第八章　假设检验

第七章研究的问题包括

1、参数等于什么？

2、参数在什么范围？

第八章研究的问题：

3、一个关于总体分布的判断正确吗？

例如：$\theta = 2$？ $\theta \neq 2$？ $\mu = 0$？ $\mu > 0$？ $\mu < 0$？ 等等。

例1　某车间用一台包装机包装葡萄糖, 包装的袋装糖重量是一个随机变量，它服从正态分布。当机器正常时,其均值为0.5公斤,标准差为0.015公斤. 某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖9袋，称得净重为(公斤):

0.497　0.506　0.518　0.524　0.498　0.511　0.520　0.515　0.512

问机器是否正常?

以X 代表任取一代糖的重量，则X 服从正态分布。一般而言，方差比较稳定，在这个问题中，我们设$\sigma=0.015$ 。所以 $X \sim N(\mu, 0.015^2)$，μ 未知。

问题：$\mu=0.5$ 还是 $\mu \neq 0.5$?

统计假设——关于总体分布的一个判断。

注意：这里的“判断”是预先不知道到底是否正确的那种判断。不同于“已知条件”。

而“$\sigma=0.015$ ”是 已知条件。

上述的μ=0.5，由于是原来的经验，我们把它叫作原假设，记为 $H_0: \mu = 0.5$；而它的对立面（否定）$\mu \neq 0.5$称为备择假设，记为 $H_1: \mu \neq 0.5$。

在一对互为否定的假设中，一般按照以下原则确定原假设：

1、以前的经验作为原假设；

2、不能轻易否定的作为原假设；

3、带等号的一个作为原假设。

注意：不能把自己“认为”对的作为原假设。

假设检验考虑问题的方法类似于“反证法”

注意：1、增大是指“大于”，不增大是指“小于等于”

2、没有变化是指“等于”

3、有变化是指“不等于”

4、不能把“希望要的结论”作为原假设。而是要根据前面的原则确定什么是原假设。

记σ_0=0. 015，μ_0=0. 5

由于样本均值$\overline{X}$在μ的附近取值。因此，

如果μ=0.5 的话，$\overline{X}$的观测值应在0.5的附近。

考虑问题的思路：确定一个数$a > 0$,

1) 当$\dfrac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \geq a$ 时否定H_0

2)当$\dfrac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma_0 / \sqrt{n}} < a$ 时不否定H_0，即接受H_0

a的选取：由于$H_0:\mu=\mu_0$不能轻易否定。我们要求：当H_0为真时，否定错了的概率比较小。

即$P\{$当H_0为真时拒绝$H_0\} = P_{\mu_0}\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \geq a\right\} \overset{\text{记为}}{=} \alpha$

比较小。一般取α为0. 05，0. 01或0. 1

当H_0为真时，$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

取$a = z_{\alpha/2}$即可

综上所述： 检验问题是$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$

1、选取统计量$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$；

2、当H_0为真时，$\mathrm{Z} \sim N(0,1)$;

3、$|\mathrm{Z}| \geq z_{\alpha/2}$时拒绝$H_0$；$|\mathrm{Z}| < z_{\alpha/2}$时接受$H_0$

$a)$ $\mathrm{Z} = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$称为检验统计量；

$b)$ α称为显著性水平；

$c)$ $|\mathrm{Z}| \geq z_{\alpha/2}$称为拒绝域。

例1　某车间用一台包装机包装葡萄糖,包装的袋装糖重量是一个随机变量，它服从正态分布。当机器正常时,其均值为0.5公斤,标准差为0.015公斤.某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖9袋，称得净重为(公斤):

0.497　0.506　0.518　0.524　0.498　0.511　0.520　0.515　0.512

问机器是否正常?

