第 五 章　相似矩阵及二次型

本章讨论在理论上和实际应用上都非常重要的矩阵特征值问题, 并利用特征值的有关理论, 讨论矩阵在相似意义下化简为对角矩阵的问题.

第 一 节 向量的内积、长度及正交性

- 内积
- 正交向量组
- 正交矩阵

一、内积

1 定义 设有 n 维向量

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

向量 x 与 y 的**内积**：

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

$$=x^{\mathrm{T}}y.$$

2 性质

设 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数，则内积有下列性质：

（1） $(x, y) = (y, x)$;

（2） $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

（3） $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

（4） $(x, x) \geq 0$, 且当 $x \neq 0$ 时有 $(x, x) > 0$.

3 向量的长度和夹角

1). 长度的定义

定义 令

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

$\|x\|$ 称为 n 维向量 x 的**长度（或范数）**.

特别地，当 $\|x\| = 1$ 时，称 x 为**单位向量.**

（如何单位化？）

2). 长度的性质

(1) 非负性　当 $x \neq 0$ 时, $\|x\| > 0$;

当 $x = 0$ 时, $\|x\| = 0$.

(2) 齐次性　$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;（单位化简便？）

(3) 三角不等式　$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3). 向量的夹角

向量的内积满足**施瓦茨不等式**

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y),$$

由此可得　$\left| \dfrac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|} \right| \leq 1$　(当 $\|x\| \, \|y\| \neq 0$ 时)

于是有下面的定义:

定义 当 $\|x\| \neq 0, \|y\| \neq 0$ 时,

$$\theta = \arccos \frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}$$

称为 n 维向量 x 与 y 的**夹角**.

当 $(x, y) = 0$ 时, 称向量 x 与 y **正交**. 显然,若 $x = 0$, 则 x 与任何向量都正交, 即零向量与任何向量正交.

二、正交向量组

1. 正交向量组的定义

定义 由两两正交的非零向量构成的向量组称为正交向量组.

定理 若 n 维向量 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关.

证明

例 1 已知R^3中两个正交的向量：

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

试求一个非零向量a_3，使 a_1, a_2, a_3两两正交.

解

2 标准正交向量组

定义 如果向量组 $a_1, \cdots, a_r$ 两两正交,且都是单位向量,则称向量组 $a_1, \cdots, a_r$ 是一个**标准正交向量组.**

例 2 设

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是例 1 中所求正交向量组, 试将其化为标准正交向量组.

3. 标准正交向量组的求法

设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是一个线性无关向量组, 将其化为一个标准正交向量组与 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 等价, 称为把 向量组$a_1, a_2, \cdots, a_r$标准正交化.

我们可以用以下方法把 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 标准正交化:

取 $b_1 = a_1$；

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 \text{；}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_r = a_r - \frac{(b_1, a_r)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_r)}{(b_2, b_2)} b_2 - \cdots - \frac{(b_{r-1}, a_r)}{(b_{r-1}, b_{r-1})} b_{r-1}.$$

容易验证 $b_1, \cdots, b_r$ 两两正交, 且 $b_1, \cdots, b_r$ 与 $a_1, \cdots, a_r$ 等价.

然后只要把它们单位化, 即取

$$c_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1 , c_2 = \frac{1}{\|b_2\|} b_2 , \cdots , c_r = \frac{1}{\|b_r\|} b_r ,$$

就是一个标准正交向量组.

上述从线性无关向量组 $\boldsymbol{a}_1 , \cdots , \boldsymbol{a}_r$ 导出正交向量组 $\boldsymbol{b}_1 , \cdots , \boldsymbol{b}_r$ 的过程称为**施密特(Schimidt)正交化过程**. 它不仅满足 $\boldsymbol{b}_1 , \cdots , \boldsymbol{b}_r$ 与 $\boldsymbol{a}_1, \cdots , \boldsymbol{a}_r$ 等价, 还满足对任何 k $(1 \le k \le r)$, 向量组 $\boldsymbol{b}_1 , \cdots , \boldsymbol{b}_k$ 与 $\boldsymbol{a}_1 , \cdots , \boldsymbol{a}_k$ 等价.

例 3 设

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

试用施密特正交化过程把这组向量标准正交化.

解

例 4 已知 $a_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求一组非零向量 a_2,a_3 使 a_1,a_2,a_3 为正交向量组.

解

三、正交矩阵

1. 定义

定义　设 A 为 n 阶实矩阵，且 $A^{\mathrm{T}}A=E$，则称 A 为**正交矩阵**．例如

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

都是正交矩阵．

2. 正交矩阵的性质

(1) 若矩阵 A 为正交矩阵, 则 $|A| = \pm 1$;

(2) 实矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 $A^{T} = A^{-1}$;

(3) 实矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 A 的行(列)向量组是标准正交向量组.

(4) 若矩阵 A 与矩阵 B 是同阶的正交矩阵, 则 AB 是正交矩阵.

四、正交变换

定义　若 P 为正交矩阵，则线性变换 $y = Px$ 称为**正交变换**.

设 $y = Px$ 为正交变换，则有

$$\|y\| = \sqrt{y^{\mathrm{T}} y} = \sqrt{x^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} P x} = \sqrt{x^{\mathrm{T}} x} = \|x\|.$$

$\| x \|$ 表示向量的长度，相当于线段的长度.

$\| y \| = \| x \|$ 说明经**正交变换线段长度保持不变**，这是正交变换的优良特性.

五、小结

（1）熟记向量的长度和夹角公式.

（2） 熟悉掌握向量组的正交单位化.

（3） 掌握正交矩阵的判定条件.

六、作业

书　习题五　　P138

2(1), 4, 5