

9.6 多元函数微分学的几何应用

1. 选择题

(1) 在曲线 $x=1, y=t^2, z=t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x-3y+z=0$ 平行的切线 ()

- A. 只有 1 条 B. 只有 2 条 C. 至少有 3 条 D. 不存在

(2) 函数 $z=f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域有定义, 且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$, 则有 ()

A. $dz|_{(0,0)}=3dx-dy$

B. 曲面 $z=f(x, y)$ 在点 $(0,0, f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3, -1, 1)$

C. 曲线 $\begin{cases} z=f(x, y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0, f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1, 0, 3)$

D. 曲线 $\begin{cases} z=f(x, y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0, f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3, 0, 1)$

2. 填空题

(1) 旋转曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面方程为_____.

(2) 曲线 $x=\frac{t}{1+t}, y=\frac{1+t}{t}, z=t^2$ 在对应于 $t_0=1$ 的点处的切线方程_____,

法平面方程为_____.

(3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 平行于 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为_____.

(4) 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y=t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

(5) 椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角余弦值为_____.

3. 计算题

(1) 在曲面 $z=xy$ 求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+3=0$, 并写出该法线方程.

(2) 设曲线的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$, 试求曲线上在点 $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ 处的切线和法平面方程.

(3) 求曲面 $x^2+y^2=2z$ 的切平面, 使之过曲线 $\begin{cases} 3x^2+y^2+z^2=5 \\ 2x^5+y^2-4z=7 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, -1)$ 的切线.

(4) 设函数 $F(u, v)$ 可微, 且 F_u, F_v 不同时为零. 设 a, b, c 为常数且 $a \neq 0$, 试证明: 曲面 $F(ax-bz, ay-cz)=0$ 的任一切平面都与同一向量平行.

(5) 求曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{6-x^2-y^2} \\ z = -x-y \end{cases}$ 在点 $(-2,1,1)$ 处的切线及法平面方程.