2024 届高中毕业班适应性练习卷
数学参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 40 分．

1．B　2．D　3．A　4．C　5．A　6．C　7．B　8．B

二、选择题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题 6 分，满分 18 分．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．AD　10．ABD　11．BCD

三、填空题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 15 分．

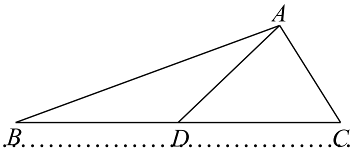
12．0.2718　13．56π；80π（仅答对一空给 3 分）　14．$\dfrac{\sqrt{73}}{5}$

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 本小题主要考查正弦定理、余弦定理等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想、数形结合思想等，考查数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性和综合性．满分 13 分．

解法一：（1）由 $\angle DAC+\angle BAC=\pi$，可得 $\sin\angle BAC=\sin\angle DAC$．……1 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，……3 分



所以 $AB=\dfrac{BC\sin C}{\sin\angle BAC}$．

在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}$，……5 分

所以 $AD=\dfrac{CD\sin C}{\sin\angle DAC}$．

故 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{CD}$．……6 分

因为 D 为 BC 的中点，所以 $\dfrac{BC}{CD}=2$，即 $\dfrac{AB}{AD}=2$．……7 分

（2）由（1）不妨设 $AD=x$，$AB=2x$，$AC=y$，$BC=2\sqrt{2}y$．……8 分

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得 $\cos C=\dfrac{(\sqrt{2}y)^2+y^2-x^2}{2\times\sqrt{2}y\times y}$．……9 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $\cos C=\dfrac{(2\sqrt{2}y)^2+y^2-(2x)^2}{2\times 2\sqrt{2}y\times y}$．……10 分

所以 $\dfrac{(2\sqrt{2}y)^2+y^2-(2x)^2}{2\times 2\sqrt{2}y\times y}=\dfrac{(\sqrt{2}y)^2+y^2-x^2}{2\times\sqrt{2}y\times y}$．……11 分

解得 $x^2=\dfrac{3}{2}y^2$．……12 分

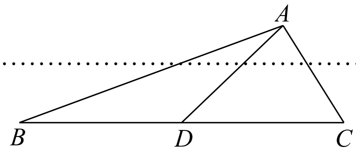
故 $\cos C=\dfrac{3y^2-x^2}{2\sqrt{2}y^2}=\dfrac{3y^2-\frac{3}{2}y^2}{2\sqrt{2}y^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$. ……………………………………………………13 分

解法二：（1）由 $\angle DAC+\angle BAC=\pi$，得 $\sin\angle BAC=\sin\angle DAC$. ……………………………………1 分

因为 D 为 BC 的中点，所以 $\dfrac{BC}{CD}=2$，所以 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}=2$. ……………………………………3 分

又因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC$， ……………………………………4 分

$S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle DAC$， ……………………………………5 分



所以 $\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC}{\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle DAC}=2$， ……………………………………6 分

故 $\dfrac{AB}{AD}=2$. ……………………………………7 分

（2）由（1）不妨设 $AD=x$，$AB=2x$，$AC=y$，$BC=2\sqrt{2}y$. ……………………………………8 分

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle ADB=\dfrac{x^2+(\sqrt{2}y)^2-(2x)^2}{2\times x\times\sqrt{2}y}$， ……………………………………9 分

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle ADC=\dfrac{x^2+(\sqrt{2}y)^2-y^2}{2\times x\times\sqrt{2}y}$， ……………………………………10 分

因为 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$.

所以 $\dfrac{x^2+(\sqrt{2}y)^2-(2x)^2}{2\times x\times\sqrt{2}y}+\dfrac{x^2+(\sqrt{2}y)^2-y^2}{2\times x\times\sqrt{2}y}=0$， ……………………………………11 分

解得 $x^2=\dfrac{3}{2}y^2$. ……………………………………12 分

故 $\cos C=\dfrac{y^2+(\sqrt{2}y)^2-x^2}{2\times y\times\sqrt{2}y}=\dfrac{3y^2-\frac{3}{2}y^2}{2\sqrt{2}y^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$. ……………………………………13 分

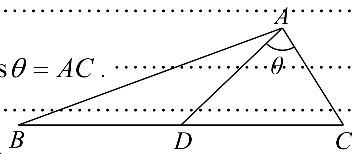
解法三：（1）设 $\angle DAC=\theta$.由 $\angle DAC+\angle BAC=\pi$，得 $\angle BAC=\pi-\theta$，所以 $\angle BAD=\pi-2\theta$. ………… 1 分

因为 D 为 BC 的中点，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$， ……………………………………2 分

所以 $\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin(\pi-2\theta)=\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin\theta$， ……………………………………3 分

即 $AB\sin 2\theta=AC\sin\theta$.因为 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，所以 $2AB\cos\theta=AC$. ……………………4 分

