第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

本章先引进矩阵的初等变换, 建立矩阵的秩的概念；然后利用矩阵的秩讨论齐次线性方程组有非零解的充要条件和非齐次线性方程组有解的充要条件，并介绍用初等变换解线性方程组的方法.

第一节 矩阵的初等变换

- 初等变换的定义
- 初等变换的性质
- 应用举例
- 初等矩阵

矩阵的初等变换是矩阵的一种十分重要的运算, 它在解线性方程组、求逆矩阵及矩阵理论的探讨中都可起重要的作用. 为引进矩阵的初等变换, 先来分析用消元法解线性方程组的例子.

一、引例

求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

解 ▶ 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

▶ 对应的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

交换方程组的第一个方程和第二个方程

1

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 \qquad = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

对应的增广矩阵正好是交换第一行和第二行

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

把方程组的第一个方程乘以-2 加到第二个方程和第三个方程上

2

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ 3x_2 - 3x_3 = -9. \end{cases}$$

对应的增广矩阵正好是把第一行的每个元素乘以 -2分别加到第二行、第三行对应位置的元素上

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

第二个方程乘以 -1加到第三个方程上，第三个方程乘以 -1

3

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

对应的增广矩阵正好是把第二行的每个元素乘以-1加到第三行对应位置的元素上，第三行每个元素乘以 -1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第三个方程乘以2 加到第二个方程上，第二个方程乘以 $\frac{1}{3}$

4

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

对应的增广矩阵正好是把第三行的每个元素乘以2加到第二行对应位置的元素上，第二行每个元素乘以 $\frac{1}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第三个方程乘以-1加到第一个方程上，第二个方程乘以1加到第一个方程上

5

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1, \\ \qquad x_2 \qquad = 1, \\ \qquad\qquad x_3 = 4. \end{cases}$$

对应的增广矩阵正好是把第三行的每个元素乘以-1，第二行的每个元素乘以 1，都加到第一行对应位置的元素上

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

最后一个方程组有唯一解，它和原方程组是同解方程组，所以原方程组有唯一解：$x_1 = 1$　$x_2 = 1$　$x_3 = 4$

小结：

1．上述解方程组的方法称为消元法．

2．始终把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换

（1）交换方程次序；

（ⓘ与ⓙ相互替换）

（2）以不等于 0 的数乘某个方程；

（以 ⓘ$\times k$ 替换ⓘ）

（3）一个方程加上另一个方程的k倍．

（以 ⓘ$+k$ⓙ 替换ⓘ）

3．上述三种变换都是可逆的.

$$若(A)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrowⓙ}(B),\ 则(B)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrowⓙ}(A);$$

$$若(A)\xrightarrow{ⓘ\ \times k}(B),\ 则(B)\xrightarrow{ⓘ\ \div k}(A);$$

$$若(A)\xrightarrow{ⓘ+kⓙ}(B),\ 则(B)\xrightarrow{ⓘ-kⓙ}(A).$$

由于三种变换都是可逆的，所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的．故这三种变换是同解变换.

二、 初等变换的定义

定义 1 下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(i) 对调两行(对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(ii) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行中的所有元素

(第 i 行乘以 k, 记作 $r_i \times k$);

(iii) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去 (第 j 行的 k 倍加到第 i 行上,记作 $r_i + kr_j$).

把定义中的“行”换成“列”,即得矩阵的**初等列变换**的定义.（所用记号是把“r”换成“c”).

矩阵的初等行变换与初等列变换, 统称**初等变换**.

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$;

$r_i \times k$ 逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$ 或 $r_i \div k$;

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i + (-k)r_j$ 或 $r_i - kr_j$.

注：等价定义 如果矩阵 A 经有限次初等行变换变成矩阵 B，就称**矩阵 A 与 B 行等价**，记作 $A \overset{r}{\sim} B$；如果矩阵 A 经有限次初等列变换变成矩阵 B，就称**矩阵 A 与 B 列等价**，记作 $A \overset{c}{\sim} B$；如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，就称**矩阵 A 与 B 等价**，记作 $A \sim B$.

三、 行阶梯形矩阵与行最简形矩阵

特点：

（1）可划出一条阶梯线，线的下方全为零；

（2）每个台阶只有一行，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元，即非零行的第一个非零元.

行阶梯形矩阵B_5还称为行最简形矩阵，即非零行的第一个非零元为1，且这些非零元所在的列的其他元素都为零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

例

01 OPTION

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

02 OPTION

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

03 OPTION

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

04 OPTION

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

标准形：F的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为零.

例如，
$$B_5=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=F$$

矩阵 F 称为矩阵 B 的标准形.

例

试用矩阵的初等行变换将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -3 & 1\\ 3 & 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$

先化为行阶梯形矩阵，再进一步化为行最简形矩阵, 最后

给出对应的标准形.

解

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\2&-1&-3&1\\3&2&-5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&-1&-3\\0&5&-2&-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-5r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&-1&-3\\0&0&3&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&-1&-3\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&0\\0&0&1&3\end{pmatrix}\quad \text{标准形}F=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

对于一般的矩阵，我们有下面的结论：

01 OPTION

任意一个 $m \times n$ 矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵；

02 OPTION

任意一个 $m \times n$ 矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行最简形矩阵；

03 OPTION

任意一个 $m \times n$ 矩阵总可以经过若干次初等变换化为它标准形 $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$，

04 OPTION

其中 r 为行阶梯形矩阵中非零行的行数.

练习

试用矩阵的初等行变换将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

先化为行阶梯形矩阵，再进一步化为行最简形矩阵, 最后给出对应的标准形.

