

习题 1.4

1、选择题

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, u_n 与 a 的差是 ()

- A. 无穷小量
B. 一个非常小的正数
C. 0
D. 给定的正数

(2) 当 x 的变化过程是 () 时, $y = e^{-\frac{1}{x}}$ 是无穷大量.

- A. $x \rightarrow 0^+$ B. $x \rightarrow 0^-$ C. $x \rightarrow +\infty$ D. $x \rightarrow -\infty$

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ()$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 不存在

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \frac{4}{n} + \cdots + \frac{2n-1}{n} - \frac{2n}{n} \right) = ()$

- A. -1 B. 1 C. 0 D. 不存在

(5) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散 B. 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 无界
C. 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 为无穷小 D. 若 $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ 为无穷小, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

(6) 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, 则必有 ().

- A. $x_n < y_n$ 对任意 n 成立 B. $y_n < z_n$ 对任意 n 成立
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n$ 不存在 D. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n z_n$ 不存在

2、填空题

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、判断题

在自变量的同一变化趋势下, 判断下列说法是否正确:

- (1) 无穷多个无穷小量的和是无穷小量. ()
(2) 两个无穷小量的商是无穷小量. ()

- (3) 两个无穷大的和也是无穷大. ()
- (4) 无穷大与无穷大的积也是无穷大. ()
- (5) 无穷小与无穷大的和一定是无穷大. ()
- (6) 无穷小与无穷大的积一定是无穷大. ()

4、解答题

- (1) 已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \infty$.

- (2) 判断函数 $f(x) = x \sin x$ 是否为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大, 并说明理由.