

福宁古五校教学联合体 2024-2025 学年第一学期期中质量检测

高二数学试卷

(考试时间: 120 分钟, 试卷总分: 150 分)

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $3x - 4y + 1 = 0$ 的一个方向向量是

- A. $(4, 3)$ B. $(-3, 4)$ C. $(4, -3)$ D. $(3, 4)$

2. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_{11} = 8$, 则 $S_{21} =$

- A. 168 B. 196 C. 200 D. 210

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项都是正数的数列, 下列说法正确的是

A. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $\{2^{a_n}\}$ 是等差数列

B. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $\{2^{a_n}\}$ 是等比数列

C. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $\{2^{a_n}\}$ 是等比数列

D. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $\{2^{a_n}\}$ 是等差数列

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - 10n + 10$, 下列说法正确的是

A. 数列从第 3 项起各项数值逐渐增大

B. 当 $n=5$ 时, a_n 取最大值

C. -14 是该数列的项

D. 数列 $\{a_n\}$ 的图象与 $f(x) = x^2 - 10x + 10 (x \in \mathbb{R})$ 的图象相同

5. 圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 11$ 的位置关系为

- A. 外离 B. 相交 C. 外切 D. 内切

6. 已知直线 $y = x \cos \theta + 1$, 则这条直线的倾斜角 α 的取值范围是

- A. $[0, \pi]$ B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ C. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ D. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

7. 已知直线 $l: y - 2 = k(x - 1)$ 将圆 $x^2 + y^2 = 9$ 分成面积分别为 S_1, S_2 的两个部分, 当 $|S_1 - S_2|$ 的值取最大时, k 的值为

- A. 0 B. 2 C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{2}$

8. 一个弹力球从 1m 高处自由落下，每次着地后又弹回到原来高度的 $\frac{4}{5}$ 处，那么在第 n 次着地后，它经过的总路程超过 5m，则 n 的最小值是

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每题的选项中有 2 项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，选错得 0 分。

9. 已知直线 $l_1: (a-2)x+3y+a=0$ ， $l_2: ax+3(a-2)y-3=0$ ，则下列说法正确的是

A. 若 l_1 满足在 x 轴上的截距与在 y 轴上的截距相等，则 $a=5$

B. l_2 必过定点 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

C. 若 $l_1 \parallel l_2$ ，则 $a=1$ 或 4

D. 若 $l_1 \perp l_2$ ，则 $a=2$

10. 已知圆 $M: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ ，点 $N(m, n)$ ，直线 $l: mx + ny - r^2 = 0 (m, n \text{ 不全为 } 0)$ ，

则下列说法正确的是

A. 若 l 与圆 M 相切，则 N 点在 l 上 B. 若 l 与圆 M 相交，则 N 点在 l 外

C. 若 l 与圆 M 相离，则 N 点在 M 内 D. 若 l 与圆 M 相离，则 N 点在 M 外

11. 斐波那契数列又称“兔子数列”，在现代物理、化学等领域都有着广泛的应用。斐波那契数列 $\{a_n\}$ 可以用如下方法定义： $F_1 = F_2 = 1$ ， $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*)$ 。则

A. $F_{12} = 145$

B. $F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$

C. $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ D. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 直线 $x - y - 1 = 0$ 与直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离是_____。

13. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 与 x 轴交于 A, B 两点（点 A 在点 B 的左边），动点 C 满足

$|CA| = \sqrt{2}|CB|$ ，则 $\triangle CAB$ 的面积最大值为_____。

14. 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 x, y 都有 $f(xy) = f(x) + f(y) - t$ (t 为常数)，

且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = t + 1$ ，设 $a_n = f(2^n)$ ，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，当且仅当 $n = 4$ 时， S_n 取到最大值，则 t 的取值范围是_____。

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (本题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2$ ，其中 $n \in N^*$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若对于任意正整数 n ，都有 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} \leq \lambda$ ，求实数 λ 的最小值。

16. (本题满分 15 分)

已知直线 l 过点 $A(-3, 2)$ ，且 l 的一个法向量是 $(4, 3)$ 。

(1) 求直线 l 的方程；

(2) 若直线 l 与 y 轴交于点 C ，将直线 AC 绕着点 A 逆时针旋转 90° ，点 C 所对应的点为 D ，求直线 AD 的方程；

(3) 在 (2) 的条件下，求 $\angle CAD$ 的角平分线所在的直线方程。

17. (本题满分 15 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 3^{n-1}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n = na_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

18. (本题满分 17 分)

已知直线 $l: y = k(x+1) (k \neq 0)$ 和圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 交于 A 、 B 两点.

(1) 当 $k=1$ 时, 求直线 l 被圆 C 所截得的弦长 $|AB|$;

(2) 探究: x 轴的负半轴上是否存在一个定点 M , 使得 x 轴平分 $\angle AMB$, 如果有, 求出 M 点坐标, 如果没有, 说明理由.

19. (本题满分 17 分)

定义: 对于数列 $\{a_n\}$ 若存在常数 t , 对任意的 $n \in N^*$ 都有

$|a_{n+1} - a_n| + |a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_2 - a_1| \leq t$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为和谐数列.

(1) 已知数列 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 判断 $\{a_n\}$ 是否为和谐数列, 并说明理由;

(2) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明: 若 $\{S_n\}$ 是和谐数列, 则 $\{a_n\}$ 也是和谐数列;

(3) 若 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是和谐数列, 证明 $\{a_n b_n\}$ 也是和谐数列.