

# 我国规范中的混凝土本构与OpenSees本构

## 1 简介

抗震研究领域常用软件OpenSees是一款由UC Berkeley和PEER共同开发的开源软件平台，具有非常突出的非线性动力计算能力，并且提供了丰富的材料本构（特别是混凝土材料）。同时，用户也可以根据需要对程序进行材料和单元模型、迭代算法等的二次开发。对于大多数用户而言，重新开发新的材料本构模型难度较大，通常都是直接使用软件提供的材料本构和单元模型进行计算分析。然而，OpenSees混凝土材料手册写得太过简略，网页端还不支持数学公式，看起来费劲。这里对OpenSees中的几种常用混凝土本构进行梳理。具体内容如下：

- 第二节对我国《混凝土结构设计规范》GB 50010 - 2010中混凝土的材料特性及单轴本构进行介绍；
- 第三节对约束混凝土的常用单轴本构——Mander模型进行介绍；
- 第四节对OpenSees中的几种常用本构进行梳理。

需要注意的是，这里所提到的材料本构均为狭义本构，及**单调荷载下的单轴应力 - 应变关系**，暂时不涉及往复荷载下的加载路径、受拉曲线原点偏移、裂缝闭合等问题的详细介绍。同时，在编写OpenSees中几种常用混凝土本构时，相关参数的输入取经验值，实际上可采用非线性拟合等方法得到参数的最优值，相关内容后期可能更新，也欢迎有了解的同行加入完善。

Jupyter Notebook中有关参考文献的插入目前还没有找到好的办法，这里将按先后顺序参考文献一并列出：

1. 中华人民共和国住房和城乡建设部组织. 混凝土结构设计规范:GB 50010-2010.  
混凝土结构设计规范: GB 50010-2010; 2014.
2. 过镇海. 钢筋混凝土原理. 钢筋混凝土原理; 2013.
3. Mander JB, Priestley MJN, Park R. Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete. Journal of Structural Engineering. 1988;114(8):1804-1826.  
doi:10.1061/(asce)0733-9445(1988)114:8(1804)
4. Chang G, Mander JB. Seismic energy based fatigue damage analysis of bridge columns: Part I-Evaluation of seismic capacity. National Center for Earthquake Engineering Research Buffalo, NY; 1994.
5. Stanton JF, McNiven HD. The development of a mathematical model to predict the flexural response of reinforced concrete beams to cyclic loads, using system identification. 1979.
6. Lee WK, Billington SL. Simulation and Performance-Based Earthquake Engineering Assessment of Self-Centering Post-Tensioned Concrete Bridge Systems. 2009;
7. Popovics S. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. Cement and Concrete Research. 1973;3(5):583-599.  
doi:10.1016/0008-8846(73)90096-3
8. 赵金钢, 杜斌, 占玉林, 赵凯. OpenSees中混凝土本构模型用于模拟结构滞回性能的对比. 桂林理工大学学报. 2017;37(1):9.
9. Waugh JD. Nonlinear analysis of T-shaped concrete walls subjected to multi-directional displacements. Iowa State University; 2009.

10. Tsai WT. Uniaxial Compressional Stress-Strain Relation of Concrete. *Journal of Structural Engineering*. 1988;114(9):2133-2136. doi:10.1061/(asce)0733-9445(1988)114:9(2133)
11. Kolozvari K, Orakcal K, Wallace J. Shear-flexure interaction modeling for reinforced concrete structural walls and columns under reversed cyclic loading. *Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, PEER Report*. 2015;(2015/12)

由于作者水平有限，该文档出现错误在所难免，还请读者批评指正。

联系方式：周迅 702135971@qq.com

## 版本更新

1. 2022.6.29

初始版本发布

## 2 混凝土材料特性及单轴本构

### 2.1 材料特性

#### 立方体抗压强度及其标准值

为了确定混凝土的抗压强度，我国国标《普通混凝土力学性能试验方法》（GB/T 50081-2002）中规定：标准时间取边长为150mm的立方体，用钢模成型，经浇筑、振捣密实后静置一昼夜，试件拆模后放入标准养护室，即  $(20 \pm 3)^\circ\text{C}$ ，相对湿度>90%；28天龄期后取出试件，擦干表面水，置于试验机内，沿浇筑的垂直方向施加压力，以每秒0.3~0.5MPa的速度连续加载至试件破坏。试件的破坏荷载除以承压面积，即为混凝土的立方体抗压强度 $f_{cu}$ 。立方体抗压强度标准值 $f_{cu,k}$ 系指按标准方法制作、养护的边长为150mm的立方体试件，在28天或设计规定龄期以标准试验方法测得的具有95%保证率的抗压强度值。

#### 圆柱体抗压强度

有些国家（如美国、日本）和国际学术组织（如CEB-FIP）规定以圆柱体为标准抗压试件，高300mm，直径150mm。测定的强度成为圆柱体抗压强度，以 $f'_c$ 表示。不同形状和尺寸试件的混凝土抗压强度相对值如下表。

表2.1 不同形状和尺寸时间的混凝土抗压强度相对值

混凝土试件	立方体				圆柱体			
	边长/mm	200	150	150	C20~C40	C50	C60	C70
抗压强度相对值	0.95	1	1.05	0.80	0.83	0.86	0.875	0.89

#### 棱柱体抗压强度及其标准值

为消除立方体试件两端局部应力和约束变形的影响，采用棱柱体试件进行抗压试验。棱柱体标准时间的尺寸取为150mm×150mm×300mm，时间的支座、养护、加载龄期和试验方法与立方体标准试验相同。试件的破坏荷载除以截面积，即为混凝土的棱柱体抗压强度 $f_c$ 。棱柱体抗压强度标

准值 $f_{ck}$ 指按标准方法制作、养护的尺寸为150mm×150mm×300mm的棱柱体试件，在28天或设计规定龄期以标准试验方法测得的具有95%保证率的抗压强度值。

## 混凝土的变异系数

混凝土材料的变异系数 $\delta_f$ 可按下表取用。

表2.2 混凝土材料的变异系数

混凝土等级	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60
混规	0.189	0.172	0.164	0.156	0.156	0.149	-	0.41
桥规	0.16	0.14	0.13	0.12	0.12	0.11	0.11	0.10

## 轴心抗压、抗拉强度标准值

混凝土的强度标准值可由立方体抗压强度标准值 $f_{cu,k}$ 经计算确定。其中轴心抗压强度标准值 $f_{ck}$ 取值如下表。

表2.3 不同等级混凝土轴心抗压强度标准值

强度	混凝土强度等级													
	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60	C65	C70	C75	C80
$f_{ck}$	10.0	13.4	16.7	20.1	23.4	26.8	29.6	32.4	35.5	38.5	41.5	44.5	47.4	50.2

轴心抗拉强度标准值取值如下表。

表2.4 不同等级混凝土轴心抗拉强度标准值

强度	混凝土强度等级													
	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60	C65	C70	C75	C80
$f_{tk}$	1.27	1.54	1.78	2.01	2.20	2.39	2.51	2.64	2.74	2.85	2.93	2.99	3.05	3.11

混凝土受压和受拉的弹性模量 $E_c$ 按下表采用。

表2.5 不同等级混凝土弹性模量

混凝土等级	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60	C65	C70	C75	C80
$E_c$ (GPa)	22.0	25.5	28.0	30.0	31.5	32.5	33.5	34.5	35.5	36.0	36.5	37.0	37.5	38.0

混凝土剪切模量 $G_c$ 取为 $E_c$ 的0.4倍，泊松比取0.2。

## 2.2 混凝土单轴本构关系

混凝土单轴受压的应力-应变曲线可按下列公式确定：

$$\sigma = (1 - d_c) E_c \epsilon \quad (2.1)$$

$$d_c = \begin{cases} 1 - \frac{\rho_c n}{n - 1 + x^n} & x \leq 1 \\ 1 - \frac{\rho_c}{\alpha_c(x - 1)^2 + x} & x > 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\rho_c = \frac{f_{c,r}}{E_c \epsilon_{c,r}} \quad (2.3)$$

$$n = \frac{E_c \epsilon_{c,r}}{E_c \epsilon_{c,r} - f_{c,r}} \quad (2.4)$$

$$x = \frac{\epsilon}{\epsilon_{c,r}} \quad (2.5)$$

其中,  $f_{c,r}$ 为混凝土单轴抗压强度代表值。

表2.6 混凝土单轴受压应力 - 应变曲线的参数取值

$f_{c,r}$	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
$\epsilon_{c,r} (10^{-6})$	1470	1560	1640	1720	1790	1850	1920	1980	2030	2080	2130	2190	2240
$\alpha_c$	0.74	1.06	1.36	1.65	1.94	2.21	2.48	2.74	3.00	3.25	3.50	3.75	3.99

