姓名____________　学号__________________　专业__________________

习题 3.1

（一）基本习题

1. 判断题

(1) 因为函数 $f(x)=|x|$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且 $f(-1)=f(1)$，所以至少存在一点 $\xi\in(-1,1)$ 使 $f'(\xi)=0$．（　　）

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且在 $(\mathrm{a,b})$ 内可导，则必存在 $\xi\in(\mathrm{a,b})$ 使得 $f'(\xi)=0$．（　　）

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，则必存在 $\xi\in(\mathrm{a,b})$ 使得 $f'(\xi)=0$．（　　）

(4) 若函数 $f(x)$ 在 $(\mathrm{a,b})$ 内可导且 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)$，则必存在 $\xi\in(\mathrm{a,b})$ 使得 $f'(\xi)=0$．（ ）

(5) 若 $f(x)$ 在 $(\mathrm{a,b})$ 内可导，则必存在 $\xi\in(\mathrm{a,b})$，使得 $f(b)-f(\mathrm{a})=f'(\xi)(b-a)$．（　　）

(6) 若 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，则导函数 $f'(x)$ 有 3 个不同的零点.　　（　　）

2. 选择题

（1）在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的函数是（　　）

A. $f(x)=e^x$　　B. $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$

C. $f(x)=1-x^2$　　D. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x},x\neq0\\0,x=0\end{cases}$

（2）函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x$ 在 $\left(0,\sqrt{3}\right)$ 满足罗尔定理条件的 ξ 等于（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

（3）函数 $f(x)=x^2+2x-3$ 在 $(-1,2)$ 满足拉格朗日中值定理条件的 ξ 等于（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 0　　C. 1　　D. $-\dfrac{1}{2}$

（4）下列函数在 $[1,e]$ 上满足拉格朗日定理条件的是（　　）.

A. $\ln(\ln x)$　　B. $\ln x$　　C. $\ln(2-x)$　　D. $\dfrac{1}{\ln x}$

（5）设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $a<x_1<x_2<b$，则下列式子正确的是（　　）.

A. 在 (x_1,x_2) 内只有一点 ξ，使得 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$ 成立

B. 在 (x_1,x_2) 内任一点 ξ 处，均有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$ 成立

C. 在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ 成立

D. 在 (x_1,x_2) 内至少有一点 ξ，使得 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$ 成立.

（6）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$f'(x)>0$，并且 $f(0)<0, f(1)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内（　　）.

A. 至少有两个零点　　B. 有且仅有一个零点

C. 没有零点　　D. 零点个数不能确定

（7）函数 $f(x)=x^3+2x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内零点的个数为（　　）.

A. 至少有两个零点　　B. 有且仅有一个零点

C. 没有零点　　D. 零点个数不能确定

3. 证明题

（1）. 当 $e<a<b<e^2$ 时，$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{2}{e^2}(b-a)$

（2）证明恒等式 $\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.（$x>0$）

(3) 设 $0 < a < b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $(b^2 - a^2) f'(\xi) = 2\xi[f(b) - f(a)]$.

(4) 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$，证明在 (x_1, x_3) 内至少存在一点 $\zeta \in (a,b)$，使得 $f''(\zeta) = 0$.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1) = 0$. 证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi)\xi + f(\xi) = 0$ 成立.

(6*) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$, 试证：对任意实数 k，存在 $\zeta\in(a,b)$，使 $f'(\zeta)=kf(\zeta)$.