名校联盟全国优质校2025届高三大联考

数学试题参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	A	B	C	B	D	A	B	AC	BCD	AC

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．答案：C

解析：$|\overline{z}|=|-1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$．故选C．

2．答案：A

解析：易知$A=(1,+\infty)$，$B=[-2,2]$，∴ $A\cap B=(1,2]$，故选A．

3．答案：B

解析：$a_1a_6=a_3a_4=8a_3$，∴ $a_4=8$，∵ $a_5=16$，∴等比数列$\{a_n\}$的公比为2，$a_1=1$

∴ $S_5=\dfrac{1-2^5}{1-2}=31$，故选B．

4．答案：C

解析：$4\times(0.005+0.065+0.040+0.090)=0.8$，则$[36,40]$组的频率为$0.2$，

∴第90百分位数为$\dfrac{36+40}{2}=38$，故选C．

5．答案：B

解析：记坐标原点为O，过点A作$AB\perp OF$，垂足为B．由已知及抛物线定义可得，$|AF|=|A_1F|=|AA_1|$，∴$\triangle AA_1F$为等边三角形，$\angle AA_1F=\angle AFA_1=60^\circ$，又∵ $AA_1 /\!/ OF$，∴ $\angle A_1FO=\angle AA_1F=60^\circ$，则$\angle AFB=60^\circ$．∴ $|AF|\cos60^\circ+2=|AF|$，解得$|AF|=4$，故选B．

6．答案：D

解析：对于选项A，取$x=1$代入得$f(1)=1$，取$x=-1$代入得$f(1)=-1$，矛盾，故不存在函数$f(x)$满足；同理，不存在函数$f(x)$满足B，C；

对于选项D，$t=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$为增函数，∴对任意$x_0\in\mathbf{R}$都有唯一的$t_0=\mathrm{e}^{x_0}-\mathrm{e}^{-x_0}$ 满足，则$f(x_0)=t_0$即可，故选D．

7．答案：A

解析：$\tan(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)=\dfrac{\sin2\alpha-1}{\cos2\alpha}=\dfrac{-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}=-\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{4})$，

故$\dfrac{\pi}{3}-\alpha=\alpha-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，∴ $2\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}+k\pi$，

又$\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$，则$2\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，∴ $\tan2\alpha=\tan(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4})=-(2+\sqrt{3})$，故选A．

8．答案：B

解析：方法1：设$l:y=-x+a$，$A(x_1,\ln x_1)$，$B(x_2,\ln(\mathrm{e}x_2+\mathrm{e}))$．

则x_1是方程$\ln x+x=a$的解，x_2是方程$\ln(\mathrm{e}x+\mathrm{e})+x=a$的解．

∵函数$f(x)=\ln x+x$，$g(x)=\ln(\mathrm{e}x+\mathrm{e})+x$均为增函数，

且$\ln(\mathrm{e}x+\mathrm{e})+x=\ln(x+1)+x+1$，故$g(x)=f(x+1)$，∴ $x_1=x_2+1$．

∴ $|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}$，故选B．

方法2：∵ $\ln(\mathrm{e}x+\mathrm{e})-\ln x=\ln(\mathrm{e}+\dfrac{\mathrm{e}}{x})>0$，直线$AB$斜率为$-1$，设$A(x,\ln x)$，$|AB|=d$，则

$B(x-\frac{\sqrt{2}}{2}d,\ln x+\frac{\sqrt{2}}{2}d)$，∴对任意 $x>0$ 有：$\ln x+\frac{\sqrt{2}}{2}d=\ln(\mathrm{e}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}d)+\mathrm{e})=\ln(x-\frac{\sqrt{2}}{2}d+1)+1$，

∴ $\frac{\sqrt{2}}{2}d=1$，即 $d=\sqrt{2}$，故选 B.

