绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

名校联盟全国优质校2023届高三大联考

数学试题参考答案与评分参考

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	C	B	B	D	A

二、多项选择题：

题号	9	10	11	12
答案	BD	BC	AC	ABD

12. 若一条直线与两条或两条以上的曲线均相切，则称该直线为这些曲线的公切线．已知直线 $l: y=kx+b$ 为曲线 $C_1: y=\mathrm{e}^{ax}$ 和 $C_2: y=\dfrac{\ln x}{a}$ $(a>0)$ 的公切线，则下列结论正确的为

A．C_1 和 C_2 关于直线 $y=x$ 对称

B．当 $a=1$ 时，$k\mathrm{e}^{b+1}=1$

C．若 $b=0$，则 $a=\dfrac{1}{2}$

D．当 $a=1$ 时，C_1 和 C_2 必存在斜率为 $\dfrac{1}{k}$ 的公切线

解析：不妨设 l 与 $C_1: y=\mathrm{e}^{ax}$ 和 $C_2: y=\dfrac{\ln x}{a}$ 依次相切于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

（1）考查选项A：已知函数 $y=(\mathrm{e}^a)^x$ 和 $y=\log_{\mathrm{e}^a} x$ 互为反函数，则 C_1 和 C_2 关于直线 $y=x$ 对称，故选项A正确；

（2）考查选项B：当 $a=1$ 时，由 l 与 C_2 相切可知 $\begin{cases}\ln x_2=kx_2+b,\\ \dfrac{1}{x_2}=k,\end{cases}$ $\therefore b=-1-\ln k$，

$\therefore k\mathrm{e}^{b+1}=k\mathrm{e}^{-\ln k}=k\cdot\dfrac{1}{k}=1$，故选项B正确；

（3）考查选项C：若 $b=0$，则 $l: y=kx$，不难知道，有 $\begin{cases}\mathrm{e}^{ax_1}=kx_1,\\ a\mathrm{e}^{ax_1}=k,\end{cases}$ ①，且 $\begin{cases}\dfrac{\ln x_2}{a}=kx_2,\\ \dfrac{1}{ax_2}=k,\end{cases}$ ②，

由②可得 $\dfrac{\ln x_2}{a}=kx_2=\dfrac{1}{a}$，又 $a>0$，$\therefore \ln x_2=1$，即 $x_2=\mathrm{e}$，$\therefore k=\dfrac{1}{a\mathrm{e}}$，

由①可得 $akx_1=k$，显然 $k\neq 0$，$\therefore ax_1=1$，$\therefore a\mathrm{e}=k$，

$\therefore a\mathrm{e}=\dfrac{1}{a\mathrm{e}}$，即 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故选项 C 错误；

（4）考查选项 D：由 l 与 C_1 相切可知 $\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1}=kx_1+b,\\ \mathrm{e}^{x_1}=k,\end{cases}$ $\therefore x_1=\ln k$，$b=k-k\ln k$，

由（2）可知 $b=-1-\ln k=k-k\ln k$，$\therefore k+1+(1-k)\ln k=0$，

设函数 $g(x)=x+1+(1-x)\ln x$，依题可得 $g(k)=0$，

又 $g(\dfrac{1}{k})=\dfrac{1}{k}+1+(1-\dfrac{1}{k})\ln\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k}+1-\ln k+\dfrac{\ln k}{k}=\dfrac{k+1+(1-k)\ln k}{k}=0$，

$\therefore C_1$ 和 C_2 亦存在斜率为 $\dfrac{1}{k}$ 的公切线，故选项 D 正确；

综上所述，应选 ABD.

三、填空题：

13. 2；　　14. -10；　　15. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　　16. $(\sqrt{2},+\infty)$.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，记 F_1 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点，以 OF_1 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 O，A 两点，且线段 AF_1 与 C 交于点 B，若 $\overrightarrow{F_1B}=\lambda\overrightarrow{F_1A}$ $(\lambda>\dfrac{1}{2})$，则 C 的离心率的取值范围为__________.

