县(市)＿＿＿＿ 学校＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 座号＿＿＿＿

密 封 装 订 线

2024届宁德市普通高中毕业班五月份质量检测

数学试题

注意事项：

1. 答题前，学生务必在练习卷、答题卡规定的地方填写自己的学校、准考证号、姓名。学生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与学生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本练习卷上无效。
3. 答题结束后，学生必须将练习卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．样本数据 2，2，3，3，3，4，4，5，5，6 的中位数和众数分别为

A．3 和 3　　B．3.5 和 3　　C．4 和 3　　D．3.5 和 2，3，4，5

2．已知集合 $A=\{-2,0,2,4\},B=\{x||x-3|\le m\}$．若 $A\cap B=A$，则 m 的取值范围是

A．$(1,+\infty)$　　B．$[1,+\infty)$　　C．$(5,+\infty)$　　D．$[5,+\infty)$

3．设 m，n 表示两条不同的直线，α 表示平面，则以下结论正确的是

A．若 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$　　B．若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n\parallel\alpha$

C．若 $m\parallel\alpha$，$m\perp n$，则 $n\perp\alpha$　　D．若 $m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\perp n$

4．记 T_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积．设命题 p：$T_{12}>1$；命题 q：$a_6\cdot a_7>1$，则 p 是 q 的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．2024 海峡两岸各民族欢度“三月三”暨福籽同心爱中华·福建省第十一届“三月三”畲族文化节活动在宁德隆重开幕．海峡两岸各民族同胞齐聚于此，与当地群众共同欢庆“三月三”，畅叙两岸情．在活动现场，为了解不同时段的入口游客人流量，从上午 10 点开始第一次向指挥中心反馈入口人流量，以后每过一个小时反馈一次．指挥中心统计了前 5 次的数据 (i,y_i)，其中 $i=1,2,3,4,5$，y_i 为第 i 次入口人流量数据（单位：百人），由此得到 y 关于 i 的回归方程 $\hat{y}=\hat{b}\log_2(i+1)+5$．已知 $\overline{y}=9$，根据回归方程（参考数据：$\log_2 3\approx1.6$，$\log_2 5\approx2.3$），可预测下午 4 点时入口游客的人流量为

A．9.6　　B．11.0　　C．11.4　　D．12.0

6. 已知圆台 O_1O_2 的上底半径为3，下底半径为6，母线长为6，则以下结论错误的是

A．圆台侧面积为 54π　　B．圆台外接球的半径为 6

C．圆台的体积为 126π　　D．圆台侧面上的点到下底圆心 O_2 的最短距离为 $3\sqrt{3}$

7. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是抛物线上的两个动点．若 $|AB|=\frac{\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2+2)$，则 $\angle AFB$ 的最大值为

A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

8. 函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$，若关于 x 的不等式 $[f(x)]^2-af(x)\le 0(a\in\mathbf{R})$ 有且仅有三个整数解，则 a 的取值范围是

A．$\left[\frac{2}{\ln 2},\frac{5}{\ln 5}\right)$　　B．$\left(\frac{2}{\ln 2},\frac{5}{\ln 5}\right]$　　C．$\left[\frac{3}{\ln 3},\frac{5}{\ln 5}\right)$　　D．$\left(e,\frac{5}{\ln 5}\right]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知 z_1,z_2 是两个复数，下列结论中正确的是

A．若 $z_1=\overline{z_2}$，则 $z_1z_2\in\mathbf{R}$　　B．若 z_1+z_2 为实数，则 $z_1=\overline{z_2}$

C．若 z_1,z_2 均为纯虚数，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 为实数　　D．若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为实数，则 z_1,z_2 均为纯虚数

10. 函数 $f(x)=(x-2)^3\cos\omega x$．若存在 $a\in\mathbf{R}$，使得 $f(x+a)$ 为奇函数，则实数 ω 的值可以是

A．$-\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．π

11. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)f(y)+f(x)+f(y)$，且值域为 $[-1,+\infty)$，则以下结论正确的是

A．$f(0)=-1$　　B．$f(-1)=0$

C．$f(x)$ 为偶函数　　D．$f(x)$ 的图象关于 $(1,0)$ 中心对称

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知 e_1, e_2 是两个单位向量，若 e_1 在 e_2 上的投影向量为 $\frac{1}{2}e_2$，则 e_1 与 $e_1 - e_2$ 的夹角为____________.

13. 中国古代历法是中国劳动人民智慧的结晶，《尚书·尧典》记载"期三百有六旬有六日，以闰月定四时成岁"，指出闰年有 366 天．元代郭守敬创造了中国古代最精密的历法——《授时历》，规定一年为365.2425天，和现行公历格里高利历是一样的，但比它早了 300 多年．现行公历闰年是如下确定的：①能被 4 整除，但不能被 100 整除；②能被 400 整除，满足以上两个条件之一的年份均为闰年，则公元11^{10}年，距上一个闰年的年数为____________.

