

福宁古五校教学联合体 2024-2025 学年第一学期期中质量监测

高三数学试题

(考试时间: 120 分钟, 试卷总分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 **2B** 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内, 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是正确的。

1. 已知集合  $M = \{x | \frac{x-3}{x+1} \leq 0\}$ ,  $Q = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 2\}$ , 则  $M \cap Q =$

- A.  $\{0, 1, 2\}$       B.  $[0, 2]$       C.  $(-2, 2]$       D.  $\{1, 2\}$

2. 某一物质在特殊环境下的温度变化满足:  $T = 15 \ln \frac{w_1 - w_0}{w - w_0}$  ( $T$  为时间, 单位为

min,  $w_0$  为特殊环境温度,  $w_1$  为该物质在特殊环境下的初始温度,  $w$  为该物质在特殊环境下冷却后的温度), 假设一开始该物质初始温度为  $100^\circ\text{C}$ , 特殊环境温度是  $20^\circ\text{C}$ , 则经过 15min, 该物质的温度最接近 (参考数据:  $e \approx 2.72$ )

- A.  $54^\circ\text{C}$       B.  $52^\circ\text{C}$       C.  $50^\circ\text{C}$       D.  $48^\circ\text{C}$

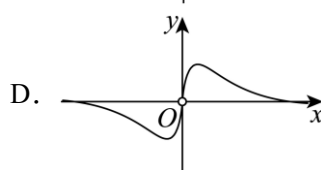
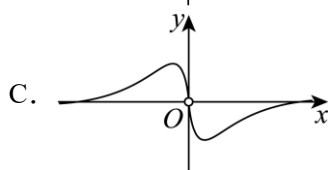
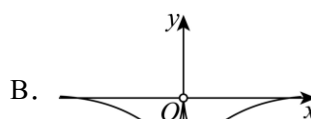
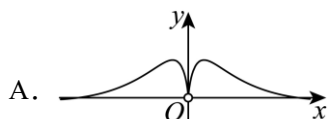
3. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\tan A$ ,  $\tan B$  是关于  $x$  的方程  $x^2 - 6x + 7 = 0$  的两个实根, 则角  $C$  的大小为

- A.  $\frac{3\pi}{4}$       B.  $\frac{2\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{3}$       D.  $\frac{\pi}{4}$

4. 对任意实数  $x \in (2, +\infty)$ , “ $a < x + \frac{4}{x}$ ”是“ $a \leq 4$ ”的

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

5. 函数  $y = -\sin x \cdot \ln \frac{x^2+1}{x^2}$  的大致图象是



6. 已知函数  $f(x) = 3x^3 - 2x + e^x - e^{-x} + 1$ , 若  $f(2a-3) + f(a^2) \geq 2$ , 则实数  $a$  的取值范围为

- A.  $(-\infty, 1]$       B.  $[-3, 1]$       C.  $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$       D.  $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

7. 已知  $a = \sin \frac{1}{2}$ ,  $b = \ln \frac{5}{3}$ ,  $c = 2^{-\frac{1}{2}}$ , 则

- A.  $c < b < a$       B.  $a < b < c$       C.  $a < c < b$       D.  $b < a < c$

8. 已知函数  $f(x) = xe^{2x} - \ln x - x - |a|x$ , 若对任意的  $x > 0$ , 都有  $f(x) \geq 1$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为

- A.  $[-4, 4]$       B.  $[-3, 3]$       C.  $[-2, 2]$       D.  $[-1, 1]$

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

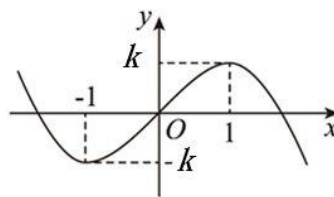
9. 已知三次函数  $f(x)$  的图象如图, 则下列说法正确的是

- A.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'(-1)$

B.  $f'(2) < f'(3)$

C.  $f(\sqrt{3}) = 0$

D.  $xf'(x) > 0$  的解集为  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. 已知函数  $f(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ,  $g(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ , 则