因为 $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，所以 $4\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. ……………………5 分



即 $4|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+4|\overrightarrow{AB}|^2\cos^2\theta+4|\overrightarrow{AB}|\cdot(|\overrightarrow{AB}|\cos\theta)\cos(\pi-\theta)$. ……………………6 分

所以 $2|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$，即 $\dfrac{AB}{AD}=2$. ……………………………………7 分

（2）由（1）不妨设 $AD=x$，$AB=2x$，$AC=y$，$BC=2\sqrt{2}y$. ……………………………………8 分

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得 $\cos\theta=\dfrac{y^2+x^2-(\sqrt{2}y)^2}{2\times y\times x}$. ……………………………………9 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $\cos(\pi-\theta)=\dfrac{(2x)^2+y^2-(2\sqrt{2}y)^2}{2\times 2x\times y}$. ……………………………………10 分

所以$\cos\theta+\cos(\pi-\theta)=\dfrac{y^2+x^2-(\sqrt{2}y)^2}{2\times y\times x}+\dfrac{(2x)^2+y^2-(2\sqrt{2}y)^2}{2\times 2x\times y}=0$. ……………………………… 11 分

解得$x^2=\dfrac{3}{2}y^2$. ……………………………………………………………………………… 12 分

故$\cos C=\dfrac{y^2+(\sqrt{2}y)^2-x^2}{2\times y\times\sqrt{2}y}=\dfrac{3y^2-\frac{3}{2}y^2}{2\sqrt{2}y^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$. ……………………………………………………… 13 分

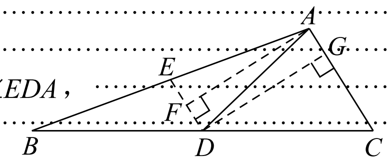
解法四：（1）取AB中点E，连结DE. ………………………………………………………………… 1 分

又D为BC中点，所以$DE//AC$，…………………………………………………………… 2 分

所以$\angle BAC+\angle DEA=\pi$，$\angle DAC=\angle EDA$. ……………………………………… 4 分

又$\angle DAC+\angle BAC=\pi$，所以$\angle DAC=\angle DEA$，故$\angle DEA=\angle EDA$，……………… 5 分

所以$AE=AD$. ……………………………………………………………………………… 6 分



又$AB=2AE$，故$\dfrac{AB}{AD}=2$. ……………………………………………………………………… 7 分

（2）不妨设$AC=y$，$BC=2\sqrt{2}y$.

过A作$AF\perp DE$于点F，过D作$DG\perp AC$于点G. …………………………………… 8 分

又$DE//AC$，所以$DE=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{y}{2}$，且$AF\perp AC$，………………………………… 9 分

所以四边形$AFDG$为矩形.

因为$AE=AD$，所以$DF=\dfrac{1}{2}DE=\dfrac{y}{4}$. ……………………………………………………… 10 分

所以$AG=DF=\dfrac{y}{4}$，所以$CG=\dfrac{3y}{4}$. ……………………………………………………… 11 分

又$CD=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{2}y$，……………………………………………………………………… 12 分

所以$\cos C=\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{\frac{3y}{4}}{\sqrt{2}y}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$. ……………………………………………………………… 13 分

16．本小题主要考查递推数列、等差数列、等比数列及数列求和等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 15 分．

解法一：（1）因为$a_{n+1}^2-a_n^2=8n$，$a_1=1$，$a_n>0$，

所以，当$n=1$时，$a_2^2-a_1^2=8$，$a_2^2=a_1^2+8=9$，所以$a_2=3$． ………………………… 1 分

当$n=2$时，$a_3^2-a_2^2=8\times 2$，$a_3^2=a_2^2+16=25$，所以$a_3=5$． ………………………… 2 分

当$n\geqslant 2$时，$a_n^2=(a_n^2-a_{n-1}^2)+(a_{n-1}^2-a_{n-2}^2)+\cdots+(a_2^2-a_1^2)+a_1^2$ ………………… 3 分

$=8(n-1)+8(n-2)+\cdots+8\times 1+1$ ……………………………………………… 4 分

$=8[1+2+\cdots+(n-1)]+1$

$=8\times\dfrac{n(n-1)}{2}+1$ …………………………………………………………………… 5 分

$=(2n-1)^2$，…………………………………………………………………………… 6 分

所以$a_n=2n-1$. ……………………………………………………………………………… 7 分

当$n=1$时，$a_1=1$也符合上式.

综上，$a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………………………………………… 8 分

（2）由（1）得 $b_n=\begin{cases}2n-1, n为奇数,\\ 2^{\frac{2n-1+1}{4}}, n为偶数,\end{cases}$ 即 $b_n=\begin{cases}2n-1, n为奇数,\\ 2^{\frac{n}{2}}, \quad n为偶数.\end{cases}$ ……………………………… 9 分

记 $S=b_1b_2+b_3b_4+b_5b_6+\cdots+b_{15}b_{16}$.

