Homework 1

菠萝包萝卜

2025 年 9 月 19 日

1 Problem 1

Show that if $\mathcal{F}_i$, $i \in I$ are $\sigma-$fields then $\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ is a $\sigma-$field.

Proof. 1. 首先对于这些 $\mathcal{F}_i$ 都有 $\Omega \in \mathcal{F}_i$ 从而 $\Omega \in \cap_i \mathcal{F}_i$

2. 设 $A \in \cap_i \mathcal{F}_i$，于是 $A \in \mathcal{F}_i, \forall i \in I$，从而 $\bar{A} \in \mathcal{F}_i, \forall i \in I$ ，因此 $\bar{A} \in \cap_i \mathcal{F}_i$

3. 设 $A_1, \cdots, A_n \cdots \in \cap_i \mathcal{F}_i$，于是它们同时属于 $\mathcal{F}_i, \forall i \in I$，所以

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_i, \forall i \in I$$

故

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_i \mathcal{F}_i$$

综上所述，$\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}$ 是一个 $\sigma-$ 代数. □

2 Problem 2-1.1.1

Let $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ = all subsets so that A or A^c is countable, $P(A) = 0$ in the first case and $= 1$ in the second. Show that $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is a probability space.

Proof. $\mathcal{F}$ 中的元素满足：或者 A 可数，或者 A^c 可数，我们先说明它是个 $\sigma-$ 代数:

1. 由于空集 $\emptyset$ 可数，故 $\emptyset \in \mathcal{F}$，由 $\mathcal{F}$ 定义 $\Omega \in \mathcal{F}$，即包含全集;

2. 现在设 $A \in \mathcal{F}$ 则或者 A 可数，或者 A^c 可数，也就是说或者 $(A^c)^c$ 可数，或者 A^c 可数，从而 A^c 也是满足 $\mathcal{F}$ 定义的集合，于是 $A^c \in \mathcal{F}$，即对补封闭;

3. 设有一列 $A_1 \cdots A_n \cdots \in \mathcal{F}$，如果这些 A_i 都是可数集，那么由可数个至多可数集的并仍然至多可数可以得到

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

如果至少存在一个 A_k 不可数，于是由于 $A_k \in \mathcal{F}$，我们得到 A_k^c 是可数的，于是我们求反面

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \subset A_k^c$$

这样 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$ 作为可数集 A_k^c 的子集也是可数的，从而 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$ 以及它的补 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 都在 $\mathcal{F}$ 中，至此我们证明了 $\mathcal{F}$ 是一个 $\sigma-$ 代数.

然后我们说明给定的 P 是个概率测度，首先由于 P 仅取 $0,1$，一定满足 $P\geq 0$，其次对于一列不交的 $A_1\cdots A_n\cdots$ ，考虑 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$：

一方面，如果 A_i 全部为可数集，那么它们的可数并仍然可数从而

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=0=\sum_{i=1}^{\infty}0=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

另一方面，如果存在一个 A_k 为不可数集，在前面我们说明了 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i^c$ 是可数的，从而由 P 定义

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=1$$

由于这些集合两两不交，于是当 $j\neq k$ 的时候，$A_j\in A_k^c$，这里 A_k^c 可数，于是其它 A_j 作为可数集的子集全可数，于是

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=P(A_k)=1\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

再结合 $\emptyset$ 可数，$P(\Omega)=1$, 我们就得到了三元体 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是概率空间. $\square$

3 Problem 3-1.2.1

Suppose X and Y are random variables on $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ and let $A\in\mathcal{F}$. Show that if we let $Z(\omega)=X(\omega)$ for $\omega\in A$ and $Z(\omega)=Y(\omega)$ for $\omega\in A^c$, then Z is a random variable.

Proof. 我们现在有

$$Z(\omega)=\begin{cases}X(\omega),\omega\in A\\ Y(\omega),\omega\in A^c\end{cases}$$

其中 $A\in\mathcal{F}$, 为了证明 Z 是随机变量，我们就是要证 $\forall B\in\mathcal{B}$ 都有

$$\{\omega:Z(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}$$

注意到

$$\begin{aligned}\{\omega:Z(\omega)\in B\}&=\{\omega:Z(\omega)\in B,\omega\in A\}+\{\omega:Z(\omega)\in B,\omega\notin A\}\\&=\{\omega:X(\omega)\in B,\omega\in A\}+\{\omega:Y(\omega)\in B,\omega\notin A\}\\&=\{\omega:X(\omega)\in B\}\cap\{\omega:\omega\in A\}+\{\omega:Y(\omega)\in B\}\cap\{\omega:\omega\notin A\}\\&=\{\omega:X(\omega)\in B\}\cap A+\{\omega:Y(\omega)\in B\}\cap A^c\end{aligned}$$

