第四章 向量组的线性相关性

第一节 向量组及其线性组合

主要内容

- 向量及向量组的定义
- 向量组线性表示
- 向量组等价的条件

一、向量（组）的概念

1. n维向量的概念

定义1

由n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$组成的有序数组称为n维向量.

若n维向量写成$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$的形式，称为$n$维列向量；

若n维向量写成$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的形式，称为n维行向量.

这n个数称为该向量的n个分量,其中a_i称为第i个分量.

我们常用$\alpha,\beta,\gamma,\ldots$来表示$n$维列向量,而用$\alpha^T,\beta^T,\gamma^T,\ldots$来表示$n$维行向量.

当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数时，n 维向量称为 n 维实向量.

当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是复数时，n 维向量称为 n 维复向量

今后我们所讨论的向量都是实向量.

分量都是零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$.

向量 $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

2. 向量的运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$， $k\in\mathbb{R}$，则有

（1） $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}$；　（2） $k\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}$；

（3） $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$；

$$\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}.$$

3. 向量组的定义

定义 若干个同维列或行向量组成的集合叫做**向量组**. 例如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-3\\4\\7\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix}$$

就是一个由四个 3 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 构成的向量组，记为向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

单位坐标向量组E: $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

n 维向量的全体所组成的集合

$$R^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$$

叫做 n 维向量空间.

4. 矩阵与向量组的关系

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，对矩阵 A 分块如下：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} \beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \beta_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}(j=1,2,\cdots,n)$， $\beta_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$.

则 m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为矩阵 A 的列向量组，

n 维向量组 $\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_m^{\mathrm{T}}$ 称为矩阵 A 的行向量组.

反之，给定一个 m 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，

则得到一个以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为列的 $m\times n$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$；

给定一个 n 维向量组 $\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_m^{\mathrm{T}}$，

则得到一个以 $\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_m^{\mathrm{T}}$ 为行的 $m\times n$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

因此，一个所含向量个数有限的向量组总可与一个矩阵建立一一对应关系.

5. 线性方程组与向量组的关系

前两章中常把 m 个方程 n 个未知量的线性方程组写成矩阵形式 $Ax = b$, 从而方程组可以与其增广矩阵 $B = (A, b)$ 一一对应.

若把方程组写成向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

则可见方程组与 B 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, b$ 间也有一一对应的关系. 综上所述, **一个线性方程组与一个向量组一一对应.**

二、向量组等价

1. 线性组合与线性表示

定义　给定向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，对于任何一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，向量

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$$

称为向量组 A 的一个**线性组合**, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 称为这个线性组合的系数.

给定向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 和向量 b, 若**存在**一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使

$$b = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$$

这时称向量 b 可由向量组 A **线性表示**.

注：(1)设向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，则

(i) 0可由向量组A线性表示.

(ii) $\alpha_i (1 \le i \le m)$ 可由向量组A线性表示.

(2) $\forall \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in R^n$，都有

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n,$$

即 α 可由单位向量组E线性表示.

向量 b 能由向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示

$\Updownarrow$

存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使 $b = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$

$\Updownarrow$

线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = b$ 有解

$\Updownarrow$

R(A)=R(B)

其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$，$B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, b)$

例 1 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$,

证明向量 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并求出表示式.

解

2. 向量组等价的概念

定义 3 设有两个向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 及 B: $b_1, b_2, \cdots, b_s$，若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称**向量组 B 能由向量组 A 线性表示.**

向量组 B：$b_1, b_2, \cdots, b_l$ 能由
向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示

$\Updownarrow$

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $X = K$

$\Updownarrow$

$R(A) = R(A,B)$

2. 向量组等价的概念

定义 3 设有两个向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 及 B: $b_1, b_2, \cdots, b_s$，若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称**向量组 B 能由向量组 A 线性表示**. 若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称这两个向量组**等价**.

向量组 B： $b_1, b_2, \cdots, b_l$ 与
向量组 A： $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 等价

$$\Updownarrow$$

$$R(A) = R(B) = R(A,B)$$

例 2 设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix},$$

证明向量组 A:α_1 , α_2 与向量组B: b_1 , b_2 , b_3 等价.

证明

3. 性质

定理 3 设向量组 B：$b_1, b_2, \cdots, b_l$ 能由向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示，则

$$R(b_1, b_2, \cdots, b_l) \le R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m).$$

证明 证明

例 3 设 n 维向量组 A： $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 构成 $n \times m$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$， n 阶单位矩阵 $E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的列向量叫做 n **维单位坐标向量**. 证明： n 维单位坐标向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 能由向量组 A 线性表示的充要条件是 $R(A) = n$.

证

三、小结

线性表示：非齐次线性方程组的解

(i) 向量 b 可由向量组A线性表示.

(ii) 向量组B 与向量组A等价.

四、作业

书 习题四 P109

1，2