§1.5 条件概率

一、条件概率的定义

例1　将一枚硬币抛掷两次,观察其出现正反面的情况.设事件A为“至少有一次为H”,事件B为“两次掷出同一面”。求已知事件A已经发生的条件下事件B发生的概率。

解:样本空间$S=\{HH,HT,TH,TT\}$

$A=\{HH,HT,TH\}, B=\{HH,TT\}$

在A发生的前提下，共有3种情况，其中一种使得B发生。

所求概率为　1/3

$$\frac{1}{3}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

像这种“已知A发生的条件下，B发生的概率”称为条件概率。记为 $P(B|A)$ 。由此可见

$$P(B|A)=\frac{AB\text{所含样本点数}}{A\text{所含样本点数}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

或者　$P(AB)=P(A)P(B|A)$　　乘法公式

定义 设A, B是两个事件且$P(A)>0$。称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (5.2)$$

为在事件A发生的条件下，事件B发生的条件概率.

固定一个概率大于0的事件A，考虑当B变化时，$P(B|A)$ 是怎么变化的？是否象（普通）概率一样？

1^0 对一切事件 B，$P(B|A) \geq 0$；

2^0 $P(S|A) = 1$

3^0 若A_1, A_2, $\cdots$ 两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n | A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n | A)$$

由此可见，对于固定的概率大于0的事件A，在它的条件下的条件概率和普通概率有完全类似的性质。前面讲过的加法公式都可以类似地得到。

二、乘法公式： 设 $P(A)>0$，则

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

如果$P(AB)>0$，则

$$P(ABC) = P(AB)P(C|AB) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

如果$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例2、一盒子装有4 件产品，其中有3 件一等品,一件二等品. 从中取产品两次，每次任取一件,作不放回抽样. 设事件A 为 “第一次取到的是一等品”， 事件B为 “第二次取到的是一等品”. 试求条件概率$P(B|A)$.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{C_3^2}{C_4^2}/\frac{C_3^1}{C_4^1}=2/3$$

$$P(A|B)=?$$

例3 设袋中装有r个红球,t个白球。每次自袋中任取一个球,观察其颜色然后放回,并再放入a个与所取出的球同色的球.若在袋中连续取球四次,试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解:以$A_i(i=1,2,3,4)$表示事件"第i次取到红球",

则$\overline{A}_3$、$\overline{A}_4$分别表示事件第三、四次取到白球。

故所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)= P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A}_3|A_1A_2)P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{t+a}{r+t+3a}$$

例4 设某光学仪器厂制造的透镜,第一次落下时打破的概率为1/2,若第一次落下未打破,第二次落下打破的概率为7/10,若前两次落下未打破,第三次落下打破的概率为9/10.试求透镜落下三次而未打破的概率.

解：以$A_i\ (i=1,2,3)$表示事件"透镜第i次落下时未打破",以B表示事件"透镜落下三次而未打破"

$$\because B = A_1 A_2 A_3$$

$$\therefore \quad P(B) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2)$$

$$= (1-\frac{1}{2})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{9}{10}) = \frac{3}{200}$$

注意以下的错误：

1、从某小区任取一人，记D="取到男性时，他是公务员".

但是，"取到男性且他是公务员"代表一个事件（交事件）.

2、在例题3中，记D="第一次取到红球时，第二次取到白球".

在这里，"取到男性"，"第一次取到红球"是前提。所以，特别注意不要把条件概率问题当成两个事件的积的概率问题，也不能当成一个事件的普通概率问题。

（三）全概率公式和贝叶斯公式

定义. 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 是一组事件，若

(i) $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 两两互不相容；

(ii) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \cup \cdots = S$

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \ldots$ 为样本空间的一个划分或者分割。

有限多个B_k时，也类似定义。或者把后面的事件当作不可能事件。

定理. 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间的一个划分且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$ 。

（1）全概率公式：对任意事件A有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$

（2）贝叶斯公式：当P(A)>0时有

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)}$$

有无穷多个B_k时，也有一样的公式。

（1）由完备事件组的条件（ii）知

$$P(A)=P(\bigcup_{k=1}^{n}AB_k)$$

由互不相容知

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$$

最后由乘法公式得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$

（2）由乘法公式知

$$P(B_k \mid A)=\frac{P(AB_k)}{P(A)}$$

再对分子和分母分别应用乘法公式和全概率公式知

$$P(B_k \mid A)=\frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A \mid B_n)}$$

（四）例子

例5　某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的。根据以往的记录有以下的数据：

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合且无区别的。在仓库中随机地取一只元件。（1）求它是次品的概率.

解: 设A表示"取到一件次品", $B_i(i=1,2,3)$表示"所取到第i家工厂提供的产品".

$$P(B_1)=0.15, P(B_2)=0.80, P(B_3)=0.05,$$

$$P(A|B_1)=0.02, P(A|B_2)=0.01, P(A|B_3)=0.03.$$

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)$$

$$+P(A|B_3)P(B_3)=0.0125$$

（2）如果已经知道它是次品，求它是第i家工厂的产品的概率.

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)}$$

$$=\frac{0.02\times 0.15}{0.0125},\quad \frac{0.01\times 0.8}{0.0125},\quad \frac{0.03\times 0.05}{0.0125}$$

$$=\ 0.24,\quad 0.64,\quad 0.12\quad (i=1,2,3)$$

注意以下的错误：

设B_i表示"取到第i家工厂提供的次品".

在这里，“取到第i 家工厂的次品”是事件“取到第i 家工厂的产品”和事件“取到次品”的交事件。而我们已知的是后面这两个事件的概率，不是它们的积事件的概率。所以，特别注意不要把条件概率和两个事件的积的概率混淆了。

例7 对以往数据分析结果表明,当机器调整得良好时,产品的合格率为98%,而当机器发生某种故障时,其合格率为55%.每天早上机器开动时,机器调整良好的概率为95%,试求已知某日早上第一件产品是合格品时,机器调整得良好的概率是多少?

解:设A为事件"第一件产品合格",

B为事件"机器调整良好".

则$P(A|B)=0.98, P(A|\overline{B})=0.55, P(B)=0.95, P(\overline{B})=0.05,$

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.98\times0.95}{0.98\times0.95+0.55\times0.05}=0.97$$

例8 根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下的效果：若以A 表示事件“试验反应为阳性”，以C表示事件“被诊断者患有癌症”，则有$P(A|C)=0.95, P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$。现在对一自然人群进行普查，设被试验的人患有癌症的概率为0.005，即$P(C)=0.005$。试求$P(C|A)$。

解:已知$P(A|C)=0.95,\ P(A|\overline{C})=$

$1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.05,\ P(C)=0.005,$

$P(\overline{C})=0.995,$

故所求概率为

$$P(C|A)=\frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C)+P(A|\overline{C})P(\overline{C})}=0.087$$

应用全概率公式，贝叶斯公式的题目特点：

1、某个事件在若干条件下的条件概率容易求或已知。

2.1、若要求该事件的（普通）概率，则用全概率公式。

2.2、若要求“反过来”的条件概率，则用贝叶斯公式。

这里的“若干条件”就是公式中的

B_1，B_2，$\cdots$，B_k。“某个事件”就是A

作业：14，22，24