§3.4　随机变量的独立性

一、定义

设$(X，Y)$的分布函数为$F(x, y)$。如果

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$,则称X与Y相互独立。

独立性判别法：（1）设(X,Y)有密度$f(x,y)$,

则X和Y相互独立等价于:

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 在平面上几乎处处成立.

对于连续型随机变量来说：随机变量独立就是联合密度可以分解成两个一元函数的积

（2）设$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，则X 和Y 相互独立等价于

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}\quad i，\ j=1,2,3,\ldots$$

对于离散型随机变量来说：随机变量独立就是联合分布中的概率各行（或各列）成比例

当p_{ij}有通式时，p_{ij} 是i，j 的二元函数。此时等价于p_{ij}可以分解为两个一元函数的积

$$p_{ij}=h(i)g(j),\quad i，\ j=1,2,3,\ldots$$

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	$p_{1\bullet}p_{\bullet 1}$	$p_{2\bullet}p_{\bullet 1}$	$\cdots$	$p_{i\bullet}p_{\bullet 1}$	$\cdots$
y_2	$p_{1\bullet}p_{\bullet 2}$	$p_{2\bullet}p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{i\bullet}p_{\bullet 2}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	$p_{1\bullet}p_{\bullet j}$	$p_{2\bullet}p_{\bullet j}$	$\cdots$	$p_{i\bullet}p_{\bullet j}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

粗略地说：随机变量独立就是边缘分布的乘积等于联合分布。

（3）直观判断法：如果两个随机变量的取值互不影响，则它们相互独立。

使用直观判断法注意：要判断两个随机变量的取值互不影响，必须要有充足的理由。不能“觉得是”，“好像是”，“应该是”就判断独立。

考虑二元正态分布的联合密度函数

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

两个分量独立当且仅当f(x,y)可分解成两个一元函数的积，也即 $\rho=0$

X与Y独立吗?

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

不独立

例 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8～12时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7～9时,设他们两人到达的时间相互独立,求他们到达办公室的时间相差不超过5分钟(1/12小时)的概率.

解：设负责人的到达时间为X，秘书的到达时间为Y。由已知，两个边缘密度分别为

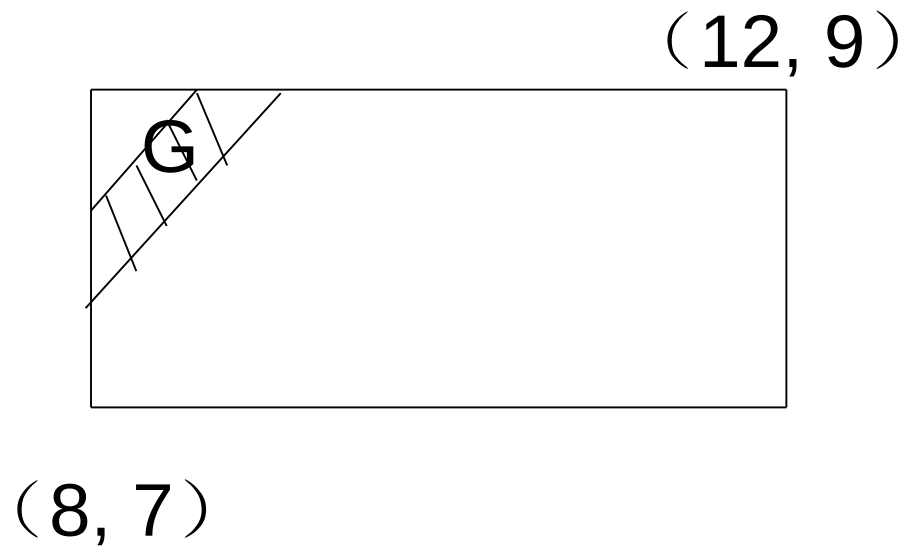
$$f_X(x)=\begin{cases}0.25, & 8\le x\le 12\\ 0, & \text{其它}\end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases}0.5, & 7\le y\le 9\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由独立性得，联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1/8, & 8\le x\le 12,\ 7\le y\le 9\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$P\{|X-Y|<1/12\}$$

$$=\iint_G \frac{1}{8}dxdy$$



$$=\frac{1}{8}\iint_G dxdy$$

$$=\frac{1}{8}[(1+1/12)^2/2-(1-1/12)^2/2]=\frac{1}{48}$$

作业：判断习题6、7、8、9中的随机变量的独立性

做作业的时候必须把这个题目抄在作业纸上！或者跟上一节题目放在一起。