高三 12 月数学试卷参考答案

1. C　由题意可得 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，则 $A\cap B=\{-2,0,2,3\}$.

2. A　因为 $z=\frac{1+2\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})}{(4+3\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})}=\frac{4-3\mathrm{i}+8\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2}{16-9\mathrm{i}^2}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$，所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(\frac{2}{5},\frac{1}{5})$，该点位于第一象限.

3. D　因为 $0<0.9^{1.1}<0.9^0=1$，$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>1$，$\log_{\frac{1}{3}}2=-\log_3 2<0$，所以 $b>a>c$.

4. B　设该等差数列为 $\{a_n\}$，则 $a_1+a_2+a_3=3a_2=27$，则 $a_2=9$，所以公差 $d=a_3-a_2=5-9=-4$.

5. B　因为 $A=2B$，所以 $\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$. 因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\frac{a}{2\sin B\cos B}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\cos B=\frac{a}{2b}$. 因为 $3a=4b$，所以 $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$，则 $\cos B=\frac{a}{2b}=\frac{2}{3}$.

6. D　因为 $f(x)$ 是奇函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $f(-x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$y=f(-x)-f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$y=f(2^x-2^{-x})$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，$y=f(x)-f(-x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 又 $g(x)=f(-x)-f(x)$ 满足 $g(-x)=-g(x)$，所以 $g(x)=f(-x)-f(x)$ 为奇函数，而 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 不满足 $g(-x)=-g(x)$，故 $g(x)=f(-x)-f(x)$ 既是奇函数，又在 $(-\infty,0)$ 上单调递增.

7. D　设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4$，故直线 l 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{6}-\frac{y_2^2}{6}}=\frac{6}{y_1+y_2}=\frac{3}{2}$.

8. A　由题意可得 $f'(x)=2x\mathrm{e}^x-2x-a$. 因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f'(x)=2x\mathrm{e}^x-2x-a\geqslant 0$ 恒成立，即 $a\leqslant 2x\mathrm{e}^x-2x$ 恒成立. 设 $g(x)=2x\mathrm{e}^x-2x$，则 $g'(x)=(2x+2)\mathrm{e}^x-2$. 当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)_{\min}=g(0)=0$，即 $a\leqslant 0$.

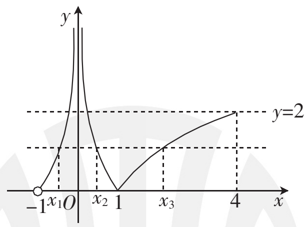
9. AD　$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}=10$，A 正确. 因为 $f(\frac{4}{5})\neq 0$，所以 $f(x)$ 的图象不关于点 $(\frac{4}{5},0)$ 对称，B 错误. 因为 $f(\frac{15}{4})=2\sin\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{15}{4}$ 对称，D 正确. 若 $x\in(0,\frac{25}{4})$，则 $\frac{\pi}{5}x-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{4},\pi)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{25}{4})$ 上有最大值，没有最小值，C 错误.

10. BCD　由 $4a^2+b^2=1\geqslant 4ab$，得 $ab\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，故 A 错误；$4a^2+b^2=(2a+b)^2-4ab=1$，则 $(2a+b)^2=1+4ab\leqslant 2$，即 $2a+b\leqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，故 B 正确；$4a+b^2=4a+1-4a^2=-4a^2+4a+1=-(2a-1)^2+2\leqslant 2$，当且仅

当 $a=\frac{1}{2}$，$b=0$ 时，等号成立，故 C 正确；$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}=\frac{1}{6}(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1})(4a^2+4+b^2+1)=\frac{1}{6}(4+1+\frac{b^2+1}{a^2+1}+\frac{4a^2+4}{b^2+1})\geqslant\frac{5+4}{6}=\frac{3}{2}$，当且仅当 $a^2=0$，$b^2=1$ 时，等号成立，故 D 正确.

11. BC　由题意可得直线 l 过定点 $A(-1,1)$，圆 C 的圆心 C 的坐标为 $(2,-3)$，半径 $r=6$，则 A 错误，B 正确. 因为 $|AC|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5<6$，所以点 A 在圆 C 内部，所以直线 l 与圆 C 一定相交，则 C 正确. 点 C 到直线 l 的距离 $d\leqslant|AC|=5$，则点 P 到直线 l 的距离的最大值是 11，故 D 错误.

12. ABD　作出 $f(x)$ 的大致图象，如图所示.



$a=-\log_2(-x_1)=-\log_2 x_2=\log_2 x_3$，其中 $x_3\in(1,4]$，所以 $a\in(0,2]$，则 $x_1\in(-1,-\frac{1}{4}]$，$x_2\in[\frac{1}{4},1)$，$x_2x_3=1$. 当 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时，$f(x)=|\log_2|x||$ 是偶函数，则 $x_1+x_2=0$，所以 $x_1x_2x_3=x_1\in(-1,-\frac{1}{4}]$，$x_1+x_2+x_3=x_3\in(1,4]$，A，B 均正确. $x_2+4x_3\geqslant2\sqrt{4x_2x_3}=4$，当且仅当 $x_2=4x_3=\frac{4}{x_2}$，即 $x_2=2$ 时，等号成立，但 $2\notin[\frac{1}{4},1)$，C 错误.

