高等概率论

菠萝包萝卜

2025 年 10 月 18 日

参考书:《Probability: Theory and Examples》-Rick Durette,《概率论》-应坚刚，何萍

1 初等概率论

2 概率空间和随机变量的分布

3 独立性

4 积分论

以上部分已在另一个笔记里面有所展示

5 期望

Definition 5.1. 设概率测度 P，如果 $X \geq 0$ 是一个定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量，我们称

$$EX = \int X dP$$

是 X 的期望，但是它有可能是 ∞ 。为了方便讨论，我们考虑正负部定义

$$x^+ = \max\{x, 0\}, x^- = \max\{-x, 0\}$$

我们说 EX 存在，如果

$$EX = EX^+ - EX^-$$

是有限的；或者等价的 $EX^+ < \infty, EX^- < \infty$ 同时成立。

Theorem 5.1. *如果 $X, Y \geq 0$ 或者 $E|X|, E|Y| < \infty$, 那么*
(a) $E(X+Y) = EX + EY$
(b) $E(aX+b) = aE(X) + b$ 对任意的实数 a, b 成立
(c) 如果 $X \geq Y$ a.e. 那么 $EX \geq EY$

5.1 不等式

Theorem 5.2. *Jensen's-Inequality*：假设 ϕ 是下凸的，也就是说

$$\lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y) \geq \phi(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

对于任意 $\lambda \in (0,1)$ 和 $x, y \in \mathbb{R}$ 那么有

$$E(\phi(X)) \geq \phi(EX)$$

当上面所有期望都存在的时候不等式总是成立的。

Proof. 定理的证明略去，因为在一般测度的结论下几乎是显然的。 □

Theorem 5.3. *Hölder-Inequality:* 如果 $p, q \in [1, \infty]^2$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 那么

$$E|XY| \leq ||X||_p ||Y||_q$$

这里

$$||X||_r = (E|X|^r)^{\frac{1}{r}}; ||X||_\infty = \inf\{M : P(|X| > M) = 0\}$$

Proof. 定理的证明略去，在一般测度的结论下几乎是显然的。 □

为了陈述我们下来的结论，我们需要一些记号；下面仅考虑在 $A \subset \Omega$ 上的积分，我们记

$$E(X; A) = \int_A X dP$$

Theorem 5.4. *Chebyshev's-inequality*：假设 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 有 $\phi \geq 0$ 令 $A \in \mathcal{R}$ 并且令 $i_A = \inf\{\phi(y) : y \in A\}$，那么

$$i_A P(X \in A) \leq E(\phi(X); X \in A) \leq E\phi(X)$$

Proof. $E(\phi(X); X \in A) = \int_A \phi(X) dP \geq i_A P(X \in A)$，另一边在非负函数下是显然的。 □

5.2 从积分到极限（极限理论）

Theorem 5.5. *Fatou's lemma*：如果 $X_n \geq 0$ 那么

$$\liminf_n EX_n \geq E(\liminf_n X_n)$$

Theorem 5.6. 单调收敛定理：如果 $0 \leq X_n \uparrow X$ 那么

$$EX_n \uparrow EX$$

Theorem 5.7. 控制收敛定理：如果 $X_n \to X$ *a.s.*，$|X_n| \leq Y$ 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立，并且 Y 是可积的，那么

$$EX_n \to EX$$

Remark. 控制收敛可以退化到有界收敛定理

Theorem 5.8. 假设 $X_n \to X$ $a.s.$ 令 g,h 为连续函数，并且满足
(i) $g \geq 0, g(x) \to \infty$当$|x| \to \infty$
(ii)$\frac{|h(x)|}{g(x)} \to 0$ 当 $|x| \to \infty$
(iii)$Eg(X_n) \leq K < \infty$ 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立
那么 $Eh(X_n) \to Eh(X)$

我们先解释一下几个条件，首先我们要的是 X_n 以概率 1 收敛到随机变量 X ，然后 g 是个正的连续函数，并且在无穷远处发散到无穷，而 $|h(x)|$ 在无穷远处的阶数是比 g 要小的，如果 $g(X_n)$ 的期望是一致有界的，那么 $h(X_n)$ 的期望也是存在的，其实就是一个控制收敛的极限形式。这是进入极限理论的第一个新的定理，不同于前面的定理，我们会给出证明过程 (课上没给 QWQ)。

Proof. □

5.3 搞积

Theorem 5.9. 令 X 是一个来自 $(S,\mathcal{S})$ 的随机元素，并且有分布 μ,$i.e.$，$\mu(A) = P(X \in A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\})$ ；如果 f 是一个 $(S,\mathcal{S}) \to (\mathbb{R},\mathcal{R})$ 的可测函数，并且 $f \geq 0$ 或者 $E|f(x)| < \infty$ 那么

$$Ef(X) = \int_S f(y)\mu(dy)$$

Remark. 积分有如下的等式

$$\int_\Omega f(h(\omega))dP = \int_S f(y)d(P \circ h^{-1})$$

Proof. 证明课程略去了, 有空补上 □

5.4 生成测度，Fubini 定理

令 $(X,\mathcal{A},\mu_1),(Y,\mathcal{B},\mu_2)$ 是两个 $\sigma-$ 代数空间，令

$$\Omega = X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$$
$$\mathcal{S} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

$\mathcal{S}$ 里面的集合称作矩形；我们可以看出 $\mathcal{S}$ 是一个半代数

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$
$$(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c)$$

称 $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 是由 $\mathcal{S}$ 生成的 $\sigma-$ 代数

Theorem 5.10. 在 $\mathcal{F}$ 有一个独立的测度 μ，如果

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

Remark. μ 通常记作 $\mu_1 \times \mu_2$

Proof. 好像课上也不讲 $\square$

Theorem 5.11. *Fubini's theorem*: 如果 $f \geq 0$ 或者 $\int |f| d\mu < \infty$ 那么

$$\int_X \int_Y f(x,y)\mu_2(dy)\mu_1(dx) = \int_{X\times Y} f d\mu = \int_Y \int_X f(x,y)\mu_1(dx)\mu_2(dy)$$

6 独立性与期望

Theorem 6.1. 设 $X_1 \cdots X_n$ 是独立随机变量，并且 X_i 有分布 μ_i 那么 $X_1 \cdots X_n$ 有分布

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$$

Proof. 课上没给证明 □

Theorem 6.2. 假设 X 和 Y 是独立的，并且有分布 μ, ν 如果 h 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的一个可测函数，其中 $h \geq 0$ 或者 $E|h(X,Y)| < \infty$ 那么

$$Eh(X,Y) = \iint h(x,y)\mu(dx)\nu(dx)$$

特别地，如果 $h(x,y) = f(x)g(y)$ 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的可测函数，并且 $f, g \geq 0$ 或者 $E|f(X)|, E|g(Y)| < \infty$ 那么

$$Ef(X)g(Y) = Ef(X) \cdot Eg(Y)$$

Proof. 当 $f, g \geq 0$ 由 Fubini 定理, 就有

$$Ef(X)g(Y) = \iint f(x)g(y)\mu(dx)\nu(dy) = \int g(y) \int f(x)\mu(dx)\nu(dy) = Ef(X)Eg(Y)$$

如果是 $E|f(X)|, E|g(Y)| < \infty$ 直接 Fubini 就行 □

Theorem 6.3. 乘积的期望等于期望的乘积