

数学试题

本试卷有第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，考试时间 120 分钟，满分 150 分。

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写准考证号、姓名，考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号，姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应的题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号；第 II 卷用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效。

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上）

1. 数列 $1, -2, 4, -8, 16, \dots$ 的一个通项公式 $a_n = ()$

- A. $-(-2)^{n-1}$ B. 2^{n-1} C. $(-2)^{n-1}$ D. $(-1)^n 2^{n-1}$

2. 用 0、1、2、3 这四个数字组成无重复数字的四位数，其中偶数共有 $()$ 个

- A. 4 B. 10 C. 12 D. 24

3. 已知直线 $l_1: ax - y + 2024 = 0$, $l_2: (2 - 3a)x + ay - 1 = 0$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则实数 a 的值为 $()$

- A. 0 B. $\frac{1}{3}$ C. 0 或 $\frac{1}{3}$ D. 1 或 2

4. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_2 + a_{14} = 8$, 则 $S_{15} = ()$

- A. 42 B. 56 C. 60 D. 64

5. 若 $(x-4)^5 = a_0 + a_1(x-3) + a_2(x-3)^2 + a_3(x-3)^3 + a_4(x-3)^4 + a_5(x-3)^5$, 则 $a_3 = ()$

- A. 10 B. -10 C. 5 D. -5

6. 已知直线 $l: kx - y - k + 1 = 0$, 圆 $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$, 则 $()$

- A. 直线 l 过定点 $(0, 1)$
B. 圆上的点到 l 的距离最大值为 $\sqrt{5} + 1$
C. 当 l 与圆 C 相切时，直线 l 方程为 $3x + 4y - 7 = 0$
D. 当 $k = -2$ 时，圆 C 上有三个点到 l 的距离为 1

7. 过点 $P(1, 0)$ 作倾斜角为 45° 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 A、B 两点, 则 $|PA| \cdot |PB|$ 的值为 ()

- A. $\frac{8}{5}$ B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

8. 加斯帕尔·蒙日是 18--19 世纪法国著名的几何学家. 他在研究圆锥曲线时发现: 椭圆的任意两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上, 其圆心是椭圆的中心, 这个圆被称为“蒙日圆”. 若长方形 G 的四边均与椭圆 $M: \frac{y^2}{8} + \frac{x^2}{6} = 1$ 相切, 则下列说法错误的是 ()

- A. 椭圆 M 的离心率为 $\frac{1}{2}$ B. 椭圆 M 的蒙日圆方程为 $x^2 + y^2 = 14$
C. 若 G 为正方形, 则 G 的边长为 $2\sqrt{7}$ D. 长方形 G 的面积的最大值为 14

二、多选题 (本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 部分选对的得部分分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 甲, 乙, 丙, 丁, 戊五人并排站成一排, 下列说法正确的是 ()

- A. 如果甲, 乙必须相邻, 则不同的排法有 48 种
B. 如果甲, 乙都不排两端, 则不同的排法共有 36 种
C. 如果甲乙不相邻, 则不同排法共有 36 种
D. 如果甲乙丙按从左到右的顺序(可以不相邻), 则不同排法共有 20 种

10. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 下列判断正确的是 ()

- A. 若 $S_n = n^2 + n + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列
B. 若 $S_n = 5n - n^2$, 则 S_n 取最大值时 $n=2$ 或 $n=3$
C. 若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 2^n$, 则 $a_n = 2^n - 1$
D. 若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 4S_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

11. 已知 A 为双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 上位于第一象限内一点, 过点 A 作 x 轴的垂线, 垂足为 M , 点 B 与点 A 关于原点对称, 点 F 为双曲线 C 的左焦点, 则 ()

- A. 若 $|AB| = 2\sqrt{5}$, 则 $AF \perp BF$ B. 若 $AF \perp BF$, 则 $\triangle ABF$ 的面积为 2
C. $\frac{|AF|}{|AM|} > \frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $|AF| - |AM|$ 的最小值为 4

三、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 若向量 $\vec{a} = (1, -\sqrt{3})$ 是直线 l 的一个法向量, 则直线 l 的倾斜角为_____.

13. 在 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中二项式系数之和为 64, 则展开式中 x^3 的系数为_____.

14. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, MN 为圆 O 的动弦, 且满足 $|MN| = 2\sqrt{3}$, C 为弦 MN 的中点, 两动点 P, Q 在直线 $l: x + y + 2 = 0$ 上, 且 $|PQ| = 2$, 当 MN 运动时, $\angle PCQ$ 始终为锐角, 则线段 PQ 中点的横坐标的取值范围是_____.

四、解答题 (本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

15. (13 分)

已知圆 C 经过三点 $O(0, 0)$, $P(4, 0)$, $Q(3, \sqrt{3})$.

(1) 求圆 C 的标准方程;

(2) 若过点 $D(3, 5)$ 的直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程.

16. (15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 且满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列, 并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{2^n}{a_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , 求 S_n .

17. (15 分)

已知点 T 分别与两点 $M(-2,0)$, $N(2,0)$ 连线的斜率的乘积为 $-\frac{1}{4}$,

(1) 求点 T 的轨迹 Γ 的方程;

(2) 已知直线 $y=k(x-\sqrt{3})$ 与 Γ 交于 A , B 两点, $P\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$, $|PA|=|PB|$, 求 k 的值.

18. (17 分)

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是正项等比数列, 且 $a_1=1$, $b_2=2$, $a_3-1=b_3$, $a_4+1=b_4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n=(-1)^{n+1}a_n \cdot a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(i) 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} ;

(ii) 记 $d_n = \frac{-S_{2n}-8}{16n(n+1)b_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (17 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 点 $P_1(1, 1)$ 在 C 上. 按照如下方式依次构造点

$P_n (n = 2, 3, 4, \dots)$: 过点 P_{n-1} 作斜率为 -1 的直线与 C 交于点 Q_{n-1} . 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 x 轴

的对称点, 记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) .

(1) 求弦长 $|P_1P_2|$;

(2) 证明: 数列 $\{y_n\}$ 是等差数列, 并求 y_n 和 x_n ;

(3) 记 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积, 求 S_n .