则 $S=1\times2^1+5\times2^2+9\times2^3+\cdots+25\times2^7+29\times2^8$ ①， ……………………………… 11 分

$2S=\qquad 1\times2^2+5\times2^3+\cdots+21\times2^7+25\times2^8+29\times2^9$ ②， ……………………………… 12 分

① − ②，得 $-S=1\times2^1+4\times2^2+4\times2^3+\cdots+4\times2^8-29\times2^9=2+4\times\dfrac{2^2\times(1-2^7)}{1-2}-29\times2^9=-12814$，

……………………………………………………………………………………………… 14 分

所以 $S=12814$，

故 $b_1b_2+b_3b_4+b_5b_6+\cdots+b_{15}b_{16}=12814$. ……………………………………………… 15 分

解法二：（1）因为 $a_{n+1}^2-a_n^2=8n$，$a_1=1$，$a_n>0$，

所以，当 $n=1$ 时，$a_2^2-a_1^2=8$，$a_2^2=a_1^2+8=9$，所以 $a_2=3$. ……………………………… 1 分

当 $n=2$ 时，$a_3^2-a_2^2=8\times2$，$a_3^2=a_2^2+16=25$，所以 $a_3=5$. ……………………………… 2 分

因为 $a_{n+1}^2-a_n^2=8n$，

所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=(2n+1)^2-(2n-1)^2$，即 $a_{n+1}^2-(2n+1)^2=a_n^2-(2n-1)^2$. ……………………… 5 分

所以 $a_n^2-(2n-1)^2=a_{n-1}^2-(2n-3)^2=\cdots=a_1^2-1=0$，即 $a_n^2=(2n-1)^2$. ……………………… 7 分

又 $a_n>0$，所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………………………………… 8 分

（2）由（1）得 $b_n=\begin{cases}2n-1, n为奇数,\\ 2^{\frac{2n-1+1}{4}}, n为偶数,\end{cases}$ 即 $b_n=\begin{cases}2n-1, n为奇数,\\ 2^{\frac{n}{2}}, \quad n为偶数.\end{cases}$ ……………………………… 9 分

记 $S=b_1b_2+b_3b_4+b_5b_6+\cdots+b_{15}b_{16}$.

则 $S=1\times2^1+5\times2^2+9\times2^3+13\times2^4+17\times2^5+21\times2^6+25\times2^7+29\times2^8$ ……………… 11 分

$=2+20+72+208+544+1344+3200+7424$ ……………………………………… 14 分

$=12814$.

故 $b_1b_2+b_3b_4+b_5b_6+\cdots+b_{15}b_{16}=12814$. ……………………………………………… 15 分

17．本小题主要考查条件概率、全概率公式、概率的分布列及期望等基础知识，考查数学建模能力、运算求解能力、逻辑推理能力等，考查统计与概率思想、分类与整合思想、函数与方程思想等，考查数学抽象、数学建模和数学运算等核心素养，体现应用性和创新性．满分 15 分．

解法一：（1）依题意，X 的所有可能取值为 $0,1,2$. ……………………………………………… 1 分

设打成 $10:10$ 后甲先发球为事件 A，则乙先发球为事件 $\overline{A}$，且 $P(A)=P(\overline{A})=\dfrac{1}{2}$，

所以 $P(X=0)=P(A)\cdot P(X=0|A)+P(\overline{A})\cdot P(X=0|\overline{A})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$， ………………… 2 分

$P(X=1)=P(A)\cdot P(X=1|A)+P(\overline{A})\cdot P(X=1|\overline{A})=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，… 3 分

$P(X=2)=P(A)\cdot P(X=2|A)+P(\overline{A})\cdot P(X=2|\overline{A})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$. ………………… 4 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$

故 X 的均值为 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{6}$. ……………………………………………… 5 分

（2）设第一局比赛甲获胜为事件B.

则$P(B|X=0)=0$，$P(B|X=1)=P(B)$，$P(B|X=2)=1$. ……………………………………………… 7 分

由（1）知，$P(X=0)=\dfrac{1}{6}$，$P(X=1)=\dfrac{1}{2}$，$P(X=2)=\dfrac{1}{3}$，

由全概率公式，得$P(B)=P(X=0)P(B|X=0)+P(X=1)P(B|X=1)+P(X=2)P(B|X=2)$

$=\dfrac{1}{6}\times 0+\dfrac{1}{2}P(B)+\dfrac{1}{3}$， …………………………………………………………… 9 分

解得$P(B)=\dfrac{2}{3}$，即第一局比赛甲获胜的概率$p_0=\dfrac{2}{3}$. …………………………………………10 分

（3）由（2）知$p_0=\dfrac{2}{3}$，故估计甲每局获胜的概率均为$\dfrac{2}{3}$，

设甲获胜时的比赛总局数为Y，因为每局的比赛结果相互独立，…………………………………12 分

所以$P(Y=3)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$，$P(Y=4)=C_3^1\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{27}$，$P(Y=5)=C_4^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{16}{81}$. ··14 分

故该场比赛甲获胜的概率$P=P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5)=\dfrac{64}{81}$. ……………………………15 分

解法二：（1）同解法一. ……………………………………………………………………………………… 5 分

（2）设第一局比赛甲获胜为事件B，$10:10$后的两球均为甲得分为事件B_1，这两球甲和乙各得1分为事件B_2，易知$B=B_1+BB_2$，事件B_1与事件BB_2互斥.

