福建师范大学（公共课） 数计 学院

2019 — 2020 学年第 二 学期考试 B 卷

知明行笃 立诚致广

考生信息栏 学院______ 系______ 专业______ 年级______ 姓名______ 学号______

装 订 线

专　　业：全校各专业　　年　　级：2018 级等

课程名称：线性代数　　任课教师：唐嘉等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2020 年____月____日 上 午____点____分

题号	一	二	三					总得分
	1-5	5-10	11	12	13	14	15	
得分								

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

一. 单项选择题: 1-12 小题，每小题 3 分，共 36 分. 请将所选项前的字母填在答题纸上.

1.设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2+5A-6E=O$，其中 E 为单位矩阵，则下列说法正确的是（　　）.

(A) $A=E$　　(B) $A+6E=O$　　(C) $|A+6E|=0$　　(D) $|A|\neq 0$

2.设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{13} & 2a_{12}+a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & 2a_{22}+a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & 2a_{32}+a_{33} & a_{31} \end{pmatrix}$，则（　　）.

（A） $B=AE(1,3)E(2(2))E(12(1))$　　（B） $B=AE(1,3)E(21(2))$

（C） $B=AE(1,3)E(2(2))E(32(1))$　　（D） $B=AE(2(2))E(12(1))E(1,3)$

3.设 A 为 2×3 的矩阵, B 为 3×2 的矩阵, 则下列说法正确的是（　　）.

(A) $|AB|=0$　　(B) $|BA|=0$　　(C) $|AB|=|BA|$　　(D) $|AB|\neq0$

4.设 n 阶方阵 A 经过有限次初等变换化为 B, 则下列说法**错误**的是（　　）.

(A) A 可逆的充要条件是 B 可逆　　(B) $|A|=|B|$

(C) A 的列向量组线性无关当且仅当 B 的列向量组线性无关　　(D) $R(A)=R(B)$

5.下列矩阵是正交矩阵的是（　　）.

(A) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_2^2+x_3^2-4x_1x_3+6x_2x_3$ 的矩阵为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7.令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 满足矩阵方程 $AXB=C$, 则 X 为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

8. 已知 A 为 3×4 的矩阵, $R(A)=3$, η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的两个不同的解, k_1、k_2 为任意常数, 则线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解可表成（　　）.

（A）$k_1\eta_1+k_2\eta_2$　（B）$k_1\eta_1+k_2(\eta_2-\eta_1)$　（C）$\eta_1+k_1(\eta_2-\eta_1)$　(D) $\eta_1+k_2\eta_2$

9. 设向量组 A：$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则向量组 A 的一个最大无关组为（　　）.

（A）α_1,α_2　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　（D）α_2,α_4

10.下列矩阵是正定矩阵的是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11.设两组列向量分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\beta_1,\beta_2$,且$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$可经初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则下列说法正确的是（　　）.

（A）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\beta_1,\beta_2$等价

（B）向量组β_1,β_2能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,但向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由向量组$\beta_1,\beta_2$线性表示

（C）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$能由向量组$\beta_1,\beta_2$线性表示,但向量组$\beta_1,\beta_2$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

（D）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由向量组$\beta_1,\beta_2$线性表示,向量组$\beta_1,\beta_2$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

12. 下列矩阵可以对角化的是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

二. 判断题：13-24 小题，每小题 2 分，共 24 分.

13. 设 A,B 为 n 阶方阵, 则一定有 $R(A+B)=R(A)+R(B)$.　（　　）

14. 二次型的标准形是唯一的.　（　　）

15. 若矩阵 A 与矩阵 B 是同阶的正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.　（　　）

16. 设 A 为 3 阶方阵, 则$|E(1,2)AE(3(1))|=|A|$.　（　　）

17. 设矩阵 A 的秩为 r, 则矩阵 A 所有的 r 阶子式都不为零.　（　　）

18. 设线性方程组 $A_{n\times n}x=b$ 的系数矩阵的行列式等于零, 则该方程组无解.　（　　）

19. 设 A,B 为 n 阶可逆矩阵, 则$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.　（　　）

20. 任意可逆矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积.　（　　）

21. 若η_1和η_2是非齐次线性方程组 $Ax=b$的解，则$\eta_1+\eta_2$也是非齐次线性方程组 $Ax=b$的解.（ ）

22. 设η是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_t$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，则$\eta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_t$一定线性无关. （ ）

23. 若矩阵 A,B 合同, 则 A,B 有相同的特征值. （ ）

24. 设λ_1,λ_2是矩阵 A 的两个不同特征值, ζ_1,ζ_2和β_1,β_2分别是对应于λ_1,λ_2的线性无关的特征向量组, 则向量组$\zeta_1,\zeta_2,\beta_1,\beta_2$一定线性无关. （ ）

三. 解答题:25-27 小题, 共 40 分.（要求写出证明过程或演算步骤）

25.（12 分）设3元非齐次线性方程组 $Ax=b$，

$$\text{其中 } A=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}5\\ 2\\ -11\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

当λ为何值时, 方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解（**要求用特解及其对应的齐次线性方程组的基础解系表示**）.

26.（16 分）已知 $\beta_1=(-1,0,0)^T,\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=(0,0,-1)^T$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基, 设

$$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(2,2,-1)^T,$$

（1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

（2）求由基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵 P；

（3）设α在基β_1,β_2,β_3下的坐标为$1,-4,2$，求α 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标 .

27.（12 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$,

（1）求 A 的所有特征值和特征向量;

（2）求正交矩阵Q及对角矩阵Λ,使得$Q^{-1}AQ=\Lambda$.