

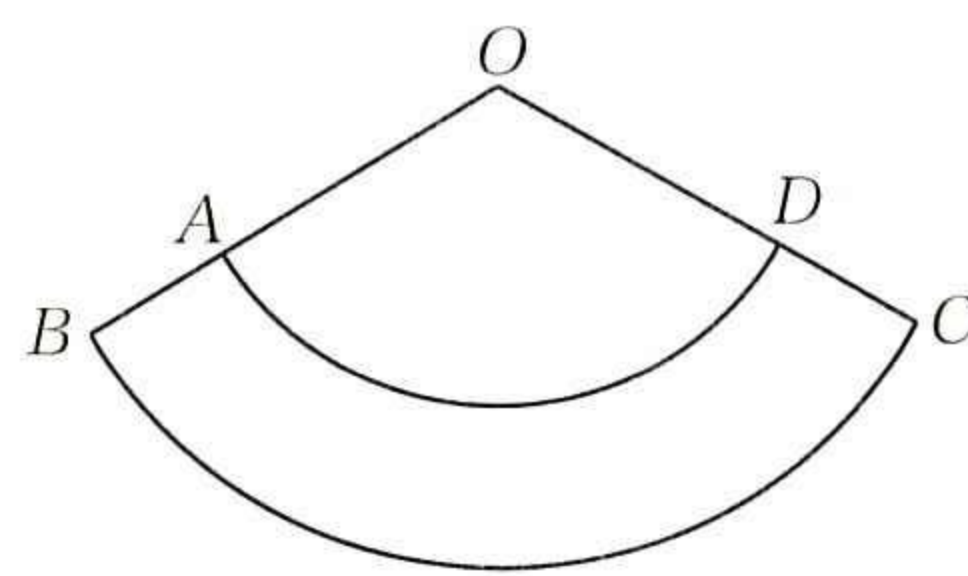
## 高三 12 月联考数学试卷

## 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $z=i(2-3i)$  在复平面内对应的点位于  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
2. 若集合  $A=\{x|0<x+1<3\}$ ,  $B=\{x|x^2+x=0\}$ , 则  
A.  $B\subseteq A$       B.  $A\cap B=\emptyset$   
C.  $-1\in(A\cap B)$       D.  $0\in(A\cap B)$
3. 抛物线  $3y=8x^2$  的准线方程是  
A.  $y=\frac{3}{32}$       B.  $y=-\frac{3}{32}$       C.  $x=\frac{2}{3}$       D.  $x=-\frac{2}{3}$
4. 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_1=8a_4=1$ , 则  $S_3=$   
A. 7      B. 5      C.  $\frac{11}{8}$       D.  $\frac{7}{4}$
5. 函数  $f(x)=\ln x+2x$  的图象在点  $(1,2)$  处的切线与坐标轴所围成的三角形的面积为  
A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{6}$       D.  $\frac{1}{8}$
6. 如图,侧面展开图为扇形  $AOD$  的圆锥和侧面展开图为扇环  $ABCD$  的圆台的体积相等,且  $\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}$ , 则  $\lambda^3=$   
A.  $2\sqrt{2}$   
B. 2  
C. 4  
D. 8



7. 已知正项等差数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}}{a_3+a_5+\dots+a_{2n+1}}=\frac{n}{n+2}$  ( $n\in\mathbb{N}^*$ ), 则  $\frac{a_{2024}}{a_2}=$

