《线性代数》练习题

一、单项选择题

1. 设矩阵 A 为 3 阶可逆矩阵，$Tr(A)$ 表示 A 的主对角线元素之和，k 为非零常数，则(　　).

（A）$|kA|=k|A|$　　　（B）$Tr(kA)=kTr(A)$

（C）$R(kA)=kR(A)$　　　（D）$(kA)^{-1}=kA^{-1}$

2. 设 n 阶矩阵 A、B、C 满足 $ABC=E$, 则 $B^{-1}=$（　　）.

（A）$A^{-1}C^{-1}$　　（B）$C^{-1}A^{-1}$　　（C）AC　　（D）CA

3. 已知 A 为 $m\times n$ 矩阵. 下列说法正确的是（　　）.

（A）若 $R(A)<m$，则 A 中必有一行全为 0；

（B）若 $R(A)<m$，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无解；

（C）若 $R(A)<n$，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解；

（D）若 $R(A)<n$，则 A 的列向量组线性相关.

4. 设 α_1,α_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则（　　）.

（A）$\alpha_2+\beta_2$ 是 $Ax=0$ 的解;　　（B）$\beta_1-\beta_2$ 是 $Ax=b$ 的解;

（C）$\alpha_1+\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的解;　　（D）$\beta_1+\beta_2$ 是 $Ax=b$ 的解.

5. 已知 3 元非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的两个解向量 η_1,η_2 满足 $\eta_1-\eta_2=(1,0,0)^T$，$\eta_1+\eta_2=(2,4,6)^T$. 若秩 $R(A)=2$，则 $AX=\beta$ 的通解为（　　），其中 k 为任意常数.

（A）$(2,4,6)^T+k(1,0,0)^T$　　（B）$(1,2,3)^T+k(1,0,0)^T$

（C）$(1,0,0)^T+k(1,4,6)^T$　　（D）$(1,0,0)^T+k(1,2,3)^T$

6. 设矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3)$ 经过初等行变换可化为 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则必有（　　）.

（A）$a_3=2a_1+a_2$；　　（B）a_1,a_2,a_3 线性相关，但无法给出其关系；

（C）a_1,a_2,a_3 线性无关；　　（D）$a_3=a_1+a_2$.

7. 下列向量组中能构成 R^3 的一个基的是（　　）.

（A）$\left\{(1,1,1)^T\right\}$；　　（B）$\left\{(1,0,0)^T,\ (0,0,1)^T\right\}$；

（C）$\left\{(1,2,1)^T,\ (2,0,-1)^T,\ (4,0,-2)^T\right\}$；　　（D）$\left\{(1,2,1)^T,\ (2,0,-1)^T,\ (4,4,0)^T\right\}$.

8. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则必有（　　）.

（A）存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^TAP=B$；　　（B）$AB=BA$；

（C）存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=B$；　　（D）A 与 B 均可对角化.

9. 设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维非零列向量，如果 $A\alpha_i=i\alpha_i\ (i=1,2,3)$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）若 $P=\left(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3\right)$，则有 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,1,1)$；

（B）若 $P=\left(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_3\right)$，则有 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,3)$；

（C）若 $P=\left(2\alpha_1,-\alpha_2,5\alpha_3\right)$，则有 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,3)$；

（D）若 $P=\left(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1\right)$，则有 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,3)$.

10. 下列矩阵**不可以**对角化的是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　（C）$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}-1&2&2\\0&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

11. 设 3 阶矩阵 A 与 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似, 则 $\left|A^2+3A-E\right|=$（　　）.

（A）81；　　（B）2；　　（C）57；　　（D）9.

12. 已知 n 元正定二次型 f 的矩阵为 A，$n\geq 2$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则（　　）.

（A）$AA^*=E$；　　（B）二次型 X^TA^*X 的矩阵是 $\dfrac{1}{2}A^*$；

（C）f 的秩小于 n；　　（D）A^* 是正定的.

13. 已知 n 阶矩阵 A 是正交矩阵，$n\geq 2$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则必有（　　）.

（A）$AA^*=E$；　　（B）$A^*=A^T$；

（C）A^* 是正交矩阵;　　（D）A 是正定的.

