工程数学

线性代数

第七版

同济大学数学科学学院　编

高等教育出版社

第二章

矩阵及其运算

目　录

CONTENTS

一、线性方程组

n 元线性方程组是指形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

n个未知量：$x_1, x_2, \cdots, x_n$

系数：$a_{ij}\ (i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$

常数项：$b_j\ (j = 1, 2, \cdots, m)$

当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ 时，称为 n 元齐次线性方程组；

（只有零解（唯一解），有非零解（有无穷多个解））

否则称为 n 元非齐次线性方程组.(有解：唯一解，有无穷多个解；无解)

引 例

一个线性方程组与一个数表存在一一对应关系:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \begin{matrix} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{matrix} \begin{matrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ (a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m) \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \end{matrix}$$

该方程组的解与这个数表密切相关，这个数表就称为矩阵.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

❖ 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的m行n列的矩形数表称为$m\times n$矩阵，记作

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

其中a_{ij}称为矩阵的第 i 行第 j列的元素.

一般情况，我们用大写黑体字母$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$等表示矩阵. $m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$简记为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

❖方阵 行矩阵 列矩阵

•n阶矩阵(n阶方阵):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注: n阶矩阵(i,i)-元所在的直线叫做主对角线.

•行矩阵(行向量):

$$(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n),$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

•列矩阵(列向量): $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

同型矩阵 矩阵相等

- **同型矩阵:**

  两个矩阵的行数相等、列数也相等, 就称它们是同型矩阵.

- **矩阵相等:**

  若$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$与$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是同型矩阵, 并且它们的对应元素相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$相等, 记作$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

❖零矩阵 单位矩阵 对角矩阵

➢ 零矩阵:

所有元素均为0的矩阵称为零矩阵, 记为$\boldsymbol{O}$.

➢ 单位矩阵:

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

单位矩阵简称为单位阵.
n阶单位矩阵用$\boldsymbol{E}_n$或$\boldsymbol{E}$表示.

➢ 对角矩阵:

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

对角矩阵简记为
$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

矩阵举例

例1

对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

有如下几个有用的矩阵:

系数矩阵

未知数矩阵

常数项矩阵

增广矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

矩阵举例

例2

某厂向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

其中a_{ij}为工厂向第 i 个店发送第 j 种产品的数量.

这四种产品的单价及单件质量也可列成矩阵

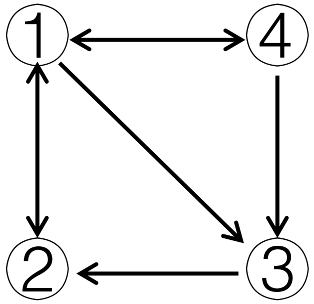
$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix},$$

其中b_{i1}为第i种产品的单价, b_{i2}为第i种产品的单件质量.

矩阵举例

例3

4个城市之间的单向航线如图示. 若令



$$\leftrightarrow \quad \begin{array}{c|c} & ① \ ② \ ③ \ ④ \\ \hline \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$a_{ij}=\begin{cases} 1，\text{从}i\text{市到}j\text{市有1条单向航线}， \\ 0，\text{从}i\text{市到}j\text{市没有单向航线}. \end{cases}$$

则航线图可用这个矩阵表示.

矩阵举例

例4

线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系:

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=x_n \end{cases} \leftrightarrow \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1=\lambda_1x_1 \\ y_2=\lambda_2x_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n=\lambda_nx_n \end{cases} \leftrightarrow \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

线性变换所对应的矩阵称为线性变换的系数矩阵.

恒等变换的系数矩阵为单位矩阵.