分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

在积分时，要找出两个函数u(x) 和v(x)使得乘积u(x) v’(x)等于原来的被积函数。

§2. 4 连续型随机变量及其概率密度

一、定义及概念

定义　若对于随机变量X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负函数$f(x)$，使对于任意实数x有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (4.1)$$

则称X 为连续型随机变量。其中函数$f(x)$ 称为X 的概率密度函数，也称概率密度、分布密度、密度

注：1、密度不唯一。 2、$F(x)$ 连续

密度函数的性质

$1^0\ f(x) \geq 0,$

$2^0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

如果一个函数满足上述两条，则它一定是某个随机变量X的密度。

3^0对于任意实数 $x_1,\ x_2, (x_1 \leq x_2)$, 有

$$P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

因为$F(x)$连续，所以

$$P\{X=x\}\le P\{x-1/n<X\le x+1/n\}$$
$$=F(x+1/n)-F(x-1/n)\to 0$$

所以，连续型随机变量取一个点的概率等于0。

4^0若$f(x)$ 在点x 处连续, 则有 $F'(x)=f(x)$ 。

如果已知$F(x)$有密度，则密度可取为

$$f(x)=\begin{cases} F'(x), & F'(x)\text{存在时} \\ 0, & F'(x)\text{不存在时} \end{cases}$$

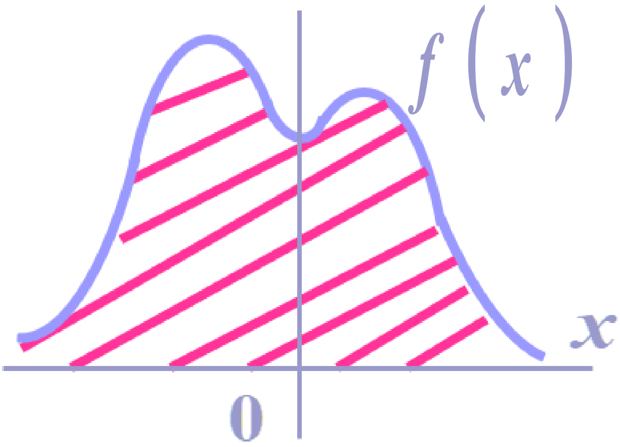


图2-7

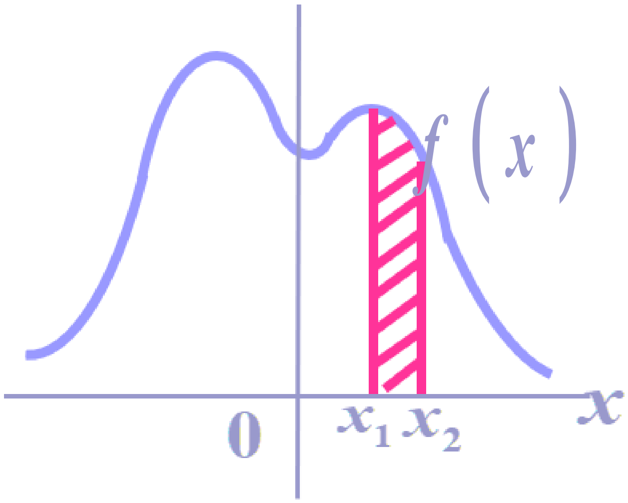


图2-8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

例1　设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1)确定常数k；(2)求X的分布函数$F(x)$；

