§5.3+§5.4 矩阵对角化

- 相似的性质
- 可对角化的判定
- 对称矩阵正交对角化

一、相关概念

设 A, B 为 n 阶方阵.

矩阵 A 与矩阵 B **相似** $\Longleftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

矩阵 A 与矩阵 B **正交相似** $\Longleftrightarrow$ 存在 n 阶正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

二、相似矩阵的性质

设 A，B 是同阶矩阵.

矩阵 A 与矩阵 B **相似**

$\Downarrow$

(1) $R(A) = R(B)$

(2) $|A - \lambda E| = |B - \lambda E|$

(3)相同的特征值; 特别地，当$B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$即是 A 的 n 个**特征值;**

(4) $|A| = |B|$

(5) $Tr(A) = Tr(B)$

(6) A^T与B^T相似

例1 设 n 阶方阵 A 与 B 相似，若 $A^2 = E$，

则 $A^2 + B^2 =$

例2 设 n 阶方阵 A 与 B 相似，

$$A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{则} a + b =$$

在矩阵的运算中，对角矩阵的运算很简便，如果一个矩阵能够相似于对角矩阵，则可能简化某些运算．例如，如果令

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ 9 & -8\end{pmatrix}.$$

不难验算，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记为}}\Lambda.$$

如果我们要计算 A^{10} 或 A^n，直接计算, 运算量很大也不易找出规律. 利用 A 相似于对角矩阵的性质,可得

$$A^n = (P\Lambda P^{-1})^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+(-2)^{n+1} & -2-(-2)^n \\ 3-3(-2)^n & -2+3(-2)^n \end{pmatrix}.$$

那么, 是否每个矩阵都能相似于对角矩阵? 如果能相似于对角矩阵, 怎样求出这个对角矩阵及相应的可逆矩阵 P? 下面我们就来讨论这个问题.

对于 n 阶方阵 A，若存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$（Λ 为对角矩阵），则称 A 能对角化. 对于能对角化的矩阵，我们称求对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 的过程为把矩阵 A 对角化.

三、矩阵可对角化条件

定理 4 n 阶方阵 A 相似于对角矩阵 Λ 的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明

推论 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 必能相似于对角矩阵.

四、矩阵对角化的步骤

设 n 阶方阵 A 可对角化，则把 A 对角化的步骤如下：

步骤 1：求出矩阵 A 的所有特征值，设 A 有 s 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$，有

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n.$$

步骤 2：对 A 的每个特征值 λ_i，求 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系，设为 $p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{in_i}$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 以这些向量为列构造矩阵

$$P=(p_{11},p_{12},\cdots,p_{1n_1},p_{21},p_{22},\cdots,p_{2n_2},\cdots,p_{s1},p_{s2},\cdots,p_{sn_s}),$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{n_1},\underbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{n_2},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{n_s}),$$

则 $P^{-1}AP=\Lambda$.

注意矩阵 P 的列向量与对角矩阵 Λ 主对角线上的元素（A 的特征值）之间的对应关系.

例3　设 $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$，（1）求 A 的特征值和特征向量；（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解：（1）由 $\begin{vmatrix}4-\lambda&2&2\\2&4-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(8-\lambda)$ 得 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=2\text{（二重特征值）},\quad \lambda_3=8.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，由 $(A-2E)x=O$，即：

$$\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得基础解系为 $p_1=[-1,\ \ 1,\ \ 0]^T$ 及 $p_2=[-1,\ \ 0,\ \ 1]^T$，从而 A 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为 $k_1p_1+k_2p_2$（k_1,k_2 为任意不全为零的常数）.

当 $\lambda_3=8$ 时，由 $(A-8E)x=O$，即：

$$\begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

得基础解系为 $p_3=[1,\ \ 1,\ \ 1]^T$，从而 A 的属于特征值 $\lambda_3=8$ 的特征向量为 k_3p_3（k_3为任意非零常数）.

