福建师范大学（公共课） 数信 学院

2019—2020 学年第 2 学期考试 A 卷

知明行笃 立诚致广

专　　业：全校各专业　　　　年　　级：2018、2019 级

课程名称：《线性代数》　　　　任课教师：陈兰清等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　　　考试用时：120 分钟

考试时间：2020 年 6 月 26 日 上 午 9 点 0 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

考生信息栏　学院＿＿＿系＿＿＿专业＿＿＿年级＿＿＿姓名＿＿＿学号＿＿＿

装　订　线

一．单项选择题：12 小题，每小题 3 分，共 36 分

1、如果$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$，则$D_1$的值为（C）.

（A）$2D$　　　　（B）$-2D$

（C）$8D$　　　　（D）$-8D$

2、行列式$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 3 & k-2 \end{vmatrix}\neq 0$的充要条件是（ C）.

（A）$k\neq -1$　　　　（B）$k\neq 4$

（C）$k\neq -1$且$k\neq 4$　　　　（D）$k\neq -1$或$k\neq 4$

3、若 3 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，向量 β 为非零的 3 维列向量，则下列选项正确的是（ C ）.

（A） 非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解

（B） 向量 β 不可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

（C） 向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示式是唯一的

（D） 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 的秩为 4

4、设 A,B,C 是 $n\,(n>1)$ 阶方阵，则下列选项正确的是（A）.

（A） $(ABC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ （B）$||A|B|=|A||B|$

（C） $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ （D）$|A^2-B^2|=|A+B||A-B|$

5、在线性方程组 $Ax=\beta$ 中，A 是5×4 矩阵，若 $R(A)=R(A,\beta)=4$，则方程组 $Ax=\beta$ 的解的个数为 （ B ）.

（A） 0 （B） 1 （C） 4 （D）无穷多个

6、设 γ_1,γ_2 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，η 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则方程组 $Ax=b$ 的通解为（ B ）.

（A） $k(\eta-\gamma_1)+\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$, 其中$k$为任意实数

（B） $k\eta+\frac{1}{3}\gamma_1+\frac{2}{3}\gamma_2$, 其中$k$为任意实数

（C） $k\eta+\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)$, 其中$k$为任意实数

（D） $k_1\eta+k_2\left(\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)\right)$, 其中$k_1,k_2$为任意实数

7、设3 阶方阵 A 的所有特征值为$1,-2,2$，则矩阵$2A^{-1}+3A+E$ 的所有特征值之和为（ C ）.

（A）20 （B）-20 （C）8 （D）-8

8、已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则下列向量组中线性相关的是（ C ）.

（A）α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

（B）α_1，$2\alpha_2$，$3\alpha_3$，$4\alpha_4$

（C）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$

（D）α_1，α_2，α_3

9、设列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 构成的矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$经初等行变换化为$\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,则它的一个最大无关组为（ C ）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$　　（B）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$

（C）α_1,α_2　　（D）α_1

10、已知ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 3 阶矩阵 A 分别对应于特征值$0, 1, -1$ 的特征向量，取矩阵 $P=(2\xi_2,\xi_1,3\xi_3)$，则 $P^{-1}AP=$（ A ）.

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

11、设向量组 A: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$. 则向量组$A$的秩为（ B ）.

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D） 5

12、下列向量为单位向量的是（ B ）.

（A）$\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$　　（B）$\left(\frac{1}{9},-\frac{8}{9},-\frac{4}{9}\right)^{\mathrm{T}}$

（C）$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$　　（D） $(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$

二. 判断题: 12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分

1、设 n 阶方阵 A 是对称矩阵，则 A^2+E 也是对称矩阵. （√）

2、设 A 为 4 阶方阵，则 $|AE(1,2)|=-|A|$. （√）

3、设 3 阶方阵 A 相似于 $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^2=E$. （√）

4、设 n 阶方阵 A,B 都是正交矩阵，则 $A+B$ 也是正交矩阵. （×）

5、设 $\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(0,2,5)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(0,-5,2)^{\mathrm{T}}$,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个标准正交向量组. （×）