方法 3：∵ $\ln(\mathrm{e}x+\mathrm{e})=\ln(x+1)+1$，

∴将点 $A(x,\ln x)$，向左平移 1 个单位，再向上平移单位，得到点 $A'(x-1,\ln x+1)$，

点 A' 在函数 $y=\ln(\mathrm{e}x+\mathrm{e})$ 图象上，且直线 AA' 的斜率为 -1，易得斜率为 -1 的直线与函数 $y=\ln(\mathrm{e}x+\mathrm{e})$ 图象只有一个交点，∴点 A' 与点 B 重合，∴ $|AB|=|AA'|=\sqrt{2}$，故选 B.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 答案：AC

解析：∵ $f(\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=\pm1$，∴ $\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi$，又∵ $0<\varphi<\pi$，∴ $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

∴ $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选项 A 正确；$f(\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})\neq0$，故选项 B 错误；

∵ $x\in(0,\frac{\pi}{3})$，∴ $2x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\pi)\subseteq(0,\pi)$，故选项 C 正确；

$f(x-\frac{\pi}{3})=\cos(2(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3})=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$ 不为偶函数，故选项 D 错误. 故选 AC.

10. 答案：BCD

解析：∵ $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1$，∴ $P(AB)=0.6+0.5-1=0.1\neq P(AB)$，

故选项 A 错误；

∵ $C=AB$，$D=A\overline{B}+\overline{A}B$，∴ $CD=\varnothing$，$C+D=\Omega$，故 C，D 互为对立，故选项 B 正确；

$P(\overline{B}\mid A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=\frac{5}{6}$，故选项 C 正确；

$P(A\mid D)+P(B\mid D)=\frac{P(AD)}{P(D)}+\frac{P(BD)}{P(D)}=\frac{P(AD+BD)}{P(D)}=\frac{P(D)}{P(D)}=1$，故选项 D 正确. 故选 BCD.

11. 答案：AC

解析：$x=a$ 为函数 $f(x)$ 的零点，

若 $a>0$，当 $0<x<a$ 时，$x-a<0$，则 $x^2+b<0$；当 $x>a$ 时，$x-a>0$，则 $x^2+b>0$. 所以 $x=a$ 时，$x^2+b=0$，即 $a^2+b=0$，$b=-a^2<0$，故选项 A 正确；

由 A 可知 $f(x)=(x-a)(x^2-a^2)$，$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a)$，∴ $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-\frac{a}{3})$ 和 $(a,+\infty)$ 递增，在区间 $(-\frac{a}{3},a)$ 递减，$x=a$ 为 $f(x)$ 的极小值点，故选项 B 错误；

对于选项 C：由 B 可知，$x=-\frac{a}{3}$ 为 $f(x)$ 的极大值点，要使方程 $f(x)=a$ 有 3 个不同的实数根，

则 $f(a)<a<f(-\frac{a}{3})$，解得 $a>\frac{3\sqrt{6}}{8}$，故选项 C 正确；

对于选项 D：

$f(x)=x^3-ax^2-a^2x+a^3$，$f(x+m)=(x+m)^3-a(x+m)^2-a^2(x+m)+a^3$，

∴ $f(x+m)-f(x)=m[mx^2+(3m-2a)x+m^2-am-a^2]\geq0$ 恒成立，

显然当 $m=0$ 时，成立；

显然当 $m<0$ 时，不恒成立；

$\therefore$ 当 $m>0$ 时，即 $y=mx^2+(3m-2a)x+m^2-am-a^2\ge 0$ 恒成立，

$\therefore \Delta=(3m^2-2am)^2-12m(m^3-am^2-a^2m)=-3m^4+16a^2m^2\le 0$ 恒成立，

$\therefore m\ge \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$ 或 $m=0$，故选项 D 错误，故选 AC.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．答案：5

解析：方法 1：易知 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$\because|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$，$\therefore \triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=5$.

方法 2：当点 O 为坐标原点时，$A(1,2)$，$\therefore B(5,0)$，$\triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 2=5$，故填 5.

13．答案：$2\sqrt{5}$

解析：由双曲线定义：$|AF_2|-|AF_1|=2a=|BF_1|-|BF_2|$，即 $|AF_2|=2a+|AF_1|$，$|BF_2|=|BF_1|-2a$

又 $\because |AF_1|=|BF_1|$，$|AB|=|AF_2|-|BF_2|=4a=8$，$\therefore a=2$，$|F_1F_2|=2\sqrt{a^2+1}=2\sqrt{5}$，故填 $2\sqrt{5}$.

