Homework 4

菠萝包萝卜

2025 年 11 月 7 日

1 HW-4

Problem 1.1. Let $X_1, X_2, ...$ be random variables, and let $\mathcal{T}$ denote the tail $\sigma-$field. Determine whether $\limsup_{n\to\infty} X_n \in \mathcal{T}$ and $\liminf_{n\to\infty} X_n \in \mathcal{T}$. Provide a proof to support your conclusion.

Proof. 对于 $\limsup_{n\to\infty} X_n$ 它的等价形式是 $\inf\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{k\geq n} X_k$，然后由于 Borel 集可以由全体左开右闭区间生成，对于任意 $a \in \mathbb{R}$

$$\{\omega : \limsup_n X_n(\omega) \leq a\} = \{\omega : \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} X_k(\omega) \leq a\}$$

由于 $\sup_{k\geq n} X_k$ 关于 n 是递减的，所以 $\{\omega : \sup_{k\geq n} X_k(\omega) \leq a\}$ 关于 n 是增集合（n 更大则 r.v. 更有可能比 a 更小）。首先一个序列的 inf 要 $\leq a$ 那么则至少有一个值 $\leq a$ 从而上面的集合是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega : \sup_{k\geq n} X_k(\omega) \leq a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{\omega : X_k(\omega) \leq a\}$$

这样有 $A_n = \bigcap_{k=n}^{\infty}\{\omega : X_k(\omega) \leq a\} \in \sigma(X_n, \ldots) = \mathcal{F}'_n$，注意一个事实：对于 $m \geq n$ 能让 $(X_n, X_{n+1} \ldots, X_m \ldots)$ 可测的也一定可以使忽略 $X_n..X_{m-1}$ 时候的 $(X_m, X_{m+1} \ldots)$ 可测（因为可以把忽略的这些视为 $\in \mathbb{R}$），从而对任意 $n \in \mathbb{N}, m \geq n$

$$A_m \in \mathcal{F}'_n$$

由集合递增性

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n \in \sigma(X_n, \ldots) = \mathcal{F}'_n$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 成立，这也是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n = \mathcal{T}$ 证毕。

类似地，由于 Borel 集合也可以等价地由 $[a, +\infty)$ 来生成，如果要说明对任意 $a \in \mathbb{R}$ $\{\omega : \liminf X_n(\omega) \geq -a\} \in \mathcal{T}$，我们取 $X_n = -Y_n$，就只用去说明 $\{\omega : \limsup Y_n(\omega) \leq a\} \in \mathcal{T}$ 这又回到了前面的问题. □

Problem 1.2. 2.3.1 Prove that $P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n)$ and $P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n)$

Proof. 利用

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$
$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

再利用概率连续性可以得到两个结论

$$P(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m)$$
$$P(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m)$$

现在不看极限符号

$$\sup_{n\geq m} P(A_n) \leq P(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n)$$

两边同时取极限就是

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\geq m} P(A_n) \leq \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m)$$

证毕，另一个同理. □

> **Problem 1.3. 2.3.8** Let A_n be a sequence of independent events with $P(A < 1)$ for all n. Show that $P(\cup A_n) = 1$ implies $\sum_n P(A_n) = \infty$ and hence $P(A_n\ i.o.) = 1$

Proof. 对于有限的 $N \in \mathbb{N}$ 有 $P(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) \Leftrightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) = \prod_{i=1}^{N} P(A_i^c) = \prod_{i=1}^{N}(1-P(A_i))$，且

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N}(1-P(A_i)) = 0$$

假设 $\sum_n P(A_n) < \infty$ 由于是正项的，所以一定是收敛到有限值，由无穷乘积收敛的一个充分必要条件（来自陈纪修 9.5.1），$\prod_{i=1}^{\infty}(1-P(A_i)) = 1$ 矛盾，所以是发散的。然后由 B-C 引理立即得到

$$P(A_n\ i.o.) = 1$$

□

> **Problem 1.4. 2.3.11** Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent with $P(X_n = 1) = p_n$ and $P(X_n = 0) = 1 - p_n$. Show that (i)$X_n \to 0$ in probability if and only if $p_n \to 0$, and (ii)$X_n \to 0$ $a.s.$ if and only if $\sum p_n < \infty$

Proof. (i) 当 $p_n \to 0$ 对于 $\forall\epsilon > 0, P(|X_n| \geq \epsilon) \leq P(X_n = 1) = p_n \to 0$ 于是 $X_n \xrightarrow{p} 0$，反之 $X_n \xrightarrow{p} 0$ 的时候对于任意的 $1 > \epsilon > 0, \delta > 0$，存在充分大的 N 当 $n > N$ 总有

$$p_n = P(X_n \geq \epsilon) < \delta$$

由 δ 任意性立得 $p_n \to 0$

(ii)$\sum p_n < \infty$ 的时候，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq \epsilon) \leq \sum p_n < \infty$$

