

福建师范大学试题纸

2019-2020 学年 2 学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程号 _____ 课程名 线性代数 _____ 学分 _____

学号 _____ 姓名 _____ 班级 _____

题 号	一	二	三	总分
得 分				
阅卷人				
核分人				

一、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. 如果矩阵 A 与矩阵 B 等价，则下列说法错误的是（ ）

- A. A 与 B 有相同的秩； B. A 与 B 有相同的标准形；
C. A 与 B 的行向量组的秩相等； D. A 与 B 的行向量组等价。

2. 设 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ ， A^* 是 A 的伴随矩阵，若 $R(A^*) = 0$ ，则 $a =$ （ ）

- A. -1 或 2； B. -1； C. 1； D. 2.

3. 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示，则（ ）

- A. 若向量组 A 线性无关，则 $s < t$ ； B. 若向量组 B 线性无关，则 $s < t$ ；
C. 当 $s > t$ 时，向量组 A 线性相关； D. 当 $s > t$ 时，向量组 B 线性相关。

4. 已知 $\varepsilon_1 = (-1, 4, 0)^T, \varepsilon_2 = (-3, 6, 1)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \end{cases}$ 的两个解，则此方程组的通解

$x =$ （ ）

- A. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ； B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ； C. $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ； D. $\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可对角化，则 $x =$ （ ）

- A. -2； B. -1； C. 1； D. 2.

6. 设 A 为 3 阶方阵， $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为 3 阶可逆阵，且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，则 $A(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) =$ （ ）

- A. $\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$ ； B. $\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$ ； C. $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ ； D. $\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$.

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

7. 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 是 的伴随矩阵，则 $A^{-1} =$ _____.

8. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 3, 1)^T, \alpha_2 = (3, 3, 2, 4)^T, \alpha_3 = (2, 2, t, 3)^T$ 线性无关，则 $t \neq$ _____.

9. 设 3 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的秩 $R(A) = 2$ ，且 $\alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2$ ，向量 $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ ，则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解 $x =$ _____.

10. 设 是 n 阶方阵， $|A| = 3$ ， $2A + E$ 不可逆，求 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值_____.

11. 设 α, β 均为 3 维列向量，若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，则 $\beta^T \alpha =$ _____.

12. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是_____.

三、计算题（共 64 分）

13. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，矩阵 X 满足 $A^*X = 4A^{-1} + 2X$ ，其中 A^* 为 的伴随矩阵，求矩阵 X . (8 分)

14. 计算 5 阶行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. (8 分)

15. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 2)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1, -2)^T, \alpha_3 = (2, 0, 2, 3)^T, \alpha_4 = (-2, 1, 0, -3)^T$ 的一个极大线性无关组并将其余向量用此极大线性无关组线性表示. (8 分)

16. 已知向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; 向量组 $B: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; 向量组 $C: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$, 若各向量组的秩分别为 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3, R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 4$, 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4. (10 分)

17. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T, \beta = (-2, -2, a-3)^T$. 试问当 a 满足什么条件时, (1) β 可由 唯一的线性表示; (2) β 不能由 线性表示; (3) β 可由 线性表示, 但表示式不唯一, 并写出表示式. (12 分)

18. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $-y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$,

(1) 求参数 a ; (2) 所用的正交变换矩阵 Q . (12 分)

19. 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量, 且满足 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3,$

$A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$, (1) 求矩阵 B , 使 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$; (2) 求矩阵 A 的特征值. (6 分)