14．答案：$2(\sqrt{2}-1)\pi$

解析：设扇形面积为 S，圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，

则由等面积法，该圆锥的内切球半径 $R=\dfrac{r\sqrt{l^2-r^2}}{l+r}$，

易知，$S=\dfrac{1}{2}\times 2\pi r\times l$，即 $rl=\dfrac{S}{\pi}$，记 $\dfrac{S}{\pi}=p$ 为定值，

方法 1：$\because R^2=\dfrac{r^2(l^2-r^2)}{(l+r)^2}=\dfrac{r^2(l-r)}{l+r}=\dfrac{r(p-r^2)}{\frac{p}{r}+r}=\dfrac{r^2(p-r^2)}{p+r^2}=3p-(p+r^2+\dfrac{2p^2}{p+r^2})$

$\le 3p-2\sqrt{(p+r^2)\times\dfrac{2p^2}{p+r^2}}=3p-2\sqrt{2}p$，即 $R^2\le(\sqrt{2}-1)^2p$，

当且仅当，$p+r^2=\dfrac{2p^2}{p+r^2}$，即 $p+r^2=\sqrt{2}p$ 时等号成立，

当圆锥的内切球体积最大时，即圆锥的内切球半径 R 最大时，

易知当 R 最大时，$\alpha=\dfrac{2\pi r}{l}=\dfrac{2\pi r}{\frac{p}{r}}=\dfrac{2\pi r^2}{p}=2(\sqrt{2}-1)\pi$，故填 $2(\sqrt{2}-1)\pi$.

方法 2：$\because R^2=\dfrac{r^2(l^2-r^2)}{(l+r)^2}=\dfrac{r^2(l-r)}{l+r}=\dfrac{r(p-r^2)}{\frac{p}{r}+r}=\dfrac{r^2(p-r^2)}{p+r^2}$，

令 $f(r)=\dfrac{r^2(p-r^2)}{p+r^2}$，则 $f'(r)=\dfrac{(2pr-4r^3)\cdot(p+r^2)-r^2(p-r^2)\cdot 2r}{(p+r^2)^2}=\dfrac{-2r\cdot(r^4+2pr^2-p^2)}{(p+r^2)^2}$，

令 $f'(r)=0$，即 $r^4+2pr^2-p^2=0$，解得 $r^2=(\sqrt{2}-1)p$，

$\therefore r^2=(\sqrt{2}-1)lr$，即 $r=(\sqrt{2}-1)l$，

$\therefore$ 易知当 $f'(r)=0$ 时，即 $r=(\sqrt{2}-1)l$ 时，$f(r)$ 取得最大值，

$\therefore$ 当 R 最大时，即 $f(r)$ 最大时，$\alpha=\dfrac{2\pi r}{l}=\dfrac{2\pi(\sqrt{2}-1)l}{l}=2(\sqrt{2}-1)\pi$，故填 $2(\sqrt{2}-1)\pi$.

四、解答题：共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．解：（1）方法 1：由正弦定理得，$\sin C(1-2\cos B)=\sin B(2\cos C-1)$，

$\therefore \sin C+\sin B=2(\sin C\cos B+\sin B\cos C)=2\sin(B+C)$，……………………………………2 分

又 $A+B+C=\pi$，$\therefore \sin(C+B)=\sin A$，

$\therefore \sin C+\sin B=2\sin A$，……………………………………………………4 分

由正弦定理得，$c+b=2a$，$\therefore b$，a，c 成等差数列. ……………………………………5 分

正弦定理，正弦和角公式化解 2 分，化解得 $\sin C+\sin B=2\sin A$ 2 分，结论 1 分

方法 2：由余弦定理，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\therefore c(1-\dfrac{a^2+c^2-b^2}{ac})=b(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}-1)$，……………………………………2 分

$\therefore a(b+c)-2a^2=0$．……………………………………………………4 分

$\because a\neq 0$，$\therefore b+c=2a$，即 b，a，c 成等差数列．……………………………………5 分

余弦定理角化边 2 分，化解得 $a(b+c)-2a^2=0$ 2 分，结论 1 分

（2）$\because S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$\therefore bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$；……………………………………6 分

由余弦定理得：$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$，

$\therefore 2bc\cos A=b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-2bc-a^2=3a^2-2bc$．

$\therefore 2bc\cos A=2\sqrt{3}bc\sin A-2bc$．

化简得 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，……………………………………………………11 分

即 $\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，

$\because A\in(0,\pi)$，故 $A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．……………………………………………………13 分

代入面积公式 1 分，余弦定理化解得到 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$ 5 分，具体过程酌情给分，
求值以及结论 2 分.
直接用海伦公式，秦九韶面积公式酌情给分.
将 A 视为 B，C 为焦点的椭圆上一点，根据几何意义求解，酌情给分.

