福建师范大学（公共课） 数信 学院

2019 — 2020 学年第 二 学期 C 卷

知明行笃 立诚致广

专　　业：全校各专业　　　　年　　级：2018 级等

课程名称：线性代数　　　　任课教师：李德梅等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　　　考试用时：120 分钟

考试时间：2020 年 6 月 26 日 上 午 9 点 00 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

考生信息栏　学院________ 系________ 专业________ 年级________ 姓名________ 学号________

装　订　线

一. 单项选择题（1~12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1．设 A,B 为 n 阶方阵，且满足等式 $AB=E$，则必有（ B ）

A. $A=E$或$B=E$;　　　　B. $BA=E$;

C. $|A|=1$或$|B|=1$;　　　　D. $R(A)<n$.

2．设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，若非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=b$ 有解， 则必有（ C ）

A. $R(A)=n$；　　　　B. $R(A)<R(A,b)$；

C. $R(A)=R(A,b)$;　　　　D. $R(A)<n$.

3．设 A,B 为 n 阶方阵，若 $R(A)=3$ 且齐次线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，则 $R(AB)=$（ A ）

A. 3；　　B. n；　　C. $n-1$;　　D. 0.

4．若向量 $b=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 不能由向量组 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}$ 线性表示，则 $a=$（ A ）

A. -1；　　B. 3；　　C. -1或 3；　　D. 0.

$\begin{matrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2.\end{matrix}$

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一个基，则下面向量组也是 R^3 的一个基的是（ D ）

A. $\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_1-3\alpha_2$;　　　　B. $\alpha_1-2\alpha_2,2\alpha_2-3\alpha_3,3\alpha_3-\alpha_1$;

C. $0,\alpha_1,\alpha_2$;　　　　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3$.

6. 已知四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，若 η_1,η_2 是它的两个不同的解向量，则该方程组的通解为（ C ）

设非齐为 $Ax=b$.

非齐+特解

A. $k_1\eta_1+k_2\eta_2$，k_1,k_2 为任意数；　解题：$A\eta_1=b$　B. $k\eta_1+(\eta_1-\eta_2)$，k 为任意数；

C. $\eta_1+k(\eta_2-\eta_1)$，k 为任意数；　$A\eta_2=b$　D. $2\eta_1+k(\eta_2-\eta_1)$，k 为任意数

$A(\eta_1-\eta_2)=0$. $R=3$. ∴解向量 $s=n-R=1$

7. 设 $p=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&a&1\\3&b&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a+b=$（ C ）

$\left|\begin{matrix}-1-\lambda&0&0\\2&a-\lambda&1\\3&b&-1-\lambda\end{matrix}\right|=0$.

A. -4;　　B. -3;　　C. -7;　　D. -1.

$\lambda=-1$. $a=-4$.

8. 下列矩阵为正定矩阵的是（ B ）　各阶主子式为正

A. $\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$;　B. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}$;　C. $\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$;　D. $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

9. 设 3 阶实对称矩阵 A 的全部特征值为 0, 2, 2，则齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$ 的基础解系所含解向量的个数为（ C ）

存在正交矩阵 G，使 $G^{-1}AG=\Lambda$，$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow G^{-1}(A-2E)G=$

A. 0；　　B. 1；　　C. 2；　　D. 3.

10. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化，则 $a=$（ A ）

特征值个数＝基础解系个数　　0, 0, 3.

A. 0；　　B. 1；　　C. 2；　　D. 3.

11. 设向量 $\alpha=(0,1,1)^T,\beta=\left(-2,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)^T$，则向量 α 与向量 β 的夹角为（ B ）

A. 0；　　B. $\dfrac{\pi}{4}$；　　C. $\dfrac{\pi}{3}$；　　D. $\dfrac{\pi}{2}$.

12. 设 3 阶实对称矩阵 A 的全部特征值为 $-1,1,2$，则实二次型 $f(x)=x^TAx$ 的规范形可以是（ A ）

A. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$;　B. $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$;　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$;　D. $-y_1^2+y_2^2+2y_3^2$.

