福建师范大学数学与统计学院

2024—2025 学年第二学期期中考试卷

学院________ 系________ 专业________ 年级________ 姓名________ 学号________

考生信息栏

装订线

知明行笃　立诚致广

专　　业：全校性专业　　　　年　　级：2024 级

课程名称：高等数学 B（下）　　　　任课教师：谢碧华等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　　　考试用时：120 分钟

考试时间：2025 年 4 月 26 日上午 10 点 30 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知

1. 答案一律写在答题纸上，否则无效.
2. 答题要看清题号，不必抄原题.
3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

一、单选题(每小题3分，共15分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]=$（　　）.

A. $\frac{1}{\pi}(1-\cos 1)$　　B. 2　　C. $-\frac{2}{\pi}$　　D. $\frac{2}{\pi}$

2. 下列结论中正确的是（　　）

A. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$与$\int_0^1\frac{dx}{x^2}$都收敛　　B. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$与$\int_0^1\frac{dx}{x^2}$都发散

C. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$发散，$\int_0^1\frac{dx}{x^2}$收敛　　D. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$收敛，$\int_0^1\frac{dx}{x^2}$发散

3. 设函数$f(x)$连续，则$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t-x)dt=$（　　）.

A. $f(x)$　　B. $-f(x)$　　C. $f(-x)$　　D. $-f(-x)$

4. 直线 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$ 与平面$x+y-z=0$的夹角为（　　）

A. $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 微分方程$y''+6y'+13y=0$的通解是（　　）

A. $e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$　　B. $e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

C. $e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$　　D. $e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

二、填空题(每小题3分，共15分)

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4 x dx=$________.

2. 曲线$r=a\cos\theta(a>0)$的弧长$s=$____________.

3. $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=$________.

4.已知向量$\vec{a}=(2,-4,1),\vec{b}=(1,-2,2)$，则向量$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影$Prj_{\vec{b}}\vec{a}=$____________.

5．已知微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$，则该微分方程为________________.

三、(8分)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}$.

四、(8分)求定积分 $\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}}dx$.

五、(8分)求微分方程 $y''+(y')^2+1=0$ 的通解.

六、(8分) 求平面 $x+y+z-1=0$ 上一直线 L，使其与直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 垂直相交.

七、(8分)设平面经过原点及点 $(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

八、(10分)求微分方程 $y''+y=x+4\sin x$ 的通解.

九、(共12分)应用题

求曲线 $y=e^x$，直线 $y=e^2$ 及 $x=0$ 所围成的平面图形的面积 A，及其该平面绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V_x.

十、(8分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上可导, 且存在正数 M，使得 $f'(x)\le M$，又 $f(0)=0$,

证明：(1) 当 $x\in[0,a]$ 时，有 $f(x)\le aM$;

(2) $\int_0^a f(x)dx\le\dfrac{M}{2}a^2$.