知明行笃　立诚致广

专　　业：全校各专业　　　　年　　级：2023级、2024级

课程名称：《线性代数》　　　任课教师：连冠勤、陈兰清等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120分钟

考试时间：2024年11月17日上午8点0分

题号	一 1-6	二 1-6	解答题					总得分
			三	四	五	六	七	
得分								

一、单项选择题（每小题3分，共18分）

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵，则必有

A. $(AB)^T = A^T B^T$　　B. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

C. $|B^T A| = |AB|$　　D. $AB = BA$

2. 设 A, B 和 C 是 n 阶矩阵，$ABC = E$，则下列说法错误的:

A. 若 $AB = AC$，则 $B = C$　　B. $CAB = E$

C. $B = A^{-1}C^{-1}$　　D. 以上全错

3. 设 A 为 n 阶矩阵，则下列说法错误的是(

A. $A^T A$是对称矩阵　　B. $A^T + A$是对称矩阵

C. $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T \end{pmatrix}$是分块对角矩阵　　D. $(A^{-1})^{-1} = A$

4. 若n阶矩阵A与B等价，则必有

A. A与B行等价　　B. A与B列等价

C. $R(A)=R(B)$　　D. $|A|=|B|$

5. 下列矩阵中秩为 2 的是 (

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. 设非齐次线性方程组$A_{m\times n}x=b$无解，则（　　）.

A. 齐次线性方程组$Ax=0$只有零解　　B. 齐次线性方程组$Ax=0$必有非零解

C. $R(A)=R(A,b)$　　D. $R(A,b)=R(A)+1$

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\begin{vmatrix} x & -x & 2x & 1 \\ x & x & 2 & x \\ -3 & 3 & 5x & -5x \\ 4 & x & 4x & 3x \end{vmatrix}$中常数项的系数为________.

2. 设A为$n(n\geq 2)$阶方阵且$|A|=3$，则$|A+E(1,2(3))A|=$__________.

3. 设$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} & & 3 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，则$A=$__

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 设行列式$D=\begin{vmatrix} -9 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$，则$3A_{31}+A_{32}-A_{33}+A_{34}=$__________.

5. $R\left(\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&6\\7&0&2\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\right)=$____________.

6. 设n阶矩阵A满足$A^2-3A+6E=O$，其中E为单位矩阵，则$(A+E)^{-1}=$__________.

以下各解答题要求写出证明过程或演算步骤

三.（18分）设$n\times 1$列矩阵$e=(1,1,\cdots,1)^T$，E为n（$n\geq 2$）阶单位矩阵，$A=E-ee^T$，

(1)证明：A可逆且$A^{-1}=E-\dfrac{1}{n-1}ee^T$；

(2)求A^*；

(3)当$n=3$时，计算$\left|A^*+\dfrac{5}{2}A^{-1}\right|$.

四.（12分）设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$AX=AA^T+2X$，求矩阵$X$.

五.（14分）设$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$AP=P\Lambda$，

$\varphi(x)=x^3-x^2-1$，

(1)求$\varphi(A)$；

(2)求$\big||\varphi(A)|\varphi(A)\big|$.

（12 分）利用矩阵的初等变换求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}.$$

（8 分）设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$，证明: $R(A-2E) + R(A-E) = n$.