福建师范大学数学与统计学院

2024—2025 学年第一学期期中考试卷

考生信息栏：学院________ 系________ 专业________ 年级________ 姓名________ 学号________

装　订　线

专　　业：全校各专业　　　　年　　级：2023 级、2024 级

课程名称：《线性代数》　　　　任课教师：连冠勤、陈兰清等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　　　考试用时：120 分钟

考试时间：2024 年 11 月 17 日 上 午 8 点 0 分

题号	一 1-6	二 1-6	解答题 三	四	五	六	七	总得分
得分								

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

d1 1. 设 A,B 为 n 阶矩阵，则必有（ C ）.

A. $(AB)^T = A^T B^T$ × （B^TA^T）　　B. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ （$=B^{-1}A^{-1}$）（补上可逆情形）

C. $\left|B^T A\right| = \left|AB\right| = |A|\cdot|B|$ ✓ （$|B^T||A| = |B||A|$）　　D. $AB = BA$ × 无交换律

有歧义 明显ABC自身陈述设错

d2 2. 设 A,B 和 C 是 n 阶矩阵，$ABC = E$，则下列说法错误的是（ D ）.

$\Updownarrow$ A、B、C可逆 且互逆 即 $(AB)^{-1}=C$ 即 $C(AB)=E \Rightarrow$ B✓ D×

A. 若 $AB = AC$，则 $B = C$ ✓ 可逆则能左消/右消 $B=A^{-1}AB=A^{-1}AC=C$　　B. $CAB = E$ ✓ $\Leftrightarrow B=(CA)^{-1}=A^{-1}C^{-1}$ 即B $\Updownarrow$ $ABC=AA^{-1}C^{-1}C=E$ 即已知

C. $B = A^{-1}C^{-1}$ ✓　　D. 以上全错

d2 3. 设 A 为 n 阶矩阵，则下列说法错误的是（ C D ）.

A. $A^T A$ 是对称矩阵 ✓ $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$　　B. $A^T + A$ 是对称矩阵 ✓ $(A^T+A)^T=(A^T)^T+A^T=A+A^T$

C. $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T \end{pmatrix}$ 是分块对角矩阵 ✓ ~~如A非方阵~~　　D. $(A^{-1})^{-1} = A$ ✓ $AA^{-1}=E$ A^{-1}的逆为A ~~关键A可逆吗(错)~~ A未必可逆

如 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ 左右等价，但不列等价 左中等价，但不行等价

4. 若 n 阶矩阵 A 与 B 等价，则必有(C).

A. A 与 B 行等价　　B. A 与 B 列等价

C. $R(A)=R(B)$　　D. $|A|=|B|$

5. 下列矩阵中秩为 2 的是（ B ）.

A. $\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-6&-9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ 秩1　　B. $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&2\\0&3&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$ 秩2 阶梯

C. $\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ $|\,|=6\neq 0 \Downarrow$ 秩3　　D. $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 秩1

6. 设非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 无解，则(D). $\Leftrightarrow R(A)\neq R(A\ b)$

A. 齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$　　B. 齐次线性方程组 $Ax=0$ 必有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$（变量个数）

C. $R(A)=R(A,b) \Leftrightarrow Ax=b$ 有解　　D. $R(A,b)=R(A)+1$

如 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1+x_2=2\end{cases} \Rightarrow Ax$　$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1+x_2=2\\x_1-x_2=0\end{cases} \Rightarrow Bx$

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\begin{vmatrix}x&-x&2x&1\\x&x&2&x\\-3&3&5x&-5x\\4&x&4x&3x\end{vmatrix} \triangleq f(x)$ 中常数项的系数为 $f(0)=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\-3&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{t(4321)}\times1\times2\times3\times4=24$

注：多项式的常数 = 零点的多项式值

2. 设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶方阵且 $|A|=3$，则 $|A+E(1,2(3))A|=$ $|A(E+E(1,2(3)))|=|A|\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&3&2\end{vmatrix}$ $= |A| \begin{vmatrix}2&0&0&\\0&2&0&\\0&3&2&\\&&&2E_{n-3}\end{vmatrix} = |A|\times 8\times 2^{n-3} = 24\times 2^{n-3} = 3\times 2^{n}$

