福建师范大学 数学与统计 学院

2021 — 2022 学年第一学期期中考试

知明行笃 立诚致广

专　　业：__________　　　　年　　级：20 级

课程名称：概率论与数理统计　　　　任课教师：__________

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√ ）　　　　考试用时：120 分钟

考试时间：2021 年 10 月 30 日 上 午 必填 点 必填 分

题号	一	二	三	四	五	总得分	评卷人
得分							
题号	六	七	八	九	十		
得分							

考生信息栏

学院________ 系________ 专业________ 年级________ 姓名________ 学号________

装订线

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、某运动员在射击练习中，连续射击 2 次，则事件“至少有 1 次中靶”的互斥事件是（ **C** ）

A、至多有 1 次中靶；　　　　B、2 次都中靶；

C、 2 次都不中靶；　　　　D、只有 1 次中靶.

2、设事件 A 与 B 独立，且 $P(A)=0.4$， $P(A\cup B)=0.7$． 则 $P(B)=$（ **C** ）

A、0.3；　　B、0.4；　　C、0.5；　　D、0.6

3、将 2 只不同的球随机地放入不同的 4 个篮子，则恰好有 2 个篮子都没有球的概率是（ **A** ）

A、$\frac{3}{4}$；　　B、$\frac{1}{2}$；　　C、$\frac{1}{4}$；　　D、$\frac{3}{8}$

4、下列函数中，可以作为某个随机变量的分布函数是(**B**)

A、$F(x)=1-x^3,\ -\infty<x<+\infty$；

B、$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \sin x, & 0\le x<\frac{\pi}{2};\\ 1, & x\ge\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

C、$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \sin x, & 0\le x<\pi;\\ 1, & x\ge\pi.\end{cases}$

D、$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2x, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

5、下列说法正确的是(**D**)

A、若 $P(A)=0$，则 A 为不可能事件；

B、若 A 与 B 互不相容，则 $P(AB)=P(A)P(B)$；

C、$\overline{ABC}$ 表示事件 A、B、C 都不发生；

D、若 $X\sim U(0,1)$, 则 $P\{X=0.5\}=0$.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6、 设一批产品中，一、二、三等品分别占 30%、60%和 10%. 从中任取一件发现不是一等品，则取到的是二等品的概率是_____ 6/7 ____.

7、 设随机变量 X 服从参数为的 $\frac{1}{2}$ 的指数分布，则其分布函数为____ $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ _.

8、 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且关于 y 的二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 0.5，则 $\mu=$___4___.

9、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $P(X=3)=$ $\dfrac{4e^{-2}}{3}$_.

10、同时掷两枚骰子，直到某个骰子出现 6 点为止．则恰好掷 2 次的概率为___275/1296_____.

三、计算题（共 70 分）

11、（ 12 分）某油漆公司发出 10 桶油漆，其中 5 桶白漆、2 桶黑漆、3 桶红漆．在运输过程中所有标签脱落，到目的地时丢失 1 桶油漆.

（1）求“从剩下的 9 桶油漆中任意打开 2 桶，2 桶都是白漆”的概率；

（2）现从剩下的 9 桶油漆中任意打开 2 桶，发现都是白漆，求丢失的仍是白漆的概率.

解：（1）设 A 表示“从剩下的 9 桶油漆中任意打开 2 桶，2 桶都是白漆”，B_1、B_2、B_3 分别表示丢失的油漆是“白漆”、“黑漆”、“红漆”. 则按题意，

$$P(B_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ P(B_2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},\ P(B_3)=\frac{3}{10};$$

且

$$P(A\mid B_1)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6},\ P(A\mid B_2)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{18},\ P(A\mid B_3)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{18};$$

由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A\mid B_i)P(B_i)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{18}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{18}\times\frac{3}{10}=\frac{2}{9}.$$

……………………6 分

（2）由贝叶斯公式，

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(A\mid B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{9}}=\frac{3}{8}.$$

……………………6 分

12、(15 分）某电子元件的寿命 X （单位：小时）具有如下的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{200}{x^2}, & x>200\\ 0, & x\le 200\end{cases};$$

（1）求该元件的寿命大于300小时的概率；

（2）现有一大批该类电子元件，从中取出三件。已知这三件原件独立使用了 250 小时后仍完好，求这 3 件中寿命大于300小时的件数的概率分布律。

解：（1）由题意知即求

$$P(X>300)=\int_{300}^{\infty}\frac{200}{x^2}dx=\frac{2}{3}.$$ ……………………5 分

（2） 已知某元件寿命大于250小时的条件下，该元件寿命大于300小时的概率为

$$P(X>300\,|\,X>250)=\frac{P(\{X>300\}\cap\{X>250\})}{P(X>250)}=\frac{P(X>300)}{P(X>250)}=\frac{\frac{2}{3}}{\int_{250}^{\infty}\frac{200}{x^2}dx}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{6}.$$

