

## 一、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 具有特解  $y_1 = e^x, y_2 = 3xe^x, y_3 = 5e^{-x}$  的三阶常系数齐次微分方程为 ( ).

A.  $y''' - y'' - y' + y = 0$

B.  $y''' + y'' - y' - y = 0$

C.  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

D.  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

2. 直线  $L: \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$  和平面  $\Pi: x-y-z+1=0$  的位置关系是 ( ).

A.  $L$  与  $\Pi$  斜交

B.  $L \perp \Pi$

C.  $L \in \Pi$

D.  $L \parallel \Pi$  且  $L \notin \Pi$

3. 设  $z = f(x^2 + y^2)$ ,  $f$  可微, 则  $dz =$  ( )

A.  $2xdx + 2ydy$

B.  $2xf_x dx + 2yf_y dy$

C.  $2xf'dx + 2yf'dy$

D.  $2xf'_x + 2yf'_y$

4. 设  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}$ ,  $f(x)$  是连续的奇函数,  $g(x)$  是连续的偶函数, 则下列结论正确的是 ( )

A.  $\iint_D f(y)g(x)dx dy = 0$

B.  $\iint_D f(x)g(y)dx dy = 0$

C.  $\iint_D [f(x) + g(y)]dx dy = 0$

D.  $\iint_D [f(y) + g(x)]dx dy = 0$

5. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\sqrt{2})}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n^2})$ , 其中收敛的有 ( ).

A. 3 个;

B. 2 个;

C. 1 个;

D. 0 个.

## 二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 平面  $x + y + z = 1$  与三个坐标平面围成的四面体被平面  $z = a$  ( $0 < a < 1$ ) 所截的三角形截面的面积是\_\_\_\_\_.

2. 微分方程  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = xe^x + \sin x$  的特解的待定形式为\_\_\_\_\_.

3.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2) =$  \_\_\_\_\_.

4. 交换积分的顺序  $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx =$  \_\_\_\_\_.

5. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$  的敛散性\_\_\_\_\_ ; (填“收敛”或“发散”)

### 三、计算题(每小题 8 分, 共 40 分)

1. 求微分方程  $xy' + y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  的通解.

2. 函数  $z = x^3 f(x, \frac{x}{y})$  具有二阶连续偏导, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

3. 计算二重积分  $I = \iint_D (x-y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$ .

4. 设曲线的方程为  $\begin{cases} z = \sqrt{6-x^2-y^2} \\ x+y+z=0 \end{cases}$ , 试求曲线上在点  $(-2, 1, 1)$  处的切线和法平面方程.

5. 将函数  $f(x) = \frac{x-1}{5-x}$  展开成  $(x-1)$  的幂级数, 并求  $f^{(n)}(1)$ .

**四、(10 分)** 在椭圆  $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$  的第一象限部分上求一点, 使得该点处的切线与坐标轴所围成的三角形面积最小, 并求面积的最小值.

**五、(10 分)** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$  的和函数, 并给出收敛域..

**六、(10 分)** 设函数  $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

试探讨该函数在  $(0, 0)$  的连续性、偏导数的存在性以及可微性.