习题 9.1

1. 判断题

（1） 二元函数 $f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)=A$，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处极限存在. （　　）

（2）对于二元函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$，由于对任意的 $k\in\mathbb{R}$，有 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} x\dfrac{k}{1+k}=0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处极限存在. （　　）

（3）对于二元函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$，令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r(\sin\theta+\cos\theta)}$ $=\lim\limits_{r\to 0} r^3\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)}=0$，可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处极限为 0. （　　）

（4）设 $f(x,y)=\begin{cases} x^2y\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在原点处连续. （　　）

2. 选择题

（1）设 $P\in\mathbb{R}^2$ 是平面上一点，$E\subset\mathbb{R}^2$，那么下列叙述错误的个数是 （　　）

① 若 P 是 E 的内点，必有 $P\in E$

② 若 P 是 E 的聚点，必有 $P\in E$

③ 若 P 是 E 的边界点，必有 $P\in E$

④ 若 P 是 E 的聚点，必有 $U(P)\bigcap E\neq\varnothing$

⑤ 若 P 是 E 的边界点，必有 $U(P)\bigcap E\neq\varnothing$

⑥ 若 P 是 E 的内点，则 P 也是 E 的聚点

⑦ 若 P 是 E 的边界点，必不可能是 E 的聚点

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

（2）设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，$g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，则下列说法正确是（　　）

A. $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在点(0,0)处均连续

B. $f(x,y)$ 在点(0,0)处连续， $g(x,y)$ 在点(0,0)处极限存在

C. $f(x,y)$ 在点(0,0)处连续， $g(x,y)$ 在点(0,0)处极限不存在

D. $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 点(0,0)处极限均不存在

3. 求下列二元函数极限.

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\arctan(x+y)}{x^2+y^2}$ （2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{\tan xy}$

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$ （4） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\ln(1+xe^y)}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$

4. 考虑函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ ，判断该函数在点 $(0,0)$ 是否连续？请说明理由.