§2.3 随机变量的分布函数

用X代表任取一个人的身高，我们会关心什么?

是形如**P{X =1.5}**的概率吗?

人们关心的往往是形如**$P\{a<X<b\}$**或**$P\{a<X\leq b\}$**的概率。

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\}$$

定义 设X为随机变量，称函数

$$F(x)=P(X\le x),\quad -\infty<x<+\infty$$

为 X 的（累积概率）**分布函数.**

用分布函数计算 X 落在$(a,b]$里的概率：

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

分布函数的性质:

1、$F(x)$ 单调不减（单增），即

当 $x_1 < x_2$ 时，$F(x_1) \le F(x_2)$

2、 $0 \le F(x) \le 1$ 且

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

简记：$F(+\infty) = 1, \ F(-\infty) = 0$

3、$F(x)$ 右连续，即

$$F(x+0) \overset{\triangle}{=} \lim_{t \to x+0} F(t) = F(x)$$

用分布函数表示概率

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a-0)$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$$

请填空

$$P(a \le X \le b) = \underline{\quad F(b) - F(a-0) \quad}$$

$$P(a < X < b) = \underline{\quad F(b-0) - F(a) \quad}$$

$$P(a \le X < b) = \underline{\quad F(b-0) - F(a-0) \quad}$$

例1：设随机变量X的概率分布为：

$$P\{X=-1\}=0.25,\quad P(X=2)=0.5$$

$$P(X=3)=0.25$$

求其分布函数。

注意：$P(X\le x)=P(-\infty<X\le x)=P(X\in(-\infty,x])$

当$x<-1$时：　$F(x)=P(X\le x)=0.$

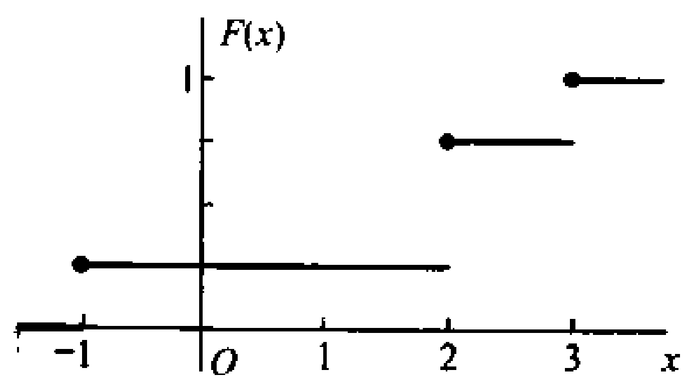
当$-1\le x<2$时：　$F(x)=P(X\le x)=$ $P(X=-1)=0.25.$

当$2 \le x < 3$时：

$$F(x) = P(X \le x) = P(X = -1) + P(X = 2) = 0.75.$$

当$3 \le x$时：$F(x) = P(X \le x) = 1.$

所以，$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.25 & -1 \le x < 2 \\ 0.75 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$



注意：

“$2 \le x < 3$”与“$-\infty < X \le x$”的关系。

前者是说区间（$-\infty$，x]的右端点属于区间[2,3)，不是说“ X 的值属于区间[2,3)”。

而是是指“X 的取值在区间（$-\infty$，x]内”。

比较事件“$-\infty < X \le 2$”、“$-\infty < X \le 2.1$”与“$-\infty < X \le 2.9$”发现，它们都是指事件“$X = -1$”与“$X = 2$”的并事件。

一般地：如果X的可能值是 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$

相应的概率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 。则

当 $x_k \le x < x_{k+1}$ 时

$$\mathrm{F}(x) = P\{X \le x\} = p_1 + \ldots + p_k$$

所以

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<x_1, \\ p_1, & x_1 \le x < x_2, \\ \sum_{j=1}^{k} p_j, & x_k \le x < x_{k+1}, \\ 1, & \sup_j x_j \le x。\end{cases}$$

例2. 向一半径为2m的圆盘射击。设击中靶上任一同心圆盘上的概率与该圆盘的面积成正比。以X表示击中点离圆心的距离。求X的分布函数。

解：由于X的取值范围是区间[0, 2]，我们分段计算。

当$x < 0$时　　$F(x) = P\{X \leq x\} = 0$

当$0 \le x \le 2$时

$$F(x) = P\{X \le x\} = a\pi x^2，F(2) = P\{X \le 2\} = 1$$

$$\therefore \quad F(x) = P\{X \le x\} = \frac{x^2}{4}$$

当$x \ge 2$时 $F(x) = P\{X \le x\} = 1$

$$\therefore \ F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/4 & 0 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

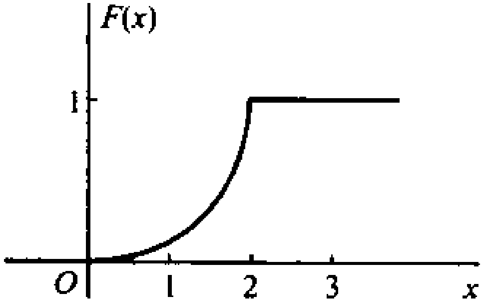


图 2—6

要点

1、分布函数的性质

可以用于求待定常数。

2、已知离散型随机变量的分布函数，求概率分布。

可能值：F(x)的跳跃点。概率分布中的概率：F(x)在这些跳跃点的跳跃度。

3、已知离散型随机变量的概率分布，求分布函数。

类似于例题1的方法。

错误的写法

1、把$F(x)$写为$F(X)$

2、把二项分布的分布函数写成

$$F(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

或

$$F(X)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

作业：15