omega) \in S\} = \Omega \in \mathcal{F}$$
$$\{X \in \cup_i B_i\} = \cup_i \{B_i\}$$
$$\{X \in B^c\} = \{X \in B\}^c$$

其中 S 是 $\mathcal{S}$ 对应空间，于是

$$\mathcal{B} = \{B : \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}\}$$

是一个 $\sigma-$ 代数，因为 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ，并且 $\mathcal{A}$ 生成了 $\mathcal{S}$，从而 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ □

由上我们得到了如果 $\mathcal{S}$ 是 $\sigma-$ 代数，则 $\{\{X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$ 是 $\sigma-$ 代数，它是使得 X 是可测映射的最小的 Ω上的$\sigma-$ 代数，我们称其为由 X 生成的 $\sigma-$ 域，记作 $\sigma(X) = \{\{X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$

Theorem 2.7. *如果 $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$，$f : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ 都是可测映射，那么 $f \circ X$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}) \to (T, \mathcal{T})$ 的可测映射*

Proof. 令 $B \in \mathcal{T}$ 有

$$\{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \in B\} = \{\omega : X(\omega) \in f^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}$$

这是因为

$$f^{-1}(B) = \{A : f(A) \in B\} \in \mathcal{S}, X^{-1}(f^{-1}(B)) = \{\omega : X(\omega) \in f^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}$$

□

Theorem 2.8. *如果 $X_1, \cdots, X_n$ 是随机变量，并且，$f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n) \to (\mathbb{R}, \mathcal{R})$ 是可测的，那么 $f(X_1, \cdots, X_n)$ 是一个随机变量*

Proof. 由于

$$\{(X_1,\cdots,X_n)\in A_1\times\cdots\times A_n\}=\bigcap_i\{X_i\in A_i\}\in\mathcal{F}$$

这样由上一个定理 $(X_1,\cdots,X_n):(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{R}^n)$ ，并且，$f:(\mathbb{R}^n,\mathcal{R}^n)\to(\mathbb{R},\mathcal{R})$ 可测，从而

$$f\circ[(X_1,\cdots,X_n)\circ(\omega)]$$

可测，也就是说是个随机变量. □

Theorem 2.9. 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是随机变量，那么 $X_1+\cdots+X_n$ 也是随机变量

Proof. 由上一个定理由于

$$\{(x_1,\cdots,x_n)|x_1+\cdots+x_n<a\}\in\mathcal{R}^n$$

于是显然可测. □

Theorem 2.10. 如果 $X_1,X_2\cdots$ 是随机变量，那么

$$\inf_n X_n,\sup_n X_n,\limsup_n X_n,\liminf_n X_n$$

都是随机变量.

Proof. 由于

$$\{\omega:\inf_n X_n(\omega)<a\}=\bigcup_n\{\omega:X_n(\omega)<a\}\in\mathcal{F}$$
$$\{\omega:\sup_n X_n(\omega)>a\}=\bigcup_n\{\omega:X_n(\omega)>a\}\in\mathcal{F}$$

从而前两个为随机变量，而后面的两个，我们用等价定义

$$\liminf_n X_n=\lim_n\inf_{m\geq n}X_m=\sup_n(\inf_{m\geq n}X_m)$$
$$\limsup_n X_n=\lim_n\sup_{m\geq n}X_m=\inf_n(\sup_{m\geq n}X_m)$$

再由前两个是随机变量，它们立为随机变量；等价定义的说明留个白，有时间再做补充。 □

Remark. $\Omega_0=\{\omega:\lim_n X_n\text{存在}\}=\{\omega:\limsup_n X_n-\liminf_n X_n=0\}$ 是一个可测集合，如果

$$P(\Omega_0)=1$$

那么称 X_n 几乎必然收敛，记作

$$X_n(\omega)\xrightarrow{a.s.}X(\omega)$$

3 独立性

3.1 两个对象

1. 两个事件 A, B 独立: $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$
2. 两个随机变量 X, Y 独立: $P(X\in C, Y\in D) = P(X\in C)P(Y\in D)$ 对 $\forall C, D\in\mathcal{R}$ 成立
3. 两个 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 独立:$P(A\cap B) = P(A)P(B), \forall A\in\mathcal{F}, B\in\mathcal{G}$

