福建省部分达标学校 2023～2024 学年第一学期期中质量监测

高二数学试卷参考答案

一、选择题

1～8　AAABC　BDC

9. AD　10. ACD　11. AC　12. ACD

8. $\because 2S_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$,

$\therefore 2S_n=(S_n-S_{n-1}+\dfrac{1}{S_n-S_{n-1}})$，得 $S_n+S_{n-1}=\dfrac{1}{S_n-S_{n-1}}$，整理为 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$，

当 $n=1$ 时，$S_1=\dfrac{1}{2}(a_1+\dfrac{1}{a_1})=a_1$，且 $a_1>0$，解得 $a_1=S_1=1$，

$\therefore$数列$\{S_n^2\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，

则 $S_n^2=1+(n-1)\times 1=n$，$\therefore S_n=\sqrt{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{2\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$，

$\therefore \dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_{99}}<1+2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{99}-\sqrt{99-1})]$

$=1+2(-1+\sqrt{99})=2\sqrt{99}-1<19$，

$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{2\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，

$\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_{99}}>2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})]$

$=2(\sqrt{100}-1)=18$，

$\therefore 18<\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_{99}}<19$，$\therefore [\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{99}}]=18$.

故选 C.

12. 曲线 C 的方程为 $\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2$，①

若 P 是曲线 C 上一点，则满足①，于是点 P 关于原点的对称点 $M(-x_0,-y_0)$ 有

$\sqrt{(-x_0+a)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(-x_0-a)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2}=a^2$，

即 $M(-x_0,-y_0)$ 也在曲线 C 上，故 A 正确.

对于 B，由 $a^2=\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2}\geqslant\sqrt{(x_0-a)^2}\cdot\sqrt{(x_0+a)^2}=|x_0^2-a^2|$，

得 $0\leqslant x_0^2\leqslant 2a^2$，

$\therefore -\sqrt{2}a\leqslant x_0\leqslant\sqrt{2}a$，故 B 错误.

对于 C，若 $|PA|=|PB|$，则点 P 在 AB 的垂直平分线上，$\therefore x_0=0$，将 $P(0,y_0)$ 代入①得

$(\sqrt{a^2+y_0^2})^2=a^2$，$\therefore y_0=0$，即仅 P 是原点时满足 $|PA|=|PB|$，故 C 正确.

对于 D,由 $\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2}=a^2$,化简得 $(x_0^2+y_0^2+a^2)^2-4a^2x_0^2=a^4$,

$\therefore(x_0^2+y_0^2+a^2)^2=a^4+4a^2x_0^2$,$\therefore$由 $x_0^2\leqslant 2a^2$ 得 $(x_0^2+y_0^2+a^2)^2\leqslant 9a^4$,

$\therefore x_0^2+y_0^2\leqslant 2a^2$,故 D 正确. 故选 ACD.

二、填空题

13. 8　14. 2023　15. $x^2+(y-2)^2=1$　16. $a_n=3^{n-1}-1$

16. 直线 l 的倾斜角为 $60°$,则圆心 $C_i(a_i,b_i)$ 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ 上,$\therefore b_i=\frac{\sqrt{3}}{3}(a_i+1)$,

设圆 C_i,C_{i+1} 分别切 x 轴于点 P,Q,过点 C_i 作 $C_iM\perp QC_{i+1}$,垂足为 M(图略). 在 $\text{Rt}\triangle C_iC_{i+1}M$ 中,$\angle C_{i+1}C_iM=30°$,$\therefore\frac{MC_{i+1}}{C_iC_{i+1}}=\frac{1}{2}$,

$\therefore\frac{b_{i+1}-b_i}{b_{i+1}+b_i}=\frac{1}{2}$,即 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(a_{i+1}-a_i)}{\frac{\sqrt{3}}{3}(a_i+a_{i+1}+2)}=\frac{1}{2}$,化简得 $a_{i+1}=3a_i+2$,变形得 $a_{i+1}+1=3(a_i+1)$,

$\therefore\{a_n+1\}$是以 $a_1+1=1$ 为首项,3 为公比的等比数列.

$\therefore a_n+1=3^{n-1}=3^{n-1}$,$\therefore a_n=3^{n-1}-1$.

