18-19-2 概率论与数理统计期中试卷

姓名________学号__________专业_______成绩_____

1、（15 分）设 A，B 为两个事件，且 $P(A) = 0.4$，$P(A \cup B) = 0.7$，分别在下列 5 种情况下：（1）A 和 B 互不相容；（2）A 和 B 相互独立；（3）$A \subset B$；（4）$P(A|B) = 0.5$；（5）$P(A\overline{B}) = 0.3$；求 $P(B)$ 的值。（写出计算过程）

2、（12 分）设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1。一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客随机察看 4 只，若无残次品，则买此箱玻璃杯，否则不买。求：

（1）顾客买此箱玻璃杯的概率；

（2）在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率。

3、（12 分）已知某种疾病的发病率为1/1000，某单位共有 5000 人，假定人群中发病与否相互独立，设随机变量 X 表示该单位的发病人数，试求（1）随机变量 X 的分布律；（2）该单位至少有 2 个人发病的概率；（3）该单位的平均发病人数。

4、（10 分）设 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，$Y=1-e^{-2X}$，试求 Y 的概率密度函数。

5、（15 分）设二维随机变量 (ξ,η) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} cy, & 0<x<y<1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

试求：(1) 常数 c 的值；(2) ξ,η 的边际密度函数；(3) ξ,η 相互独立吗？为什么？

6、（12 分）设盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、1 只白球，现一次从中随机取 2 只球，以 ξ 表示取到黑球的个数，以 η 表示取到红球的个数。试求：

(1) (ξ,η) 的联合分布律；　(2) ξ 与 η 的边缘分布律。

7、（12 分）将 n 只球放入 M 个盒子中，设每只球放入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数 X 的数学期望。

8、（12 分）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，试求 X 的数学期望。

两边分别对y求导得 $f_Y(y) = f_X\left[-\frac{\ln(1-y)}{2}\right]\cdot -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-y}(-1)$

$= \begin{cases} \frac{1}{2(1-y)}\cdot 2e^{\ln(1-y)} = \frac{e^{\ln(1-y)}}{1-y} \\ 0, & y\notin(0,1) \end{cases}$

1、(1) A和B互不相容，即 $AB=\varnothing$，则 $p(A\cup B)=p(A)+p(B)=0.7=0.4+p(B)$ $\therefore p(B)=0.3$

(2) A与B相互独立，即 $p(AB)=p(A)p(B)$，从而 $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(AB)=0.4+p(B)-0.4p(B)=0.7$

$\therefore 0.6p(B)=0.3 \Rightarrow p(B)=\frac{1}{2}$

(3) $A\subset B$，则 $p(A\cup B)=p(B)=0.7$

(4) $p(A|B)=0.5=\dfrac{p(AB)}{p(B)}=\dfrac{-p(A\cup B)+p(A)+p(B)}{p(B)}=\dfrac{0.4+p(B)-0.7}{p(B)}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}p(B)=p(B)-0.3 \Rightarrow 0.3=\frac{1}{2}p(B) \Rightarrow p(B)=\frac{3}{5}$

(5) $p(A\bar{B})=0.3=p(A-B)=p(A)-p(AB)=p(A\cup B)-p(B)=0.7-p(B)\Rightarrow p(B)=0.4$

2、解：设 $B_i=\{$取到含 i 只残次品的箱子$\}$，$i=0,1,2$

$A=\{$顾客购买此箱玻璃杯$\}$.

则 $p(B_0)=0.8$，$p(B_1)=p(B_2)=0.1$，$p(A|B_0)=\dfrac{C_{20}^4}{C_{20}^4}=1$，$p(A|B_1)=\dfrac{C_{19}^4}{C_{20}^4}$，$p(A|B_2)=\dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4}$

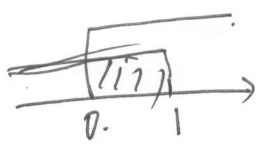
(1) $p(A)=\sum_{i=0}^{2}p(B_i)\,p(A|B_i)=0.8\times1+0.1\times\dfrac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\times\dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=$

(2) $p(B_0|A)=\dfrac{p(AB_0)}{p(A)}=\dfrac{p(B_0)\,p(A|B_0)}{p(A)}=\dfrac{0.8\times1}{p(A)}=\cdots$

3、解：(1) $X\sim b(5000,0.001)$，即 $p\{X=k\}=C_{5000}^k(0.001)^k(0.999)^{5000-k}$，$k=0,1,2,\dots,5000$