于是$P(B)=P(B_1)+P(BB_2)=P(B_1)+P(B_2)P(B|B_2)$. ………………………………………… 7 分

当这两球甲和乙各得1分后比赛面临的形势与$10:10$时的形势一致，故$P(B|B_2)=P(B)$.

由（1）知$P(B_2)=P(X=1)=\dfrac{1}{2}$，$P(B_1)=P(X=2)=\dfrac{1}{3}$，所以$P(B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}P(B)$， ……………… 9 分

解得$P(B)=\dfrac{2}{3}$，即第一局比赛甲获胜的概率$p_0=\dfrac{2}{3}$. ……………………………………………10 分

（3）由（2）知$p_0=\dfrac{2}{3}$，故估计甲每局获胜的概率均为$\dfrac{2}{3}$，不妨设打满了 5 局且甲获胜局数为Y，

因为每局的比赛结果相互独立，所以$Y\sim B\left(5,\dfrac{2}{3}\right)$. ……………………………………………12 分

故该场比赛甲获胜的概率为$P=P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5)$

$=C_5^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+C_5^4\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\times\dfrac{1}{3}+C_5^5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5$ ………………………14 分

$=\dfrac{80}{243}+\dfrac{80}{243}+\dfrac{32}{243}=\dfrac{64}{81}$.

所以该场比赛甲获胜的概率为$\dfrac{64}{81}$. ………………………………………………………………………15 分

解法三：（1）同解法一. …………………………………………………………………………………… 5 分

（2）由（1）知$P(X=1)=\dfrac{1}{2}$，$P(X=2)=\dfrac{1}{3}$，由规则知打成$10:10$后必须再打$2n$球才能决出胜负.

设第一局比赛甲获胜为事件B，$10:10$后又打了$2n$球甲获胜为事件B_{2n}，依然平局为事件C_{2n}.

由于各球的比赛结果相互独立，

故$P(C_{2n})=\left(P(X=1)\right)^n=\dfrac{1}{2^n}$，$P(B_{2n+2})=P(X=2)\cdot P(C_{2n})$，$P(B_2)=P(X=2)=\dfrac{1}{3}$. …………… 8 分

所以 $P\left(B_{2n}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$． ………………………………………………………………………… 9 分

由于事件 B_{2n} 之间两两互斥，故 $P(B)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{n}P\left(B_{2n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，

即第一局比赛甲获胜的概率 $p_0=\frac{2}{3}$． ……………………………………………………………10 分

（3）同解法一．……………………………………………………………………………………………15 分

18．本小题主要考查平面与平面垂直的性质定理、直线与平面所成的角、解三角形、空间向量、椭圆的标准方程及直线与椭圆的位置关系等基础知识，考查直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力等，考查数形结合思想、化归与转化思想、分类与整合思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 17 分．

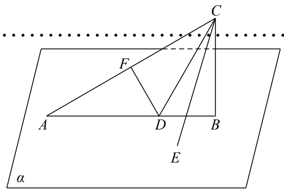
解法一：（1）因为平面 $ABC\perp\alpha$，平面 $ABC\cap\alpha=AB$，$BC\subset$ 平面 ABC，$BC\perp AB$，

所以 $BC\perp\alpha$． ……………………………………………………………………………………… 1 分

所以直线 CD 在 α 内的射影为直线 AB，所以直线 CD 与 α 所成角为 $\angle CDB$． ……………………… 2 分

过 D 作 $DF\perp AC$，垂足为 F．因为 CD 平分 $\angle ACB$，$DB\perp BC$，所以 $DF=DB$．

又 $AD=2DB$，所以 $DF=\frac{1}{2}AD$，所以 $\angle DAF=30^\circ$． ……………………………………………… 3 分

