福建师范大学 数学与统计 学院

2022—2023 学年第 一 学期考试 A 卷

知明行笃 立诚致广

专　业：全校性专业　　年　级：2022 级

课程名称：高等数学 A（上）　　任课教师：张世芳等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2022 年___月____日___午___点____分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

考生信息栏

学号____ 姓名____ 年级____ 专业____ 系____ 学院____

装 订 线

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 当 $x\to 0$ 时，函数 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是(　D　)

A. 无穷小　　　　　　　　　　B. 无穷大

C. 有界，但不是无穷小　　　　D. 无界，但不是无穷大

2. 设函数 $f(x)=(x+1)|x|$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　C　）

A. 可导　　B. 极限不存在　　C. 连续但不可导　　D. 不连续

3. 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1+x^2)}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　B　).

A. 有极小值 $f(0)=2$　　B. 有极小值 $f(0)=0$

C. 有极大值 $f(0)=0$　　D. 无极值

4. 设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则下列函数中为 $f(x)$ 的原函数的是（　B　）.

A. $1+\sin x$　　B. $x-\sin x$　　C. $1+\cos x$　　D. $1-\cos x$

5. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $\int_a^b f(x)dx$ 存在的(　A　).

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

二、判断题(每小题 3 分，共 15 分)

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$. ----------------------------------（对　）.

7. 设 $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$, 则 $f^{(100)}(0)=-1$. ----------------------------------（错　）.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$.--（错　）.

9. 若 $f(x)$ 为可导的奇函数, 则 $f'(x)$ 必为偶函数. -------- ------------------------（对　）.

10. $\int_{-1}^{1}|x|\sin x+x^2dx=\frac{2}{3}$. --（对 ）.

三、简答题(每题 10 分，共 70 分)

11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{\int_0^x t(e^{2t}-1)dt}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{x(e^{2x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{x(e^{2x}-1)}$---5 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2(1+x^2)}=\frac{1}{2}$.--10 分

12. 求函数 $y=xe^{-x}$ 的一阶导数、二阶导数以及函数曲线的拐点.

解：$y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$,

$y''=[(1-x)e^{-x}]'=e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$.-------------------------------5 分

令 $y''=0$，解得 $x=2$.

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	−	0	+
y	凸	$(2,2e^{-2})$ 拐点	凹

由于 $(-\infty,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 分别是曲线的凸区间和凹区间，从而曲线的拐点是 $(2,2e^{-2})$. -----10 分

13. 求不定积分 $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

解：$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int\ln x d\frac{1}{x}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x}d\ln x$ -----------------------------------5 分

$=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$$

$$=-\frac{\ln x+1}{x}+C$$ ------------------------------------10 分

14. 求定积分 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}dx$.

解：令 $\sqrt{1+x}=t$, 则 $x=t^2-1$, $dx=2tdt$, 且当 $x=2$ 时，$t=\sqrt{3}$；当 $x=0$ 时，$t=1$.

于是 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{(1+x)^3}}dx=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t+t^3}dt$ ------------------------------------5 分

$$=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=2\arctan t\,\Big|_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$ ------------------10 分

15. 已知函数 $y=f\left(x\right)$ 由方程 $y-2x=e^{xy}$ 所确定.

（1）求 $f(0)$；（2）求 $\frac{dy}{dx}$；（3）求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right)$.

解：（1）将 $x=0$ 代入方程 $y-2x=e^{xy}$，解得 $f(0)=e^0=1$. --------------------2 分

（2）$y-2x=e^{xy}$ 两边关于 x 求导得

$$\frac{dy}{dx}-2=e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right).$$

从而 $\frac{dy}{dx}=\frac{2+ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$. --8 分

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)$

将 $x=0, y=1$ 代入 $\frac{dy}{dx}=\frac{2+ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$，解得 $f'(0)=3$.

从而$\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{2}{n})-1) = 2f'(0) = 6.$ --10 分

16. 设函数 $f(x)$ 在 R 上连续，且满足 $f(\frac{\pi}{4}+x) = f(\frac{\pi}{4}-x).$

（1）证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 xdx;$

（2）计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{4})^2 \sin^2 xdx.$

证明:（1）设$x=\frac{\pi}{2}-t$，则$dx=-dt,$且当$x=0$时，$t=\frac{\pi}{2}$;当$x=\frac{\pi}{2}$时，$t=0$.

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin^2 xdx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\frac{\pi}{2}-t)\sin^2(\frac{\pi}{2}-t)dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-t)\cos^2 tdt$$

注意到 $f(\frac{\pi}{4}+x) = f(\frac{\pi}{4}-x),$ 则 $f(\frac{\pi}{2}-t) = f(t).$ 从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2}-t)\cos^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 xdx.$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 xdx;$ -------------------------5 分

（2） 设$g(x)=(\frac{\pi}{4}-x)^2$，则有 $g(\frac{\pi}{4}+x) = g(\frac{\pi}{4}-x) = x^2.$

由（1）的结论可知：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{4})^2 \sin^2 xdx = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{4})^2 \sin^2 xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{4})^2 \cos^2 xdx}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{4})^2 dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 dt = \frac{\pi^3}{192}.$$ ----------------------------------10 分

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=1$，$f(1)=0$.

证明： (1) 存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；

(2) 存在 $\eta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta)\eta + f(\eta) = 0$.

证明： （1） 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$F(0)=f(0)-0=1>0$, $F(1)=f(1)-1=-1<0$. 由连续函数的零点存在性定理可知：

存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $F(\xi)=0$. 即 $f(\xi)=\xi$. ----------------------------5 分

（2） 设 $H(x)=xf(x)$，则 $H(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导, 且

$H(0)=H(1)=0$. 由罗尔定理可知：存在 $\eta \in (0,1)$，使得

$H'(\eta)=0$, 即 $f'(\eta)\eta + f(\eta) = 0$. --10 分