

## 习题 1.6

## 1、 选择题

(1) 设对任意的  $x$ , 总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  ( ).

- A. 存在且等于 0                      B. 存在但不一定为 0  
C. 一定不存在                        D. 不一定存在

(2) 下列极限中, 极限值等于 1 的是 ( ).

- A.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-\frac{1}{x})^x}{e}$     B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$     C.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{x^2}$     D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$

(3) 下列极限中, 极限值等于  $e$  的是 ( ).

- A.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$     B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n)^{\frac{1}{n}}$     C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$     D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^{-x}$

(4) 如下四个选项, 极限不存在的是 ( ).

- A.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$     B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$     C.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x$     D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$

(5) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + k, & x > 0 \end{cases}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在, 则  $k =$  ( ).

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. 2

(6) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调有界,  $\{x_n\}$  为数列, 下列命题正确的是 ( ).

- A. 若  $\{x_n\}$  收敛, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛                      B. 若  $\{x_n\}$  单调, 则  $\{f(x_n)\}$  收敛  
C. 若  $\{f(x_n)\}$  收敛, 则  $\{x_n\}$  收敛                      D. 若  $\{f(x_n)\}$  单调, 则  $\{x_n\}$  收敛

## 3、 解答题

(1) 计算下列极限:

①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\sin 5x};$

②  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 2x};$

③  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n \cdot \sin \frac{x}{3^n})$  ( $x$  为不等于零的常数);

④  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$ .

⑤  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x}$ ;

⑥  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2x}{2x-3} \right)^{3x-1}$

(2) 利用极限准则求下列极限:

①  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \right)$ .

② 设  $0 < a < b < c$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ .

③ 设  $x_1 = 10$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$  ( $n = 1, 2, \cdots$ ), 试证数列  $\{x_n\}$  极限存在, 并求此极限.