解析：易知 $|\overrightarrow{F_1A}|=b$，$\because \overrightarrow{F_1B}=\lambda\overrightarrow{F_1A}$，$\therefore |F_1B|=\lambda b$，

记 C 的右焦点为 F_2，连接 BF_2，　$\therefore |F_2B|=2a+\lambda b$，

在△F_1BF_2 中，$\cos\angle F_2F_1B=\dfrac{\lambda^2b^2+4c^2-(2a+\lambda b)^2}{4\lambda bc}=\dfrac{b-\lambda a}{\lambda c}$，

$\because$△OF_1A 为直角三角形，$\therefore \cos\angle F_2F_1B=\cos\angle OF_1A=\dfrac{b}{c}$，$\therefore \dfrac{b-\lambda a}{\lambda c}=\dfrac{b}{c}$，化简得 $\lambda=\dfrac{b}{a+b}$，

$\because$线段 AF_1 与 C 交于点 B，且 $\lambda>\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{1}{2}<\dfrac{b}{a+b}$，即 $a<b$，$\therefore a^2<b^2=c^2-a^2$，即 $2a^2<c^2$，

$\therefore e^2>2$，$\therefore e\in(\sqrt{2},+\infty)$，故应填 $(\sqrt{2},+\infty)$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17. （10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n = na_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解：（1）$\because a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-1$.

$\therefore S_1=a_2-1$，解得 $a_2=2$. ……………………………………………………………1 分

当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=a_n-1$，

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=a_{n+1}-a_n$，……………………………………………………………2 分

$\therefore 2a_n=a_{n+1}$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$. ………………………………………………………………3 分

$\because \dfrac{a_2}{a_1}=2$ 也满足上式，……………………………………………………………………4 分

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，

$\therefore a_n=2^{n-1}$. ……………………………………………………………………………………5 分

（2）由（1）知 $a_{n+1}=2^n$，$\therefore b_n=n\cdot 2^n$，

$\therefore T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$ ①，

则 $2T_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$ ②，……………………………6 分

①－②得，

$-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}$ ……………………………………………………7 分

$=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}$ ………………………………………………………………8 分

$=(1-n)\times2^{n+1}-2$ ，…………………………………………………………………………9 分

$\therefore T_n=2+(n-1)\times2^{n+1}$. ……………………………………………………………………10 分

18．（12 分）

设△ ABC 的三个角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\dfrac{a-c}{a+b}$.

（1）求 B；

（2）已知 $b=3$，且 AC 边上存在点 D，使得 BD 平分 $\angle ABC$. 当 $BD=2$ 时，求△ ABC 的面积.

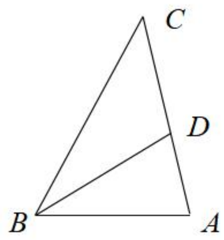
解：（1）$\because \dfrac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\dfrac{a-c}{a+b}$，由正弦定理得 $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{a-c}{a+b}$，………………………1 分

化简得 $b^2=a^2+c^2-ac$，………………………………………………………………………2 分

∴由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$， ……………………………………………………3 分

又∵ $B\in(0,\pi)$，∴ $B=\dfrac{\pi}{3}$． ……………………………………………………………………4 分

（2）如图所示



（第 18 题图）

∵ $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta CBD}$， ……………………………………………………………………5 分

即 $\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}BA\cdot BD\cdot\sin\angle ABD+\dfrac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin\angle CBD$ ，……………………7 分

由 BD 平分 $\angle ABC$，可化简得 $BA+BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BA\cdot BC$ ①， ……………………………………8 分

又由余弦定理得 $AC^2=BA^2+BC^2-2BA\times BC\times\cos B$ ②，……………………………………10 分

联立①，②，解得 $BA\cdot BC=6$， ………………………………………………………………11 分

∴ $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$． ……………………………………………………12 分

19．（12 分）

某校筹办运动会，设计了方案一、方案二两种方案．为了解对这两种方案的支持情况，在校内随机抽取100名同学，得到数据如下：

	男		女	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	20 人	40 人	30 人	10 人
方案二	35 人	25 人	25 人	15 人

假设校内所有同学支持何种方案互不影响．

(1)依据所给数据及小概率值 α=0.001 的独立性检验，能否认为支持方案一与性别有关？

(2)以抽取的100名同学的支持率高低为决策依据，应选择哪种方案？

(3)用频率估计概率，从全校支持方案一的学生中随机抽取 3 人，其中男生的人数记为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

解：(1)易得如下列联表：

性别	方案一		合计
	支持	不支持	
男	20	40	60
女	30	10	40
合计	50	50	100

……………………………………………1 分

零假设为 H_0：支持方案一与运动员的性别无关.