或投机 $A=\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

3. 设 $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix}&&3\\&1&\\1&&\end{pmatrix}$，则 $A=$ ______

$=E$

$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}&&3\\&1&\\1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&3\\&1&\\1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&1&0\\1/3&0&0\end{pmatrix}$

4. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}-9&6&4&0\\3&1&-1&1\\1&8&-2&0\\0&2&0&3\end{vmatrix}$，则 $3A_{31}+A_{32}-A_{33}+A_{34}=$ 0

$\begin{vmatrix}-9&6&4&0\\3&1&-1&1\\3&1&-1&1\\0&2&0&3\end{vmatrix}=0$ 错位相乘

步2-2 $|A|=\begin{vmatrix}0&-1&\cdots&-1\\-1&0&\cdots&-1\\\vdots&&&\\-1&-1&\cdots&0\end{vmatrix}\xrightarrow[i=3\sim n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}0&-1&\cdots&-1\\-1&1&\cdots&0\\\vdots&&&\\-1&0&\cdots&1\end{vmatrix}\xrightarrow[i=3\sim n]{r_1+r_i}\begin{vmatrix}-(n-1)&-1&\cdots&0\\-1&1&\cdots&0\\\vdots&&&\\-1&0&\cdots&1\end{vmatrix}\xlongequal{下三角}1-n$

~~步2-3 chs 将有更简洁方法(利用特征值，略)~~

5. $R\left(\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&6\\7&0&2\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\right)=$ $R\left(\begin{bmatrix}3&1&6\\7&0&2\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}\right)=R\left(\begin{bmatrix}0&1&-6\\0&0&-2\\0&5&-6\end{bmatrix}\right)=2$

~~$R\begin{bmatrix}3&1&6\\7&0&2\\4&5&6\end{bmatrix}=3$~~

6. 设n阶矩阵A满足$A^2-3A+6E=O$，其中E为单位矩阵，则$(A+E)^{-1}=$ $\frac{1}{10}(4E-A)$.

$(A+E)(A-4E)=-10E$

注：形如 $E+\alpha\beta^T$ 的逆求法，有形式相类似
$(E+\alpha\beta^T)(E+k\alpha\beta^T)=E+(k+1-\beta^T\alpha)\alpha\beta^T$
上式 $=E\Leftrightarrow k=\beta^T\alpha-1$

以下各解答题要求写出证明过程或演算步骤

三.（18分）设$n\times1$列矩阵$e=(1,1,\cdots,1)^T$，E为n $(n\geq2)$阶单位矩阵，$A=E-ee^T$，

★ chs 利用相似对角化可计算出 A^{-1}

(1) 证明：A可逆且$A^{-1}=E-\dfrac{1}{n-1}ee^T$；

步1 验证定义 $(E-ee^T)(E-\frac{1}{n-1}ee^T)=E-ee^T-\frac{1}{n-1}ee^T+\frac{1}{n-1}ee^Tee^T$
$=E-(1+\frac{1}{n-1})ee^T+\frac{n}{n-1}ee^T=E$

(2) 求A^*；

步2-1 $|A|=\begin{vmatrix}0&-1&\cdots&-1\\-1&0&\cdots&-1\\\vdots&&&\\-1&-1&\cdots&0\end{vmatrix}\xrightarrow[i=2\sim n]{c_1+c_i}\begin{vmatrix}-n+1&-1&\cdots&-1\\-n+1&0&\cdots&-1\\\vdots&&&\\-n+1&-1&\cdots&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_i-r_1}\begin{vmatrix}-n+1&-1&\cdots&-1\\0&1&\cdots&0\\\vdots&&&\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1-n$

步3 $A^*=|A|A^{-1}=(1-n)(E-\frac{1}{n-1}ee^T)$
$\Downarrow$
$A^*=(1-n)E+ee^T$

(3) 当$n=3$时，计算$\left|A^*+\dfrac{5}{2}A^{-1}\right|$ $=\left||A|A^{-1}+\frac52A^{-1}\right|=\left(|A|+\frac52\right)^n/|A|=\left(1-n+\frac52\right)^n/(1-n)\xlongequal{n=3}\left(\frac12\right)^3/(-2)=-\frac{1}{16}$ 步4

四.（12分）设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$AX=AA^T+2X$，求矩阵$X$.

