§4.2 方差

一、方差的定义

定义. 设X是一个随机变量,若$E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在,称$E\{[X-E(X)]^2\}$为X 的方差,记为$D(X)$ 或Var(X)，即

$$D(X)=Var(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

称$\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差，记为$\sigma(X)$。

由定义知,方差实际上就是随机变量X的函数 $g(X)=(X-E(X))^2$的数学期望.

计算公式： $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ (2.4)

绝大多数例子中，用公式计算方差要比用定义简单。

证明：由数学期望的性质得

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

例1 设$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2>0$。

记 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则

$$E(X^*)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$$

$$D(X^*)=E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=\frac{1}{\sigma^2}[E(X-\mu)^2]=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

即$X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的数学期望为 0，方差为 1。

X^*称为X的标准化变量或标准化变换

例2 设随机变量X具有$(0-1)$分布,其分布律为

$$P\{X=0\}=1-p, P\{X=1\}=p$$

求$D(X)$.

解: $E(X)=0\times(1-p)+1\cdot p=p$

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

$$\therefore \quad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=p-p^2=p(1-p)$$

例3 设$X \sim \pi(\lambda)$（泊松分布），求$D(X)$.

解：X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$$

上节例6已算得$E(X)=\lambda$,而

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda \quad =\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

例4 设随机变量$X \sim U(a,b)$,求$D(X)$.

解:X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a<x<b \\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

上节例7已算得$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$，而

$$E(X^2)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

例5 设随机变量X服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, \qquad x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$。求$E(X)$，$D(X)$.

解:由上节例10知，$E(X)=\theta$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx$$

$$=-x^2e^{-x/\theta}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2xe^{-x/\theta}dx=2\theta^2$$

$$\therefore\quad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$$

二、方差的几个重要性质及其应用

1^0 设C是常数,则$D(C)=0.$

2^0 设X是随机变量,C是常数,则有 $D(CX)=C^2D(X)$

3^0 设X,Y是两个随机变量,则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}$$

特别，若X,Y相互独立,则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

4^0 $D(X)=0$的充要条件是X以概率1取常数C,即

$$P\{X=C\}=1$$

特别，若X,Y相互独立,则有

$$D(X-Y)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

上述第三个性质可以推广为：

若X_1，X_2，. . . ，X_n相互独立, a_1，a_2，. . . ，a_n是常数，则有

$$D(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k^2 D(X_k)$$

例6　设随机变量$X \sim b(n, p)$。求$E(X), D(X)$.

解:由二项分布的定义知, 随机变量X可以看成n 重伯努利试验中事件A 发生的次数, 且在每次试验中A 发生的概率为p. 引入随机变量:

$$X_k = \begin{cases} 1, & A\text{在第}k\text{次试验中发生} \\ 0, & A\text{在第}k\text{次试验中不发生} \end{cases} \qquad k = 1,2,\cdots,n$$

则X可以看做是$\sum_{k=1}^{n} X_k$, 故

$$EX_k = p, \quad E(X_k^2) = p, \ D(X_k) = pq,$$

$$EX = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = np \qquad DX = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = npq$$

注意：

“随机变量X 可以看成n 重伯努利试验中事件A 发生的次数” 的真正意思是指 “$\sum_{k=1}^{n} X_k$与X 同分布” 。

所以，不要直接写$\sum_{k=1}^{n} X_k = X$ 。

例7 设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 求$E(X)$, $D(X)$.

解: X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$$

上节已经计算得到$E(X)=\mu$, 由方差的定义得

$$DX=E(X-\mu)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}dx$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\exp\{-\frac{y^2}{2}\}dy=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y[-\exp\{-\frac{y^2}{2}\}]'dy=\sigma^2$$

正态分布的概率密度中的两个参数μ和σ分别就是该分布的数学期望和标准差，因而正态分布完全可由它的数学期望和方差所确定.

