18-19-1 概率论与数理统计期末试卷 B 答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、甲、乙、丙三人各射击一次，A、B、C 分别表示甲、乙、丙击中，则事件“三人中至多有两人击中”可表示为（　　）　A

A、$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；　　　　B、$\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$；

C、$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}$；　　　　D、$\overline{A\cup B\cup C}$。

2、一篮球运动员的投篮命中率为 0.5，以 $\boldsymbol{X}$ 表示他首次投中为止累计已投篮的次数，记 $\boldsymbol{p}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 取偶数的概率，则　　（　　）B

A、$\boldsymbol{p}=0.5$；　　　　B、$\boldsymbol{p}=\frac{1}{3}$；

C、$\boldsymbol{p}=\frac{2}{3}$；　　　　D、以上答案都不对。

3、设随机变量X和Y的方差存在且不等于0，则$D(X+Y)=DX+DY$是X和Y的（）C

A、不相关的充分条件，但不是必要条件；　　C、不相关的充要条件

B、独立的充分条件，但不是必要条件；　　D、独立的充要条件

4、设总体 X 的期望和方差分别为 μ 和 σ^2，$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为其样本，$n>1$，$\bar{X}$ 为样本均值，则对 μ 估计时，下列说法正确的是（　）A

A、$\bar{X}$ 比 $\frac{X_1+\bar{X}}{2}$ 更有效;　　　　B、$\frac{X_1+\bar{X}}{2}$ 不是无偏的;

C、$\frac{X_1+\bar{X}}{2}$ 是一致估计;　　　　D、$\frac{X_1+\bar{X}}{2}$ 比 $\bar{X}$ 更有效.

5、在假设检验中，显著性水平 α 的意义是（　　）A

（A）在 H_0 成立的条件下，　经检验 H_0 被拒绝的概率不超过 α；

（B）在 H_0 成立的条件下，　经检验 H_0 被接受的概率不超过 α；

（C）在 H_0 不成立的条件下，经检验 H_0 被拒绝的概率不超过 α；

（D）在 H_0 不成立的条件下，经检验 H_0 被接受的概率不超过 α。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6、袋子中装有 10 个白球和 20 个红球，每次从中不放回的任取一个球，则第 6 次取到红球的概率为__________。 $\frac{2}{3}$

7、如果______________________________________，则称随机变量 X 为连续型随机变量。

如果存在非负函数 $f(x)$ 使得对一切实数 x 都有 $P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

8、已知随机变量 $X \sim N\left(-2, \frac{1}{4}\right)$，$Y \sim N(3, 1)$，且 X 和 Y 相互独立，设随机变量 $Z = 2X - 3Y + 10$，则 $Z \sim$ ____________________ 。 $Z \sim N(-3,10)$

9、已知随机变量 X 服从二项分布，且 $EX = 2.4$，$DX = 1.44$，则二项分布的参数 n，p 的值分别为____________________ 。 n=6, p=0.4

10、设总体 X 的期望和方差分别为 μ 和 σ^2，$X_1, X_2 \cdots, X_n$ 为其样本，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，$(\bar{X})^2 - cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计，则 $c =$_____。 $\frac{1}{n}$

三、计算题（共 60 分）

11、（10 分）在一批同一规格的产品中，甲、乙两厂生产的产品分别占 30%和 70%，合格率分别为 98%，90%。今有一顾客买了一件产品，（1）求该顾客买到的产品为次品的概率；(2) 若已知该顾客买到的产品为次品，求这件产品是甲厂生产的概率。

解： A_1, A_2 分别表示产品是甲、乙厂生产的，B 表示顾客买到的产品为次品，

$P(A_1)=0.3$，$P(A_2)=0.7$，$P(B|A_1)=0.02$，$P(B|A_2)=0.1$， ……2 分

(1) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

$=0.3\times0.02+0.7\times0.1=0.076$ ………6 分

(2) $P(A_1 | B) = \dfrac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(B)} = \dfrac{0.3\times0.02}{0.076} = \dfrac{3}{38}$ ………10 分

12、（10 分）设某种型号器件的寿命 X（单位是小时）具有如下的概率密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1500}{x^2}, & x > 1500 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

现有一大批此种器件（设器件损坏与否相互独立）。任取 10 只，记其中的寿命小于

2000 小时的产品数为$\boldsymbol{Y}$，求$\boldsymbol{Y}$ 的概率分布律。

解：记 $\boldsymbol{p}$ 为任取一件产品其寿命小于 2000 小时的概率，则

$$\boldsymbol{p}=\int_{1500}^{2000}\frac{1500}{\boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{dx}=-\frac{1500}{\boldsymbol{x}}\bigg|_{1500}^{2000}=\frac{1}{4}\qquad（5 分）$$

