§8.3 正态总体方差的假设检验

只考虑单个总体$N(\mu,\sigma^2)$方差σ^2的检验

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ，σ^2 均未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自X的样本。要求在显著性水平 α 下检验假设：

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,\ H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

其中，σ_0^2 为已知常数.

由第六章第3节定理2知，<u>当H_0为真时</u>

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

由于S^2的期望是σ^2，是σ^2的无偏估计。所以，当σ^2小的时候，S^2的值有偏小的趋势。当σ^2大的时候，S^2的值有偏大的趋势。

所以，拒绝域具有以下的形式：

$S^2 \le a$ 和 $S^2 \ge b$ 的并

由第六章第3节定理2知，<u>当H_0为真时</u>

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

所以我们取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

所以，上述检验问题的拒绝域具有以下的形式：

$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1$ 和 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$ 的并

此处k_1，k_2的值由下式确定：

$P\{$当H_0为真拒绝$H_0\}$

$$= P_{\sigma_0^2}\left\{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right) \cup \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right)\right\} = \alpha$$

为计算方便起见,习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right\} = \frac{\alpha}{2}, P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

故得$k_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), k_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

$\therefore$ 拒绝域为:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$$

和 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 的并

注意:

不能写成 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \cup \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

求单边检验问题(显著性水平为α)

$$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2,\ H_1:\sigma^2>\sigma_0^2 \qquad (3.2)$$

的拒绝域. $\because H_0$成立时σ^2偏小，H_1成立时σ^2偏大。所以，当H_1为真时，S^2的观察值s^2往往偏大。所以，拒绝域的形式为

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge k$$

下面来确定常数k.

$$P\{\text{当}H_0\text{为真拒绝}H_0\} = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k\right\}$$

由于$\sigma^2 \le \sigma_0^2$时，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$。

所以，事件$\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge k\right\}$包含$\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k\right\}$

$$P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k\right\} \le P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge k\right\}$$

$$P\{当H_0为真拒绝H_0\} = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k\right\}$$

$$\le P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge k\right\}$$

要控制$P\{当H_0为真拒绝H_0\} \le \alpha$,只需取$k$使得

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge k\right\} = \alpha \qquad （3.3）$$

$$\because \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),\text{由}(3.3)\text{得拒绝域为}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_\alpha^2(n-1)$$

类似地可得单边检验问题

$$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

的拒绝域为

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < x_{1-\alpha}^2(n-1)$$

例1　某厂生产的某种型号的电池，其寿命(以小时计)长期以来服从方差$\sigma^2 = 5000$的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变.现随机取26只电池，测出其寿命的样本方差$s^2 = 9200$.问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化(取$\alpha = 0.02$)？

解:本题要求在水平$\alpha=0.02$下检验假设

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=5000, H_1:\sigma^2\neq 5000$$

现在$n=26, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.01}(25)=44.314,$

$\chi^2_{1-\alpha/2}(25)=\chi^2_{0.99}(25)=11.524.\sigma_0^2=5000,$

由(3.1)拒绝域为

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq 44.314, \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq 11.524$$

由观察值$s^2=9200$得$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=46>44.314,$

$\therefore$ 拒绝H_0,认为这批电池寿命的波动性较以往的有显著的变化.

表8-1 正态总体均值的检验法（方差已知）

原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
$\mu \le \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$	$z \ge z_\alpha$
$\mu \ge \mu_0$		$\mu < \mu_0$	$z \le -z_\alpha$
$\mu = \mu_0$		$\mu \ne \mu_0$	$\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
(σ^2已知)			

表8-1 正态总体均值的检验法
（方差未知）

原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
$\mu \le \mu_0$		$\mu > \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$
$\mu \ge \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu < \mu_0$	$t \le -t_\alpha(n-1)$
$\mu = \mu_0$		$\mu \ne \mu_0$	$\lvert t \rvert \ge t_{\alpha-2}(n-1)$

表8-1 正态总体方差的检验法

原假设	检验统计量	备择假设	拒绝域
$\sigma^2 \le \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$
$\sigma^2 \ge \sigma_0^2$		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)		$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 或$\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$

“两个总体的假设检验”不讲

假设检验问题的解题步骤：

1、如果题目问的是关于总体的一个判断是否对，则该题是假设检验题。

2、写出要检验的原假设和备择假设。

3、确定问题是“已知方差时的均值检验”，“未知方差时的均值检验”还是“方差的检验”。然后选定检验统计量。

4、根据第2、3步的具体情况确定拒绝域。

5、查表，计算检验统计量的观察值，最后做出结论。

假设检验的显著性水平之所以取得很小代表的意思是：“我们认为概率很小的事件在一次试验中不会发生”，所以要否定一个受到保护的原假设。

作业：11，14