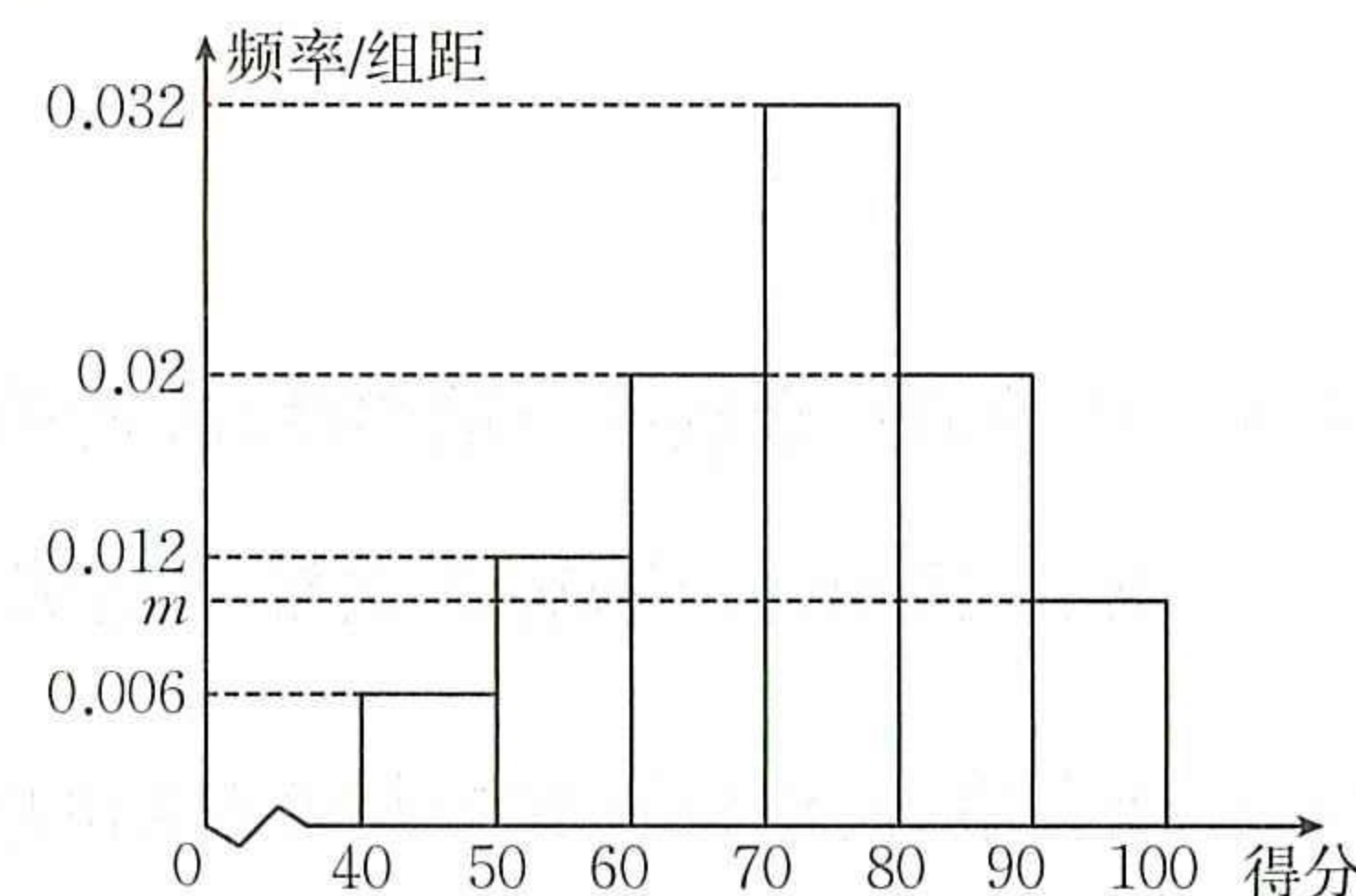
- A. 2      B. 2 024  
C. 1 012      D. 4 048

8. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x>0$  时,  $f(x)=x-a$ . 若  $\forall x\in\mathbf{R}, f(x-a^2)\leq f(x)$ , 则  $a$  的取值范围为

- A.  $(-\infty, 0]\cup[2, +\infty)$       B.  $(-\infty, 2]$   
C.  $[0, 2]$       D.  $(-\infty, 0]$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9. 某地发起“寻找绿色合伙人——低碳生活知识竞赛”活动,从参赛选手的答卷中随机抽取了  $n$  份,将得分(满分 100 分)进行适当的分组(每组为左闭右开的区间),画出如图所示的频率分布直方图,且竞赛成绩落在  $[90, 100)$  内的人数为 10, 则