由于是一大批此种器件且设器件损坏与否相互独立，故$\boldsymbol{Y\sim b(10,\ 0.25)}$，即

$$\boldsymbol{P(Y=k)=C_{10}^{k}0.25^{k}(1-0.25)^{10-k}\quad k=0,1,\cdots,10}\qquad（10 分）$$

13、（10 分）设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它\end{cases},$$

（1）求(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$；

（2）求$P(Y\geq X)$。

解：（1） $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 2e^{-(2x+y)}dxdy, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad（6 分）$$

(2)

$$P(Y\geq X)=\int_0^{+\infty}\int_0^{y}2e^{-(2x+y)}dxdy=\frac{2}{3}\qquad（10 分）$$

14、（10 分）甲乙两人约定某日 8 点到 9 点在公园门口会面，他们两人去公园的行为是相互独立的，且在这一小时内的任意时刻到达公园是等可能的。

（a）如果约定先到者等候另一个人 15 分钟，过时即离去，求两人能会面的概率

（b）如果约定相互一直等到会面为止，求两人平均等待了多少时间？

解：设甲、乙在 8 点到 9 点内到达公园门口的时刻分别为X，Y，为方便起见，我们

归一化X，Y的取值：如果甲 8 点 t 分（$0\leq t\leq 60$）到达公园门口，此时记X的取值

为$x=\frac{t}{60}$，对Y的取值同样处理. 则依题意X，Y相互独立且均服从[0,1] 上的均匀

分布，所以(X，Y)的联合概率密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}1, & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & 其他\end{cases},\qquad （5 分）$$

所以两人能会面的概率为

$$P\left(|X-Y| \le \frac{1}{4}\right)=\iint_{|X-Y|\le\frac{1}{4}} f(x,y)dxdy = 1-2*\frac{1}{2}*\frac{3}{4}*\frac{3}{4}=\frac{7}{16} \qquad （8 分）$$

两人平均等待时间

$$E(|X-Y|)=\int_0^1\int_0^1 |x-y| dxdy=\frac{1}{3} \qquad （10 分）$$

15、（10 分）设随机变量(X,Y)的分布律为

Y \ X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

试判断X与Y是否相互独立？，是否不相关？

解：$P\{X=-1\}=P\{X=1\}=3/8$，$P\{X=0\}=2/8$； （2 分）

$P\{Y=-1\}=P\{Y=1\}=3/8$，$P\{Y=0\}=2/8$； （4 分）

$P\{X=0,Y=0\}=0\ne P\{X=0\}P\{Y=0\}$， （6 分）

所以X与Y不是相互独立的；但是， （7 分）

$E(X)=E(Y)=0$，$E(XY)=0$，$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，（9 分）

所以X与Y不相关。 （10 分）

16、（10 分）设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases};\quad \theta>-1$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的一个简单随机样本.（1）求未知参数θ的矩估计量；（2）求未知参数θ的最大似然估计量.

解：（1） $E(x)=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta}xdx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，　（2 分）

令$\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\bar{X}$，则得到$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{1}{1-\bar{X}}-2$.　（4 分）

（2）似然函数为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$，

对数似然函数为$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，　（7 分）

令$\dfrac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，

则得到θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$.　（10 分）

四、应用题（共 10 分）

17、（10 分）某冶炼厂生产的铅锭的标准重量是 450 公斤. 假定铅锭的重量服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$. 某天开始生产后， 抽取 9 个铅锭测得实际重量，经计算得到

$$\bar{x}=450.9,\quad s_n^2=3.446012^2;$$

试问试问该日铅锭的平均重量是否正常？（取显著性水平$\alpha=0.05$，已知$t_{0.025}(8)=2.306$）。

解：要检验的假设是$\mathrm{H}_0:\mu=450,\quad \mathrm{H}_1:\mu\neq450$　（2 分）

在H_0为真时，检验统计量　（5 分）

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_n}\sqrt{n}\sim t(n-1)$$

则拒绝域为$W=\{|T|>t_{\alpha/2}(8)=2.306\}$。由于　（8 分）

$$t=\frac{\bar{x}-450}{S_n}\sqrt{n}=\frac{0.9\sqrt{9}}{3.446012}=0.7835$$

没有落在拒绝域内，不拒绝原假设。即可以认为该日生产的铅锭的平均重量正常。　（10 分）