17. 解:(1)$\because k_{BC}=\frac{4-3}{3+1}=\frac{1}{4}$,$\therefore k_{l_1}=-\frac{1}{k_{BC}}=-4$, ………………………………………… 2 分

$\therefore$直线 l_1 的方程是 $y=-4(x-1)+1$,即 $4x+y-5=0$,

$\therefore BC$ 的高所在直线 l_1 的方程是 $4x+y-5=0$. ………………………………………………… 4 分

(2)$\because$直线 l_2 过 C 点,且 A,B 到直线 l_2 的距离相等,

$\therefore$直线 l_2 与 AB 平行或过 AB 的中点 M. ……………………………………………………… 5 分

①当直线 l_2 与 AB 平行时,

$\because k_{AB}=\frac{3-1}{-1-1}=-1$,$\therefore$直线 l_2 的方程是 $y=-(x-3)+4$,即 $x+y-7=0$, ………… 7 分

②当直线 l_2 过 AB 的中点 M 时,$\because AB$ 的中点 M 的坐标为$(0,2)$,

$\therefore k_{CM}=\frac{4-2}{3-0}=\frac{2}{3}$,$\therefore$直线 l_2 的方程是 $y=\frac{2}{3}(x-3)+4$,即 $2x-3y+6=0$. ………… 9 分

综上,直线 l_2 的方程是 $x+y-7=0$ 或 $2x-3y+6=0$. ……………………………………… 10 分

18. 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由 a_2,a_3+2,a_6 成等比数列及 $a_1=2$,得 $(a_3+2)^2=a_2a_6$, …………………………………… 2 分

即 $(4+2d)^2=(2+d)(2+5d)$,解得 $d=-2$,$d=6$. ………………………………………………… 3 分

当 $d=6$ 时,$a_2=8$,$a_3+2=16$,$a_6=32$ 构成等比数列,符合条件; ………………………… 4 分

当 $d=-2$ 时,$a_2=0$,不能构成等比数列,不符合条件. ……………………………………… 5 分

因此 $d=6$,于是数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2+6(n-1)=6n-4$. ………………………… 6 分

(2)由(1)得 $b_n=2^{n-1}a_n=(3n-2)\cdot 2^n$, ………………………………………………………… 7 分

所以 $T_n=1\times 2^1+4\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(3n-2)\cdot 2^n$,① ………………………………… 8 分

则 $2T_n=1\times 2^2+4\times 2^3+7\times 2^4+\cdots+(3n-5)\cdot 2^n+(3n-2)\cdot 2^{n+1}$,② ………………… 9 分

①－②得$-T_n=2+3(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(3n-2)\cdot 2^{n+1}$

$=2+3\dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(3n-2)\cdot 2^{n+1}$

$=(5-3n)2^{n+1}-10$，…………………………………………………………………… 11 分

所以 $T_n=(6n-10)2^n+10$. …………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为$|OA|=|OC|$,$\angle COA=\dfrac{\pi}{3}$,所以$\triangle OAC$为正三角形，………………… 1 分

由$|OA|=|OC|=\sqrt{1+3}=2$,得$A(2,0)$,……………………………………………… 3 分

所以$\triangle OAC$的外接圆圆心为$M(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，…………………………………………… 4 分

又半径$R=|MO|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，……………………………………………………… 5 分

所以圆M的方程为$(x-1)^2+(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2=\dfrac{4}{3}$. …………………………………… 6 分

(2)由题意得$B(3,\sqrt{3})$,$D(\dfrac{5}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$,直线$CD$的斜率$k=\dfrac{\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{5}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， ………… 8 分

直线CD的方程为$y-\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$,即$x+\sqrt{3}y-4=0$,……………………… 9 分

M到CD的距离$d=\dfrac{|1+\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}-4|}{2}=1$,………………………………………… 10 分

所以CD被圆M截得的弦长为$2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{\dfrac{4}{3}-1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………… 12 分

20. 解：(1)由$\dfrac{a_1-2}{a_1}\cdot\dfrac{a_2-2}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n-2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}$,

当$n=1$时,$\dfrac{a_1-2}{a_1}=\dfrac{1}{a_1}$,解得$a_1=3$，…………………………………………… 1 分

当$n\geqslant2$时,$\dfrac{a_1-2}{a_1}\cdot\dfrac{a_2-2}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n-2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}$,$\dfrac{a_1-2}{a_1}\cdot\dfrac{a_2-2}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{n-1}-2}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{a_{n-1}}$,…… 3 分

$\therefore\dfrac{a_n-2}{a_n}=\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$,$a_n-2=a_{n-1}$,即$a_n-a_{n-1}=2$,…………………………… 4 分

$\therefore\{a_n\}$是以 3 为首项,2 为公差的等差数列,………………………………………… 5 分

$\therefore\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+1$. …………………………………………………… 6 分

(2)$\dfrac{1}{a_n^2-1}=\dfrac{1}{4n^2+4n}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，…………………………………………… 7 分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{4}[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]=\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{1}{n+1})$,…………………… 8 分