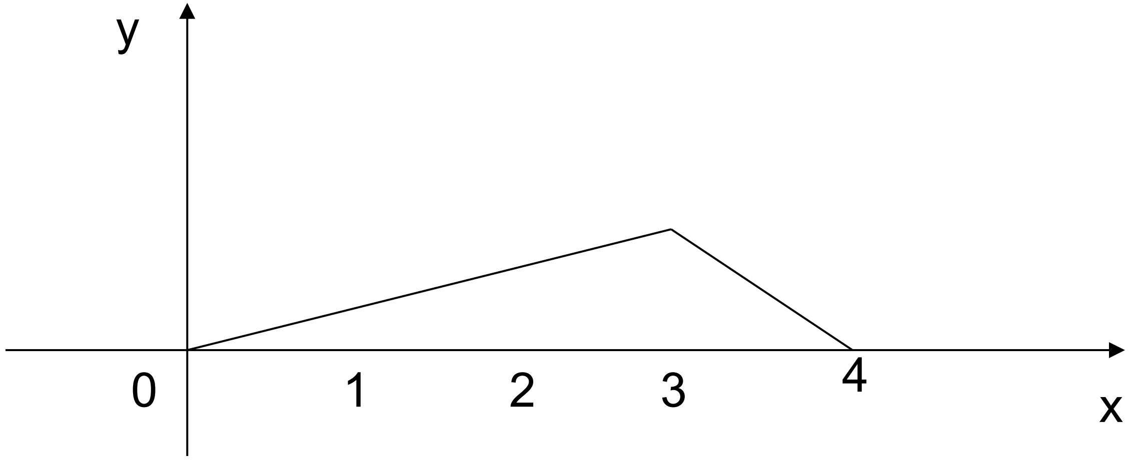
(3)求$P\{1<X\le \dfrac{7}{2}\}$.

解:(1) 由$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$，得

$$\int_0^3 kxdx + \int_3^4 (2-\frac{x}{2})dx = 1$$

解得$k = \frac{1}{6}$。

(2) f(x)的图像



根据分布函数与密度的关系：$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$。

当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$。

当$0\le x<3$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x}\frac{1}{6}tdt=\frac{1}{12}x^2$。

当$3\le x<4$时，

$$F(x)=\int_{0}^{3}\frac{1}{6}tdt+\int_{3}^{x}(2-\frac{t}{2})dt=-3+2x-\frac{x^2}{4}$$ 。

当$x\ge 4$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{4} f(t)dt=1$。

所以，$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$$

$$(3)\text{求}P\{1<X\le\frac{7}{2}\}=F(3.5)-F(1)=\frac{41}{48}$$

$$(3)P\{1 < X \le \frac{7}{2}\} = \int_1^{3.5} f(t)dt$$

$$= \int_1^3 \frac{t}{6}dt + \int_3^{3.5}(2-\frac{t}{2})dt = \frac{41}{48}$$

注意：我们遇到的密度函数大多数都是分段函数。因此，在计算积分时一定要注意：密度在积分区间上是否是一个表达式、是哪一个？如果不是一个表达式，就要分成几段分别计算积分。

