姓名__________________ 学号_____________________ 班级_________________

9.7 方向导数与梯度

1. 判断题：

（1）若函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处沿各方向的方向导数都存在，则 $f(x,y)$ 在该点连续.（ ）

（2）若函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处可微，则它在该点处沿各方向的方向导数都存在. （ ）

（3）若函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 关于 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 存在，则对于 $l=(1,0)$，有 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0y_0)}$ 存在，且满足 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0y_0)}=f_x(x_0,y_0)$. （ ）

（4） 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏导数存在，则对于 $l_1=(1,0)$ 与 $l_2=(-1,0)$，有 $\left.\frac{\partial z}{\partial l_1}\right|_{(x_0y_0)}$、$\left.\frac{\partial z}{\partial l_2}\right|_{(x_0y_0)}$ 均存在且相等. （ ）

（5） 若函数 $z=f(x,y)$ 沿 $l_1=(1,0)$ 与 $l_2=(-1,0)$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l_1}\right|_{(x_0y_0)}$、$\left.\frac{\partial z}{\partial l_2}\right|_{(x_0y_0)}$ 均存在且相等，则该函数在点 $P(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏导数存在. （ ）

2. 填空题

（1）设二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像是空间曲面 S，那么

①xOy 面上的曲线 $f(x,y)=c$ 是曲面 S 与平面 $z=c$ 的交线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$ 在 xOy 面上的__________，它是 $z=f(x,y)$ 的一条____________；

②设点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 面上的曲线 $f(x,y)=c$ 上的一个点，且 $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$，那么曲线 $f(x,y)=c$ 在 P_0 点的切线与向量 $\nabla f(x_0,y_0)$ 的关系是_____________.

（2）函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $(1,0)$ 处，沿方向 $l=(1,-1)$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)}=$ _______________.

（3）函数 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在点 $(1,1)$ 处沿下降最快的方向的方向导数为__________.

（4）函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(6,2,3)$ 的方向的方向导数_________.

（5）函数 $z=x^2-xy+y^3$ 在点 $(1,1)$处的最大方向导数为_________________.

4. 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量， 求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处的梯度 $\mathbf{grad}\,u$ 及方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$.

5. 求函数 $u=\ln(x+y^2+z^2)$ 在曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 的点 $(1,1,1)$ 处，沿曲线在该点与 z 轴夹角为锐角的切向量的方向的方向导数.