Theorem 3.1. *(i)$X\perp Y\Rightarrow\sigma(X)\perp\sigma(Y)$*
(ii)$\mathcal{F}\perp\mathcal{G}, X\in\mathcal{F}, Y\in\mathcal{G}\Rightarrow X\perp Y$

Proof. 回忆一下 $\sigma(X)$ 的定义:

$$\sigma(X) := \{\{\omega : X(\omega)\in B\} : B\in\mathcal{S}\}$$

i) 现在，如果 $A\in\sigma(X)$，于是 $A = \{\omega : X(\omega)\in C\}, C\in\mathcal{R}$，类似的 $B = \{\omega : Y(\omega)\in D\}, D\in\mathcal{R}$，然后由随机变量独立的定义

$$P(A\cap B) = P(X\in C, Y\in D) = P(X\in C)P(Y\in D) = P(A)P(B)$$

进而 $\sigma(X)\perp\sigma(Y)$
ii) 现在 $\mathcal{F}\perp\mathcal{G}$，如果 $X\in\mathcal{F}, Y\in\mathcal{G}$，且任意 $C, D\in\mathcal{R}$ 由定义就有

$$\{\omega : X(\omega)\in C\}\in\mathcal{F}, \{\omega : Y(\omega)\in D\}\in\mathcal{G}$$

由于 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 独立，接着就有

$$P(X\in C, Y\in D) = P(X\in C)P(Y\in D)$$

□

Remark. 注意对于 $X\in\mathcal{F}, Y\in\mathcal{G}$ 这种写法有点奇怪，实际上它是 X 是 $\mathcal{F}-$ 可测的,Y 是 $\mathcal{G}-$ 可测的；或者等价的我们说

$$\{\omega : X(\omega)\in B_1\}\in\mathcal{F}$$
$$\{\omega : X(\omega)\in B_2\}\in\mathcal{G}$$

对任意 Borel 集合 B_1, B_2 成立

Theorem 3.2. *(i) $A\perp B\Rightarrow A^c\perp B$*
(ii) $A\perp B\Leftrightarrow\mathbf{1}_A\perp\mathbf{1}_B$

Proof. (i)$P(A\cap B) = P(A)P(B)\Rightarrow P(A^c\cap B) = P(A^c)P(B)$

(ii) $\Rightarrow$ 如果 $C, D\in\mathcal{R}$，于是

$$\{\omega : \mathbf{1}_A(\omega)\in C\}\in\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \{\omega : \mathbf{1}_B(\omega)\in D\}\in\{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$$

这样，只要有一个是空集或者全集，那么是一定符合独立定义的，而当两个都不是空集 or 全集的时候 $P(\mathbf{1}_A\in C, \mathbf{1}_B\in D) = P(\hat{A}, \hat{B}) = P(\hat{A})P(\hat{B})$ 进而满足随机变量独立的定义.

$\Leftarrow$ 反之 $\forall C, D\in\mathcal{R}$ 总有

$$P(\mathbf{1}_A\in C, \mathbf{1}_B\in D) = P(\mathbf{1}_A\in C)P(\mathbf{1}_B\in D)$$

同样由

$$\{\omega : \mathbf{1}_A(\omega) \in C\} \in \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \{\omega : \mathbf{1}_B(\omega) \in D\} \in \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$$

我们容易知道存在恰当的 C, D 使得

$$\{\omega : \mathbf{1}_A \in C\} = A, \{\omega : \mathbf{1}_B \in D\} = B$$

这样就得到了

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

□

3.2 有穷对象

(1) $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}_1 \cdots \mathcal{F}_n$ 是独立的，如果

$$\forall A_i \in \mathcal{F}_i \Rightarrow P(\bigcap_1^n A_i) = \prod_i^n P(A_i)$$

(2) 随机变量 $X_1 \cdots X_n$ 独立，如果

$$\forall B_i \in \mathcal{R}有P(\bigcap_i^n \{X_i \in B_i\}) = \prod P(X_i \in B_i)$$

(3) 集合 $A_1 \cdots A_n$ 独立，如果

$$\forall I \subset \{1, \cdots, n\}, P(\bigcap_i A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Theorem 3.3. 设 $A_1 \cdots A_n$ 是独立的，则有
(i) $A_1^c, A_2, \cdots, A_n$ 独立
(ii) $\mathbf{1}_{A_1} \cdots \mathbf{1}_{A_n}$ 独立

