第七章 参数估计

§7. 1 点估计

例1 在某厂一天中发生着火现象的次数 X 是一个随机变量，假设它服从以 $\lambda>0$ 为参数的泊松分布。参数 λ 未知.现有以下的样本值,试估计参数 λ 。

着火次数 k	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7	
k 次着火的天数 n_k	75	90	54	22	6	2	1	0	$\sum = 250$

解：因为$X \sim \pi(\lambda)$，所以$\lambda = E(X)$。用样本均值来估计总体的均值$E(X)$。现由已知数据计算得到

$$\bar{x} = \frac{1}{250}[0\times 75 + 1\times 90 + 2\times 54 + 3\times 22$$

$$+ 4\times 6 + 5\times 2 + 6\times 1] = 1.22$$

得$E(X) = \lambda$的估计为1.22.

点估计

设总体X的分布类型已知, θ 是其中的一个未知参数。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是X 的一个样本，构造一个适当的统计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，用它的观察值$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$作为未知参数$\theta$ 的取值。就称$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为$\theta$ 的估计量, 称$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$\theta$ 的估计值.

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$也简记为$\hat{\theta}$

例如，在例1 中，用样本均值来估计总体均值。即有估计量

$$\hat{\lambda} = E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad （n = 250）$$

估计值是 $$\hat{\lambda} = E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 1.22$$

问题：为什么要用这样的估计量呢？其他总体中的参数又怎么办呢？

（一）矩估计法

替换原理：由大数定律知道，当样本容量越来越大时，样本均值会越来越靠近总体均值。

我们用样本均值来作为总体均值的近似——称为估计

$X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k$ 也是X^k 的简单随机样本，因此

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \text{也会越来越靠近} EX^k.$$

我们用样本矩来作为总体矩的估计——称为**矩估计法**

但是，有些参数不是总体矩，怎么办呢？

设$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 为总体 X 分布中的待估参数，X_1，$X_2,\cdots,X_n$ 是来自X的样本。假设总体X的前 k 阶矩 $\mu_j=E(X^j)$ 存在（它们是$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$的函数）

1、考虑关于未知数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的方程（组）

$$\begin{cases} \mu_1=\mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \mu_2=\mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \qquad\vdots \\ \mu_k=\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \end{cases}$$

2、如果关于未知数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$的这个方程（组）有唯一解：

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \\ \theta_2 = \theta_2(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \\ \qquad\vdots \\ \theta_k = \theta_k(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \end{cases}$$

以样本矩A_i分别代替上式中的$\mu_i, i=1,2,\cdots,k$。

称 $\hat{\theta}_i = \theta_i(A_1,A_2,\cdots,A_k)$（$i=1,2,\cdots,k$）分别为$\theta_i$（$i=1,2,\cdots,k$）的矩法估计量,或矩估计量。

注意：

1、方程个数一定要等于未知参数个数。

2、一般来说，只有当方程（组）有唯一解的时候，才用矩法。

3、因为我们是用样本矩替换总体矩得到的估计，故不能把求出的估计当作参数的解。

例2　设总体X在$[a,b]$上服从均匀分布，a，b未知。$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本，试求a，b的矩估计量。

解: $\mu_1 = E(X) = (a+b)/2$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$

$$= (b-a)^2/12 + (a+b)^2/4$$

由$a < b$得 $\begin{cases} a+b = 2\mu_1, \\ b-a = \sqrt{12(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases}$

解之得
$$\begin{cases} b = \mu_1 + \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \\ a = \mu_1 - \sqrt{3(\mu_2 - \mu_1^2)} \end{cases}$$

因为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

用样本的一、二阶矩代替总体的一、二阶矩得，所求矩法估计为

$$\hat{a} = A_1 - \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \overline{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

$$\hat{b} = A_1 + \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \overline{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

例3　设总体X的均值μ及方差σ^2都存在，且有$\sigma^2>0$，但μ，σ^2均为未知。又设X_1，$X_2,\cdots,X_n$是来自X的样本，试求μ，σ^2的矩估计量。

$$\text{解}:\begin{cases}\mu_1=E(X)=\mu\\ \mu_2=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2\end{cases}$$

$$\text{解得}\quad\begin{cases}\mu=\mu_1\\ \sigma^2=\mu_2-\mu_1^2\end{cases}$$

分别以A_1，A_2代替μ_1，μ_2 得μ 和σ^2的矩估计量分别为

$$\hat{\mu} = A_1 = \overline{X},$$

$$\sigma^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2。$$

特别，若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2未知，则μ,σ^2的矩估计量为

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

不是样本方差

求矩法估计的步骤:

1. 确定所有参数： $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$。然后求出 1 至 k 阶原点矩。

2. 解关于未知数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$的方程（组）：

$$\begin{cases} \mu_1=\mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \mu_2=\mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \qquad\vdots \\ \mu_k=\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \end{cases}$$

3. 如果有唯一解 $\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) \\ \theta_2 = \theta_2(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) \\ \quad \vdots \\ \theta_k = \theta_k(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) \end{cases}$

就用样本矩代替上述表达式中的总体矩得到矩估计

$$\hat{\theta}_i = \theta_i(A_1, A_2, \cdots, A_k) \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

10月31日

作业：176页 2