第五章 大数定律及中心极限定理

§5.1 大数定律

频率的稳定性---当试验次数越来越多时，频率会越来越靠近一个固定的数（概率）

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{第}k\text{次试验中}A\text{发生} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$f_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

频率的稳定性— $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 越来越靠近 $P(A)$

问题：　越来越靠近是什么意思？

定义　设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列，$a$ 是一个常数。若对于任意正数$\varepsilon > 0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$a$.

记为

$$Y_n \xrightarrow{P} a$$

依概率收敛的序列还有以下性质.

设$X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$,又设函数$g(x, y)$在点$(a,b)$连续,则

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b)$$

辛钦大数定律： 设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是相互独立,服从同一分布的随机变量序列。如果它们具有数学期望$E(X_k) = \mu, (k = 1, 2, \cdots)$,则序列$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$依概率收敛于$\mu$，即$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$

频率的稳定性

伯努利大数定律：设事件A在n次独立试验中的频率为$f_n(A)$，则$f_n(A) \xrightarrow{P} P(A)$