2024届宁德市普通高中毕业班五月份质量检查

数学试题参考答案及评分标准

说明：

1.本解答指出了每题要考察的主要知识和能力，给出一种或几种解法供参考．如果考生的解法与给出的解法不同，可根据试题的主要考察内容比照评分标准确定相应的评分细则．

2.对解答题，当考生的解答在某一步出现错误，但整体解决方案可行且后续步骤没有出现推理或计算错误，则错误部分依细则扣分，并根据对后续步骤影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过后续部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3.解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4.解答题只给整数分数，填空题不给中间分．

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分40分．

1．B　2．D　3．D　4．B　5．B　6．C　7．C　8．A

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．AC　10．BD　11．ABC

11.解法一：对于选项A,令$x=y=0$，得$f(0)=f^2(0)+f(0)$，所以$f(0)=0$或$f(0)=-1$．

令$y=0$，得$f(0)=f(x)f(0)+f(x)+f(0)$，由$f(x)$的值域为$[-1,+\infty)$，

所以当$f(0)=0$时，得$f(x)\equiv 0$，不合题意，所以$f(0)=-1$．A正确．

对于选项B,令$x=y=1$，得$f(1)=f^2(1)+2f(1)$，所以$f(1)=0$或$f(1)=-1$．

令$y=1$，得$f(x)=f(x)f(1)+f(x)+f(1)$，得$f(1)\left[f(x)+1\right]=0$，

因为$f(x)$的值域为$[-1,+\infty)$，所以$f(1)=0$．

令$x=y=-1$，得$f(1)=f^2(-1)+2f(-1)=0$，所以$f(-1)=0$或$f(-1)=-2$．

因为值域为$[-1,+\infty)$，所以$f(-1)=0$，C正确．

对于选项C,令$y=-1$，得$f(-x)=f(x)f(-1)+f(x)+f(-1)$，因为$f(-1)=0$，

则$f(-x)=f(x)$，所以函数$f(x)$为偶函数，图像关于$x=0$对称，C正确．

对于选项D,由值域$[-1,+\infty)$和偶函数，D错误．选ABC.

解法二：由$f(xy)=f(x)f(y)+f(x)+f(y)$，则$f(xy)+1=f(x)f(y)+f(x)+f(y)+1$，

得$f(xy)+1=[f(x)+1][f(y)+1]$，

设$g(x)=f(x)+1$，得$g(xy)=g(x)+g(y)$，可设$g(x)=x^{\alpha}$（α为正偶数），$f(x)=x^{\alpha}-1$，

不妨设$f(x)=x^2-1$，可判断ABC正确，D错误．选ABC.

三、填空题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分20分．

12．$\dfrac{\pi}{3}$　13．5　14．$(-\infty,1)$

四、解答题：本大题共6小题，满分70分，解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

15. 本题主要考查正弦定理、余弦定理、三角形面积公式等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想、函数与方程思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．满分13分．

解：(1)由$a^2+c^2=9+2ac\cos B$及余弦定理，得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9,$$

$b=3$. ……………………………………………………………………………………2 分

由 $\sin B=\sqrt{3}\sin A\sin C$ 及正弦定理，

得 $b=\sqrt{3}a\sin C$， ……………………………………………………………………4 分

因为△ ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}b\cdot BD=\frac{1}{2}ab\sin C$

所以 $BD=a\sin C=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. ………………………………………………………6 分

(2)由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3$ 得 $ac\cos\angle ABC=3$ ①,………………………………………………7 分

因为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}$,

所以 $ac\sin\angle ABC=3\sqrt{3}$ ②, ……………………………………………………………8 分

由①②得 $\tan\angle ABC=\sqrt{3}$， ……………………………………………………………9 分

又 $\angle ABC\in(0,\pi)$,故 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$， ………………………………………………10 分

从而 $ac=6$， $a^2+c^2=9+2\times6\times\frac{1}{2}=15$. ……………………………………………11 分

得 $(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=27$， …………………………………………………………12 分

所以 $a+c=3\sqrt{3}$. …………………………………………………………………………13 分

16. 本小题主要考查空间解三角形、直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，空间角的计算等基础知识，考查空间想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．满分 15 分．

解：（1）证明：翻折前，因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形， $\angle D=60°$，$AC=\sqrt{3},CD=1$，

在三角形 ACD 中，由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$， $\frac{\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\frac{1}{\sin\angle CAD}$,……………………………1 分

$\sin\angle CAD=\frac{1}{2}$， 又 $AC>CD$， 故 $\angle CAD=30^\circ$. ……………………………………………2 分

所以 $\angle ACD=90^\circ$，即 $CD\perp AC$， ……………………………………………………3 分

因为 $PD=\sqrt{5}$, $PC=2,CD=1$,所以 $PC^2+CD^2=PD^2$,则有 $CD\perp PC$. ……………………5 分

$PC\cap AC=C$， AC , $PC\subset$ 平面 APC， 所以 $CD\perp$ 平面 APC， ………………………6 分

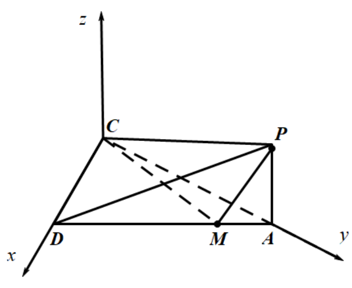
（2）由（1） $CD\perp$ 平面 APC， 且 $CD\subset$ 平面 ADC，

所以平面 $ADC\perp$ 平面 APC .

