1．设 n 阶方阵 A 满足 $|A| \neq 0$，$k \neq 0$, 则 $(kA)^* =$（　　）

(A) kA^*　　(B) $k^n A^*$　　(C) $k^{n-1}A^*$　　(D) A^*.

2．设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则下列向量中可作为 A 的对应于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量的是（　　）

(A) $(0,0,0)^T$；　　(B) $(0,2,-1)^T$；

(C) $(1,0,-1)^T$；　　(D) $(0,1,1)^T$.

3．已知 $A=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，则 $a+b$ 的值为（　　）

(A) $\sqrt{2}$；　　(B) $-\sqrt{2}$；　　(C) 0；　　（D） 1.

4. 已知 A 为 n 阶方阵且满足 $R(A)<n$，则下列说法一定正确的是（　　）

(A) A 中必有一列元素全为 0；　　（B） A 中必有一列向量是其余列向量的线性合；

（C）齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解；（D） 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 一定有无穷解.

5. 设向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，则下列向量组中线性无关的是（　　）

(A) $a_1-a_2, a_2-a_3, a_3-a_1$；　　(B) a_1,a_2,a_3+a_1；

(C) $a_1,a_2,2a_1-3a_2$；　　(D) $a_2,a_3,2a_2+a_3$.

6. 设三阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则 A 一定不与（　　）相似。

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

7. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 仅有零解的充要条件是（　　）。

(A) A 的行向量组线性无关；　　(B) A 的行向量组线性相关；

(C) A 的列向量组线性无关；　　(D) A 的列向量组线性相关.

8．若 X0 是非齐次线性方程组 AX=b（b$\neq$0）的解，X1 是导出组 AX=0 的解，则 $2X^0+3X^1$ 是线性方程组（　）的解。

A. AX=b；　B. AX=2b；　C. AX=3b；　D. AX=0

9. 已知 β_1、β_2 是非齐次线性方程组 Ax=b 的两个不同的解，α_1、α_2 是其导出组 Ax=0 的一个基础解系，k1、k2 为任意常数，则方程组 Ax=b 的通解可表成　　（　　）

A. $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$；　B. $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

C. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$；　D. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

10. 已知四元齐次线性方程组 AX=0，若系数矩阵 A 的秩 r（A）=3，则其基础解系包含解向量的个数是　（　　）

A. 1；　B.　2；　C.　3；　D.　4

11．设 3 阶方阵 A 的特征多项式为 $|A-\lambda E|=(\lambda+2)(\lambda+3)^2$，则 $|A|=$________.

12．设 A 与 B 相似且 $A=\begin{bmatrix}6 & a\\ -1 & b\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，则 $a=$_______，　$b=$_______。

13．设 A 为 2 阶方阵，矩阵 $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，则 P^{-1}=__，A^n=__.

14．设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维非零列向量，如果 $A\alpha_i=i\alpha_i\ (i=1,2,3)$，则下列结论正确的是（　　）

(A)　若 $P=[\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3]$，则有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$；

(B)　若 $P=[\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_3]$，则有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$；

(C)　若 $P=[2\alpha_1,-\alpha_2,5\alpha_3]$，则有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$；

(D) 若 $P=\left[\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1\right]$，则有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$

15.设向量 $\alpha_1=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})^T,\alpha_2=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^T$，$\alpha_3=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T$ 为 R^3 的一个标准正交基，则向量 $\alpha=\left(1,-1,0\right)^{\mathrm{T}}$ 在这个基中的坐标为__________.

16. 若 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}a_{11} & 3a_{12} & 0\\ a_{21} & 3a_{22} & 0\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix}=$____________.

17. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2+a & 0\\ 0 & 0 & 1-a\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a 的取值范围是__________.

18. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，其全部特征值为 $-1,1,2$，则实二次型 $f(x)=x^TAx$ 的规范形为___________.

19. 设矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 3\\ -2 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 7 & 5\\ -1 & -2 & -5 & -3\\ 2 & -3 & -4 & -1\end{pmatrix}$.利用初等行变换

（1）证明向量组 α_1,α_2 与向量组 α_3,α_4 等价；

（2）证明齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解；

（3）求 A 的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用该最大线性无关组表示.

20．当 k 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-4\\ x_1+x_2+kx_3=4\\ -x_1+kx_2+x_3=k^2\end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解？并在有无穷多解时，求出通解(**要求用其特解及对应的齐次线性方程组的基础解系表示**).

解：法 1：$\left|A\right|=\left(k+1\right)\left(4-k\right)$

当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时，由克拉默法则得方程组有唯一解；

当$k=-1$时，$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\1&1&-1&4\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\0&2&3&8\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

由$R(A)=2<3=R(A,\beta)$得方程组无解；

当$k=4$时，$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\1&1&4&4\\-1&4&1&16\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

由$R(A)=R(A,\beta)=2<3$得方程组有无穷多解，

取x_3为自由未知量得特解为$\gamma_0=(0,4,0)^T$

对应齐次线性方程组的基础解系为$\xi=(-3,-1,1)^T$

方程组的通解为$x=\gamma_0+c\xi$，（其中c为任意常数）．

法 2：$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\0&2&k-2&8\\0&0&-(k-4)(k+1)&2k(k-4)\end{pmatrix}$

当$k\neq-1$且$k\neq4$时，由$R(A)=R(A,\beta)=3$得方程组有唯一解；

当$k=-1$时，$(A,\beta)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\0&2&3&8\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

由$R(A)=2<3=R(A,\beta)$得方程组无解；

当$k=4$时，$(A,\beta)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

由$R(A)=R(A,\beta)=2<3$得方程组有无穷多解，

取x_3为自由未知量得特解为$\gamma_0=(0,4,0)^T$

对应齐次线性方程组的基础解系为$\xi=(-3,-1,1)^T$

方程组的通解为$x=\gamma_0+c\xi$，（其中c为任意常数）．

21.设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$．

（1）写出二次型 f 的矩阵 A，并求出 A 的全部特征值和特征向量；

（2）求一个正交变换 $x = Ty$ 把二次型 f 化成标准形，并写出标准形.