混凝土单轴受拉的应力-应变曲线可按下列公式确定:

$$\sigma = (1 - d_t) E_c \epsilon \quad (2.6)$$

$$d_t = \begin{cases} 1 - \rho_t [1.2 - 0.2x^5] & x \leq 1 \\ 1 - \frac{\rho_t}{\alpha_t(x-1)^{1.7} + x} & x > 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\rho_t = \frac{f_{t,r}}{E_c \epsilon_{t,r}} \quad (2.8)$$

$$x = \frac{\epsilon}{\epsilon_{t,r}} \quad (2.9)$$

其中,  $f_{t,r}$ 为混凝土单轴抗拉强度代表值。

表2.7 混凝土单轴受拉应力 - 应变曲线的参数取值

$f_{t,r}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$\epsilon_{t,r}(10^{-6})$	65	81	95	107	118	128	137
$\alpha_t$	0.31	0.70	1.25	1.95	2.81	3.82	5.00

由此得到受拉、受压全曲线如下。

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [ ]:

```
# 基本参数输入
# 为了和Mander能够合上, fcr得取fcp, 即圆柱体抗压强度

fcuk = 40 # 立方体标准值 C40 (MPa)
fcr = 32 # 抗压强度代表值, 可取立方体强度、*抗压强度标准值*、抗压强度平均值等等 (MPa)
ftr = 2.39 # 抗拉强度代表值, 可取立方体强度、*抗拉强度标准值*、抗拉强度平均值等等 (MPa)
```

In [ ]:

```
xc = np.array([20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80])
mc = np.array([25.5, 28.0, 30.0, 31.5, 32.5, 33.5, 34.5, 35.5, 36.0, 36.5, 37.0, 37.5,
yc = np.array([1470, 1560, 1640, 1720, 1790, 1850, 1920, 1980, 2030, 2080, 2130, 2190,
zc = np.array([0.74, 1.06, 1.36, 1.65, 1.94, 2.21, 2.48, 2.74, 3.00, 3.25, 3.50, 3.75,
Ec = np.interp(fcuk, xc, mc) # 根据混规插值弹模 (MPa)
epscr = np.interp(fcr, xc, yc) # 根据混规插值峰值压应力对应的应变
```

```

ac = np.interp(fcr, xc, zc) # 根据混规插值受压曲线形状参数

xt = np.array([1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0])
yt = np.array([65, 81, 95, 107, 118, 128, 137]) * 10**(-6)
zt = np.array([0.31, 0.70, 1.25, 1.95, 2.81, 3.82, 5.00])

epstr = np.interp(ftr, xt, yt) # 根据混规插值峰值拉应力对应的应变
at = np.interp(ftr, xt, zt) # 根据混规插值受拉曲线形状参数

```

In [ ]: # 受压应力应变曲线计算

```

rhoc = fcr / Ec / epscr
n = Ec * epscr / (Ec * epscr - fcr)

# 上升段

xc1 = np.linspace(0, 1, 100, endpoint=False)
dc1 = 1 - rhoc * n / (n - 1 + xc1 ** n)
sc1 = (1 - dc1) * Ec * xc1 * epscr
ec1 = xc1 * epscr

# 下降段

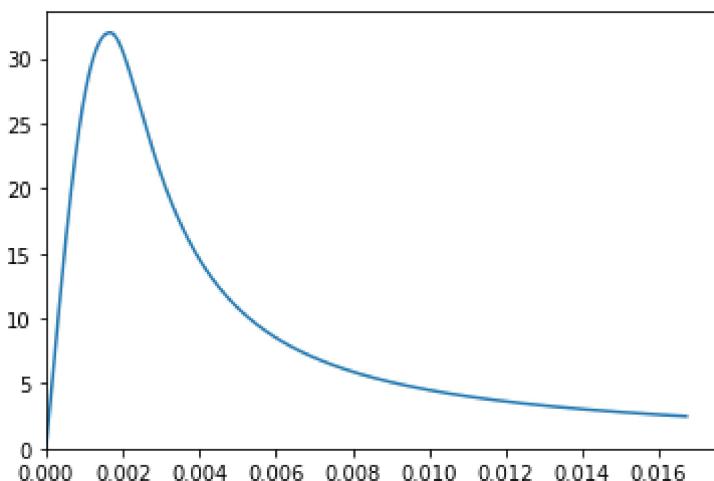
xc2 = np.linspace(1, 10, 1000, endpoint=True)
dc2 = 1 - rhoc / (ac * (xc2 - 1)**2 + xc2)
sc2 = (1 - dc2) * Ec * xc2 * epscr
ec2 = xc2 * epscr

ec = np.concatenate((ec1, ec2)) # 上升段与下降段应变合成
sc = np.concatenate((sc1, sc2)) # 上升段与下降段应力合成

plt.plot(ec, sc)
plt.xlim(left = 0)
plt.ylim(bottom = 0)

```

Out[ ]: (0.0, 33.6)



In [ ]: # 受拉应力应变曲线计算

```

rhot = ftr / Ec / epstr

# 上升段

xt1 = np.linspace(0, 1, 100, endpoint=False)
dt1 = 1 - rhot * (1.2 - 0.2 * xt1 ** 5)
st1 = (1 - dt1) * Ec * xt1 * epstr

```

```

et1 = xt1 * epstr

# 下降段

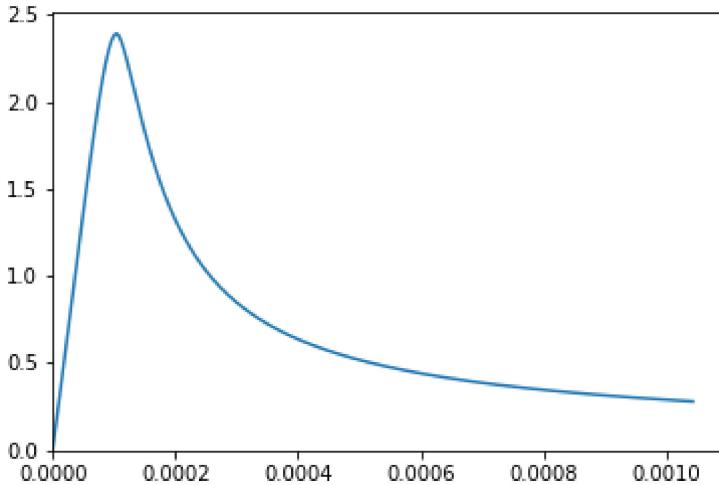
xt2 = np.linspace(1, 10, 1000, endpoint=True)
dt2 = 1 - rhot / (at * (xt2 - 1)**1.7 + xt2)
st2 = (1 - dt2) * Ec * xt2 * epstr
et2 = xt2 * epstr

et = np.concatenate((et1, et2)) # 上升段与下降段应变合成
st = np.concatenate((st1, st2)) # 上升段与下降段应力合成

plt.plot(et, st)
plt.xlim(left = 0)
plt.ylim(bottom = 0)

```

Out[ ]: (0.0, 2.5095)



### 3 约束混凝土的Mander本构

对于约束混凝土的本构关系，国内外学者进行了很多的试验研究。其中，得到最广泛认可的是Mander本构，这一曲线适用于任何截面形状和约束水平，可用下式表示：

$$f_c = \frac{f'_{cc} \cdot x \cdot r}{r - 1 + x^r} \quad (3.1)$$

其中， $f'_{cc}$ 为约束混凝土的峰值压应力。

$$x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cc}} \quad (3.2)$$

其中， $\epsilon_c$ 为混凝土的纵向压应变， $\epsilon_{cc}$ 为峰值压应力 $f'_{cc}$ 所对应的应变。

$$\epsilon_{cc} = \left[ 5 \left( \frac{f'_{cc}}{f_c} - 1 \right) + 1 \right] \epsilon_{c0} \quad (3.3)$$

其中， $f'_c$ 、 $\epsilon_{c0}$ 分别为无约束混凝土的圆柱体抗压强度及相应的纵向压应变。

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \quad (3.4)$$

$$E_c = 5000\sqrt{f'_c} \quad (3.5)$$

$$E_{sec} = \frac{f'_{cc}}{\epsilon_{cc}} \quad (3.6)$$

其中，各强度、模量的单位取MPa。

约束混凝土的峰值压应力 $f'_{cc}$ 分两种情况计算：

### 1. 圆形截面

由于圆形截面水平方向上的约束应力相等，根据混凝土的三维本构，可以得到如下峰值压应力 $f'_{cc}$ 与有效横向约束应力的关系。

$$f'_{cc} = f'_c \cdot \left( 2.254 \sqrt{1 + \frac{7.94 f'_l}{f'_c}} - 2 \frac{f'_l}{f'_c} - 1.254 \right) \quad (3.7)$$