二、常见连续型分布

(一) **均匀分布** 若 X 的密度为

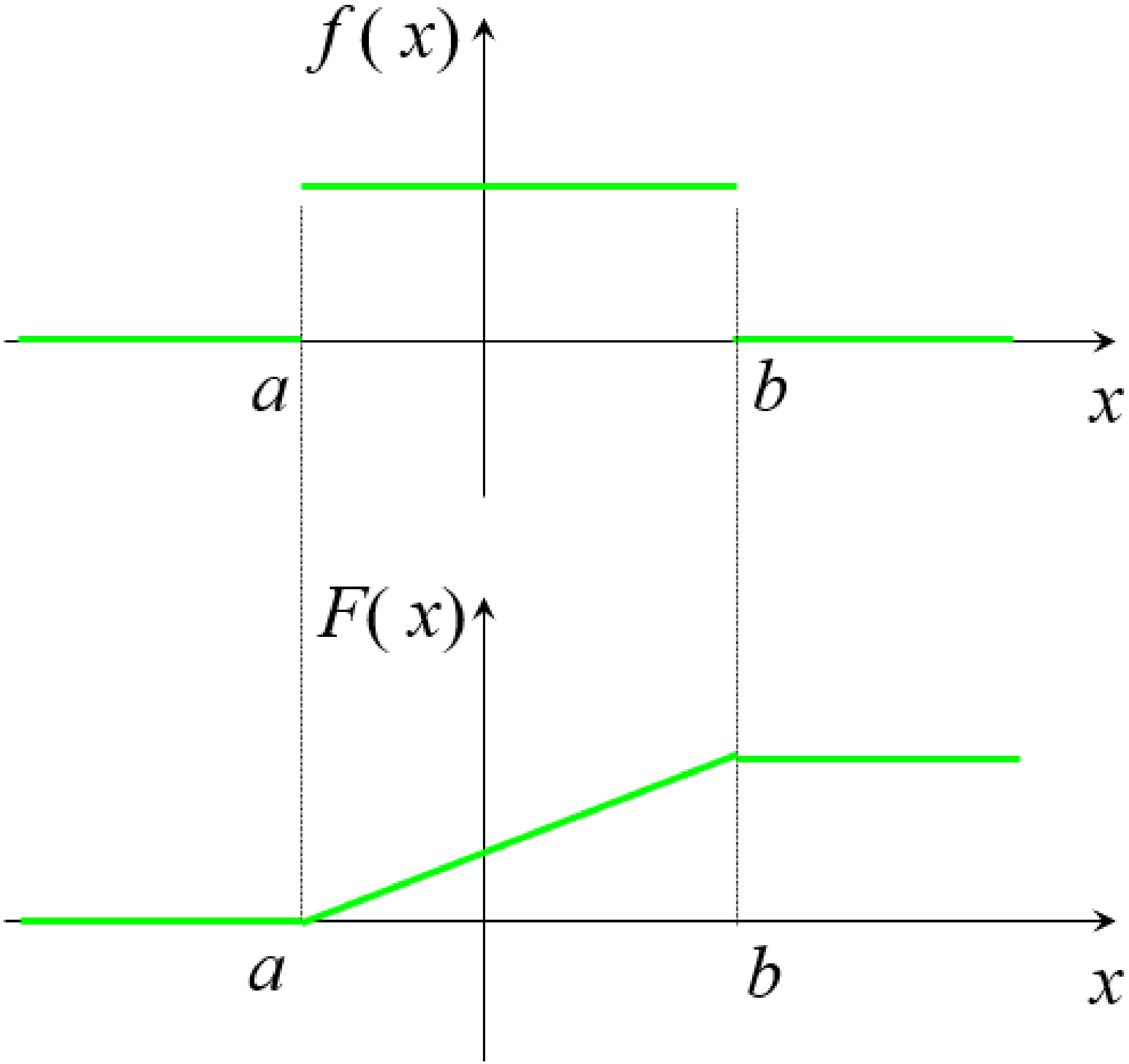
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

则称 X 服从区间(a,b)上的**均匀分布**或称 X 服从参数为 a,b的**均匀分布**. 记作

$$X\sim U(a,b)$$

X的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$


f(x)
a
b
x
F(x)
a
b
x

当 $(c,d)\subset(a,b)$ 时

$$P(c<X<d)=\int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{d-c}{b-a}$$

即 X 落在(a,b)内任何长为 $d-c$ 的小区间的概率与小区间的位置无关, 只与其长度成正比. 这就是所谓的"几何概型"（一维）.

例2 设电阻值R是一个随机变量,均匀分布在$900\Omega \sim 1100\Omega$.求$R$的概率密度及$R$落在$950\Omega \sim 1050\Omega$的概率.

解:按题意,R的概率密度为

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{1100-900}, & 900<r<1100 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\therefore P\{950<R\le 1050\}=\int_{950}^{1050}\frac{1}{200}dr=0.5$$