A.  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象有相同的对称中心

B.  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象关于  $x$  轴对称

C.  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称

D.  $f(x) \geq g(x)$  的解集为  $[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi](k \in \mathbb{Z})$

11. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(1) \neq 0$ , 若  $f(x+y) - f(x)f(y) = -xy$ , 则

A.  $f(0) = 0$

B.  $f(x)$  关于  $(-1, 0)$  中心对称

C.  $e^x > f(x)$

D. 函数  $y = -xf(x)$  有最大值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 15 分

12. 已知复数  $z$  满足  $(3-4i)z = 5i$ , 则  $|\bar{z}| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a > 2b > 0$ ,  $a+b=1$ , 则  $\frac{1}{a-2b} + \frac{1}{b}$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 已知  $f(x) = e^x - ax (a \in \mathbf{R})$ ,  $g(x) = \frac{e \ln x}{x}$ , 若函数  $y = f(g(x)) - a$  恰有三个零点, 则  $a$  的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1} + a$  为  $\mathbf{R}$  上的奇函数.

(1) 求  $a$ ; (2) 若函数  $g(x) = 2(e^x + 1)f(x) + 2x$ , 讨论  $g(x)$  的极值.

16. (15 分) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且

$$\tan A + \tan B = \frac{2\sqrt{3}c^2}{a^2 + c^2 - b^2}.$$

(1) 求角  $A$  的大小;

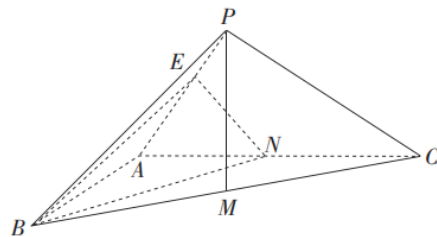
(2) 若  $BC = \sqrt{3}$ , 点  $D$  是线段  $BC$  的中点, 求线段  $AD$  长的取值范围.

17. (15 分) 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PM \perp$  底面  $ABC$ ,  $AB \perp AC$ ,  $AB = 1$ ,

$AC = \sqrt{2}$ ,  $M, N$  分别为  $BC, AC$  的中点,  $E$  为线段  $AP$  上一点.

(1) 求证:  $BN \perp$  平面  $APM$ ;

(2) 若平面  $EBN \perp$  底面  $ABC$  且  $PM = \frac{1}{2}$ , 求二面角  $A-EN-B$  的正弦值.



18. (17 分) 已知函数  $f(x) = \frac{x-2}{e^x} - a(3x-1) - b-1$ , 其中  $a, b$  是实数.

(1) 若  $a = 1$ , 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若函数  $f(x)$  在定义域上是单调函数, 求实数  $a$  的取值范围;

(3) 若  $f(x) \leq 0$  恒成立, 求  $5a+b$  的最小值.

19. (17 分) 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ , ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 图象的相邻两条对称轴间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 且函数  $f(x)$  图象过点  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

(1) 若函数  $y = f(x+m)$  是偶函数, 求  $|m|$  的最小值;

(2) 令  $g(x) = 4f(x) + 1$ , 记函数  $g(x)$  在  $x \in \left[-\frac{17\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}\right]$  上的零点从小到大依次为

$x_1, x_2, \dots, x_n$ , 求  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n$  的值;

(3) 设函数  $y = \varphi(x), x \in D$ , 如果对于定义域  $D$  内的任意实数  $x$ , 对于给定的非零常数  $P$ , 总存在非零常数  $T$ , 恒有  $\varphi(x+T) = P \cdot \varphi(x)$  成立, 则称函数  $\varphi(x)$  是  $D$  上的“ $P$  级周期函数”, 周期为  $T$ . 请探究是否存在非零实数  $\lambda$ , 使函数  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x f\left(\lambda x - \frac{\pi}{6}\right)$  是  $\mathbf{R}$  上的周期

为  $T$  的  $T$  级周期函数, 并证明你的结论.