其中， $f'_l$ 为有效横向约束应力。

$$f'_l = K_e \frac{2f_{yh} \cdot A_{sp}}{D' \cdot s} \quad (3.8)$$

其中， $K_e$ 为截面的有效约束系数，为有效约束核心混凝土面积与核心混凝土总面积之比，一般取0.95。或按下式进行计算。

$$\begin{cases} K_e = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2d_s}\right)}{1 - \rho_{cc}} & \text{螺旋筋} \\ K_e = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2d_s}\right)^2}{1 - \rho_{cc}} & \text{圆形箍筋} \end{cases} \quad (3.9)$$

$f_{yh}$ 、 $A_{sp}$ 为箍筋的屈服强度和截面面积； $D'$ 、 $s$ 分别为 箍筋环 的直径和纵向间距。

```
In [ ]:
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [ ]:
# 基本参数输入

fcuk = 40 # 立方体标准值 C40 (MPa)
fyh = 300 # 箍筋的屈服强度 (MPa)
dsp = 12 # 箍筋直径 (mm)
Dp = 1500 # 箍筋环直径 (mm)
s = 50 # 箍筋间距 (mm)
```

```
In [ ]:
xc = np.array([20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80])
yc = np.array([0.80, 0.80, 0.80, 0.80, 0.80, 0.815, 0.83, 0.845, 0.86, 0.8675, 0.875,
              0.875, 0.875, 0.875, 0.875, 0.875])
zc = np.array([1470, 1560, 1640, 1720, 1790, 1850, 1920, 1980, 2030, 2080, 2130, 2190])

fcp = np.interp(fcuk, xc, yc) * fcuk # 圆柱体抗压强度 (MPa)
epsc0 = np.interp(fcp, xc, zc) # 根据混规插值出峰值应力对应的应变
Ec = 5000 * fcp**0.5 # 弹模 (MPa)

Asp = 0.25 * np.pi * dsp**2 # 箍筋截面积mm^2
```

```

f1p = 0.95 * 2 * fyh * Asp / Dp / s # 有效横向约束应力 (MPa)
fccp = fcp * (2.254 * (1 + 7.94 * f1p / fcp)**0.5 - 2 * f1p / fcp - 1.254) # 约束后的
epsc = epsec0 * (5 * (fccp / fcp - 1) + 1) # 约束后的峰值压应力对应的应变
Esec = fccp / epsec # 割线模量, 用来定义骨架曲线 (MPa)
r = Ec / (Ec - Esec) # 用来定义骨架曲线的形状参数

epscu = 0.004 + 1.4 * fyh * 0.09 * (4 * Asp / s / Dp) / fccp # 约束混凝土的极限压应变

x = np.linspace(0, epscu / epsec, 100)
msc = fccp * x * r / (r - 1 + x**r) # Mander本构骨架曲线的应力数据 (MPa)
mec = x * epsec # Mander本构骨架曲线的应变数据

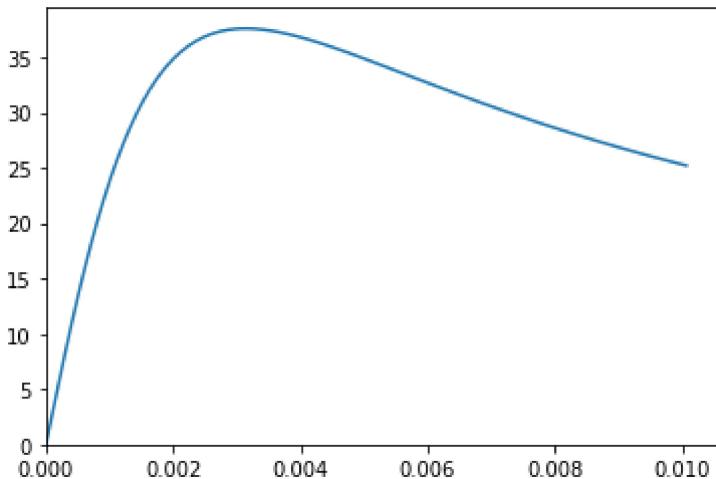
# plt.plot(ec, sc)
plt.plot(mec, msc)
plt.xlim(left = 0)
plt.ylim(bottom = 0)

# import pandas as pd
# import openpyxl

# out = pd.DataFrame(data=np.vstack((ec, sc)))
# out.to_excel("confined.xlsx")

```

Out[ ]: (0.0, 39.48063489650572)

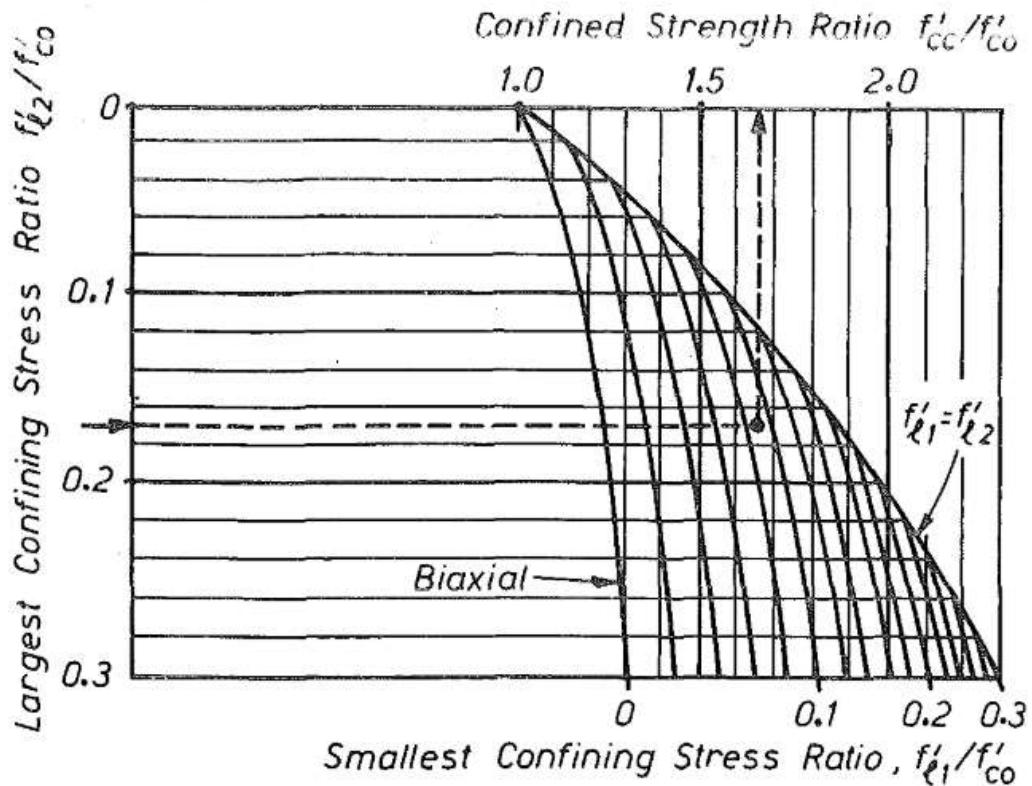


## 1. 矩形截面

矩形截面在两个主轴方向的有效约束应力分别为：

$$f'_{lx} = K_e \cdot \rho_x \cdot f_{yh}, \quad f'_{ly} = K_e \cdot \rho_y \cdot f_{yh} \quad (3.10)$$

其中,  $\rho_x = A_{sx}/(s \cdot d_c)$ ,  $\rho_y = A_{sy}/(s \cdot b_c)$ , 分别为箍筋在两个方向 x、y 的体积配箍率;  $A_{sx}$ 、 $A_{sy}$  分别为沿 x、y 方向箍筋的总截面积;  $d_c$ 、 $b_c$  分别为截面 y、x 方向的核心混凝土尺寸, 按箍筋中心线计算; 截面的有效约束系数  $K_e$ , 一般矩形截面可取 0.75, 狹长截面可取 0.6 (Mander 的原文献有具体公式)。由于矩形截面两个方向上的约束水平可能不同, 因此可利用下图中约束应力和约束强度关系曲线, 查出约束强度比。



