福宁古五校教学联合体2023-2024学年第二学期期中质量监测

高二数学试题

（满分150分，120分钟完卷）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将姓名、座号、考场、班级填写在答题卡上．

2．选择题用2B铅笔将答案涂在答题卡上，非选择题将答案写在答题卡上．

3．考试结束，考生只将答题卡交回，试卷自己保留．

一、单项选择题:本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的选项中，有且仅有一个选项是正确的．

1．已知 $\vec{a}=(1,m,3),\vec{b}=(2,4,n)$ 且 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $m+n=$（　　）．

A．4　　B．6　　C．8　　D．10

2．已知 $f(x)=x^3-ax$ 在 $[1,2]$ 上递增，则实数 a 的范围是（　　）．

A．$a>3$　　B．$a\ge 3$　　C．$a<3$　　D．$a\le 3$

3．已知 $\vec{a}=(0,1,1),\vec{b}=(0,0,1)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为（　　）．

A．$(1,0,0)$　　B．$(0,0,1)$　　C．$(0,1,0)$　　D．$(0,1,1)$

4．已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=\ln x+x^2f'(1)$，则 $f'(1)=$（　　）．

A．$-\mathrm{e}$　　B．e　　C．-1　　D．1

5．在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 A_1B_1，C_1D_1 的中点，则 BE 与 DF 所成角的余弦值为（　　）．

A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{4}{5}$

6．设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导数 $f'(x)$，满足 $f'(x)+f(x)>0$，且有 $f(2)=2$，$\mathrm{e}^{x-2}f(x)>2$ 的解集为（　　）．

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,2)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(2,+\infty)$

7．在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若点 P 是棱上一点（含顶点），则满 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=-1$ 的点 P 的个数为（　　）．

A．8　　B．12　　C．18　　D．24

8．已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-bx+c(a,b,c\in R)$，若不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x\,|\,x<m,且x\ne n\}$，且 $m-n=1$，则函数 $f(x)$ 的极小值为（　　）．

A．$\frac{1}{4}$　　B．$-\frac{4}{27}$　　C．0　　D．$-\frac{4}{9}$

二、多项选择题:本题共3小题，每小题6分，共18分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．下列运算正确的有（　　）．

A．$\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)'=\cos\frac{\pi}{6}$　　B．$\left[\ln(3x+1)\right]'=\frac{3}{3x+1}$　　C．$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$　　D．$\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'=\mathrm{e}^{-x}$

10．已知函数 $f(x)=(x^2-3)\mathrm{e}^x$，则（　　）．

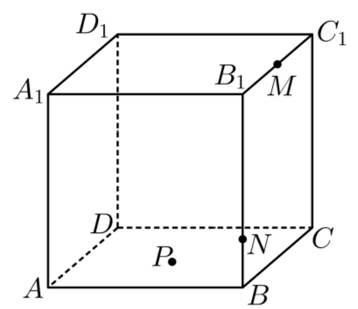
A．函数 $f(x)$ 在点 $(0,-3)$ 处的切线方程是 $3x+y+3=0$

B．函数 $f(x)$ 的递减区间为 $(-3,1)$

C．函数 $f(x)$ 存在最大值和最小值

D．函数 $f(x)=a$ 有三个实数解，则 $a\in(0,6e^{-3})$

11．如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 B_1C_1 边的中点，点 P 在底面 $ABCD$ 内运动（包括边界），则下列说法正确的有（　　）．



A．不存在点 P，使得 $D_1P\perp AD_1$

B．过三点 A_1,M,D_1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面面积为 $\frac{8}{9}$

C．四面体 A_1C_1BD 的内切球的表面积为 $\frac{\pi}{3}$

D．点 N 在棱 BB_1 上，且 $B_1N=4NB$，若 $D_1P\perp NP$，则点 P 的轨迹是圆

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．已知$\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(-4,2,x)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$x=$________.

13．在四面体$OABC$中，M是棱OA上靠近A的三等分点，N,P分别是BC，MN的中点，设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则$x+y+z=$________.

14．已知曲线$C_1: y=\mathrm{e}^x$和$C_2: y^2=4x$，点M,N分别在曲线C_1,C_2上，记点N的横坐标为N_x，则$|MN|+N_x$的最小值为________.

四、解答题：共 77 分．解答应写出必要文字、证明过程或演算步骤.

15．（13 分）

已知$\vec{u}=(3,a+b,a-b)$是直线l的方向向量，$\vec{n}=(1,2,3)$是平面α的法向量.

（1）若$l//\alpha$，求a，b的关系式；

（2）若$l\perp\alpha$，求a，b的值.

16．（15 分）

已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax$（e是自然对数的底数）

（1）若$y=x$是曲线$y=f(x)$的一条切线，求a的值；

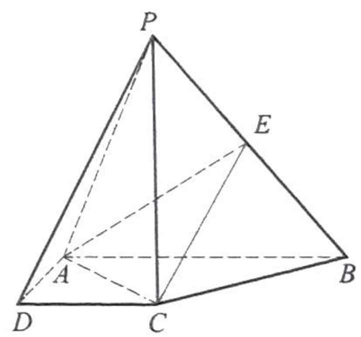
（2）若$f(x)\geq\frac{1}{2}x^2+1$，对$\forall x\geq 1$恒成立，求a的取值范围.

17．（15 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PC\perp$底面$ABCD$，$ABCD$是直角梯形，$AB\perp AD$，$AB//CD$，$AB=2AD=2CD$，E是PB的中点.

（1）求证：平面$EAC\perp$平面PBC；

（2）若二面角$P-AC-E$的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求直线PA与平面EAC所成角的正弦值.



18．（17 分）

“曼哈顿距离”是人脸识别中一种重要的测距方式．其定义为：如果在平面直角坐标系中，点A，B的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，那么称$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$为$A$，$B$两点间的曼哈顿距离.

(1)已知点N_1，N_2分别在直线$x-2y=0$，$2x-y=0$上，点$M(0,2)$与点N_1，N_2的曼哈顿距离分别为$d(M,N_1)$，$d(M,N_2)$，求$d(M,N_1)$和$d(M,N_2)$的最小值；

(2)已知点N是曲线$y=\ln x$上的动点，其中$\frac{1}{\mathrm{e}^6}\leq x\leq \mathrm{e}^2$，点$M(1,1)$与点N的曼哈顿距离$d(M,N)$记为$f(x)$，求$f(x)$的最大值．参考数据$\mathrm{e}\in(2.7,2.8)$

19．（17 分）

已知函数$f(x)=ax+(a-1)\ln x+\frac{1}{x}$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)若关于x的方程$xf(x)=x^2\mathrm{e}^x-x\ln x+1$有两个不相等的实数根$x_1,x_2$，

（ⅰ）求实数a的取值范围；

（ⅱ）求证：$\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_2}+\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_1}>\frac{2a}{x_1x_2}$.