根据列联表中的数据，经计算得到

$\chi^2=\dfrac{100\times(20\times10-30\times40)^2}{50\times50\times40\times60}=\dfrac{50}{3}\approx16.667>10.828=x_{0.001}$，…………………………3 分

依据小概率值 α=0.001 的独立性检验，可以推断 H_0 不成立，即认为支持方案一与运动员的性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.001 . ………………………………………4 分

(2)由题设表格中的数据可知，

支持方案一的频率为 $\dfrac{20+30}{20+40+30+10}=\dfrac{1}{2}$，

支持方案二的频率为 $\dfrac{35+25}{35+25+25+15}=\dfrac{3}{5}$，

$\because \dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{5}$，$\therefore$本次运动会应选择方案二. …………………………………………………………6 分

(3)男生支持方案一的概率为 $\dfrac{20}{20+30}=\dfrac{2}{5}$，女生支持方案一的概率为 $\dfrac{30}{20+30}=\dfrac{3}{5}$，

则 $X\sim B(3,\dfrac{2}{5})$，X 的可能取值为 0，1，2，3，……………………………………………8 分

$P(X=0)=C_3^0(\dfrac{3}{5})^3=\dfrac{27}{125}$，$P(X=1)=C_3^1\times\dfrac{2}{5}\times(\dfrac{3}{5})^2=\dfrac{54}{125}$，$P(X=2)=C_3^2\times(\dfrac{2}{5})^2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{125}$，

$P(X=3)=C_3^3(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$， ……………………………………………………………10 分

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

……………………………………………11 分

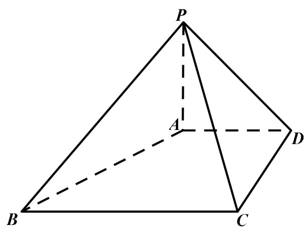
$\therefore E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. ……………………………………………………………12 分

20．（12 分）

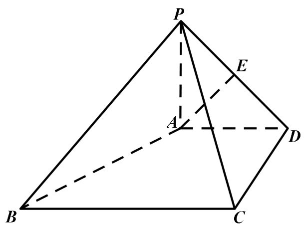
在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\perp$ 平面 PCD.

(1) 证明：$AD\perp CD$；

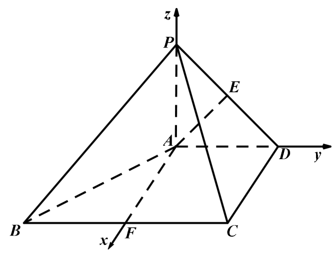
(2) 若 $AD/\!/BC$，且 $BC=2AP=2AD=2$，记平面 BPC 与平面 PCD 的夹角为 θ，当 $\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 时，求 CD 的长度.



(第 20 题图)



(图 1)



(图 2)

解：(1)证明：如图 1，过 A 作 $AE\perp PD$，且垂足为 E，

$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 PCD，平面 $PAD\cap$ 平面 $PCD=PD$，

$\therefore AE\perp$ 平面 PCD， ……………………………………………………………1 分

又 $CD\subset$ 平面 PCD，$\therefore AE\perp CD$，……………………………………………………2 分

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp CD$，…………………………………………………………………………3 分

又 $PA\cap AE=A$，$PA,AE\subset$ 平面 PAD，

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD， ……………………………………………………………4 分

又 $AD\subset$ 平面 PAD，$\therefore AD\perp CD$. ……………………………………………………5 分

(2)设 BC 的中点为 F，连接 AF，

$\because AD/\!/BC$，$AD=\frac{1}{2}BC=FC$，$AD\perp CD$，

$\therefore$四边形 $AFCD$ 为平行四边形，

又$\because AD\perp CD$，$\therefore AD\perp AF$， ……………………………………………………6 分

设$CD=t(t>0)$，以A为原点，AF，AD，AP所在的直线分别为x，y，z轴，建立如图2所示的空间直角坐标系，则$P(0,0,1)$，$D(0,1,0)$，$C(t,1,0)$，$B(t,-1,0)$，$E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