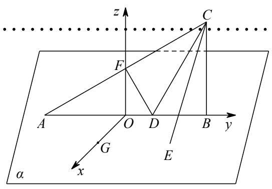


又 $AB=6$，$\angle ABC=90^\circ$，所以 $BC=2\sqrt{3}$．

因为 $DB=\frac{1}{3}AB=2$，所以 $\angle CDB=60^\circ$，

所以直线 CD 与平面 α 所成角为 60°． ……………………………………………………………… 4 分

（2）（i）曲线 Γ 是椭圆． ………………………………………………………………………… 5 分



理由如下：

由（1）可知，$DF\perp AC$，$DA=DC$，所以 F 是 AC 的中点．

设 AB 的中点为 O，所以 $OF/\!/BC$．又 $BC\perp\alpha$，所以 $OF\perp\alpha$．

在 α 内过 O 作 $OG\perp AB$，所以 $OF\perp OB$，$OF\perp OG$．

以 O 为原点，$\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OF}$ 所在的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图所示．因为 $OB=3$，$DB=2$，所以 $OD=1$．

设 $E(x,y,0)$，又 $D(0,1,0)$，$C\left(0,3,2\sqrt{3}\right)$，则 $\overrightarrow{CE}=\left(x,y-3,-2\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(0,-2,-2\sqrt{3}\right)$．

因为 $\cos\angle ECD=\dfrac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|\left|\overrightarrow{CE}\right|}$，又 $\angle ECD=30^\circ$，所以 $\dfrac{-2y+18}{4\sqrt{x^2+(y-3)^2+12}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………… 6 分

化简得 $3x^2+2y^2=18$，即 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$，所以曲线 Γ 是椭圆． ……………………………………… 7 分

（ii）设 $P\left(x_1,y_1,0\right)$，$Q\left(x_2,y_2,0\right)$．

在平面 α 内，因为 l 与 AB 不重合，可设 $l:y=kx+1$，由 $\begin{cases}y=kx+1,\\3x^2+2y^2=18,\end{cases}$ 得 $\left(2k^2+3\right)x^2+4kx-16=0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+3}$，$x_1x_2=-\dfrac{16}{2k^2+3}<0$． ………………………………………………… 9 分

由对称性知，若存在定点 T 满足条件，则 T 必在平面 ABC 与 α 的交线 AB 上，故可设 $T(0,t,0)$．10 分

若 $\angle PTC=\angle QTC$，则 $\cos\angle PTC=\cos\angle QTC$，即 $\dfrac{\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TC}}{\left|\overrightarrow{TP}\right|\left|\overrightarrow{TC}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{TQ}\cdot\overrightarrow{TC}}{\left|\overrightarrow{TQ}\right|\left|\overrightarrow{TC}\right|}$．

因为$\overrightarrow{TP}=\left(x_1,y_1-t,0\right)$，$\overrightarrow{TQ}=\left(x_2,y_2-t,0\right)$，$\overrightarrow{TC}=\left(0,3-t,2\sqrt{3}\right)$，

所以$\left(3-t\right)\left(y_1-t\right)\sqrt{x_2^2+\left(y_2-t\right)^2}=\left(3-t\right)\left(y_2-t\right)\sqrt{x_1^2+\left(y_1-t\right)^2}$，……………………………………11分

当$t=3$时，上式恒成立，所以$t=3$符合题意；……………………………………………………12分

当$t\neq 3$时，有$\left(y_1-t\right)\sqrt{x_2^2+\left(y_2-t\right)^2}=\left(y_2-t\right)\sqrt{x_1^2+\left(y_1-t\right)^2}$，

所以$\left(y_1-t\right)^2\left[x_2^2+\left(y_2-t\right)^2\right]=\left(y_2-t\right)^2\left[x_1^2+\left(y_1-t\right)^2\right]$，所以$\left|x_2\left(y_1-t\right)\right|=\left|x_1\left(y_2-t\right)\right|$.

因为$x_1x_2<0$，$\left(y_1-t\right)\left(y_2-t\right)\geqslant 0$，所以$x_1\left(y_2-t\right)+x_2\left(y_1-t\right)=0$，………………………14分

所以$2kx_1x_2+(1-t)\left(x_1+x_2\right)=0$，所以$2k\left(-\dfrac{16}{2k^2+3}\right)+(1-t)\left(-\dfrac{4k}{2k^2+3}\right)=0$，即$\left(9-t\right)k=0$.

因为上式对于任意的$k\in\mathbf{R}$恒成立，所以$t=9$. ……………………………………………………16分

综上，存在点T满足$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}$，或$\overrightarrow{AT}=2\overrightarrow{AB}$时，符合题意. …………………………17分

解法二：（1）同解法一. ……………………………………………………………………………4分

（2）（i）同解法一. ……………………………………………………………………………7分

（ii）设$P\left(x_1,y_1,0\right)$，$Q\left(x_2,y_2,0\right)$.

在平面α内，因为l与AB不重合，可设$l:y=kx+1$，由$\begin{cases}y=kx+1,\\3x^2+2y^2=18,\end{cases}$得$\left(2k^2+3\right)x^2+4kx-16=0$，

所以$x_1+x_2=-\dfrac{4k}{2k^2+3}$，$x_1x_2=-\dfrac{16}{2k^2+3}<0$. ……………………………………………9分

由对称性知，若存在定点T满足条件，则T必在平面ABC与α的交线AB上，故可设$T\left(0,t,0\right)$. 10分

当T与B重合时，因为$CT\perp\alpha$，又PT，$QT\subset\alpha$，所以$\angle PTC=\angle QTC=\dfrac{\pi}{2}$.

