保密★启用前

试卷类型：A

准考证号______　姓名______

（在此卷上答题无效）

名校联盟全国优质校2024届高三大联考

数学试题

2024.2

本试卷共4页，考试时间120分钟，总分150分。

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\left|2x^2-5x+2<0\right.\right\},B=\left\{x\left|x>1\right.\right\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

A．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　B．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　C．$\left(\frac{1}{2},2\right)$　D．$(1,2)$

2．已知 i 为虚数单位，$\left|\frac{1-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right|=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$ B．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$ D．$\frac{\sqrt{2}}{5}$

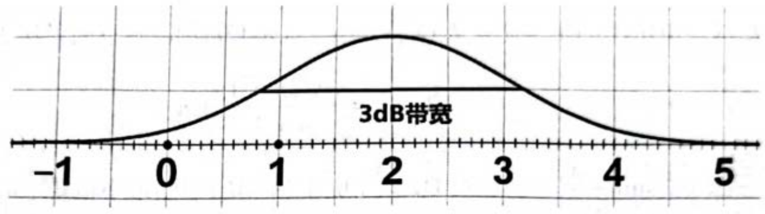
3．已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个单位向量，若 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　B．$\frac{\pi}{3}$　C．$\frac{2\pi}{3}$　D．$\frac{5\pi}{6}$

4．设直线 $x-3y+m=0\left(m\neq0\right)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 分别交于 A、B 两点，若线段 AB 的中点横坐标是 $\frac{4}{5}m$，则该双曲线的离心率是（　　）

A． $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B． $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C． 2　D． $\sqrt{2}$

5．一般来说，输出信号功率用高斯函数来描述，定义为 $I(x)=I_0 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，其中 I_0 为输出信号功率最大值（单位：mW），x 为频率（单位：Hz），μ 为输出信号功率的数学期望，σ^2 为输出信号的方差，3dB 带宽是光通信中一个常用的指标，是指当输出信号功率下降至最大值一半时，信号的频率范围，即对应函数图像的宽度。现已知输出信号功率为 $I(x)=I_0 e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$（如图所示），则其 3dB 带宽为（　　）

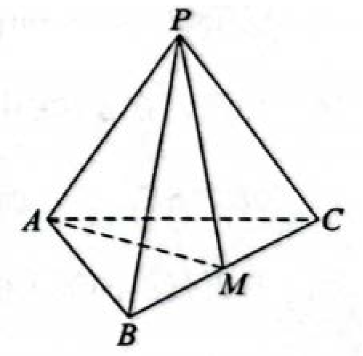


A． $\sqrt{\ln 2}$　B． $4\sqrt{\ln 2}$　C． $3\sqrt{\ln 2}$　D． $2\sqrt{2\ln 2}$

6．已知 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 成等比数列，且 2 和 8 为其中的两项，则 a_5 的最小值为（　　）

A． -32 B． -16 C． $\frac{1}{32}$　D． $\frac{1}{16}$

7．如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB=BC=\sqrt{2},BA\perp BC,PA=PB=PC=2$ ，点 M 是棱 BC 上一动点，则 $PM+MA$ 的取值范围是（　　）



A． $\left[\sqrt{6+2\sqrt{7}},4\right]$　　B． $\left[2+\sqrt{2},4\right]$

C． $\left[\frac{\sqrt{10}+\sqrt{14}}{2},4\right]$　　D． $\left[\frac{\sqrt{10}+\sqrt{14}}{2},2+\sqrt{2}\right]$

8．方程 $2\cos 2x\left(\cos 2x-\cos\left(\frac{2014\pi^2}{x}\right)\right)=\cos 4x-1$ 所有正根的和为（　　）

A． 810π　B． 1008π　C． 1080π　D． 1800π

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分分，有选错的得 0 分．

9．下列命题正确的是（　　）

A．若 A、B 两组成对数据的样本相关系数分别为 $r_A=0.97, r_B=-0.99$，则 A 组数据比 B 组数据的相关性较强

B．若样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的方差为 2，则数据 $2x_1-1, 2x_2-1, \cdots, 2x_6-1$ 的方差为 8

C．已知互不相同的 30 个样本数据，若去掉其中最大和最小的数据，剩下 28 个数据的 22%分位数不等于原样本数据的 22%分位数

D．某人解答 5 个问题，答对题数为 X，若 $X \sim B(5,0.6)$，则 $E(X)=3$

10．对于函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，下列说法正确的是（　　）

A． $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处取得极大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

