§2. 5 随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

例2 设随机变量X具有以下的分布律,试求$Y=(X-1)^2$的分布律.

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

解：Y的可能值是0，1，4.

$$P\{Y=0\}=P\{X=1\}=0.1 \qquad P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.7$$

$$P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=0.2$$

所以，Y的概率分布为

Y	0	1	4
P_k	0.1	0.7	0.2

一般地，设$Y=f(X)$，X的可能值为$\{x_k\}$，所有不同的函数值$f(x_j)$之集是$\{y_k\}$。则Y的概率分布是

$$P\{Y=y_k\}=\sum_{j:\ f(x_j)=y_k} P\{X=x_j\}$$

补充例 设随机变量X服从二项分布$B(10,0.2)$, 试求

$Y=(X-1)^2$的分布律.

解：Y的可能值是$0, 1, 2^2, 3^2, \cdots, 9^2$ 。

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}$$

$$=0.8^{10}+C_{10}^{2}\times 0.2^{2}\times 0.8^{8}=2.44\times 0.8^{8}$$

$$P\{Y=n^2\}=P\{X=n+1\}=C_{10}^{n+1}\times 0.2^{n+1}\times 0.8^{9-n}$$

$$n=0,2,3,4,5,6,7,8,9$$

所以

$$P\{Y=n^2\}$$

$$=\begin{cases} 2.44\times 0.8^{8} & n=1 \\ C_{10}^{n+1}\times 0.2^{n+1}\times 0.8^{9-n} & n=0,2,3,4,5,6,7,8,9 \end{cases}$$

二、连续型随机变量函数的分布

例2　设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求Y=2X+8的密度函数。

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+8\le \mathrm{y})$

$$=P(X\le\frac{\mathrm{y}-8}{2})=F_X(\frac{\mathrm{y}-8}{2})$$

形式求导得

$$f_Y(y) = f\left(\frac{y-8}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8} \times \frac{y-8}{2} \times \frac{1}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

一般地，设X的密度是$f_X(x)$，$Y=g(X)$.

第一步：把不等式 $g(X)\le y$ 的解集 D_y 求出来。从而利用X的密度计算概率

$$F_Y(y)=P(g(X)\le y)=\int_{D_y} f_X(x)dx$$

第二步：第一步计算的结果就是Y的分布函数，形式求导就可以得到Y的密度函数。

注：1）很多时候，第一步的计算需要对y分若干种情况分别计算。2）只要在 $f_X(x)>0$的地方解上述不等式就可以了。

例3 设随机变量X的密度是$f_X(x)$，求$Y=X^2$的密度。

解：当$y\le 0$时，$P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=0$

当$y>0$时，$P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}\quad =\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx$$

形式求导得

$$f_Y(y)=\begin{cases}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})]\dfrac{1}{2\sqrt{y}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

例4 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$Y = aX + b$的密度$(a \neq 0)$。

解：$P\{Y \leq y\} = P\{aX + b \leq y\}$

$$= \begin{cases} P\{X \leq \dfrac{y-b}{a}\} & a > 0 \\ P\{X \geq \dfrac{y-b}{a}\} & a < 0 \end{cases} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx & a > 0 \\ \displaystyle\int_{\frac{y-b}{a}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx & a < 0 \end{cases}$$

求导得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}(\dfrac{y-b}{a})' & a>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}(\dfrac{y-b}{a})' & a<0\end{cases}$$

所以，$f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{x=\frac{y-b}{a}}\dfrac{1}{|a|}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}}$

例5 设电压$V=2\sin\theta$，相角$\theta \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。求$V$ 的分布。

解：由于$\theta \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。所以$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$-2\le 2\sin\theta\le 2$

当$y<-2$时，$P\{V\le y\}=0$

当$y>2$时，$P\{V\le y\}=1$

当$-2\le y\le 2$时，$P\{V\le y\}=P\{\theta\le\arcsin\frac{y}{2}\}$

$$=\frac{\arcsin\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{y}{2}+\frac{1}{2}$$

所以，由 $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$（$|y|<1$时）得

$$f_V(y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}\right)' & -2<y<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}}, & -2<y<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

书上的定理不讲。大家学会上面几个例子的方法就可以了。

作业：33，35