# 福建省部分达标学校2024—2025学年第一学期期中

# 高二数学质量监测参考答案

1. B　令 $y=0$,得 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以直线 $2\sqrt{3}x-2y+3=0$ 在 $x$ 轴上的截距为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. C　因为 $\{a_n\}$ 是周期为4的周期数列,且 $a_1=\frac{1}{2}$,$a_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a_3=-\frac{1}{2}$,$a_4=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$S_4=0$,所以 $S_{2\,025}=a_1=\frac{1}{2}$.

3. B　设直线 $l$ 的斜率为 $k$,则 $k=\frac{m-\sqrt{3}}{2-1}=m-\sqrt{3}$.因为 $l$ 的倾斜角的取值范围是 $[30°,60°]$,所以 $k\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$,故 $m\in\left[\frac{4\sqrt{3}}{3},2\sqrt{3}\right]$.

4. D　因为 $\{a_n\}$ 为等差数列,所以 $S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_1+a_{16})$.
因为 $a_1+a_{16}=a_9+a_8=55$,所以 $S_{16}=8\times55=440$.

5. C　圆 $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ 的圆心为 $C(4,-2)$,则以 $OC$($O$ 为坐标原点)为直径的圆的圆心为 $(2,-1)$,半径为 $\sqrt{5}$,故所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$.

6. D　圆 $A$ 的圆心为 $(0,3)$,半径为1,点 $(0,3)$ 关于直线 $y=x$ 对称的点为 $(3,0)$,所以圆 $B$ 的方程为 $(x-3)^2+y^2=1$.

7. B　设 $S_3=2t(t\neq0)$,则 $S_6=9t$.因为 $(S_6-S_3)^2=S_3(S_9-S_6)$,所以 $(7t)^2=2t(S_9-9t)$,解得 $S_9=\frac{67}{2}t$,所以 $\frac{S_9}{S_6}=\frac{67}{18}$.

8. C　设 $C$ 关于 $l$ 的对称点为 $C_0(x_0,y_0)$,则 $\begin{cases}3\times\frac{x_0-1}{2}-4\times\frac{y_0+2}{2}-14=0,\\ \frac{y_0-2}{x_0+1}=-\frac{4}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=5,\\ y_0=-6,\end{cases}$ 即 $C_0(5,-6)$,所以 $|CN|+|PN|=|C_0N|+|PN|\geqslant|C_0P|=4\sqrt{2}$,故 $|MN|+|PN|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

9. BCD　设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$,因为 $a_1=1$,所以 $a_n=q^{n-1}$.因为 $a_3,a_2,a_4$ 成等差数列,所以 $q^2+q^3=2q$.因为 $q\neq0$,所以 $q^2+q-2=(q-1)(q+2)=0$.因为 $q\neq1$,所以 $q=-2$.$\{a_n\}$ 的前10项和为 $\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}=-341$.显然 $a_7,a_5,a_6$ 也成等差数列.

10. BCD　因为直线 $l_1/\!/l_2$,所以 $m(m-1)=2$,解得 $m=-1$ 或 $m=2$,经检验都成立,所以“$m$

$=-1$”是“$l_1 /\!/ l_2$”的充分不必要条件，故 A 错误.

因为直线 $l_1 \perp l_2$，所以 $2m+m-1=0$，解得 $m=\dfrac{1}{3}$，所以“$l_1 \perp l_2$”的充要条件是“$m=\dfrac{1}{3}$”，故 B 正确.

因为 $l_1: mx-y-2m=0$，即 $m(x-2)-y=0$，所以 $l_1$ 过定点 $P(2,0)$，故 C 正确.

因为 $l_2: 2x-(m-1)y-6=0$ 过定点 $Q(3,0)$，所以当 $PQ \perp l_2$ 时，点 $P$ 到直线 $l_2$ 的距离的最大值为 $|PQ|=1$，故 D 正确.

11. BD　因为 $\sin\angle CBA=2\sin\angle CAB$，所以 $|CA|=2|CB|$.

设 $C(x,y)$，则 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，整理得 $(x-3)^2+y^2=4$，

所以顶点 $C$ 的轨迹方程为 $(x-3)^2+y^2=4$，且 $y\neq 0$，故 A 错误.

当 $C$ 的坐标为 $(3,\pm 2)$ 时，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2=3$，所以 B 正确.

当 $AC$ 与圆 $E$ 相切时，$B$ 到 $AC$ 的距离最大，

如图 1，作 $BD\perp AC$ 于点 $D$，因为 $\dfrac{|BD|}{|CE|}=\dfrac{|AB|}{|AE|}$，所以 $|BD|=\dfrac{3}{4}\times 2=\dfrac{3}{2}$，

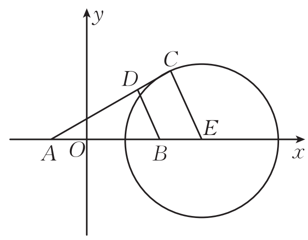

图 1

所以 $AC$ 边上的高的最大值为 $\dfrac{3}{2}$，故 C 错误.