$\therefore S_n<\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………………………………………… 9 分

由 $S_n<\lambda^2-2\lambda-1$,对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,有 $\lambda^2-2\lambda-1\geqslant\frac{1}{4}$, …………………… 10 分

即 $4\lambda^2-8\lambda-5\geqslant0$,即 $(2\lambda-5)(2\lambda+1)\geqslant0$,$\lambda\geqslant\frac{5}{2}$ 或 $\lambda\leqslant-\frac{1}{2}$, …………………… 11 分

则满足条件的最小正整数 λ 的值为 3. …………………… 12 分

21. 解:(1)依题意得 $\begin{cases}2b=2\sqrt{3},\\ \frac{2b^2}{a}=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………… 3 分

(2)由(1)得 $B_1(0,\sqrt{3})$,$F_2(1,0)$,$k_{B_1F_2}=\frac{\sqrt{3}-0}{0-1}=-\sqrt{3}$,

由于 $MN\perp B_1F_2$,所以直线 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以直线 MN 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$, …………………… 5 分

由 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 并化简得 $13x^2+8x-32=0$,$\Delta=64+4\times13\times32=1728>0$, …………………… 6 分

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{8}{13}$,$x_1x_2=-\frac{32}{13}$, …………………… 7 分

所以 $|MN|=\sqrt{1+(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\sqrt{\frac{64}{169}+4\times\frac{32}{13}}=\frac{48}{13}$, …………………… 8 分

$F_2(1,0)$ 到直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ 即 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|1-0+1|}{2}=1$, …………………… 9 分

所以三角形 F_2MN 的面积为 $\frac{1}{2}\times d\times|MN|=\frac{24}{13}$, …………………… 10 分

设三角形 F_2MN 的内切圆半径为 r,则 $\frac{1}{2}\times4a\times r=4r=\frac{24}{13}$,$r=\frac{6}{13}$, …………………… 11 分

所以内切圆的面积为 $\pi r^2=\frac{36}{169}\pi$. …………………… 12 分

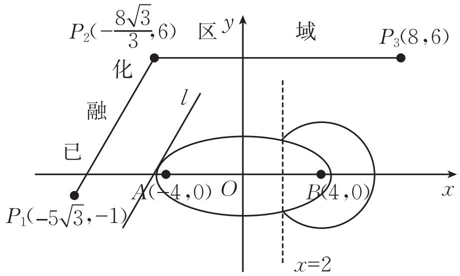
22. 解:(1)设边界曲线上点 P 的坐标为 (x,y),

当 $x\geqslant2$ 时,由题意知 $(x-4)^2+y^2=\frac{36}{5}$, …………………… 1 分

当 $x<2$ 时,由 $|PA|+|PB|=4\sqrt{5}$ 知,点 P 在以 A,B 为焦点,长轴长为 $2a=4\sqrt{5}$ 的椭圆上.

此时短半轴长 $b=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$. 因而其方程为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$. …………………… 3 分

故考察区域边界曲线(如图)的方程为 C_1:$(x-4)^2+y^2=\frac{36}{5}(x\geqslant2)$ 和 C_2:$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1(x<2)$. …………………… 4 分



(2)设过点 P_1，P_2 的直线为 l_1，过点 P_2，P_3 的直线为 l_2，

则直线 l_1，l_2 的方程分别为 $y=\sqrt{3}x+14$，$y=6$. ………………………………………… 5 分

设直线 l 平行于直线 l_1，其方程为 $y=\sqrt{3}x+m$， ………………………………………… 6 分

则 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x+m, \\ \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow 16x^2+10\sqrt{3}mx+5(m^2-4)=0$. ………………………………… 7 分

$\Delta=100\times3m^2-4\times16\times5(m^2-4)=0\Rightarrow m=8$ 或 $m=-8$，

当 $m=8$ 时，直线 l 与 C_2 的公共点到直线 l_1 的距离最近， ………………………………… 8 分

此时直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}x+8$，l 与 l_1 之间的距离 $d=\frac{|14-8|}{\sqrt{1+3}}=3$. ……………………… 9 分

又直线 l_2 到 C_1 和 C_2 的最短距离 $d'=6-\frac{6\sqrt{5}}{5}$，而 $d'>3$，所以考察区域边界到冰川边界线的最短距离为 3. ……………………………………………………………………………… 10 分

设冰川边界线移动到考察区域所需的时间为 n 年，则由题设及等比数列求和公式，

得 $\frac{0.2(2^n-1)}{2-1}\geqslant3$，所以 $n\geqslant4$. ………………………………………………………… 11 分

故冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间为 4 年. ………………………………………… 12 分