习题 9.1

1. 判断题

(1) 二元函数 f(x, y) 满足 $\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = \lim_{y \to y_0} f(x_0, y) = A$,则 f(x, y) 在点 (x_0, y_0) 处极限存在.

(2) 对于二元函数
$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$
,由于对任意的 $k \in \mathbb{R}$,有 $\lim_{\substack{y=kx \ x \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y=kx \ x \to 0}} x \frac{k}{1+k} = 0$,

故 f(x,y) 在点 (0,0) 处极限存在.

学号

(3) 对于二元函数
$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x+y}$$
,令
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$
,由 $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{r \to 0} \frac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r(\sin\theta + \cos\theta)}$

$$=\lim_{r\to 0}r^3\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)}=0, 可知 f(x,y) 在点(0,0) 处极限为 0.$$

(4) 设
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
, 则 $f(x,y)$ 在 原 点 处 连 续 .

()

2. 选择题

- (1) 设 $P \in \mathbb{R}^2$ 是平面上一点, $E \subset \mathbb{R}^2$,那么下列叙述错误的个数是
 - ① 若 $P \in E$ 的内点,必有 $P \in E$
 - ② 若 $P \in E$ 的聚点,必有 $P \in E$
 - ③ 若 $P \in E$ 的边界点,必有 $P \in E$
 - ④ 若 $P \in E$ 的聚点,必有 $U(P) \cap E \neq \emptyset$
 - ⑤ 若 $P \in E$ 的边界点,必有 $U(P) \cap E \neq \emptyset$
 - ⑥ 若P是E的内点,则P也是E的聚点
 - ⑦ 若 $P \in E$ 的边界点,必不可能是E 的聚点

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

(2)
$$\[\mathcal{G}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}, g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}, \text{则下列说法正}$$

确是 ()

A. f(x, y) 和 g(x, y) 在点(0,0)处均连续

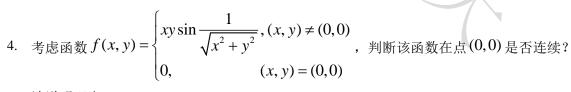
- B. f(x, y) 在点(0,0)处连续,g(x, y) 在点(0,0)处极限存在
- C. f(x, y) 在点(0,0)处连续,g(x, y) 在点(0,0)处极限不存在
- D. f(x, y) 和 g(x, y) 点(0,0)处极限均不存在
- 3. 求下列二元函数极限.

$$(1) \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\arctan(x+y)}{x^2+y^2}$$

(2)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{\tan xy}$$

(3)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

(4)
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(1+xe^y)}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$$



请说明理由.