8 《概率论与数理统计》期中考试

8.1 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

题目 1

A, B, C 是相互独立的三个事件且 $P(A) = P(B) = P(C) = 0.3$，则 $P(A \cup B \cup C)$ 的值为 (　　)

(A) 0.9　　(B) 0.3　　(C) 0.027　　(D) 0.657

解答　选 (D). 根据三个事件的概率加法公式和事件的独立性，有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.3 + 0.3 + 0.3 - 0.09 - 0.09 - 0.09 + 0.027 \\ &= 0.657. \end{aligned}$$

题目 2

设随机变量 $X \sim N(0,1)$ ，X 的分布函数为 $\Phi(x)$，则 $P\{|X| > 2\}$ 的值为 (　　)

(A) $2[1 - \Phi(2)]$　　(B) $2\Phi(2) - 1$　　(C) $2 - \Phi(2)$　　(D) $1 - 2\Phi(2)$

解答　选 (A). 根据正态分布函数的定义:

$$\Phi(x) = P\{X \leqslant x\},$$

和正态分布的对称性

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

得到

$$\begin{aligned} P\{|X| > 2\} &= P\{X < -2\} + P\{X > 2\} \\ &= P\{X < -2\} + (1 - P\{X \leqslant 2\}) \\ &= \Phi(-2) + [1 - \Phi(2)] \\ &= [1 - \Phi(2)] + [1 - \Phi(2)] \\ &= 2[1 - \Phi(2)]. \end{aligned}$$

题目 3

设随机变量 $X \sim \pi(2)$，则 $P\{X \leqslant 1\}$ 的值为 (　　)

(A) e^{-2}　　(B) $2\mathrm{e}^{-2}$　　(C) $3\mathrm{e}^{-2}$　　(D) $4\mathrm{e}^{-2}$

解答　选 (C). 根据泊松分布的定义

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}.$$

当 $\lambda = 2$ 时，有

$$P\{X \leqslant 1\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{2^0 \mathrm{e}^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \mathrm{e}^{-2}}{1!} = 3\mathrm{e}^{-2}.$$

题目 4

一盒中有 3 个红球，1 个白球，不放回取 2 个球，X 表示取到的红球数，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则 $F(1.5)$ 的值为 (　　)

(A) 0　　(B) 0.25　　(C) 0.5　　(D) 0.75

解答　选 (C). 根据分布函数的定义:

$$F(x) = P\{X \leqslant x\}.$$

有

$$F(1.5) = P\{X \leqslant 1.5\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0 + \frac{C_3^1 C_1^1}{C_4^2} = \frac{1}{2}.$$

题目 5

已知 (X, Y) 的联合分布律为 $P\{X = 1, Y = 1\} = 0.1$，$P\{X = 1, Y = 2\} = 0.3$，$P\{X = 2, Y = 1\} = 0.4$，$P\{X = 2, Y = 2\} = 0.2$，$F(x, y)$ 是 (X, Y) 的分布函数，$F_X(x)$ 是 X 的边际分布函数，则以下结果正确的是 (　　)

(A) $F(1.5, 2) = 0.1$　　(B) $F_X(2.5) = 1$　　(C) $F_X(1.5) = 0$　　(D) $F(2, 2) = 0.2$

解答　选 (B). 二维随机变量的 (X, Y) 联合分布函数定义为

$$F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}.$$

二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数定义为

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty).$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{X \leqslant +\infty, Y < y\} = F(+\infty, y).$$

对于选项 (A)

$$\begin{aligned} F(1.5, 2) &= P\{X \leqslant 1.5, Y \leqslant 2\} \\ &= P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 2\} \\ &= 0.1 + 0.3 \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

对于选项 (B)

$$\begin{aligned} F_X(2.5) &= P\{X \leqslant 2.5, Y \leqslant +\infty\} \\ &= P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\} + P\{X = 2, Y = 2\} \\ &= 0.1 + 0.3 + 0.4 + 0.2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

对于选项 (C)

$$F_X(1.5) = P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 2\} = 0.1 + 0.3 = 0.4.$$

对于选项 (D)

$$\begin{aligned}F(2,2)&=P\{X\leqslant 2,Y\leqslant 2\}\\&=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}\\&=0.1+0.3+0.4+0.2\\&=1.\end{aligned}$$

8.2 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

题目 6

已知 $P(A\cup B)=0.7$，$P(A)=0.4$，当 A 与 B 不相容时，$P(B)=$ ________.

