

## 高等数学 B: 5-7 章复习题 (满分 75 分)

### 一、单选题 (12 分)

1. 反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx (p > 1)$  ( )
- A. 收敛 B. 发散 C. 既不收敛、也不发散 D. 无法判断.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})^2 (1 + \frac{2}{n})^2 \cdots (1 + \frac{n}{n})^2} =$  ( ).
- A.  $\int_1^2 \ln^2 x dx$  B.  $2 \int_1^2 \ln x dx$  C.  $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$  D.  $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$
3. 微分方程  $-y^2 dx + (x + y^2) dy = 0$  的类型属于 ( )
- A. 可分离变量方程 B. 齐次方程
- C. 关于  $y = y(x)$  的一阶线性微分方程 D. 关于  $x = x(y)$  的一阶线性微分方程
4. 微分方程  $y''' + 8y = xe^{-2x} + 3\cos 2x$  的一个特解形式 ( )
- (A)  $(ax+b)e^{-2x} + (c \cos 2x + d \sin 2x)$ ; (B)  $x(ax+b)e^{-2x} + (c \cos 2x + d \sin 2x)$ ;
- (C)  $(ax+b)e^{-2x} + c \cos 2x$ ; (D)  $x(ax+b)e^{-2x} + c \cos 2x$ .

### 二、填空题 (9 分)

1.  $\int_{-1}^1 (x + \sin x) |x| dx =$  \_\_\_\_\_.
2. 连续曲线  $y = \int_0^x \tan t dt (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$  弧长度为 \_\_\_\_\_.
3. 若函数  $f(x)$  满足方程  $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$  及方程  $f''(x) + f(x) = 2e^x$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

### 三、计算题 (32 分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 x e^{-t^2} dt}{\sin x^2 \ln(1+x)}$ .

2. 求定积分  $\int_0^5 e^{\sqrt{3x+1}} dx$ .

3. 求下列微分方程  $yy'' + (y')^2 - 1 = 0$  满足初值条件  $y(0) = 1, y'(0) = \sqrt{2}$  的特解.

4. 求微分方程  $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 8 \sin 2x$  的通解.

#### 四、应用题 (16 分)

1. 求球  $\rho = \sqrt{2} \sin \theta$  及双纽线  $\rho^2 = \cos 2\theta$  所围图形公共部分的面积.

2. 求圆盘  $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$  分别绕  $x$  轴,  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积  $V_x, V_y$ .

#### 五、证明题 (6 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可导, 且  $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$  使得  $f(\xi) = f'(\xi)$ .