

第四章 向量组的线性相关性

第一节 向量组及其线性组合

主要内容

- 向量及向量组的定义
- 向量组线性表示
- 向量组等价的条件

一、向量 (组) 的概念

1. n 维向量的概念

定义1

由 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的有序数组称为 n 维向量.

若 n 维向量写成 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的形式, 称为 n 维列向量;

若 n 维向量写成 (a_1, a_2, \dots, a_n) 的形式, 称为 n 维行向量.

这 n 个数称为该向量的 n 个分量, 其中 a_i 称为第 i 个分量.

我们常用 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 来表示 n 维列向量, 而用 $\alpha^T, \beta^T, \gamma^T, \dots$ 来表示 n 维行向量.

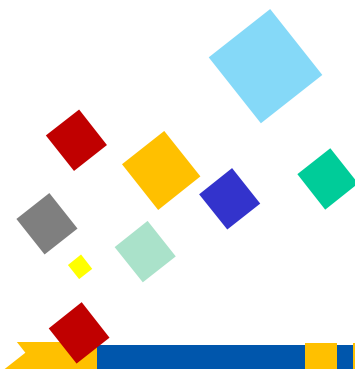
当 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数时, n 维向量称为 n 维实向量.

当 a_1, a_2, \dots, a_n 是复数时, n 维向量称为 n 维复向量

今后我们所讨论的向量都是实向量.

分量都是零的向量称为零向量, 记为 $\mathbf{0}$, 即 $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

向量 $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ 称为向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的负向量, 记为 $-\alpha$.



2. 向量的运算

设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$, 则有

$$(1) \quad \alpha + \beta = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}; \quad (2) \quad k\alpha = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad \alpha^T \beta = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n;$$

$$\alpha \beta^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

3. 向量组的定义

定义 若干个同维列或行向量组成的集合叫做
向量组. 例如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

就是一个由四个 3 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 构成的
向量组, 记为向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

$$\text{单位坐标向量组 } E: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

n 维向量的全体所组成的集合

$$R^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in R \right\}$$

叫做 n 维向量空间.

4. 矩阵与向量组的关系

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 对矩阵 A 分块如下:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix},$$

$$\text{其中 } \alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j=1, 2, \cdots, n), \quad \beta_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) (i=1, 2, \cdots, m).$$

则 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 称为矩阵 A 的列向量组,

n 维向量组 $\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T$ 称为矩阵 A 的行向量组.

反之, 给定一个 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,

则得到一个以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列的 $m \times n$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$;

给定一个 n 维向量组 $\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T$,

则得到一个以 $\beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T$ 为行的 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$.

因此, 一个所含向量个数有限的向量组总可与一个矩阵建立一一对应关系.

5. 线性方程组与向量组的关系

前两章中常把 m 个方程 n 个未知量的线性方程组写成矩阵形式 $Ax = b$, 从而方程组可以与其增广矩阵 $B = (A, b)$ 一一对应.

若把方程组写成向量形式

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = b,$$

则可见方程组与 B 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, b$ 间也有一一对应的关系. 综上所述, 一个线性方程组与一个向量组一一对应.

二、向量组等价

1. 线性组合与线性表示

定义 给定向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, 对于任何一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, 向量

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m$$

称为向量组 A 的一个**线性组合**, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 称为这个线性组合的系数.

给定向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 和向量 b , 若**存在**一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, 使

$$b = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_m$$

这时称向量 b 可由向量组 A **线性表示**.

注：(1) 设向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, 则

(i) $\mathbf{0}$ 可由向量组A线性表示.

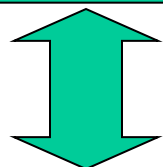
(ii) $\alpha_i (1 \leq i \leq m)$ 可由向量组A线性表示 .

(2) $\forall \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in R^n$, 都有

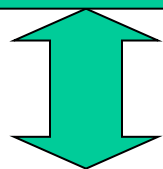
$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n,$$

即 α 可由单位向量组E线性表示.

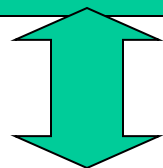
向量 b 能由向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示



存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使 $b = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m$



线性方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = b$ 有解



$$R(A) = R(B)$$

其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, b)$

例 1 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$

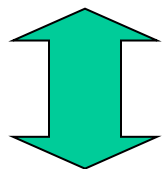
证明向量 b 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 并求出表示式.

解 

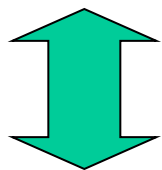
2. 向量组等价的概念

定义 3 设有两个向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 及 $B: b_1, b_2, \cdots, b_s$, 若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示, 则称**向量组 B 能由向量组 A 线性表示**.

向量组 B: b_1, b_2, \dots, b_l 能由
向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示



矩阵方程 $AX=B$ 有解 $X=K$

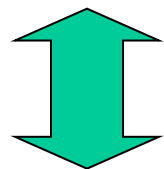


$$R(A) = R(A, B)$$

2. 向量组等价的概念

定义 3 设有两个向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 及 $B: b_1, b_2, \cdots, b_s$, 若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示, 则称**向量组 B 能由向量组 A 线性表示**. 若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示, 则称这两个向量组**等价**.

向量组 B: b_1, b_2, \dots, b_l 与
向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 等价



$$R(A) = R(B) = R(A, B)$$

例 2 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

证明向量组 A: α_1, α_2 与向量组 B: b_1, b_2, b_3 等价.

证明 

3. 性质

定理 3 设向量组 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$ 能由向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示, 则

$$R(b_1, b_2, \cdots, b_l) \leq R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m).$$

证明  **证明** 

例 3 设 n 维向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 构成 $n \times m$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$, n 阶单位矩阵 $E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的列向量叫做 **n 维单位坐标向量**. 证明: n 维单位坐标向量组 e_1, e_2, \cdots, e_n 能由向量组 A 线性表示的充要条件是 $R(A) = n$.

证 

三、小结

线性表示：非齐次线性方程组的解

(i) 向量 b 可由向量组A线性表示.

(ii) 向量组B 与向量组A等价.

四、作业

书 习题四 P109

1, 2