福建师范大学（公共课） 数信 学院

2019 — 2020 学年第 二 学期 C 卷

知明行笃 立诚致广

专　业：全校各专业　　　　年　级：2018 级等

课程名称：线性代数　　　　任课教师：李德梅等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　　　考试用时：120 分钟

考试时间：2020 年____月___日 上 午____点_____分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

考生信息栏　学院________ 系________ 专业________ 年级________ 姓名________ 学号________

装　订　线

一. 单项选择题（1~12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 设 A,B 为 n 阶方阵，且满足等式 $AB=E$，则必有（　　）

A. $A=E$或$B=E$;　　　　B. $BA=E$;

C. $|A|=1$或$|B|=1$;　　　　D. $R(A)<n$.

2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=b$ 有解，则必有（　　）

A. $R(A)=n$；　　　　B. $R(A)<R(A,b)$；

C. $R(A)=R(A,b)$;　　　　D. $R(A)<n$.

3. 设 A,B 为 n 阶方阵，若 $R(A)=3$ 且齐次线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，则 $R(AB)=$（　　）

A. 3；　　B. n；　　C. $n-1$；　　D. 0.

4. 若向量 $b=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 不能由向量组 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}$ 线性表示，则 $a=$（　　）

A. -1；　　B. 3；　　C. -1或 3；　　D. 0.

5. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一个基，则下面向量组也是$R^3$的一个基的是（　　）

A. $\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_1-3\alpha_2$;　　B. $\alpha_1-2\alpha_2,2\alpha_2-3\alpha_3,3\alpha_3-\alpha_1$;

C. $0,\alpha_1,\alpha_2$;　　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3$.

6. 已知四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，若η_1,η_2是它的两个不同的解向量，则该方程组的通解为（　　）

A. $k_1\eta_1+k_2\eta_2$，k_1,k_2为任意数；　　B. $k\eta_1+\left(\eta_1-\eta_2\right)$，$k$为任意数；

C. $\eta_1+k\left(\eta_2-\eta_1\right)$，$k$为任意数；　　D. $2\eta_1+k\left(\eta_2-\eta_1\right)$，$k$为任意数

7. 设$p=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&a&1\\3&b&-1\end{pmatrix}$的一个特征向量，则$a+b=$（　　）

A. -4;　B. -3;　C. -7;　D. -1.

8. 下列矩阵为正定矩阵的是（　　）

A. $\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$；　B. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}$；　C. $\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$；　D. $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

9. 设 3 阶实对称矩阵A的全部特征值为 0, 2, 2，则齐次线性方程组$\left(A-2E\right)x=0$的基础解系所含解向量的个数为（　　）

A. 0；　B. 1；　C. 2；　D. 3.

10. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$可对角化，则$a=$（　　）

A. 0；　B. 1；　C. 2；　D. 3.

11. 设向量$\alpha=(0,1,1)^T,\beta=\left(-2,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)^T$，则向量$\alpha$与向量$\beta$的夹角为（　　）

A. 0；　B. $\frac{\pi}{4}$；　C. $\frac{\pi}{3}$；　D. $\frac{\pi}{2}$.

12. 设 3 阶实对称矩阵A的全部特征值为$-1,1,2$，则实二次型$f(x)=x^TAx$的规范形可以是（　　）

A. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$;　B. $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$;　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$;　D. $-y_1^2+y_2^2+2y_3^2$.

二. 判断题（ 1~12 小题，每小题 2 分，共 24 分）

1. 三阶行列式$\left|E(2(-2))\right|=-2$.（　　）

2. 设n阶方阵A和B都是不可逆矩阵，则矩阵$A+B$也一定是不可逆矩阵.（　　）

3. 设A为 3 阶方阵且$|A|=2$，则$\left|-2A^{-1}\right|=-4$.（　　）

4. 非零向量组的最大无关组一定是唯一的.（　　）

5. 三元二次型$f(x)=x^T\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&-5&6\\-7&8&9\end{pmatrix}x$的矩阵是$\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&-5&6\\-7&8&9\end{pmatrix}$.（　　）

6. 设n阶方阵A和B等价，则$|A|=|B|$.（　　）

7. 设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，若$R(A)=R(B)$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$等价.（　　）

8. 设矩阵$A_{4\times3}$的列向量组线性相关，则$R(A)=2$.（　　）

9. 设向量组$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T,\beta=(3,2,1)^T$，则向量$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示式唯一.（　　）

10. 设n阶方阵A的列向量组是一个正交向量组，则矩阵A为正交矩阵.（　　）

11. 设p为n阶方阵A对应于特征值λ的特征向量，则$-2p$为方阵A对应于特征值-2λ的特征向量.（　　）

12. 设n阶方阵A和B相似，则方阵A和B相似于同一个对角矩阵.（　　）

以下题答题均要求写出证明过程或演算步骤.

三.（12 分）问a取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3=3\\x_1+ax_2-2x_3=0\end{cases}$有唯一解、无解或有无穷多解？在有无穷多解时求出通解(**要求用其特解及对应的齐次线性方程组的基础解系表示**).

四．（12 分）设向量组 $\alpha_1=\left(0,0,1\right)^T,\alpha_2=\left(0,1,1\right)^T,\alpha_3=\left(1,1,1\right)^T$ 和 $\beta_1=\left(-1,2,2\right)^T$，$\beta_2=\left(2,2,-1\right)^T,\beta_3=\left(-2,1,-2\right)^T$ 是 3 维向量空间 R^3 的两个基.

（1）求基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵；

（2）设向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中的坐标为 1,1,1，求向量 γ 在基 β_1,β_2,β_3 中的坐标.

五.（16 分）设三元二次型 $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

（1）写出二次型 f 的矩阵 A 并求矩阵 A 的全部特征值和特征向量；

(2)求一个**正交变换** $x=Py$ 把二次型 $f(x)$ 化为标准形，并写出相应的**标准形**；

（3）证明：实矩阵 $A+2E$ 为正定矩阵.