§4.1 数学期望

一、数学期望的定义

定义、设离散型随机变量X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k,\quad k = 1, 2, \cdots,$$

若级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛（无穷个可能值时），则称$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

为随机变量X 的数学期望，记为$E(X)$。即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

定义 设连续型随机变量X 的概率密度为$f(x)$,若积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛，则称积分值为随机变量X 的数学期望, 简称期望或均值，记为$E(X)$ 。即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad 。$$

例1 某医院当新生儿诞生时,医生要根据婴儿的皮肤颜色、肌肉弹性、反应的敏感性、心脏的搏动等方面的情况进行评分，新生儿的得分X 是一个随机变量。据以往的资料表明X 的分布律为

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k	0.002	0.001	0.002	0.005	0.02	0.04	0.18	0.37	0.25	0.12	0.01

试求X 的数学期望$E(X)$.

$$
\begin{aligned}
\text{解}: E(X) &= 0\times0.002+1\times0.001+2\times0.002+3\times0.005 \\
&\quad +4\times0.02+5\times0.04+6\times0.18+7\times0.37 \\
&\quad +8\times0.25+9\times0.12+10\times0.01 = 7.15(\text{分})
\end{aligned}
$$

例2 有两个独立工作的电子装置，设它们的寿命（小时）$X_j(j=1,2)$服从指数分布。密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

将这两个装置串联组成整机。求整机寿命 N 的期望。

解. 本题涉及两个随机变量的函数的分布。但我们可以用求随机变量的函数的分布的思路解决问题。

由于$N=\min\{X_1,X_2\}$，当y>0时

$$F_N(y)=P(N\le y)=P(\min\{X_1,X_2\}\le y)$$

$$=1-P(\min\{X_1,X_2\}>y)=1-P(X_1>y,X_2>y)$$

$$=1-P(X_1>y)P(X_2>y)=1-[1-F_{X_1}(y)]^2$$

形式求导得，N 的密度为

$$f_N(y)=2f_{X_1}(y)[1-F_{X_1}(y)] \quad =\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}e^{-2y/\theta}, & y>0, \\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

所以 N 的数学期望为

$$EN=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_N(y)dy=\int_0^{+\infty}\frac{2y}{\theta}e^{-2y/\theta}dy=\int_0^{+\infty} y(-e^{-2y/\theta})' dy$$

$$=y(-e^{-2y/\theta})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-2y/\theta}dy$$

$$=\frac{\theta}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2}{\theta}e^{-2y/\theta}dy=\frac{\theta}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx$$

$$=\frac{\theta}{2}$$

例3 按规定,某车站每天8:00～9:00和9:00～10:00都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间相互独立。其规律为

到站时间	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

一旅客8:20到车站，求他候车的时间的数学期望。

解:设旅客的候车时间为X（单位：分钟），

则X的分布律为

X	10	30	50	70	90
P_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

$$E(X)=10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{36}+70\times\frac{3}{36}+90\times\frac{2}{36}$$
$$=27.22(\text{分})$$

例4　某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式。记使用寿命为X（以年计），规定：

$X \le 1$, 一台付款1500元;

$1 < X \le 2$, 一台付款2000元;

$2 < X \le 3$, 一台付款2500元;

$X > 3$, 一台付款3000元;

设寿命X服从指数分布，概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} e^{-x/10}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

试求该商店一台这种家用电器收费的数学期望

解:先求出寿命X 落在各个时间段的概率。则有

$$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 0.0952$$

类似地， $P\{1 < X \le 2\} = 0.0861$，$P\{2 < X \le 3\} = 0.0779$,

$$P\{X > 3\} = 0.7408$$

故一台家用电器收费Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得$E(Y) = 2732.15$,

即平均一台收费2732.15元

例5 在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此要抽验N个人的血，可以用两种方法进行。(i)将每个人的血分别去检验，这就需验N次。(ii)按k个人一组进行分组，把从k个人抽来的血混合在一起进行检验。如果这混合血液呈阴性反应，就说明k个人的血液都呈阴性反应。这样这k个人的血就只需验一次。若呈阳性，则再对这k个人的血液分别进行化验。这样，k个人的血总共要化验k+1次。假设每个人化验呈阳性的概率为p，且这些人的试验反应是相互独立的。试说明当p较小时，选取适当的k，按第二种方法可以减少化验的次数。并说明k取什么值时最适宜。

