2021— 2022 第二学期《高等数学 B》期末

试题(A)答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 具有特解 $y_1=e^x, y_2=3xe^x, y_3=5e^{-x}$ 的三阶常系数齐次微分方程为（ A ）.

A. $y'''-y''-y'+y=0$　　　　B. $y'''+y''-y'-y=0$

C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$　　　　D. $y'''-2y''-y'+2y=0$

2. 直线 $L:\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 和平面 $\Pi: x-y-z+1=0$ 的位置关系是（ D ）.

A. L 与 Π 斜交　　　　B. $L\perp\Pi$

C. $L\in\Pi$　　　　D. $L\parallel\Pi$ 且 $L\notin\Pi$

3. 设 $z=f(x^2+y^2), f$ 可微，则 $dz=$（ C ）

A. $2xdx+2ydy$　　　　B. $2xf_x dx+2yf_y dy$

C. $2xf'dx+2yf'dy$　　　　D. $2xf_x+2yf_y$

4. 设 $D=\{(x,y): 0\le x\le 1, -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\}$， $f(x)$ 是连续的奇函数， $g(x)$ 是连续的偶函数，则下列结论正确的是（ A ）

A. $\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0$　　　　B. $\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=0$

C. $\iint\limits_D [f(x)+g(y)]dxdy=0$　　　　D. $\iint\limits_D [f(y)+g(x)]dxdy=0$

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\sqrt{2})}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln(1+\frac{1}{n^2})$，其中收敛的有（ B ）.

A. 3 个；　　B. 2 个；　　C. 1 个；　　D. 0 个.

二、填空(每小题 3 分，共 15 分)

1. 平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面围成的四面体被平面 $z=a$ $(0<a<1)$ 所截的三角形截面的面积是 $\underline{\quad \frac{1}{2}(1-a)^2 \quad}$.

2．微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=xe^x+\sin x$ 的特解的待定形式为

___ $y*=(ax+b)e^x+x(A\cos x+B\sin x)$ ______________________.

3． $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} xy\ln(x^2+y^2)=$ ______0______.

4. 交换积分的顺序 $\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=\underline{\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{1-x}f(x,y)dy}$.

5. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 的敛散性_____发散________;（填“收敛”或“发散”）

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 求微分方程 $xy'+y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的通解.

解法一：原方程可化为一阶线性微分方程的标准形式： $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

记 $P(x)=\frac{1}{x}$, $\quad Q(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

由求解公式可知 $y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)$

$$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)$$

$$=e^{-\ln x}(\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}e^{\ln x}dx+C)$$

$$=\frac{1}{x}(\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+C)$$

$$=\frac{1}{x}(\arcsin x+C)$$

故方程的通解为 $\quad y=\frac{\arcsin x+C}{x}$

解法二：原方程可化为 $(xy)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

从而 $xy=\arcsin x+C$

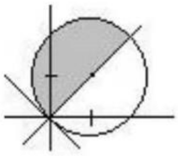
故方程的通解为 $y=\dfrac{\arcsin x+C}{x}$

2. 函数 $z=x^3 f(x,\dfrac{x}{y})$ 具有二阶连续偏导，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2 f+x^3 f_1'+\dfrac{x^3}{y}f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^4}{y^2}f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4x^3}{y^2}f_2'-\frac{x^4}{y^2}f_{12}''-\frac{x^4}{y^3}f_{22}''$$

3. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x-y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y):(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\}$.

解：

$$\iint\limits_D (x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}r^2dr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}d\theta=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)^3d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^3d(\cos\theta+\sin\theta)=\frac{8}{3}\frac{(\cos\theta+\sin\theta)^4}{4}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{8}{3}$$

4. 设曲线的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{6-x^2-y^2}\\x+y+z=0\end{cases}$，试求曲线上在点 $(-2,1,1)$ 处的切线和法平面方程.

解 $\begin{cases}z=\sqrt{6-x^2-y^2}\\x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\x+y+z=0\end{cases},z>0$

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6, G(x,y,z)=x+y+z$，则在点 $(-2,1,1)$ 处的切向量为

$(0,6,-6)=6(0,1,-1)$

故所求切线和法平面方程分别为 $\dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}, y=z$

5．将函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{5-x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求 $f^{(n)}(1)$.

解

$$\frac{1}{5-x}=\frac{1}{4(1-\frac{x-1}{4})}=\frac{1}{4}(1+\frac{x-1}{4}+(\frac{x-1}{4})^2+\cdots+(\frac{x-1}{4})^n+\cdots),|x-1|<4,$$

$$\frac{x-1}{5-x}=(x-1)\frac{1}{5-x}=\frac{1}{4}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(x-1)^3}{4^3}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots,-3<x<5,$$

$f^{(n)}(1)=\dfrac{n!}{4^n}$.

四、（10 分） 在椭圆 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 的第一象限部分上求一点，使得该点处的切线与坐标轴所围成的三角形面积最小，并求面积的最小值.

解　令 $F(x,y)=3x^2+2xy+3y^2-1$，则 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}=-\dfrac{3x+y}{x+3y}$

故椭圆上的切点为 $M(x_0,y_0)$ 切线的方程为

$$y-y_0=-\frac{3x_0+y_0}{x_0+3y_0}(x-x_0),$$

从而切线与坐标轴的截距分别为 $\dfrac{1}{3x_0+y_0},\dfrac{1}{x_0+3y_0}$，于是切线与坐标轴所围成的

三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3x_0+y_0}\cdot\dfrac{1}{x_0+3y_0}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+8x_0y_0}$

可设拉格朗日函数为

$$F(x,y,\lambda)=1+8xy+\lambda(3x^2+2xy+3y^2-1).$$

解方程组

$$\begin{cases} 8y+6\lambda x=0, \\ 8x+2x\lambda+6y=0, \\ 3x^2+2xy+3y^2=1, \end{cases}$$

得驻点 $(x,y)=(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4})$，驻点唯一.

故 $S_{\min}=\dfrac{1}{4}$.

五、（10分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-2)^n$ 的和函数,并给出收敛域. .

解　令 $x-2=t$，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$，所以原级数收敛域为 $(1,3)$

记 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$ 和函数为 $\varphi(t)$，　即有

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n=t\sum_{n=1}^{\infty}(t^n)'=t(\frac{t}{1-t})'=\frac{t}{(1-t)^2}，\quad t\in(-1,1).$$

于是原函数的和函数

$$s(x)=\varphi(x-2)=\frac{x-2}{(3-x)^2},x\in(1,3).$$

六、（10 分） 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

试探讨该函数在 $(0,0)$ 的连续性、偏导数的存在性以及可微性.

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续；

当 $x^2+y^2=0$ 时，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x\cdot0\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+0^2}}}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{0\cdot\Delta y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta y)^2+0^2}}}{\Delta y}=0$$

考虑 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta x\Delta y\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

因为$0\le\left|\dfrac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\left|\dfrac{\dfrac{1}{2}((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\left|\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\left|\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\to 0(\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$$

所以可微.