针对上图，可采用近似方程（式(3.11)~式(3.15)）计算约束强度。

$$f'_{cc} = f'_c \cdot \left[ 1 + A\bar{x} \left( 0.1 + \frac{0.9}{1 + B\bar{x}} \right) \right] \quad (3.11)$$

其中，

$$\bar{x} = \frac{f'_{lx} + f'_{ly}}{2f'_c} \quad (3.12)$$

$$r = \frac{f'_{lx}}{f'_{ly}}, \quad f'_{lx} \leq f'_{ly} \quad (3.13)$$

$$A = 6.8886 - (0.6069 + 17.275r)e^{-4.989r} \quad (3.14)$$

$$B = \frac{4.5}{\frac{5}{A}(0.9849 - 0.6306e^{-3.8939r}) - 0.1} - 5 \quad (3.15)$$

约束混凝土的极限压应变  $\epsilon_{cu}$ ，定义为横向约束箍筋开始发生断裂时的混凝土压应变，可由下式保守估计：

$$\epsilon_{cu} = 0.004 + \frac{1.4\rho_s \cdot f_{yh} \cdot \epsilon_{su}}{f'_{cc}} \quad (3.16)$$

其中， $\epsilon_{su}$ 为箍筋在最大拉应力时的应变（一般取为0.09）； $\rho_s$ 为箍筋的体积配箍率，对于矩形截面有 $\rho_s = \rho_x + \rho_y$ ； $f'_{cc}$ 为约束混凝土的峰值压应力； $f_{yh}$ 为约束箍筋的最大拉应力。

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [ ]: # 基本参数输入
```

```
fcuk = 40 # 立方体标准值 C40 (MPa)
fyh = 300 # 箍筋的屈服强度 (MPa)
dsp = 12 # 箍筋直径 (mm)
dc = 2480 # 核心混凝土尺寸1 (mm)
bc = 1680 # 核心混凝土尺寸2 (mm)
n1 = 7 # 垂直于1方向的箍筋根数
n2 = 6 # 垂直于2方向的箍筋根数
s = 100 # 箍筋间距 (mm)
```

```
In [ ]:
```

```
xc = np.array([20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80])
yc = np.array([0.80, 0.80, 0.80, 0.80, 0.80, 0.815, 0.83, 0.845, 0.86, 0.8675, 0.875,
zc = np.array([1470, 1560, 1640, 1720, 1790, 1850, 1920, 1980, 2030, 2080, 2130, 2190,

fcp = np.interp(fcuk, xc, yc) * fcuk # 圆柱体抗压强度 (MPa)
epsc0 = np.interp(fcp, xc, zc) # 根据混规插值出峰值应力对应的应变
Ec = 5000 * fcp**0.5 # 弹模 (MPa)

Asp = 0.25 * np.pi * dsp**2 # 箍筋截面积mm^2

flxp = 0.75 * Asp * n1 / s / dc * fyh # 方向1上的横向约束应力 (MPa)
flyp = 0.75 * Asp * n2 / s / bc * fyh # 方向2上的横向约束应力 (MPa)

xbar = (flxp + flyp) / 2 / fcp
r = np.min([flxp, flyp]) / np.max([flxp, flyp])
A = 6.8886 - (0.6069 + 17.275 * r) * np.exp(-4.989 * r)
B = 4.5 / (5 / A * (0.9849 - 0.6306 * np.exp(-3.8939 * r)) - 0.1) - 5

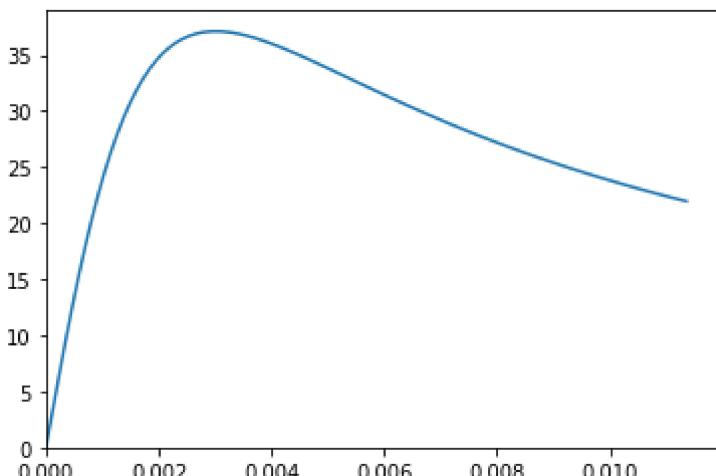
fccp = fcp * (1 + A * xbar * (0.1 + 0.9 / (1 + B * xbar))) # 约束后的峰值压应力 (MPa)
epscc = epsc0 * (5 * (fccp / fcp - 1) + 1) # 约束后的峰值压应力对应的应变
Esec = fccp / epscc # 割线模量, 用来定义骨架曲线 (MPa)
r = Ec / (Ec - Esec) # 用来定义骨架曲线的形状参数

epscu = 0.004 + 1.4 * fyh * 0.09 * (Asp * n1 / s / dc + Asp * n2 / s / bc) / fccp #

x = np.linspace(0, epscu / epscc, 100)
msc = fccp * x * r / (r - 1 + x**r) # Mander本构骨架曲线的应力数据 (MPa)
mec = x * epscc # Mander本构骨架曲线的应变数据

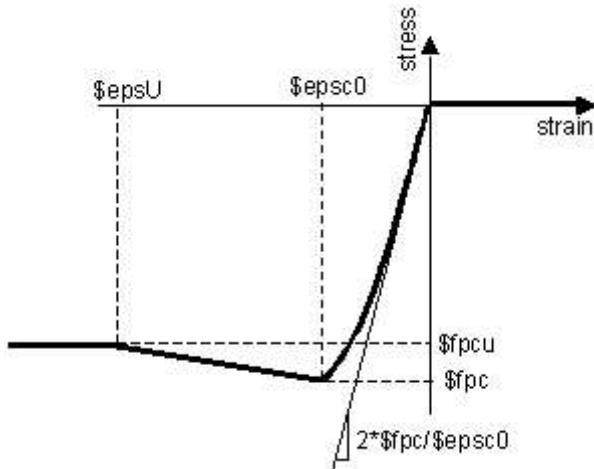
# plt.plot(ec, sc)
plt.plot(mec, msc)
plt.xlim(left = 0)
plt.ylim(bottom = 0)
```

```
Out[ ]: (0.0, 38.97488427197577)
```



# 4 OpenSees中常见的混凝土本构及相关取值

## 4.1 Concrete01



Concrete01仅考虑混凝土的受压，是OpenSees中最简单的混凝土本构。模型采用了单轴的Kent-Scott-Park本构模型由上升段和下降的二折线组成。在OpenSees中的命令为

```
OpenSees
uniaxialMaterial Concrete01 $matTag $fpc $epsc0 $fpcu $epsU

$matTag integer tag identifying material
$fpc    concrete compressive strength at 28 days (compression is
negative)*
$epsc0  concrete strain at maximum strength*
$fpcu   concrete crushing strength *
$epsU   concrete strain at crushing strength*
```

模型的上升段采用Hognestad的二次式：

$$y = 2x - x^2 \quad (4.1)$$

其中 $x$ 和 $y$ 为无量纲坐标。

$$x = \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}}, \quad y = \frac{\sigma}{f'_c} \quad (4.2)$$

对二次式求导可得到初始弹性模量为 $2f'_c/\epsilon_{c0}$ 。模型的下降段采用二折线，即线性下降至破碎强度 $f'_c$ ，此时对应的应变为 $\epsilon_u$ ；超过此应变后为水平线。Concrete01模型简单，计算速度快价格低，收到了大部分研究者的青睐。经过比较，通过调整模型参数，Concrete01能够很好地拟合《混凝土结构设计规范》GB 50010 - 2010中无约束混凝土的单轴本构关系；但是对于Mander约束本构，Concrete01的效果较一般（仅仅是相对无约束而言）。然而，该本构也或多或少存在着一定的缺陷：

1. 没有受拉行为。虽然主流观点认为结构分析时可忽略混凝土的受拉特性；同时混凝土结构本身带裂缝工作，在地震来临之前裂缝已经产生了，因此可以不考虑混凝土的受拉行为。然而是否模拟受拉还是需要视情况而定。
2. 由于不考虑混凝土材料开裂后裂缝的提前闭合（由于裂缝被压碎后的材料碎屑填满），采用Concrete01会导致结构的力-位移曲线出现“零”刚度的问题。这一问题虽然不会对结构最大位移响应产生明显影响，但是会出现严重损伤的结构残余位移偏小甚至为0的情况。（本质上是

由于Concrete01采用了不符合实际的加卸载准则。但该准则内置在OpenSees中无法修改，如果残余位移是关注的重点，则应采用后面几种高级材料（如ConcreteCM）或重新写程序（如Concrete01withSITC）。）

