

## 习题 4.1

## 1. 选择题

(1) 下面命题中错误的是 ( C ).

A. 若  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内的某个原函数是常数, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内恒为零, 即  $f(x) \equiv 0$  ✓B. 若  $f(x)$  的某个原函数为零, 则  $f(x)$  的所有原函数都是常数 ✓C. 若  $F(x), G(x)$  分别为  $f(x), g(x)$  的原函数, 则  $F(x)G(x)$  为  $f(x)g(x)$  的原函数 ✗D. 若  $F(x)$  为  $f(x)$  的任意一个原函数, 则  $F(x)$  必定为连续函数  $F' \text{ 为 } f \Rightarrow F \text{ 可导} \Rightarrow F \text{ 连续}$ (2) 设  $f(x)$  的导函数为  $\sin x$ , 则下列函数中为  $f(x)$  的原函数的是 ( B ).第二阶导: A.  $-\sin x$  B.  $\sin x$  C.  $-\cos x$  D.  $\cos x$ A.  $1 + \sin x$ B.  $x - \sin x$ C.  $1 + \cos x$ D.  $1 - \cos x$ 

(3) 下列等式成立的是 ( D ).

A.  $\int f(x) dx = f(x)$  ✗B.  $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$  ✗C.  $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) + C$  ✗D.  $d \int f(x) dx = f(x) dx$ (4) 设函数  $f(x)$  有原函数, 则在  $f(x)$  的积分曲线族中, 不同积分曲线在相同横坐标所对应的点上的切线 ( C ).A. 平行  $x$  轴B. 平行  $y$  轴

C. 相互平行

D. 相互垂直

(5) 设  $f(x)$  的一个原函数是  $\frac{1}{x}$ , 则  $f'(x) =$  ( D ).A.  $\ln |x|$ B.  $\frac{1}{x}$ C.  $-\frac{1}{x^2}$ D.  $\frac{2}{x^3}$ (6) 若  $\int f'(x^2) dx = x^4 + C$ , 则  $f(x) =$  ( C ).A.  $x^2 + C$ B.  $\frac{x^3}{3} + C$ C.  $\frac{8}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$ D.  $x^4 + C$ 

## 2. 填空题

(1) 设  $F(x)$  是  $e^{-x^2}$  的一个原函数, 求  $\frac{dF(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}$ .(2) 若  $\int xf(x) dx = \arctan x + C$ , 则  $\int \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 + C$ . $f(x) \cdot x = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$  $\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = x(1+x^2)$

## 3. 计算下列不定积分

$$(1) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原积分} &= \int x^{-\frac{9}{2}} dx \\ &= -\frac{2}{7} x^{-\frac{7}{2}} + C \end{aligned}$$

$$(2) \int (5^2 - 5^x) dx$$

$$\text{解: 原积分} = 25x - \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

$$(3) \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原积分} &= \int \frac{1}{\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2} dx \quad \text{倍角} \\ &= \int 4 \csc^2 2x dx \\ &= -2 \cot 2x + C \end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{y^2 + \sqrt{y^3} + 3}{\sqrt{y}} dy$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int y^{\frac{3}{2}} + y + 3y^{-\frac{1}{2}} dy \\ &= \int y^{\frac{3}{2}} dy + \int y dy + 3 \int y^{-\frac{1}{2}} dy \\ &= \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} + \frac{y^2}{2} + 6 y^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

$$(5) \int \frac{1}{u^2(1+u^2)} du;$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int \frac{1}{u^2} - \frac{1}{1+u^2} du \\ &= -\frac{1}{u} - \arctan u + C \end{aligned}$$

$$(6) \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int e^x + 1 dx \\ &= e^x + x + C \end{aligned}$$

$$(7) \int \frac{1 - \sqrt{1 - \theta^2}}{\sqrt{1 - \theta^2}} d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}} d\theta - \int 1 d\theta \\ &= \arcsin \theta - \theta + C \end{aligned}$$

$$(8) \int \sec x (\sec x - \tan x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int \sec^2 x dx - \int \sec x \tan x dx \\ &= \tan x - \sec x + C \end{aligned}$$