

习题 5.4

(一) 基本习题

1. 填空题:

(1) 当 k _____ 时, 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$ 收敛; 当 k _____ 时, 反常积分 $\int_{-\infty}^0 e^{-kx} dx$ 收敛.

(2) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$, 则 $k =$ _____.

2. 选择题:

(1) 下列结论正确的是 ().

- A. 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ 中有一个发散, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 一定发散
 B. 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 发散, $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 则 $\int_0^{+\infty} [f(x) + g(x)] dx$ 一定发散
 C. 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 发散, $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 则 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 一定发散
 D. 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 则 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 一定发散

(2) 下列反常积分中收敛的是 ().

- A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ B. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ C. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ D. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(3) 反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx =$ ().

- A. 收敛 B. 发散 C. 既不收敛、也不发散 D. 无法判断.

(4) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx (p > 1)$ ().

- A. 收敛 B. 发散 C. 既不收敛、也不发散 D. 无法判断.

(5) 已知反常积分 $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} dx$ 收敛, 则 k 的取值范围为 ().

- A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

(6) 下列反常积分中收敛的是 ().

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx$
 C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x \sin x} dx$ D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cos x} dx$

3. 计算题:

(1) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx;$

(2) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx;$

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx;$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} dx;$

(5) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

(6) $\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

4. 求 c 值使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2c}{x-3c} \right)^{-2x} = \int_c^{+\infty} t e^{-10t} dt.$