

8.1 向量及其线性运算

1. 填空题

(1) 两点 $M_1(2,3,3)$ 和 $M_2(4,5,7)$ 的中点坐标是_____.

(2) 若向量 $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (2, -5, 0)$ 且终点 M_2 坐标是 $(4, 0, 1)$, 则 M_1 坐标是_____.

(3) 平行于向量 $\vec{a} = (1, 4, 4\sqrt{2})$ 的单位向量是_____.

(4) 在空间直角坐标系中, 点 $M(2, -3, 5)$ 关于 yoz 面的对称点是_____; 关于原点的对称点是_____; 关于 z 轴的对称点是_____; 在 xoy 面上的投影点的坐标是_____; 到 yoz 面的距离是_____; 到原点的距离是_____; 到 x 轴的距离是_____.

(5) 当_____ 时, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; 当_____ 时, $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

当_____ 时, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

2. 已知两点 $M_1(\sqrt{2}, -1, 3)$ 和 $M_2(0, -2, 4)$, 求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、单位向量、方向余弦、方向角.

3. 设向量 $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (2, 1, -2)$, $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. 求:

(1) \vec{c}

(2) \vec{c} 在 x 轴上的投影

(3) \vec{c} 在 z 轴上的分向量.

4. 设 $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$, P 为线段 AB 上任意一点, 证明存在实数 λ , 使得

$$\vec{OP} = (1 - \lambda)\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}.$$

8.2 数量积 向量积 混合积

1. 判断题:

(1) 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, 则 $\vec{b} = \vec{c}$. ()

(2) 对任意的向量 \vec{a} 和 \vec{b} , 都有 $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$. ()

2. 选择题:

(1) 已知 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. 6 B. 3 C. $\sqrt{6}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2) 下列等式不成立的是 ()

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ B. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$
C. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ D. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

3. 已知向量 $\vec{a} = (2, -1, -3)$ 和 $\vec{b} = (1, -4, 5)$, 求

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 及 $\vec{a} \times \vec{b}$;

(2) $(-2\vec{a}) \cdot (3\vec{b})$ 及 $2\vec{a} \times (-3\vec{b})$;

(3) \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角的余弦值;

(4) 以向量 $\vec{a} = (2, -1, -3)$ 和 $\vec{b} = (1, -4, 5)$ 为邻边的三角形的面积.

4. 已知向量 $\vec{a} = (2, -4, 1)$ 和 $\vec{b} = (1, -2, 2)$, 求

(1) 向量 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影;

(2) 实数 λ 的值使得 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 垂直 z 轴;

5. 用向量的方法证明:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|,$$

其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

8.3 平面及其方程

1. 填空题:

- (1) 过点 $(1, 0, 2)$ 且与平面 $2x + y - 3z = 4$ 平行的平面方程是_____.
- (2) 点 $(1, 0, 2)$ 到平面 $x + 2y - 2z + 6 = 0$ 的距离是_____.
- (3) 平面 $x - y + 2z = 0$ 与平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 的距离是_____.
- (4) 平面 $x + y - 2z + 3 = 0$ 的法向量的单位向量是_____, 其与 z 轴夹角为锐角的法向量是_____.
- (5) 平面 $x + 2y - 2z + 3 = 0$ 和 $x - y + z = 3$ 的夹角余弦值是_____.

2. 求过点 $M_1(1, 1, 3)$ 、 $M_2(3, 1, 2)$ 和 $M_3(2, 0, 2)$ 的平面方程.

3. 已知两点 $M_1(1, 2, 4)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$, 求垂直并平分线段 M_1M_2 的平面方程.

4. 求过点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(2,1,-1)$ 且垂直于平面 $x-y-z+3=0$ 的平面方程.

6. 分别按下列条件求平面方程:

- (1) 平行于 xoz 面且经过点 $(2,-5,3)$;
- (2) 通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$;
- (3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$

8.4 空间直线及其方程

1. 选择题:

(1) 直线 $L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$ 与平面 () 平行

A. $4x + y - z - 10 = 0$

B. $x - 2y + 3z + 5 = 0$

C. $2x - 3y + z + 6 = 0$

D. $x + y - 5z + 3 = 0$

(2) 直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 和平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$ 的位置关系是 ()

A. L 与 π 平行

B. $L \perp \pi$

C. $L \in \pi$

D. L 与 π 斜交

(3) 设直线 $L: \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$, 则该直线一定 ().

A. 过原点且垂直于 x 轴

B. 过原点且垂直于 y 轴

C. 不过原点且垂直于 x 轴

D. 不过原点且垂直于 z 轴

2. 直线 $\begin{cases} 2x+y+4z=0 \\ 3x-y+z+1=0 \end{cases}$ 与平面 $x+y-z=0$ 的夹角为_____.

3. 求过点 $(-2, 3, 1)$ 且与两平面 $x+y=z$ 和 $2x+y+z=4$ 平行的直线方程.

4. 求过点 $(2, 0, -3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

5. 求点 $(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$ 的距离.

6. 求点 $(2, 2, 2)$ 在平面 $x + 2y + z - 2 = 0$ 上的投影点.

7. 求直线 $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$ 在平面 $x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线方程.