如图 2，当 $\angle ABC_1=90^\circ$ 时，$C_1(2,\sqrt{3})$，此时直线 $BC$ 被圆 $E$ 截得的弦长为 $2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$；

当 $\angle AC_2B=90^\circ$ 时，由 $\begin{cases}\dfrac{y}{x+1}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-1,\\(x-3)^2+y^2=4,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{7}{5},\\y=\pm\dfrac{6}{5},\end{cases}$ 不妨设

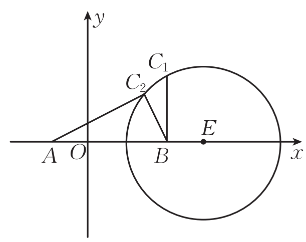

图 2

$C_2\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{6}{5}\right)$，显然当 $C$ 在 $C_2$ 处时，直线 $BC$ 被圆 $E$ 截得的弦长更长，

此时直线 $BC$ 的方程为 $2x+y-4=0$，圆心 $E(3,0)$ 到直线 $BC$ 的距离 $d=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以弦长为 $2\sqrt{4-\dfrac{4}{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$. 故 D 正确.

12. 20 300　因为 $a_1=2, a_2-a_1=3, a_3-a_2=4, \cdots, a_n-a_{n-1}=n+1$，

所以 $a_n=2+3+4+\cdots+n+1=\dfrac{n(n+3)}{2}$，所以 $a_{200}=20\ 300$.

13.(4,5)　由$\begin{cases}(-a)^2+(-2a)^2-4\times5a>0,\\1^2+3^2-a-6a+5a>0,\\a>0,\end{cases}$　得 $a\in(4,5)$.

14.18　因为 $a_{17}+a_{18}+a_{19}=3a_{18}<0$,所以 $a_{18}<0$. 因为 $a_{17}+a_{20}=a_{18}+a_{19}>0$,所以 $a_{19}>0$,所以当 $n=18$ 时,$\{a_n\}$的前 $n$ 项和最小.

15.解:(1)直线 $MN$ 的斜率为$\dfrac{3-(-3)}{-2-4}=-1$, ………………………………………… 2 分

则直线 $MN$ 的方程为 $y-3=-(x+2)$,即 $x+y-1=0$. ……………………………… 4 分

(2)由题意可知圆心 $C$ 为线段 $MN$ 的中点,即 $C(1,0)$, …………………………… 5 分

半径 $r=\sqrt{(-2-1)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$,………………………………………………… 7 分

故所求圆的标准方程为$(x-1)^2+y^2=18$. …………………………………………… 9 分

(3)直线 $CP$ 的斜率为$\dfrac{3-0}{4-1}=1$,则所求切线的斜率为$-1$, ………………………… 10 分

故所求的切线方程为 $y-3=-(x-4)$,即 $x+y-7=0$. ……………………………… 13 分

16.(1)证明:因为 $a_{n-1}a_n+3a_na_{n+1}-4a_{n-1}a_{n+1}=0$,所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{3}{a_{n-1}}-\dfrac{4}{a_n}=0$, ………… 3 分

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}\right)$,所以 $b_n=3b_{n-1}$. ……………………………………… 5 分

因为 $b_1=\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}=3$,所以$\{b_n\}$是首项为 3,公比为 3 的等比数列,

所以 $b_n=3^n$. ……………………………………………………………………………… 7 分

(2)解:由(1)知 $b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3^n$,

所以$\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}=3,\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_2}=3^2,\dfrac{1}{a_4}-\dfrac{1}{a_3}=3^3,\cdots,\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=3^{n-1}$,……………………… 10 分

累加可得$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_1}=3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3(1-3^{n-1})}{1-3}=\dfrac{3^n-3}{2}$. ……………… 13 分

因为 $a_1=1$,所以 $a_n=\dfrac{2}{3^n-1}$. ………………………………………………………… 15 分

17.(1)解:当 $\lambda=2$ 时,圆 $C$:$(x+1)^2+(y+1)^2=52$, ………………………………… 1 分

此时,圆 $C$ 的圆心为 $C(-1,-1)$,半径 $R=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$,……………………………… 3 分

则圆心 $C$ 到直线 $4x-3y-4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-4+3-4|}{5}=1$,……………………………… 4 分

所以直线 $4x-3y-4=0$ 被圆 $C$ 截得的弦长为 $2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{51}$. ………………… 5 分

(2)证明:由 $x^2+\lambda x+y^2+\lambda y=34+8\lambda$,得 $x^2+y^2-34+\lambda(x+y-8)=0$, ………… 7 分

令 $x+y-8=0$,得 $x^2+y^2-34=0$,解得$\begin{cases}x=3,\\y=5\end{cases}$或$\begin{cases}x=5,\\y=3,\end{cases}$ ………………………… 9 分

所以圆 $C$ 经过两个定点,且这两个定点的坐标为$(3,5)$,$(5,3)$. ………………………… 10 分

(3)解:(方法一)设 $PQ$ 的中点为 $N$,则点 $N$ 的坐标为$(4,4)$. ………………………… 11 分

因为$|PM|=|QM|$,所以 $MN\perp PQ$, ………………………… 12 分

所以 $k_{MN}\cdot k_{PQ}=\dfrac{4-(12-\lambda)}{4-\lambda}\cdot\dfrac{5-3}{3-5}=-1$, ………………………… 13 分

