考生信息栏

学院________ 系________ 专业________ 年级________ 姓名________ 学号________

装订线

福建师范大学 数学与统计 学院

2024 — 2025 学年第 2 学期高等数学 B 期中试卷

参考解析与评分细则

知明行笃 立诚致广

专　　业：全校性专业　　　　年　　级：2024

课程名称：高等数学 B （下）　　任课教师：谢碧华等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2025 年 4 月 26 日上午 10 点 30 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号,不必抄原题. 3. 考试结束,试卷与答题纸一并提交.

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}]=$（D）.

A．$\frac{1}{\pi}(1-\cos x)$ B．2 C．$-\frac{2}{\pi}$ D．$\frac{2}{\pi}$

2．下列结论中正确的是（D）.

A．$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ 都收敛 B．$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ 都发散

C．$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ 发散，$\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ 收敛 D．$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，$\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ 发散

3．设函数 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)dt=$（C）.

A．$f(x)$ B．$-f(x)$ C．$f(-x)$ D．$-f(-x)$

4．直线 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$ 与平面 $x+y-z=0$ 的夹角为（B）.

A．$\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B．$\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C．$-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D．$-\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5．微分方程 $y''+6y'+13y=0$ 的通解是（A）.

A．$e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ B．$e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

C．$e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$ D．$e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4 x dx=$ __ $\frac{3\pi}{2}$ ___.

2．曲线 $r=a\cos\theta(a>0)$ 的弧长 $s=$ __ πa ___.

3．$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=$ __ 1 ___.

4．已知向量 $\mathbf{a}=(-2,4,1),\mathbf{b}=(1,-2,2)$，则向量 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=$ __ 4 ___.

5．已知微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$，则该微分方程为__ $y''-6y'+9y=0$ ___.

三、（8 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}$ ……2 分

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}$$ ……6 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{-\cos^2 x}}=2e$$ ……8 分

四、(8 分) 求定积分 $\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}}dx$.

解：令 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$， $dx=tdt$

且 $x=0$ 时， $t=1$， $x=4$ 时， $t=3$ ……2 分

原式 $=\int_1^3 e^t tdt=\int_1^3 tde^t$

$=te^t|_1^3-\int_1^3 e^t dt$ ……6 分

$=2e^3$ ……8 分

五、(8 分) 求微分方程 $y''+(y')^2+1=0$ 的通解.

解：令 $y'=p(x)$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$ ……2 分

代入得 $\frac{dp}{dx}+p^2+1=0$

即 $\frac{dp}{p^2+1}=-dx$

积分得 $\arctan p=-x+C_1$ ……4 分

即 $p=\tan(-x+C_1)$

即 $\frac{dy}{dx}=-\tan(x-C_1)$ ……6 分

其通解为 $y=\ln|\cos(x-C_1)|+C_2$ ……8 分

六、(8 分) 求平面 $x+y+z-1=0$ 上一直线 L，使其与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ 垂直相交.

解：取所求直线得方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-2,3,-1)$ ……4 分

又 $\begin{cases}\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}=t\\ x+y+z-1=0\end{cases}$ ，得 $\begin{cases}t=0\\ x=1\\ y=1\\ z=-1\end{cases}$ ……6 分

故所求直线方程为 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{-1}$ ……8 分

七、(8 分) 设平面经过原点及点 $(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

解一：由题意，设所有平面为 $Ax+By+Cz=0$ ……2 分

又平面过点 $(6,-3,2)$，则 $6A-3B+2C=0$①

再由所求平面与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直

得 $4A-B+2C=0$②

联立①②得 $A=B=-\frac{2}{3}C$ ……4 分

故所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$ ……8 分

解二：设 $O(0,0,0),M(6,-3,2)$

则 $\boldsymbol{OM}=(6,-3,2)$ ……2 分

取所求平面法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2(2,2,3)$ … … 6 分

故所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$ ……8 分

八、（10 分） 求微分方程 $y''+y=x+4\sin x$ 的通解.

解：对应齐次方程为 $y''+y=0$

其特征方程为 $r^2+1=0$，其根为 $r_{1,2}=\pm i$ … … 2 分

则其对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$ ……4 分

易知方程 $y''+y=x$ 的一特解为 $y_1^*=x$ ……6 分

设方程 $y''+y=4\sin x$ 的特解为 $y_2^*=x(a\cos x+b\sin x)$ ……8 分

代入方程得 $(-2a+2bx)\sin x+2b\cos x=4\sin x$

比较系数得 $\begin{cases}a=-2\\ b=0\end{cases}$

则 $y_2^*=-2x\cos x$

故所求方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x-2x\cos x$ ……10 分

九、（共 12 分）应用题

求曲线 $y=e^x$，直线 $y=e^2$ 及 $x=0$ 所围成的平面图形的面积 A，及该平面绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V_x.

解：由 $\begin{cases}y=e^x\\ y=e^2\end{cases}$ 得 $(2,e^2)$ ……2 分

则 $A=\int_1^2(e^2-e^x)dx=e^2+1$ ……6 分

和 $V_x=\pi(e^2)^2 2-\int_0^2\pi e^{2x}dx$ 或 $2\pi\int_1^{e^2}y\ln ydy=\frac{3}{2}\pi e^4+\frac{\pi}{2}$ ……12 分

十、（8 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上可导，且存在正数 M，使得 $f'(x)\le M$，又 $f(0)=0$，证明：

（1）当时 $x\in[0,a]$，有 $f(x)\le aM$；

（2）$\int_0^a f(x)dx\le\frac{M}{2}a^2$.

解：（1）由题意知 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件

得 $f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x\le Ma,\xi\in(0,x)$ ……4 分

（2）$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a[f(x)-f(0)]dx$

$=\int_0^a f'(\xi)xdx$

$\le M\int_0^a xdx=\frac{M}{2}a^2,\xi\in(0,x)$ ……8 分