第二节　向量组的线性相关性

- 定义及等价刻画

- 性质

一、线性相关与线性无关的定义

1. 定义

定义 4　给定向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0,$$

则称向量组A是线性相关的，否则称它线性无关.

2. 特殊向量组线性相关性

（1）向量α线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$.

（2） 向量组 A：$\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ 线性相关

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 的分量对应成比例.

（3）含有零向量的向量组必线性相关.

（4）n维单位坐标向量组E:$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关.

例 已知

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$$

试讨论向量组α_1，α_2，α_3及α_1，α_2的线性相关性.

二、向量组线性相关的充要条件

向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关

⇕

若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$
则 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零

⇕

该向量组中
至少有一个向量
可由其余向量线性表示

⇕

齐次线性方程组
$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$
有非零解

⇕

$R(A) < m$，其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$

向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关

⇕

若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$
则 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 只能全为零

⇕

该向量组中任意一个都不能由其余向量线性表示

⇕

齐次线性方程组
$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$
只有零解

⇕

R(A)=m,其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$

例1 已知

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$$

试讨论向量组α_1，α_2，α_3及α_1，α_2的线性相关性.

解 $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

$R(\alpha_1,\alpha_2)=2$,向量组α_1,α_2线性无关.

例 2　已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，$b_1 = a_1 + a_2$，$b_2 = a_2 + a_3$，$b_3 = a_3 + a_1$，试证向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

证法一　直接用定义

证法二　利用方程组有解的条件

证法三　利用矩阵秩的性质

方法评注

三、向量组的线性相关性的性质

定理 5 **(1)** 若向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则向量组 B: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 也线性相关. 反之，若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

例1 已知

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$$

试讨论向量组α_1，α_2，α_3及α_1，α_2的线性相关性.

三、向量组的线性相关性的性质

定理 5 **(1)** 若向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则向量组 B: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 也线性相关. 反之，若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

(2) m 个 n 维向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时一定线性相关.

(3) 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 而向量组 $B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则向量 β 必能由向量组 A 线性表示, 且表示式是唯一的.

证明 证明

例 4 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，证明：

(1) α_1 能由 α_2, α_3 线性表示；

(2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

证明

四. 小结

线性相关性：齐次线性方程组的解

（1）向量α线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0.$

（2） 向量组 $A: \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ 线性相关

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 的分量对应成比例.

（3）含有零向量的向量组必线性相关.

（4）n+1个n维向量必线性相关.

（5）小相关 $\Rightarrow$ 大相关；大无 $\Rightarrow$ 小无.

五、作业 书 习题四 P109

4，5， 9， 10， 11

思考题　研究下列向量组的线性相关性

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$