所以当$t=3$时，符合题意；……………………………………………………………………11分

当T与B不重合时，过B作$BP_1\perp PT$，$BQ_1\perp QT$，垂足分别为P_1，Q_1.

连接CP_1，CQ_1，则因为$BC\perp\alpha$，$P_1T\subset\alpha$，所以$P_1T\perp BC$.

又$P_1T\perp BP_1$，$BP_1\cap BC=B$，所以$P_1T\perp$平面BCP_1，

所以$P_1T\perp CP_1$，同理$Q_1T\perp CQ_1$. ……………………………………………………12分

又$\angle P_1TC=\angle Q_1TC$，所以$\triangle P_1TC\cong\triangle Q_1TC$，所以$P_1T=Q_1T$.

所以$\mathrm{Rt}\triangle BP_1T\cong\mathrm{Rt}\triangle BQ_1T$，所以直线$BT$平分$\angle PTQ$.

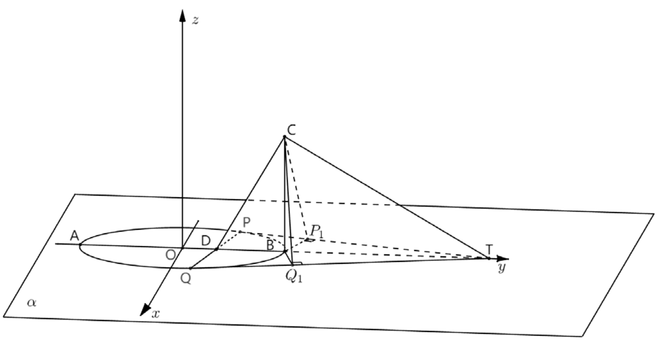
又BT在y轴上，所以在平面α内直线PT，QT的倾斜角互补. ……………………………14分

在平面α内，设直线PT，QT的斜率分别为k_1，k_2，

则$k_1+k_2=\dfrac{y_1-t}{x_1}+\dfrac{y_2-t}{x_2}=2k+\left(1-t\right)\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2k+\left(1-t\right)\dfrac{k}{4}=\dfrac{k}{4}\left(9-t\right)=0$对于任意的$k\in\mathbf{R}$恒成立，

所以$t=9$. ……………………………………………………………………………………16分

综上，存在点T满足$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}$，或$\overrightarrow{AT}=2\overrightarrow{AB}$时，符合题意. …………………………17分



19．本小题主要考查集合、函数的零点、导数、数列和不等式等基础知识，考查逻辑推理能力、直观想象能力、运算求解能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想和特殊与一般思想等，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 17 分．

解法一：（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}\ln x+1$，其定义域为 $(0,+\infty)$．

由 $f(x)=x$ 得，$\frac{1}{2}\ln x-x+1=0$．设 $g(x)=\frac{1}{2}\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\frac{1-2x}{2x}$．……………………… 1 分

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$；

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 单调递增；在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递减．……………………………………………… 2 分

注意到 $g(1)=0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恰有一个零点 $x=1$，且 $g\left(\frac{1}{2}\right)>g(1)=0$，

又 $g\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=-\mathrm{e}^{-2}<0$，所以 $g\left(\mathrm{e}^{-2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 恰有一个零点 x_0，

即 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恰有一个不动点 $x=1$，在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 恰有一个不动点 $x=x_0$，……………………… 4 分

所以 $A=\{x_0,1\}$，所以 A 的元素个数为 2．又因为 $x_0<1$，所以 $\max A=1$．……………………… 5 分

（2）（i）当 $a=0$ 时，由（1）知，A 有两个元素，不符合题意；……………………………………… 6 分

当 $a>0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}\ln x+ax^2+1-a$，其定义域为 $(0,+\infty)$．由 $f(x)=x$ 得，$\frac{1}{2}\ln x+ax^2-x+1-a=0$．

设 $h(x)=\frac{1}{2}\ln x+ax^2-x+1-a$，则 $h'(x)=\frac{1}{2x}+2ax-1=\frac{4ax^2-2x+1}{2x}$．……………………… 7 分

设 $F(x)=4ax^2-2x+1$，则 $\Delta=4-16a$．

①当 $a\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$\Delta\leqslant0$，$F(x)\geqslant0,h'(x)\geqslant0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增．

又 $h(1)=0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恰有一个零点 $x=1$，

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恰有一个不动点 $x=1$，符合题意；……………………………………………… 8 分

②当 $0<a<\frac{1}{4}$，$\Delta>0$，故 $F(x)$ 恰有两个零点 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$．