解答 根据概率的加法公式和事件 A,B 互不相容，有

$$\begin{cases}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),\\P(AB)=P(\varnothing)=0.\end{cases}\implies P(B)=0.3.$$

题目 7

已知 (X,Y) 的联合分布律为

$X\setminus Y$	-1	0	1
-1	$1/18$	$2/18$	0
0	$3/18$	$4/18$	$5/18$
2	0	$2/18$	$1/18$

则 $P\{X\leqslant 0,|Y|<1\}=$ ________.

解答

$$\begin{aligned}P\{X\leqslant 0,|Y|<1\}&=P\{X\leqslant 0,-1<Y<1\}\\&=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=0,Y=0\}\\&=\frac{2}{18}+\frac{4}{18}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

题目 8

设随机变量 X 服从参数 $\theta=2$ 的指数分布，则 $P\{X\geqslant 2\}=$ ________.

解答 随机变量 X 服从参数 $\theta=2$ 的指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在对应区间积分，得到

$$P\{X\geqslant 2\}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=-\int_2^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{x}{2}\right)=-\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\Big|_2^{+\infty}\right)=\mathrm{e}^{-1}.$$

题目 9

设随机变量 $X \sim N(0,4)$，其概率密度函数为 $f_1(x)$，随机变量 $Y \sim U(-1,4)$，其概率密度函数为 $f_2(y)$. 若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leqslant 0, \\ bf_2(x), & x > 0. \end{cases}$ 是概率密度函数，其中 $a > 0, b > 0$，则 a, b 应满足 __________.

解答 根据概率密度的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} af_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} bf_2(x)\,\mathrm{d}x \\ 1 &= a\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}\,\mathrm{d}x + b\int_{0}^{4} \frac{1}{4-(-1)}\mathrm{d}x \\ 1 &= \frac{a}{2} + \frac{4b}{5}.\end{aligned}$$

综上，a, b 满足 $5a + 8b = 10$.

题目 10

随机变量 X 在区间 $(1,3)$ 上服从均匀分布，对 X 独立重复观察 3 次，则至少有 2 次观测值大于 1.5 的概率为 __________.

解答 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 1 < x < 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

观测值大于 1.5 的概率为

$$P\{X \geqslant 1.5\} = \int_{1.5}^{3} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

对 X 独立重复观察 3 次，至少有 2 次观测值大于 1.5 的概率为

$$P = C_3^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 + C_3^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{32}.$$

8.3 计算题（共 70 分）

题目 11（10 分）

福建师范大学实验幼儿园举行家长开放日活动，小浩家参加活动的家长是父亲或者母亲. 父亲参加的概率是 0.9，若父亲参加，则母亲参加的概率为 0.1；若父亲没有参加，则母亲参加的概率为 0.5. 求：

(1) 母亲参加的概率.

(2) 在已知母亲参加的条件下，父亲参加的概率.

解答 设事件 A 为父亲参加开放日，事件 B 为母亲参加开放日.

$$\begin{cases} P(A)=0.9, & P(\overline{A})=0.1, \\ P(B|A)=0.9, & P(\overline{B}|A)=0.1, \\ P(B|\overline{A})=0.5, & P(\overline{B}|\overline{A})=0.5. \end{cases}$$

(1) 根据全概率公式，母亲参加的概率为

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})=0.1\times 0.9+0.5\times 0.1=0.14.$$

(2) 根据贝叶斯公式，在已知母亲参加的条件下，父亲参加的概率为

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{2} P(B|A_j)P(A_j)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})} \\ &= \frac{0.1\times 0.9}{0.1\times 0.9+0.5\times 0.1} \\ &= \frac{9}{14}. \end{aligned}$$

题目 12（10 分）

在一次打靶训练中，某运动员给自己定的目标是要一直打到命中 10 环为止. 已知他每次命中 10 环的概率为 p，$0<p<1$. 设各次是否命中相互独立，求：

(1) 他打靶次数的分布律.

