§3.1 二维随机变量

一、随机向量及联合分布函数

定义 设X，Y是两个随机变量，则称向量(X，Y)为一个二维随机向量。称二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

为随机向量(X，Y)的联合分布函数，或X与Y的联合分布函数。简称分布函数。

相应地，X和Y的分布、分布函数称为边缘（边际）分布、边缘（边际）分布函数。

事件$\{X \le x, Y \le y\}$对应的区域：

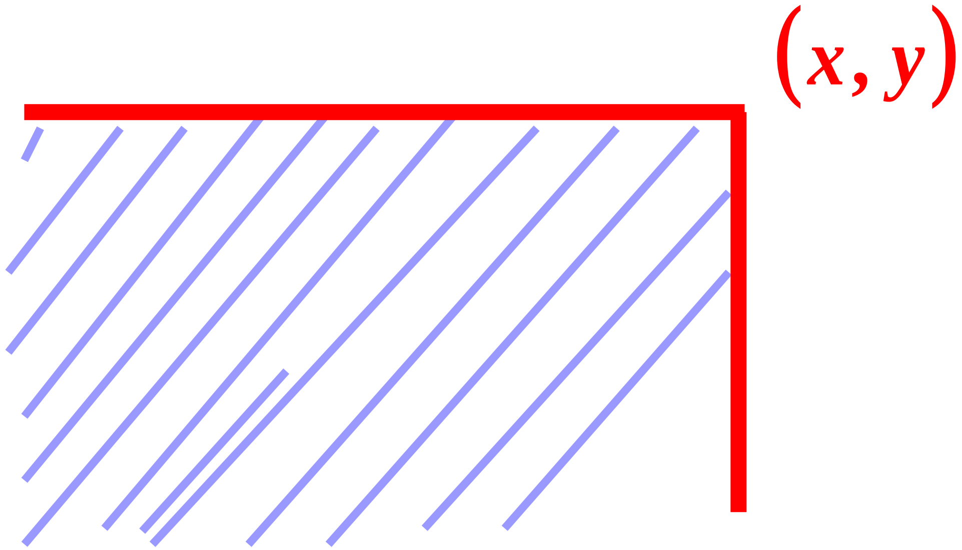
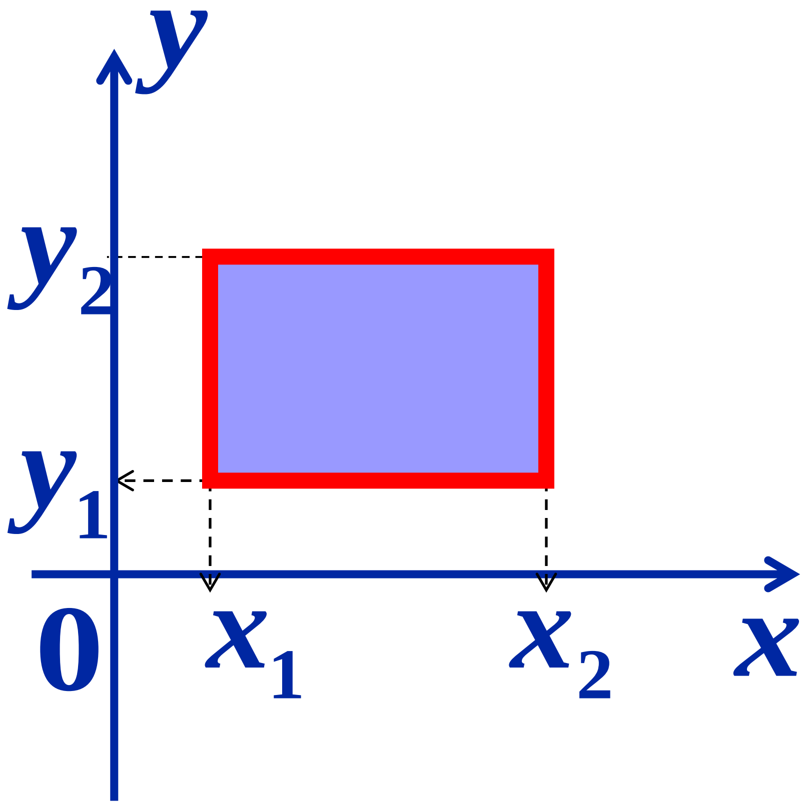


