第二节　矩 阵 的 秩

- 定义
- 矩阵秩的求法
- 矩阵秩的性质

一、引例

任何矩阵 $A_{m\times n}$,总可经过有限次初等行 变换把它变为行阶 梯形，行阶梯形矩阵中非零行的行数是唯一确定的． 矩阵的秩

二、定义

定义 3 在矩阵 A 中，任取 k 行与 k 列 $(k \le m,\ k \le n)$，位于这些行、列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为**矩阵 A 的 k 阶子式**.

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

$m \times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

定义 4 设在矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的**最高阶非零子式**，r 称为矩阵 A 的**秩**，记作 $R(A)$，并规定零矩阵的秩等于零.

记 D_k 为 $A \neq 0$ 的 k 阶子式，若

$$\cdots,\quad \exists D_{r-1} \neq 0,\quad \exists D_r \neq 0,\quad \forall D_{r+1} = 0,\quad \forall D_{r+2} = 0, \cdots$$

则 $R(A) = r$.

注：（1） A 的秩 $R(A)$ 就是 A 中不等于零的子式的最高阶数.

（2）若矩阵 A 中有一个 s 阶子式不为零，则 $R(A) \geq s$；若 A 中所有 t 阶子式全为零，则 $R(A) < t$.

（3）若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$.

（4） $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$.

三、求秩

1、$R(0)=0.$

2、设 A 为 n 阶方阵，则当 $|A|\neq 0$ 时 $R(A)=n$，此可逆矩阵又称满秩矩阵；当 $|A|=0$ 时 $R(A)<n$，不可逆矩阵 (奇异矩阵)又称降秩矩阵.

例1 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

行阶梯形矩阵

解 $\because$ B是一个行阶梯形矩阵， 其非零行有3行，

$\therefore$ B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$ $\therefore$ $R(B)=3.$

例2 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$，求该矩阵的秩.

解 $\because \begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0,$ 计算A的3阶子式，

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ -2 & 1 & 5\end{vmatrix}=0.$$

$\therefore R(A)=2.$

另解 对矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$ 做初等变换，

$$\therefore \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

显然，非零行的行数为2，

此方法简单！

$\therefore R(A)=2.$

3、 用初等行变换求秩法：

若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.（课本Th2）

根据这一定理, 为求矩阵的秩, 只要把矩阵用**初等行变换**变成**行阶梯形矩阵**, 行阶梯形矩阵中**非零行的行数即是该矩阵的秩**.

例3 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式．

解 对A作初等行变换，变成行 阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\3&2&0&5&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_2-r_4}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{r_3-2r_1\\ r_4-3r_1}}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11\\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{r_3-3r_2}{}}\ \overset{}{\underset{r_4-4r_2}{}}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 6 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 $R(A)=3.$

在A的第1,2,4列所构成的子块B中寻找A最高阶非零子式

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

如:$$|A_0|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-16$$

则这个子式$|A_0|$便是A的一个最高阶非零子式

（不唯一）.

例4 分块矩阵求秩

设$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

求矩阵 A 及矩阵 $B=(A|b)$ 的秩．

解 分析：设 B 的行阶梯形矩阵为 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$，

则 $\tilde{A}$ 就是 A 的行阶梯形矩阵，

故从 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$ 中可同时看出 $R(A)$ 及 $R(B)$.

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2\\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-3r_1}{\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+2r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A) = 2, \quad R(B) = 3.$$

例7 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda & -1\\ 5 & 6 & 3 & \mu\end{pmatrix}$,

已知$R(A)=2$, 求λ与μ的值.

解

$$A \overset{r_2-3r_1}{\underset{r_2-5r_1}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & 8 & \mu-5\end{pmatrix} \overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4\\ 0 & 0 & 5-\lambda & \mu-1\end{pmatrix}$$

因$R(A)=2$, 故

$$\begin{cases}5-\lambda=0,\\ \mu-1=0,\end{cases} \quad 即 \begin{cases}5=\lambda,\\ \mu=1.\end{cases}$$

四、矩阵秩的性质

（1）若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则

$$0\le R(A)\le \min\{m, n\}.$$

（2） $R(A^{\mathrm{T}})=R(A)$.

（3） 若 $A\sim B$, 则 $R(A)=R(B)$.（课本Th2）

例 $R(kA)=R(A)$，k不为零

（4） 若 P，Q 可逆，则 $R(PAQ)=R(A)$.

（5） $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$,

特别地，当 $B = b$ 为列向量时，有

$$R(A) \le R(A, b) \le R(A) + 1 .$$

（6） $R(A + B) \le R(A) + R(B)$.

（7） $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$.

（8）若 $A_{m\times n} B_{n\times l} = O$，则 $R(A) + R(B) \le n$.

例 5 设 A 为 n 阶方阵，证明

$$R(A+E)+R(A-E)\geq n.$$

例9 证明 若$A_{m\times n}B_{n\times 1}=C$, 且$R(A)=n$, 则$R(B)=R(C)$.

证 $PC=PAB=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}$,

由性质(4), 知$R(C)=R(PC)$,

而$R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}=R(B)$, 所以

$$R(B)=R(C).$$

提 示：

因$R(A)=n$, 知A的行最简形矩阵为$\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$

并有m阶可逆矩阵P, 使$PA=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

五、小结

(i) 矩阵的秩：非零子式的最高阶数.

(ii)用初等行变换求秩.

(iii)秩的8大性质.

六、作业

书 习题三 P79

10(3), 12