第三节　向量组的秩

- 最大无关组和秩的定义
- 向量组的秩和矩阵的秩的关系

一、最大无关组和秩的定义

定义 5 设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

(i) 向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

(ii) 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量(如果 A 中有 $r+1$个向量的话)都线性相关.

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组(简称最大无关组)；最大无关组所含向量个数 r 称为向量组的秩，记作R_A.

例 已知

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$$

试求向量组α_1，α_2，α_3的秩及一个最大线性无关组.

注：

(1)只含零向量的向量组没有最大无关组，规定它的秩为 0.

(2) 线性无关向量组 A 自己就是一个最大无关组.

(3) 向量组的最大无关组一般情况下不唯一.

(4) 向量组A和它的最大无关组 A_0 等价.

二、最大无关组的等价定义

推论 设向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 A 的一个部分组，且满足

(i) 向量组 A_0 线性无关；

(ii) 向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示.

那么向量组 A_0 便是向量组 A 的一个最大无关组.

只需证任取 A 中 $r+1$ 个向量必线性相关

不妨设这 $r+1$ 个向量构成的向量组 A'，

由条件 (ii) 得到向量组 A' 都能由向量组 A_0 线性表示，

$r+1>r=R(A_0)=R(A_0,A')\geq R(A')$

则向量组 A' 必线性相关

最大无关组的定义

设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，满足

(i) 向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

(ii) 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

或(ii) 向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示.

那么向量组 A_0 便是向量组 A 的一个最大无关组.

三、向量组的秩和矩阵的秩的关系

引例 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 15 & -6 & 5\\ 0 & 1 & -10 & 5 & -4\end{pmatrix}$,

求A的列向量组α_1，α_2，α_3，α_4，α_5的秩和一个最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示．

分析：

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-2&2\\2&-1&0&1&0\\3&-3&15&-6&5\\0&1&-10&5&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&5&-2&2\\0&1&-10&5&-4\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-5&3&0\\0&1&-10&5&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则$R(A)=3$，　　非零子式$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&-1&0\\3&-3&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&-4\\0&0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

下证α_1，α_2，α_5为A的列向量组的一个最大无关组.

从上述例子中可见：若 D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式，则 D_r 所在的 r 列即是列向量组的一个最大无关组，D_r 所在的 r 行即是行向量组的一个最大无关组.

定理 6 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩.

注：今后向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩也记作 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

练习 设向量组：$\alpha_1=[-1,-1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=[1,2,1,-1]^{\mathrm{T}}$，

$$\alpha_3=[0,1,1,-1]^{\mathrm{T}},\alpha_4=[1,3,2,1]^{\mathrm{T}},\alpha_5=[2,6,4,-1]^{\mathrm{T}}$$

试求向量组的秩及其一个最大线性无关组，并将其余向量用这个最大无关组线性表示。

解：作矩阵 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right]$，对 A 作初等行变换将其化为行最简形矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\alpha_3=?\ \alpha_1+?\ \alpha_2+?\ \alpha_4$

$\Leftrightarrow y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_3\alpha_4=\alpha_3$ 的唯一解

$\Leftrightarrow(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_3)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

即 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+0\cdot\alpha_4$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 A 的列向量组的一个最大无关组，

故秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$且$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4$

四. 小结

（1）会证明向量组最大无关组.

（2）会求向量组的秩和最大无关组.

五、作业

书 习题四 P111

14(2), 15, 16