姓名____________________ 学号______________________ 班级____________________

5.1 习题

1.判断题：以下各题若正确请在（ ）内填“√”， 若错误填“×”.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可导，则 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积. （ ）

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上不连续，则 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上不可积.（ ）

（3）若函数 $|f(x)|$ 在 $[a,\ b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上也可积.（ ）

（4）若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$，则在 $[a,\ b]$ 上 $f(x)\equiv g(x)$.（ ）

（5）若 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，$f(x)\geq 0$，且至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$，$f(\xi)>0$，则 $\int_a^b f(x)dx>0$. （ ）

（6）设函数 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，则必有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$.（ ）

（7）不论 a,b,c 的相对位置（即数的大小关系）如何，只要 $\int_a^b f(x)dx,\ \int_a^c f(x)dx$，$\int_c^b f(x)dx$ 都存在，都有等式 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ 成立. （ ）

2. 选择题：

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^b f(x)dx$ 是（ ）.

A.一个常数 B. $f(x)$ 的一个原函数 C. 一个函数族 D.一个非零常数

（2） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $\int_a^b f(x)dx$ 存在的（ ）.

A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

（3）由曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a,x=b(a<b)$ 所围成的平面图形面积的计算公式为（ ）.

A. $\int_a^b f(x)dx$ B. $\int_b^a f(x)dx$ C. $\int_a^b |f(x)|dx$ D. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

（4）设 $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)dx$，$J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)dx$，$K=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)dx$ 则 I,J,K 的大小关系是（ ）

A. $I<J<K$ B. $I<K<J$ C. $J<I<K$ D. $K<J<I$

3. 填空题:

（1）利用定积分的几何意义得，$\int_{-2}^{1}|x|dx=$____________；$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=$____________；

（2）若 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_1^3 f(x)dx=2$，$\int_1^8 f(x)dx=8$，则 $\int_3^8 f(x)dx=$____________；

（3） $\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx$ __________ $\int_0^1\sqrt{1+x^4}dx$；（填≤或≥）

（4）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$ 用定积分表示为________________.

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n xdx$

5. 证明 $-2e^2\le\int_2^0 e^{x^2-x}dx\le -2e^{-\frac{1}{4}}$.

6*. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明 $\int_0^1 f^2(x)dx\ge(\int_0^1 f(x)dx)^2$.

7*. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.