

福建师范大学 数学与统计 学院

2024—2025 学年第一学期考试 B 卷

知明行笃



云 诚 收 广

专 业： 全校性专业 年 级： 2024 级

课程名称： 高等数学 A 任课教师： 蔡裕华等

试卷类别： 开卷（ ） 闭卷（√） 考试用时： 120 分钟

考试时间： 2025 年 1 月 2 日 上 午 9 点 00 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									
考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效。 2. 答题要写清题号，不必抄原题。 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交。								

重排版：Github@Xuuyuan
欢迎了解WeFJNU项目（<https://wefjnu.nekoark.com>）！

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)$ 有原函数，则 $f(x)$ 的任意两条不同积分曲线在相同横坐标下所对应的点上的切线（ ）.

- A. 相互垂直
B. 平行 x 轴
C. 相互平行
D. 平行 y 轴

2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}})$ 利用定积分可表示为（ ）.

- A. $\int_0^1 e^x dx$
B. $\int_0^1 x e^x dx$
C. $\int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx$
D. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} dx$

3. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的偶函数且存在一个原函数 $F(x)$ ，则（ ）.

- A. $F(x) = F(-x)$
B. $F(x) = F(-x) + c$
C. $F(x) = -F(-x)$
D. $F(x) = -F(-x) + c$

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界， $\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（ ）.

- A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛
D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

5. 下列反常积分中收敛的是（ ）.

- A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$
C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$
D. $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2+2x}$ 的无穷间断点个数为_____.

2. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点为_____.

3. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$ ，则 $f'(x) =$ _____.

4. 设函数 $f(x)$ 可导且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} = -1$ ，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极_____值.

5. 根据定积分的几何意义 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx =$ _____.

三、(8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - \cos t) dt}{\int_0^x t(e^t - 1) dt}$.

四、(8 分) 求 $y = (\arctan \sqrt{1+x})^2$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

五、(8 分) 求不定积分 $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$.

六、(8 分) 求定积分 $\int_1^e \sin(\ln x) dx$.

七、(10 分) 判断曲线 $y = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}$ 是否存在斜渐近线, 若有, 请求出斜渐近线方程.

八、(10 分) 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x(1+ax) = 1+bx^2+o(x^2)$, 求常数 a 和 b .

九、(10 分) 证明曲线 $y = \ln x$ 与直线 $y = \frac{x}{e} - 1$ 有且仅有两个交点.

十、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_\xi^b f(x) dx.$$