(2) 如果他打了 n 次还没有命中，还需要进行 m 次的概率.

(3) 如果他打了 5 分钟还没有命中，还需要进行 m 次的概率.

解答 (1) 用随机变量 X 表示打靶的次数，其分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p.$$

(2) 用随机变量 X 表示已经射击的次数，Y 表示继续射击的次数，结合条件概率公式，有

$$\begin{aligned} P\{Y=m|X=n\} &= \frac{P\{Y=m,X=n\}}{P\{X=n\}} \\ &= \frac{(1-p)^{n+m-1}p}{(1-p)^n} \\ &= (1-p)^{m-1}p. \end{aligned}$$

(3) 根据第 (2) 小题的结果，继续射击的次数与之前的射击结果没有关系

$$P=(1-p)^{m-1}p.$$

题目 13（12 分）

设 A, B 为随机事件，且 $P(A)=0.3, P(B)=0.12, P(AB)=0.06$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求 (X,Y) 的联合概率密度及边缘分布律.

解答 根据事件运算的分配律

$$P(A\overline{B})=P(A(S-B))=P(A)-P(AB)=0.24.$$

$$P(\overline{A}B)=P((S-A)B)=P(B)-P(AB)=0.06.$$

根据事件运算的德摩根律

$$P(\overline{AB})=P(\overline{A\cup B})=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=0.64.$$

得到 (X,Y) 的联合概率密度及边缘分布律

$X\setminus Y$	0	1	$P\{X=i\}$
0	0.64	0.24	0.88
1	0.06	0.06	0.12
$P\{Y=j\}$	0.70	0.30	1

题目 14（12 分）

某化合物的酒精含量百分比 X 是随机变量，其概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}c(1-x), & 0.3<x<0.7,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

此化合物的成本为每升 10 元，售价为每升 40 元或 60 元. 若 $0.4<X<0.6$，则售价以 0.9 的概率为 60 元，否则以概率 0.2 为 60 元. 以 Y 表示每升的利润，求：

(1) 常数 c.

(2) X 的分布函数 $F(x)$.

(3) Y 的分布律和分布函数.

解答 (1) 根据概率密度的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0.3}^{0.7} c(1-x)\,\mathrm{d}x=c\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0.3}^{0.7}=1,$$

解得

$$c=5.$$

(2) 分布函数 $F(x)$ 定义为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

情形一 当 $x \leqslant 0.3$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}x=0.$$

情形二 当 $0.3<x<0.7$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0.3} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0.3}^{x} 5(1-x)\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{5}{2}x^2+5x\right)\Big|_{0.3}^{x}=-\frac{5}{2}x^2+5x-\frac{51}{40}.$$

情形三 当 $x \geqslant 0.7$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0.3} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0.3}^{0.7} 5(1-x)\,\mathrm{d}x+\int_{0.7}^{x} 0\,\mathrm{d}x=1.$$

综上所述，分布函数 $F(x)$ 为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x\leqslant\frac{3}{10},\\ -\frac{5}{2}x^2+5x-\frac{51}{40}, & \frac{3}{10}<x<\frac{7}{10},\\ 1, & x\geqslant\frac{7}{10}.\end{cases}$$

(3) 根据全概率公式，有

$$\begin{aligned}P\{Y=50,0.4<X<0.6\}&=P\{Y=30|0.4<X<0.6\}P\{0.4<X<0.6\}\\&=0.9[F(0.6)-F(0.4)]\\&=0.9\times0.5\\&=0.45.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y=30,0.4<X<0.6\}&=P\{Y=30|0.4<X<0.6\}P\{0.4<X<0.6\}\\&=0.1[F(0.6)-F(0.4)]\\&=0.1\times0.5\\&=0.05.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y=50,X\notin(0.4,0.6)\}&=P\{Y=50|X\notin(0.4,0.6)\}P\{X\notin(0.4,0.6)\}\\&=0.2[F(0.4)-F(0.3)+F(0.7)-F(0.6)]\\&=0.2\times0.5\\&=0.1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y=30,X\notin(0.4,0.6)\}&=P\{Y=30|X\notin(0.4,0.6)\}P\{X\notin(0.4,0.6)\}\\&=0.8[F(0.4)-F(0.3)+F(0.7)-F(0.6)]\\&=0.8\times0.5\\&=0.4.\end{aligned}$$