在平行四边形 $ABCD$ 中， $BA\perp AC$， 即 $PA\perp AC$，

故 $PA\perp$ 平面 ADC . …………………………………………………………7 分

以点 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CD}$ 、$\overrightarrow{CA}$ 、$\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 、y 、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$, $D(1,0,0)$, $P\left(0,\sqrt{3},1\right)$, $A\left(0,\sqrt{3},0\right)$， ………………8 分



设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}=\lambda\left(1,-\sqrt{3},0\right)=\left(\lambda,-\sqrt{3}\lambda,0\right)$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，

则 $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\left(0,\sqrt{3},0\right)+\left(\lambda,-\sqrt{3}\lambda,0\right)=\left(\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0\right)$，$\overrightarrow{CP}=\left(0,\sqrt{3},1\right)$，……………………………………9 分

设平面 MCP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(x,y,z\right)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=\sqrt{3}y+z=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CM}=\lambda x+\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)y=0\end{cases}$，取 $y=\lambda$，则 $z=-\sqrt{3}\lambda$，$x=\sqrt{3}\left(\lambda-1\right)$，

所以，$\boldsymbol{m}=\left(\sqrt{3}\left(\lambda-1\right),\lambda,-\sqrt{3}\lambda\right)$，……………………………………………………………………………11 分

易知平面 CPA 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,0,0\right)$，…………………………………………………………………12 分

则 $\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\boldsymbol{m}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{\left|\sqrt{3}(\lambda-1)\right|}{\sqrt{3\left(\lambda-1\right)^2+\lambda^2+3\lambda^2}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，整理可得 $15\lambda^2+2\lambda-1=0$，

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$，……………………………………………………………………………14 分

因此，线段 PC 上存在点 M，使二面角 $M-AB-C$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，且 $\dfrac{|AM|}{|MD|}=\dfrac{1}{4}$……………………15 分

17．本小题主要考查导数及其应用、函数的零点和不等式等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．满分 15 分．

解法一：（1）$f'(x)=-a\sin x-\mathrm{e}^{x+1}$，$f'(0)=-\mathrm{e}$,………………………………………………………2 分

又 $f(0)=a-\mathrm{e}$，所以切线方程为 $y=-\mathrm{e}x-\mathrm{e}+a$，…………………………………………………3 分

又切线过点 $(-1,2)$，

得 $2=\mathrm{e}-\mathrm{e}+a$，所以 $a=2$．……………………………………………………………………………4 分

所以 $f(x)=2\cos x-\mathrm{e}^{x+1}$，$f'(x)=-2\sin x-\mathrm{e}^{x+1}$，

当 $x\in\left[0,\pi\right]$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上单调递减，…………………………………………6 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\pi)=-2-\mathrm{e}^{\pi+1}$…………………………………………………………………………7 分

（2）判断 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{2\pi}{3},0)$ 零点个数，等价于判断方程 $2\cos x=\mathrm{e}^{x+1}$ 根的个数，

等价于判断方程 $\dfrac{2\cos x}{\mathrm{e}^{x+1}}=1$ 根的个数. ……………………………………………………………………8 分

令 $g(x)=\dfrac{2\cos x}{\mathrm{e}^{x+1}}$，$x\in(-\dfrac{2\pi}{3},0)$

$g'(x)=\dfrac{-2\sin x-2\cos x}{\mathrm{e}^{x+1}}$,令 $g'(x)=0$,则 $\sin(x+\dfrac{\pi}{4})=0$，得 $x=-\dfrac{\pi}{4}$．…………………………………10 分

当 $x\in(-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{4})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{4})$ 单调递增；

当 $x\in(-\frac{\pi}{4},0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4},0)$ 单调递减. ……………………………………………………12 分

$g(-\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{e^{1-\frac{2\pi}{3}}}<0$，$g(-\frac{\pi}{3})=\frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{e}>1$，$g(0)=\frac{2}{e}<1$，

（或 $g(-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}-1}>\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}-1+1\right)>1.4\times\frac{3}{4}>1$）

