

高三半期考数学试卷

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:集合与常用逻辑用语、等式与不等式、函数与导数、三角函数与解三角形、平面向量与复数。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | -1 < x \leq 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{2, 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1\}$
2. 函数 $y = \tan\left(\frac{4}{\pi}x - \frac{1}{3}\right)$ 的最小正周期为
A. 4 B. $\frac{\pi^2}{2}$ C. 8 D. $\frac{\pi^2}{4}$
3. 在中国传统的十二生肖中,马、牛、羊、鸡、狗、猪为六畜,则“甲的生肖不是马”是“甲的生肖不属于六畜”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知复数 $z = (-2 + \sqrt{3}i)^3$, 则 \bar{z} 的虚部为
A. $-9\sqrt{3}$ B. $9\sqrt{3}$ C. -10 D. 10
5. 在梯形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{AD}$, AC 与 BD 交于点 E , 则 $\overrightarrow{ED} =$
A. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ B. $\frac{1}{7}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}$
C. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ D. $\frac{1}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{7}\overrightarrow{AD}$
6. 将函数 $y = \cos(x + \varphi)$ 图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,得到函数 $y = f(x)$ 的图象. 若 $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{7\pi}{3}, 0\right)$ 对称, 则 $|\varphi|$ 的最小值为
A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

7. 已知 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$, 则 $1 - 16x^2 - 9y^2$ 的最大值为

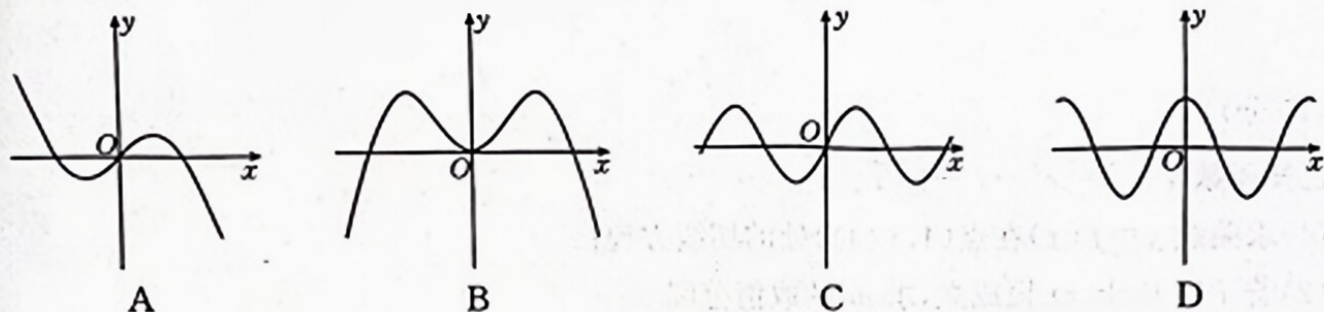
- A. -35 B. -49 C. -42 D. -48

8. 若 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \tan 3\alpha}{1 - \tan^2 3\alpha}$, 则 α 的值可以为

- A. $-\frac{\pi}{12}$ B. $-\frac{\pi}{20}$ C. $\frac{\pi}{10}$ D. $\frac{\pi}{5}$

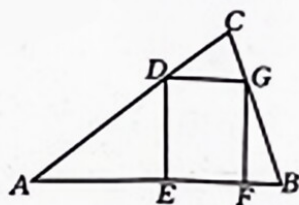
二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别为定义在 \mathbb{R} 上的偶函数、奇函数, 则函数 $h(x) = f(x)g(x)$ 的部分图象可能为



10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $BC = 2$, 点 D, G 分别边 AC, BC 上, 点 E, F 均在边 AB 上, 设 $DG = x$, 矩形 $DEFG$ 的面积为 S , 且 S 关于 x 的函数为 $S(x)$, 则

- A. $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$
 B. $S(1) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
 C. $S(x)$ 先增后减
 D. $S(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$



11. 已知向量 a, b, c 满足 $|a| = 6, |b| = 1, \langle a, b \rangle = \frac{\pi}{3}, (c-a) \cdot (c-b) = 3$, 则

- A. $|a-b| = 4\sqrt{2}$ B. $|c|$ 的最大值为 $\sqrt{43}$
 C. $|a-c|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{43}-\sqrt{31}}{2}$ D. $|a-c|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{43}+6}{2}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. $\log_2 \sqrt{8^5} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知 $\omega > \frac{1}{4}$, 函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 在 $[0, \omega\pi]$ 上单调递增, 则 ω 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - m, g(x) = \frac{x}{e^2} - m$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的零点构成的集合的元素个数为 3, 则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c \sin A \cos B = a \sin B \sin C$.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $a=3$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9}{2}$, 求 b .

16. (15 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - x - 4\sqrt{x}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(4, f(4))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x) > \ln m$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

17. (15 分)

已知函数 $f(x) = 1 - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin x$.

(1) 将 $f(x)$ 化成 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的形式;

(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域;

(3) 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $h(x)$ 的图象, 求不等式 $h(x) \geq 0$ 的解集.

18. (17 分)

已知函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f(x) = 2e^x - e^{-x} + ax$, $f(x) + g(x) = (2e^2 - 1)e^{-x} + (2 - \frac{1}{e^2})e^x + 2a$.

(1) 若 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 求 a 的取值范围.

(2) 证明: $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于一条直线对称.

(3) 若 $a \geq -2\sqrt{2}$, 且关于 x 的方程 $f(x) + f(e^x - m) = 2g(2 - x)$ 在 $[-1, 1]$ 内有解, 求 m 的取值范围.

19. (17 分)

若存在有限个 x_0 , 使得 $f(-x_0) = f(x_0)$, 且 $f(x)$ 不是偶函数, 则称 $f(x)$ 为“缺陷偶函数”, x_0 称为 $f(x)$ 的偶点.

(1) 证明: $h(x) = x + x^5$ 为“缺陷偶函数”, 且偶点唯一.

(2) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x), g(x)$ 都满足 $f(x) + f(y) + g(x) - 2g(y) = x^2 + y$.

① 若 $y = \frac{g(x)}{x}$ 是“缺陷偶函数”, 证明: 函数 $F(x) = xg(x)$ 有 2 个极值点.

② 若 $g(3) = 2$, 证明: 当 $x > 1$ 时, $g(x) > \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1)$.

参考数据: $\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.481, \sqrt{5} \approx 2.236$.