定理. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本,$\overline{X}$是样本均值,则有

(1)$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$;(定理2)

(2)$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ (3) $\overline{X}$与S^2独立(定理3)

(4)$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ (定理4)

§ 8.2 正态总体均值的假设检验

只考虑单个总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ 的检验

1^0 $\sigma^2=\sigma^2_0$ 已知时。关于μ 的检验(Z检验法)

检验统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$ 的拒绝域是 $\dfrac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geq z_{\alpha/2}$

$H_0:\mu\leq\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$ 的拒绝域是 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\geq z_{\alpha}$

$H_0:\mu\geq\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$ 的拒绝域是 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\leq -z_{\alpha}$

2^0 σ^2未知, 关于μ的检验(t检验)

设总体$X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，其中μ，σ^2未知。

求检验问题

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

的拒绝域（显著性水平为α）。

新问题：原来的检验统计量$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$中$\sigma_0$变成一个参数了。

重要思想：我们就用它的点估计替换它。

取 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 作为检验统计量。

当H_0为真时， $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

当观察值$|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|$偏大时就拒绝$H_0$ 。

$$P\{当H_0为真时拒绝H_0\}=P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=\alpha$$

得拒绝域为 $|t|=\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$

现在考虑假设检验问题：

$$H_0:\mu\le\mu_0,\quad H_1:\mu>\mu_0$$

仍然取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

检验统计量取值偏大有利于备择假设，反之有利于原假设。故拒绝域形如 $t\ge k$

$$P\{当H_0为真时拒绝H_0\}$$

$$= P_{\mu \le \mu_0}\left\{ \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \ge \mathrm{k} \right\}$$

当$\mu \le \mu_0$时，由$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \le \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$可得：

事件$\left\{ \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \ge k \right\}$包含于事件$\left\{ \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \ge k \right\}$

$$P\{当H_0为真时拒绝H_0\} = P_{\mu\le\mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \ge \mathrm{k}\right\}$$

$$\le P_{\mu\le\mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \ge k\right\} = P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \ge k\right\}$$

$$= P_{\mu=\mu_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \ge k\right\} = 1 - F_t(k)$$

其中，$F_t(x)$代表 t-分布的分布函数。

所以，拒绝域为 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\geq t_\alpha(n-1)$

$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 的拒绝域是 $\dfrac{|\overline{X} - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

$H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ 的拒绝域是 $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1)$

$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ 的拒绝域是 $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -t_{\alpha}(n-1)$

例1　某种元件的寿命X（以小时计）服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，μ和σ^2均未知。现测得16只元件的寿命如下：

159 280 101 212 224 379 179 264

222 362 168 250 149 260 485 170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225(小时)？

解：按题意需检验

$$H_0:\mu\le\mu_0=225,\quad H_1:\mu>225$$

取$\alpha=0.05$，由表8.1知此检验问题的拒绝域为

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\ge t_\alpha(n-1)$$

现在$n=16, t_{0.05}(15)=1.7531$。又算得$\bar{x}=241.5$, $s=98.7259$，所以

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=0.6685<1.7531$$

即：t没有落在拒绝域中。故接受H_0，即认为元件的平均寿命不大于225小时.

在上述例题中，如果以前的平均寿命是230小时。问：这批元件的质量是否有所降低？

$$H_0 : \mu \geq 230, H_1 : \mu < 230$$

作业：3，4，5

表8-1 正态总体均值的检验法（方差未知）

原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
$\mu \le \mu_0$		$\mu > \mu_0$	$T \ge t_\alpha$
$\mu \ge \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu < \mu_0$	$T \le -t_\alpha$
$\mu = \mu_0$		$\mu \ne \mu_0$	$\lvert T \rvert \ge t_{\alpha/2}$
(σ^2未知)			

补例. 已知某产品的寿命X（小时）近似地服从正态分布$N(\mu, 40000)$。根据经验，平均寿命等于1500小时。现测试了25件新近生产的产品，得到平均寿命为1575小时。问新近生产的产品的寿命与以前产品的寿命是否有变化？

解：要检验的假设问题是

$$H_0: \mu = 1500,\ H_1: \mu \neq 1500$$

因为方差已知，取检验统计量 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$

取$\alpha = 0.05$，则有 $z_{0.025} = 1.96$

则拒绝域为 $|Z| = \dfrac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} > 1.96$

代入数据得$|Z| = \dfrac{|1572 - 1500|}{200/\sqrt{25}} = 1.875 < z_{0.025}$

所以，接受原假设。即认为没有显著变化。