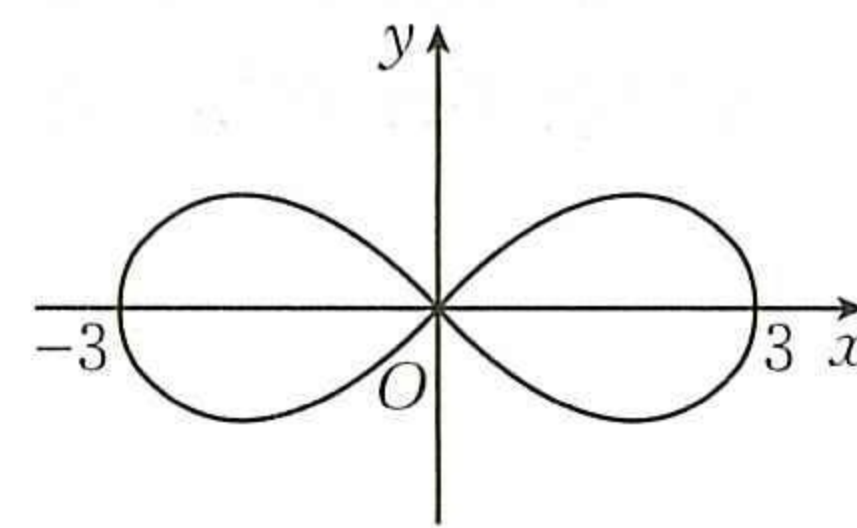
- A.  $m=0.01$   
B.  $n=100$   
C. 估计参赛选手得分的平均分低于 70 分(同组数据用该组区间的中点值作代表)  
D. 估计参赛选手得分的中位数在  $[70, 80)$  内

10. 已知函数  $f(x)=\frac{2\sin x}{5-\cos 2x}$ , 则

- A.  $f(x)$  为奇函数  
B.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$   
C.  $f(x)$  的图象关于直线  $x=\pi$  对称  
D.  $f(x)$  的最大值为  $\frac{1}{3}$

11. 双纽线的图形轮廓像阿拉伯数字中的“8”. 如图, 曲线  $C:(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$  是双纽线, 关于曲线  $C$ , 下列说法正确的是

- A.  $a=9$   
B.  $C$  上存在点  $(x_0, y_0)$ , 使得  $\sqrt{x_0^2+y_0^2}>3$   
C.  $C$  上的点的纵坐标的最大值为  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$   
D. 若直线  $y=kx$  与  $C$  恰有一个公共点, 则  $k$  的取值范围为  $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$



三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. 若两个单位向量  $a, b$  满足  $|a+3b|=3$ , 则  $a\cdot b=$  ▲.
13. 甲、乙、丙等 5 人站成一排, 要求甲、乙不站在丙的同一侧, 则不同的站法共有 ▲ 种.
14. 已知  $\alpha, \beta\in(0, \frac{\pi}{3})$ , 且  $\sin(2\alpha+\beta)+2\sin 2\alpha\cos \beta=3\sin \beta$ , 则  $\cos \beta$  的最小值为 ▲.



四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $c=1, b+2\cos B=2a$ .

- (1)求  $C$  的值;
- (2)求  $\triangle ABC$  周长的最大值.

