Homework 3

菠萝包萝卜

2025 年 10 月 23 日

1 HW-3

Problem 1.1. 1.5.10 Show that if $\sum_n \int |f_n| d\mu < \infty$,then $\sum_n \int f_n d\mu = \int \sum_n f_n d\mu$

Proof. 事实上只用证明非负函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如果级数 $\sum_n \int f_n d\mu$ 收敛，那么积分和求和号可以换序; 如果这个结论成立，那么通过

$$\sum_n \int |f_n| d\mu = \sum_n \int f_n^+ + f_n^- d\mu = \sum_n \int f_n^+ d\mu + \sum_n \int f_n^- d\mu < \infty$$

上面第二个等号是因为 f_n^+, f_n^- 都是被控制了的，然后

$$\sum_n \int f_n d\mu = \sum_n \int f_n^+ - f_n^- d\mu = \sum_n \int f_n^+ d\mu - \sum_n \int f_n^- d\mu$$

利用非负的可以换序就是

$$\sum_n \int f_n^+ d\mu - \sum_n \int f_n^- d\mu = \int \sum_n f_n^+ d\mu - \int \sum_n f_n^- d\mu = \int \sum_n (f_n^+ - f_n^-) d\mu = \int \sum_n f_n d\mu$$

下面证明非负情况的合理性: 我们考虑部分和函数 $S_n = \sum_{i=1}^n f_n$ ，那么 S_n 在全集上是单调递增收敛到 $\sum_{i=1}^{\infty} f_n$ 的，于是利用单调收敛定理

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \int \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n d\mu = \int \lim_{N\to\infty} S_N d\mu = \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} f_n d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$$

□

Problem 1.2. 1.6.13 If $EX_1^- < \infty$ and $X_n \uparrow X$, then $EX_n \uparrow EX$.

Proof. $X_n \uparrow X$ 显然可以得到 X_n 递增，从而 EX_n 递增，这是积分的保号性决定的，现在的问题是积分是否收敛到 EX.

首先 $X_n = X_n^+ - X_n^-$, 对于 $X_n^+ = \begin{cases} X_n, \{\omega : X_n(\omega) \geq 0\}; \\ 0, \{\omega : X_n(\omega) < 0\} \end{cases}$, 由于 X_n 递增, 于是若有 $X_n(\omega) \geq 0$ 那么 $X_{n+1}(\omega) \geq X_n(\omega) \geq 0$, 从而 X_n^+ 也是递增的; 而对于 X_n^- 由于 $-X_n^- = \begin{cases} X_n, \{\omega : X_n(\omega) < 0\} \\ 0, \{\omega : X_n(\omega) \geq 0\} \end{cases}$ 那么如果 $X_{n+1}(\omega) < 0$ 就有 $X_n(\omega) < X_{n+1}(\omega)$ 从而 $X_n^- > X_{n+1}^-$, 也就是 X_n^- 递减; 由于 $EX_1^- < \infty$ 所以所有的 $EX_n^- \leq EX_1^- < \infty$

考虑 $X = X^+ - X^-$ ，说明两件事

$$X_n^+ \to X^+, X_n^- \to X^-$$

如果 $X(\omega) > 0$,那么 $X_n(\omega)$ 在充分大的 N 下 $n > N$ 一定有 $X_n(\omega) > 0$,这样 $X_n^+ = X_n \to X = X^+$ 对这些 ω 成立；如果 $X(\omega) \le 0$ 那么 $X_n(\omega) \le X(\omega) \le 0$ ，这样 $X_n^+ = 0 = X^+$ 仍然成立，所以 $X_n^+ \to X^+$ ，由单调收敛，有 $EX_n^+ \to EX^+$

类似地，如果 $X(\omega) > 0$, 那么 $X_n(\omega)$ 在充分大的 N 下 $n > N$ 一定有 $X_n(\omega) > 0$，这样 $X_n^- = 0 = X^-$；如果 $X(\omega) \le 0$ 那么 $X_n(\omega) \le X(\omega) \le 0$，这样 $X_n^- = -X_n \to -X = X^-$，总之 $X_n^- \to X^-$ ，尽管这里不是单增，但是我们有控制函数 $X_n^- \le X_1^-$，其中 $EX_1^- < \infty$ ，从而由控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty} EX_n^- = E \lim_{n\to\infty} X_n^- = EX^-$$

这样就是

$$EX_n = E(X_n^+ - X_n^-) = EX_n^+ - EX_n^- \to E(X^+ - X^-) = EX$$

□

Problem 1.3. 1.6.16 If X is integrable and A_n are disjoint sets with union A when

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(X, A_n) = E(X, A)$$

i.e. the sum converges absolutly and has the value on the right.