二．判断题（ 1~12 小题，每小题 2 分，共 24 分）

1． 三阶行列式$\left|E(2(-2))\right| = -2$. （ √ ）

2. 设 n 阶方阵 A 和 B 都是不可逆矩阵，则矩阵 $A+B$ 也一定是不可逆矩阵.（ × ）

3. 设 A 为 3 阶方阵且$|A| = 2$，则$\left|-2A^{-1}\right| = -4$.（ √ ）

4. 非零向量组的最大无关组一定是唯一的.（ × ）

5. 三元二次型 $f(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} x$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.（ × ）

6. 设 n 阶方阵 A 和 B 等价，则$|A| = |B|$. （ × ）

7. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$，若 $R(A) = R(B)$，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 等价.（ × ）

8. 设矩阵 $A_{4\times 3}$ 的列向量组线性相关，则 $R(A) = 2$.（ × ）

9. 设向量组 $\alpha_1 = (1,0,0)^T, \alpha_2 = (1,1,0)^T, \alpha_3 = (1,1,1)^T, \beta = (3,2,1)^T$，则向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且表示式唯一.（ √ ）

10. 设 n 阶方阵 A 的列向量组是一个正交向量组，则矩阵 A 为正交矩阵.（ × ）

11. 设 p 为 n 阶方阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量，则 $-2p$ 为方阵 A 对应于特征值 -2λ 的特征向量.（ × ）

12. 设 n 阶方阵 A 和 B 相似，则方阵 A 和 B 相似于同一个对角矩阵. （ × ）

以下题答题均要求写出证明过程或演算步骤.

三. （12 分）问 a 取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$有唯一解、无解或有无穷多解？在有无穷多解时求出通解(**要求用其特解及对应的齐次线性方程组的基础解系表示**).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-3) & (a-3) \end{pmatrix}$$

$a-3$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

解:（1）增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & (a-3) \end{pmatrix} \text{..........(2 分)}$$

故当 $(a-3)(a+1)\neq 0$ 时，即当 $a\neq 3$ 且 $a\neq -1$ 时，$R(\boldsymbol{A},b)=R(A)=3$，

从而原方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解。

当 $a=-1$ 时，$R(\boldsymbol{A},b)>R(A)$，故此方程组无解。

因此，当 $a=3$ 时，$R(\boldsymbol{A},b)=R(A)=2<3$，方程组有无穷多解。 ——-（8 分）

此时，

$$B\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

并由上式可得 $Ax=0$ 的一个基础解系：$\xi=(-7,3,1)^{\mathrm{T}}$，$Ax=b$ 的一个特解 $\gamma_0=(3,-1,0)^T$，因此，$Ax=b$ 的通解为 $x=c\xi+\gamma_0, c$ 为任意常数。 ——-（12 分）

四．（12 分）设向量组 $\alpha_1=(0,0,1)^T, \alpha_2=(0,1,1)^T, \alpha_3=(1,1,1)^T$ 和 $\beta_1=(-1,2,2)^T$, $\beta_2=(2,2,-1)^T, \beta_3=(-2,1,-2)^T$ 是 3 维向量空间 R^3 的两个基.

(1) 求基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵；

(2) 设向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中的坐标为 1,1,1，求向量 γ 在基 β_1,β_2,β_3 中的坐标.

解：记 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(1) 由 $(B,A)=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 得

所求的过渡矩阵为$P=B^{-1}A=\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$——-（8 分）

（2） 由$\gamma=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=Bx$

得所求的坐标为$x=B^{-1}A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$——-（12 分）

五.（16 分）设三元二次型$f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

（1） 写出二次型f的矩阵A并求矩阵A的全部特征值和特征向量；

（2）求一个**正交变换**$x=Py$把二次型$f(x)$化为标准形，并写出相应的**标准形**；

（3） 证明：实矩阵$A+2E$为正定矩阵.

解：（1） $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$——-（2 分）

$|A-\lambda E|=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$.

A的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$.　　——-（4 分）

对$\lambda_1=\lambda_2=2$，$(A-2E)x=0$的一个基础解系:

$\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$

则 A对应于特征值 2 的全部特征向量为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\left(k_1,k_2\text{不同时为}0\right)$

对$\lambda_3=-1$，$(A+E)x=0$的一个基础解系： $\alpha_3=(1,1,1)^T$

则 A对应于特征值-1 的全部特征向量为$k_3\alpha_3\left(k_3\neq 0\right)$——-（7 分）

对α_1,α_2正交化、单位化：

$\alpha_1 = (-1,1,0)^T$
$\alpha_2 = (-1,0,1)^T.$

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

对α_3单位化：$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ——-（12 分）

令$P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $x = Py$ 为正交变换，

则对应的标准形为 $f(x) = f(Py) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$ ——-（14 分）

$\Rightarrow$（系数的特征值）

(3) 由 $(A+2E)^T = A^T + 2E = A + 2E$ 得 $A+2E$ 为对称矩阵

又 $A+2E$ 的三个特征值为 4, 4, 1，故 $A+2E$ 为正定矩阵.

——-（16 分）