§3.2　边缘分布

一、一般情况--边缘分布函数

向量的分布称为联合分布。分量的分布称为边缘（边际）分布

分量的分布函数称为边缘分布函数。

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y)$$

二、离散型

$$P\{X=x_i\}=P\{(X=x_i)\bigcup_j(Y=y_j)\}$$

$$=\sum_j P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

$$\therefore P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}\triangleq p_{i\cdot}\qquad i=1,2,\cdots,$$

同理

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}\triangleq p_{\cdot j},\qquad j=1,2,\cdots,$$

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	Σ
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Σ	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	1

例3.1 将两封信随机地投入3个邮筒，设*X*, *Y* 分别为1，2号邮筒中信的数目。求(*X*,*Y*)的联合分布与边缘分布。

解： *X* 的可能取值为0，1，2； *Y* 的可能取值为0，1，2.

所以，(*X*,*Y*)的联合分布为

$$P\{X=i，\ Y=j\}=\frac{C_2^i C_{2-i}^j}{3^2}\quad i，\ j=0,\quad 1,\quad 2$$

由此得(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

由此得(X,Y)的联合分布律和边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

补例、将10封信随机地投入3个邮筒，设X, Y分别为1，2号邮筒中信的数目。求(X, Y)的联合分布与边缘分布。

解： X、Y的可能值都是0, 1, ⋯, 10；

$$P\{X=i，\ Y=j\}=\frac{C_{10}^{i}C_{10-i}^{j}}{3^{10}}\quad i，\ j=0,1,\cdots,10$$

注意：$i+j>10$时$C_{10-i}^{j}=0$，此时$P\{X=i，\ Y=j\}=0$

$$P(X=i)=\sum_{j=0}^{10} P\{X=i, \ Y=j\}=\sum_{j=0}^{10-i}\frac{C_{10}^{i}C_{10-i}^{j}}{3^{10}}=\frac{2^{10-i}C_{10}^{i}}{3^{10}}$$

$$i=0,1,\cdots,10$$

由对称性得

$$P(Y=j)=\sum_{i=0}^{10} P\{X=i, \ Y=j\}=\frac{2^{10-j}C_{10}^{j}}{3^{10}}$$

$$j=0,1,\cdots,10$$

边际分布是什么分布？

三、连续型

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<+\infty\}$$

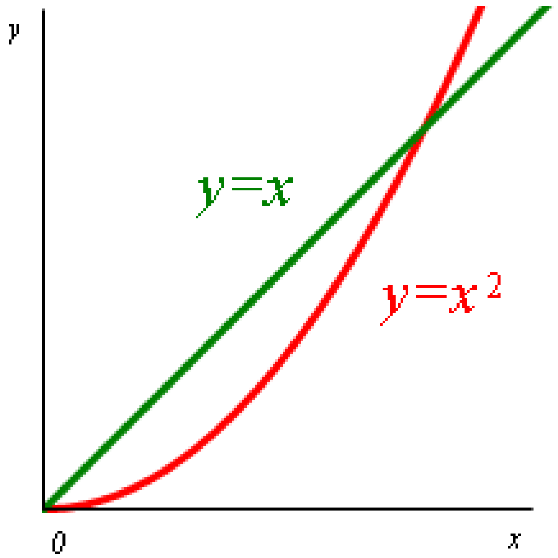
$$=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)dy]du$$