16. (15 分)

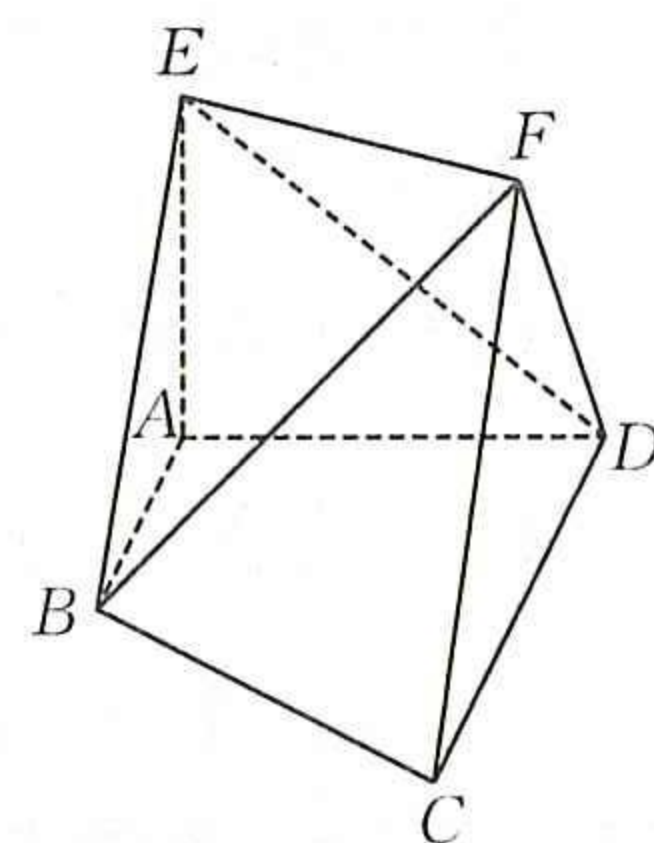
某商场为了吸引顾客,邀请顾客凭借消费金额参与抽奖活动.若抽中金奖,则可获得 15 元现金;若抽中银奖,则可获得 5 元现金.已知每位顾客每次抽中金奖和银奖的概率分别为  $\frac{2}{3}$  和  $\frac{1}{3}$ ,且每次中奖情况相互独立.现有甲、乙两位顾客参与该商场的抽奖活动,其中甲有 2 次抽奖机会,乙有 1 次抽奖机会.

- (1)求甲抽奖获得的现金金额大于乙抽奖获得的现金金额的概率;
- (2)记甲、乙两人抽奖获得的现金总金额为  $X$ ,求  $X$  的分布列与期望.

17. (15 分)

如图,在多面体  $ABCDFE$  中, $AE \perp$  平面  $ABCD$ ,平面  $FCD \perp$  平面  $ABCD$ , $AB \parallel CD$ , $AB \perp AD$ , $\triangle FCD$  为等腰直角三角形,且  $CF \perp DF$ , $AD=CD=2AB=2AE$ .

- (1)证明: $BF \parallel$  平面  $ADE$ .
- (2)求平面  $BEF$  与平面  $DEF$  的夹角的余弦值.



18. (17 分)

已知  $A(2,1)$  是椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上的一点,且  $E$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,斜率存在且不过点  $A$  的直线  $l$  与  $E$  相交于  $P, Q$  两点,直线  $AP$  与直线  $AQ$  的斜率之积为  $\frac{1}{4}$ .

- (1)求  $E$  的方程.
- (2)证明: $l$  的斜率为定值.
- (3)设  $O$  为坐标原点,若  $l$  与线段  $OA$  (不含端点)相交,且四边形  $OPAQ$  的面积为  $2\sqrt{3}$ ,求  $l$  的方程.

19. (17 分)

已知函数  $f(x)$  的定义域为  $I$ ,区间  $D \subseteq I$ ,若  $x_0 \in D, f(x_0) = x_0$ ,则称  $x_0$  是  $f(x)$  在  $D$  上的不动点,集合  $A = \{x_0 | f(x_0) = x_0, x_0 \in D\}$  为  $f(x)$  在  $D$  上的不动点集.

- (1)求函数  $f(x) = 2x - \frac{3x+4}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上的不动点集;
- (2)若函数  $g(x) = ax - \sin 2x$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上有且只有一个不动点,求  $a$  的取值范围;
- (3)若函数  $h(x) = x^3 - (3m^2 - 1)x + 1 (m > 0)$  在  $\mathbb{R}$  上的不动点集为  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ,求  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  的取值范围.