由 B-C 引理立即得到 $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$，反之

$$P(\{X_m \geq \epsilon\}\ i.o.) = 0$$

由于 X_i 独立，上式就等价于 $\sum_{i=1}^{\infty} P(X_m \geq \epsilon)$ 对任意 $\epsilon > 0$ 收敛，从而取 $\epsilon < 1$，就有 $0 \leq \sum p_n \leq \sum P(X_m \geq \epsilon) < \infty$ □

Problem 1.5. 2.3.14 Let $X_1, X_2 \ldots$ be independent. Show that $\sup X_n < \infty$ a.s. if and only if $\sum_n P(X_n > A) < \infty$ for some A.

Proof. $\sup X_n < \infty$ $a.s.$ 那么使得 $\sup X_n = \infty$ 的点集 $\{\omega : \sup X_n(\omega) = \infty\}$ 是个零测集 E，在这个集合以外上确界存在且有限，从而充分大的 A 有 $P(\limsup_n \{X_n > A\}) = 0$ 由独立性得到 $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > A) < \infty$；

反过来

$$\begin{aligned}\sum P(X_n > A) < \infty &\Rightarrow P(\{X_n > A\}\ i.o.) = 0\\ &\Rightarrow \text{仅在一个零测集上才能发生事件} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m > A\}\\ &\Rightarrow \text{仅在一个零测集上存在有限个 n 使得} X_n > A\end{aligned}$$

这样在这个零测集以外 $X_n < A$，这样在全集下就是 $\sup X_n < \infty$ □

Problem 1.6. 2.3.19 Let X_n be independent Poisson r.v.'s with $EX_n = \lambda_n$, and let $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Show that if $\sum \lambda_n = \infty$ then $\frac{S_n}{ES_n} \xrightarrow{a.s.} 1$

Proof. 首先 $D(S_n/ES_n) = \frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)^2} = \frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$，然后利用切比雪夫不等式

$$P(|S_n - ES_n| \geq \epsilon ES_n) \leq \frac{1}{(ES_n) \cdot \epsilon^2} \to 0$$

所以依概率收敛，为了证明 $a.s.$ 收敛，我们去拟合。定义 $m_n = [\lambda_n] + 1$(上取整)，然后把期望压缩到 1 以内

$$X_n = \sum_{j=1}^{m_n} Z_{n,j}, Z_{n,j} \sim Poisson(\frac{\lambda_n}{m_n})$$

所以各个 Z_{n_j} 还是相互独立，且期望在 1 以下，我们遍历这些 n,j，重排为 $Y_1, \ldots Y_n \ldots$，定义

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \mu_n = ES'_n = \sum_{i=1}^{k} EY_i$$

这样的 μ_n 始终可以用 λ_n 的部分和去夹，所以也是发散到无穷的，与未拆分前一样，容易证明 $\frac{S'_n}{\mu_n} \xrightarrow{p} 1$，考虑 $r_l = \inf\{r : \mu_r > l^2\}$，设 $T_l = S'_{r_l}$，由于期望控制在了 1 以内，所以

$$\mu_{r_l} \in (l^2, l^2 + 1]$$

于是

$$P(|T_l - \mu_{r_l}| > \delta\mu_{r_l}) \leq \frac{1}{\delta^2 \mu_{r_l}} \leq \frac{1}{\delta^2 l^2}$$

所以

$$\sum_{l=1}^{\infty} P(|T_l - \mu_{r_l}| > \delta\mu_{r_l}) < \infty$$

由 B-C 引理

$$\frac{T_l}{\mu_{r_l}} \xrightarrow{a.s.} 1$$

再记 $M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$ 那么

$$S_{M_n} = \sum_{i=1}^{M_n} Y_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} Z_{k,j} = S_n, \mu_{M_n} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = ES_n$$

若某个 l 满足 $r_l \leq M_n < r_{l+1}$，利用单调性

$$\frac{T_l(\omega)}{\mu_{r_{l+1}}} \leq \frac{S_n(\omega)}{ES_n} \leq \frac{T_{l+1}(\omega)}{\mu_{r_l}}$$

为了夹逼，这里只差证明 $\frac{\mu_{r_{l+1}}}{\mu_{r_l}} \to 1$ 事实上这由

$$\mu_{r_l} \in (l^2, l^2+1], \mu_{r_{l+1}} \in ((l+1)^2, (l+1)^2+1]$$

与 $l \to \infty$ 是显然的 $\square$