所以 $x\in(-\frac{2\pi}{3},0)$ 时，方程 $g(x)=1$ 有 2 根，

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{2\pi}{3},0)$ 有 2 个零点. ………………………………………………………………………………15 分

解法二：（1）$f'(x)=-a\sin x-e^{x+1}$，$f'(0)=-e$,……………………………………………………2 分

所以切线方程为 $y=-ex-e+2$，……………………………………………………………………3 分

因此切点为 $(0,2-e)$，

得 $2-e=a-e$，所以 $a=2$. ………………………………………………………………………………4 分

所以 $f(x)=2\cos x-e^{x+1}$，$f'(x)=-2\sin x-e^{x+1}$，

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，……………………………………………6 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\pi)=-2-e^{\pi+1}$……………………………………………………………………7 分

（2）由（1）得 $f(x)=2\cos x-e^{x+1}$，$f'(x)=-2\sin x-e^{x+1}$，……………………………………………8 分

令 $h(x)=-2\sin x-e^{x+1}$，则 $h'(x)=-2\cos x-e^{x+1}$ 在 $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$ 上为减函数，……………………………9 分

$h'(-\frac{2\pi}{3})=1-e^{1-\frac{\pi}{3}}>0$，$h'(-\frac{\pi}{2})=-e^{1-\frac{\pi}{2}}<0$，

所以在 $\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right)$ 上 $h'(x)$ 必有一个零点 x_0，使得 $h'(x_0)=0$，……………………………………10 分

从而当 $x\in\left(-\frac{2\pi}{3},x_0\right)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(x_0,0)$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(-\frac{2\pi}{3},x_0\right)$ 上单调递增，在 $(x_0,0)$ 上单调递减. ……………………………………………11 分

又 $h\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-e^{1-\frac{\pi}{3}}>0$，$h(-\frac{\pi}{2})=2-e^{1-\frac{\pi}{2}}>0$，$h(0)=-e<0$，

所以在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上 $h(x)$ 必有一个零点 x_1，使得 $h(x_1)=0$. ………………………………………… 12 分

当 $x\in\left(-\frac{2\pi}{3},x_1\right)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_1,0)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调递减. ……………………………………13 分

又因为 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-1-e^{1-\frac{2\pi}{3}}<0$， $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-e^{1-\frac{\pi}{2}}<0$， $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1-e^{1-\frac{\pi}{3}}>0$， $f(0)=2-e<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$ 上有一个零点，在 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 上有一个零点．……………………………14 分

综上， $f(x)$ 在 $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$ 有且只有 2 个零点．…………………………………………………15 分

18. 本小题主要考查全概率公式、概率的分布列及期望、递推数列及等比数列等基础知识，考查数学建模能力、运算求解能力、数据处理能力、应用意识，考查或然与必然思想、化归与转化思想，考查数学抽象、逻辑推理、数学建模、数据分析和数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 17 分．

（1）记第 i 次取出的球是黑球为事件 A_i， $i\in\mathbf{N}^*$，

则 $A_2=(A_1A_2)\cup(\overline{A_1}A_2)$，………………………………………………………………………1 分

根据全概率公式得

$P(A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2\mid\overline{A_1})$ ……………………………………………………2 分

$=\frac{3}{7}\times\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$ ……………………………………………………………………………3 分

$=\frac{6}{49}+\frac{16}{49}=\frac{22}{49}$ ……………………………………………………………………………4 分

所以第 2 次取出黑球的概率为 $\frac{22}{49}$.

（2）(i)由题知得 X_2 的可能取值为：1，3，5……………………………………………………………5 分

则 $P(X=1)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{49}$； $P(X=3)=\frac{3}{7}\times\frac{5}{7}+\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{31}{49}$； $P(X=5)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{12}{49}$；

……………………………………………………………………………………8 分

故 X_2 的分布列为：

X_2	1	3	5
P	$\frac{6}{49}$	$\frac{31}{49}$	$\frac{12}{49}$

……………………………………………………………………………9 分

所以 $E(X_2)=1\times\frac{6}{49}+3\times\frac{31}{49}+5\times\frac{12}{49}=\frac{159}{49}$. ……………………………………………10 分

(ii)设第 $n-1$ 次完成操作后袋中黑球数为 k （ $k=0,1,2,\cdots,7$ ）

则 $E(X_n)=\sum_{k=0}^{7}\left[(k-1)\cdot\frac{k}{7}+(k+1)\cdot\frac{7-k}{7}\right]\cdot P(X_{n-1}=k)$

$=\sum_{k=0}^{7}(\frac{5k}{7}+1)P(X_{n-1}=k)$

$$=\sum_{k=0}^{7}[\frac{5k}{7}P(X_{n-1}=k)]+\sum_{k=0}^{7}P(X_{n-1}=k)$$

$=\frac{5}{7}E(X_{n-1})+1$，……………………………………………………………………………13 分

（也可以按如下方法得出递推关系：

$$E(X_n)=\frac{E(X_{n-1})}{7}\times\left[E(X_{n-1})-1\right]+\left[1-\frac{E(X_{n-1})}{7}\right]\times\left[E(X_{n-1})+1\right]$$

