模拟卷

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$（ B ）

A、$\frac{1}{2}$；　B、$\frac{1}{3}$；　C、$\frac{1}{4}$；　D、$\frac{5}{12}$

2、下列函数中，不能作为某个连续型随机变量的密度函数的是（ D ）

A、$f(x)=\begin{cases}2(1-1/x^2), & 1\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；　B、$f(x)=\begin{cases}1-e^{-0.4x}, & x\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

C、$f(x)=\begin{cases}1000/x^2, & x>1000\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；　D、$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1\\ 2-x, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

3、若随机变量 X、Y 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$ 且 $D(X)D(Y)>0$，则下列一定成立的是（B ）

A、X、Y 相互独立；　B、X、Y 不相关；　C、$D(XY)=0$；　D、X、Y 不独立

4、设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，总体的均值 μ 已知，总体方差 σ^2 未知，$\bar{X}$ 为样本均值，则下列不是统计量的是（ D ）

A、$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；　B、$X_n$；　C、$\bar{X}-E(\bar{X})$；　D、$D(\bar{X})$

5、设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，总体均值为 μ，方差为 σ^2，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，下列正确的是（ D ）

A、$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$；　B、$S^2$ 与 $\bar{X}$ 相互独立；

C、$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$；　D、$S^2$ 是 σ^2 的无偏估计量

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6、设有两个盒子，其中第 1 个盒子中装有 3 只白球、2 只红球和 2 只黑球，第二个盒子中装有 2 只白球、3 只红球和 4 只黑球，现在独立地分别从两个盒子中各取一只球，则至少取到一只白球

的概率为 $\underline{\quad \frac{5}{9} \quad}$.

7、设随机变量 X 服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布，且 $a>0$，如果 $P\{X>1\}=1/3$，则 $a=$ $\underline{\quad 3 \quad}$

8、设 X 表示 10 次独立重复射击试验命中目标的次数，每次命中目标的概率 $p=0.4$，则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$ $\underline{\quad 18.4 \quad}$.

9、设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,...,X_6$ 为来自总体 X 的简单随机样本，设 $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，若 $CY\sim\chi^2(2)$，则 $C=$ $\underline{\quad \frac{1}{3\sigma^2} \quad}$..

10、设总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$，$X_1,X_2,...,X_9$ 为 X 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=5$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $\underline{\quad (4.412, 5.588) \quad}$.($z_{0.025}=1.96$)

三、计算题（共 70 分）

11、（8 分）袋中有 10 个乒乓球，其中有 3 个旧的和 7 个新的。第一次比赛时从中任取 1 个，用后放回。第二次比赛时从中任取 4 个。求第二次取到 1 个新球和 3 个旧球的概率。

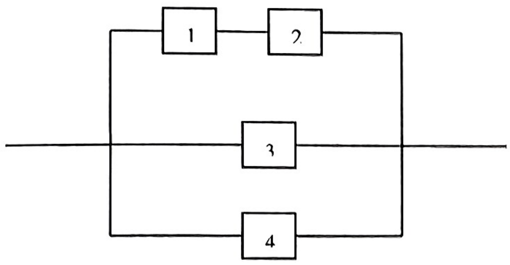
解：设 B 表示第一次取到 1 个新球，A 表示第二次取到 1 个新球和 3 个旧球。（2 分）则

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})$$ （5 分）

$$=\frac{7}{10}\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^4}+\frac{3}{10}\frac{C_7^1C_3^3}{C_{10}^4}$$

$$=\frac{7}{10}\times\frac{4}{35}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{30}=0.09$$ ……………………（8 分）

12、（6 分）设元件 1，2，3，4 能否通过电流相互独立，且能通过电流的概率分别为 0.9，0.8，0.8，0.7。求如图电路能通过电流的概率。



解：设 A_1，A_2，A_3，A_4 分别表示元件 1，2，3，4 能通过电流。A 表示电路能通过电流。则

$A=A_1A_2\cup A_3\cup A_4$。所以，…………………… （2 分）

$$P(A)=P(A_1A_2\cup A_3\cup A_4)$$

$$=1-P(\overline{A_1A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4})$$

$$=1-P(\overline{A_1A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

$$=1-[1-P(A_1)P(A_2)][1-P(A_3)][1-P(A_4)]$$

$$=1-0.28\times0.2\times0.3=0.9832$$

13、（12 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\\ 0, & 其它,\end{cases}$。（1）求 X 的分布函数 $F(x)$；(2) 求 $E(X^2)$。

解：（1）由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ 知，

当 $x\le 0$ 时，$F(x)=0$；当 $x\ge 2$ 时，$F(x)=1$；

当 $0<x\le 1$ 时，$F(x)=\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2$；

当 $1<x<2$ 时，$F(x)=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x(2-t)dt=2x-\frac{1}{2}x^2-1$。

