

福建师范大学 数学与统计 学院

2023—2024 学年第一学期考试 B 卷

知明行笃



应 诚 致 广

专 业： 全校性专业 年 级： 2023 级

课程名称： 高等数学 A 任课教师： 蔡裕华等

试卷类别： 开卷（ ） 闭卷（√） 考试用时： 120 分钟

考试时间： 年 月 日 午 点 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									
考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效。 2. 答题要写清题号，不必抄原题。 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交。								

重排版：Github@Xuuyuan

欢迎了解WeFJNU项目（<https://wefjnu.nekoark.com>）！

参考答案及评分标准

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$ 利用定积分可表示为 ().
- A. $\int_0^1 (1+x) dx$ B. $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ C. $\int_0^1 x dx$ D. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$
2. 设 x_0 是连续函数 $f(x)$ 的极大值点, 则 x_0 必是 $f(x)$ 的 ().
- A. 一阶导数为零的点 B. 二阶导数为零的点
C. 二阶导数小于零的点 D. 以上都不对
3. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续是 $\int_a^b f(x) dx$ 存在的 ().
- A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件
4. 设 $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 ().
- A. 是可去间断点 B. 是振荡间断点
C. 连续但不可导 D. 可导
5. 下列反常积分中收敛的是 ().
- A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx$
C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cos x} dx$ D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x \sin x} dx$

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 的间断点个数为 _____.
2. 设 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$, 则 $f(x)$ 的极小值点为 _____.
3. 设 $F(x)$ 是 $\cos x$ 的一个原函数, 则 $F'(2x) =$ _____.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\frac{d}{dx} \left[\int_a^b f(x) dx \right] =$ _____.

5. 设 $y = f(\ln x)$, 其中 f 可导, 则 $dy =$ _____.

三、(8分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x}$.

四、(8分) 求由 $y = 1 + xe^y$ 所确定的隐函数在 $x = 0$ 处的导数 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

五、(8分) 求不定积分 $\int \arctan x dx$.

六、(8分) 求定积分 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$.

七、(8分) 求定积分 $\int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$.

八、(10分) 求函数 $y = x^2 + 2\sqrt{2}\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 的一阶导数、二阶导数并列表说明其凹凸区间.

九、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,

(1) 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$,

(2) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 3 \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

十、(8分) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx - g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx = 0.$$