第二节 特征值与特征向量

- 特征值与特征向量的概念
- 特征值与特征向量的求法
- 特征值与特征向量的性质

一、特征值与特征向量的概念

定义 设 A 是 n 阶方阵，如果数 λ 和 n维非零列向量 p 使关系式

$$Ap = \lambda p$$

成立，那么，这样的数 λ 称为方阵 A 的特征值，

非零向量 p 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

注：零矩阵的特征值只能为 0.(Proof)

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则下列向量中可作为 A 对应于特征值 0 的特征向量是

$A.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B.\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $C.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $D.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2)书 p139：16

$Ax = \lambda x (x \neq 0) \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0 (x \neq 0) \Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0$

二、特征值与特征向量的求法

求矩阵 A 的特征值与特征向量的步骤如下：

步骤 1： 计算 A 的特征多项式，并求出特征方程的所有根. 设矩阵 A 有 s 个<u>不同</u>的特征值

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s.$$

步骤 2： 对 A 的每个特征值 $\lambda_i\ (i = 1, 2, \cdots, s)$, 求解齐次线性方程组 $(A - \lambda_i E)x = 0$，该方程组的<u>全部非零解</u>即为矩阵 A 的对应于 λ_i 的<u>全部特征向量</u>.

注：(1) 对角矩阵$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$的特征值：

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

(2) 三角矩阵A的特征值：主对角线上的元素.

例 1 求矩阵$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解：$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$

由$|A-\lambda E| = 0$得A的全部特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 2$

当$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$时，求$(A-E)x = 0$的非零解.

由$A - E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$得一个基础解系为$p_1$

则A对应于特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$的全部特征向量为$c_1 p_1 (c_1 \neq 0$

当$\lambda_3 = 2$时，求$(A-2E)x = 0$的非零解.

由$A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \cdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdots \end{pmatrix}$得一个基础解系为$p$

例 2 设$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$,求A的特征值与特征向量.

解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

令 $-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$

得A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当$\lambda_1=-1$时，解方程$(A+E)x=0$.由

$$A+E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

故对应于$\lambda_1=-1$的全体特征向量为

$$k\,p_1\qquad (k\neq 0).$$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时,解方程$(A-2E)x=0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为:

$$p_2=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\qquad p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},$$

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为：

$$k_2p_2+k_3p_3\quad(k_2,k_3\text{不同时为 }0).$$

三、特征值与特征向量的性质

性质1　设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的 n 个特征值(k 重特征值算作 k 个特征值)，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

$= Tr(A)$　(称为A的迹);

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|.$

证明

推论　设 A 是一个 n 阶矩阵，则 A 是一个可逆矩阵当且仅当 A 的特征值都不为零.

性质2

n阶矩阵A 特征值λ 特征向量p

$A^* = \|A\|A^{-1}$	$\|A\|\lambda^{-1}$	p
A^{-1}	λ^{-1}	p
A	λ	p
A^T	λ	p
A^k	λ^k	p
$\varphi(A)$	$\varphi(\lambda)$	p

例 3 设三阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$，设矩阵 $B = A^* + 3A - 2E$，试求：

(1) B 的特征值； (2) $|B|$.

解

（了解）**性质3** 实对称矩阵A 的特征值为实数.

性质4 取自不同特征值的特征向量必线性无关.

性质5 取自不同特征值的特征向量之和不再是特征向量.

性质6 取自实对称矩阵不同特征值的特征向量必正交.

四、小结

（1）理解特征值与特征向量的概念.

（2） 熟悉掌握特征值与特征向量的求法.

（3） 掌握特征值与特征向量的性质.

五、作业

书 习题五 P139

19(2), 9, 10, 12

思考题：

设4阶方阵A满足条件：$\det(3E+A)=0$，$AA^T=2E,\det A<0$，求A^*的一个特征值．