16．解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=(e^x+1)(x-2)$，则 $f'(x)=(x-1)e^x+1$，……………………2 分

$\therefore f(1)=-e-1$，切点为 $(1,-e-1)$，切线斜率为 $f'(1)=1$，

$\therefore$切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$，整理得，$y=x-e-2$.……………………………………5 分

求导 2 分，整理得到切线方程 3 分（其中切点 1 分，切线斜率 1 分）

（2）$f'(x)=(x-2a+1)e^x+a$，$\because f(x)$ 为增函数，$\therefore f'(x)=(x-2a+1)e^x+a\geq 0$ 恒成立，…………6 分

翻译条件为 $f'(x)=(x-2a+1)e^x+a\geq 0$ 恒成立 1 分

方法 1：令 $g(x)=(x-2a+1)e^x+a$，$a\in\mathbf{Z}$，则 $g'(x)=(x-2a+2)e^x=0$，

当 $x\in(-\infty,2a-2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(2a-2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x=2a-2$ 时，$g(x)$ 取得极小值，也是最小值，$\therefore g(2a-2)=-e^{2a-2}+a\geq 0$，…………………10 分

令 $h(x)=-e^{2x-2}+x$，令 $h'(x)=-2e^{2x-2}+1=0$，解得 $x=1-\dfrac{1}{2}\ln 2$，

当 $x\in(-\infty,1-\dfrac{1}{2}\ln 2)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1-\dfrac{1}{2}\ln 2,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

又 $h(1-\dfrac{1}{2}\ln 2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2>0$，$h(1)=0$，$h(0)=-e^{-2}<0$，$h(2)=2-e^2<0$，…………………14 分

$\therefore a=1$. ……………………………………………………………………………15 分

$g(x)$ 单调性，极小值分析 4 分，$h(x)$ 单调性分析 4 分，结论 1 分.

方法 2：$\therefore f'(0)=1-2a+a=1-a\geq 0$，$f'(-1)=\dfrac{-2a}{\mathrm{e}}+a\geq 0$，解得 $0\leq a\leq 1$，……………………8 分

$\because a\in\mathbf{Z}$，$\therefore a=0$，或 $a=1$，……………………………………………………………10 分

当 $a=0$ 时，$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，易知 $f'(-2)=-\mathrm{e}^{-2}<0$，不符题意；………………………12 分

当 $a=1$ 时，$f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+1$，设 $g(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+1$，则 $g'(x)=x\mathrm{e}^x$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取得极小值，也是最小值，$\therefore g(x)\geq g(0)=0$，符合题意；…………………14 分

$\therefore a=1$. ……………………………………………………………………………15 分

必要性探路得 $0\leq a\leq 1$ 2 分，分析判断得 $a=0$，或 $a=1$ 2 分，验证 $a=0$ 2 分，

验证 $a=1$ 2 分，结论 1 分.

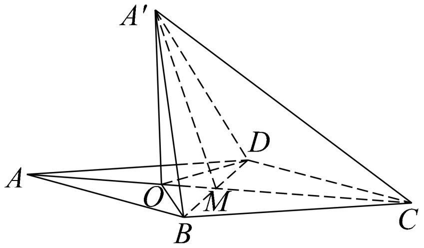
若由 $f'(0)\geq 0$，$f'(-2)\geq 0$，$a\in\mathbf{Z}$ 直接得 $a=1$，再去验证 $a=1$，酌情给分.

17. 解：（1）易知三棱锥 $A'-BCD$ 的表面积为 $S_{A'-BCD}=2(S_{\triangle A'BD}+S_{\triangle A'BC})$，

$\because S_{\triangle A'BD}=3\sqrt{3}$，$\therefore$ 当 $S_{\triangle A'BC}$ 的面积最大时，三棱锥 $A'-BCD$ 的表面积最大，

此时，由 $S_{\triangle A'BC}=\dfrac{1}{2}A'B\cdot BC\cdot\sin\angle A'BC$ 可知 $\sin\angle A'BC=1$，即 $A'B\perp BC$，同理 $A'D\perp DC$ …2 分