图3-2

考虑(X,Y)落在矩形

$$\{(x,y) \mid x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2\}$$

内的概率



就是求$P\left(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\right)$

当$A \supset B$时，$P\left((A-B)C\right)=P\left(AC\right)-P\left(BC\right)$。

取A=$\{X \le x_2\}$, B=$\{X \le x_1\}$, $C=\{y_1<Y \le y_2\}$，则

原式 $=P\left(X \le x_2, y_1<Y \le y_2\right)-P\left(X \le x_1, y_1<Y \le y_2\right)$

$$=P\left(X \le x_2, Y \le y_2\right)-P\left(X \le x_2, Y \le y_1\right)$$
$$-[P\left(X \le x_1, Y \le y_2\right)-P\left(X \le x_1, Y \le y_1\right)]$$

所以 $P\{x_1<X \le x_2, y_1<Y \le y_2\}$

$$=F(x_2, y_2)-F(x_2, y_1)-F(x_1, y_2)+F(x_1, y_1)$$

联合分布函数的性质

1^0 $F(x,y)$分别是x和y的单调不减函数

2^0 $F\left(-\infty,y\right)=0,\ \ F(x,-\infty)=0,$

$F(-\infty,-\infty)=0,\quad F(\infty,\infty)=1$

3^0 $F\left(x,y\right)$分别关于x，y都是右连续的。

4^0 当$x_1<x_2,y_1<y_2$,时

$$F\left(x_2,y_2\right)-F\left(x_2,y_1\right)+F\left(x_1,y_1\right)-F\left(x_1,y_2\right)\geq 0$$

类似地，n个随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$构成的向量（$X_1, X_2, \ldots, X_n$）称为n维随机向量。

对于任意 n 个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$；n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{(X_1 \le x_1) \cap (X_2 \le x_2) \cap \cdots \cap (X_n \le x_n)\}$$
$$= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为n维随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布函数.

相应地，分量的分布称为边缘分布或者边际分布。分量的分布函数称为边缘分布函数或者边际分布函数。

二、离散型随机向量

若X，Y是两个离散型随机变量，则称向量(X，Y)为一个二维离散型随机向量。也称二维离散型随机变量。

设X，Y的可能值分别为 x_i，y_j **。则向量(X，Y)的可能值为** $(x_i,\ y_j)$**。称**

$$P\{X=x_i,\ Y=y_j\}=p_{ij},\ \ i,j=1,2,\ldots$$

为(X, Y)的联合概率分布或联合分布律。

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

也称联合概率分布表。

性质　　1) $p_{ij} \geq 0,$　　2) $\sum_{i}\sum_{j} p_{ij} = 1$

反之，只要上述两条满足，则上述的表一定是某个随机向量的联合概率分布 (表、律)。同一维情形一样，也可以用于求待定常数。

例1　设随机变量X表示在1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取一个的值。另一个随机变量Y 表示在$1,\cdots,X$中等可能地取一个的值. 试求(X,Y) 的分布律.

解：当 $j>i$ 时 $P\{X=i,Y=j\}=0$

当 $0<j\le i\le 4$ 时

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\,|\,X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{4i}$$

$$\therefore\ P\{X=i,Y=j\}=\begin{cases}\dfrac{1}{4i} & 1\le j\le i\le 4\\ 0 & 4\ge j>i\ge 1\end{cases}$$

例1* 设随机变量X表示在N个整数$1, 2, \cdots, N$ 中等可能地取一个的值。另一个随机变量Y 表示在$1, \cdots, X$ 中等可能地取一个的值. 试求(X, Y) 的分布律.