Proof. 从略 □

Definition 3.1. 两两独立 (pairwise independent)，一列事件 $A_1 \cdots A_n$，如果对于 $i \neq j$，始终有

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Example 3.1. 经典的四面体染色，可以得到两两独立但是非相互独立

3.3 独立的其他说法

集类 $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{F}$ 是独立的，对于 $I \subset \{1, 2 \cdots, n\}$，如果

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i), \forall A_i \in \mathcal{A}_i$$

不失一般性，我们假设 $\Omega \in \mathcal{A}_i$，在这种情况下上述条件就是

$$P(\bigcap_1^n A_i) = \prod_1^n P(A_i), \forall A_i \in \mathcal{A}_i$$

Definition 3.2. 称集类 $\mathcal{A}$ 为 $\pi-$ 系，他的元素（集合）对交运算封闭:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

Theorem 3.4. $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ 是独立的并且各自是个 $\pi-$ 系，那么 $\sigma(\mathcal{A}_1) \cdots \sigma(\mathcal{A}_n)$ 是独立的。

Proof. 证明从略 □

Theorem 3.5. $\forall x_1 \cdots, x_n \in (-\infty, +\infty], P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i)$ 那么 $X_1 \cdots X_n$ 是独立的.

Proof. 设 $\mathcal{A}_i = \{\{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}, x_i \in (-\infty, +\infty]\}$ ，因为

$$\{\omega : X_i(\omega) \leq x\} \cap \{\omega : X_i(\omega) \leq y\} = \{X_i \leq \min\{x, y\}\}$$

所以 $\mathcal{A}_i$ 是个 $\pi-$ 系，注意到 $\Omega = \{X_i \leq \infty\} \in \mathcal{A}_i, i.e. x_i = \infty$ 由上一个定理就有 $\sigma(\mathcal{A}_1) \cdots \sigma(\mathcal{A}_n)$ 独立，再由作业 1.3.1, 由于诸 $\mathcal{A}_i = \{\{\omega : X_i(\omega) \leq x_i\}, x_i \in (-\infty, +\infty]\}$，所以说它生成了 $\sigma(X)$; 也就是说 $\sigma(\mathcal{A}_i) = \sigma(X_i) \Rightarrow \sigma(X_1) \cdots \sigma(X_n)$ 独立 □

Theorem 3.6. $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m(i)$ 是独立的，设

$$\mathcal{G}_i = \sigma(\bigcup_j \mathcal{F}_{ij})$$

则这些 $\mathcal{G}_i$ 相互独立.

Theorem 3.7. $X_{i,j}(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m(i))$ 是独立的，而函数 $f_i : \mathbb{R}^{m(i)} \to \mathbb{R}$ 是可测的，那么

$$f_i(X_{i,1}, \cdots, X_{i,m(i)})$$

是独立的.

Theorem 3.8. $X_1, \cdots, X_n$ 是独立的随机变量，X_i 有一个概率分布 μ_i，于是 $(X_1, \cdots, X_n)$ 有分布 $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$

Theorem 3.9. X, Y 是独立的，$F(x) = P(X \leq x), G(y) = P(Y \leq y)$，于是

$$P(X + Y \leq z) = \int F(z - y) dG(y)$$

Proof. 直接代换积分

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq z) &= \iint \mathbf{1}_{(x+y \leq z)} dF(x) dG(y) = \iint \mathbf{1}_{(x \leq z-y)} dF(x) dG(y) \\ &= \int F(z - y) dG(y) \end{aligned}$$

□

Theorem 3.10. 如果 X 有密度 f,Y 有分布函数 G, $X \perp Y$, 则 $X+Y$ 的密度是

$$\int f(x-y)dG(y)$$

当 Y 也有密度 g ，那么 $X+Y$ 的密度是

$$\int f(x-y)g(y)dy$$

4 积分论

所谓积分就是要去研究三元体概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上定义的 $\int f d\mu$

路线：f 简单函数–> 有界函数–> 非负函数–> 一般函数

Definition 4.1. 所谓简单函数，就是形如

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$$

其中这些 A_i 不交，且测度 $\mu(A_i) < \infty$

定义

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

称为 Ω 上 ϕ 的积分.

Definition 4.2. 称 $\phi \geq \psi$ $a.e.$（几乎处处），如果 $\mu(\{\omega : \phi(\omega) \geq \psi(\omega)\}) = 1$