分析推理得到 $A'B\perp BC$，$A'D\perp DC$ 2 分，具体过程酌情给分



方法 1：设 O 为 A' 在底面 $ABCD$ 的射影，M 为 BD 中点，连接 OB，OD，

$\because A'O\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore A'O\perp BC$，又 $\because A'B\perp BC$，$A'B\subset$ 平面 $A'OB$，$A'O\subset$ 平面 $A'OB$，

$\therefore BC\perp$ 平面 $A'OB$，又 $\because OB\subset$ 平面 $A'OB$，$\therefore BC\perp OB$，……………………………………4 分

又 $\because \angle CBD=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \angle DBO=\dfrac{\pi}{6}$，即 O 在 $\angle ABD$ 的角平分线上，

同理，O 在 $\angle ADB$ 的角平分线上，$\therefore O$ 为等边 $\triangle ABD$ 的重心. ……………………………5 分

$\therefore OM=1$，$AM=CM=3$，$A'O=2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 三棱锥 $A'-BCD$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times BD\times CM\times A'O=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$. ……………7 分

确定 O 的位置 3 分（其中证明 $BC\perp OB$ 2 分），具体过程酌情给分；体积计算 2 分

方法 2：设 M 为 BD 中点，$\because \triangle CBD$，$\triangle A'BD$ 均为等边三角形，

$\therefore BD\perp CM$，$BD\perp A'M$，$\because A'M\cap CM=M$，$\therefore BD\perp$ 平面 $A'MC$，……………………………5 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle A'BC$ 中，$A'C=\sqrt{A'B^2+BC^2}=2\sqrt{6}$，则 $A'M=CM=3$，

$\therefore \triangle A'MC$ 底边 $A'C$ 上的高为 $\sqrt{3}$，$\therefore \triangle A'MC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$，

$\therefore V_{A'-BCD}=V_{B-A'MC}+V_{D-A'MC}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle A'MC}\times BD=\dfrac{1}{3}\times 3\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$，……………………………7 分

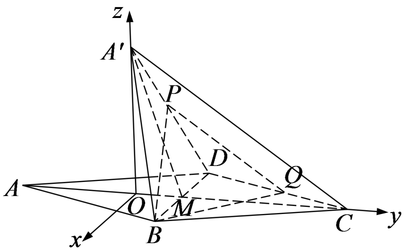
证明 $BD\perp$ 平面 $A'MC$ 3 分，体积计算 2 分.

（2）方法 1：

如图所示，以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA'}$ 所在方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角

坐标系，则 $A'(0,0,2\sqrt{2})$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$C(0,4,0)$，$D(-\sqrt{3},1,0)$，$Q(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2},0)$，

$\therefore \overrightarrow{BQ}=(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{DA'}=(\sqrt{3},-1,2\sqrt{2})$，……………………………………………9 分



建系正确给 1 分，点和向量 1 分

设 $\frac{DP}{DA'}=\lambda$（$0<\lambda\le 1$），设 $P(x,y,z)$，则 $(x+\sqrt{3},y-1,z)=\lambda(\sqrt{3},-1,2\sqrt{2})$，

$\therefore P(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},1-\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$，$\overrightarrow{BP}=(\sqrt{3}\lambda-2\sqrt{3},-\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$，……………………………10 分

设平面 BPQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{3\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{3}{2}y_1=0,\\ \sqrt{3}(\lambda-2)x_1-\lambda y_1+2\sqrt{2}\lambda z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}$，$z_1=\frac{\sqrt{6}}{2\lambda}$，$\therefore \boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},\frac{\sqrt{6}}{2\lambda})$，……………………………………12 分

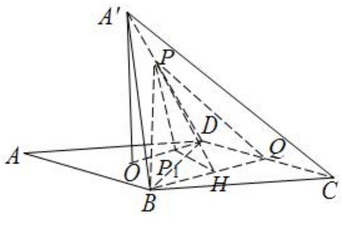
易知平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，…………………………………………………13 分

$\therefore \frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2\lambda}}{\sqrt{1+3+(\frac{\sqrt{6}}{2\lambda})^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{DP}{DA'}=\frac{1}{2}$．……………………………………………………………………………………15 分

写出 P 点和 $\overrightarrow{BP}$ 坐标 1 分，平面 BPQ 法向量 2 分，平面 BCD 法向量 1 分，求解以及结论 2 分
若有其他建系方法，仿照上述方案给分