$$\therefore\quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

例2.设二维随机变量(X,Y)具有概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



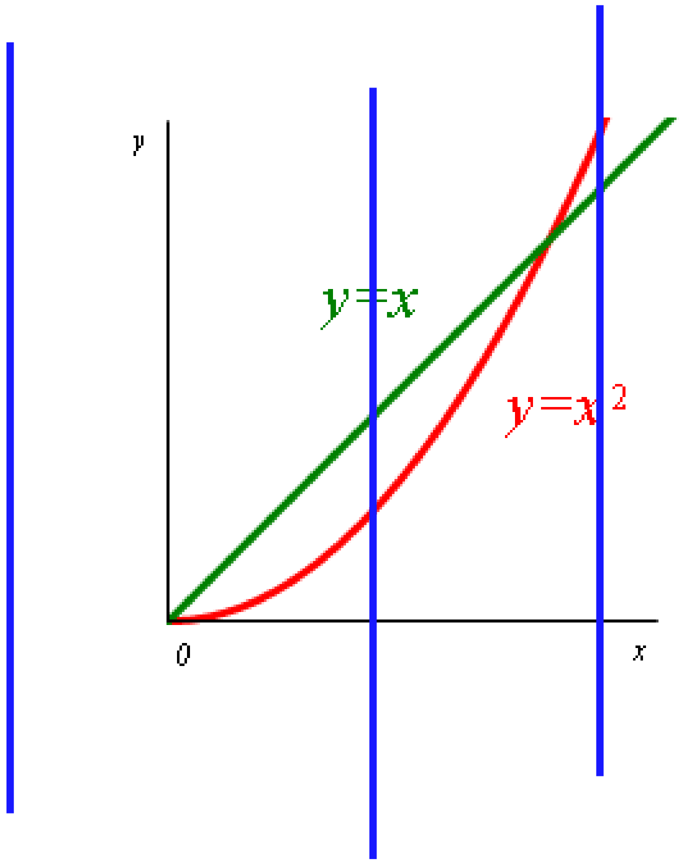
求$f_X(x)$和$f_Y(y)$.

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$

积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$就是沿着直线

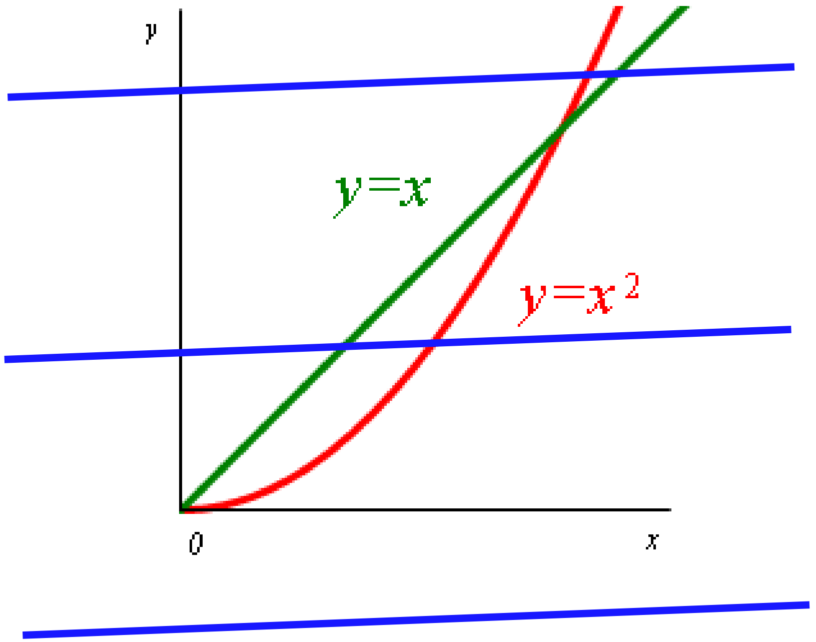
$\{(x,y):\ -\infty < y < +\infty\}$的积分。

从右图可见，可分为三种情况。



$$\therefore \quad f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6\mathrm{dy} & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}6(x-x^2) & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y) & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例3.设 二维随机变量 $(X, \quad Y)$ 的密度函数为