二、填空题

1. 设 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$, A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$ ________.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $A=-A^T$，则 $a=$ ___， $b=$ ___， $c=$ ___.

3. 设 n 阶矩阵 X 满足 $AX+\frac{1}{2}B=X$ ，其中 B 为 n 阶可逆矩阵，则 $X=$ _________.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\left(A-2E\right)^{-1}=$ ________.

5. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=$ __________.

6. 若向量组 $(1, \lambda-2, 1)^T$, $(2, \lambda, 4)^T$, $(0, 0, 1)^T$ 线性相关，则 $\lambda=$___.

7. 设矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=(p_1, p_2, p_3)$，则向量 $(1, 1, 1)^T$ 在基 p_1, p_2, p_3 下的坐标

为________.

8. 已知 $A=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵， $\xi=(1,0,1)^T$ ，则 ξ 在基

η_1,η_2,η_3 下的坐标为______________.

9. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & x & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$的特征值为 1，2，3，则 $x=$___.

10. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，–1，2，E 是单位矩阵，则行列式 $\left|2A^{*}+A+E\right|=$ _______ .

11. 已知二次型 $f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}1 & 4 & -6\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，则该二次型的矩阵是___.

12. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 1，2，3，则当 t___时，$tE-A$ 为正定矩阵，其中 E 为单位矩阵.

13. 当 t 满足__________时，实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+5x_2^2+4x_1x_2+2tx_2x_3+x_3^2$ 是正定二次型.

三、 解答题 (要求写出证明过程或演算步骤)

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 5\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$，求

(1) A^TB-2A； (2) $A^{-1}B$.

2. 已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}5\\8\\7\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(1) 证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量组 β_1,β_2 等价.

(2) 求出向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 的一个最大无关组，并把其余的向量用该最大无关组线性表示.

3. 设向量组. $\mathrm{A}:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}5\\8\\7\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix},\mathrm{B}:\beta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$

(1) 求出向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 的一个最大无关组,并把其余的向量用该最大无关组线性表示.

(2) 证明：B 组能由 A 组线性表示，但 A 组不能由 B 组线性表示.

4. 已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}.$$

(1) 证明: 矩阵方程 $AX=B$ 有解, 其中矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$， $B=(A,\alpha_5)$；

(2) 求出向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个最大无关组，并把其余的向量用该最大无关组线性表示.

5. 已知 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T,\alpha_3=(2,0,1)^T$ 是 3 维实向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，

$\beta_1=(1,0,1)^T$, $\beta_2=(0,1,-1)^T$, $\beta_3=(1,2,0)^T$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组向量.

(1) 证明：向量组 β_1,β_2,β_3 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基；

(2) 已知向量 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(1,1,1)^T$， 求 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

6. 当 a ，b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解？当方程组有无穷多解时求其用特解和导出组的基础解系表示的通解.

7. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ b=\frac{t}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}1\\t\\t^2\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1&0&0\\0&x_2&0\\0&0&x_3\end{pmatrix}.$$

(1) 求出以 x_1,x_2,x_3 为变量的线性方程组 $XAb+Ax=\beta$ 的增广矩阵.

(2) 当 t 取何值时，线性方程组 $XAb+Ax=\beta$ 有唯一解、无解或无穷多解？并在有无穷多解时，求出用其特解和导出组的基础解系表示的通解.

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，证明:

$$\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

也是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

9. 设 A 为 3 阶矩阵， α 是 3 维列向量. 已知向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关，且满足 $A^3\alpha = 3A\alpha - A^2\alpha$ ，证明:

(1)矩阵 $B=(\alpha, A\alpha, A^4\alpha)$ 可逆;

(2) $B^T B$ 为正定矩阵.

10. 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，

(1)求出 A 的所有特征值和特征向量；

(2)求一个**正交**矩阵 Q 和对角矩阵 Λ 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$ ；

(3)证明：当实数 $k>-2$ 时，实对称矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵.

11. 已知二次型 $f=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，求该二次型的矩阵，并用正交变换法把 f 化为标准形.（**要求写出所做的正交变换 $x=Qy$ 及所化得的标准形.**）

12. 用正交变换法化二次型 $f=x^T Ax = x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形.（**要求写出所做的正交变换 $x=Qy$ 及所化得的标准形.**）