$\overrightarrow{PC}=(t,1,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，…………………………………………7分

由(1)知$AE\perp$平面PCD，$\therefore$平面PCD的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,1)$，………………………8分

设$\vec{m}=(x,y,z)$为平面PBC的一个法向量，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}tx+y-z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$即$\begin{cases}z=tx,\\ y=0,\end{cases}$，令$x=1$，得$\vec{m}=(1,0,t)$，…………………9分

$\therefore\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{t}{\sqrt{2}\times\sqrt{t^2+1}}$，……………………………………………………………10分

$\because$平面BPC与平面PCD夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$，$\therefore|\frac{t}{\sqrt{2}\times\sqrt{t^2+1}}|=\frac{\sqrt{10}}{5}$，解得$t=2$，

$\therefore CD=2$．……………………………………………………………………………………12分

21．（12分）全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

在平面直角坐标系xOy中，O是坐标原点，点A，B分别为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的上、下顶点，直线$l:x=2$与$C$有且仅有一个公共点，设点$D$在$C$上运动，且$D$不在坐标轴上，当直线$BD$的斜率为$\sqrt{3}$时，$C$的右焦点恰在直线$BD$上．

(1) 求C的方程；

(2) 设直线BD交x轴于点P，直线AD交l于点Q，直线PQ交C于M，N两点．

(i) 证明：直线PQ的斜率为定值；

(ii) 求△OMN面积的取值范围．

解：(1) $\because l$与C有且只有1个公共点，$\therefore a=2$，…………………………………………1分

记C的右焦点为$F(c,0)$，由题可知当直线BD的斜率为$\sqrt{3}$时，F恰在直线BD上，

$\therefore\angle OFB=60^\circ$，$\therefore\tan\angle OFB=\frac{b}{c}=\sqrt{3}$，……………………………………………2分

又$\because b^2+c^2=a^2=4$，$\therefore b=\sqrt{3}$，$c=1$，

$\therefore$ 椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．…………………………………………………………3分

（2）(i)设$D(x_0,y_0)$，显然$x_0\neq0$，且直线AD，BD的斜率存在，不妨依次设为k_1，k_2，

$\therefore k_1=\frac{y_0-\sqrt{3}}{x_0}$，$k_2=\frac{y_0+\sqrt{3}}{x_0}$，……………………………………………………4分

$\therefore$直线 AD，BD 的方程分别为 $y=\dfrac{y_0-\sqrt{3}}{x_0}x+\sqrt{3}$，$y=\dfrac{y_0+\sqrt{3}}{x_0}x-\sqrt{3}$，

$\because$直线 AD 交 $l:x=2$ 于点 Q，且直线 BD 交 x 轴于点 P，

$\therefore Q(2,\dfrac{2y_0+\sqrt{3}x_0-2\sqrt{3}}{x_0})$，$P(\dfrac{\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}},0)$，……………………………………………5 分

易知 $\dfrac{\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}}\neq 2$，否则 $P(2,0)$ 在椭圆 C 上，即点 D 与 P 重合，这与 D 不在坐标轴上矛盾，

$\therefore$直线 PQ 的斜率存在，不妨设其为 k_3，

$$\therefore k_3=\frac{\dfrac{2y_0+\sqrt{3}x_0-2\sqrt{3}}{x_0}}{2-\dfrac{\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}}}=\frac{2{y_0}^2+\sqrt{3}x_0y_0+3x_0-6}{-\sqrt{3}{x_0}^2+2x_0y_0+2\sqrt{3}x_0}，$$ ……………………………………………6 分

$\because D(x_0,y_0)$ 在 C 上，$\therefore \dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{3}=1$，即 ${y_0}^2=3-\dfrac{3{x_0}^2}{4}$，代入上式得，

$$k_3=\frac{-\dfrac{3}{2}{x_0}^2+\sqrt{3}x_0y_0+3x_0}{-\sqrt{3}{x_0}^2+2x_0y_0+2\sqrt{3}x_0}=\frac{\sqrt{3}}{2}，$$

$\therefore$直线 PQ 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即直线 PQ 的斜率为定值．……………………………8 分

