第 三 节　线性方程组的解

- 线性方程组有解的条件
- 线性方程组的求解

线性方程组的解

我们知道, n未知数m个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

可以写成

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},$$

其中$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$. 矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$称为线性方程组的增广矩阵.

线性方程组如果有解, 就称它是相容的; 如果无解, 就称它不相容.

一、线性方程组有解的条件

定理 3 n 元线性方程组 $Ax=b$

(i) 无解的充要条件是 $R(A)<R(A,\ b)$；

(ii) 有唯一解的充要条件是

$$R(A)=R(A,\ b)=n;$$

(iii) 有无穷多解的充要条件是

$$R(A)=R(A,\ b)<n.$$

证明 证明

定理 5 线性方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件是 $R(A) = R(A, b)$.

定理 4 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 $R(A) < n$.

推论 当 $m < n$ 时，齐次线性方程组 $A_{m \times n} x = 0$ 一定有非零解.

二、线性方程组的求解

（一）非齐次线性方程组的求解步骤

步骤 1 对于n元非齐次线性方程组，把它的增广矩阵(A,b)化成行最简形.

步骤 2 根据 $R(A)$ 和$R(A,b)$，并给出方程组解的情况.

步骤 3 若 $R(A)=R(A,b)=r<n$，把行最简形中 r 个非零行的非零首元所对应的未知量取作非自由未知量，其余 $n-r$ 个未知量取作自由未知量，并令自由未知量分别等于 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$，写出含 $n-r$ 个参数的通解.

❖线性方程组的通解

当方程组$Ax=b$有无限多解时，不妨设$R(A)=R(A, b)=r$，此时可设(A, b)的行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是，其解可写为

$$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n+d_1, \\ x_2=-b_{21}x_{r+1}-\cdots-b_{2,n-r}x_n+d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n+d_r. \end{cases}$$

❖线性方程组的通解

当方程组$Ax=b$有无限多解时，其解的形式为

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n + d_1, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n + d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n + d_r, \end{cases}$$

其中$x_{r+1}, \cdots, x_n$是自由未知数. 令$x_{r+1}=c_1, \cdots, x_n=c_{n-r}$, 可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

这是方程组的含有参数的解, 称为方程组的通解.

例1　求解非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}.$$

解：将增广矩阵化为行最简形

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由$R(A,b)=R(A)=2<4$得方程组有无穷多解

同解方程组为$\begin{cases} x_1-x_2 \quad -x_4=\frac{1}{2} \\ x_3 \quad -2x_4=\frac{1}{2} \end{cases}$解得$\begin{cases} x_1=x_2 \quad +x_4+\frac{1}{2} \\ x_3= \quad 2x_4+\frac{1}{2} \end{cases}$

取x_2,x_4为自由未知量，并令$x_2=c_1,x_4=c_2$得

通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,其中$c_1$，$c_2$为任意的常数.

（二）齐次线性方程组的求解步骤

步骤 1 对于n元齐次线性方程组，把它的系数矩阵A化成行最简形.

步骤 2 根据 $R(A)$ 给出方程组解的情况.

步骤 3 若 $R(A)=r<n$，把行最简形中 r 个非零行的非零首元所对应的未知量取作非自由未知量，其余 $n-r$ 个未知量取作自由未知量，并令自由未知量分别等于 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$，写出含 $n-r$ 个参数的通解.

例2　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} .$$

解：化系数矩阵A为行最简形：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=2<4$,方程组有非零解

$R(A)=2<4$，方程组有非零解

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad -2x_3-\dfrac{5}{3}x_4=0 \\ x_2+2x_3+\dfrac{4}{3}x_4=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1=2x_3+\dfrac{5}{3}x_4 \\ x_2=-2x_3-\dfrac{4}{3}x_4 \end{cases}$

取x_3，x_4为自由未知量，并令 $x_3=c_1$，$x_4=c_2$

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c_1,c_2$为任意常数$)$

(三)求解含参数的非齐次线性方程组

例 3 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+k)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1+k)x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+(1+k)x_3=k,\end{cases}$$

问 k 取何值时，此方程组 (1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

解法一 初等行变换法

解法二 行列式法

应用1. 非齐次线性方程组$Ax=b$(其中A为n阶方阵)满足

(1) 若$|A|\neq 0$，则方程组**有唯一解**；

(2) 若方程组**无解**或**有无穷多解**，则$|A|=0$.

三、应用举例

定理 6 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充要条件是

$R(A) = R(A, B)$.

利用定理 6 容易得出矩阵秩的性质(7)，即

定理 7 设 $AB = C$，则

$$R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$$

四、小结

(i) 方程组有解的判定条件.

(ii) 方程组求解的具体步骤.

五、作业

书 习题三 P79-80

14(1)，15(2)(3)，18，21