§ 7.3 估计量的评选标准

（一）无偏性

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体X的一个样本.

$\theta \in \Theta$是包含在总体X的分布中的待估参数,这里Θ是θ的取值范围.

设$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$\theta$的估计，如果

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量.

例,设总体X的均值μ,方差$\sigma^2>0$均未知，则

$$E(\overline{X})=\mu, \qquad E(S^2)=\sigma^2$$

即不论总体服从什么分布,样本均值$\overline{X}$是总体均值μ的无偏估计;样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

是总体方差的无偏估计。而σ^2的矩估计量 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

却不是σ^2的无偏估计。所以，一般取S^2作为σ^2的估计量

11月4日

例1 设总体X的k阶矩 $\mu_k = E(X^k)(k \geq 1)$ 存在, 又设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是X的一个样本. 则不论总体服从什么分布, k阶样本矩

$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$是$k$阶总体矩 μ_k 的无偏估计量.

例2 设总体X服从指数分布,其概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, \qquad\qquad 其它\end{cases}$$

其中参数$\theta>0$为未知,又设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本,试证$\overline{X}$和$nZ=n[\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)]$都是$\theta$的无偏估计量.

解：由指数分布的数学期望计算结果知道

$\bar{X}$是θ的无偏估计量

下面计算Z的分布和期望。

当$z \le 0$时，$P(nZ \le z) = 0$. 当$z > 0$时，

$$P(nZ \le z) = 1 - P(nZ > z) = 1 - \mathrm{P}(X_1 > \mathrm{z/n}, X_2 > \mathrm{z/n}, \cdots, X_n > \mathrm{z/n})$$

$$= 1 - \mathrm{P}(X_1 > \mathrm{z/n})\mathrm{P}(X_2 > \mathrm{z/n}) \cdots \mathrm{P}(X_n > \mathrm{z/n}) = 1 - [\mathrm{P}(X_1 > \mathrm{z/n})]^n = 1 - e^{-z/\theta}$$

所以，$$f_{nZ}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-z/\theta}, z > 0 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

所以Z服从指数分布。所以$E(nZ) = \int_0^{+\infty} \frac{z}{\theta} e^{-z/\theta} dz = \theta.$

类似地，我们可以得到如下的结果：

记$Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则

$$P(Y\le y)=P(X_1\le y,X_2\le y,\cdots,X_n\le y)$$

$=P(X_1\le y)P(X_2\le y)\cdots P(X_n\le y)$（因为$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立）

$=[P(X_1\le y)]^n$ （因为$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 同分布）

$=[F(y)]^n$

所以

$$f_Y(y)=n[F(y)]^{n-1}f(y).$$

最后分别代入$F(y)$，$f(y)$ 的表达式即可得Y 的密度。

记$\tilde{Y}=[\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)]$，则

$$P(\tilde{Y}\le y)=1-P(\tilde{Y}>y)=1-P(X_1>y,X_2>y,\cdots,X_n>y)$$

$$=1-P(X_1>y)P(X_2>y)\cdots P(X_n>y)$$

$=1-[P(X_1>y)]^n$ （因为$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布）

$$=1-[1-P(X_1\le y)]^n \quad =1-[1-F(y)]^n$$

所以

$$f_{\tilde{Y}}(z)=n[1-F(y)]^{n-1}f(y)$$

最后分别代入$F(y)$，$f(y)$ 的表达式即可得$\tilde{Y}$ 的密度。

（二）有效性

设Θ是参数θ的取值范围（称为参数空间）

$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

都是θ的无偏估计量。若对于任意$\theta\in\Theta$有

$$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$$

且至少对于某一个$\theta\in\Theta$上式中的不等号成立

则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效.

例3(续例2) 试证当$n>1$时,θ的无偏估计量$\overline{X}$较θ的无偏估计量nZ有效.

解：由指数分布的期望与方差知道

$$D(\overline{X})=D(X)/n=\theta^2/n$$

$$D(nZ)=D(X)=\theta^2>D(\overline{X})$$

所以，$\overline{X}$ 较 nZ 有效。

注意：

1、一般情况下，方差最小的无偏估计量不存在。

2、对于正态总体而言。样本均值是总体均值的方差最小的无偏估计量

（三）相合性（一致估计量）

设$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为参数$\theta$的估计量，

若$n \to \infty$时$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$依概率收敛

于θ，则称$\hat{\theta}$为θ的相合估计量。即：

对任意$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$$

则称$\hat{\theta}$是θ的相合估计量.

例,由第六章第2节知,样本$k(k \geq 1)$阶矩是总体X的k阶矩$\mu_k = E(X^k)$的相合估计量,

若待估参数$\theta = g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$，其中$g$为连续函数，则$\theta$的矩估计量

$$\hat{\theta} = g(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \cdots, \hat{\mu}_k) = g(A_1, A_2, \cdots, A_k)$$

是θ的相合估计量.

作业：177页，10