

福建师范大学
2022-2023 学年第一学期

《线性代数》课程试题(A)卷

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1、设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$ ，则（ ）

- (A) A 中必有两行(列)的元素对应成比例；
(B) A 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合；
(C) A 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合；
(D) A 中至少有一行(列)的元素全为零。

2、 A 和 B 均为 n 阶矩阵，且 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，则必有（ ）

- (A) $A=E$ ； (B) $B=E$ ； (C) $A=B$ 。 (D) $AB=BA$ 。

3、 n 阶矩阵 A 与 B 等价， E 为单位矩阵，则（ ）

- (A) $A-\lambda E=B-\lambda E$ ； (B) $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$ ；
(C) A 与 B 有相同的秩； (D) A 与 B 都相似于同一个标准形。

4、 n 阶矩阵 A 为奇异矩阵的充要条件是（ ）

- (A) A 的秩小于 n ； (B) $|A| \neq 0$ ；
(C) A 的特征值都等于零； (D) A 的特征值都不等于零；

二、填空题（本题共 4 小题，每题 4 分，满分 16 分）

5、若 4 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=3$ ， A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|A^*|$ = _____。

6、 A 为 $n \times n$ 阶矩阵，且 $A^2 - A - 2E = 0$ ，则 $(A+2E)^{-1}$ = _____。

7、设 $A = \text{diag}(1, -2, 1)$ ， $A^*BA = 2BA - 8E$ 则 B = _____。

8、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是_____。

三、计算题（本题共 2 小题，每题 8 分，满分 16 分）

9、解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 。

10、计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ a+a^2 & b+b^2 & c+c^2 & d+d^2 \\ a^2+a^3 & b^2+b^3 & c^2+c^3 & d^2+d^3 \end{vmatrix}$$

四、证明题（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分。写出证明过程）

11、若线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示。证明：

- (1) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关；
- (2) 存在某个向量 α_j ，使得向量组 $\alpha_j, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

12、设 A 和 B 是 n 阶矩阵， E 是 n 阶单位矩阵，且 $AB = A - B$ ，证明

- (1) $(A + E)^{-1} = E - B$ ；
- (2) $AB = BA$ 。

五、解答题（本题共 3 小题，每小题 12 分，满分 32 分。解答应写出文字说明或演算步骤）

13、设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，求一个正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。14、设线性方程组为：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 2 \end{cases}$$
，试讨论下列问题：

- (1) 当 λ 取什么值时，线性方程组有唯一解？
- (2) 当 λ 取什么值时，线性方程组无解？
- (3) 当 λ 取什么值时，线性方程组有无穷多解？并在有无穷多解时求其解。

学院

专业
班级

学号

学生
姓名

15、设 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & c \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$ ，其行列式 $|A| = -1$ 。若 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0 ，

属于 λ_0 的一个特征向量 $\alpha = (-1, -1, 1)^T$ ，求 λ_0, a, b, c 。