解：设总体“一代糖的重量” $X \sim N(\mu, 0.015^2)$。

要检验的假设是：$H_0: \mu = \mu_0 = 0.5$，$H_1: \mu \neq \mu_0$

取显著性水平 $\alpha = 0.05$，则 $z_{0.025} = 1.96$

选取检验统计量 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$

拒绝域为：$|Z| \geq z_{\alpha/2} = 1.96$

由样本算得 $\bar{x} = 0.511$，故

$$|Z| = \frac{|0.511 - 0.5|}{0.015 / \sqrt{9}} = 2.2 > z_{\alpha/2}.$$ 拒绝原假设 H_0

即可以认为该日机器工作不正常。

上述介绍的方法是显著性检验中的一类－－双边显著性检验。除此之外还有“单边”检验

单边检验：有时候我们可能关心如下的问题“总体的均值”是否增大（减小）？

这类问题就是如下的检验问题：

$$H_0: \mu \le \mu_0, H_1: \mu > \mu_0 \qquad (1.3)，右边检验$$

或者

$$H_0: \mu \ge \mu_0, H_1: \mu < \mu_0 \qquad (1.4)，左边检验$$

带等号的作为原假设

例2　公司从生产商购买牛奶。公司怀疑生产商在牛奶中掺水以谋利。通过测定牛奶的冰点，可以检验出牛奶是否掺水。天然牛奶的冰点温度近似服从正态分布，均值$\mu_0 = -0.545^\circ\mathrm{C}$，标准差$\sigma = 0.008^\circ\mathrm{C}$。牛奶掺水可使冰点温度升高而接近于水的冰点温度($^\circ\mathrm{C}$)。测得生产商提交的5 批牛奶的冰点温度，其均值为$\bar{x} = -0.535^\circ\mathrm{C}$。是否可以认为生产商在牛奶中掺了水？取 $\alpha = 0.05$.

解:设总体分布为$N(\mu,0.008^2)$。需检验假设

$H_0:\mu\le\mu_0=-0.545$(即设牛奶未掺水)

$H_1:\mu>\mu_0$(即设牛奶已掺水)为什么？

取检验统计量　$z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

检验统计量取值偏大有利于备择假设，反之有利于原假设。故拒绝域形如 Z≥k

$$P\{\text{当}H_0\text{为真时拒绝}H_0\}$$

$$=P_{\mu\le\mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\ge \mathrm{k}\right\}$$

当$\mu\le\mu_0$时，由$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\le\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}$可得：

事件$\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\ge k\right\}$包含于事件$\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\ge k\right\}$

$$P\{\text{当}H_0\text{为真时拒绝}H_0\}$$

$$= P_{\mu\le\mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \ge \mathrm{k}\right\}$$

$$\le P_{\mu\le\mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \ge k\right\} = P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \ge k\right\}$$

$$= P_{\mu=\mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \ge k\right\} = 1-\Phi(k)$$

拒绝域为 $z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq z_{0.05}=1.645$

现在

$$z=\frac{-0.535-(-0.545)}{0.008/\sqrt{5}}=2.7951>1.645,$$

z落在拒绝域中。所以，在显著性水平$\alpha=0.05$下拒绝H_0，即认为牛奶商在牛奶中掺了水.

类似地可得左边检验问题

$$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$$

的拒绝域为

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \leq -z_\alpha$$ （方差已知时）

表8-1 正态总体均值的检验法（方差已知）

原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
$\mu \le \mu_0$		$\mu > \mu_0$	$z \ge z_\alpha$
$\mu \ge \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$\mu < \mu_0$	$z \le -z_\alpha$
$\mu = \mu_0$		$\mu \ne \mu_0$	$\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
(σ^2已知)			

12月9日

统计假设---一个关于总体分布的判断

第一类错误---拒绝正确的原假设所犯的错误

第二类错误---接受错误的原假设所犯的错误

显著性水平---犯第一类错误的概率

拒绝域---样本（或检验统计量）落入该集合时拒绝原假设

原假设，备择假设，双边检验，单边检验。

显著性检验的基本思想：在控制犯第一类错误的概率的前提下，通过选择适当的检验方法（即拒绝域）使得犯第二类错误的概率尽可能小。

实际情况 / 结论	原假设为真	原假设为假
接受原假设	√	第二类错误
拒绝原假设	第一类错误	√

1、犯第一类错误的概率和犯第二类错误的概率之和最大可以取到1。所以，不可能同时使犯两类错误的概率都小。

2、按上述原则构造的检验称为显著性检验。除此之外还有其他检验方法，我们不学。

3、显著性检验的基本思想：在控制犯第一类错误的概率的前提下，通过选择适当的检验方法（即拒绝域）使得犯第二类错误的概率尽可能小。

注意：1、增大是指“大于”，不增大是指“小于等于”

2、没有变化是指“等于”

3、有变化是指“不等于”

4、不能把“希望要的结论”作为原假设。而是要根据前面的原则确定什么是原假设。