因为 $|\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_2}|=|\frac{x_2+x_3}{x_1x_2x_3}|=|\frac{x_2+x_3}{x_1}|=|\frac{x_2+x_3}{-x_2}|=1+\frac{x_3}{x_2}=1+x_3^2$，所以 $|\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_2}|+\frac{16}{x_3}=1+x_3^2+\frac{16}{x_3}$.

设函数 $g(x)=1+x^2+\frac{16}{x}(1<x\leqslant4)$，则 $g'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}$，当 $1<x<2$ 时，$g'(x)<0$，当 $2<x\leqslant4$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)_{\min}=g(2)=1+4+8=13$，D 正确.

13. $\frac{\pi}{3}$　因为 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，所以 $\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=7$. 因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$，故向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$.

14. -12　$(x-\frac{2}{x^3})^6$ 展开式的通项 $T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot(-\frac{2}{x^3})^r=(-2)^r\cdot C_6^r\cdot x^{6-4r}$. 令 $6-4r=2$，得 $r=1$，则 $T_2=-2\times C_6^1x^2=-12x^2$.

15. $-\frac{3}{4}$　因为 $\sin(\alpha+\frac{5\pi}{2})=3\sin(\alpha-\pi)$，所以 $\cos\alpha=-3\sin\alpha$，所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，则 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{3}{4}$.

16.2　设 O 为坐标原点，C 的焦距为 $2c$. 过点 A 作 AH 垂直于 x 轴，垂足为 H(图略). 易得 $|AF_2|=b$，$|AH|=\frac{ab}{c}$，则由 $|OA|^2=|OH|\cdot|OF_2|$，得 $|OH|=\frac{a^2}{c}$，所以 $|BH|=a+\frac{a^2}{c}=\sqrt{|AB|^2-|AH|^2}=\frac{\sqrt{3}ab}{c}$，得 $c+a=\sqrt{3}b$，所以 $(c+a)^2=3b^2=3(c^2-a^2)$，故 $e=\frac{c}{a}=2$.

17. 解：(1)因为 $\sqrt{2}a\sin C-c=0$，所以 $\sqrt{2}\sin A\sin C-\sin C=0$. ………………………… 2 分

因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………… 3 分

因为△ABC 为锐角三角形，所以 $A=\frac{\pi}{4}$. ………………………………………… 5 分

(2)因为 $A=\frac{\pi}{4}$，所以 $B+C=\frac{3\pi}{4}$. ……………………………………………… 6 分

因为△ABC 为锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{3\pi}{4}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 得 $\frac{\pi}{4}<B<\frac{\pi}{2}$. ……………………… 8 分

因为 $2\sqrt{2}\sin B-2\sin C=2\sqrt{2}\sin B-2\sin(A+B)=\sqrt{2}\sin B-\sqrt{2}\cos B=2\sin(B-\frac{\pi}{4})$，

且 $\sin(B-\frac{\pi}{4})\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，所以 $2\sqrt{2}\sin B-2\sin C\in(0,\sqrt{2})$. ……………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $(0.008+0.018)\times10=0.26<0.5$，$0.26+0.032\times10=0.58>0.5$，

所以该板栗园的板栗质量的中位数在 $[50,60)$ 内. ………………………………………… 2 分

设该板栗园的板栗质量的中位数为 m，则 $(m-50)\times0.032+0.26=0.5$，……………… 3 分

解得 $m=57.5$，即该板栗园的板栗质量的中位数约为 57.5. ………………………… 5 分

(2)由题意可知采用分层抽样的方法从质量在 $[40,50)$ 内的板栗中抽取 $10\times\frac{0.018}{0.018+0.012}=6$ 颗，从质量在 $[70,80]$ 内的板栗中抽取 $10\times\frac{0.012}{0.018+0.012}=4$ 颗. ……………… 6 分

X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4. ……………………………………………………… 7 分

$P(X=0)=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{14}$，$P(X=1)=\frac{C_6^3C_4^1}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$，…………………………………… 8 分

$P(X=2)=\frac{C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7}$，$P(X=3)=\frac{C_6^1C_4^3}{C_{10}^4}=\frac{4}{35}$，………………………………… 9 分

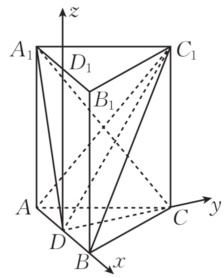
$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$.

从而 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

…………………………………………………………………………………………… 10 分

故 $E(X)=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{8}{21}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{1}{210}=\frac{8}{5}$. ………………………… 12分



19.(1)证明:由三棱柱的性质可知 $CC_1 /\!/ AA_1$. ………………………… 1分

因为 $AA_1\perp$平面 ABC,所以 $CC_1\perp$平面 ABC. ………………………… 2分

因为 $AB\subset$平面 ABC,所以 $CC_1\perp AB$. ………………………… 3分

因为 D 为 AB 的中点,且$\triangle ABC$是等边三角形,所以 $CD\perp AB$. … 4分

因为 $CD,CC_1\subset$平面 CC_1D,且 $CC_1\cap CD=C$,所以 $AB\perp$平面 CC_1D.