$$f(x, \quad y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

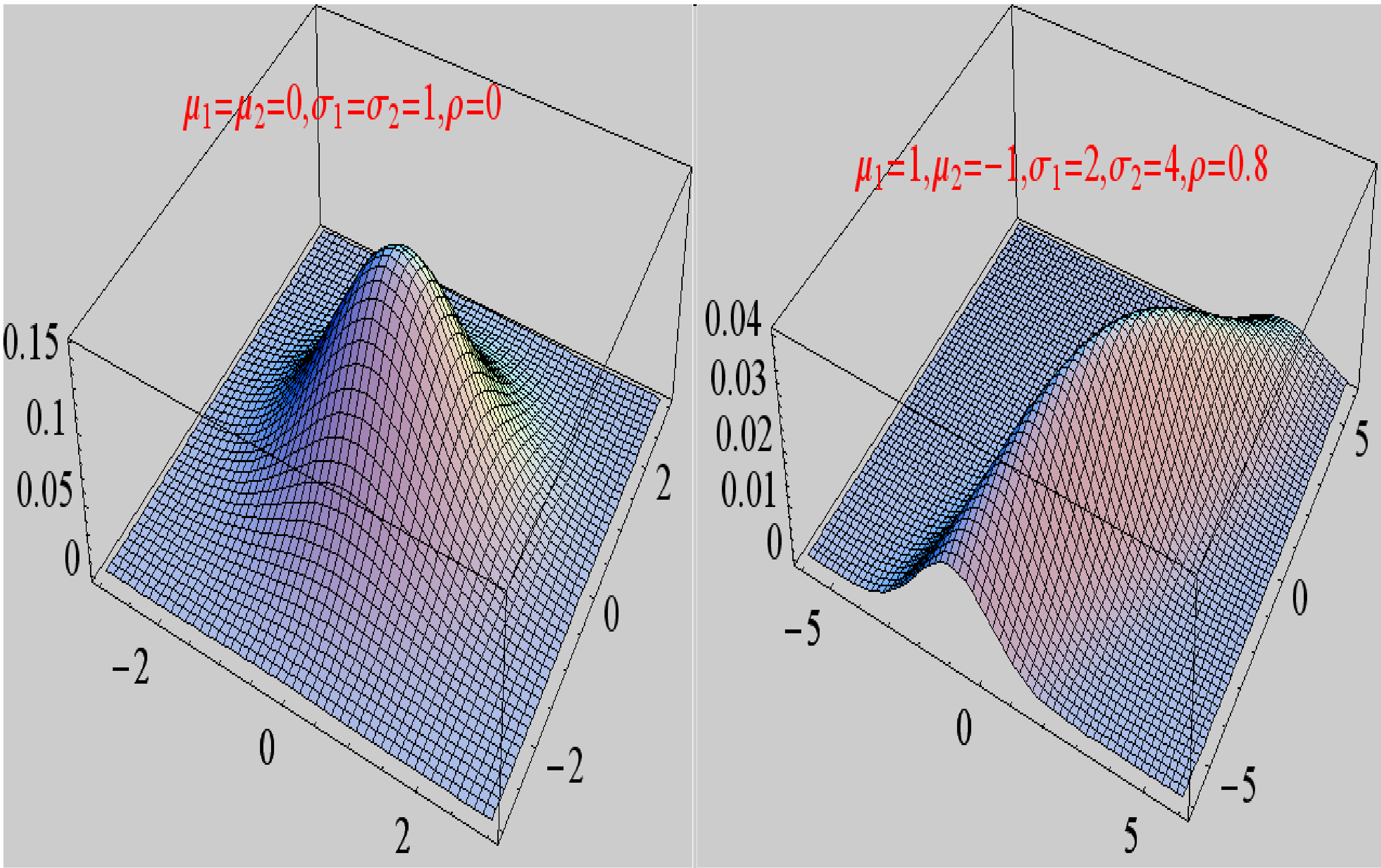
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则称随机变量 $(X, \quad Y)$ 服从参数为 $\mu_1, \quad \mu_2, \quad \sigma_1^2, \quad \sigma_2^2 \quad \rho$ 的正态分布，记作

$$(X, \quad Y) \sim N\left(\mu_1, \quad \mu_2, \quad \sigma_1^2, \quad \sigma_2^2 \quad \rho\right)$$

$-\infty < \mu_i < +\infty$, $\boldsymbol{\sigma_i > 0 \left(i=1, \quad 2\right)}$, $-1 < \rho < 1.$

二维正态分布密度的图形



求边缘密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\quad y)dx \;=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left[(x-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1(y-\mu_2)}{\sigma_2}\right]^2+\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

作业：6、7、8、9