B． $f(x)$ 有两个不同的零点

C． $f(4)<f(\pi)<f(3)$

D． $\pi^4<4^\pi$

11．已知 M_n 是圆 $O_n: x^2+y^2-2nx-2ny+n^2=0\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 上任意一点，过点 $P_n(-1,n)$ 向圆 O_n 引斜率为 $k_n(k_n>0)$ 的切线 l_n，切点为 $Q_n(x_n, y_n)$，点 $A_n(3n,n)$，则下列说法正确的是（　　）

A． $n=1$ 时，$k_1=\sqrt{3}$ B． $y_n=\dfrac{n\sqrt{2n+1}}{n+1}+n$

C． $\sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x_n}{y_n-n}\right)$ D． $\dfrac{1}{2}|M_nA_n|+|M_nP_n|$ 的最小值是 $\dfrac{3}{2}n+1$

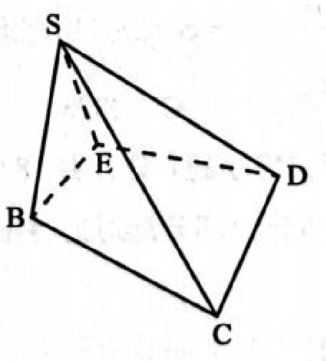
三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=1, a_3=5$，则 $a_{2024}=$______.

13．设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上恰有两个零点，则 ω 的取值范围是______.

14．如图，在 $\triangle SBE$ 中，$SE=BE=1$，在直角梯形 $BEDC$ 中，$BE\perp DE, CD// BE, CD=2, DE=\sqrt{3}$，

$DE \perp SE$，记二面角 $S-DE-B$ 的大小为 θ，若 $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$，则直线 SC 与平面 SDE 所成角的正弦值的最大值为______.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）

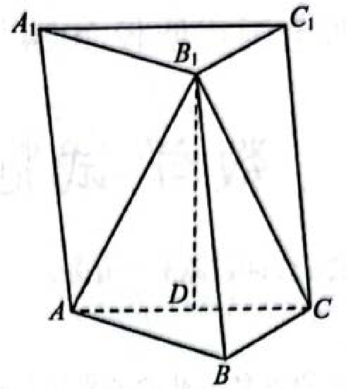
若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n + n - 4$．

（1）证明：数列 $\{a_n - 1\}$ 是等比数列；

（2）设 $b_n = \log_2(a_{n+1} - 1)$，求数列 $\{b_n(a_n - 1)\}$ 的前 n 项和 T_n．

16．（15 分）

在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，$AA_1 = 13$，在底面 $\triangle ABC$ 中，有 $AB \perp BC$，且 $AB = 8, BC = 6$，点 D 为等腰三角形 B_1AC 的底边 AC 的中点，在 $\triangle BB_1D$ 中，有 $\cos\angle BB_1D = \frac{12}{13}$．



（1）求证：$BC \perp B_1D$；

（2）求直线 AB_1 与平面 B_1BC 所成角的正弦值．

17．（15 分）

甲、乙两俱乐部进行羽毛球团体赛，比赛依次按照男子双打、女子双打、混合双打、男子单打、女子单打共

五个项目进行，规定每个项目均采取三局两胜制，且在上述五项中率先赢下三项的俱乐部获胜（后续项目不再进行比赛）．已知在男双项目、女双项目、男单项目这三项的每局中，甲俱乐部获胜的概率均为0.7；在混双项目、女单项目这两项的每局中，乙俱乐部获胜的概率均为0.8，假设每局比赛之间互不影响．（注：比赛没有平局，且所有结果均保留一位小数．）

（1）求甲俱乐部在男子双打项目中获胜的概率；

（2）记比赛结束时所完成的比赛项目数量为随机变量 X，求 X 的分布列和数学期望．

18．（17 分）

已知椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, A 为 E 的左顶点，B 为 E 的上顶点，E 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$, $\triangle ABO$ 的面积为 $\sqrt{3}$．

（1）求 E 的方程；

（2）过点 $P\left(-2,1\right)$ 的直线交 E 于 M、N 两点，点 M 且垂直于 x 轴的直线交直线 AN 于点 H，证明：线段 MN 的中点在定直线上．

19．（17 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{a}{x}$．

（1）当 $a=-1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）若存在实数 $0<x_0<\dfrac{1}{2}$，满足 $f\left(x_0\right)=f\left(\dfrac{x_0^2}{1-x_0}\right)$，求 $f\left(a^2\right)$ 的取值范围．