6、两个等价的线性无关的向量组量组所含的向量是相等的. （√）

7、若n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 一定可以对角化. （√）

8、已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,-2,2$，则二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}(A+E)x$ 是正定的. （×）

9、已知 $p=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a=0$. （×）

10、设 α_1,α_2 是列向量, 则有 $\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$. （√）

11、设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $R(A)=R(B)$. （√）

12、若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 是线性相关的，则 α_m 可由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1}$ 线性表示. （×）

以下题答题均要求写出证明过程或演算步骤。

三、（12 分）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&-1&1\\-1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

当 λ 为何值时，线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解、无解或无限多解？在有无限多解时，求出通解(要求用其特解及对应的齐次线性方程组的基础解系表示).

解：

由于 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&1\\-1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$. ------------------------------------2 分

当 $\lambda\neq 2$ 且 $\lambda\neq -1$ 时，方程组 $Ax=b$ 有惟一解. ------------------------------------4 分

当 $\lambda=-1$ 时，由于 $(A,b)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $R(A,b)=2$，$R(A)=1$，故方程组

$Ax=b$ 无解. ------------------------------------6 分

当 $\lambda=2$ 时，由于 $(A,b)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&1/3\\0&1&1&-1/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $R(A,b)=R(A)=2$，故方程组 $Ax=b$ 有无穷多解. ------------------------------------8 分

同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_3+\dfrac{1}{3},\\x_2=-x_3-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

所以方程组 $Ax=b$ 的通解为 $x=\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意实数. --------------------12 分

四、（12 分）设三维向量空间 R^3 的两个基为

$$\alpha_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(2,3,3)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(3,7,1)^{\mathrm{T}};$$

$$\beta_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \beta_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad \beta_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

（1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P；

（2）向量 γ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $1,-1,2$，求 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标；

（3）证明：向量组 $P\alpha_1,P\alpha_2,P\alpha_3$ 线性无关.

解：

（1）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-6&-23&-13\\0&1&0&2&6&4\\0&0&1&1&4&2\end{pmatrix}$，

故 $P=\begin{pmatrix}-6&-23&-13\\2&6&4\\1&4&2\end{pmatrix}$ --6 分

（2） $x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\gamma=P\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\4\\1\end{pmatrix}$ -------------------------------------- 9 分

（3）因为 $R(P\alpha_1,P\alpha_2,P\alpha_3)=3$，所以 $P\alpha_1,P\alpha_2,P\alpha_3$ 线性无关----------------------------12 分

五、（16 分） 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

（1）写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 A；

（2）求一个**正交变换** $x=Qy$ 把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出相应的标准形；

（3）证明：矩阵 A^2+A+2E 可逆.

解：

（1） $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.--- 2 分

（2） $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(5-\lambda).$

矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5.$ --5 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，由线性方程组 $(A+E)x=0$，得 A 的对应于−1 的线性无关特征向量为:

$$\alpha_1=(-1,1,0)^{\mathrm T},\alpha_2=(-1,0,1)^{\mathrm T}$$

当 $\lambda_3=5$ 时，由线性方程组 $(A-5E)x=0$，得 A 的对应于 5 的特征向量为：

$$\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$$ -

对 α_1,α_2 正交化、单位化：

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

对α_3单位化：$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ --- 11 分

令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

则 Q 为正交矩阵且$Q^{-1}AQ=\Lambda$.

于是有正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

从而标准形为 $f(y)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$ ---13 分

(3) 记$\varphi(A)=A^2+A+2E$，有$\varphi(\lambda)=\lambda^2+\lambda+2$.

从而可得$\varphi(A)$的特征值为$\varphi(-1)=2$，$\varphi(5)=32$.

因此，矩阵 A^2+A+2E 可逆. --16 分