又因为 $F(0)=1>0,F(1)=4a-1<0$，所以 $0<x_1<1<x_2$．

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$F(x)>0,h'(x)>0$；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$F(x)<0,h'(x)<0$；

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$F(x)>0,h'(x)>0$；

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递增，在 (x_1,x_2) 单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 单调递增；……………………… 9 分

注意到 $h(1)=0$，所以 $h(x)$ 在 (x_1,x_2) 恰有一个零点 $x=1$，且 $h(x_1)>h(1)=0,h(x_2)<h(1)=0$，

又 $x\to0$ 时，$h(x)\to-\infty$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_1)$ 恰有一个零点 x_0'，

从而 $f(x)$ 至少有两个不动点，不符合题意；

所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$，即集合 $B=\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$．……………………………………………10 分

（ii）由（i）知，$B=\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$，所以 $a=\min B=\frac{1}{4}$，……………………………………………11 分

此时，$f(x)=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$，$h(x)=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2-x+\frac{3}{4}$，由（i）知，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

所以，当 $x>1$ 时，$h(x)>h(1)=0$，所以 $f(x)>x$，即 $\frac{f(x)}{x}>1$，…………………………………12 分

故若 $a_n>1$，则 $a_{n+1}>1$，因此，若存在正整数 N 使得 $a_N\leqslant 1$，则 $a_{N-1}\leqslant 1$，从而 $a_{N-2}\leqslant 1$，

重复这一过程有限次后可得 $a_1\leqslant 1$，与 $a_1=2$ 矛盾，从而，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>1$．…………………13 分

下面我们先证明当 $x>1$ 时，$\ln x<\frac{3}{2}(x-1)$．设 $G(x)=\ln x-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$，

则当 $x>1$ 时，$G'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{2}=\frac{2-3x}{2x}<0$，所以 $G(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

所以 $G(x)<G(1)=0$，即当 $x>1$ 时，$\ln x<\frac{3}{2}(x-1)$，

从而当 $x>1$ 时，$\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}-x<\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x$，

从而 $\frac{\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}}{x}-1<\frac{1}{4}(x-1)$，即 $\frac{f(x)}{x}-1<\frac{1}{4}(x-1)$，…………………………15 分

故 $\frac{f(a_n)}{a_n}-1<\frac{1}{4}(a_n-1)$，即 $a_{n+1}-1<\frac{1}{4}(a_n-1)$，由于 $a_n>1$，$a_{n+1}>1$，所以 $a_n-1>0$，$a_{n+1}-1>0$，

故 $|a_{n+1}-1|<\frac{1}{4}|a_n-1|$，故 $n\geqslant 2$ 时，$|a_n-1|<\frac{1}{4}|a_{n-1}-1|<\frac{1}{4^2}|a_{n-2}-1|<\cdots<\frac{1}{4^{n-1}}|a_1-1|=\frac{1}{4^{n-1}}$．………16 分

所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\sum_{k=1}^{n}|a_k-1|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^{k-1}}=\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)<\frac{4}{3}$，故 $\max C_n=\frac{4}{3}$．…………………17 分

解法二：（1）同解法一．……………………………………………………………………………………5 分

（2）（i）当 $x=1$ 时，$\frac{1}{2}\ln x+ax^2+1-a=1=x$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个不动点；…………………6 分

当 $x\neq 1$ 时，由 $\frac{1}{2}\ln x+ax^2+1-a=x$，得 $a=\frac{\frac{1}{2}\ln x-x+1}{1-x^2}$（*），

要使得 A 恰有一个元素，即方程 $\frac{1}{2}\ln x+ax^2+1-a=x$ 有唯一解，因此方程（*）无实数解，

即直线 $y=a$ 与曲线 $y=\frac{\frac{1}{2}\ln x-x+1}{1-x^2}$ 无公共点．………………………………………………7 分

令 $m(x)=\frac{\frac{1}{2}\ln x-x+1}{1-x^2}$，则 $m'(x)=\frac{x\left(-x+\ln x+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$．令 $n(x)=-x+\ln x+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}(x>0)$，

则 $n'(x)=-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^3+x^2+x-1}{x^3}=\frac{-(x-1)^2(x+1)}{x^3}\leqslant 0$，

所以 $n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，又因为 $n(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$n(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$n(x)<0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$m'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，

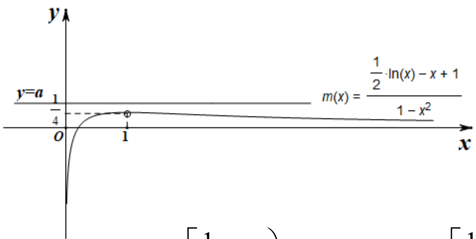
所以 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，…………………………………………8 分

令 $m_1(x)=\dfrac{x-1-\frac{1}{2}\ln x}{x+1}$，则 $m_1(1)=0$，$m_1'(x)=\dfrac{\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}}{(x+1)^2}$，

则 $\lim\limits_{x\to1}m(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{2}\ln x-x+1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{x-1-\frac{1}{2}\ln x}{x+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m_1(x)-m_1(1)}{x-1}=m_1'(1)=\dfrac{1}{4}$.

