（二）最大似然估计法

一个例子：袋子中装有黑白两色的球共100个，其中一种10个，一种90个，现从中任取一个发现是黑色，问袋中有多少个白球?

在两个答案中选择“10个白球”

理由：“10个白球”最有利于出现试验结果“取到一个黑球”。

若离散型总体X的概率分布律可以表示为

$$P\{X = x\} = p(x;\theta), \quad \theta \in \Theta$$

的形式，θ 为未知参数，Θ是θ 可能取值的范围（参数空间）。则样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$取到样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的概率为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

最大似然原理：取θ使得这个概率最大。

若X是离散型总体，把概率分布写为$P(X=x)=p(x;\theta)$.
若X是连续型总体，把密度函数写为$f(x;\theta)$。

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一组样本观测值，则称

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),\quad \theta\in\Theta$$

为似然函数.　　6月21日

如果似然函数有唯一的最大值点θ，则θ一定是一个统计量，即 $\theta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。
则称$\theta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$\theta$ 的最大似然估计量。

最大似然估计也称为极大似然估计。求最大似然估计包括以下步骤：

1、写出似然函数。

2、求似然函数的最大值点。

3、给出最大似然估计。

求函数的最大值点的方法：

1、求函数的稳定点（驻点），即导数（偏导数）为零的点。

2、中学数学和高数学过的各种方法。

由于似然函数是乘积，故求驻点时先取对数可简化计算。

如果$L(\theta)$在参数空间Θ的边界不取最大，在内部可导。则最大值点满足

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = 0$$ （θ是一维时）

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L(\theta_i) = 0$$ （$\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$是k维时）

例4 设$X \sim b(1,p).X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自$X$的一个样本,试求参数$p$的最大似然估计量

解:X的分布律为

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1$$

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应于样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的一组样本值。

则似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\ln L(p)=n\bar{x}\ln p+n(1-\bar{x})\ln(1-p)$$

当p趋于1或0时，L(p)趋于0，所以，
L(p)在（0，1）的内部取最大。

$$\ln L(p) = n\bar{x}\ln p + n(1-\bar{x})\ln(1-p)$$

令
$$\frac{d}{dp}\ln L(p) = \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{n(1-\bar{x})}{1-p} = 0 \text{得}$$

$$p = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\therefore p$的最大似然估计量为 $\hat{p} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

例5 求正态分布的两个参数的最大似然估计

解：设$x_1, x_2, \ldots, x_n$是样本值。则似然函数是

$$L(\mu,\ \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

当σ趋于$+\infty$或0时，$L(\mu,\ \sigma^2)$趋于0,

当$|\mu|$趋于∞时，$L(\mu,\ \sigma^2)$趋于0.

所以，$L(p)$在半平面的内部取最大。

$$\ln L(\mu,\ \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\ \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\ \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{2\sigma^2} = \frac{2n\bar{x}-2n\mu}{2\sigma^2}$$

令偏导数为零得

$$\begin{cases} -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \\ 2n\bar{x}-2n\mu = 0 \end{cases}$$

解之得

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \qquad \mu = \overline{x}$$

所以，参数的最大似然估计量为

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad \mu = \overline{X}$$

同样可得σ 的最大似然估计量是 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$。

定理. 设θ的最大似然估计量是$\hat{\theta}$，如果$g(\theta)$有反函数，则$g(\theta)$的最大似然估计量是$g(\hat{\theta})$。

例6　设$X \sim U[a,b]; a,b$未知，$x_1,\cdots,x_n$是一个样本值，

求：a,b的极大似然估计量.

分析：　**X 的概率密度为：**

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

似然函数为

$$L(a,b)=\frac{1}{(b-a)^n} \qquad \left(a \le \min\{x_i\},\ \max\{x_i\} \le b \right)$$

显然，似然函数是(b-a)的单调函数，当*a*，*b*最靠近时似然函数取最大值。

由于$a \le \min\{x_i\}$，$\max\{x_i\} \le b$，可以看出

当$a = \min\{x_1, \cdots, x_n\}$，$b = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$时，

$L(a,b)$取最大值。a，b的最大似然估计值是：

$$\hat{a} = \min\{x_1, \cdots, x_n\}, \quad \hat{b} = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$$

因而a，b的最大似然估计量是

$$\hat{a} = \min\{X_1, \cdots, X_n\}, \quad \hat{b} = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$$

作业：176页，4（1）（2），6，8