```
In [ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [ ]: # 基本参数输入

fpc = 32
epsc0 = 0.003
fpcu = 6.4
epsu = 0.008
```

```
In [ ]: # 上升段

c1e1 = np.linspace(0, 1, 100) * epsc0
c1s1 = (2 * np.linspace(0, 1, 100) - np.linspace(0, 1, 100)**2) * fpc

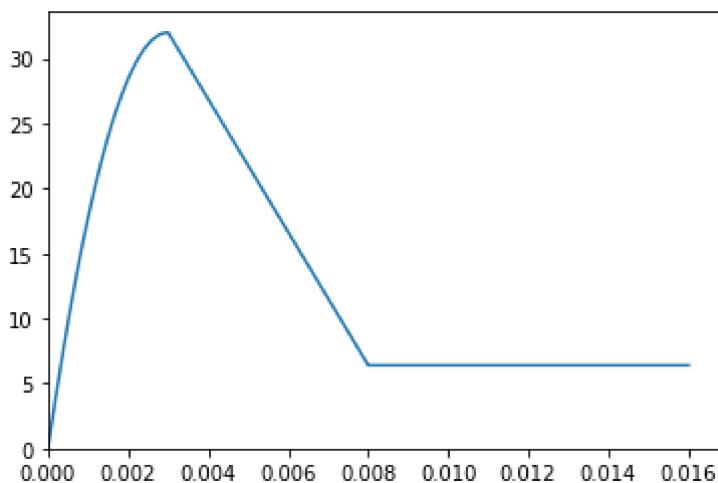
# 下降段+水平线

c1e2 = np.linspace(1, epsu / epsc0, 100) * epsc0
c1s2 = (fpcu - fpc) / (epsu - epsc0) * (c1e2 - epsc0) + fpc
c1e3 = np.linspace(epsu / epsc0, 2 * epsu / epsc0, 100) * epsc0
c1s3 = np.ones(100) * fpcu

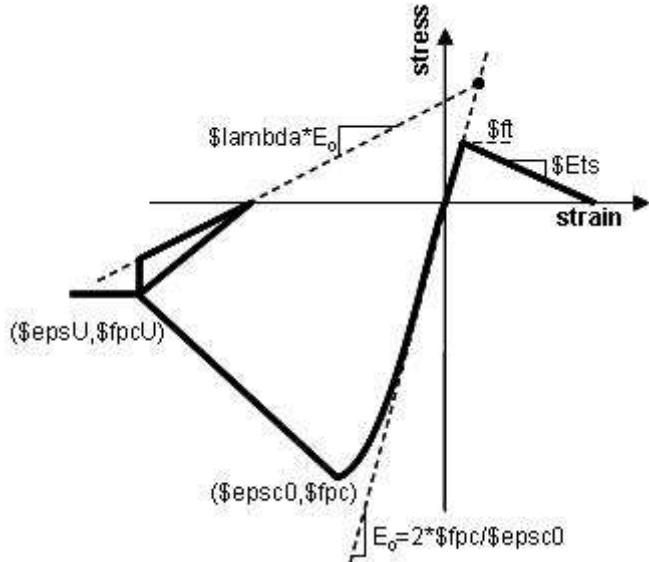
c1e = np.concatenate((c1e1, c1e2, c1e3))
c1s = np.concatenate((c1s1, c1s2, c1s3))

plt.plot(c1e, c1s)
# plt.plot(mec, msc)
plt.xlim(left = 0)
plt.ylim(bottom = 0)
```

```
Out[ ]: (0.0, 33.6)
```



## 4.2 Concrete02



Concrete02受压部分与Concrete01相同因此不再赘述，同时Concrete02还考虑了混凝土的受拉部分，是OpenSees中次简单的混凝土本构。其命令如下：

```

OpenSees
uniaxialMaterial Concrete02 $matTag $fpc $epsc0 $fpcu $epsU $lambda
$f_t $Ets

$matTag integer tag identifying material
$fpc    concrete compressive strength at 28 days (compression is
negative)*
$epsc0  concrete strain at maximum strength*
$fpcu   concrete crushing strength *
$epsU   concrete strain at crushing strength*
$lambda ratio between unloading slope at $epscu and initial slope
$f_t tensile strength
$Ets    tension softening stiffness (absolute value) (slope of the
linear tension softening branch)

```

Concrete02在考虑混凝土受拉时，上升段和下降段均采用线性模型简化。其中上升段斜率 $2f'_c/\epsilon_{c0}$ ，峰值强度 $f_t$ ；下降段斜率为 $E_{ts}$ 。Concrete02虽然在Concrete01的基础上考虑了混凝土的受拉，但是由于受拉部分的模型太过于简单，因此与《混凝土结构设计规范》GB 50010 - 2010中混凝土受拉本构的拟合效果并不好：

1. 上升段采用常刚度而非变刚度，并且采用了受压侧的初始刚度，因此低估了混凝土受拉峰值应力所对应的应变；
2. 线性下降段过于简化。（相比而言，Concrete04采用了指数下降模型，更符合实际。）

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [ ]:

```
# 基本参数输入
```

```
fpc = 32
epsc0 = 0.003135
fpcu = 25
epsu = 0.01
```

```
ft = 2.39
Ets = 0.3 * 2 * fpc / epsec0 # 0.6可调整
```

In [ ]:

```
# 上升段

c2e1 = np.linspace(0, ft / (2 * fpc / epsec0), 100)
c2s1 = c2e1 * (2 * fpc / epsec0)

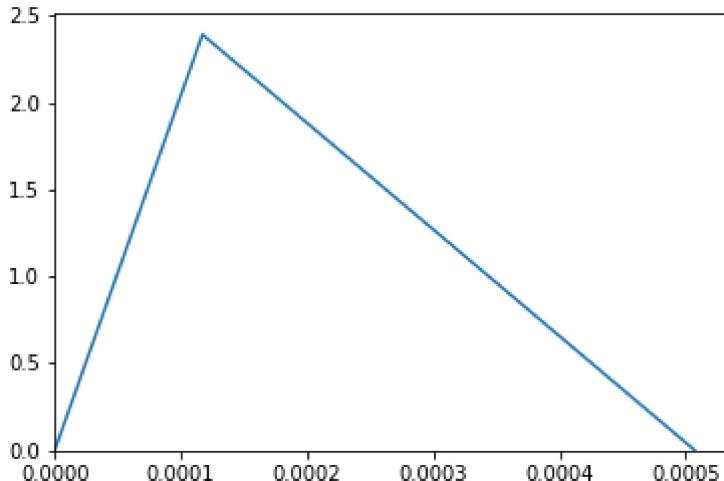
# 下降段

c2e2 = np.linspace(ft / (2 * fpc / epsec0), ft / (2 * fpc / epsec0) + ft / Ets, 100)
c2s2 = -Ets * (c2e2 - ft / (2 * fpc / epsec0)) + ft

