第四节　克拉默法则

主要内容

用行列式解一类**特殊**的线性方程组

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么这个方程组有解，并且解是唯一的，这个解可表示成：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D} \qquad (3)$$

其中D_i是把 D 中第i 列换成常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得的行列式，即

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i = 1, 2 \cdots, n)$$

应用1. **非齐次线性方程组**$Ax=b$(其中A为n阶方阵)**满足**

(1) **若**$|A| \neq 0$，**则方程组有唯一解；**

(2) **若方程组无解或有无穷多解，则**$|A| = 0$.

应用2. **齐次线性方程组** $Ax=0$(其中A为n阶方阵)

(1) **只有零解当且仅当**$|A| \neq 0$；

(2) **有非零解当且仅当** $|A| = 0$.

齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$只有零解，则$k$应满足的条件是____________.

注 用克拉默法则求解系数行列式不等于零的 n 元非齐次线性方程组，需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，它的计算工作量很大。实际上关于数字系数的线性方程组（包括系数行列式等于零及方程个数和未知量个数不相同的线性方程组）的解法，一般都采用后续章节介绍的方法来求解。克拉默法则主要是在理论上具有重要的意义，特别是它明确地揭示了方程组的解和系数之间的关系。