(ii)不妨设直线 PQ 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+m$，

联立 $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+m \\ \dfrac{^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得，$6x^2+4\sqrt{3}mx+4m^2-12=0$，……………………………9 分

由 $\Delta=48(6-m^2)>0$ 得，$-\sqrt{6}<m<\sqrt{6}$，

显然 O 不在直线 MN 上（否则不存在△OMN），即 O 不在直线 PQ 上，$\therefore m\neq 0$，

不难知道 $m\neq\pm\sqrt{3}$，否则将与 D 不在坐标轴上矛盾，

综上可知，$-\sqrt{6}<m<\sqrt{6}$，且 $m\neq\pm\sqrt{3}$，$m\neq 0$，……………………………10 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，易知 $x_1+x_2=-\dfrac{2\sqrt{3}m}{3}$，且 $x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{3}$，

$$\therefore |MN|=\sqrt{1+\frac{3}{4}}\cdot|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2+4x_1x_2}=\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{6-m^2}}{3}，$$

设 O 到直线 MN 的距离为 d，即 O 到直线 PQ 的距离为 d，易知 $d=\dfrac{2|m|}{\sqrt{7}}$，

记△OMN的面积为S，

$\therefore S=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{6-m^2}}{3}\cdot\frac{2|m|}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{-m^4+6m^2}$， ……………………11 分

$\because -\sqrt{6}<m<\sqrt{6}$，且$m\neq\pm\sqrt{3}$，$m\neq 0$，$\therefore m^2\in(0,3)\cup(3,6)$，

$\therefore -m^4+6m^2=-(m^2-3)^2+9\in(0,9)$，$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{-m^4+6m^2}\in(0,\sqrt{3})$，

∴△OMN面积的取值范围为$(0,\sqrt{3})$． ……………………………………………………12 分

22．（12 分）

已知函数$f(x)=\mathrm{e}^a\ln x-ax+2a\ (a\in\mathbf{R})$．

(1) 判断$f(x)$在区间$(\mathrm{e},+\infty)$上的单调性；

(2) 若$f(x)$恰有两个不同的零点x_1，x_2，且$x_1<x_2$，证明：$x_1+3x_2>a+\frac{4}{a}+4$．

解：(1)易知$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^a}{x}-a=\frac{\mathrm{e}^a-ax}{x}$， ……………………………………………………1 分

若$a\le 0$，则$f'(x)>0$恒成立， $\therefore f(x)$在区间$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增，……………………2 分

若$a>0$，当$x\in(0,\frac{\mathrm{e}^a}{a})$时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在区间$(0,\frac{\mathrm{e}^a}{a})$上单调递增，

当$x\in(\frac{\mathrm{e}^a}{a},+\infty)$时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在区间$(\frac{\mathrm{e}^a}{a},+\infty)$上单调递减，……………………3 分

下面判断$\frac{\mathrm{e}^a}{a}$与e的大小关系，

令函数$g(a)=\frac{\mathrm{e}^a}{a}\ (a>0)$，则$g'(a)=\frac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2}\ (a>0)$，

∴当$a\in(0,1)$时，$g'(a)<0$，$\therefore g(a)$在区间$(0,1)$上单调递减，

当$a\in(1,+\infty)$时，$g'(a)>0$，$\therefore g(a)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore g(a)=\frac{\mathrm{e}^a}{a}\ge g(a)_{\min}=g(1)=\mathrm{e}$，

$\therefore \frac{\mathrm{e}^a}{a}\ge\mathrm{e}$，即$\mathrm{e}^{a-1}\ge a$（*），等号当且仅当$a=1$时取得，……………………………………4 分

∴当$a>0$，且$a\neq 1$时，$f(x)$在区间$(\mathrm{e},\frac{\mathrm{e}^a}{a})$上单调递增，在区间$(\frac{\mathrm{e}^a}{a},+\infty)$上单调递减；当$a=1$时，$f(x)$在区间$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，

综上所述，若$a\le 0$，则$f(x)$在区间$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增；若$a=1$，则$f(x)$在区间$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减；若$a>0$，且$a\neq 1$，则$f(x)$在区间$(\mathrm{e},\frac{\mathrm{e}^a}{a})$上单调递增，在区间$(\frac{\mathrm{e}^a}{a},+\infty)$上单调递减． ……………………………………………………………………………………5 分