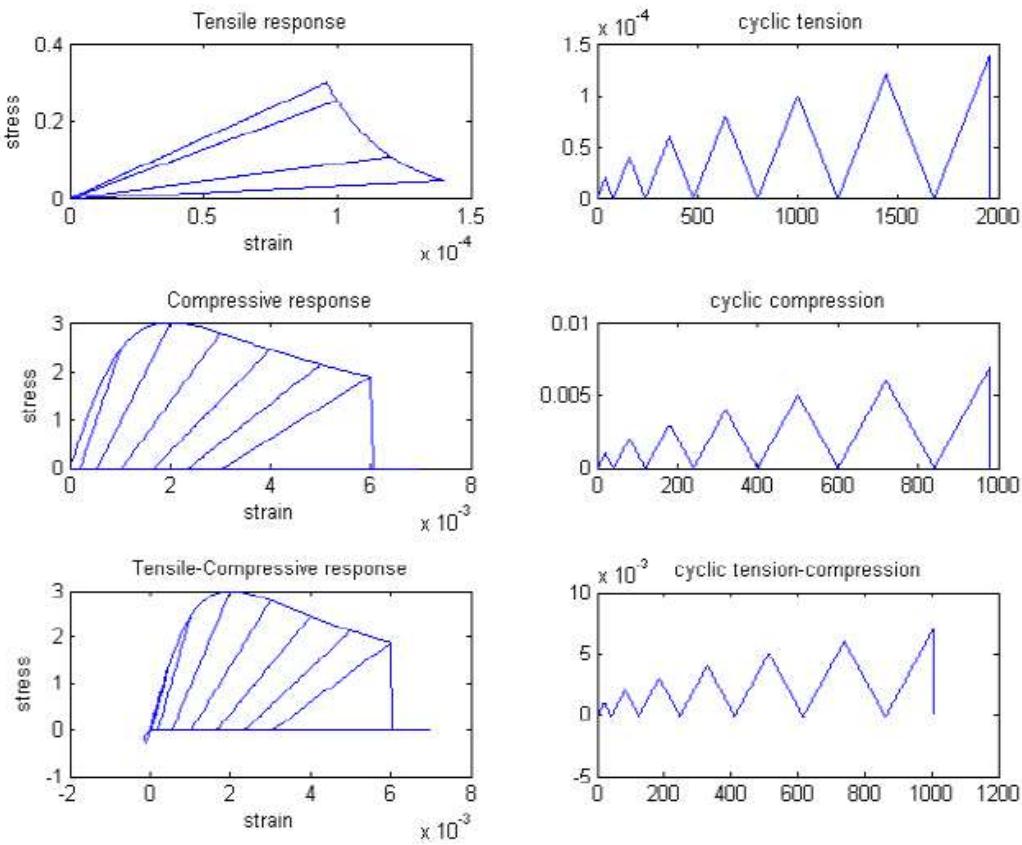
c2e = np.concatenate((c2e1, c2e2))
c2s = np.concatenate((c2s1, c2s2))

plt.plot(c2e, c2s)
# plt.plot(et, st)
plt.xlim(left = 0)
plt.ylim(bottom = 0)
```

Out[ ]: (0.0, 2.5095)



## 4.3 Concrete04



Concrete04考虑了混凝土的受拉、受压行为。其中，受压行为采用了Popovics混凝土本构，该本构是描述混凝土单轴受压行为最成功的模型之一。实际上，Mander约束混凝土本构就是在Popovics本构的基础上发展而来的，而无约束混凝土本构就是Popovics本构。

$$\frac{\sigma}{f_c} = \frac{\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right) \cdot r}{r - 1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^r} \quad (4.3)$$

其中， $r = E_c / (E_c - E_{sec})$ ， $E_{sec} = f_c' / \epsilon_c$ 。

受拉行为采用了线性上升、指数下降模型，与实际受拉行为更为贴近。其中指数下降段的数学模型如下：

$$\sigma = f_t \cdot \beta \left( \frac{\epsilon - f_{ct}/E_c}{\epsilon_{tu} - f_{ct}/E_c} \right) \quad (4.4)$$

Concrete04在OpenSees中的命令如下：

```

opensees
uniaxialMaterial Concrete04 $matTag $fc $ec $ecu $Ec <$fct $etu>
<$beta>

$matTag integer tag identifying material
$fc floating point values defining concrete compressive strength at 28
days (compression is negative)*
$ec floating point values defining concrete strain at maximum
strength*
$ecu floating point values defining concrete strain at crushing
strength*

```

```

$Ec floating point values defining initial stiffness**
$fct floating point value defining the maximum tensile strength of
concrete
$etu floating point value defining ultimate tensile strain of
concrete
$beta loating point value defining the exponential curve parameter
to define the residual stress (as a factor of $ft) at $etu

```

Concrete04受拉本构的上升段仍然采用常刚度而非变刚度，并且采用了受压侧的初始刚度，因此低估了混凝土受拉峰值应力所对应的应变。

In [ ]:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

```

In [ ]:

```

# 基本参数输入

fc = 32
ec = 0.001672
ecu = 0.004
Ec = 5000 * fc**0.5 # 弹模用这个值就和Mander完全一样

fct = 2.39
etu = 6 * fct / Ec # 系数可调
beta = 0.15 # 可调

```

In [ ]:

```

c4e1 = np.linspace(0, fct / Ec, 100)
c4s1 = c4e1 * Ec

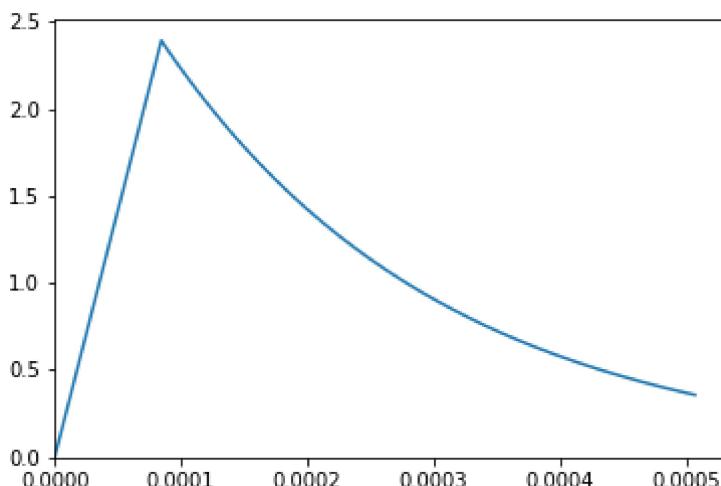
c4e2 = np.linspace(fct / Ec, etu, 100)
c4s2 = fct * beta**((c4e2 - fct / Ec) / (etu - fct / Ec))

c4e = np.concatenate((c4e1, c4e2))
c4s = np.concatenate((c4s1, c4s2))

plt.plot(c4e, c4s)
# plt.plot(et, st)
plt.xlim(left = 0)
plt.ylim(bottom = 0)

```

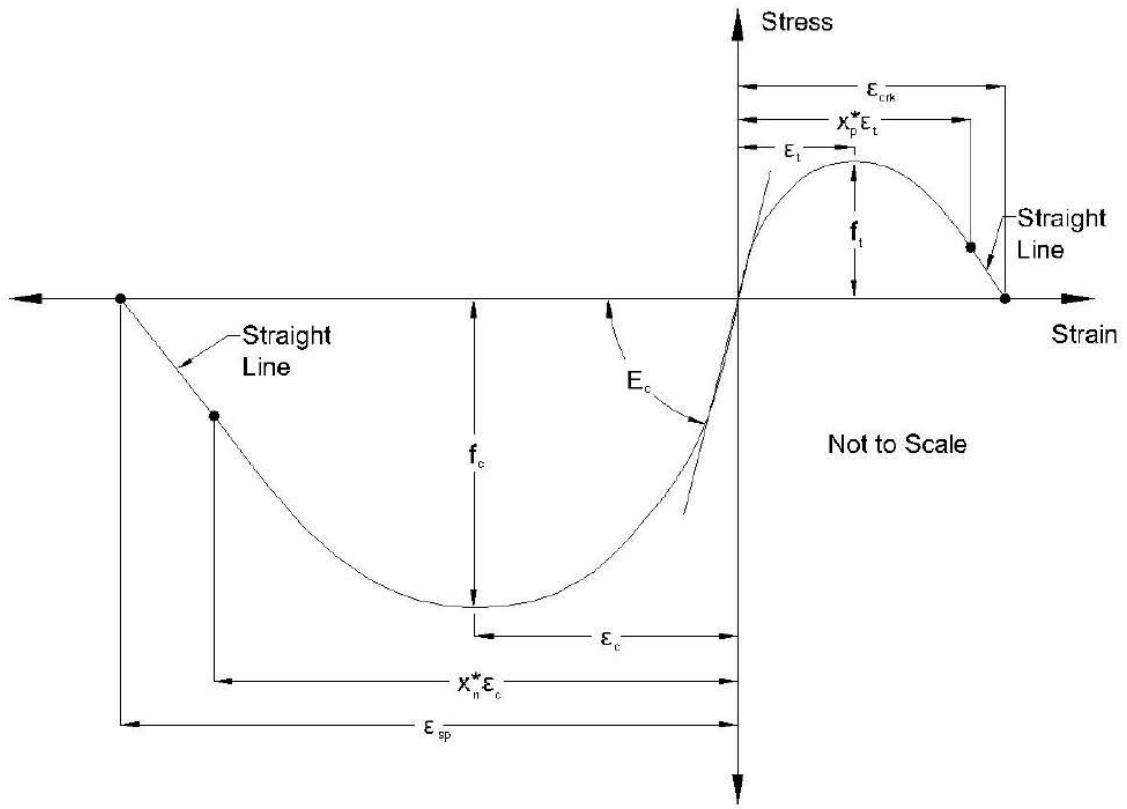
Out[ ]: (0.0, 2.5095)