由于 X,Y 是随机变量 $\{\omega:X(\omega)\in B\},\{\omega:Y(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}$，从而再由 $A\in\mathcal{F}$

$$\{\omega:X(\omega)\in B\}\cap A\in\mathcal{F},\{\omega:Y(\omega)\in B\}\cap A^c\ \in\mathcal{F}$$

也就是说 $\{\omega:Z(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}$，进而 Z 是个随机变量. $\square$

4 Problem 4-1.2.4

Show that if $F(X)=P(X\leq x)$ is countinuous then $Y=F(X)$ has a uniform distribution on $(0,1)$, that is, if $y\in[0,1]$, $P(Y\leq y)=y$

Proof. 我们取 $F^{-1}(y) = \sup\{t : F(t) < y\}$ ，于是

$$P(Y \le y) = P(F(X) \le y) = P(X \le F^{-1}(y)) = F \circ F^{-1}(y) = y$$

从而 $Y \sim U(0,1)$，其中上面的步骤除了需要用到课堂上已经证明的 $\{y : F^{-1}(y) \le x\} = \{y : y \le F(x)\}$ 之外还需要用到一个引理：对于 $F(\cdot)$ 的连续点 $x = F^{-1}(y)$ 总是成立

$$F \circ F^{-1}(y) = y$$

下面说明这件事:

由确界定义,$\forall \epsilon > 0, \exists t$ 使得

$$x - \epsilon < t \le x$$

并且 $t \in \{a : F(a) < y\}$，即 $F(t) < y$，由于 F 是单调不减的，我们有

$$F(x-\epsilon) \le F(t) < y$$

上式对任意 $\epsilon > 0$ 成立，令 $\epsilon \to 0$ 以及连续性就得到了

$$F(x) \le y$$

代入 $x = F^{-1}(y)$ 得到 $F \circ (F^{-1}(y)) \le y$

另一方面，由确界定义 $\forall t' > x$，一定有 $t' \notin \{a : F(a) < y\}$，这意味着 $F(t') \ge y$，考虑右侧极限，由 $x = F^{-1}(y)$ 处 F 的连续性就有

$$\lim_{t' \to x^+} F(t') = F(x+) = F(x)$$

由于 $F(t') \ge y$ 对 $\forall t' > x$ 成立，在右侧极限下也有

$$F(x) \ge y$$

代入 $x = F^{-1}(y)$ 我们就得到了

$$F \circ F^{-1}(y) \ge y$$

从而连续点 $x = F^{-1}(y)$ 处 $F \circ F^{-1}(y) = y$. □

5 Problem 5

Show that if $\mathcal{S}$ is a $\sigma-$field, then $\sigma(X) = \{\{X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$ is the smallest $\sigma-$ field on Ω that makes X a measurable map.

Proof. 首先证明 $\{\{\omega : X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$ 是 $\sigma-$ 代数:

1. 由于 $\mathcal{S}$ 是 $\sigma-$ 代数，于是 $S \in \mathcal{S}$，其中 S 是 $\mathcal{S}$ 中的元素的全集, 所以 $\{\omega : \omega \in \Omega\} = \{\omega : X(\omega) \in S\} \in \{\{\omega : X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$，从而 $\sigma(X)$ 中有元素 Ω

2. 设 $A \in \{\{\omega : X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$ ，则存在一个 $B' \in \mathcal{S}$ 使得 $A = \{\omega : X(\omega) \in B'\}$ ，这样就有

$$A^c = \{\omega : X(\omega) \notin B'\} = \{\omega : X(\omega) \in B'^c\}$$

由 $\mathcal{S}$ 为 $\sigma-$ 代数，故 $B'^c \in \mathcal{S}$ 从而 $A^c \in \sigma(X)$

3. 设一列 $A_1 \cdots A_n \cdots \in \{\{\omega : X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$，对这些 A_i 始终有 $B_i \in \mathcal{S}$ 使得

$$A_i = \{\omega : X(\omega) \in B_i\}$$

从而取可列并

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) \in B_i\} = \{\omega : X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\}$$

由于 $\mathcal{S}$ 是 $\sigma-$ 代数，我们的 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{S}$ 从而

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega : X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\} \in \sigma(X)$$

这样证明了 $\sigma(X)$ 是 $\sigma-$ 代数，而 $\sigma(X)$ 的定义蕴含了 $\forall B \in \mathcal{S}$

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \sigma(X)$$

也就是说 X 确实是 $\sigma(X)-$ 可测的，接下来证它是最小的使得 X 可测的 $\sigma-$ 代数, 等价地只需证明任意一个使得 X 可测的 $\mathcal{G}$ ，总是有 $\sigma(X) \subset \mathcal{G}$