例8不讲

三、切比雪夫不等式

定理. 设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$,方差$D(X)=\sigma^2$,则对于任意正数ε,有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

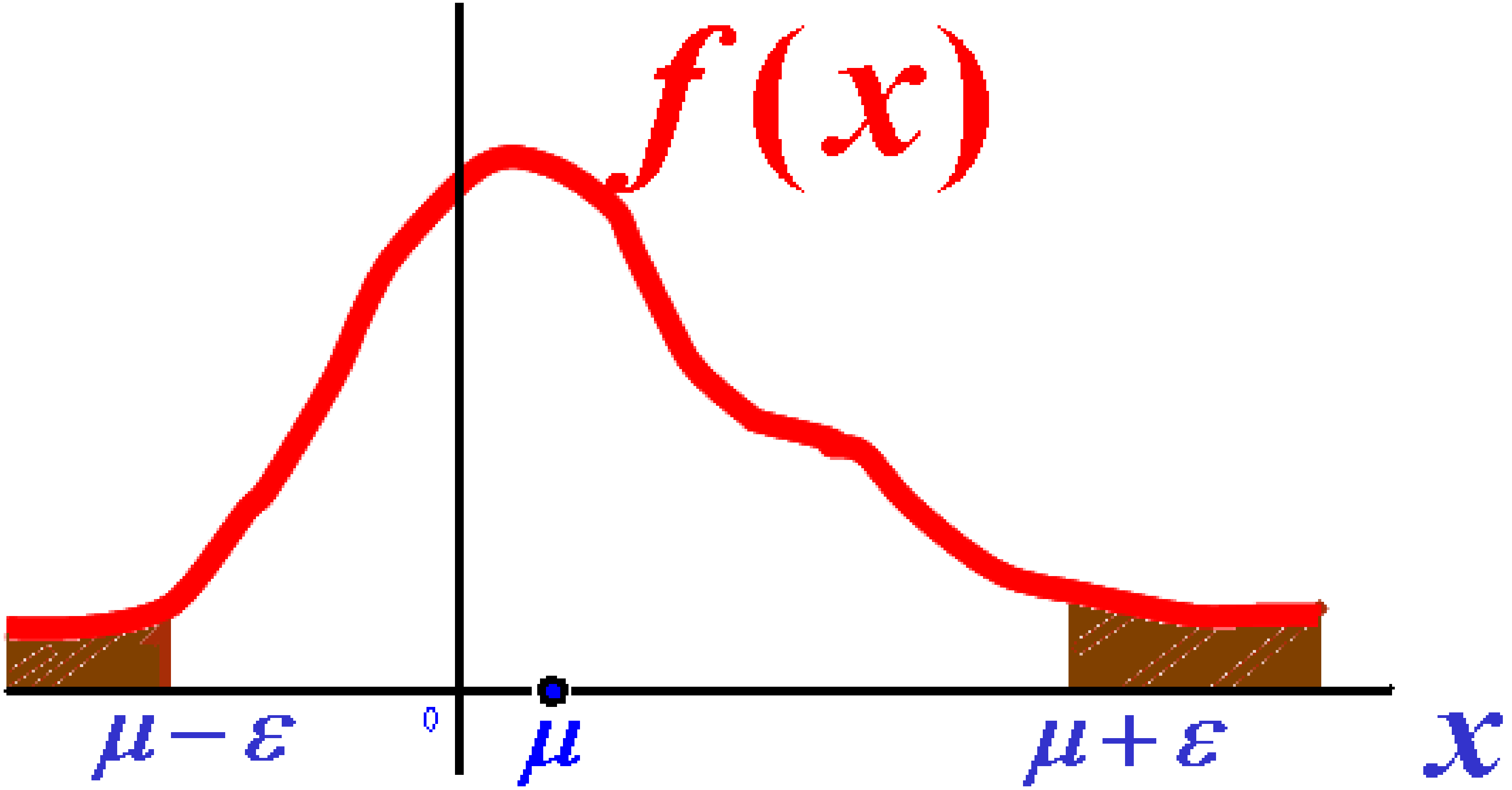
证明：设$Y=\begin{cases}1, & |X-\mu|\geq\varepsilon\\ 0 & |X-\mu|<\varepsilon\end{cases}$ 则$0\leq \mathrm{Y}\leq 1$且

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=P\{Y=1\}=E(Y^2),\quad 0\leq \mathrm{Y}^2\leq(X-\mu)^2\varepsilon^{-2}$$

$$E\mathrm{Y}^2\leq E(X-\mu)^2\varepsilon^{-2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

切比雪夫不等式也可写成如下形式：

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\} \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad (2.10)$$



作业：20，22（1）