(2) 令 $P=[p_1, \ p_2, \ p_3]=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆

且

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

注：相似对角化应用

习作1（3）

回顾

例 6 求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

所以A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

当$\lambda_1=2$时,解方程$(A-2E)x=0.$由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$

所以 $k\,p_1(k\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征值.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(A-E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$

所以$k\, p_2 (k \neq 0)$是对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$的全部特征值.

例 7 设$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$,求A的特征值与特征向量.

解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

令 $-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$

得A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

当$\lambda_1 = -1$时，解方程$(A+E)x = 0$.由

$$A+E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$

故对应于 $\lambda_1 = -1$的全体特征向量为

$$k\,p_1 \qquad (k \neq 0).$$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时,解方程$(A-2E)x=0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为：

$$p_2=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix},\qquad p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},$$

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为：

$$k_2p_2+k_3p_3\quad(k_2,k_3\text{不同时为 }0).$$

由前面的讨论可知，当 A 的特征方程没有重根时，A 一定能对角化；当 A 的特征方程有重根时,这时 A 不一定有 n 个线性无关的特征向量，所以 A 不一定能对角化.

矩阵（特征值有重根）可对角化的判定方法：

A 可对角化

$\Updownarrow$

A 有 n 个线性无关的特征向量

$\Updownarrow$

A 的 n_i 重特征值有 n_i 个线性无关的特征向量

$\Updownarrow$

方程 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系由 n_i 个向量构成

$\Updownarrow$

$R(A-\lambda_i E)=n-n_i$

例 4 设

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & x\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

问 x 为何值时，矩阵 A 能对角化？

解

五、对称矩阵可对角化

定理 7　设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

即：实对称矩阵一定可以正交对角化.

六、对称矩阵对角化的步骤

步骤 1：求出矩阵 A 的所有特征值，设 A 有 s 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$，$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$.

步骤 2：对 A 的每个特征值 λ_i，求 $(A-\lambda_i E)x = 0$ 的基础解系进行**正交化(同一个特征值下)、单位化**，设为 p_{i1}，p_{i2}，$\cdots$，p_{in_i} $(i = 1, 2, \cdots, s)$.

以这些向量为列构造矩阵

$$P=(p_{11},p_{12},\cdots,p_{1n_1},p_{21},p_{22},\cdots,p_{2n_2},\cdots,p_{s1},p_{s2},\cdots,p_{sn_s}),$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{n_1},\underbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{n_2},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{n_s}),$$

则P正交且满足 $P^{-1}AP=\Lambda$.

注意矩阵 P 的列向量与对角矩阵 Λ 主对角线上的元素(A 的特征值)之间的对应关系.

例3 设 $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$，求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

解：由前面的计算得特征值为2,2,8

2对应的线性无关的特征向量为$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

8对应的特征向量为$p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

对p_1, p_2进行施密特正交化：令$q_1 = p_1 = (-1,1,0)^T$

$$q_2 = p_2 - \frac{[p_2, q_1]}{[q_1, q_1]} q_1 = (-1,0,1)^T - \frac{1}{2}(-1,1,0)^T$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$$ 得正交向量组q_1，q_2，p_3

对向量组q_1，q_2，p_3进行单位化：

$$t_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, t_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T,$$

$$t_3 = \frac{p_3}{\|p_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

令$T = (t_1, t_2, t_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$正交，满足$T^{-1}AT = \Lambda = diag(2,2,8)$.

矩阵可对角化的判定方法：

A 有 n 个线性无关的特征向量

A 可对角化

对称矩阵
$A=A^{\mathrm{T}}$

A 有 n 个两两不等的特征值

$R(A-\lambda_i E)=n-n_i$

(λ_i 为A 的 n_i 重特征值)

六、小结

（1）理解并熟悉应用矩阵相似的性质.

（2） 熟悉掌握方阵可对角化的判定条件.

（3） 熟悉掌握对称矩阵对角化的解题.

七、作业

书 习题五 P140

19(2), 21