

福建师范大学（公共课）数统 学院

2022 — 2023 学年第 2 学期 期中考 试卷

评分标准

一、 单项选择题：每小题 3 分，共 18 分.

CCDCBD

二、 填空题：每小题 3 分，共 18 分.

-20

0

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

-1

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

三、（10 分）

$$\text{解 } D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & a-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \cdots & a-1 & 1 \\ & & & & & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

四、(15 分)

解:

$$(1) AB = (E + \alpha\beta^T)(E - \alpha\beta^T) = E;$$

(2) 因为 A, B 是方阵且 $AB = E$, 所以 A 可逆.

$$\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = E - \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, |B| = 1, \|B\|A^{-1}\| = \|B\|B\| = 1.$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, |A| = 1, A^* = |A|A^{-1} = |A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

五、(12 分)

解:

$$|A| = -1,$$

$$ABA^* = BA^{-1} - E \Rightarrow -AB = B - A \Rightarrow (A + E)B = A.$$

$$(A + E, A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

六、（12 分）

解：

$$(A,b) \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(A,b) = 3 < 4$, 有无穷多解

取 $x_3 = c$ 为自由未知量

通解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

七、（15 分）

解：

(1)

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$f(A) = A^6 + 2E = P\Lambda^6 P^{-1} + 2E = 3E$$

(2)

