

《计量地理学》作业四

学号：109090000000 专业：2023 级地理信息科学 姓名：许愿

2025 年 11 月 30 日

一、建立模型

生产 I、II、III 三种产品，都经过 A, B 两道工序加工。设备 A 工序有 A1、A2 两台设备，B 工序有 B1, B2, B3 三台设备。已知产品 I 可在 A, B 任何一种设备上加工，产品 II 可在任一规格 A 设备上加工，但 B 工序只能在 B2 设备上加工，产品 III 两道工序只能在 A2, B2 设备上加工。加工单位产品所需工序时间及其有关数据如下表所示。应如何安排生产计划，使该厂获利最大。

设备	产品			设备有效台时	设备加工费（元. 小时）
	I	II	III		
A1	5	10		6000	0.05
A2	7	9	12	10000	0.03
B1	6			4000	0.06
B2	4	8	11	7000	0.11
B3	7			4000	0.05
原料费（元/件）	0.25	0.35	0.50		
售价（元/件）	1.25	2.00	2.80		

1. 变量定义

设 i 表示产品类型 ($i=1, 2, 3$)，定义出决策变量：

$x_{1,A1}$ ：产品 I 在设备 A1 上的加工量、 $x_{1,A2}$ ：产品 I 在设备 A2 上的加工量

$y_{1,B1}$ ：产品 I 在设备 B1 上的加工量、 $y_{1,B2}$ ：产品 I 在设备 B2 上的加工量

$y_{1,B3}$ ：产品 I 在设备 B3 上的加工量

$x_{2,A1}$ ：产品 II 在设备 A1 上的加工量、 $x_{2,A2}$ ：产品 II 在设备 A2 上的加工量

x_3 ：产品 III 的生产数量

2. 目标函数

设总利润为 Z ，需要追求 Z 的最大化。利润 = 总销售额 - 总原料成本 - A 工序总加工费 - B 工序总加工费。

立公式得：

$$\begin{aligned}\max Z = & [1.25(x_{1,A1} + x_{1,A2}) + 2.00(x_{2,A1} + x_{2,A2}) + 2.80x_3] \\ & - [0.25(x_{1,A1} + x_{1,A2}) + 0.35(x_{2,A1} + x_{2,A2}) + 0.50x_3] \\ & - [0.05(5x_{1,A1} + 10x_{2,A1}) + 0.03(7x_{1,A2} + 9x_{2,A2} + 12x_3)] \\ & - [0.06(6y_{1,B1}) + 0.11(4y_{1,B2} + 8(x_{2,A1} + x_{2,A2}) + 11x_3) + 0.05(7y_{1,B3})]\end{aligned}$$

3. 约束条件

① 设备最大可用时间：

设备 A1: $5x_{1,A1} + 10x_{2,A1} \leq 6000$

设备 A2: $7x_{1,A2} + 9x_{2,A2} + 12x_3 \leq 10000$

设备 B1: $6y_{1,B1} \leq 4000$

设备 B2: $4y_{1,B2} + 8(x_{2,A1} + x_{2,A2}) + 11x_3 \leq 7000$

设备 B3: $7y_{1,B3} \leq 4000$

② 工序平衡:

$$x_{1,A1} + x_{1,A2} = y_{1,B1} + y_{1,B2} + y_{1,B3}$$

③ 生产数非负:

$$x_{1,A1}, x_{1,A2}, y_{1,B1}, y_{1,B2}, y_{1,B3}, x_{2,A1}, x_{2,A2}, x_3 \geq 0$$

4. 使用 LINGO 进行求解

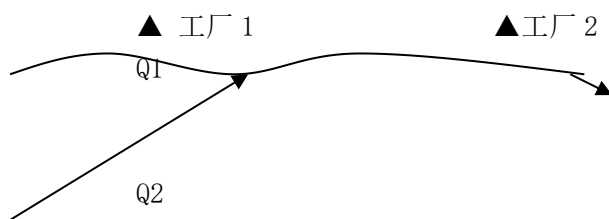
Global optimal solution found.		
Objective value:	1021.888	
Infeasibilities:	0.000000	
Total solver iterations:	7	
Elapsed runtime seconds:	0.08	
Model Class:	LP	
Total variables:	15	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	14	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	47	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
PROFIT	1021.888	0.000000
TOT_I	2033.498	0.000000
X1_A1	1200.000	0.000000
X1_A2	833.4975	0.000000
TOT_II	0.000000	0.000000
X2_A1	0.000000	0.3500000
X2_A2	0.000000	0.3965517E-01
INCOME	3513.826	0.000000
X3	347.1264	0.000000
MAT_COST	681.9376	0.000000
COST_A	600.0000	0.000000

最大利润为 1021.888，需要安排的生产计划如图所示。

二、建立模型，并用单纯形解法解模型

现有某一江段，沿江设有两个工厂，第一个工厂每日向江中排放的污染物为 20 个单位，第二个工厂每日排污量为 14 个单位。那些污染物在排入江中之前，曾作部分处理，每处理一个单位的污水处理费在第一个工厂为 1000 元，在第二个工厂为 800 元。两个工厂沿江分布的位置，见图。流经第一个工厂的河流在经过工厂以前未受污染的河流，其江水流量 Q_1 为 $5\text{M}^3/\text{S}$ ，在第一个工厂到第二个工厂之间又有一小支流汇入，其流量 Q_2 为 $2\text{M}^3/\text{S}$ 。也未受污染。另外，第一个工厂排入江中的污染物在未到第二个工厂以前由于自净作用而自净掉 20%。按国家城乡环保部的规定这条江对污染物的允许含量不得超过 2 个单位，既要满足江河的防治污染标准，又要使两个工厂因处理污水而花费的经费最少。试问这两个工厂需要处理的污水单位是多少？



