第五节 线性方程组的解的结构

- 齐次线性方程组解的结构
- 非齐次线性方程组解的结构

一、齐次线性方程组

设齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases} \qquad (1)$$

记
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则 (1) 式可写成矩阵方程 $Ax=0.$ (2)

若 $x_1=\xi_{11}, x_2=\xi_{21}, \cdots, x_n=\xi_{n1}$ 为 (1) 的解, 则

$$x=\xi_1=\begin{pmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{n1}\end{pmatrix}$$

称为方程组 (1) 的**解向量**, 它也就是矩阵方程 (2) 的解.

1. 基础解系

(1) 解向量的性质

性质 1 若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为 (2) 的解, 则

$x=\xi_1+\xi_2$ 也是 (2) 的解.

性质 2 若 $x=\xi_1$ 为 (2) 的解, k 为实数, 则

$x=k\xi_1$ 也是 (2) 的解.

(2) 解的结构

把方程 $Ax=0$ 的全体解所组成的集合记作 S，如果能求得解集 S 的一个最大无关组 $S_0: \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$，那么方程 $Ax=0$ 的任一解都可由最大无关组 S_0 线性表示；另一方面，由上述性质 1、2 可知，最大无关组 S_0 的任何线性组合

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$$

都是方程 $Ax=0$ 的解，因此上式便是方程 $Ax=0$ 的通解.

(3) 基础解系

定义 如果 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 为齐次线性方程组 $Ax = O$ 的解向量组的一个最大无关组，则称 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 为该方程组的一个基础解系.

显然，只有当齐次方程组存在非零解时，才会有基础解系.

2. 基础解系的求法

例1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

的**基础解系与通解**.

解:(1)化系数矩阵A为行最简形

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) $R(A)=2<4$,方程组有非零解

(3)取x_3,x_4为自由未知量

分别令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

$\therefore$基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore$通解为$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2$,(其中c_1，c_2为任意常数)

3. 相关结论

定理 7　设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=r<n$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩

$R_S = n - r$

$=$ 自由未知量的个数

=基础解系所含解向量的个数．

例2 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$
的**基础解系与通解**.

解：对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，将其化为行最简形矩阵

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3<5$,方程组有非零解

选 x_3, x_4 为自由未知量，让 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得一个基础解系为

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \eta_2 = (2, -3, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$$

从而方程组 $Ax = O$ 的 通解为 $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$，

其中 k_1, k_2 为任意常数.

4. 应用举例

例 设η_1，η_2是齐次线性方程组的一个基础解系，证明 $\eta_1+\eta_2, k\eta_2$ 也是这个方程组的一个基础解系，其中数$k \neq 0$.

例 3 设$A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，证明

$$R(A)+R(B)\leq n .$$

二、非齐次线性方程组

设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4}$$

它也可写成矩阵方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, (5)

令 $\boldsymbol{b} = 0$ 得 $\boldsymbol{Ax} = 0$ (6)

称齐次线性方程组(6)是非齐次线性方程组(5)的**对应的齐次线性方程组**或**导出组.**

1. 解向量的性质

性质 3 设 $x=\gamma_1$ 及 $x=\gamma_2$ 都是(5)的解, 则 $x=\gamma_1-\gamma_2$ 为对应的齐次线性方程组

$$Ax=0 \tag{6}$$

的解.

性质 4 设 $x=\gamma$ 是方程 (5) 的解, $x=\eta$ 是其导出组(6) 的解, 则 $x=\gamma+\eta$ 仍是方程 (5) 的解.

2. 非齐次线性方程组解的结构

定理9 设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 满足 $R(A,b)=R(A)=r<n$，并设 γ_0 为其一个特解， η 为其导出组 $Ax=O$ 的全部解，即

$$\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 为导出组的一个基础解系， c_1，$c_2, \ldots, c_{n-r}$ 为任意常数， 则方程组 $Ax=b$ 的全部解可以表为

$$\boxed{\gamma = \gamma_0 + \eta = \gamma_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_{n-r}\eta_{n-r}}$$

例4 求下列线性方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 4 \end{cases}$$

解:(1)化增广矩阵$(A,\ b)$为行最简形

$$(A,\ b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -3 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $R(A)=R(A,b)=2<5$,方程组有无穷多解

(3)取x_2, x_4, x_5为自由未知量

特解：令$x_2=x_4=x_5=0$得$x_1=\frac{1}{2}$，$x_3=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \text{特解}\ \gamma_0=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$$

基础解系：分别令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 基础解系为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 通解为 $x = \gamma_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3$，(其中 c_1，c_2，c_3 为任意常数)

例 5 已知 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是三元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，$R(A)=1$，且

$$\gamma_1+\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \gamma_2+\gamma_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \gamma_1+\gamma_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

求方程组的通解.

解

三．小结

（1）会齐次线性方程组解的结构.

（2） 会求非齐次线性方程组解的结构.

四、作业

书　习题四　　P112

25(1), 31(2), 32, 35+补充题

补充题设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \end{cases}$$

问 k 取何值时，此方程组 (1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有穷多解？并在有无穷多解时求其通解(要求用其特解及对应的齐次线性方程组的基础解系表示).