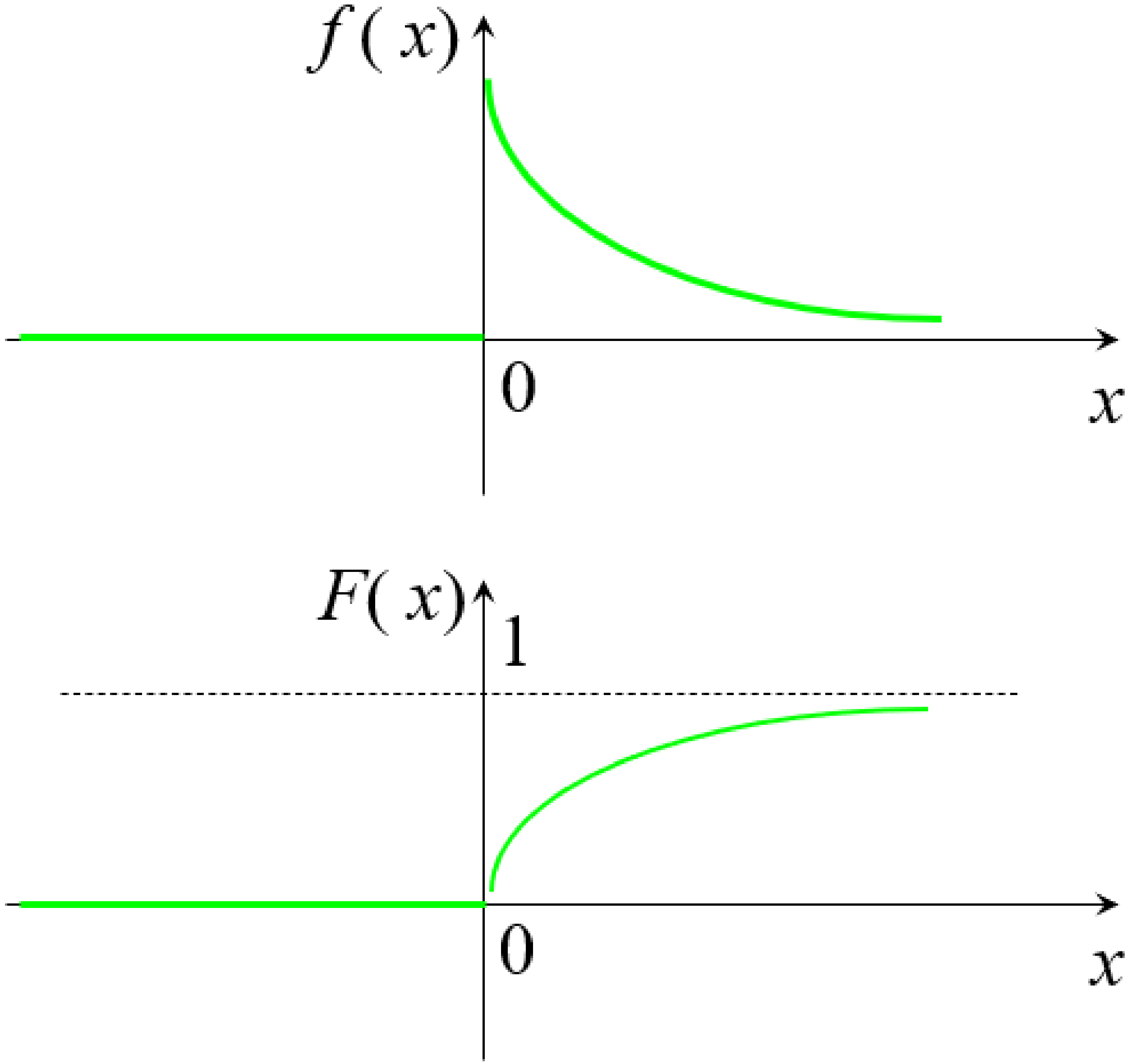
(二) 指数分布

若 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

则称 X 服从参数为 θ 的**指数分布。**

X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$



f(x)
0
x
F(x)
1
0
x

对于任意的 $0 < a < b$,

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} \mathrm{d}\, x$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= e^{-\frac{1}{\theta}a} - e^{-\frac{1}{\theta}b}$$