解得 $\lambda=6$, ………………………… 14 分

所以圆 $C$ 的标准方程为$(x+3)^2+(y+3)^2=100$. ………………………… 15 分

(方法二)因为$|PM|=|QM|$,所以$\sqrt{(\lambda-5)^2+(12-\lambda-3)^2}=\sqrt{(\lambda-3)^2+(12-\lambda-5)^2}$,

………………………… 11 分

解得 $\lambda=6$, ………………………… 13 分

所以圆 $C$ 的标准方程为$(x+3)^2+(y+3)^2=100$. ………………………… 15 分

18.解:(1)设$\{a_n\}$的公差为 $d(d>0)$,

因为$\{a_n\}$为等差数列,所以 $a_5+a_6=a_3+a_8=35$. ………………………… 1 分

由$\begin{cases}a_3+a_8=35,\\a_3a_8=250,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_3=10,\\a_8=25,\end{cases}$ ………………………… 4 分

所以 $d=\dfrac{a_8-a_3}{8-3}=3$,故 $a_n=a_3+(n-3)\times d=3n+1$. ………………………… 7 分

(2)由(1)知 $a_n\cdot 2^{a_n}=(3n+1)\cdot 2^{3n+1}=(6n+2)\cdot 8^n$. ………………………… 9 分

因为 $T_n=8\times 8+14\times 8^2+20\times 8^3+\cdots+(6n-4)\cdot 8^{n-1}+(6n+2)\cdot 8^n$, ………………………… 11 分

所以 $8T_n=8\times 8^2+14\times 8^3+20\times 8^4+\cdots+(6n-4)\cdot 8^n+(6n+2)\cdot 8^{n+1}$,

两式相减得 $-7T_n=8\times 8+6\times(8^2+8^3+8^4+\cdots+8^n)-(6n+2)\cdot 8^{n+1}$ ………………………… 14 分

$=8\times 8+6\times\dfrac{8^2\times(1-8^{n-1})}{1-8}-(6n+2)\cdot 8^{n+1}=\dfrac{64}{7}-\dfrac{42n+8}{7}\cdot 8^{n+1}$,

故 $T_n=\dfrac{42n+8}{49}\cdot 8^{n+1}-\dfrac{64}{49}$. ………………………… 17 分

19.(1)证明:设 $D(-t,0)$,$G(t,0)$.

$k_2=\dfrac{y_0}{x_0+t}$,$k_3=\dfrac{y_0}{x_0-t}$. ………………………… 2 分

记坐标原点为 $O$,直线 $OQ$ 的斜率为$\dfrac{y_0}{x_0}$,$k_1=-\dfrac{x_0}{y_0}$. ………………………… 3 分

$\dfrac{1}{k_1}\left(\dfrac{1}{k_2}+\dfrac{1}{k_3}\right)=-\dfrac{y_0}{x_0}\left(\dfrac{x_0+t}{y_0}+\dfrac{x_0-t}{y_0}\right)=-2$.

综上，$\frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\right)$为定值，定值为$-2$. ························································ 5分

(2)①解：在$\triangle OAD$中，$AD$为斜边，$OF$为斜边上的中线，所以$|AD|=2|OF|=2r$. ······
································································································· 7分

又因为$|OA|=r$，所以$|OD|=\sqrt{|AD|^2-|OA|^2}=\sqrt{3}r$，$\angle ADE=30°$. ··················· 8分

因为$AD\perp AE$，所以$|AE|=|AD|\tan\angle ADE=\frac{2\sqrt{3}r}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，解得$r=2$. ················ 9分

②证明：因为点$Q(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$在圆$C$上，所以$x_0^2+y_0^2=r^2$. ······················ 10分

直线$AE$的斜率为$-\frac{r}{x_0}$，直线$AD$的斜率为$\frac{x_0}{r}$，·························································· 11分

直线$AD$的方程为$y=\frac{x_0}{r}x+r$. ··························································· 12分

令$y=0$，得$x=-\frac{r^2}{x_0}$，则$D\left(-\frac{r^2}{x_0},0\right)$，$G\left(\frac{r^2}{x_0},0\right)$. ··························································· 13分

直线$QG$的方程为$y=\frac{y_0}{x_0-\frac{r^2}{x_0}}\left(x-\frac{r^2}{x_0}\right)$，即$x_0y_0x+(r^2-x_0^2)y-r^2y_0=0$， ········· 14分

原点$O$到直线$QG$的距离$d=\frac{|-r^2y_0|}{\sqrt{(x_0y_0)^2+(r^2-x_0^2)^2}}=\frac{r^2|y_0|}{\sqrt{(x_0y_0)^2+(y_0^2)^2}}$

$=\frac{r^2|y_0|}{\sqrt{y_0^2(x_0^2+y_0^2)}}=\frac{r^2|y_0|}{r|y_0|}=r$，·························································· 16分

所以直线$QG$与圆$C$相切. ··························································· 17分