2023— 2024 第二学期《高等数学 B》期末

试题(A)答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．微分方程 $y''+25y=x\sin 5x$ 的一个特解形式（其中 a,b,c,d 为常数）（ B ）.

A．$y=x(ax+b)\sin 5x$　　B．$y=x[(ax+b)\cos 5x+(cx+d)\sin 5x]$

C．$y=(ax+b)\sin 5x$　　D．$y=(ax+b)\cos 5x+(cx+d)\sin 5x$

2．方程 $x^2+y^2-z^2-4y+4z=0$ 表示的二次曲面是（ D ）.

A. 球面　B. 旋转抛物面　C. 椭圆锥面　D. 圆锥面

3．若偏导数 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，则点 (x_0,y_0) 必为 $f(x,y)$ 的（C）.

A. 极值点　B. 连续点　C. 驻点　D. 零点

4．改变积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x=$（ A ）

A. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_0^x \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　D. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

5．在 $(-1,3)$ 内，将函数 $\dfrac{1}{x+1}$ 展开成关于 $x-1$ 的幂级数为（ D ）.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$

C. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n$　　D. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$

二、填空(每小题 3 分，共 15 分)

1．点 $(3,2,2)$ 到平面 $x+2y-2z=0$ 的距离=___1___.

2．微分方程 $y''=\sin x$ 的通解___ $y=-\sin x+C_1x+C_2$ ___.

3．$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=$___0___.

4. 将$\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$化为极坐标累次积分为$\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2 d\rho}$.

5．设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}(u_n+2024)=$____2024_______.

三、（8 分） 求微分方程$yy''+(y')^2-1=0$满足初值条件$y(0)=1, y'(0)=\sqrt{2}$的特解.

解：原方程变形为$(yy')'=1$

$\therefore yy'=C_1+x$ -----------4 分

将$y(0)=1, y'(0)=\sqrt{2}$代入上式得$C_1=\sqrt{2}$

于是有$ydy=(\sqrt{2}+x)dx$

两边积分得$\frac{1}{2}y^2=\sqrt{2}x+\frac{1}{2}x^2+C_2$

再将$y(0)=1$代入上式得$C_2=\frac{1}{2}$

故其特解为$y^2=x^2+2\sqrt{2}x+1$ -----------8 分

四、（8 分） 设$z=xf(x,\frac{x}{y})$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'+f_2'\frac{x}{y},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}f_2'$ ————————————4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2'+x(-\frac{x}{y^2})f_{12}''+\frac{x}{y}(-\frac{x}{y^2})f_{22}''-\frac{x}{y^2}f_2'=-\frac{2x}{y^2}f_2'-\frac{x^2}{y^2}f_{12}''-\frac{x^2}{y^3}f_{22}''$$

————8 分

五、（8 分） 计算二重积分$\iint_D e^{x+y}dxdy$，其中$D=\{(x,y):|x|\le 1,|y|\le 1\}$.

解：

$$\iint_D e^{x+y}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}e^{x+y}dy$$ ------4 分

$$=\int_{-1}^{1}e^x dx\int_{-1}^{1}e^y dy=e^x\Big|_{-1}^{1}\cdot e^y\Big|_{-1}^{1}=(e-\frac{1}{e})^2$$ ------8 分

六、(8 分) 已知曲面$x^2-y^2-3z=0$，求经过点$A(0,0,-1)$且与直线$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$平

行的切平面方程.

解 设$F(x,y,z)=x^2-y^2-3z$,则$F_x=2x,\ F_y=-2y,\ F_z=-3$,

曲面在切点(x_0,y_0,z_0)的法线向量为$\vec{n}=(2x_0,\ -2y_0,-3)$，切平面方程为:

$$2x_0x-2y_0y-3(z+1)=0 \text{ ---------------------------2 分}$$

由于切点(x_0,y_0,z_0)在切平面上，所以$2{x_0}^2-2{y_0}^2-3(z_0+1)=0$

由于切点(x_0,y_0,z_0)在曲面上，所以${x_0}^2-{y_0}^2-3z_0=0$

即$z_0=1$,

再由切平面与直线$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$平行得

$$(2x_0,-2y_0,-3)\cdot(2,1,2)=4x_0-2y_0-6=0$$

将其代入原曲面方程,求得切点为$(2,1,1)$ --------------------------6 分

因而,所求的切平面方程为:

$4x-2y-3z-3=0.$ ---------------------------8 分

七、(8 分) 判别$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln\frac{n+2}{n+1}$的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛.

解：$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln\frac{n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\ln(1+\frac{1}{n+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2} \quad \text{---6 分}$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln\frac{n+2}{n+1}$绝对收敛

-----8 分

八、(10 分) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}x^{n-1}$的和函数，并给出收敛域;

解：当 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3$，

$x=3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n+1}}x^{n-1}$ 发散，

当 $x=-3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n+1}}x^{n-1}$ 发散，

收敛域为 $(-3,3)$ --------------4 分

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{n+1}}x^{n-1}, x\in(-3,3)$ ，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(x^n)'=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\right)'$$ ------------------8 分

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}\right)'=\frac{1}{(3-x)^2}$$ ------------------10 分

九、(10 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，

（1） 求 $f_x(0,0), f_y(0,0)$.

（2） 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

（3） 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

解： （1） $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0$

----------4 分

（2） 当点 $P(x,y)$ 沿抛物线 $x=ky^2$ 趋于点（0，0）时，有 $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=ky^2\to 0}}\dfrac{2y^2\cdot ky^2}{y^4+k^2y^4}=\dfrac{2k}{1+k^2}$，

显然其极限随着 k 值的不同而改变，因此 $f(x,y)$ 在（0，0）处不连续. ------8 分

（3）由 $f(x,y)$ 在（0，0）处不连续得 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.----------10 分

十、(10 分) 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在有界闭区域 $x^2+2xy+3y^2\le 4$ 的最值.

解：由函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在有界闭区域 $x^2+2xy+3y^2\le 4$ 上连续，一定有最值.

当 $x^2+2xy+3y^2<4$ 时，令 $f_x=f_y=0$，得到 $x=y=0$

$f(0,0)=0$ --2 分

当 $x^2+2xy+3y^2=4$ 时，令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(x^2+2xy+3y^2-4)$

由 $F_x=F_y=F_\lambda=0$，得到 $\begin{cases}2x+\lambda(2x+2y)=0\\4y+\lambda(2x+6y)=0\\x^2+2xy+3y^2=4\end{cases}$ --------------------------------------6 分

因此，$\begin{cases}x^2+xy-2y^2=0\\x^2+2xy+3y^2=4\end{cases}$， $x=y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，或者 $x=-2y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$f(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}},\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}})=2, f(\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}},\mp\dfrac{2}{\sqrt{3}})=8$

综上， $x=y=0$ 时， $f(x,y)$ 取得最小值 0,

$x=-2y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 时， $f(x,y)$ 取得最大值 8 ----------------------10 分