设 X 是 $\mathcal{G}$ 可测的，也就是说 $\forall B \in \mathcal{S}$ 总有

$$\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{G}$$

我们任取 $A \in \sigma(X)$ ，由定义，存在一个 $\tilde{B} \in \mathcal{S}$ 满足

$$A = \{\omega : X(\omega) \in \tilde{B}\}$$

由 $\mathcal{G}$ 可测立即得 $\{\omega : X(\omega) \in \tilde{B}\} \in \mathcal{G}$，也是 $A \in \mathcal{G} \Rightarrow \sigma(X) \subset \mathcal{G}$，从而 $\sigma(X)$ 是使得 X 可测的最小 $\sigma-$ 代数. □

6 Problem 6-1.3.1

Show that if $\mathcal{A}$ generates $\mathcal{S}$, then $X^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}$ generates $\sigma(X) = \{\{X \in B\} : B \in \mathcal{S}\}$

Proof. 首先 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{S}$，换言之，只要 $\mathcal{F}$ 是一个包含 $\mathcal{A}$ 的 $\sigma-$ 代数，那么 $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$;

现在对于 $X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\}, A \in \mathcal{A}$，对所有这样的 A ，我们得到集类 $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G} = \{\{\omega : X(\omega) \in A\} : A \in \mathcal{A}\}$$

为了说明 $\sigma(X)$ 是由 $\mathcal{G}$ 生成的，我们需要说明:$\sigma(X) = \sigma(\mathcal{G})$

先说明 $\sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma(X)$: 事实上由 $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$，根据 $\mathcal{G}$ 的定义，我们任取 $G \in \mathcal{G}$ 一定存在有 $A' \in \mathcal{A}$ 使得

$$G = \{\omega : X(\omega) \in A'\}$$

由于 $A' \in \mathcal{A} \subset \mathcal{S}$，由 $\sigma(X)$ 的定义就有 $A' \in \sigma(X)$ 从而 $\sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma(X)$;

再说明 $\sigma(X) \subset \sigma(\mathcal{G})$: 考虑集类

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{S} : \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \sigma(\mathcal{G})\}$$

显然有 $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ ，若能说明 $\mathcal{C}$ 是一个包含 $\mathcal{A}$ 的 $\sigma-$ 代数就好了，这样由 $\sigma(\mathcal{A})$ 的定义可以得到 $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$；即对任意的 $B \in \mathcal{S}$ 有 $B \in \mathcal{C}$，这又等价于 $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \sigma(\mathcal{G})$，即对任意 $B \in \mathcal{S}$ 有 $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \sigma(\mathcal{G})$，这便是 $\sigma(X) \subset \sigma(\mathcal{G})$，下作验证

1. 若 $A \in \mathcal{A}$, 则 $\{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{G})$，从而 $A \in \mathcal{C}$，也就是说 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$

2. 若 $B \in \mathcal{C}$ 则 $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \sigma(\mathcal{G})$ 但是

$$\{\omega : X(\omega) \in B\}^c = \{\omega : X(\omega) \in B^c\}$$

由 $\{\omega : X(\omega) \in B^c\} \in \sigma(\mathcal{G})$ 故有 $B^c \in \mathcal{C}$

3. 若 $B_i \in \mathcal{C}$，则 $\{\omega : X(\omega) \in B_i\} \in \sigma(\mathcal{G})$

$$\{\omega : X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) \in B_i\} \in \sigma(\mathcal{G})$$

于是 $\bigcup_n B_n \in \mathcal{C}$ 从而 $\mathcal{C}$ 是 $\sigma-$ 代数.

现在任取一个 $A \in \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{S}$ ，根据集类 $\mathcal{G}$ 的定义，我们有 $\{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{G}$，而 $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{G})$，故 $\{\omega : X(\omega) \in A\} \in \sigma(\mathcal{G})$，接着由 $\mathcal{C}$ 的定义，$A \in \mathcal{C}$，于是 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$，从而由 $\mathcal{S}$ 的极小性就有 $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$，这便有了

$$\mathcal{S} = \mathcal{C}$$

也就是说对 $\forall B \in \mathcal{S}$ 总是成立

$$\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \sigma(\mathcal{G})$$

现在任取 $T \in \sigma(X)$，于是存在一个 $B' \in \mathcal{S}$ 使得 $T = \{\omega : X(\omega) \in B'\}$，由上面的结论 $T \in \sigma(\mathcal{G})$ $\Rightarrow \sigma(X) \subset \sigma(\mathcal{G})$ 总之 $\sigma(X) = \sigma(\mathcal{G})$，证毕.

$\square$