第三节 逆 矩 阵

- 逆矩阵的概念和性质
- 逆矩阵的求法
- 初步应用

一、概念的引入

在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为a 的倒数,（或称 a 的逆）；

在矩阵的运算中,单位阵E相当于数的乘法运算中的1， 那么，对于矩阵A ,如果存在一个矩阵A^{-1},

使得 $$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

则矩阵A^{-1}称为A的可逆矩阵或逆阵.

二、逆矩阵的概念和性质

n阶方阵A可逆 $\overset{\text{定义}}{\Leftrightarrow}$ 存在 n阶方阵 B使得

$$AB = BA = E \left(\text{此时记} B \overset{\Delta}{=} A^{-1} \right)$$

思考：

1、n阶方阵A, B？

2、$AB = BA = E$

$$\Updownarrow$$

A可逆且B为A的逆矩阵

例1 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，求$A$的逆阵.

利用定义待定系数法

解 设 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是A的逆矩阵，

则

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1, \\ 2b+d=0, \\ -a=0, \\ -b=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1, \\ d=2. \end{cases}$$

又因为

$$\overset{AB}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \overset{BA}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

逆矩阵的等价判定

$$n\text{阶方阵 }A\text{可逆}\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}\text{存在 }n\text{阶方阵 }B\text{使得}$$

$$AB = BA = E\left(\text{此时记}B \overset{\Delta}{=} A^{-1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow |A| \neq 0\left(\text{此时记}A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*}\right)$$

二阶方阵的逆矩阵——“两调一除”

已知$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$且$|A|=ad-bc\neq 0$，则$A^{-1}=$

$$A \xrightarrow{\text{调换主对角元}} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{副对角元调符号}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{用}|A|\text{去除}} \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

注 此法仅适用于二阶矩阵，对二阶以上的矩阵不适用.

例2 $A=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\downarrow$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

思考： 当$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0$时，

$$diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{-1}=diag(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1})$$

n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow$存在n阶方阵B使得

$$AB = BA = E\left(\text{此时记 } B = A^{-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0\left(\text{此时记}A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*}\right)$$

$\Leftrightarrow$存在n阶方阵B使得

$$AB = E(\text{或}BA = E)(\text{此时记}\, B = A^{-1}).$$

例3 设方阵A满足方程$A^2-A-2E=0$,证明：$A, A+2E$都可逆,并求它们的逆矩阵.

证明 由$A^2-A-2E=0$, 得$A(A-E)=2E$

$$A^{-1}$$

$$\Rightarrow A\frac{A-E}{2}=E$$

故A可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

又由$A^2 - A - 2E = 0$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)+4E=0$$

$$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

$$(A+2E)^{-1}$$

故$A+2E$可逆

且$(A+2E)^{-1} = -\frac{1}{4}(A-3E) = \frac{3E-A}{4}.$

逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆，则A^{-1}唯一.

(2) 若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

(3) 若A可逆，数$\lambda\neq0$，则λA可逆，且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

(4) 若A,B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

(5) 若A可逆，则A^T亦可逆，且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

(6) 若A可逆，则有$\left|A^{-1}\right|=\left|A\right|^{-1}$.

(7) 若A可逆，则A^*可逆且$\left(A^*\right)^{-1}=(A^{-1})^*$.

思考： 若A,B为n阶可逆矩阵，则$A+B$可逆？

三、逆矩阵的应用

1、矩阵方程的求解

若A可逆，则矩阵方程$AX = B$的解为$X = A^{-1}B$；

若A可逆，则矩阵方程$XA = B$的解为$X = BA^{-1}$；

若A，B都可逆，则矩阵方程$AXB = C$的解为$X = A^{-1}CB^{-1}$.

例4 设三阶矩阵A,B满足关系：

$$A^{-1}BA=6A+BA,\text{且}A=\begin{pmatrix}1/2 & & \boldsymbol{O}\\ & 1/4 & \\ \boldsymbol{O} & & 1/7\end{pmatrix},$$ **求B.**

解： **移项** $$\left(A^{-1}-E\right)BA=6A$$

左乘A,右乘A^{-1} $$\left(E-A\right)B=6A$$

$$\because\ (E-A)^{-1}=diag(2,\frac{4}{3},\frac{7}{6})$$

$$\therefore B=\left(E-A\right)^{-1}6A=diag(6,2,1)$$

2、矩阵多项式的计算

（1）定义

设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 为 x 的 m 次多项式，A 为 n 阶方阵，记

$$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m,$$

$\varphi(A)$ 称为**矩阵 A 的 m 次多项式**.

（2）性质

因为矩阵 A^k、 A^l 和 E 都是可交换的，所以矩阵 A 的两个多项式 $\varphi(A)$ 和 $f(A)$ 总是可交换的，即总有

$$\varphi(A)f(A)=f(A)\varphi(A),$$

从而 A 的多项式可以像数 x 的多项式一样相乘或分解因式. 例如

$$(E+A)(2E-A)=2E+A-A^2,$$

$$(E-A)^3=E-3A+3A^2-A^3.$$

(3) 计算 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m=?$

① 如果 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$**为对角矩阵**

则 $\Lambda^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$，**从而**

$$\varphi(\Lambda)=a_0E+a_1\Lambda+\cdots+a_m\Lambda^m$$

$$=a_0\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m&&&\\&\lambda_2^m&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1)&&&\\&\varphi(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&\varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}.$$

例 5 设 $\Lambda = diag(1,-1,-1), f(x) = x^3 + 3x^2 - 1,$求$f(\Lambda).$

解: $\because f(1) = 1 + 3 - 1 = 3$

$f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$

$\therefore f(\Lambda) = diag(3,1,1)$

（3）计算 设$A = P\Lambda P^{-1}$，$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，则 $\varphi(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m = ?$

②如果 $A = P\Lambda P^{-1}$，则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m \\ &= P a_0 E P^{-1} + P a_1 \Lambda P^{-1} + \cdots + P a_m \Lambda^m P^{-1} \\ &= P\varphi(\Lambda) P^{-1}.\end{aligned}$$

例 6 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, AP = P\Lambda$，求 A^n.

解

例 7 设 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&3&2\end{pmatrix}, \Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}, AP=P\Lambda,$

求 $\varphi(A)=A^4-2A^2+3E$.

解： $\because \varphi(1)=1-2+3=2 \quad \varphi(-1)=1-2+3=2$

$\varphi(2)=16-8+3=11$

$\therefore \varphi(\Lambda)=diag(2,2,11)$

$$\because P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-3&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore \varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-25&18\\0&-54&38\end{pmatrix}$$

四、小结

(i) 会判断方阵A可逆.（行列式法，定义法）

(ii)会求可逆方阵A的逆矩阵.（伴随矩阵法，定义法）

(iii)矩阵方程求解，矩阵多项式计算.

五、作业

书 习题二 P53-54

9(1)(改: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$)(4), 11,13(改:$(A+3E)^{-1}$),

14(3), 16, 19