§1.6事件的独立性

一、两个事件的独立性

两个事件独立的直观定义：A，B互相不影响。

即：事件**A**发生与否不改变**B**发生的概率。

即 $P(B|A)=P(B)$

当$P(A)>0$时，上式等价于

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

定义： **设 A、B 是两个事件，如果**

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A 与 B 相互独立.

定理一．设A，B都是事件且$P(A)>0$。则当A，B独立时$P(B|A)=P(B)$。

定理二．设 A,B 都是事件, 则

A,B 独立 $\Leftrightarrow$ $A,\bar{B}$ 独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A},B$ 独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A},\bar{B}$ 独立.

A, B 独立 $\Rightarrow A, \bar{B}$ 独立：

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

A, B 独立 $\Leftarrow A, \bar{B}$ 独立：

在上述证明过程中把B和$\bar{B}$ 分别换成$\bar{B}$, $\bar{\bar{B}}$

并注意 $B = \bar{\bar{B}}$ 即可.

A, B 独立 $\Leftrightarrow \bar{A}, B$ 独立：

在上述证明过程中把B 换成A 即可.

独立性的两个判断法：直观判断法和定义判断法

直观判断法: 如果事件*A*，*B*发生与否互不影响，则它们相互独立

注1: 这里的“互不影响”要有明确的理据，不能理解为“没有发现有影响”，或者“好像没有影响”。

注2：不可能事件、必然事件与任何事件相互独立。

例：投掷一枚均匀的骰子，设A＝“点数小于5”；B＝“点数为奇数”；C＝“点数小于4”。则：

$$P(A)=4/6;\quad P(B)=3/6;\quad P(C)=3/6;$$

$$P(AB)=1/3=P(A)P(B);$$

$$P(BC)=2/6\neq P(B)P(C).$$

故A与B独立；B与C不独立。

1、这个例子说明，两个事件“好像不影响”意味着可能独立，也可能不是独立。所以不能直接判断独立。这时需要用数学定义来判断独立性。

2、由数学定义可见，不可能事件、必然事件与任何事件独立。更一般地，概率为0或1的事件与任何事件独立。

3、两个事件独立与两个事件互不相容是两个不同的概念。如果两个事件独立且概率大于0，则一定是相容的。

二、有限个事件的独立性

首先考虑三个事件 A, B, C 相互独立的含义。

$P(AB) = P(A)P(B)$，$P(AC) = P(A)P(C)$，

$P(BC) = P(B)P(C)$，

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

定义 5.3 称事件 $A_1,\cdots,A_n$ **相互独立**, 如果对任意

$2\le k\le n$, $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$ 有

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$$

这里共有多少个等式?

n个事件相互独立就是指它们中的任何一部分积的概率等于概率的积。

三、应用举例

例： 如果 A、B、C 相互独立，下列各组事件相互独立吗？

（1）$A,\ B\cup C$；（2）$A,\ \ B\cap C$；

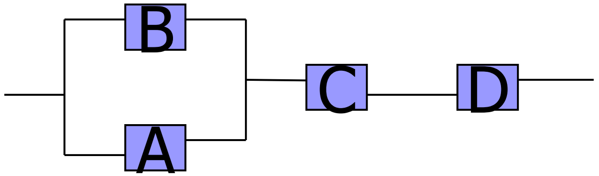
（3）$A,\ \ B-C$，（4）$A-B,\ \ B-C$。

（1）~（3）独立。（4）不独立

在n个相互独立的事件中，由其中k个事件和另外n-k个事件分别经过运算产生的两个事件相互独立。

补例： 设四个电子元件*A, B, C, D*不能通电的概率分别为0.2, 0.3, 0.4, 0.5.元件*A, B*并联以后再与元件*C, D*串联组成一个电路。求电路能通电的概率.

解：仍然用*A, B, C, D*分别表示元件*A, B, C, D*能通电等事件，用*E*表示电路能通电。则



$$E=(A\cup B)CD$$

不要写成$E=ACD\cup BCD$

$$P(E)=P(A\cup B)P(C)P(D)$$

$$=[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]P(C)P(D)$$

$$=[0.8+0.7-0.8\times0.7]\times0.6\times0.5=0.282$$

例3　要验收一批(100件)乐器,验收方案如下:自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的),如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯,则这批乐器就被拒绝接收.设一件音色不纯的乐器经测试查出其音色不纯的概率为0.95;而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为0.01.如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的.试问这批乐器被接收的概率是多少?

解：记A为事件“接收”；记$H_i(i=0,1,2,3)$为事件“所取的3件中恰好有i件音色不纯”

$$P(A|H_0)=(0.99)^3, P(A|H_1)=(0.99)^2\times 0.05,$$
$$P(A|H_2)=0.99\times(0.05)^2, P(A|H_3)=(0.05)^3$$

$$\text{而} P(H_0)=C_{96}^3/C_{100}^3, P(H_1)=C_4^1 C_{96}^2/C_{100}^3,$$
$$P(H_2)=C_4^2 C_{96}^1/C_{100}^3, P(H_3)=C_4^3/C_{100}^3$$

$$\text{故} P(A)=\sum_{i=0}^{3} P(A|H_i)P(H_i)$$
$$\approx 0.8574+0.0055+0+0=0.8629$$

例4　甲乙两人进行乒乓球比赛,每局甲胜的概率为p, $p \geq 1/2$.问对甲而言,采用三局二胜制有利,还是采用五局三胜制有利.设各局胜负相互独立.

解:(1) 采用三局二胜制。“甲最终获胜”包括:"甲甲","乙甲甲"或"甲乙甲".

故，甲获胜的概率是

$$p^2 + 2p^2(1-p)$$

也可以看做是3局至少胜2局

概率为 $p^3 + C_3^2 p^2(1-p)$ =$p^2 + 2p^2(1-p)$

解:（2）采用五局三胜制。“甲最终获胜”包括比3局:"甲甲甲"；比四局:"乙甲甲甲","甲乙甲甲","甲甲乙甲"；比五局:"乙乙甲甲甲","乙甲乙甲甲","乙甲甲乙甲","甲乙乙甲甲","甲乙甲乙甲","甲甲乙乙甲",

甲最终胜的概率为 $p^3+3p^3(1-p)+6p^3(1-p)^2$

也可以理解为：在五局中至少胜三局。甲最终胜的概率为

$$C_5^3 p^3(1-p)^2+C_5^4 p^4(1-p)+p^5$$

两个概率之差为

$$p^3+3p^3(1-p)+6p^3(1-p)^2-[p^2+2p^2(1-p)]$$

$$=p^2(1-p)^2(2p-1)\geq 0$$

所以，“五局三胜”对甲有利。

作业：37，40