方法 2：



如图，过 P 作 PP_1 垂直 OD 于 P_1，$\therefore PP_1 /\!/ A'O$，$PP_1\perp$ 平面 BCD，

过 P_1 作 P_1H 垂直 BQ 于 H，则 $P_1H\perp BQ$，$P_1P\perp BQ$，$P_1H\cap P_1P=P_1$，

$\therefore BQ\perp$ 平面 P_1PH，$\because PH\subset$ 平面 P_1PH，$\therefore BQ\perp PH$，

$\therefore \angle PHP_1$ 为二面角 $P-BQ-D$ 的平面角，…………………………………………………11 分

$\therefore \cos\angle PHP_1=\frac{\sqrt{15}}{5}$，$\tan\angle PHP_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$，……………………………………………12 分

不妨设 $\frac{DP}{DA'}=\lambda$（$0<\lambda\le 1$），则 $P_1P=2\sqrt{2}\lambda$，

$\because OD /\!/ BQ$，$\therefore P_1H=\sqrt{3}$，$\therefore \tan\angle PHP_1=\frac{PP_1}{P_1H}=\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{DP}{DA'}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………………15 分

几何法说明二面角 $P-BQ-D$ 的平面角为 $\angle PHP_1$ 4 分，求解以及结论 4 分，具体过程酌情给分.

18．解：（1）当直线 l 与 x 轴垂直时，联立直线 $x=1$ 与 C 的方程，

即 $\begin{cases} x=1, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 解得 $y^2=\dfrac{8}{3}$，不妨设 $P(1,\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$，$Q(1,-\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$. ……………………………2 分

易知圆心 N 在 x 轴上，$A(-3,0)$，设 $N(t,0)$，

$\therefore \triangle APQ$ 的外接圆半径 $R=|AN|=|PN|$.

$\therefore t+3=\sqrt{(t-1)^2+(\dfrac{2\sqrt{6}}{3})^2}$，解得 $t=-\dfrac{2}{3}$，$\therefore R=\dfrac{7}{3}$，……………………………………4 分

$\therefore$ 圆 N 的方程为 $(x+\dfrac{2}{3})^2+y^2=\dfrac{49}{9}$. ………………………………………………………5 分

联立直线 $x=1$ 与 C 的方程 2 分，由 $R=|AN|=|PN|$ 解得 N 坐标和圆 N 半径 2 分，结论 1 分

（2）当直线 l 与 x 轴重合时无法构成三角形；

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，$l_{PQ}:x=my+1(m\neq 0)$，

联立 l 与 C 的方程 $\begin{cases} C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ l_{PQ}:x=my+1 \end{cases} \Rightarrow (m^2+3)y^2+2my-8=0,$

$\therefore \Delta>0, y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3}, y_1y_2=\dfrac{-8}{m^2+3}$，……………………………………………7 分

联立 l 与椭圆方程，写出韦达定理 2 分.

方法 1：

则 AP 的中垂线 $l_1:y=-\dfrac{x_1+3}{y_1}(x-\dfrac{x_1-3}{2})+\dfrac{y_1}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{x_1+3}{y_1}x-y_1$，

又 $\because x_1=my_1+1$，得 $l_1:y=-mx-\dfrac{4}{y_1}x-y_1$，

同理，AQ 的中垂线 $l_2:y=-mx-\dfrac{4}{y_2}x-y_2$. ………………………………………………9 分

联立直线 l_1，l_2 $\begin{cases} y=-mx-\dfrac{4}{y_1}x-y_1 ① \\ y=-mx-\dfrac{4}{y_2}x-y_2 ② \end{cases}$，

由①−②可得，$x_N=\dfrac{-2}{m^2+3}$，…………………………………………………………11 分

将 $x_N=\dfrac{-2}{m^2+3}$ 代入①+②可得，$y_N=\dfrac{4m}{m^2+3}$，

$\therefore N(\dfrac{-2}{m^2+3},\dfrac{4m}{m^2+3})$，……………………………………………………………13 分

$\therefore R^2=|AN|^2=(3-\dfrac{2}{m^2+3})^2+(\dfrac{4m}{m^2+3})^2$，

令 $m^2+3=t\in[3,+\infty)$，

$\therefore R^2=(3-\frac{2}{t})^2+\frac{16(t-3)}{t^2}=-44\times(\frac{1}{t})^2+4\times\frac{1}{t}+9=-44(\frac{1}{t}-\frac{1}{22})^2+\frac{100}{11}$， ……………………16 分

当 $t=22$，即 $m=\pm\sqrt{19}$ 时，$\triangle APQ$ 的外接圆半径最大，为 $\sqrt{\frac{100}{11}}$.

