福建师范大学（公共课）数统 学院

2025—2026学年第 1 学期 期中考 试卷

知明行笃 立诚致广

专　　业：全校各专业　　　　年　　级：全校各年级

课程名称：《线性代数》　　　　任课教师：唐嘉 等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　　　考试用时：120 分钟

考试时间：2025 年 11 月 29 日 上 午 9 点 00 分

题号	一	二	三							总得分
	1-6	7-12	13	14	15	16	17			
得分										

说明：试卷中的矩阵默认都是实矩阵

一. 单项选择题: 1~6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分.

1、设 A,B,C 都是 n 阶可逆矩阵，则必有（　C　）

（A）$(A+B)^{-1}C=A^{-1}C+B^{-1}C$；　　（B）$AB=BA$；

（C）$R(ABC)=R(BAC)$；　　（D）$ABC=E$.

2、以下说法正确的是（ D　）

（A）$A\neq B\Rightarrow |A|\neq|B|$；

（B）若 A,B 均为 n 阶对称矩阵，则 AB 也为对称矩阵；

（C）$|AB|=|A||B|$；

（D）若 A,E 均为 n 阶方阵，则 $R(E,A)=n$.

3、若 3 阶方阵 A 满秩，以下说法错误的是（　C　）

（A）A 仅有一个三阶不为零的子式；　（B）A 至少有一个二阶子式不等于零；

（C）$A+E$ 可逆；　　（D）A 和 E 等价.

考生信息栏　学院________系________专业________年级________姓名________学号________

装　订　线

4、设$A=\begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ 4 & b & 7 \end{pmatrix}$, 则$R(A)=$(　B　)

（A）1;　　（B）2;　　（C）3;　　（D）与a,b取值有关.

5、设n阶方阵A经过有限次初等**行**变换化为B，则下列结论**错误**的是（　A　）

（A）$|A|=|B|$;　　（B）$R(A)=R(B)$;

（C）A可逆的充要条件是B可逆;　　（D）A和B有相同的行最简形矩阵.

6、设A为$s\times t$矩阵,非齐次线性方程组$Ax=b$有无穷解，则（　D　）

（A）$R(A)=R(A,b)-1$;　　（B）$R(A)\neq R(A,b)$;

（C）$R(A)=R(A,b)<s$;　　（D）$R(A)=R(A,b)<t$.

二. 填空题: 7~12 小题, 每小题 3 分, 共 18 分.

7、已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都是$3\times 1$的矩阵，设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_3,\alpha_1,4\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$，若$|A|=4$，则

$|B|=$ ___4___.

8、设行列式$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$，$M_{ij}$和$A_{ij}$ $(i,j=1,2,3,4)$ 分别为$|A|$的(i,j)元的余子式和代数余子式，则$2A_{31}+3A_{32}+5M_{33}-2M_{34}=$___6___.

9、设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2-A-8E=0$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，则$(A-3E)^{-1}=$

$\dfrac{(A+2E)}{2}$

10、设A,B均为 3 阶矩阵，且$|A|=-1,|B|=2$，则$\begin{vmatrix} -A^{-1} & 0 \\ 0 & B^* \end{vmatrix}=$___4___.

11、设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,则$R(ABC)=$_____2_____.

12、计算$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}4&2&3\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^3$ = ________$\begin{pmatrix}4&3&2\\0&1&1\\0&-3&-6\end{pmatrix}$________.

三. 解答题: 13~17 小题, 共 64 分（要求写出证明过程或演算步骤）.

13、（10 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a-1&-1&1&1\\-1&a-1&1&1\\-1&-1&a+1&+1\\-1&-1&1&a+1\end{vmatrix}$ 的值.

解：$D=\begin{vmatrix}a&-1&1&1\\a&a-1&1&1\\a&-1&a+1&+1\\a&-1&1&a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&-1&1&1\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4$

14、（24 分）已知 $\alpha=(1,0,1)^T,\beta=（0,-1,0)^T, A=E-\alpha\beta^T, B=E+\alpha\beta^T$，计算

（1）BA；

（2）若 $f(x)=(x-1)^3+2(x-1)^2+3(x-1)+4$，求 $f(B)$；

（3）B 的伴随矩阵 B^*；

（4）将 B^* 按列分块成 $B^*=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，求 $B(\beta_1+2\beta_2+3\beta_3)$.

解：（1） $BA=(E+\alpha\beta^T)(E-\alpha\beta^T)=E-（\alpha\beta^{\mathrm{T}})^2=E.$

（2） $$f(B)=(B-E)^3+2(B-E)^2+3(B-E)+4E$$

$$=(\alpha\beta^T)^3+2(\alpha\beta^T)^2+3(\alpha\beta^T)+4E$$

$$=3(\alpha\beta^T)+4E=3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(0,-1,0)+4E$$

$$=\begin{pmatrix}4&-3&0\\0&4&0\\0&-3&4\end{pmatrix}$$

（3） $B^*=|B|B^{-1}=|A|^{-1}A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

（4） $B(\beta_1+2\beta_2+3\beta_3)=B(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=BB^*\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

15、（12 分）设矩阵 $A^*=\mathrm{diag}(1,1,1,8)$， $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求矩阵 B **.**

解: $B=6(|A|E-A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$

16、（12 分）求解非齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1;\\4x_1+3x_2-5x_3+7x_4=-4;\\2x_1+x_2-x_3-x_4=7;\\2x_1+2x_2-4x_3+6x_4=-5\end{cases}$.

解：

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&3&-5&7&-4\\2&1&-1&-1&7\\2&2&-4&6&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\0&1&-3&5&-6\\0&0&0&-2&6\\0&1&-3&5&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\0&1&-3&5&-6\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&-1&0&4\\0&1&-3&0&9\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&2&0&-5\\0&1&-3&0&9\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&-\frac{5}{2}\\0&1&-3&0&9\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $R(A,\beta)=R(A)=3<4$，故原方程组有无穷多解，其通解为 $\begin{cases}x_1=-x_3-\frac{5}{2};\\x_2=3x_3+9;\\x_4=-3;\end{cases}$ x_3 为自由未知量；

或令 $x_3=c(c\in R)$，即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -c-\frac{5}{2} \\ 3c+9 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

17、（6 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 满足 $A^3=0, A^2\neq 0$，证明：$R(A)=2$.

证明：显然 A 中存在一个二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & a_{13} \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0$，所以 $R(A)\geq 2$.

现证 $R(A)\neq 3$. 若 $R(A)=3$，则 A 可逆，所以 $0=A^3\cdot A^{-1}=A^2$，与已知 $A^2\neq 0$ 矛盾.因此 $R(A)\leq 2$ 从而 $R(A)=2$