福建省部分达标学校2023～2024学年第一学期期中质量监测

高三数学试卷

（满分：150分　　时间：120分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$，则

A. $A\subseteq B$　　B. $\complement_{\mathbf{R}}B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$

C. $A\cup B=\mathbf{R}$　　D. $A\cap B=\{0,1\}$

2. “$a>b>0$”是“$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 α 是三角形的内角，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，则 $\tan\alpha$ 的值是

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

4. 中国的5G技术领先世界，5G技术的数学原理之一便是著名的香农公式：$C=W\log_2(1+\frac{S}{N})$．它表示：在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速度 C 取决于信道带宽 W，信道内信号的平均功率 S，信道内部的高斯噪声功率 N 的大小，其中 $\frac{S}{N}$ 叫作信噪比．当信噪比比较大时，公式中真数中的1可以忽略不计．按照香农公式，若不改变带宽 W，而将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从1000提升到8000，则 C 大约增加了（其中 $\lg 5\approx 0.7$）

A. 10%　　B. 20%　　C. 30%　　D. 50%

5. 已知曲线 C_1：$y=\cos x$，把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2，则下列曲线 C_2 的方程正确的是

A. $y=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$　　B. $y=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{12})$

C. $y=\sin(2x-\frac{5\pi}{6})$　　D. $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

6. 已知关于 x 的不等式 $x^2-2ax-b^2<0$ 的解集为 (m,n)，若 $n-m=2$，则 $\frac{2}{a^2}+\frac{4}{b^2}$ 的最小值是

A. $3+2\sqrt{2}$　　B. $6+2\sqrt{2}$　　C. $6+4\sqrt{2}$　　D. $12+8\sqrt{2}$

7. 函数 $y=[f(x)]^{g(x)}$ 在求导时可运用对数法：在解析式两边同时取对数得到 $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$，然后两边同时求导得 $\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$，于是 $y'=[f(x)]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$. 用此法可求得 $y=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}(x>0)$ 的单调递增区间为

A. $(0,\mathrm{e}-1)$　　B. $(0,\mathrm{e})$　　C. $(\mathrm{e}-1,+\infty)$　　D. $(\mathrm{e},+\infty)$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+2)=\frac{1}{2}f(x)$，当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，记 $f(x)$ 的极小值为 t，若对 $\forall x\in(-\infty,m]$，$t\geqslant 2\mathrm{e}$，则 m 的最大值为

A. -1　　B. 1　　C. 3　　D. 不存在

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 若复数 z 满足 $z+\mathrm{i}^{2023}=\frac{2-\mathrm{i}}{2}$（其中 i 为虚数单位），则下列说法正确的是

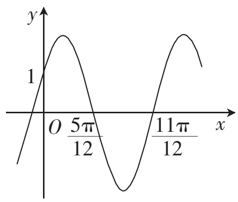
A. $|z|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. z 的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点在第四象限

C. z 的虚部为 $\frac{\mathrm{i}}{2}$

D. $z^2=\frac{5}{4}+\mathrm{i}$

10. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则



A. $\omega=4$

B. $A=2$

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{3}$ 对称

D. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\pi,0)$ 对称

11. 下列大小关系中，正确的是

A. $\sin 1<\sin 2$　　B. $\log_2 3<\log_3 4$

C. $\mathrm{e}^{0.1}>1.1$　　D. $\pi^3<3^\pi$

12. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}-\mathrm{e}^{\cos x}$，其中 e 是自然对数的底数，下列说法中正确的是

A. $f(x)$ 的一个周期为 2π

B. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

C. $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数

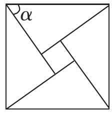
D. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上有且仅有一个极值点

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 不等式$\frac{x-2}{x+4}\leqslant 0$的解集是___▲___.

14. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$同时具有下列三个性质,则 $f(x)=$___▲___.
(写出一个满足条件的函数即可)
①$f(x+y)=f(x)+f(y)$;
②$f(x)+f(-x)=0$;
③$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$.

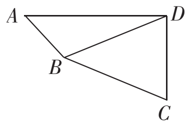
15. 三国时期,吴国数学家赵爽绘制"勾股圆方图"证明了勾股定理(西方称之为"毕达哥拉斯定理"). 如图,四个完全相同的直角三角形和中间的小正方形拼接成一个大正方形,角 α 为直角三角形中的一个锐角,若该勾股圆方图中小正方形的面积 S_1 与大正方形的面积 S_2 之比为 $1:16$,则 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=$___▲___.



16. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx-b+\frac{4}{3}(a,b\in\mathbf{R})$,点 $P(1,0)$位于曲线 $y=f(x)$的下方,且过点 P 可以作 3 条直线与曲线 $y=f(x)$相切,则 a 的取值范围是___▲___.

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)
如图,在平面四边形 $ABCD$ 中,$\angle ADC=90^\circ$,$\angle A=45^\circ$,$AB=2$,$BD=5$.
(1)求 $\cos\angle ADB$;
(2)若$\triangle BCD$ 的面积为$\sqrt{46}$,求 BC.



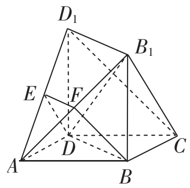
18. (12 分)
已知函数 $f(x)=2\sin(\pi-x)\cos x+\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$.
(1)求 $f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递增区间;
(2)若当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$时,关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant m$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

19.（12 分）

如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形，$DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，且 $BB_1=DD_1=2$，E,F 分别是 AD_1,AB_1 的中点.

(1)证明：平面 $BDEF//$ 平面 CB_1D_1.

(2)若 $\angle ADC=120^\circ$，求直线 DB_1 与平面 $BDEF$ 所成角的正弦值.



20.（12 分）

已知函数 $f(x)=1-\dfrac{\ln x}{x}$，$g(x)=\dfrac{ae}{e^x}+\dfrac{1}{x}-bx$，曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 的一个公共点是 $A(1,1)$，且在点 A 处的切线互相垂直.

(1)求 a,b 的值；

(2)证明：当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant \dfrac{2}{x}$.

21.（12 分）

已知$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，且满足$\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}+\dfrac{b\sin B}{b\sin A+c\sin B}=1$.

(1)求角 C 的大小；

(2)若$\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $b=2$，求$\triangle ABC$ 周长的取值范围.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+a(x-1)^2$.

(1)当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的最大值；

(2)若 $f(x)$ 存在极大值点，且极大值不大于$\dfrac{1}{2}$，求 a 的取值范围.