设 Y 表示在这批元件寿命都大于250小时的条件下，任取 3 件，3 件中寿命大于300小时的件数。

则 $Y\sim b(3,\frac{5}{6})$，故 $P(Y=0)=C_3^0(\frac{5}{6})^0(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{216}$,

$$P(Y=1)=C_3^1\frac{5}{6}(\frac{1}{6})^2=\frac{5}{72},\ P(Y=2)=C_3^2(\frac{5}{6})^2(\frac{1}{6})^1=\frac{25}{72},$$

$P(Y=3)=C_3^3(\frac{5}{6})^3(\frac{1}{6})^0=\frac{125}{216}$, Y 的分布律为

Y	0	1	2	3
p_k	1/216	5/72	25/72	125/216

……………………10 分

13、(10 分）设随机变量的 X 分布律为

X	-2	-1	0	1	3
p_k	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

（1）试求 X 的分布函数；（2）$Y = X^2+1$的分布律.

解：（1）由题目知 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<-2,\\ 1/5, -2\le x<-1,\\ 11/30, -1\le x<0,\\ 17/30, 0\le x<1,\\ 19/30, 1\le x<3,\\ 1, x\ge 3\end{cases}$$ ……………………5 分

（2）$Y = X^2+1$的分布律为

Y	1	2	5	10
p_k	1/5	7/30	1/5	11/30

……….10 分

14、（15 分）设随机变量 X 具有密度

$$f(x)=\begin{cases}ax(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

（1）试求 a 的值；（2）试求 $Z=e^{-X}$ 的密度函数.

解：（1）由密度函数规范性知

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_0^1 x(1-x)dx = 1$，所以 a=6. ……………4 分

（2）由题知 $Z=e^{-X}$ 的取值范围为 $(e^{-1},1)$

所以 $f_Z(z)=0, z\notin(e^{-1},1)$ ……………7 分

当 $z\in(e^{-1},1)$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(e^{-X}\le z)=P(X\ge -\ln z)=6\int_{-\ln z}^{1}x(1-x)dx$$

..............10 分

从而

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=-\frac{6\ln z(1+\ln z)}{z}$$ ....13 分

综上有

$$f_Z(z)=\begin{cases}-\dfrac{6\ln z(1+\ln z)}{z}, & e^{-1}<z<1,\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$ ....15 分

15、（5 分）某地区 18 岁男青年的身高（单位 cm）服从分布 $N(170,100)$，在该地区任选一位 18 岁男青年，测量他的身高 X，试求概率 $P(165<X\le 185)$.

解：记 $Y=\dfrac{X-170}{10}$，则 Y 服从标准正态分布. ....2 分

从而查表知道

$$P(170<X\le 185)=P(-\frac{1}{2}<\frac{X-170}{10}\le\frac{3}{2})=\Phi(\frac{3}{2})-(1-\Phi(\frac{1}{2}))=0.9332+0.6915-1=0.6247$$

..............5 分

16、（6 分）甲乙两人轮流投篮，假定每次甲的命中概率为 0.4，乙的命中概率为 0.6 且各次投篮相互独立. 现甲先投乙再投，直至有人命中为止. 试求甲与乙投篮次数 X 与 Y 的联合分布.

解：（1）由题知 (X,Y) 可能取值为 $(k,k-1)$ 或 $(k,k),k=1,2,......$ ....2 分

其联合分布律为:

$$P(X=k,Y=k-1)=(0.6)^{k-1}(0.4)(0.4)^{k-1}=(0.6)^{k-1}(0.4)^{k},k=1,2,......$$ ....4 分

$$P(X=k,Y=k)=(0.6)^{k}(0.4)^{k-1}(0.6)=(0.6)^{k+1}(0.4)^{k-1},k=1,2,......$$ ....6 分

17、（7 分）设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}10xy^2, 0<x<y<1;\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

试求它们的边缘密度函数.

解：当$x\in(0,1)$时，

$$f_X(x)=10x\int_x^1 y^2dy=\frac{10}{3}x(1-x^3)$$ ....2 分

$$f_Y(\mathrm{y})=10y^2\int_0^y xdx=5y^4$$ ....4 分

从而得到边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{10}{3}x(1-x^3), 0<x<1\\ 0\text{，其它}\end{cases} \qquad f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}\frac{1}{5}y^4, 0<y<1\\ 0\text{，其它}\end{cases}$$ ....7 分

x	0.15	0.25	0.5	0.75	1	1.5
$\Phi(x)$	0.5596	0.5987	0.6915	0.7734	0.8413	0.9332