Proof. 由于 $E(X, A)$ 存在且有限，所以

$$E|X|I_A < \infty$$

这里 $I_A = \sum_{n=0}^{\infty} I_{A_n}$，于是得到

$$E \sum_{n=0}^{\infty} |X| I_{A_n} < \infty$$

非负，自然可以换到外面

$$\sum_{n=0}^{\infty} E|XI_{A_n}| < \infty$$

这就回到了 Problem 1.1 的条件，我们就可以有

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(X, A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int XI_{A_n} dP = \int \sum_{n=0}^{\infty} XI_{A_n} dP = \int XI_A dP = E(X, A)$$

□

Problem 1.4. 2.2.1 Let $X_1, X_2, \cdots$, be uncorrelated with $EX_i = \mu_i$ and $\frac{DX_i}{i} \to 0$. Let $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ and $\nu_n = \frac{ES_n}{n}$ then as $n \to \infty$, $S_n/n - \nu_n \to 0$ in L^2 and in probability.

Proof. 直接计算

$$P(|\frac{S_n}{n} - \nu_n| \ge \epsilon) \le \frac{DS_n}{n^2\epsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^n DX_i}{n^2\epsilon^2} \xlongequal{Stolz} \frac{DX_n}{(2n-1)\epsilon^2} \to 0$$

证毕. □

Problem 1.5. 2.2.2 The L^2 weak law generalizes immediately to certain dependent sequences. Suppose $EX_n = 0$ and $EX_nX_m \le r(n-m)$ for $m \le n$ (no absolute value on the left-hand side!) with $r(k) \to 0$ as $k \to \infty$. Show that $(X_1 + \ldots + X_n)/n \to 0$ in probability.

Proof. 值得一提的是 $m = n$ 的时候有 $EX_n^2 \le r(0)$，从而二阶矩收敛；现在直接去求方差

$$\begin{aligned}D(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}) &= \frac{\sum_{i=1}^n EX_i^2 + 2\sum_{i<j} EX_iX_j}{n^2} \\ &\le \frac{nr(0) + 2[(n-1)r(1) + (n-2)r(2) + ... + r(n-1)]}{n^2} \\ &\le \frac{2[nr(0) + ... + r(n-1)]}{n^2} = 2L(n)\end{aligned}$$

为了分析 $L(n)$ 的极限，我们设 $a_n = r(0) + r(1) + ... + r(n-1), b_n = n^2$ 于是

$$L(n) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_n} \overset{Stolz}{=\!=} \frac{a_n}{b_n - b_{n-1}} = \frac{r(0) + ... + r(n-1)}{2n-1} \overset{Stolz}{=\!=} \frac{r(n-1)}{2} \to 0$$

证毕. ∎

Problem 1.6. 2.2.3(i) Let f be a measurable function on $[0,1]$ with $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$. Let $U_1, U_2 \ldots$ be independent and uniformly distributed on $[0,1]$, and let

$$I_n = \frac{f(U_1) + \ldots + f(U_n)}{n}$$

Show that $I_n \to I \equiv \int_0^1 f dx$ in probability.
(ii) Suppose $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$. Use Chebyshev's inequality to estimate $P(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}})$

Proof. (i) 首先 $Ef(U_1) = \int_0^1 f(t)dt = I$ 其中 I 是有限的，这是由 $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$ 得到的。现在把 $f(U_i)$ 视为一列 i.i.d. 样本，它们是一阶矩存在的，由辛钦大数定律就有

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(U_i)}{n} \xrightarrow{p} Ef(U_1) = I$$

(ii) 直接放缩

$$P(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}) \le \frac{n}{a^2} \cdot DI_n = \frac{1}{a^2}\left(\int_0^1 f^2(x)dx - (\int_0^1 f(x)dx)^2\right)$$

∎