## 4.4 Concrete06

主要用以模拟薄膜单元的力学性能，貌似不常用，这里先留个位置。

## 4.5 Concrete07



Concrete07模型基于Chang - Mander本构。为了提高数值稳定性，Waugh对Chang - Mander本构的加卸载准则进行了调整，用三折线取代了原本的连续函数。该模型形式复杂计算用时长，但考虑因素全面。其受拉、受压骨架曲线的数学形式相同，均采用了Tsai提出的广义Popovics曲线，仅参数取值不同。

$$y = \frac{mx}{1 + \left(m - \frac{n}{n-1}\right)x + \frac{x^n}{n-1}} \quad (4.5)$$

其中， $m = E_c/E_{sec}$ 控制曲线上升段的倾斜程度； $n$ 则控制下降段的倾斜程度。可以看到如果将 $m$ 取为 $n/(n-1)$ ，式(4.4)则退化为式(4.2)。因此，该本构又被称为Popovics曲线的广义形式。对于无约束混凝土，模型中的相关参数取值可参考：

$$\epsilon_c = \frac{f_c^{1/4}}{28} \quad (4.6)$$

$$E_c = 8200 f_c^{3/8} \quad (4.7)$$

$$f_t = 0.62 f_c^{1/2} \quad (4.8)$$

$$\epsilon_t = \frac{2f_t}{E_c} \quad (4.9)$$

$$n = \frac{f_c}{5.2} - 1.9 \quad (4.10)$$

同时由式(4.4)可见，即便 $x \rightarrow \infty$ 时， $y$ 仍然大于零。而实际情况为，保护层混凝土受压（受拉）达到一定应变 $\epsilon_{sp}(\epsilon_{crk})$ 时将会剥落。因此对于无约束混凝土，Concrete07本构认为当应变超过 $x_n * \epsilon_c(x_p * \epsilon_t)$ 时，混凝土的应力 - 应变曲线将会直线下降至 $(\epsilon_{sp}, 0)((\epsilon_{crk}, 0))$ 。相关参数取值为：

$$x_n = 2.3 \quad (4.11)$$

$$\epsilon_{sp} = x_n * \epsilon_c * \left[ 1 - \frac{1 + (m_c - n/(n-1))x_n + x_n^n/(n-1)}{1 - x_n^n} \right] \quad (4.12)$$

$$x_p = 2 \quad (4.13)$$

$$\epsilon_{crk} = x_p * \epsilon_t * \left[ 1 - \frac{1 + (m_t - n/(n-1))x_p + x_p^n/(n-1)}{1 - x_p^n} \right] \quad (4.14)$$

Concrete07在OpenSees中的命令如下：

```
opensees
uniaxialMaterial Concrete07 $matTag $fc $ec $Ec $ft $et $xp $xn $r

$matTag integer tag identifying material
$fc concrete compressive strength (compression is negative)*
$ec concrete strain at maximum compressive strength*
$Ec Initial Elastic modulus of the concrete
$ft tensile strength of concrete (tension is positive)
$et tensile strain at max tensile strength of concrete
$xp Non-dimensional term that defines the strain at which the straight
line descent begins in tension
$xn Non-dimensional term that defines the strain at which the straight
line descent begins in compression
$r Parameter that controls the nonlinear descending branch
```

其中最后一个参数 $r$ ，即为式(4.4)中的 $n$ 。

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [ ]:

```
# 基本参数输入

fc = 32 # 圆柱体抗压强度(MPa); 为使n大于1, fc至少应大于15.08, 因此该本构对于低强度混凝土
epsc = 0.001672 # 建议值 fc**(1/4) / 1152.7, 但和国标对不上, 这里先用国标的值
Ec = 32500 # 建议值 8200 * fc**(3/8), 但和国标对不上, 这里先用国标的值
ft = 2.39 # 建议值 0.62 * fc**(1/2), 但和国标对不上, 这里先用国标的值
epst = 0.00010436 # 建议值 2 * ft / Ec, 但和国标对不上, 这里先用国标的值
n = fc / 5.2 - 1.9

xn = 2.3
xp = 2
```

In [ ]:

```
# 受压部分
# 广义Popovics曲线

Esecc = fc / epsc
mc = Ec / Esecc
```

```

c7e1c = np.linspace(0, xn, 100) * epsc
c7s1c = fc * (mc * np.linspace(0, xn, 100) / (1 + (mc - n/(n-1)) * np.linspace(0, xn, 100))) * epsc
# 线性下降

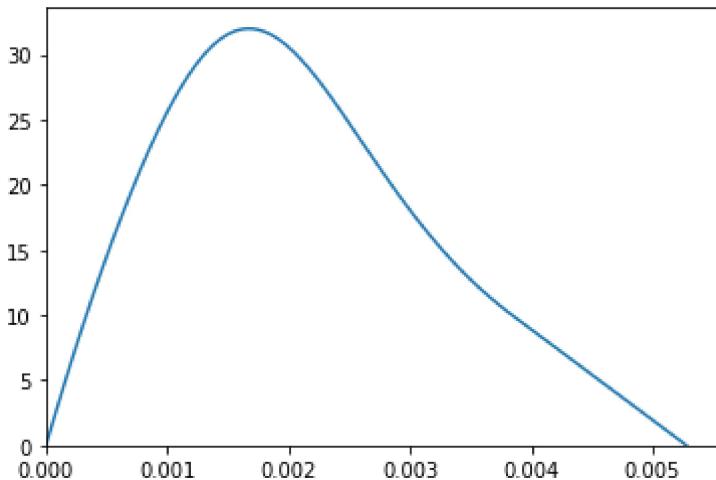
esp = xn * epsc * (1 - (1+(mc-n/(n-1))*xn+xn**n/(n-1))/(1-xn**n))
c7e2c = np.linspace(xn, esp / epsc, 100) * epsc
c7s2c = np.linspace(c7s1c[-1], 0, 100)

c7ec = np.concatenate((c7e1c, c7e2c))
c7sc = np.concatenate((c7s1c, c7s2c))

plt.plot(c7ec, c7sc)
# plt.plot(ec, sc)
plt.xlim(left = 0)
plt.ylim(bottom = 0)

```

Out[ ]: (0.0, 33.59995705033611)



```

In [ ]:
# 受拉部分
# 广义Popovics曲线

Esect = ft / epst
mt = Ec / Esect

c7e1t = np.linspace(0, xp, 100) * epst
c7s1t = ft * (mt * np.linspace(0, xp, 100) / (1 + (mt - n/(n-1)) * np.linspace(0, xp, 100))) * epst
# 线性下降

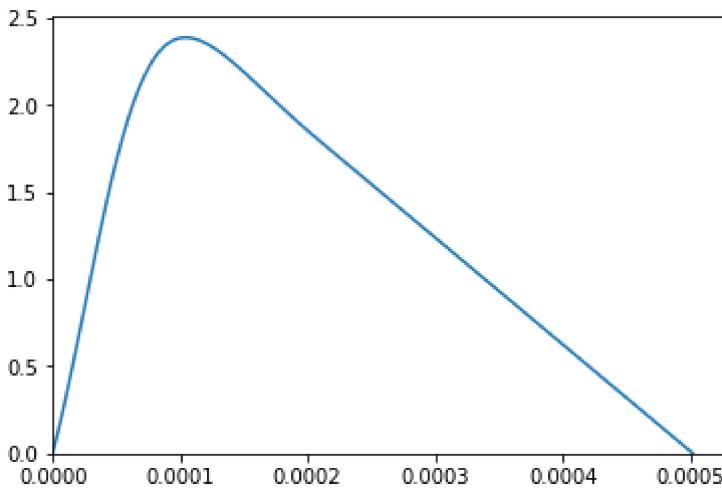
ecrk = xp * epst * (1 - (1+(mt-n/(n-1))*xp+xp**n/(n-1))/(1-xp**n))
c7e2t = np.linspace(xp, ecrk / epst, 100) * epst
c7s2t = np.linspace(c7s1t[-1], 0, 100)

c7et = np.concatenate((c7e1t, c7e2t))
c7st = np.concatenate((c7s1t, c7s2t))

plt.plot(c7et, c7st)
# plt.plot(et, st)
plt.xlim(left = 0)
plt.ylim(bottom = 0)

```

Out[ ]: (0.0, 2.50932200231791)