约束条件分析表如下所示：

工厂	排污量(单位)			单位污水处理费 (元/. 单位)	河流来水量 (M3/S)	江中允许排污标准/单位	最大允许容 污量/单位
	未处理	处理	剩余量				
1	20	X1	20-x1	1000	Q1=5	2	5*2=10
2	14	X2	14-x2	800	Q1+Q2 =7	2	7*2=14

1. 目标变量

设 x_1 为工厂 1 处理的污水量、 x_2 为工厂 2 处理的污水量。

2. 目标函数

要求两个工厂处理污水的总费用最少。已知工厂 1 处理费为 1000 元/单位，工厂 2 处理费为 800 元/单位。

$$\text{Min } Z = 1000x_1 + 800x_2$$

3. 约束条件

① 工厂 1 水质：工厂 1 排放后的剩余量不得超过河段允许纳污量：

$$20 - x_1 \leq 5 \times 2$$

$$20 - x_1 \leq 10 \Rightarrow x_1 \geq 10$$

② 工厂 2 水质：自净后的残留量与工厂 2 的排放量之和，不得超过下游的允许纳污量。已知自净率为 20%（残留系数 0.8），总流量为 5+2=7。

$$(20 - x_1) \times (1 - 20\%) + (14 - x_2) \leq (5 + 2) \times 2$$

$$0.8(20 - x_1) + 14 - x_2 \leq 14$$

化简后得到：

$$16 - 0.8x_1 + 14 - x_2 \leq 14$$

$$30 - 0.8x_1 - x_2 \leq 14$$

$$16 \leq 0.8x_1 + x_2$$

整理得：

$$0.8x_1 + x_2 \geq 16$$

③ 物理约束：处理量不能超过产生的排污总量

$$0 \leq x_1 \leq 20$$

$$0 \leq x_2 \leq 14$$

4. 单纯形法标准型

引入剩余变量 $s_1, s_2 \geq 0$ 表示超额完成的任务量，将不等式转化为等式。

$$\begin{cases} \text{Min} Z = 1000x_1 + 800x_2 \\ \text{s.t.} \\ x_1 - s_1 = 10 \\ 0.8x_1 + x_2 - s_2 = 16 \\ x_1 \leq 20, x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. 建立大 M 标准型

由于约束条件包含 \geq 符号，为了找到初始基可行解，我们需要引入剩余变量 s_1, s_2 、松弛变量 s_3, s_4 以及人工变量 a_1, a_2 。同时，在目标函数中对人工变量赋予一个极大正惩罚系数 M 。

目标函数： $\min Z = 1000x_1 + 800x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + Ma_1 + Ma_2$

$$\text{约束条件: } \begin{cases} x_1 - s_1 + a_1 = 10 \\ 0.8x_1 + x_2 - s_2 + a_2 = 16 \\ x_1 + s_3 = 20 \\ x_2 + s_4 = 14 \\ x_i, s_i, a_i \geq 0 \end{cases}$$

6. 单纯形表迭代过程

我们将上述方程组填入单纯形表。初始基变量为 (a_1, a_2, s_3, s_4) 。

初始单纯形表，选择 x_1 为换入变量，根据 θ 判别准则，第一行 a_1 为换出变量进行转轴运算：

基变量	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1	a_2	常数项
a_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	10
a_2	0.8	1	0	-1	0	0	0	1	16
s_3	1	0	0	0	1	0	0	0	20
s_4	0	1	0	0	0	1	0	0	14
$C_j - Z_j$	$1000 - 1.8M$	$800 - M$	M	M	0	0	0	0	$-26M$

经过迭代（将人工变量和剩余变量逐步换出），得到如下最终单纯形表：

基变量	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	常数项
x_1	1	0	-1	0	0	0	10
x_2	0	1	0.8	-1	0	0	8
s_3	0	0	1	0	1	0	10
s_4	0	0	-0.8	1	0	1	6
$C_j - Z_j$	0	0	360	800	0	0	-16400

7. 结论

由最终单纯形表可知，检验数 $C_j - Z_j$ 全部 ≥ 0 （求最小值问题），模型达到最优状态。

最优解： $x_1 = 10, x_2 = 8$

最小费用： $Z = 16400$ 元

8. 使用 LINGO 进行求解检验

```
Lingo Model - Lingo1
MODEL:
    MIN = COST;
    COST = 1000 * X1 + 800 * X2;

    X1 >= 10;
    0.8 * X1 + X2 >= 16;
    X1 <= 20;
    X2 <= 14;
END
```

Global optimal solution found.		
Objective value:	16400.00	
Infeasibilities:	0.000000	
Total solver iterations:	1	
Elapsed runtime seconds:	0.05	
Model Class: LP		
Total variables:	3	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	6	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	9	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
COST	16400.00	0.000000
X1	10.00000	0.000000
X2	8.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	16400.00	-1.000000
2	0.000000	-1.000000
3	0.000000	-360.0000
4	0.000000	-800.0000
5	10.00000	0.000000
6	6.000000	0.000000

如图所示，最优解为 $x_1 = 10$ 、 $x_2 = 8$ ，此时总费用为 16400 元。