又因为当 $x\to0$ 时，$m(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$m(x)\to0$，

所以曲线 $y=m(x)$ 的大致图象如图所示：



由图可知，$a\geqslant\dfrac{1}{4}$，所以 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$，即集合 $B=\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$. ……………………………10 分

（ii）由（i）知，$B=\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$，所以 $a=\min B=\dfrac{1}{4}$， ……………………………………………………11 分

此时，$f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}$. 令 $\varphi(x)=\dfrac{\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}}{x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{x^2-2\ln x-1}{4x^2}$.

令 $t(x)=x^2-2\ln x-1$，当 $x>1$ 时，$t'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x^2-1)}{x}>0$，所以 $t(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

所以当 $x>1$ 时，$t(x)>t(1)=0$，所以 $\varphi'(x)>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $\varphi(x)>\varphi(1)=1$， ……………………………………………12 分

故若 $a_n>1$，则 $a_{n+1}>1$，因此，若存在正整数 N 使得 $a_N\leqslant1$，则 $a_{N-1}\leqslant1$，从而 $a_{N-2}\leqslant1$，

重复这一过程有限次后可得 $a_1\leqslant1$，与 $a_1=2$ 矛盾，从而，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>1$. ……………………13 分

下面先证明当 $x>1$ 时，$\ln x<\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$. 令 $g(x)=\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})-\ln x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{x^2})-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{2x^2}\geqslant0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以当 $x>1$ 时，$g(x)>g(1)=0$，所以当 $x>1$ 时，$\ln x<\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$.

所以 $\dfrac{f(x)}{x}-1=\dfrac{\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}-x}{x}<\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}-x}{x}=\dfrac{(x-1)^3}{4x^2}<\dfrac{1}{4}(x-1)$， ……………15 分

由于 $a_n>1$，$a_{n+1}>1$，所以 $a_n-1>0$，$a_{n+1}-1>0$，故 $\dfrac{f(a_n)}{a_n}-1<\dfrac{1}{4}(a_n-1)$，即 $a_{n+1}-1<\dfrac{1}{4}(a_n-1)$，

故 $|a_{n+1}-1|<\dfrac{1}{4}|a_n-1|$，故 $n\geqslant2$ 时，$|a_n-1|<\dfrac{1}{4}|a_{n-1}-1|<\dfrac{1}{4^2}|a_{n-2}-1|<\cdots<\dfrac{1}{4^{n-1}}|a_1-1|=\dfrac{1}{4^{n-1}}$. ………16 分

所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k-1|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4^{k-1}}=\dfrac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)<\dfrac{4}{3}$，故 $\max C_n=\dfrac{4}{3}$. ……………………………17 分

解法三：（1）同解法一. ………………………………………………………………………………………5 分

（2）（i）同解法一. ………………………………………………………………………………………10 分

（ii）同解法一得，$\forall n\in \mathbf{N}^*$，$a_n>1$. ……………………………………………………………………13 分

下面我们先证明当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$. 设 $G(x)=\ln x-x+1$，则当 $x>1$ 时，$G'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}<0$，

所以 $G(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，所以 $G(x)<G(1)=0$，即 $\ln x<x-1$，

从而当 $x>1$ 时，$\dfrac{1}{2}\ln x<\dfrac{1}{2}(x-1)<\dfrac{3}{4}(x-1)$，于是 $\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}-x<\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}x$，

从而 $\dfrac{\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}}{x}-1<\dfrac{1}{4}(x-1)$，即 $\dfrac{f(x)}{x}-1<\dfrac{1}{4}(x-1)$，……………………………………15 分

故 $\dfrac{f(a_n)}{a_n}-1<\dfrac{1}{4}(a_n-1)$，即 $a_{n+1}-1<\dfrac{1}{4}(a_n-1)$，由于 $a_n>1$，$a_{n+1}>1$，所以 $a_n-1>0$，$a_{n+1}-1>0$，

故 $|a_{n+1}-1|<\dfrac{1}{4}|a_n-1|$，故 $n\geqslant 2$ 时，$|a_n-1|<\dfrac{1}{4}|a_{n-1}-1|<\dfrac{1}{4^2}|a_{n-2}-1|<\cdots<\dfrac{1}{4^{n-1}}|a_1-1|=\dfrac{1}{4^{n-1}}$. ………16 分

所以 $\forall n\in \mathbf{N}^*$，$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k-1|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4^{k-1}}=\dfrac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)<\dfrac{4}{3}$，故 $\max C_n=\dfrac{4}{3}$. ………………………17 分