

福建师范大学

2022—2023 学年第二学期《高等数学 B》期中考试卷

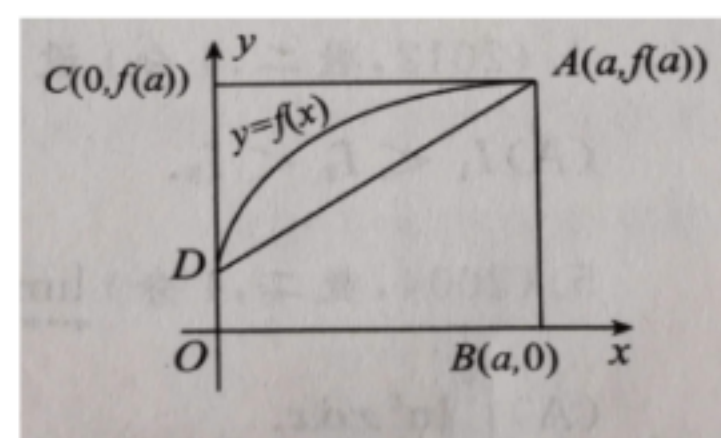
学院_____专业_____姓名：_____学号_____

考生类别：2022 级相关专业 2023 年 4 月 22 日 上 午 9 点 00 分

试卷类别：闭卷 考试时间：120 分钟

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 如右图所示，函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有连续的导函数，则定积分 $\int_0^a xf'(x) dx$ 等于 () .



- A. 曲边梯形 ABOD 的面积
B. 曲边三角形 ACD 的面积
C. 梯形 ABOD 的面积
D. 三角形 ACD 的面积
2. 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ 是 () .
- A. 收敛于 π B. 收敛于 0 C. 发散 D. 收敛于 $\frac{\pi}{2}$
3. 设直线 L 为 $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$, 平面 π 为 $4x-2y+z-2=0$, 则 () .
- A. L 平行于平面 π B. L 在平面 π 上
C. L 垂直于平面 π D. L 与 π 相交，但不垂直
4. 微分方程 $y''+9y=1+\sin 3x$ 的特解形式可设为 ()
- A. $y^*=a+x(A\sin 3x+B\cos 3x)$ B. $y^*=x(a+A\sin 3x+B\cos 3x)$
C. $y^*=a+A\sin 3x$ D. $y^*=a+A\cos 3x$

5. 旋转曲面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} = 0$ 的旋转轴是 ().

- A. x 轴 B. y 轴 C. z 轴 D. 直线 $x = y = z$

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 已知 $\int_{-a}^a (2x + \arctan x - 1) dx = -4$, 则 $a =$ _____.

2. 设 D 是以原点为圆心, 以 R 为半径的圆所围成, 则在直角坐标系下, 其面积元素 (以 x 为变量) $dA =$ _____.

3. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$ 的通解为 _____.

4. 平面 $x + y + z + 3 = 0$ 与平面 $2x + 2y + 2z + 3 = 0$ 的距离为 _____.

5. 上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 在 xoy 面的投影为 _____.

三、(8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin x \arctan \sqrt{t} dt}{x^3 \ln(1+x)}$.

四、(8 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ e^x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求定积分 $\int_2^4 f(x-2)e^{x-2} dx$.

五、(8 分) 求微分方程 $y' = 2y(y)$ 满足初值条件 $y(0) = 1, y(0) = 2$ 的特解.

六、(8 分) 求微分方程 $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 4e^x$ 的通解.

七、(8 分) 求点 $(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$ 距离.

八、(8 分) 求过点 $P_0(-1, 0, 4)$ 且平行于平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$, 又与直线

$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

九、(共 16 分) 应用题

1. 求圆 $\rho = 3\cos\theta$ 及心形线 $\rho = 1 + \cos\theta$ 所围图形公共部分的面积.

2. 求曲线 $x^2 + (y-5)^2 = 16$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V .

十、（6分）证明题

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(x) > 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_1^x \frac{1}{f(t)}dt$, $x \in [0,1]$

证明: (1) $F'(x) \geq 2$;

(2) 方程 $F(x) = 0$ 在区间 $(0,1)$ 有且仅有一个根.