(2)由(1)可知若 $f(x)$ 有两个不同的零点，则 $a>0$ ，且极大值 $f(\frac{e^a}{a})>0$ ，

易知 $f(\frac{e^a}{a})=e^a\ln(\frac{e^a}{a})-e^a+2a=e^a[\ln(\frac{e^a}{a})-1]+2a$ ，

由不等式（*）可知 $\frac{e^a}{a}>e$ ，$\therefore e^a[\ln(\frac{e^a}{a})-1]>0$ ，

$\therefore$当 $a>0$ 时，$f(\frac{e^a}{a})>0$ 恒成立，……………………………………………………………6 分

显然有 $e^a\ln x_1-ax_1+2a=0$ ，且 $e^a\ln x_2-ax_2+2a=0$ ，

两式相减可得 $\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\frac{e^a}{a}$ ，……………………………………………………………7 分

不妨设 $t=\frac{x_2}{x_1}$ ，则 $t>1$ ，且 $x_2=tx_1$ ，

$\therefore \frac{(t-1)x_1}{\ln t}=\frac{e^a}{a}$ ，即 $x_1=\frac{e^a}{a}\cdot\frac{\ln t}{t-1}$ ，$\therefore x_2=\frac{e^a}{a}\cdot\frac{t\ln t}{t-1}$ ，

$\therefore x_1+x_2=\frac{e^a}{a}(\frac{\ln t}{t-1}+\frac{t\ln t}{t-1})=\frac{e^a}{a}\cdot\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$ ，……………………………………………8 分

（方法一）由不等式（*）可知 $x-1\ge\ln x$ ，$\therefore \frac{1}{t}-1\ge\ln\frac{1}{t}$ ，………………………………9 分

又 $2>\frac{1}{t}+1>0$ ，$\therefore (\frac{1}{t}-1)\cdot\frac{2}{\frac{1}{t}+1}>\frac{1}{t}-1\ge\ln\frac{1}{t}$ ，

$\therefore 2\cdot\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}+1}>\ln\frac{1}{t}$ ，即 $2\cdot\frac{1-t}{1+t}>-\ln t$ ，亦即 $2\cdot\frac{t-1}{1+t}<\ln t$ ，$\therefore \frac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$ ，

$\therefore x_1+x_2>\frac{2e^a}{a}$ ，………………………………………………………………………10 分

由 $x_1<x_2$ 可知 $x_2\in(\frac{e^a}{a},+\infty)$ ，欲证 $x_1+3x_2>a+\frac{4}{a}+4$ ，只需证 $\frac{2e^a}{a}+2x_2>a+\frac{4}{a}+4$ ，

只需证 $\frac{4e^a}{a}\ge a+\frac{4}{a}+4$ ，即证 $4e^a\ge a^2+4a+4$ ，…………………………………………11 分

即证 $2e^{\frac{a}{2}}\ge a+2$ ，亦即证 $e^{\frac{a}{2}}\ge\frac{a}{2}+1$ ，这由不等式（*）可知显然成立，

$\therefore x_1+3x_2>a+\frac{4}{a}+4$ 得证. ……………………………………………………………12 分

（方法二）设 $h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$ ，$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$ ，

$\therefore h(t)\ge h(1)=0$ ，即 $\frac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$ ，…………………………………………………………8 分

$\therefore x_1+x_2>\dfrac{2\mathrm{e}^a}{a}$， ……………………………………………………………9 分

由 $x_1<x_2$ 可知 $x_2\in(\dfrac{\mathrm{e}^a}{a},+\infty)$，欲证 $x_1+3x_2>a+\dfrac{4}{a}+4$，只需证 $\dfrac{2\mathrm{e}^a}{a}+2x_2>a+\dfrac{4}{a}+4$，

只需证 $\dfrac{4\mathrm{e}^a}{a}\geq a+\dfrac{4}{a}+4$，即证 $4\mathrm{e}^a\geq a^2+4a+4$，……………………………………………11 分

即证 $2\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}\geq a+2$，亦即证 $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}\geq\dfrac{a}{2}+1$，这由不等式（*）可知显然成立，

$\therefore x_1+3x_2>a+\dfrac{4}{a}+4$ 得证. ……………………………………………………………12 分