解：本题相当于问平均每人所需检验次数何时较少？

采用分组方法：记$q=1-p$，则k个人的混合血呈阴性的概率为q^k，k 个人的混合血呈阳性反应的概率为$1-q^k$. 设以k 个人为一组时, 组内每人“占有”的化验次数为X, 则X 是一个随机变量, 其分布律为

$$P\{X=\frac{1}{k}\}=q^k,\quad P\{X=\frac{k+1}{k}\}=1-q^k$$

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}$$

所以，当$-q^k+\frac{1}{k}<0$时，分组法较好。

例如，当p=0. 1时，取k=4, 则$1-q^k+\frac{1}{k}\approx 0.594.$

分组法平均可以节约近40% 的工作量。

例6　设$X \sim \pi(\lambda)$（泊松分布），求$E(X)$.

解：X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

即　$$E(X)=\lambda$$

例7 设$X \sim U(a,b)$, 求$E(X)$.

解: X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a<x<b \\ 0, \quad\quad 其它\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

即数学期望位于区间(a,b) 的中点.

二、函数的数学期望

定理. 设$Y = g(X)$(g是连续函数)

(1)若$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$ 且$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| p_k < +\infty$，则

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

(2)若X的概率密度为$f(x)$且$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < +\infty$，则

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

定理可推广为

例　设$Z=g(X,Y)$, (X, Y)的密度为$f(x,y)$,

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

这里要假定上式右边的积分绝对收敛.

对离散型也类似:

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

这里设上式右边的级数绝对收敛(有无穷项时)

补例　设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E(X)$.

解： $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$E(X-\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)f(x)dx \quad =\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\left(\text{令}y=\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad =\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \quad =0$$

$$\therefore \quad EX=E(X-\mu)+\mu=\mu$$

例8 设风速V在$(0,a)$上服从均匀分布，飞机机翼受到的正压力W是V的函数：$W = kV^2$（$k > 0$是常数），求W的数学期望。

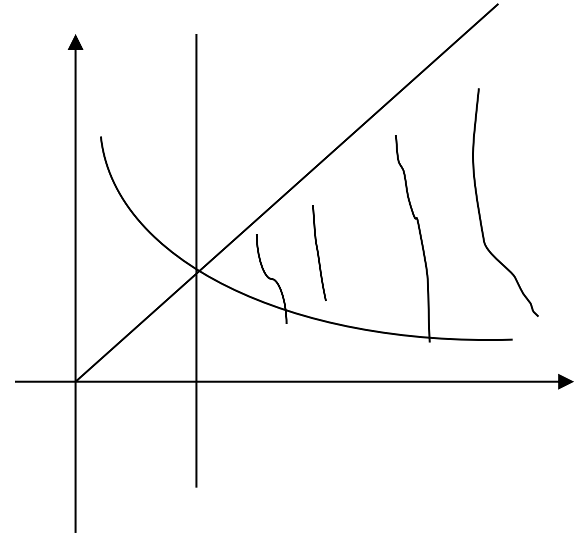
解：风速V的密度为 $f(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, 0 < v < a \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$

$$E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} kv^2 f(v)dv$$

$$= \int_0^a kv^2 \frac{1}{a} dv \quad = \frac{1}{3} ka^2$$

例9 设随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x, x>1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



求数学期望$E(Y), E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$.

