福建师范大学（公共课）数统学院

2024—2025学年第2学期期中考试卷

知明行笃　立诚致广

专　　业：全校各专业　　　　年　　级：23级、24级

课程名称：《线性代数》　　　　任课教师：李德梅、陈兰清等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　　　考试用时：120分钟

考试时间：2025年4月26日上午____点____分

一、单项选择题（每小题3分，共18分）

B　C　D　A　B　A

二、填空题（每小题3分，共18分）

-2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$

1

考生信息栏　学院________系________专业________年级________姓名________学号________

装　订　线

以下各解答题要求写出证明过程或演算步骤

三.$(14分)$

解：（1）$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-2\left(A_{11}+A_{12}+A_{13}\right)=-6$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x^4$

或$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & x & -x & -x^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & -x & -x^2+x \end{vmatrix}=x^4$

四. $(14分)$

解：（1） $\because AX+E=A^2+X$

$\therefore\left(A-E\right)X=(A-E)(A+E)$

$\because |A-E|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0,\ \therefore A-E$可逆.

$\therefore\ X=A+E=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

注意：这题可能会出现答案对，但过程错（比如：分配律用错，*A-E* 不同在左侧，没证 *A-E* 可逆等），

可酌情扣分。

(2) $\because (A, B)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&2&0&1&1\\1&0&2&1&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&2&0&1&1\\0&-1&1&0&0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1/2&1/2\\0&0&1&1/2&1/2\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&0\\1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}.$$

五. (12分)

解：(1) $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\-3&2&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

$$\varphi(\Lambda)=\mathrm{diag}(2,0,11)$$

(2) $\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&0\\6&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\-3&2&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-4&0\\12&-6&0\\0&0&11\end{pmatrix}$

六. (12分)

解：$\left(A,b\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r}\cdots\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得通解:

$$\begin{cases}x_1=x_3-2\\x_2=-2x_3+3\\x_3\text{为自由未知量}\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x_1=c-2\\x_2=-2c+3,\ c\text{为任意数}\\x_3=c\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},c\text{为任意数.}$$

（上述三种写法都给满分，没写自由未知量或任意数扣分，按中学方法求解不给分）

七. $\left(12\text{分}\right)$

证明：(1) 由$A^2-2A+4E=O$得

$$\frac{1}{7}(3E-A)(A+E)=E,$$

所以$A+E$可逆且$(A+E)^{-1}=\dfrac{1}{7}(3E-A)$.

(2) AA^T为m阶矩阵

$\because R(AA^T)\le R(A)\le n<m$，$\therefore \left|AA^T\right|=0$，$\therefore AA^T$不可逆.