$=\frac{5}{7}E(X_{n-1})+1$.）

（若通过特殊性入手得出递推关系得 2 分）

即 $E(X_n)=\frac{5}{7}E(X_{n-1})+1$，由此得 $E(X_n)-\frac{7}{2}=\frac{5}{7}[E(X_{n-1})-\frac{7}{2}]$，…………………………………15 分

又因为 $E(X_0)=3, E(X_0)-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}$，……………………………………………………………16 分

所以 $E(X_n)-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}\times(\frac{5}{7})^n$，即 $E(X_n)=-\frac{1}{2}\times(\frac{5}{7})^n+\frac{7}{2}$……………………………………………17 分

19. 本题主要考查两角和与差的正、余弦公式、双曲线、椭圆、直线与椭圆的位置关系等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力和创新能力，考查化归与转化思想、数形结合思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性，满分 17 分.

（1）证明：设 $P'(x',y')$，由题意可知

$$x'=|OP|\cos(\theta+\alpha)=r\cos\theta\cos\alpha-r\sin\theta\sin\alpha=x\cos\alpha-y\sin\alpha,$$

$$y'=|OP|\sin(\theta+\alpha)=r\sin\theta\cos\alpha+r\cos\theta\sin\alpha=x\sin\alpha+y\cos\alpha,$$

所以 $\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha.\end{cases}$ ……………………………………………………………………………2 分

故当 $x=\sqrt{3}, y=0$，且 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，

$\begin{cases}x'=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2},\\ y'=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}.\end{cases}$ 所以 $P'\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$……………………………………………………………4 分

（2）（i）设曲线 C 上的任一点 $P(x,y)$ 绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后得到的点为 $P'(x',y')$，

可视为 $P'(x',y')$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后得到的点 $P(x,y)$，

所以 $\begin{cases}x=x'\cos\frac{\pi}{6}-y'\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y',\\ y=x'\sin\frac{\pi}{6}+y'\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'.\end{cases}$ ……………………………………………………6 分

由点 $P(x,y)$ 在曲线 $C: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2x}$ 上，所以

$$\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)+\frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)},$$

整理得 $x'^2-\frac{y'^2}{3}=1$，……………………………………………………………………………………8 分

即曲线 C 绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后得到的曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，

该曲线为双曲线，离心率为 2. ……………………………………………………………………………9 分

（ii）由曲线 $\Gamma: 5x^2+5y^2-6xy=8$，可知当点 (x,y) 满足曲线方程时，点 (y,x)，$(-y,-x)$ 也满足该曲线方程，故曲线 Γ 关于直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 对称，……………………………………………………10 分

设曲线 Γ 上任一点 $P(x,y)$ 绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到的点为 $P'(x',y')$，

则 $\begin{cases} x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'), \\ y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'). \end{cases}$ ……………………………………………………11 分

由点 $P(x,y)$ 在曲线 $\Gamma: 5x^2+5y^2-6xy=8$ 上，所以 $2x'^2+8y'^2=8$，

即旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到的曲线方程为椭圆：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，其右焦点坐标为 $(\sqrt{3},0)$，…………………… 12 分

由（1）可知，其为点 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到的点，

故点 $F\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 为原椭圆 Γ 的右焦点.

由 FM 为 ΔABF 的外角平分线，

所以 $\sin\angle AFM=\sin\angle BFM$，故 $\frac{S_{\Delta FAM}}{S_{\Delta FBM}}=\left|\frac{MA}{MB}\right|=\frac{\frac{1}{2}|MF||FA|\sin\angle AFM}{\frac{1}{2}|MF||FB|\sin\angle BFM}=\left|\frac{FA}{FB}\right|$ ………………………………13 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，

$$|FA|=\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2-2\sqrt{3}x_1+1-\frac{x_1^2}{4}}=\sqrt{\frac{3x_1^2}{4}-2\sqrt{3}x_1+4}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1,$$

同理 $|FB|=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2$，…………………………………………………………………………………… 14 分

设 $M(x_0, y_0)$，显然 M 在线段 AB 的延长线或反向延长线上，

所以 $\left|\frac{MA}{MB}\right| = \frac{2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1}{2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2} = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2}$，…………………………………………………………………………15 分

所以 $(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1)x_0 - 2x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1x_2 = (2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2)x_0 - 2x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1x_2$，

$\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1)x_0 = 2(x_2 - x_1)$，得 $x_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$……………………………………………………………………16 分

所以点 P 的轨迹为直线 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$，故 F 到 P 的最短距离为 $\frac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$………………………………17 分