解：$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dydx =\int_1^{\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^3y}dydx$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}[\ln y]_{\frac{1}{x}}^{x}dx =3\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx$$

$$=\left[(-\frac{3}{2x^2})(\ln x)\right]_1^{\infty}+\frac{3}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}dx =\frac{3}{4}$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)dydx$$

$$=\int_{1}^{+\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dy \quad =\int_{1}^{+\infty}\left[\frac{-3}{4x^4y^2}\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}\right]dx$$

$$=\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4x^2}-\frac{3}{4x^6}\right)dx \quad =\left(\frac{3}{20x^5}-\frac{3}{4x}\right)\Bigg|_{1}^{+\infty}$$

$$=\frac{3}{5}$$

例10　某公司计划开发一种新产品并试图确定该产品的产量。他们估计出售一件产品可获利m 元，而积压一件产品导致n 元的损失。再者,他们预测需求量Y (件)服从指数分布，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-y/\theta}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases},\qquad \theta>0$$

问要获得利润的数学期望最大，应生产多少件产品（m,n,θ均为已知）？

解：设生产x 件，则获利Q 是Y 的函数：

$$Q=\begin{cases} mY-n(x-Y), & 若Y<x \\ mx, & 若Y\geq x \end{cases}$$

$$E(Q)=\int_0^{\infty} Qf_Y(y)dy$$

$$=\int_0^x [my-n(x-y)]\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}dy+\int_x^{\infty} mx\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}dy$$

$$=\int_0^x [my-n(x-y)]\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}dy+\int_x^{\infty} mx\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta}dy$$

$$=(m+n)\theta-(m+n)\theta e^{-x/\theta}-nx$$

令$\dfrac{d}{dx}E(Q)=(m+n)e^{-x/\theta}-n=0$得 $x=-\theta\ln\left(\dfrac{n}{m+n}\right)$

作为x的函数，当$x=0$时$E(Q)=0$，当x趋于无穷时，$E(Q)$趋于负无穷。所以$E(Q)$在上述x处取最大值。

所以，当$x=-\theta\ln\left(\dfrac{n}{m+n}\right)$时，$E(Q)$ 取最大值.

例如取$\theta = 10000$, $m = 500$元, $n = 2000$元,

$$x = -10000\ln\left(\frac{2000}{500+2000}\right) \approx 2231.4$$ 时，EQ 最大。

即取$x = 2231$件.

数学期望的性质

1^0 设C是常数,则有$E(C)=C$

2^0 $E(CX)=CE(X)$

3^0 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

4^0 设X，Y 是相互独立的随机变量,

则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$

1^0～3^0 可以合并为$E(\sum_{k=1}^{n}a_kX_k)=\sum_{k=1}^{n}a_kE(X_k)$

即：线性组合的期望等于期望的线性组合

10月17日

例12:一民航送客车载有20位旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车。如到达一个车站没人下车就不停车。以X表示停车的次数，求E(X)(设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立)。

解：第 i 个站有人下车时令$X_i=1$，否则令$X_i=0$，则

$$X=\sum_{i=1}^{10}X_i \qquad P\{X_i=0\}=0.9^{20}, \quad P\{X_i=1\}=1-0.9^{20}$$

$$\therefore \quad EX=\sum_{i=1}^{10}EX_i=10[1-0.9^{20}]$$

X不服从二项分布

例13 设一电路中电流I(安培)与电阻R(欧姆)是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别如下，试求电压$V=IR$（伏特）的均值。

$$g(i)=\begin{cases}2i, 0\le i\le 1\\ 0, \text{其他}\end{cases}\qquad h(r)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{9}, 0\le r\le 3\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

$$\text{解}: E(V)=E(IR)=E(I)E(R)$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty} ig(i)di\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)dr\right]=\left[\int_0^1 2i^2 di\right]\left[\int_0^3 \frac{r^3}{9}dr\right]$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{3}{2}$$

例11自己看

作业：5，7，8, 9