指数分布的无记忆性： 设$a>0$，$x>0$,

$$P(X>a+x\mid X>a)=\frac{P(X>a+x)}{P(X>a)}$$

$$=\frac{e^{-(a+x)/\theta}}{e^{-a/\theta}}=e^{-x/\theta}=P(X>x)$$

如果X代表寿命，上式就是指：在已经活了a岁的条件下，再活x岁的条件概率等于"寿命大于x岁"的普通概率。即：不会老

所以，一个随机变量是否服从指数分布，就是指是否具有无记忆性。

例如：人是会老的，所以人的寿命并不服从指数分布。动物的寿命也不服从指数分布。

(三) 正态分布

若X的密度为

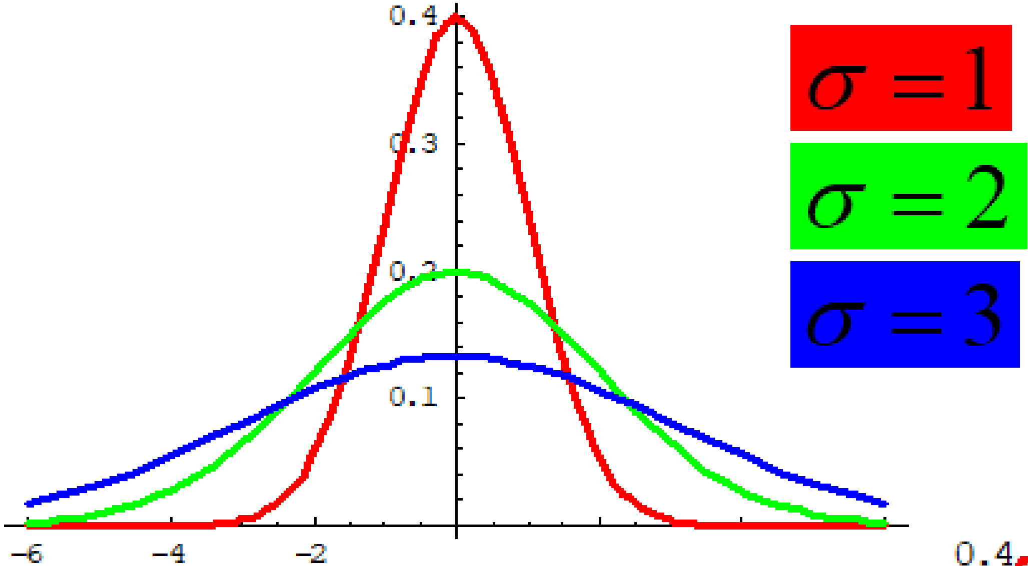
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

μ,σ 为常数, $\sigma > 0$

亦称高斯(Gauss)分布

则称 X 服从参数为 μ,σ^2 的正态分布

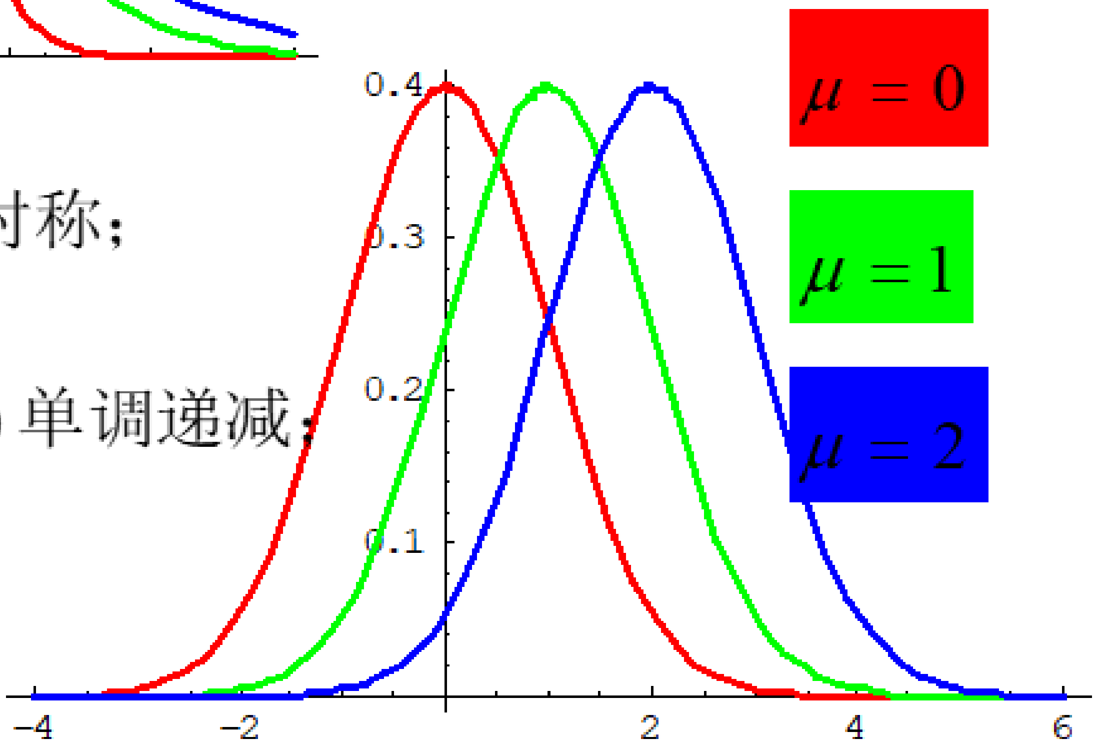
记作 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$