此时，$\triangle APQ$ 的外接圆面积最大，为 $\frac{100\pi}{11}$. ……………………………………………17 分

求出 AP，AQ 的中垂线方程 l_1，l_2 2 分，联立 l_1，l_2 解得 N 坐标 4 分（其中横坐标、纵坐标各 2 分），化解求出 R^2 的表达式 3 分，结论 1 分

方法 2：$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\,\frac{2\sqrt{3}\sqrt{3m^2+8}}{m^2+3}$， ………9 分

$k_{PA}=\frac{y_1}{x_1+3}$，$k_{QA}=\frac{y_2}{x_2+3}$，

$$\tan\angle PAQ=\frac{|k_{PA}-k_{QA}|}{1+k_{PA}k_{QA}}=\frac{\left|\frac{y_2}{x_2+3}-\frac{y_1}{x_1+3}\right|}{1+\frac{y_2}{x_2+3}\cdot\frac{y_1}{x_1+3}}=\frac{4|y_1-y_2|}{(m^2+1)y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16},$$

$$=\frac{8\sqrt{3}\sqrt{3m^2+8}}{(m^2+1)(-8)+4m(-2m)+16(m^2+3)}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{3m^2+8}}{5},$$ ……………………………13 分

$\therefore \sin\angle PAQ=\frac{\sqrt{3}\sqrt{3m^2+8}}{\sqrt{9m^2+49}}$，

由正弦定理得：$2R=\frac{|PQ|}{\sin\angle PAQ}=\frac{2\sqrt{(1+m^2)(9m^2+49)}}{m^2+3}$，

令 $t=m^2+3\geq 3$，则 $R=\frac{\sqrt{(t-2)(9t+22)}}{t}=\sqrt{9+4\cdot\frac{1}{t}-44\frac{1}{t^2}}=\sqrt{-44(\frac{1}{t}-\frac{1}{22})^2+\frac{100}{11}}$， …………16 分

$\therefore R=\sqrt{-44(\frac{1}{t}-\frac{1}{22})^2+\frac{100}{11}}\leq\sqrt{\frac{100}{11}}$，当 $t=22$ 时等号成立，

$\therefore$ 外接圆的面积的最大值为 $\frac{100\pi}{11}$. …………………………………………………………17 分

写出 $|PQ|$ 的表达式 2 分，写出 $\tan\angle PAQ$ 的表达式 4 分，化解求出 R 的表达式 3 分，结论 1 分

方法 3：

设圆 $N:x^2+y^2+Dx+Ey+3D-9=0$

联立 $\begin{cases}C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1\\ l_{PQ}:x=my+1\\ \odot N:x^2+y^2+Dx+Ey+3D-9=0\end{cases}\Rightarrow -2y^2+(mD+E)y+4D=0$， ………………………9 分

$y_1+y_2=\frac{mD+E}{2}, y_1y_2=-2D$，

所以 $-\frac{2m}{m^2+3}=\frac{mD+E}{2},\frac{-8}{m^2+3}=-2D$，

解得 $D=\frac{4}{m^2+3},E=\frac{-8m}{m^2+3}$，即 $N(\frac{-2}{m^2+3},\frac{4m}{m^2+3})$， ……………………………………13 分

设 $N(x,y)$，则有 $\begin{cases} x=\dfrac{-2}{m^2+3} \\ y=\dfrac{4m}{m^2+3} \end{cases}$，即 $\begin{cases} x=\dfrac{-2}{m^2+3} \\ \dfrac{y}{x}=-2m \end{cases}$，消去 m 得 $12x^2+8x+y^2=0$

所以 $R^2=|AN|^2=(x+3)^2+y^2=(x+3)^2-12x^2-8x=-11x^2-2x+9$， ……………………16 分

当 $x=-\dfrac{1}{11}$，即 $m^2=19$ 时，$\left(R^2\right)_{\max}=\dfrac{100}{11}$，此时，$\triangle APQ$ 的外接圆面积最大，为 $\dfrac{100\pi}{11}$． …17 分

