§3.3　条件分布

一、离散型随机变量的条件分布

设 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，对于固定的 i，称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

为在已知$X=x_i$的条件下，Y的条件（概率）分布

类似地，称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

为在已知$Y=y_j$的条件下，X的条件（概率）分布

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	Σ
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{.1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{.2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{.j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Σ	$p_{1.}$	$p_{2.}$	$\cdots$	$p_{i.}$	$\cdots$	1

从表上可见，边缘分布，条件分布就是什么？

$$\text{因为}\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \geq 0 \text{且} \sum_{j} \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} = 1$$

条件概率也是概率。可见，条件概率分布也是概率分布。

例2　一射手进行射击,击中目标的概率为 $p(0<p<1)$，射击直至击中目标两次为止。设以X表示首次击中目标所进行的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数，试求X和Y的联合分布律及条件分布律。

解：当$\mathrm{n} \geq \mathrm{m}$时，$P\{X=n, \quad Y=m\}=0$

当$\mathrm{n}<\mathrm{m}$时，$P\{X=n, \quad Y=m\}$

$=P\{$第n次和第m次击中，其它各次均未击中$\}$

$=p^{2}(1-p)^{m-2}, \quad 1 \leq n<m<+\infty$

所以联合分布为

$$P\{X=n,\quad Y=m\}=\begin{cases} p^2(1-p)^{m-2}, & 1\le n<m \\ 0, & \mathrm{n}\ge\mathrm{m}\ge 1 \end{cases}$$

边缘分布为

$$P\{X=n\}=\sum_{m=n+1}^{\infty}P\{X=n,Y=m\}=\sum_{m=n+1}^{\infty}p^2q^{m-2}=pq^{n-1},\qquad n=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=m\}=\sum_{n=1}^{m-1}P\{X=n,Y=m\}$$

$$=\sum_{n=1}^{m-1}p^2q^{m-2}=(m-1)p^2q^{m-2},\qquad m=2,3,\cdots$$

条件分布为:

$$P\{Y=m \mid X=n\}=\frac{P\{X=n, Y=m\}}{P\{X=n\}}$$

$$=\frac{p^{2}(1-p)^{m-2}}{pq^{n-1}} \quad =p(1-p)^{m-n-1}, \qquad m=n+1, n+2, n+3, \cdots$$

$$P\{X=n \mid Y=m\}=\frac{P\{X=n, Y=m\}}{P\{Y=m\}}$$

$$=\frac{p^{2}(1-p)^{m-2}}{(m-1) p^{2} q^{m-2}}=\frac{1}{(m-1)}, \qquad n=1,2, \ldots, m-1$$

补例：投掷一枚骰子直至出现两次“6点”为止。设首次“6点”出现在第X次，以Y表示总共投掷次数，试求X和Y的联合分布律及条件分布律。

解：$$P\{X=n, \quad Y=m\}=\begin{cases} \dfrac{5^{m-2}}{6^{\mathrm{m}}}, & 1 \le n < m \\ 0 & \mathrm{n} \ge \mathrm{m} \ge 1 \end{cases}$$

$$P\{X=n\}=\frac{5^{n-1}}{6^{n}}, \qquad n=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=m\}=\frac{5^{m-2}}{6^{m}}, \qquad \mathrm{m}=2,3,\cdots$$

条件分布为：

$$P\{Y=m \mid X=n\}=\frac{5^{m-n-1}}{6^{m-n}}, \qquad m=n+1, n+2, n+3, \cdots$$

$$P\{X=n \mid Y=m\}=\frac{1}{(m-1)}, \qquad n=1,2,\ldots,m-1$$

二、连续型（不讲）

作业：10，12