1. $f(x)$关于$x=\mu$对称；

2. 当$x\geq\mu$时，$f(x)$单调递减；

3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$；



$f(x)$ 的性质：

1、图形关于直线 $x=\mu$ 对称, 即

$$f(m+x) = f(m-x)$$

2、在 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

标准正态分布N (0,1）与查表方法

密度函数：

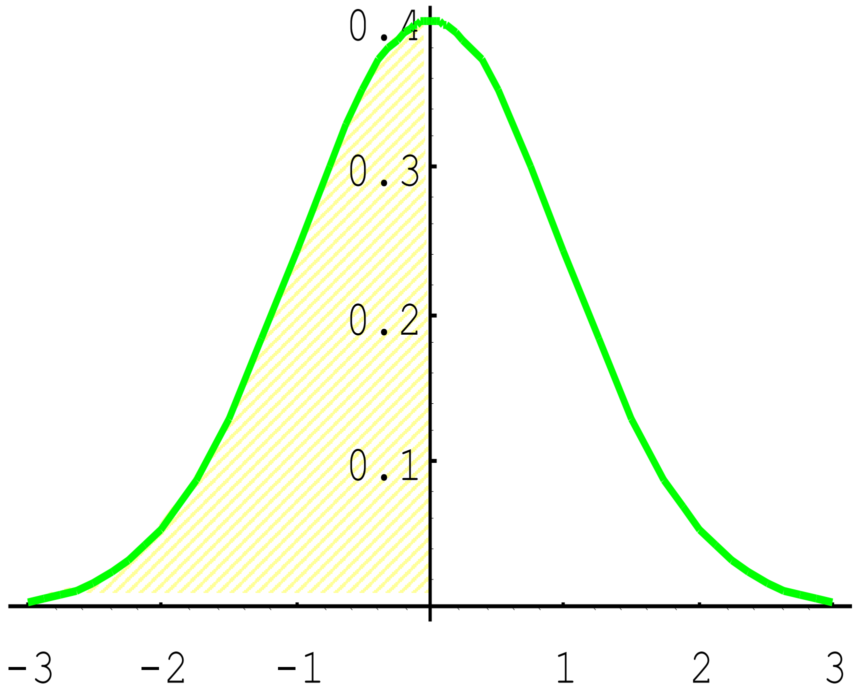
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad -\infty<x<+\infty$$

