

2020— 2021 学年第一学期《高等数学 A》期末考试

试题A

一、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 以下选项不是一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解的是 ().
- A. $e^{-F(x)} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)} dx + C)$, 其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数
- B. $e^{-F(x)-C} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)+C} dx + C)$, 其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数
- C. $e^{-F(x)+C} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)+C} dx + C)$, 其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数
- D. $e^{-F(x)+C} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)-C} dx + C)$, 其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数
2. 设 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处沿增加最快的方向的方向导数为().
- A. 2; B. $\sqrt{2}$; C. 0; D. $-\sqrt{2}$.
3. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) = ()$.
- A. $f(2)$; B. $2f(2)$; C. $-f(2)$; D. 0.
4. 设曲面 Σ 是抛物面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 xoy 面上方的部分, 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分, 则下列式子中成立的是 ().
- A. $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$; B. $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$;
- C. $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$; D. $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$.
5. 设 $u_n = (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$, 则级数 ().
- A、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛 B、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散
- C、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散 D、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

二、填空(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{e^x}$ 的通解为_____.

2. 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数, $z = f(x, y)$ 是由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数, 则 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

3. 化二次积分 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 为极坐标形式的二次积分, 则

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \text{_____}.$$

4. 第二类曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 化为第一类曲线积分是

_____.

5. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 2019)$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n =$ _____.

三、计算题(每小题 8 分, 共 40 分)

1. 求微分方程 $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ 的通解.

2. 求函数 $u = f(x^2 + y^2 + z^2, xyz)$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$, 其中 f 具有二阶连续偏导数.

3. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 内部的那部分面积.

4. 求曲线积分 $\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$, 其中 L 沿 $x^2 + y^2 = a^2 (x \geq 0, y \geq 0)$, 逆时针方向.

5. 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

四、(10 分) 计算第二类曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (z^2 + x)dydz - 2zdx dy$, 其中 Σ 是曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 被平面 $z=2$ 所截部分的外侧.

五、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的和函数, 并给出收敛域.

六、(10 分) 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 4$ 截成一椭圆, 求这椭圆上的点到原点的距离的最小值和最大值.