14. 已知曲线 $y = e^{x+a}$ 和圆 $x^2 + y^2 = 2$ 有 2 个交点，则实数 a 的取值范围是____________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．已知 $a^2 + c^2 = 9 + 2ac\cos B$，且 $\sin B = \sqrt{3}\sin A \sin C$.

（1）若 $BD \perp AC$，垂足为 D，求 BD 的长;

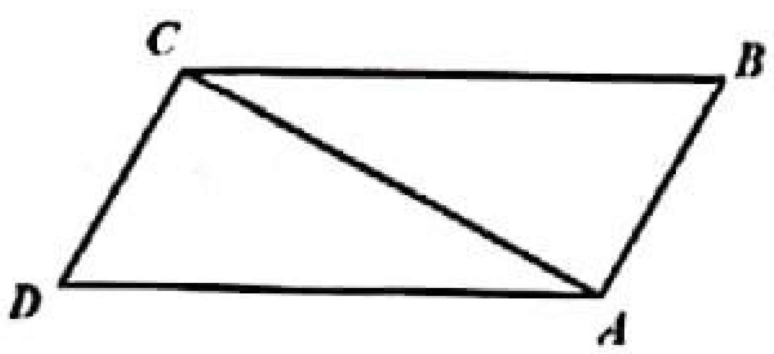
（2）若 $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 3$，求 $a + c$ 的长.

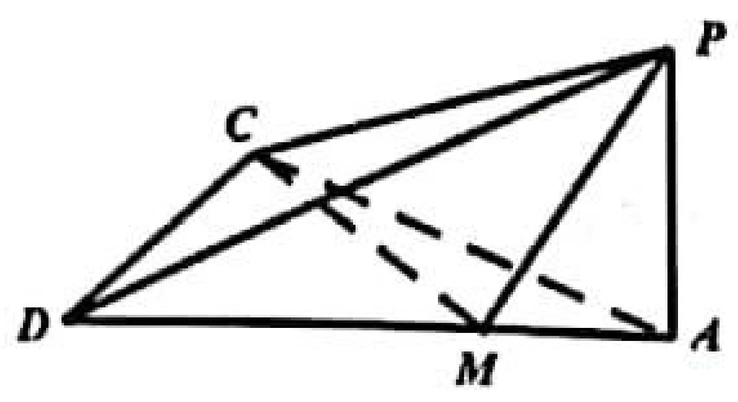
16.（15分）

在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle D = 60°$，$CD = 1$，$AC = \sqrt{3}$．将△ABC 沿 AC 翻折到△APC 的位置，使得 $PD = \sqrt{5}$.

（1）证明：$CD \perp$ 平面 APC；

（2）在线段 AD 上是否存在点 M，使得二面角 $M - PC - A$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{39}}{13}$？若存在，求出 $\frac{|AM|}{|MD|}$ 的值；若不存在，请说明理由.





17.（15分）

已知函数 $f(x)=a\cos x-e^{x+1}$（$a\in\mathbf{R}$）的图象在 $x=0$ 处的切线过点 $(-1,2)$．

（1）求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值；

（2）判断 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{2\pi}{3},0\right)$ 内零点的个数，并说明理由．

18.（17分）

桌上有除颜色外其他没有任何区别的 7 个黑球和 7 个白球，现将 3 个黑球和 4 个白球装入不透明的袋中．第一次从袋中任取一个球，若取出的是黑球则放入一个白球，若取出的是白球则放入一个黑球，本次操作完成．第二次起每次取球、放球的规则和第一次相同．

（1）求第 2 次取出黑球的概率；

（2）记操作完成 n 次后袋中黑球的个数为变量 X_n．

（i）求 X_2 的概率分布列及数学期望 $E(X_2)$；

（ii）求 X_n 的数学期望 $E(X_n)$．

19.（17分）

坐标平面 xOy 上的点 $P(x,y)$ 也可表示为 $P(r\cos\theta,r\sin\theta)$，其中 $r=|OP|$，θ 为 x 轴非负半轴绕原点 O 逆时针旋转到与 OP 重合的旋转角．将点 P 绕原点 O 逆时针旋转 α 后得到点 $P'(x',y')$，这个过程称之为旋转变换．

（1）证明旋转变换公式：$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha,\end{cases}$ 并利用该公式，求点 $P(\sqrt{3},0)$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{4}$ 后的点 P' 的坐标；

（2）旋转变换建立了平面上的每个点 P 到 P' 的对应关系．利用旋转变换，可将曲线通过旋转转化为我们熟悉的曲线进行研究．

（i）求将曲线 $C:y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$ 绕原点 O 顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{6}$ 后得到的曲线方程，并求该曲线的离心率；

（ii）已知曲线 $\Gamma:5x^2+5y^2-6xy=8$，点 $F\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，直线 AB 交曲线 Γ 于 A，B 两点，作 $\angle AFB$ 的外角平分线交直线 AB 于点 M，求 $|FM|$ 的最小值．

密 封 装 订 线