是偶函数。

分布函数记为

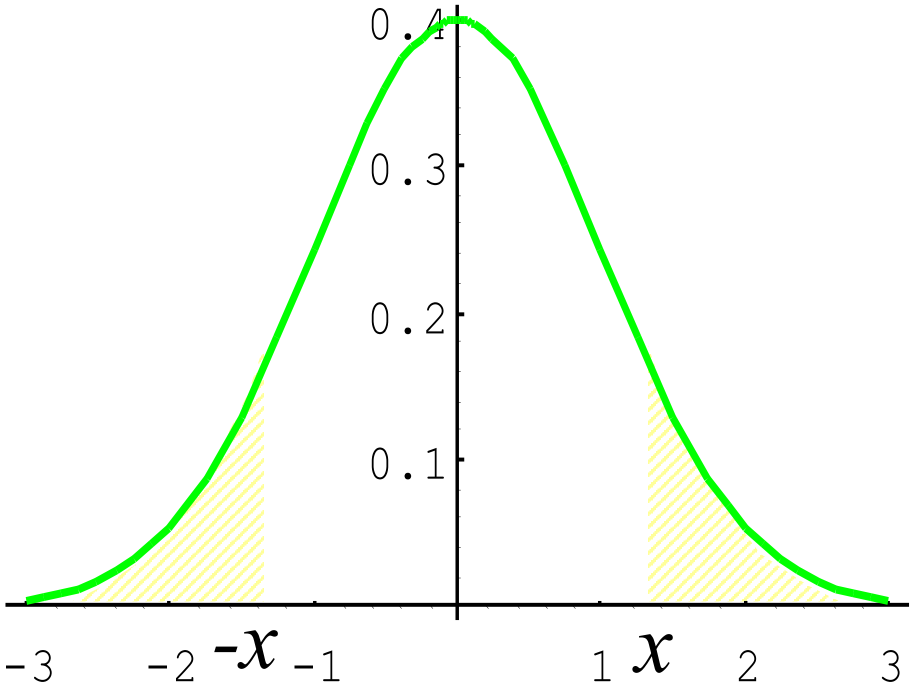
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\qquad -\infty<x<+\infty$$

其值有专门的表供查.



$$\Phi(0) = 0.5$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



$$P(|X| < a) = 2\Phi(a) - 1$$

对一般的正态分布：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

其分布函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t$$

做积分变换 $s = \dfrac{t-\mu}{\sigma}$，由于 t 的变化范围是$(-\infty, x]$，

s的变化范围是$(-\infty, \dfrac{x-\mu}{\sigma}]$。所以

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}} \sigma ds = \Phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma})$$

所以 $(a < b\text{时})$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

注意到 $\frac{X-\mu}{\sigma} \le y$ 等价于 $X \le \mu + \sigma y$

所以，由 $P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 得

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\right) = P(X \le \mu + \sigma y) = \Phi(y)$$

引理 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

补例、设 $X \sim N(1,4)$ ，求 $P(0 \le X \le 1.6)$

解

$$P(0 \le X \le 1.6) = \Phi\left(\frac{1.6-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-1}{2}\right)$$