思考

1、方阵的行列式＝行阶梯形行列式 （×）

2、方阵的行列式＝行最简形行列式 （×）

3、方阵的行列式＝标准形行列式 （×）

四、初等矩阵

1. 初等矩阵的定义

定义 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

2. 三种初等矩阵

三种初等变换对应于三种初等矩阵. 一般地，对于 n 阶单位矩阵 E，有

1、对调两行或两列

对调 E 中第 i, j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等矩阵

$$E(i,j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

用 m 阶初等矩阵 $E_m(i,j)$ 左乘 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$E_m(i,j)A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

相当于对矩阵 A 施行第一种初等行变换：

把 A 的第 i 行与第 j 行对调 $(r_i \leftrightarrow r_j)$.

类似地，

以 n 阶初等矩阵 $E_n(i,j)$ 右乘矩阵 A,

$$AE_n(i,j)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

相当于对矩阵 A 施行第一种初等列变换：

把 A 的第 i 列与第 j 列对调 $(c_i \leftrightarrow c_j)$.

2、以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数$k \neq 0$乘单位矩阵的第i行$(r_i \times k)$，得初等矩阵$E(i(k))$.

$$E_n(i(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

以 $E_m(i(k))$ 左乘矩阵 A，

$$
E_m(i(k))A=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}
$$

相当于以数 k 乘 A 的第 i 行 $(r_i \times k)$；

类似地， 以 $E_n(i(k))$ 右乘矩阵 A，其结果相当于以数 k 乘 A 的第 i 列 $(c_i \times k)$.

3、以数$k \neq 0$乘某行(列)加到另一行(列)上去

以k乘E的第j行加到第i行上$(r_i + kr_j)$

或以k乘E的第i列加到第j列上$(c_j + kc_i)$,

$$
E(i,\ j(k)) = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & \cdots & k & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\
\end{array}
$$

以 $E_m(i, j(k))$ 左乘矩阵 A，

$$E_m(i, j(k))A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把 A 的第 j 行乘 k 加到第 i 行上 $(r_i + kr_j)$.

类似地，以$E_n(i, j(k))$右乘矩阵 A，其结果相当于把 A 的第i列乘 k 加到第 j 列上 $(c_j + kc_i)$.

$$AE_n(i, j(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} + ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} + ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$E(i,j)A$ 表示将 A 的第 i 行与第 j 行交换位置；

$AE(i,j)$ 表示将 A 的第 i 列与第 j 列交换位置；

$E(i(k))A$ 表示将 A 的第 i 行乘以 $k(k \neq 0)$;

$AE(i(k))$ 表示将 A 的第 i 列乘以 $k(k \neq 0)$;

$E(i,\ j(k))A$ 表示将 A 的第 j 行乘以 k 加到第 i 行；

$AE(i,\ j(k))$ 表示将 A 的第 i 列乘以 k 加到第 j 列 .

例

设 $A=(a_{ij})$ 是一个三阶方阵，试求一个 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，

使得

$$\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

五、应用

定理 1 设 A 与 B 为 $m\times n$ 矩阵，那么

（i）$A\overset{r}{\sim}B$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P，使 $PA=B$；

（ii）$A\overset{c}{\sim}B$ 的充要条件是存在 n 阶可逆矩阵 Q，使 $AQ=B$；

（iii）$A\sim B$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使 $PAQ=B$.

推论 方阵 A 可逆的充要条件是 $A\overset{r}{\sim}E$.

定理 1 表明，如果 $A \overset{r}{\sim} B$，即 A 经一系列初等行变换变为 B，则有可逆矩阵 P，使 $PA = B$.

那么，如何去求出这个可逆矩阵 P 呢?

由于 $PA = B \Longleftrightarrow \begin{cases} PA = B \\ PE = P \end{cases} \Longleftrightarrow P(A, E) = (B, P)$

$$\Longleftrightarrow (A, E) \overset{r}{\sim} (B, P),$$

因此，如果对矩阵 (A, E) 作初等行变换，那么，当把 A 变为 B 时，E 就变为 P .

特别地，如果 $B=E$，则 $P=A^{-1}$，即

$$(A,E)\overset{r}{\sim}(E,A^{-1})$$

我们可以采用下列形式求 A^{-1}： 将 A 与 E 并排放在一起，组成一个 $n\times 2n$ 矩阵 (A,E).

对矩阵 (A,E) 作一系列的初等行变换，将其左半部分化为单位矩阵 E，这时其右半部分就是 A^{-1}.

即

$$(A,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E,A^{-1}).$$

六、例子

例1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解： $$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&-2\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\therefore A\text{可逆且}A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&-1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

例2 已知矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

解：由 $AA^*=|A|E$，故 $\dfrac{1}{|A|}AA^*=E$，于是

$$\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\left|A^{-1}\right|(A^{-1})^{-1}$$

$$(A^{-1},E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&2&-1&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

有 $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

又 $\left|A^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$

所以 $\left(A^{*}\right)^{-1} = \left|A^{-1}\right| A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} AX = B \\ A\text{可逆} \end{array}\right\} \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$(A, B) \overset{r}{\sim} (E, X) \Longleftrightarrow A^{-1}(A, B) = (E, A^{-1}B = X)$$

例3 求解矩阵方程 $AX = B$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

解：方法1（用初等变换）

解：
$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5} r_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1+2r_3}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\end{array}\right]$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \begin{bmatrix}-4 & 2\\ 0 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

七、小结

(i) 会用初等行变换，化矩阵为行最简（行阶梯）形矩阵.

(ii) 初等矩阵 (行列式值，逆，初等变换，矩阵方程).

八、作业

书 习题三 P78-79

1(2)(4)，4(1)，6(3)

思考：

如何求n阶方阵的逆矩阵？

(i) （分块）对角矩阵求逆公式

(ii) $n=1,$ 倒数（逆）

$n=2,$ 两调一除

$n\geq 3,$ 初等行变换