

## 2020—2021学年第一学期《高等数学A》期末考试

### 试题A

#### 一、单选题(每小题3分，共15分)

1. 以下选项不是一阶线性微分方程  $y' + P(x)y = Q(x)$  的通解的是 ( ) .
  - A.  $e^{-F(x)} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)}dx + C)$ , 其中  $F(x)$  为  $P(x)$  的一个原函数,  $C$  为任意常数
  - B.  $e^{-F(x)-C} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)+C}dx + C)$ , 其中  $F(x)$  为  $P(x)$  的一个原函数,  $C$  为任意常数
  - C.  $e^{-F(x)+C} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)+C}dx + C)$ , 其中  $F(x)$  为  $P(x)$  的一个原函数,  $C$  为任意常数
  - D.  $e^{-F(x)+C} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)-C}dx + C)$ , 其中  $F(x)$  为  $P(x)$  的一个原函数,  $C$  为任意常数
2. 设  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ , 则  $f(x, y)$  在点  $(1, 1)$  处沿增加最快的方向的方向导数为( ).
  - A. 2 ;
  - B.  $\sqrt{2}$  ;
  - C. 0;
  - D.  $-\sqrt{2}$  .
3. 设  $f(x)$  为连续函数,  $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx$ , 则  $F'(2) =$  ( ).
  - A.  $f(2)$  ;
  - B.  $2f(2)$  ;
  - C.  $-f(2)$  ;
  - D. 0 .
4. 设曲面  $\Sigma$  是抛物面  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  在  $xoy$  面上方的部分, 曲面  $\Sigma_1$  是曲面  $\Sigma$  在第一卦限中的部分, 则下列式子中成立的是 ( ).
  - A.  $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$  ;
  - B.  $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$  ;
  - C.  $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$  ;
  - D.  $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$  .
5. 设  $u_n = (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 则级数 ( ).
  - A、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  都收敛
  - B、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  都发散
  - C、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  发散
  - D、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  收敛

#### 二、填空(每小题3分，共15分)

1. 微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{e^x}$  的通解为\_\_\_\_\_.
2. 设  $\Phi(u, v)$  具有连续偏导数,  $z = f(x, y)$  是由方程  $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$  所确定的函数, 则  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = \text{_____}$ .
3. 化二次积分  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$  为极坐标形式的二次积分, 则  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \text{_____}$ .
4. 第二类曲线积分  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$  化为第一类曲线积分是  
\_\_\_\_\_.

5. 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 2019)$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \text{_____}$ .

### 三、计算题(每小题8分, 共40分)

1. 求微分方程  $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$  的通解.
2. 求函数  $u = f(x^2 + y^2 + z^2, xyz)$  的二阶偏导数  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数.
3. 求锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  含在圆柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  内部的那部分面积.
4. 求曲线积分  $\int_L (x+y) dx + (x-y) dy$ , 其中  $L$  沿  $x^2 + y^2 = a^2 (x \geq 0, y \geq 0)$ , 逆时针方向.
5. 将函数  $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$  展开成  $x$  的幂级数.

**四、(10分)** 计算第二类曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - 2z dx dy$ , 其中

$\Sigma$  是曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  被平面  $z=2$  所截部分的外侧.

**五、(10分)** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$  的和函数, 并给出收敛域.

**六、(10分)** 抛物面  $z = x^2 + y^2$  被平面  $x + y + z = 4$  截成一椭圆, 求这椭圆上的点到原点的距离的最小值和最大值.