

## 第二节 向量组的线性相关性

- 定义及等价刻画

- 性质

# 一、线性相关与线性无关的定义

## 1. 定义

**定义 4** 给定向量组A:  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ , 如果**存**  
**在不全为零**的实数  $k_1, k_2, \cdots, k_m$ , 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_m \alpha_m = 0,$$

则称向量组A是**线性相关**的, 否则称它**线性无**  
**关**.

## 2. 特殊向量组线性相关性

- (1) 向量 $\alpha$  线性**相关**  $\Leftrightarrow \alpha = \mathbf{0}$ .
- (2) 向量组  $A: \alpha_1 \neq \mathbf{0}, \alpha_2 \neq \mathbf{0}$  线性**相关**  
 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2$  的分量**对应成比例**.
- (3) 含有**零向量**的向量组必线性**相关**.
- (4)  $n$ 维单位坐标向量组**E**:  $e_1, e_2, \dots, e_n$  线性**无关**.

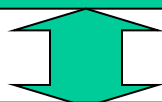
**例** 已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

试讨论向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  及  $\alpha_1, \alpha_2$  的线性相关性.

## 二、向量组线性相关的充要条件

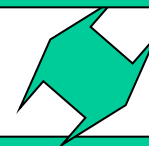
向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关



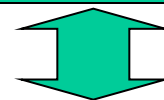
若  $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$   
则  $k_1, k_2, \dots, k_m$  不全为零



该向量组中  
至少有一个向量  
可由其余向量线性表示

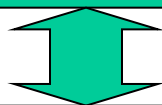


齐次线性方程组  
 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = 0$   
有非零解



$R(A) < m$ , 其中  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$

向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关



若  $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_m \alpha_m = 0$   
则  $k_1, k_2, \cdots, k_m$  只能全为零



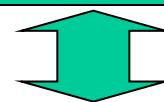
该向量组中任意一个  
都不能由其余向量  
线性表示



齐次线性方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_m \alpha_m = 0$$

只有零解



$$R(A) = m, \text{ 其中 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

**例1** 已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

试讨论向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  及  $\alpha_1, \alpha_2$  的线性相关性.

解  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

$$\overset{\text{r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见  $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ , 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关;  
 $R(\alpha_1, \alpha_2) = 2$ , 向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关.



**例 2** 已知向量组  $a_1, a_2, a_3$  线性无关,  $b_1 = a_1 + a_2$ ,  $b_2 = a_2 + a_3$ ,  $b_3 = a_3 + a_1$ , 试证向量组  $b_1, b_2, b_3$  线性无关.

**证法一** 直接用定义 

**证法二** 利用方程组有解的条件 

**证法三** 利用矩阵秩的性质 

**方法评注** 

### 三、向量组的线性相关性的性质

**定理 5 (1)** 若向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性相关, 则向量组  $B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  也线性相关. 反之, 若向量组  $B$  线性无关, 则向量组  $A$  也线性无关.

**例1** 已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

试讨论向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  及  $\alpha_1, \alpha_2$  的线性相关性.

### 三、向量组的线性相关性的性质

**定理 5 (1)** 若向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性相关, 则向量组  $B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  也线性相关. 反之, 若向量组  $B$  线性无关, 则向量组  $A$  也线性无关.

**(2)**  $m$  个  $n$  维向量组, 当维数  $n$  小于向量个数  $m$  时一定线性相关.

**(3)** 设向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关, 而向量组  $B: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$  线性相关, 则向量  $\beta$  必能由向量组  $A$  线性表示, 且表示式是唯一的.

**证明**  **证明** 

**例 4** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 向量组  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 证明:

(1)  $\alpha_1$  能由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表示;

(2)  $\alpha_4$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

**证明** 

## 四. 小结

### 线性相关性：齐次线性方程组的解

(1) 向量  $\alpha$  线性相关  $\Leftrightarrow \alpha = 0$ .

(2) 向量组  $A : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$  线性相关  
 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2$  的分量对应成比例.

(3) 含有零向量的向量组必线性相关.

(4)  $n+1$  个  $n$  维向量必线性相关.

(5) 小相关  $\Rightarrow$  大相关 ; 大无  $\Rightarrow$  小无 .

## 五、作业 书 习题四 P109

4, 5, 9, 10, 11

**思考题** 研究下列向量组的线性相关性

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$