步1 $(A-2E)X=AA^T$

$AA^T=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&3&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$

步2 $(A-2E\ \ AA^T)=\begin{bmatrix}-1&1&0&2&0&-1\\-1&-1&1&0&3&0\\0&-1&-1&-1&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-2&0&1\\0&-2&1&-2&3&1\\0&-1&-1&1&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-2&0&1\\0&1&1&-1&0&-2\\0&0&3&0&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-2&0&1\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&1&0&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3&1&0\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&1&0&1&-1\end{bmatrix}$

步3 故 $A-2E$ 可逆，且原方程有唯一解 $(A-2E)^{-1}AA^T=\begin{bmatrix}-3&1&0\\-1&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$

五.（14分）设$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$AP=P\Lambda$，

$\Downarrow$
$A=P\Lambda P^{-1}$ 步1

$\varphi(x)=x^3-x^2-1$，$\Rightarrow\varphi(1)=-1\quad\varphi(-1)=-3$

步2 $(P\ E)=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\-1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

(1) 求$\varphi(A)$； 步3 $=P\varphi(\Lambda)P^{-1}=P\begin{pmatrix}\varphi(-1)&&\\&\varphi(1)&\\&&\varphi(-1)\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&&\\&-1&\\&&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&0\\-1&-1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

(2) 求$\left||\varphi(A)|\varphi(A)\right|$ $=|\varphi(A)|^3\cdot|\varphi(A)|$
$=|\varphi(A)|^4=|P\varphi(\Lambda)P^{-1}|^4=|\varphi(\Lambda)|^4=\begin{vmatrix}\varphi(-1)&&\\&\varphi(1)&\\&&\varphi(-1)\end{vmatrix}^4=\varphi(-1)^8\varphi(1)^4=3^8$

六.（12 分）利用矩阵的初等变换求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$ 记作 $Ax=b$.

七.（8 分）设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，证明：$R(A-2E)+R(A-E)=n$.

步1 $(A-2E)(A-E)=0$

$R(A-2E)(A-E)\le n$ (公式记忆)

步2 综合即知.

步2 $\ge R((A-2E)-(A-E))=R(-E)=n$

注 ① $R(S_{m\times n}T_{n\times p})\ge R(S)+R(T)-n$

② 若 $ST=0$ 则 $R(S)+R(T)\le n$

六 步1 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

步2 原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2x_3 + 5/3\, x_4 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 4/3\, x_4 \end{cases}$$

步3-1 一般解为 $\begin{cases} x_1 = -1+2k_3+5/3\, k_4 \\ x_2 = 3-2k_3-4/3\, k_4 \\ x_3 = k_3 \\ x_4 = k_4 \end{cases}$ $k_3,k_4\in R$.

步3-2 一般解向量为

$(-1+2k_3+\frac{5}{3}k_4 \quad 3-2k_3-\frac{4}{3}k_4,\ k_3,\ k_4)$

$k_3, k_4\in R$

步3-3（基础解系方法）

令 $x_3=x_4=0$ 得 $\xi_0=(-1\ 3\ 0\ 0)^T$ $Ax=b$ 的解

令 $x_3=0$. $x_4=1$ 得 $\xi_1=(5/3\ \ -4/3\ \ 0\ \ 1)^T$

$x_3=1$ $x_4=0$ 得 $\xi_2=(2\ \ -2\ \ 1\ \ 0)^T$

均为 $Ax=0$ 的解

则通解为

$\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$，$k_1\ k_2\in R$.