即 $F(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ \frac{1}{2}x^2 & ,0<x\le 1\\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1, & 1<x\le 2\\ 1 & ,x>2\end{cases}$ ………………7 分

（2）$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\frac{7}{6}$。 …………12 分

14、（10 分）设随机向量(X，Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<1,0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（1）求（X，Y）分别关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$；

（2）判断 X 与 Y 是否相互独立，并说明理由。

解：（1）X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 8xy\ dy=4x^3, 0<x<1;\\ 0 \qquad ,\text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 8xy\ dx=4y(1-y^2), 0<y<1;\\ 0 \qquad ,\text{其他},\end{cases}$$ …………6 分

（2）由于 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立. ………………10 分

15、（10 分）假设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为：

$$P\{X=n,Y=m\}=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},\qquad 0\le m\le n=0,1,2,\cdots.$$

(1) 求 X 的边缘概率分布；（2）求在 X=5 的条件下 Y 的条件概率分布。

解： 依据定义和性质，（1） X 和 Y 的边缘分布律分别为：

$$P\{X=n\}=\sum_{m=0}^{n} P\{X=n,Y=m\}=\sum_{m=0}^{n}\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}$$

$$=\frac{e^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}(7.14)^m(6.86)^{n-m},$$

$$=\frac{14^n}{n!}e^{-14},\quad n=0,1,2,\cdots,$$ (6 分)

（2）在 X=5 的条件下 Y 的条件分布为：

$$P\{Y=m|X=5\}=\frac{P\{X=5,Y=m\}}{P\{X=5\}}$$

$$=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{5-m}}{m!(5-m)!}\left(\frac{e^{-14}}{5!}14^5\right)^{-1}$$

$$=\frac{5!}{m!(5-m)!}\left(\frac{7.14}{14}\right)^m\left(1-\frac{7.14}{14}\right)^{5-m},\quad m=0,1,2,3,4,5$$ (10 分)

因此，条件分布为二项分布 $B(5,p)$，其中 $p=\frac{7.14}{14}$=0.51。

16、（12 分） 已知总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & ,0<x<1 \\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数。设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 X 的一个简单随机样本。

（1）求 θ 的矩估计量；　　（2）求 θ 的最大似然估计量。

解：（1）$E(X)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\frac{\theta}{\theta+1}$　　（2 分）

令 $\frac{\theta}{\theta+1}=\bar{X}$ 解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$.　　（5 分）

（2）似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta x_i^{\theta-1})$。

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$　　（8 分）

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 得 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$　　（12 分）

17、（12 分）随机地从一批电子元件中抽取 16 个测得它们的电阻（欧）分别为：14.0，14.1，16.0，15.1，14.5，14.6，14.2，14.6，14.7，14.0，13.9，13.8，14.2， 13.6，13.8，14.0（记这批数据为 x_i ，计算得到 $\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}\approx 0.60$，$\sum_{i=1}^{16}x_i$=229.1）。设这批元件的电阻 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。

(1) 能否认为 μ=15？（显著性水平为 0.05）

(2) 能否认为这批元件的电阻的方差不超过 0.2?（显著性水平为 0.05）

解：$\bar{x}\approx 14.3$，$s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}\approx 0.60$。

因此，条件分布为二项分布 $B(5,p)$，其中 $p=\dfrac{7.14}{14}=0.51$。

16、（12 分） 已知总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & ,0<x<1\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数。设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 X 的一个简单随机样本。

（1）求 θ 的矩估计量；　　（2）求 θ 的最大似然估计量。

解：（1）$E(X)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\dfrac{\theta}{\theta+1}$　　（2 分）

令 $\dfrac{\theta}{\theta+1}=\bar{X}$ 解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$.　　（5 分）

（2）似然函数为 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}(\theta x_i^{\theta-1})$。

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$　　（8 分）

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 得 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$　　（12 分）

17、（12 分）随机地从一批电子元件中抽取 16 个测得它们的电阻（欧）分别为：14.0，14.1，16.0，15.1，14.5，14.6，14.2，14.6，14.7，14.0，13.9，13.8，14.2， 13.6，13.8，14.0（记这批数据为 x_i，

计算得到 $\sqrt{\dfrac{1}{15}\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}\approx 0.60$，$\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=229.1$）。设这批元件的电阻 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。

(1) 能否认为 $\mu=15$？（显著性水平为 0.05）

(2) 能否认为这批元件的电阻的方差不超过 0.2？（显著性水平为 0.05）

解：$\bar{x}\approx 14.3$，$s=\sqrt{\dfrac{1}{15}\sum\limits_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}\approx 0.60$。