(2) $p\{X\geq2\}=1-p\{X=0\}-p\{X=1\}=1-C_{5000}^0(0.001)^0(0.999)^{5000}-C_{5000}^1(0.001)^1(0.999)^{4999}$

(3) $E(X)=np=5000\times0.001=5$

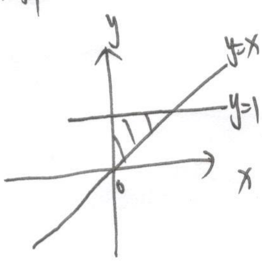
4. 解：$Y=1-e^{-2X}<1$，即 Y  即 $Y\in(0,1)$

① 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\geq1$ 时，$F_Y(y)=1 \Rightarrow F_Y(y)=C$，$y\notin(0,1)$

② 当 $y\in(0,1)$ 时，$F_Y(y)=p\{Y\leq y\}=p\{1-e^{-2X}\leq y\}=p\{e^{-2X}\geq1-y\}=p\{-2X\geq\ln(1-y)\}$

$=p\{X\leq-\dfrac{\ln(1-y)}{2}\}=F_X[-\dfrac{\ln(1-y)}{2}]$ 即 $F_Y(y)=F_X[-\dfrac{\ln(1-y)}{2}]$，$y\in(0,1)$

5. 解:



即 $p(x,y)=\begin{cases}3y, & 0<x<y<1\\ 0, & 其它。\end{cases}$

$$(1)\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^1 cy\,dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{c}{2}y^2\Big|_x^1\right)dx$$

$$=\frac{c}{2}\int_0^1(1-x^2)\,dx$$

$$=\frac{c}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{c}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{c}{3}$$

$$\Rightarrow c=3$$

$$(2)\quad f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy=\begin{cases}0, & x\notin(0,1)\\ \int_x^1 3y\,dy, & x\in(0,1)\end{cases}=\begin{cases}0 & x\notin(0,1)\\ \frac{3}{2}(1-x^2), & x\in(0,1)\end{cases}$$

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dx=\begin{cases}0, & y\notin(0,1)\\ \int_0^y 3y\,dx, & y\in(0,1)\end{cases}=\begin{cases}0, & y\notin(0,1)\\ 3y^2, & y\in(0,1)\end{cases}$$

$$(3)\quad f_\xi(x)f_\eta(y)=\begin{cases}0, & 其它\\ \frac{9}{2}(1-x^2)y^2, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\end{cases}\neq p(x,y).$$

∴ ξ 与 η 不独立.

6. $\xi=0,1,2,3$, $\eta=0,1,2$, $\le\xi+\eta\le 2$

$p\{\xi=0,\eta=1\}=p\{1红1白\}=\dfrac{C_2^1C_1^1}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}$

$p\{\xi=0,\eta=2\}=p\{2红\}=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$

$p\{\xi=1,\eta=0\}=p\{1黑1白\}=\dfrac{C_3^1C_1^1}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}$

$p\{\xi=1,\eta=1\}=p\{1黑1红\}=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{6}{15}$

$p\{\xi=2,\eta=0\}=p\{2黑\}=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}$

∴

η \ ξ	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	0
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	0	0
2	$\frac{1}{15}$	0	0	0

(2)

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{3}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{15}$	0

7. 解：$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个盒子有球} \\ 0, & \text{第}i\text{个盒子无球}\end{cases}$，$X_i$ 分独立，且同分布

则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_M$，

X_i	0	1
	$\left(\frac{M-1}{M}\right)^n$	$1-\left(\frac{M-1}{M}\right)^n$

$$P\{X_i=0\}=\frac{(M-1)^n}{M^n}=\left(\frac{M-1}{M}\right)^n,\quad 1\le i\le M$$

$$\therefore E(X)=E(X_1)+\cdots+E(X_M)$$

$$=M\cdot\left[1-\left(\frac{M-1}{M}\right)^n\right].$$

8. 解：$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，

则 $f(x)=0.3\varphi(x)+0.7\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$，$\varphi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的密度.

$$\therefore E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[0.3\varphi(x)+0.7\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right]dx$$

$$=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)d\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$=0.3\cdot 0+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)d\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$\xlongequal{u=\frac{x-1}{2}}0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\varphi(u)du$$

$$=0.7\int_{-\infty}^{+\infty}2u\varphi(u)du+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)du$$

$$=0.7\times2\times0+0.7\times1=0.7,$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=E(X)=0\\ &\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1\end{aligned}}$$

Y	0	1	2
	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$