$$P\{Y=50\}=P\{Y=50,0.4<X<0.6\}+P\{Y=50,X\notin(0.4,0.6)\}=0.55.$$

$$P\{Y=30\}=P\{Y=30,0.4<X<0.6\}+P\{Y=30,X\notin(0.4,0.6)\}=0.45.$$

综上，Y 的分布律为

Y	30	50
p_k	0.45	0.55

分布函数 $F(y)$ 为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<30,\\ \dfrac{9}{20}, & 30\leqslant y<50,\\ 1, & y\geqslant 50.\end{cases}$$

题目 15（12 分）

设 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & -2<x<0,\\ \dfrac{1}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^4$，求：

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

(2) $P\left\{X\leqslant -\dfrac{1}{2}, Y\leqslant 1\right\}$.

解答 (1) 根据分布函数的定义

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\left\{X^4\leqslant y\right\}=P\left\{-y^{\frac{1}{4}}\leqslant X\leqslant y^{\frac{1}{4}}\right\}=F_X\left(y^{\frac{1}{4}}\right)-F_X\left(-y^{\frac{1}{4}}\right),$$

将 $F_Y(y)$ 对 y 求导得到 $f_Y(y)$

$$\begin{aligned}f_Y(y)=F_Y'(y)&=F_X'\left(y^{\frac{1}{4}}\right)-F_X'\left(-y^{\frac{1}{4}}\right)\\&=f_X\left(y^{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}\right)-f_X\left(-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(-\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}\right)\\&=\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}\left[f_X\left(y^{\frac{1}{4}}\right)+f_X\left(-y^{\frac{1}{4}}\right)\right],\end{aligned}$$

综上，Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{5}{48}y^{-\frac{3}{4}}, & 0\leqslant y<16,\\ \dfrac{1}{24}y^{-\frac{3}{4}}, & 16\leqslant y<81,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned}P\left\{X \leqslant -\frac{1}{2}, Y \leqslant 1\right\} &= P\left\{X \leqslant -\frac{1}{2}, X^4 \leqslant 1\right\} \\ &= P\left\{X \leqslant -\frac{1}{2}, -1 \leqslant X \leqslant 1\right\} \\ &= P\left\{-1 \leqslant X \leqslant -\frac{1}{2}\right\} \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

题目 16（14 分）

设 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} kx^2 y, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：

(1) 常数 k.

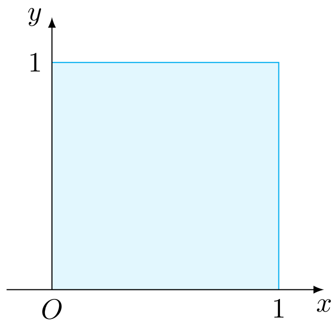
(2) $f_X(x), f_Y(y)$.

(3) $P\{X + Y > 1\}$.

解答 (1) 根据概率密度的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

结合如图所示的积分区域



得到

$$\int_0^1 \int_0^1 kx^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 kx^2\mathrm{d}x \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 kx^2 \left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1\right) \mathrm{d}x = \left.\frac{k}{6}x^3\right|_0^1 = 1,$$

解得

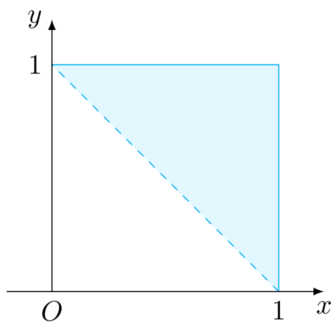
$$k = 6.$$

(2) 根据边缘概率密度的定义

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 6x^2y\,\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 6x^2y\,\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}2y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) 新的积分区域如图所示



根据概率密度的性质，得到

$$P\{X+Y>1\}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 6x^2y\,\mathrm{d}y=\int_0^1 3x^2\left[1-(1-x)^2\right]\,\mathrm{d}x=\frac{9}{10}.$$