# 第四节 向量空间

- 向量空间的定义
- 向量空间的基与维数
- 向量的坐标

# 一、向量空间的定义

**定义 1** 设 $V$ 为 $n$ 维向量的集合,如果集合 $V$ 非空, 且集合 $V$ 对于加法及数乘两种运算封闭, 那么就称集合 $V$ 为向量空间.

所谓封闭, 是指在集合 $V$ 中可以进行加法及数乘两种运算. 具体地说, 若 $a \in V, b \in V,$ 则 $a + b \in V;$ 若 $a \in V, \lambda \in \mathrm{R},$ 则 $\lambda a \in V.$

**例 1** 3 维向量的全体 $R^3$，就是一个向量空间.

类似地，$n$ 维向量的全体所构成的集合 $R^n$ 是一个向量空间.

**例 2** 齐次线性方程组的解集

$$S = \{ x \mid Ax = 0 \}$$

是一个向量空间(称为齐次线性方程组的**解空间**).

**例 3** 非齐次线性方程组的解集

$$T = \{ x \mid Ax = b \}$$

**不是**向量空间.

# 二、向量空间的基与维数

**定义2** 设有向量空间 $V_1$ 及 $V_2$，若 $V_1 \subset V_2$，就称 $V_1$ 是 $V_2$ 的**子空间**.

例如任何由 $n$ 维向量所组成的向量空间 $V$，总有 $V \subset R^n$，所以这样的向量空间总是 $R^n$ 的子空间.

**定义 3** 设 $V$ 为向量空间，如果 $r$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in V$，且满足

(i) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

(ii) $V$ 中任一向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示.

那么，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 就称为**向量空间 $V$ 的一个基**，$r$ 称为**向量空间 $V$ 的维数**，并称 $V$ 为 **$r$ 维向量空间.**

如果向量空间 $V$ 没有基，那么 $V$ 的维数为 0. 0 维向量空间只含一个零向量 0.

若把向量空间 $V$ 看做向量组，则由最大无关组的**等价定义**可知，**$V$ 的基**就是向量组的**最大线性无关组**，$V$ 的**维数**就是向量组的**秩**.

例如，由例 8 知，<u>任何 $n$ 个线性无关的 $n$ 维向量都可以是向量空间 $R^n$ 的一个基</u>，且由此可知 $R^n$ 的**维数为 $n$**. 所以我们把 $R^n$ 称为 $n$ 维向量空间.

# 三、向量的坐标

**定义 4**　如果在向量空间 $V$ 中取定一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，那么 $V$ 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一地表示为

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

数组 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 称为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 中的**坐标**.

**例5** 设

$$A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix},\ B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{pmatrix},$$

验证 $a_1$, $a_2$, $a_3$ 是 $R^3$ 的一个基, 并求 $b_1$, $b_2$ 在这个基中的坐标.

**解**

**例 6** 在 $R^3$ 中取定一个基 $a_1, a_2, a_3$，再取一个新基 $b_1, b_2, b_3$，设 $A=(a_1, a_2, a_3)$，$B=(b_1, b_2, b_3)$．求用 $a_1, a_2, a_3$ 表示 $b_1, b_2, b_3$ 的表示式(**基变换公式**)，并求向量在两个基中的坐标之间的关系式(**坐标变换公式**)．

**例 7** 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是$\mathrm{R}^3$的两个基，

(1) 已知从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

且向量$\gamma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$(1,3,1)^{\mathrm{T}}$，求$\gamma$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标；

(2) 令向量组$\eta_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\eta_2=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$，$\eta_3=\alpha_1-\alpha_2$，判断$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是否为$\mathrm{R}^3$的一个基，并说明理由.

## 四. 小结

（1）会证明向量空间的基.

（2） 会求向量在给定基下的坐标.

（3） 熟练掌握基变换公式与坐标变换公式.

## 五、作业

书 习题四 P111

20, 23, 24