$$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5)$$

$$= \Phi(0.3) - [1 - \Phi(0.5)]$$

P382 附表2

$$= 0.6179 - [1 - 0.6915]$$

$$= 0.3094$$

$$\Phi(0.335) = ? \qquad \Phi(0.578) = ?$$

$$\Phi(0.335) \approx \frac{\Phi(0.33) + \Phi(0.34)}{2}$$

$$\Phi(0.578) \approx \frac{\Phi(0.57) + \Phi(0.58)}{2}$$

例 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $P\{|X-\mu|<k\sigma)$

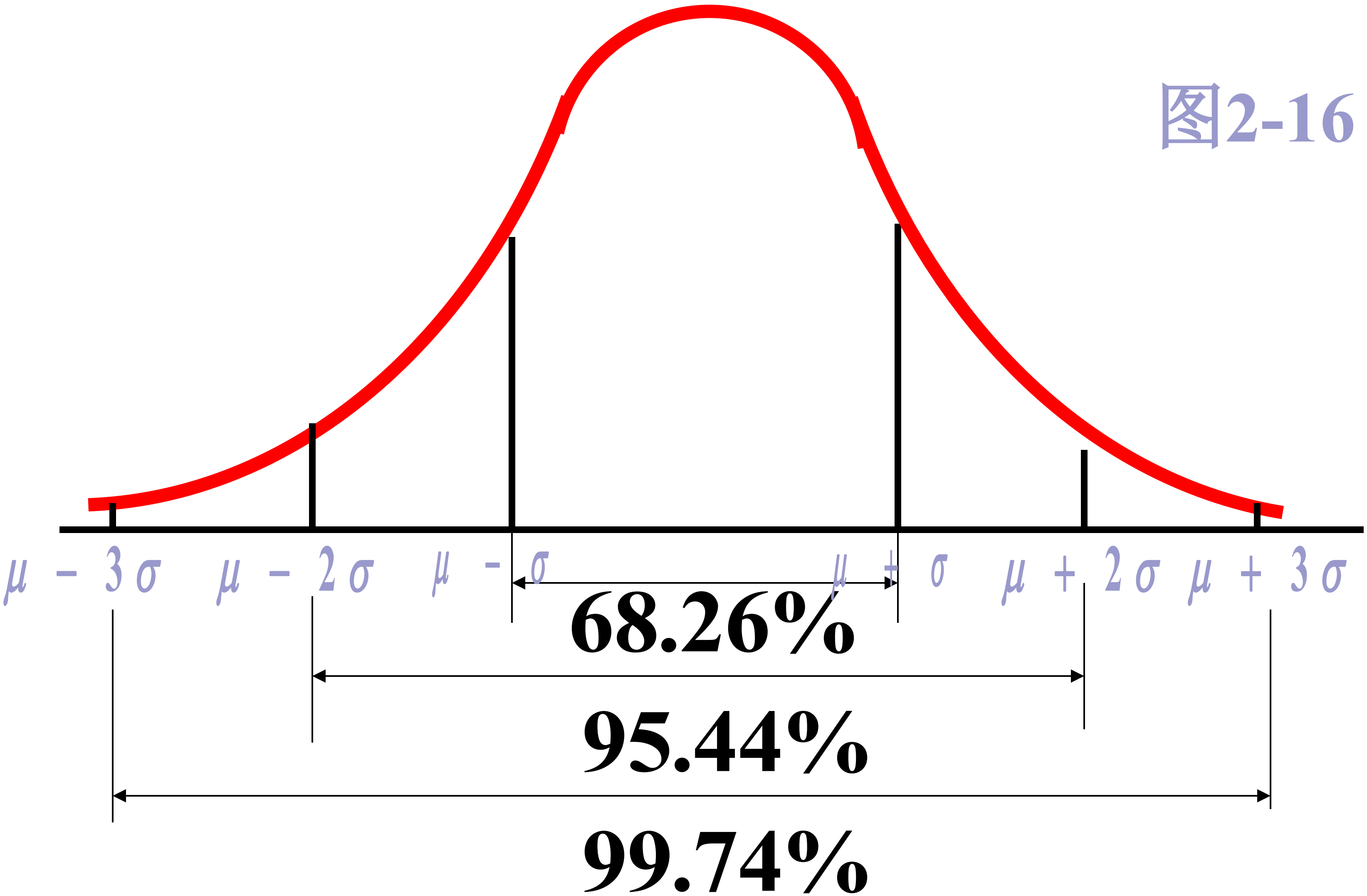
解

$$P\{|X-\mu|<k\sigma) = P\{-k\sigma+\mu<X<k\sigma+\mu\}$$

$$=\Phi(k)-\Phi(-k)$$

$$=\begin{cases} 0.6826, & k=1 \\ 0.9544, & k=2 \\ 0.9974, & k=3 \end{cases}$$

图2-16



正态分布的"3σ原则"

例3 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内。调节器整定在$d^\circ C$，液体的温度X(以$^\circ C$计) 是一个随机变量且$X \sim N\left(d, 0.5^2\right)$.

(1) 若$d = 90$，求小于89 度的概率.

(2) 若要求保持液体的温度至少为80 度的概率不低于0.99，问d 至少为多少?

解:(1) $P\{X < 89\}$ $= P\left\{\frac{X-90}{0.5} < \frac{89-90}{0.5}\right\}$ $= \Phi\left(\frac{89-90}{0.5}\right)$

$$= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

(2)按题意需求d 满足

$$0.99 \le P\{X \ge 80\} \quad = 1 - P\{X < 80\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) = \Phi\left(\frac{d-80}{0.5}\right)$$

即 $$\Phi\left(\frac{d-80}{0.5}\right) \ge 0.99 \approx \Phi(2.325)$$

亦即 $$\frac{d-80}{0.5} \ge 2.325$$

故需 $$d > 81.1625$$

作业：20，21(2)，23，26