## 一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设$A,B$ 为互斥事件，且$P(A)>0,P(B)>0$, 下面四个结论中，正确的是（　　）.　　C

A、$P(B|A)>0$；　　B、$P(A|B)=P(A)$；

C、 $P(A|B)=0$；　　D、$P(AB)=P(A)P(B)$.

2、设随机变量 $X$是服从参数为$\frac{1}{5}$的指数分布，则$P(X\geq 3|X\geq 1)=$（　　）.　　A

A、$e^{-10}$；　B、1；　C、$1-e^{-15}$；　D、$e^{-15}$

3、设一个袋子里放有 2 个白球，3 个蓝球以及 5 个红球。现有 10 位同学依次从中抽取 1 只球（不放回），则第 5 位同学抽到蓝球的概率是（　　）.　　A

A、$\frac{3}{10}$;　B、$\frac{1}{2}$;　C、$\frac{1}{4}$;　D、$\frac{3}{5}$

4、下列函数中，可以作为某个随机变量的分布函数是(　　).　　B

A、$F(x)=x,\quad 0<x<1$；

B、$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ sin\,x, & 0\leq x<\frac{\pi}{2};\\ 1, & x\geq\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

C、$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \tan x, & 0\leq x<\frac{\pi}{2};\\ 1, & x\geq\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

D、$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2x, & 0\leq x<1;\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}$

5、下列说法正确的是(　　).　D

A、若$P(A)=0$，则$A$为不可能事件；

B、若$A$与$B$互不相容，则$P(AB)=P(A)P(B)$；

C、$\overline{ABC}$表示事件$A$、$B$、$C$都不发生；

D、若$X\sim U(0,1)$, 则$P\{X=0.5\}=0$.

## 二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6、设 $A$ 与 $B$ 是两个相互独立随机事件，且$P(A)=0.5,P(B)=0.4$，则$P(A|A\cup B)=$______.　　5/7

7、一射手对一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为$\frac{255}{256}$，则该射手的命中率为______.　3/4

8、设随机变量$X\sim N(-8,\sigma^2)$，且$P(X>0)=0.3$，则$P(X>-16)=$_______.　　0.7

9、设随机变量$X$服从参数为$\lambda$的泊松分布，且$P(X=1)=P(X=2)$,则$P(X=3)=$ ______.　　$4e^{-2}/3$

10、设随机变量$X\sim U[-1,1]$ 且$Y=X^2$，则$P\left(Y>\frac{1}{9}\right)=$________.　　2/3

## 三、计算题（共 70 分）

11、(12 分) 某同学不慎将校园卡丢失，假定他将校园卡丢在宿舍、食堂及图书馆的概率分别为 0.2，0.7，0.1，而丢在宿舍、食堂及图书馆将被找到的概率分别为 1，0.8，0.5.

（1）求找到校园卡的概率；

（2）已知校园卡被找到，问校园卡被丢在食堂的概率是多少？

解：设 $B_1$ 表示某同学将校园卡丢在宿舍, $B_2$ 表示某同学将校园卡丢在食堂, $B_3$ 表示某同学将校园卡丢在图书馆,A 表示某同学找到校园卡.

则

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$=0.2\times1+0.7\times0.8+0.1\times0.5$

$=0.81$

$$P(B_2\mid A)=\frac{P(B_2)P(A\mid B_2)}{P(A)}=\frac{56}{81}\approx0.691$$

**引进记号的错误：** 1、记丢在食堂的事件为 B。注意：“丢在食堂”就是事件！它的事件是什么？

2、记丢在食堂的概率为 B。把事件与其概率混为一谈了。

3、记丢在食堂的事件为 P（B）。把事件与其概率混为一谈了。

4、记丢在食堂的概率为 P（B）。注意：不同事件可能有一样的概率。这样的语言不能够定义什么是 B。

5、记丢在食堂为事件 B。这句话说的意思是事件“丢在食堂”与事件 B 相等。所以，它不能够定义什么是 B！

**错误类型：** 1、不定义记号或定义错误，2、公式写错，3、没有公式只有数字，4、把条件概率与非条件概率混为一谈，5、加减法计算错误，6、文字表达错误。7、把 P（A）写成 $P_A$。8、乱用“独立性”。

**错误解法一：** 设 $A_1$ 表示某同学将校园卡丢在宿舍, $A_2$ 表示某同学将校园卡丢在食堂， $A_3$ 表示某同学将校园卡丢在图书馆， 设 $B_1$ 表示丢在宿舍找到校园卡, $B_2$ 表示在食堂找到校园卡, $B_3$ 表示在图书馆找到校园卡。A 表示某同学找到校园卡.

则 $P(A)=P(B_1)P(A_1)+P(B_2)P(A_2)+P(B_3)P(A_3)$ …….

