高等数学B(上) 期中考试试题

福建师范大学 2023-2024 学年第一学期

年级：2023级 课程名称：高等数学B（上） 任课教师：谢碧华等 试卷类别：闭卷
考试用时：120分钟 考试时间：2023年12月2日上午9点00分

本文档由@Xuuyuan 制作，题目著作权归福建师范大学数学与统计学院所有。

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 当$n \to \infty$时，为了使$\sin^2 \frac{1}{n}$与$\frac{1}{n^k}$成等价的无穷小，k应为（　）.
   A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3
2. 函数$f(x) = \frac{x}{\tan x}$的可去间断点是（　）.
   A. $x = 0$　　B. $x = \frac{\pi}{4}$　　C. $x = 2\pi$　　D. $x = \pi$
3. 设
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + k, & x > 0 \end{cases}$$
   ，且$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$存在，则$k =$（　）.
   A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2
4. 若函数$f(x)$在某点x_0极限存在，则（　）.
   A. 函数$f(x)$在某点x_0的函数值必存在且等于极限值
   B. 函数$f(x)$在某点x_0的函数值必存在，但不一定等于极限值
   C. 若函数$f(x)$在某点x_0的函数值存在，则其必等于极限值
   D. 函数$f(x)$在某点x_0的函数值不一定存在
5. 设函数$y = f(x)$是可导的奇函数，则y'是（　）.
   A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 不确定

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 设$f(x)$的定义域是$[0, 1]$，$f(\arctan x)$的定义域为________.
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}} =$ ________.

3. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-k}{x}\right)^{-2x}=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{2}{x}+2)$，则$k=$________.

4. 设$y=\ln\sin x$，则$dy=$________ $d\sin x$.

5. 已知函数$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则$f(0)=$________.

三、(8 分)

求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right)$.

四、(8 分)

求$\lim\limits_{n\to 0}\frac{e^x-e^{x\cos x}}{(2^x-1)\arctan x^2}$.

五、(8 分)

设$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}+\ln\ln\ln x+x^{\frac{1}{x}}+\cos 1$，求$y'$.

六、(8 分)

设 $y=(x^2-1)e^x$ ，求$y^{(24)}$.

七、(10 分)

求由参数方程$\begin{cases}x=t+\cos t\\ e^y+ty+\sin t=1\end{cases}$所确定的曲线$y=f(x)$在$t=0$处的切线方程.

八、(10 分)

设$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}$，其中$x\neq 1$，求$f(x)$的表达式，若有间断点，指出其类型.

九、(12 分)

设$f(x)=\begin{cases}(x^2)^{\lambda}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论：

（1）当λ为何值时，$f(x)$在点$x=0$连续；

（2）当λ为何值时，$f(x)$在点$x=0$可导；

（3）当λ为何值时，$f'(x)$在点$x=0$连续.

十、(6 分)

证明方程$x=a\sin x+b$，其中$a>0,b>0$，至少有一个正根，并且它不超过$a+b$.