解：当 $j > i$ 时 $P\{X = i, Y = j\} = 0$

当 $0 < j \le i \le N$时

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j \mid X = i\} P\{X = i\} = \frac{1}{Ni}$$

$$\therefore \quad P\{X = i, Y = j\} = \begin{cases} \dfrac{1}{Ni} & 1 \le j \le i \le N \\ 0 & N \ge j > i \ge 1 \end{cases}$$

三、连续型随机向量

定义. 设(X,Y)是二维随机变量 $F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$ 是(X,Y)的联合分布函数。若存在非负的函数$f(x,y)$ 使对任意的x,y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

则称(X,Y)是连续型的二维随机变量, 函数$f(x,y)$ 称为二维随机变量(X,Y)的联合概率密度,或称为随机变量X和Y的联合概率密度.

联合密度 $f(x,y)$ 的性质：

$1^0 \ f(x,y) \geq 0,$

$$2^0 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

反之，只要上述两条成立，这个函数就是某个二维随机变量的联合密度。以下是公式

$$3^0 \quad P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy$$

4° 由分布函数求密度：若已知密度存在则可取

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}, & \text{混合偏导数存在}\\ 0, & \text{混合偏导数不存在}\end{cases}$$

例2.设二维随机变量(X,Y)具有概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）分布函数$F(x,y)$； (2)$P\{Y\le X\}$

解$:(1)F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$

$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x f(u,v)dudv, x>0, y>0\\ 0, \qquad \text{其它}\end{cases}$$

即有

$$F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-2u-v}dvdu, x>0, y>0\\ 0, \qquad \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), x>0, y>0\\ 0, \qquad \text{其它}\end{cases}$$

(2)将(X,Y)看作是平面上随机点的坐标,

即有 $$\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\}$$

其中G为xOy平面上直线$y = x$及其下方的部分

$$\therefore P\{Y \le X\}$$
$$= P\{(X,Y) \in G\}$$
$$= \iint_G f(x,y)dxdy$$
$$= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dxdy = \frac{1}{3}$$

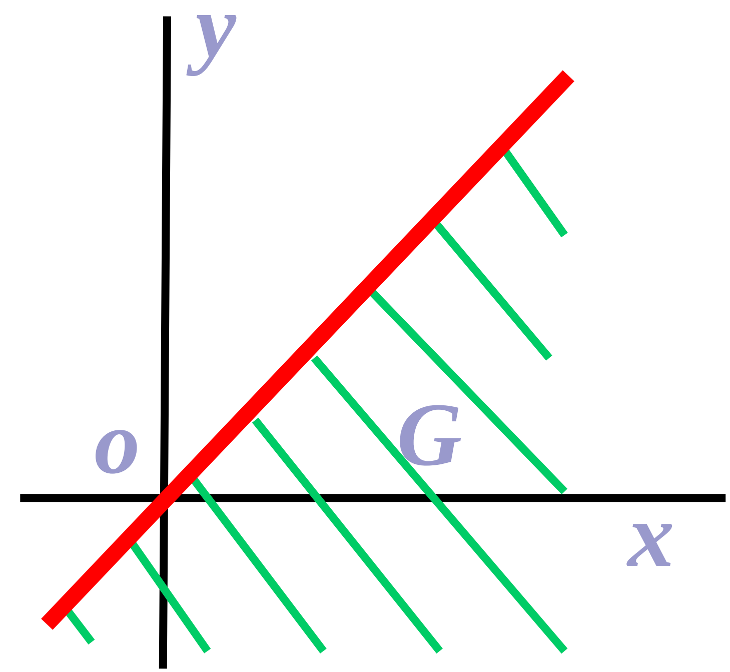


图3-4

10月10日

利用联合密度求概率的方法：

1、确定事件对应于随机向量的取值范围。

2、确定这个范围与密度大于零的范围的交。

3、把要计算的重积分写成累次积分。

作业：1、2、3