福建师范大学 数学与统计 学院

2021—2022 学年第 一 学期考试 B 卷

知明行笃 立诚致广

专　　业：全校性专业　　　　年　　级：2021 级

课程名称：高等数学 A（上）　　任课教师：杨文生等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2022 年 1 月 7 日 上 午 8 点____分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

考生信息栏

学院________ 系________ 专业________ 年级________ 姓名________ 学号________

装 订 线

2021—2022 学年第一学期《高等数学 A》（B）卷

答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（　B　）.

A．若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B．若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C．若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　D．若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的（ D ）.

A．左、右导数都不存在　　B．左导数存在，右导数不存在

C．左、右导数都存在　　D．左导数不存在，右导数存在

3. 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处（ A ）

A．取得极大值　　B．取得极小值　　C．无极值　　D．不一定有极值

4. 将 $\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2-1)(x+1)(x^2+1)}$ 拆分为部分分式之和，该和式的形式为（　D　）

A．$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x^2-1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$　　B．$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

C．$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}+\dfrac{D}{x^2+1}$　　D．$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+1}$

5. 设 $f(x)$ 满足等式 $f(x)=2x-3\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx$ =（　C　）.

A．1　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．0

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1．　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{x^2}=$___$-\dfrac{1}{2}$____.

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}(1+2t)^{\frac{x}{\sin t}}$. 当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=$ __ $2e^{2x}$ ___.

3. 曲线 $y=x^3-6x^2+9x+2$ 的拐点______ $(2,4)$ ________.

4. $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=$ __ $\arctan e^x+C$ ________.

5. $\int_{-2}^{2}\frac{x^2(1+x)+1}{x^2+1}dx=$ ____ 4 ______.

三、计算题(每题 8 分，共 40 分)

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2dt}{x^3+x^4}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2dt}{x^3+x^4}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{3x^2+4x^3}$ ------------4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}=\frac{1}{3}$$ ---------------8 分

2. 求 $y=\sqrt{x^2-x+1}$ 的斜渐近线.

解：（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

从而得到第一条斜渐近线： $y=x-\frac{1}{2}$.---------------------------4 分

（2） $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=-1,$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-(-)x=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}+x)(\sqrt{x^2-x+1}-x)}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\frac{1}{2}.$$

故有第二条斜渐近线： $y=-x+\dfrac{1}{2}$.————————————————————8 分

3\. 计算不定积分 $\int e^{\sqrt{2x+4}}dx$

解：令 $t=\sqrt{2x+4}$, 则 $x=\dfrac{t^2-4}{2}$, $dx=t\,d\,t$ ————————————2 分

原式 $=\int t\,e^t d\,t=\int t\,de^t=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+C$ ——————————7 分

$=(\sqrt{2x+4}-1)e^{\sqrt{2x+4}}+C$ ————————————————8 分

4\. 计算定积分 $\int_1^3|(x-1)(x-3)|\,dx$

解: 原式 $=-\int_1^3(x-1)(x-3)dx=-\int_1^3 x^2-4x+3dx$ ——————————4 分

$=-[\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x]_1^3=-[\dfrac{26}{3}-16+6]=\dfrac{4}{3}$——————————8 分

另解: 原式 $=-\int_1^3(x-1)(x-3)dx=-\int_{-1}^1(t+1)(t-1)dt=-2\int_0^1 t^2-1dt=\dfrac{4}{3}.$

5\. 求椭圆参数方程 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数和二阶导数.

解: $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=-\dfrac{b}{a}\dfrac{\cos t}{\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t,$————————————————4 分

$$y''(x)=\frac{(-\frac{b}{a}\cot t)'}{x'(t)}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{\cot' t}{(a\cos t)'}=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{-\csc^2 t}{\sin t}=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}.$$ -----------8 分

另解：$$y''(x)=\frac{(-\frac{b}{a}\frac{\cos t}{\sin t})'}{x'(t)}=-\frac{b}{a}\frac{(\frac{\cos t}{\sin t})'}{(a\cos t)'}=\frac{b}{a^2}\frac{(\frac{\cos t}{\sin t})'}{\sin t}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}.$$

四、 (10 分) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3+3x^2-2y^3-2=0$ 确定.

（1）求 $y'(x)$；

（2）求 $y(x)$ 的极值.

解：（1）根据隐函数求导法则，方程两边求关于 x 求一阶导数，化简得

$$x^2+2x-2y^2y'=0, \quad (*)$$

当 y=0时，代入原方程解得 $x_1=-1$，$x_2=-1+\sqrt{3}, x_3=-1-\sqrt{3}$. 函数 $y=y(x)$ 在这三个点的导数不存在；$y\neq 0$时，$y'=\frac{x^2+2x}{2y^2}$. ---------------------------4 分

（2） 注意到导函数 $y'=y'(x)$ 分别在点 x_1，x_2 和 x_3 的去心小邻域内符号恒定，故 x_1，x_2 和 x_3 都不是 $y(x)$ 的极值的极值点. $(*)$ 式两边关于 x 求导得

$$x+1+2y(y')^2-y^2y''=0. \quad (**)$$

令 $y'=0$ 解得 $x=0$ 或 $x=-2$. 代入原方程得 $y(0)=-1, y(-2)=1$.

将上述结果代入 $(**)$ 解得：$y''(0)=1>0, y''(-2)=-\frac{1}{4}<0$.

从而 $x=0$ 为 $y=y(x)$ 的极小值点，而 $x=-2$ 为 $y=y(x)$ 的极大值点. ------10 分

五、（12 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

（1）证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$,

（2）计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$

证明:（1）设 $x = \frac{\pi}{2} - t$ ，则 $dx = -dt,$ 且当 $x = 0$ 时， $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时， $t = 0$.

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(\frac{\pi}{2} - t)]dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ ———————————————6 分

（2） **方法一：** 由（1）可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sqrt{1 - \cos^2 x}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

从而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{4}.$$ ------------------12 分

方法二：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x+\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d(\sin x+\cos x)=\frac{\pi}{4}.$$

六、（8 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0,\quad f(1)=1$.

证明（1）存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\alpha,\beta\in(0,1)$，使得 $f'(\alpha)\ f'(\beta)=1$.

证明： （1）设 $F(x)=f(x)+x-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$F(0)=f(0)-1=-1<0,\quad F(1)=f(1)=1>0$. 由连续函数的零点存在性定理可知：

存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$. 即 $f(\xi)=1-\xi$. ----------------4 分

（2）在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上，分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理得：

存在 $\alpha\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\alpha)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$;

存在 $\beta\in(\xi,1)$ 使得 $f'(\beta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}$.

此时，$f'(\alpha)f'(\beta)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-\xi}{\xi}\dfrac{\xi}{1-\xi}=1$. ----------------8 分