对于约束混凝土受压本构，则采用Mander模型对峰值应力 $f_c$ ，及其对应的应变 $\epsilon_c$ 进行调整（见式(3.3)~式(3.15)）。同时取。与Mander模型不同的是，Concrete07建议约束混凝土的极限压应变 $\epsilon_{cu}$ 取大值，即 $x_n$ 取大值 (30) 。而约束混凝土受拉本构保持不变。

```
In [ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [ ]: # 基本参数输入

fcuk = 40 # 立方体标准值 C40 (MPa)
fyh = 300 # 箍筋的屈服强度 (MPa)
dsp = 12 # 箍筋直径 (mm)
Dp = 1500 # 箍筋环直径 (mm)
s = 50 # 箍筋间距 (mm)

xc = np.array([20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80])
yc = np.array([0.80, 0.80, 0.80, 0.80, 0.80, 0.815, 0.83, 0.845, 0.86, 0.8675, 0.875,
zcc = np.array([1470, 1560, 1640, 1720, 1790, 1850, 1920, 1980, 2030, 2080, 2130, 2190, 2250])

fc = np.interp(fcuk, xc, yc) * fcuk # 圆柱体抗压强度 (MPa)
epsc0 = np.interp(fc, xc, zcc) # 根据混规插值出峰值应力对应的应变
Ec = 5000 * fc**0.5 # 弹模 (MPa)

Asp = 0.25 * np.pi * dsp**2 # 箍筋截面积mm^2
f1p = 0.95 * 2 * fyh * Asp / Dp / s # 有效横向约束应力 (MPa)
fcc = fc * (2.254 * (1 + 7.94 * f1p / fc)**0.5 - 2 * f1p / fc - 1.254) # 约束后的峰值
epsc0 = epsc0 * (5 * (fcc / fc - 1) + 1) # 约束后的峰值压应力对应的应变

xn = 30
```

```
In [ ]: # 受压部分
# 广义Popovics曲线

Eseccc = fcc / epssc
mcc = Ec / Eseccc
n = mcc / (mcc - 1)

c7elcc = np.linspace(0, xn, 1000) * epssc
c7s1cc = fcc * (mcc * np.linspace(0, xn, 1000) / (1 + (mcc - n / (n - 1)) * np.linspace(0, xn, 1000)))**0.5
```

```

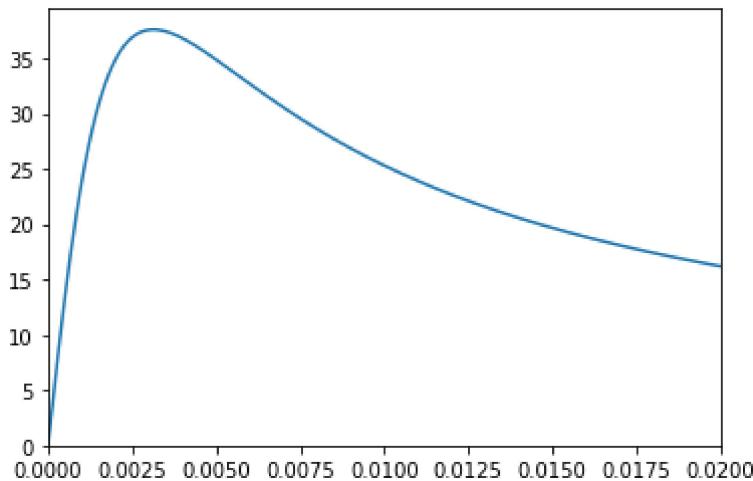
espc = xn * epscc * (1 - (1 + (mcc-n/(n-1)) * xn + xn**n / (n-1)) / (1-xn**n))
c7e2cc = np.linspace(xn, espcc / epscc, 100) * epscc
c7s2cc = np.linspace(c7s1cc[-1], 0, 100)

c7ecc = np.concatenate((c7elcc, c7e2cc))
c7scc = np.concatenate((c7s1cc, c7s2cc))

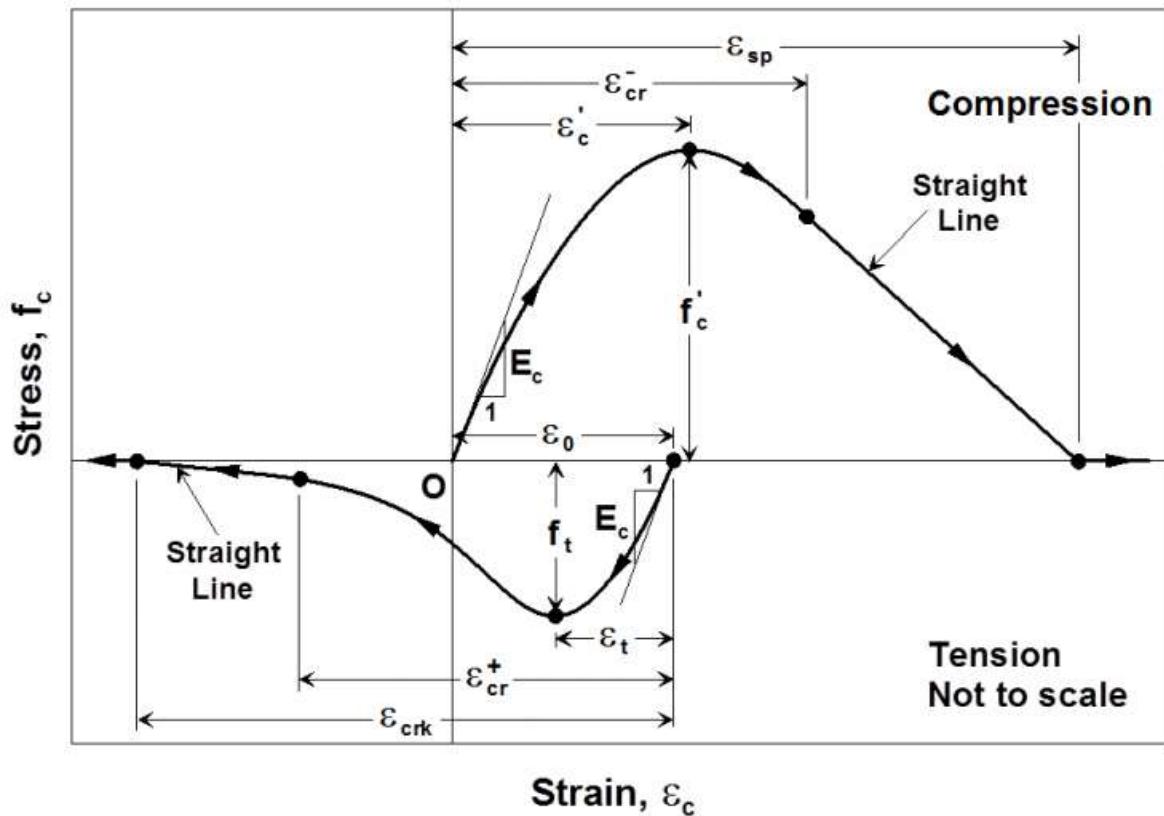
plt.plot(c7ecc, c7scc)
# plt.plot(mec, msc)
plt.xlim(left = 0)
plt.xlim(right = 0.02)
plt.ylim(bottom = 0)

```

Out[ ]: (0.0, 39.479821805266326)



## 4.6 ConcreteCM



ConcreteCM模型依然基于Chang - Mander本构，但该模型与Chang - Mander模型完全一致，不像Concrete07对原本构进行了简化。该模型形式复杂计算用时长，但考虑因素全面。其受拉、受压骨架曲线的数学形式相同，均采用了Tsai提出的广义Popovics曲线，仅参数取值不同。

ConcreteCM在OpenSees中的命令如下：

```
opensees
uniaxialMaterial ConcreteCM $mattag $fpcc $epcc $Ec $rc $xcrn $ft $et
$rt $xcrp <-GapClose $gap>

$mattag Unique uniaxialMaterial tag
$fpcc Compressive strength (f'c)
$epcc Strain at compressive strength (<math>\epsilon_{c}</math>)
$Ec Initial tangent modulus (Ec)
$rc Shape parameter in Tsai's equation defined for compression (rc)
$xcrn Non-dimensional critical strain on compression envelope
(<math>\epsilon_{cr}</math>-cr, where the envelope curve starts following a
straight line)
$ft Tensile strength (ft)
$et Strain at tensile strength (<math>\epsilon_{t}</math>t)
$rt Shape parameter in Tsai's equation defined for tension (rt)
$xcrp Non-dimensional critical strain on tension envelope
(<math>\epsilon_{cr}</math>+cr, where the envelope curve starts following a
straight line - large value [e.g., 10000] recommended when tension
stiffening is considered)
<-GapClose $gap>      gap = 0, less gradual gap closure (default); gap =
1, more gradual gap closure
```

其中参数 $r_c$ ，即为式(4.4)中的 $n$ 。