联立直线 PQ 与圆 N 的一般式 2 分，写出 N 坐标 4 分，化解求出 R 的表达式 3 分，结论 1 分

19．解：（1）由题意，A_1：$\max\{1,3\}$，$\max\{3,2\}$，$\max\{2,4\}$，$\max\{4,2\}$，

即 3，3，4，4． ……………………………………………………2 分

∴ $S(A_1)=3+3+4+4=14$． ……………………………………………………3 分

写出 A_1 2 分，求 $S(A_1)$ 1 分

（2）由题意，由于 A_0 中元素两两互异，故 A_0 中的任一元素，如 a_k，在 A_1 中至多在 $\max\{a_{k-1},a_k\}$ 和 $\max\{a_k,a_{k+1}\}$ 中出现两次（规定 $a_0=a_n$，$a_{n+1}=a_1$），且若出现两次则这两个数处于邻位（a_1 和 a_n 也视为邻位）． ……………………………………………………5 分

∴ A_1 的所有项中至多有两个 5 和两个 4． ……………………………………6 分

∴ $S(A_1)\le 5\times2+4\times2+3=21$， ……………………………………………7 分

当 A_0 满足 $\{a_1,a_3,a_5\}=\{3,4,5\}$ 时等号能取到，

∴ $S(A_1)$ 的最大值为 21．（给出任意一种排列即可） ……………………………9 分

说明 A_0 中元素在 A_1 中至多出现两次 2 分，求出 $S(A_1)$ 的最大值 2 分，
给出取得最大值的一种排列 2 分.

（3）同（2）可知，A_0 中的任一元素若在 A_1 中仅出现一次，则在 A_2 中至多出现两次；若在 A_1 中出现两次，由于这两个数相邻，故在 A_2 中至多出现三次． ……………………10 分

（i）若 $n=3k$，则 $S(A_2)\le 3\times[n+(n-1)+\cdots+(\dfrac{2}{3}n+1)]=\dfrac{5n^2+3n}{6}$， ……………………11 分

当 A_0 满足 $\{a_1,a_4,\cdots,a_{3k-2}\}=\{\dfrac{2}{3}n+1,\dfrac{2}{3}n+2,\cdots,n\}$ 时等号能取到． ……………………12 分

（或 $\{a_2,a_5,\cdots,a_{3k-1}\}=\{\dfrac{2}{3}n+1,\dfrac{2}{3}n+2,\cdots,n\}$，或 $\{a_3,a_6,\cdots,a_{3k}\}=\{\dfrac{2}{3}n+1,\dfrac{2}{3}n+2,\cdots,n\}$）

（ii）若 $n=3k+1$，则 $S(A_2)\le 3\times[n+(n-1)+\cdots+\dfrac{2n+4}{3}]+\dfrac{2n+1}{3}=\dfrac{5n^2+3n-2}{6}$． ……………13 分

当 A_0 满足 $\{a_1,a_4,\cdots,a_{3k+1}\}=\{\dfrac{2n+1}{3},\dfrac{2n+4}{3},\cdots,n\}$ 时等号能取到． ……………………14 分

（iii）若 $n=3k+2$，则 $S(A_2)\le 3\times[n+(n-1)+\cdots+\dfrac{2n+5}{3}]+2\times\dfrac{2n+2}{3}=\dfrac{5n^2+3n-2}{6}$． …………15 分

当 A_0 满足 $\{a_1,a_4,\cdots,a_{3k+1}\}=\{\dfrac{2n+2}{3},\dfrac{2n+5}{3},\cdots,n\}$ 时等号能取到． ……………………16 分

（或 $\{a_2,a_5,\cdots,a_{3k+2}\}=\{\dfrac{2n+1}{3},\dfrac{2n+4}{3},\cdots,n\}$）

综上，$S(A_2)$ 的最大值为 $\begin{cases} \dfrac{5n^2+3n}{6}, & n=3k \\ \dfrac{5n^2+3n-2}{6}, & n=3k+1 或 n=3k+2 \end{cases}$． ……………………17 分

说明 A_0 中的任一元素在 A_2 中至多出现三次 1 分，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$ 每种情况 2 分，
结论 1 分