**或者：** 则 $P(A)=P(B_1)P(A_1\mid B_1)+P(B_2)P(A_2\mid B_2)+P(B_3)P(A_3\mid B_3)$ …..

**但是，** 等式 $P(A)=P(A_1)P(B_1\mid A_1)+P(A_2)P(B_2\mid A_2)+P(A_3)P(B_3\mid A_3)$ 是对的。

**错误解法二：** 设 $B_1$ 表示某同学将校园卡丢在宿舍, $B_2$ 表示某同学将校园卡丢在食堂, $B_3$ 表示某同学将校园卡丢在图书馆,A 表示某同学找到校园卡.

则 $P(A)=P(A\mid B_1)+P(A\mid B_2)+P(A\mid B_3)$ ……..

## 错误解法三：不引进记号，不写公式。

$p = 0.2\times 1 + 0.7\times 0.8 + 0.1\times 0.5$

$= 0.81$

A

## 错误解法四：

(1) 设：已找到校园卡的事件为 $B$，在不同地方被找到的事件为 $A_i$

$P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3)$

$= 0.2 + 0.56 + 0.05$

$= 0.81$

(2) $P(A_2|B) = \dfrac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)} = \dfrac{0.56}{0.81} = \dfrac{56}{81}$

## 错误解法五：

A：校园卡丢在宿舍，B：校园卡丢在食堂，C：校园卡丢在图书馆。

$P = P(A) + P(B) + P(C) = 0.2\times 1 + 0.7\times 0.8 + 0.1\times 0.5$

## 错误解法六：不管求什么事件的概率都写 p=…..

12、（15 分）某电子元件的寿命 $\boldsymbol{X}$（单位：天）具有如下的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^3}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases};$$

（1）求该元件的寿命大于 10 天的概率；

（2）现有一大批该类电子元件，从中取出三件。已知这三件元件独立使用了 5 天后仍完好，求这 3 件中寿命大于 10 天的件数的概率分布律。

解：

（1）$P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{2}{(x+1)^3}dx=\frac{1}{121}$

（2）$P(X>10\mid X>5)=\frac{P(X>10)}{P(X>5)}=\frac{\int_{10}^{+\infty}\frac{2}{(x+1)^3}dx}{\int_{5}^{+\infty}\frac{2}{(x+1)^3}dx}=\frac{36}{121}$

设独立使用了 5 天后仍完好的 3 件元件中寿命大于 10 天的件数为 Y，则

$Y\sim b(3,\frac{36}{121})$

13、（15 分）设二维随机变量的$(X,Y)$ 的联合分布律为

| X \ Y | -2 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0.3 | 0.2 | 0 | 0.1 |
| 2 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0 |

（1）试求$X$，$Y$的边缘分布律.
（2）试求 $Y$ 的分布函数.
（3）试求$Z=|Y|-1$的分布律.
解：(1)

| X | -1 | 2 |
|---|---|---|
| p | 0.6 | 0.4 |

| Y | -2 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |

(2)
$$F(y)=\begin{cases}0, & y<-2,\\ 0.4, & -2\le y<0,\\ 0.7, & 0\le y<1,\\ 0.9, & 1\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$$

（3）

| Z | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| p | 0.3 | 0.2 | 0.5 |

14、（15 分）设随机变量$X$的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ a-x, & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中$a$为参数.（1）试求$a$的值；（2）试求$Y=\ln X$的概率密度函数.

解：（1） 由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$得 $a = 2$

（2） $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\ln X \le y\} = P\{X \le e^y\} = F_X(e^y), y \in R.$（10 分）

$$f_Y(y) = f(e^y)e^y = \begin{cases} e^{2y}, & y < 0, \\ (2-e^y)e^y, & 0 \le y < \ln 2, \\ 0, & else. \end{cases}$$

15、（5 分）某地区 28 岁青年的薪水（单位以千元计）服从分布$N(8,2^2)$ ，在该地区任选一位 28 岁青年，调查他的薪水$X$，试求概率$P(5 < X \le 10)$.

解：由题意$\frac{X-8}{2} \sim N(0,1)$，

则 $P(5<X\le 10)=P(-\frac{3}{2}<\frac{X-8}{2}\le 1)=\Phi(1)-\Phi(-\frac{3}{2})$
则

$=\Phi(1)+\Phi(\frac{3}{2}) -1=0.7745$

16、（8 分）设随机变量$(X,Y)$的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2(1-x), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

试求它们的边缘概率密度函数.

解：当$x \le 0$或$x \ge 1$时，$f(x,y)=0$,则$f_X(x)=0$;

当$0 < x < 1$时，$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{-2x+2} 1dy = -2x+2$

$$\therefore f_X(x) = \begin{cases} -2x+2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当$y \le 0$或$y \ge 2$时，$f(x,y)=0$,则$f_Y(y)=0$;

当$0 < y < 2$时，$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{1-\frac{y}{2}} 1dx = 1-\frac{y}{2}$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 1-\frac{y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

**附表**

| $x$ | 0.5 | 0.75 | 1 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x)$ | 0.6915 | 0.7734 | 0.8413 | 0.8944 | 0.9332 | 0.9599 | 0.9772 |