第三节 n 阶行列式的定义

- 概念的引入
- n 阶行列式的定义
- 基本行列式值

一、概念的引入

三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

说明

（1）每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

（2）三阶行列式共有6 项，即 $3!$ 项.

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列.

例如　$a_{13}a_{21}a_{32}$　列标排列的逆序数为

$t(312)=1+1=2,$　偶排列　$+$正号

$a_{11}a_{23}a_{32}$　列标排列的逆序数为

$t(132)=1+0=1,$　奇排列　$-$负号,

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

二、 n 阶行列式的定义

定义 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$
\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{array}
$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \boxed{(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}}$$

t 为排列$p_1p_2 \cdots p_n$的**逆序数**

排列$p_1p_2 \cdots p_n$为自然数1，2，···，n所构成的**某个排列**

让排列$p_1p_2 \cdots p_n$**取遍**由自然数1，2，···，n所构成的**所有**排列

说明

1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的；

2、 n阶行列式是 $n!$ 项的代数和；

3、 n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列 n个元素的乘积；

4、 一阶行列式 $|a| = a$不要与绝对值记号相混淆；

5、 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号为 $(-1)^t$.

三、 举例

例1 计算下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理　计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　　分析

展开式中项的一般形式是 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

$$p_n = n,\ p_{n-1} = n-1,\ p_{n-3} = n-3,\cdots p_2 = 2, p_1 = 1,$$

所以不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{t(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例如 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=?$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot 4\cdot 5\cdot 8=160.$$

例2 证明n阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例3

已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$

求 x^3 的系数.

解　含 x^3 的项有两项,即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于 $(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$

$$=x^3-2x^3=-x^3$$

故 x^3 的系数为 -1.

例4　用行列式定义计算

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

四、小结

1、行列式是一种特定的算式.

2、 n 阶行列式共有 $n!$ 项，每项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积，正负号由下标排列的逆序数决定.

五、作业 书 习题一 P21

2(2) 413265987 3

思考题

1.求函数$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$中$x^3$的系数.

2、以下乘积是5级行列式的项，试判断下列各项的符号

$$1)\ a_{31}\ a_{45}\ a_{12}\ a_{24}\ a_{53}$$

$$2)\ a_{45}\ a_{54}\ a_{31}\ a_{12}\ a_{23}$$

$$3)\ a_{53}\ a_{21}\ a_{45}\ a_{34}\ a_{12}$$

$$4)\ a_{13}\ a_{34}\ a_{22}\ a_{45}\ a_{51}$$