………………………… 5分

(2)解:取 A_1B_1 的中点 D_1,连接 DD_1. 易证 DB,DC,DD_1 两两垂直,故以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$的方向分别为 x,y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AB=2$,则 $A(-1,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,$D(0,0,0)$,$A_1(-1,0,3)$,$C_1(0,\sqrt{3},3)$,

故$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{AC_1}=(1,\sqrt{3},3)$,$\overrightarrow{DA_1}=(-1,0,3)$,$\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{3},0)$. ………………………… 7分

设平面 A_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=-x_1+3z_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=\sqrt{3}y_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=3$,得 $\boldsymbol{n}=(3,0,1)$. ………………………… 8分

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=2x_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=x_2+\sqrt{3}y_2+3z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=\sqrt{3}$,得 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},-1)$. ………………………… 9分

设平面 A_1CD 与平面 ABC_1 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{10}\times2}=\frac{\sqrt{10}}{20}$, ………………………… 11分

即平面 A_1CD 与平面 ABC_1 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{20}$. ………………………… 12分

20.解:(1)因为$|MF_1|+|MF_2|=4>|F_1F_2|=2$,所以 E 是以 F_1,F_2 为焦点,且长轴长为 4 的椭圆. ………………………… 1分

设 E 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则 $2a=4$,可得 $a=2$. ………………………… 2分

又 $c=1$,所以 $b^2=a^2-c^2=3$, ………………………… 3分

所以 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4分

(2)由题意可知直线 l 的斜率不为 0,设直线 l:$x=my+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$整理得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,

则 $\Delta=(6m)^2-4(3m^2+4)\times(-9)=144(m^2+1)>0$,

$y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$. ………………………… 6分

由弦长公式可得 $|AB|=\sqrt{m^2+1}\,|y_1-y_2|=\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{(-\frac{6m}{3m^2+4})^2-4\times(-\frac{9}{3m^2+4})}$

$=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$. ………………………………………………………………………… 7 分

点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，则△OAB 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{6\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$. … 9 分

设 $t=\sqrt{m^2+1}\geqslant1$，则 $S=\frac{6t}{3(t^2-1)+4}=\frac{6t}{3t^2+1}=\frac{6}{3t+\frac{1}{t}}$. ……………………………… 10 分

因为 $t\geqslant1$，所以 $3t+\frac{1}{t}\geqslant4$，所以 $S\leqslant\frac{3}{2}$，当且仅当 $m=0$ 时，$S=\frac{3}{2}$. ………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $a_n+a_na_{n-1}=a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $\frac{a_n+a_na_{n-1}}{a_na_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_na_{n-1}}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，

所以 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=1(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$. ………………………………………………… 2 分

因为 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{a_1}=2$，所以 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项为 2，公差为 1 的等差数列，……………… 4 分

则 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d=n+1$. ………………………………………………………… 5 分

故 $a_n=\frac{1}{n+1}$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可得 $b_n=(-1)^{n+1}(2n+3)\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}=(-1)^{n+1}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$. …… 7 分

当 n 为奇数时，$T_n=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})-\cdots-(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})=$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}=\frac{n+4}{2n+4}$； ……………………………………………………………… 9 分

当 n 为偶数时，$T_n=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})-\cdots+(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})-(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})=$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}$. ………………………………………………………………… 11 分

综上，$T_n=\begin{cases}\frac{n+4}{2n+4}, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{n}{2n+4}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ ……………………………………………… 12 分

22. (1)解：$f'(x)=\cos x+2x$，$f'(0)=1$，$f(0)=0$. ………………………………………… 2 分

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$. ………………………………………… 4 分

(2)证明：由(1)得 $f'(x)=\cos x+2x$.

令函数 $u(x)=f'(x)$，则 $u'(x)=-\sin x+2>0$，所以 $u(x)=f'(x)$ 是增函数. ……… 5 分

$f'(0)=1$，$f'(-\frac{1}{2})=\cos\frac{1}{2}-1<0$，……………………………………………………… 6 分

所以存在 $x_0\in(-\frac{1}{2},0)$，使得 $f'(x_0)=\cos x_0+2x_0=0$，即 $x_0^2=\frac{1}{4}\cos^2x_0$. ……………… 7 分

所以当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. ································ 8 分

$f(x)\geqslant f(x_0)=\sin x_0+x_0^2=\sin x_0+\frac{1}{4}\cos^2 x_0=-\frac{1}{4}\sin^2 x_0+\sin x_0+\frac{1}{4}$. ················ 9 分

因为 $x_0\in(-\frac{1}{2},0)$，所以 $0>\sin x_0>\sin(-\frac{1}{2})>\sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$，

所以 $-\frac{1}{4}\sin^2 x_0+\sin x_0+\frac{1}{4}>-\frac{1}{4}\times(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{5}{16}$. ···························· 11 分

故 $f(x)>-\frac{5}{16}$. ·· 12 分