高一数学考试参考答案

1. C 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.

由题意得 $M=(-2,1)$,所以 $-3\notin M$,$-2\notin M$,$\frac{2}{3}\in M$,$\frac{4}{3}\notin M$.

2. B 【解析】本题考查抽象函数的定义域,考查数学抽象和数学运算的核心素养.

由题意得 $-3<2x<6$,得 $-\frac{3}{2}<x<3$.

3. B 【解析】本题考查命题的否定,考查逻辑推理的核心素养.

该命题是全称量词命题,且该命题的否定:有些菱形不是中心对称图形.

4. D 【解析】本题考查函数的解析式,考查逻辑推理的核心素养.

由 $f(x+1)=(x+1-1)^2-5$,得 $f(x)=(x-1)^2-5=x^2-2x-4$.

5. B 【解析】本题考查不等式的性质与充分必要条件,考查数学运算和逻辑推理的核心素养.

由 $x^3+x>x^2y+y$,得 $x^3+x-(x^2y+y)=x(x^2+1)-y(x^2+1)=(x^2+1)(x-y)>0$,则 $x-y>0$.

因为“$x-y>0$”能推出“$x-y>-1$”,“$x-y>-1$”不能推出“$x-y>0$”,所以“$x-y>-1$”是“$x^3+x>x^2y+y$”的必要不充分条件.

6. D 【解析】本题考查函数的单调性与图象,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

当 $a>0,b>0$ 时,$f(x)$ 是增函数,且 $f(0)=b>0$,A,B 均错误.

当 $a<0,b<0$ 时,$f(x)$ 是减函数,且 $f(0)=b<0$,C 错误,D 正确.

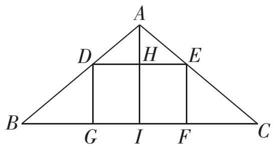
7. A 【解析】本题考查命题的真假与一元二次不等式,考查化归与转化的数学思想.

由题意得命题“$\forall x\in[-2,1]$,$ax^2+2ax+3a\leqslant 1$”是真命题.

因为 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$,所以 $a\leqslant\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{(x+1)^2+2}$.

当 $x=1$ 时,函数 $y=(x+1)^2+2$ 的最大值为 6,则 $\frac{1}{(x+1)^2+2}$ 的最小值为 $\frac{1}{6}$,所以 $a\leqslant\frac{1}{6}$,即 a 的最大值为 $\frac{1}{6}$.

8. C 【解析】本题考查函数的应用,考查数学建模的核心素养和应用意识.



(方法一)如图,当该矩形花园的面积最大时,该矩形为等腰$\triangle ABC$ 的内接矩形.设等腰$\triangle ABC$ 的内接矩形为 $DEFG$,取 BC 的中点 I,连接 AI 交 DE 于点 H.设 HE 的长度为 $x(0<x<40)$m,HI 的长度为 $y(0<y<30)$m.易得 $IC=IB=40$ m,$AI=30$ m,$\triangle AHE\backsim\triangle AIC$,所以 $\frac{AH}{AI}=\frac{HE}{IC}$,得 $\frac{30-y}{30}=\frac{x}{40}$,即 $y=-\frac{3}{4}x+30$,则该矩形花园的面积为 $2xy=-\frac{3}{2}x^2+60x=-\frac{3}{2}(x-20)^2+600$,当 $x=20$ 时,该矩形花园的面积取得最大值,最大值为 600 m^2.

(方法二)如图,当该矩形花园的面积最大时,该矩形为等腰$\triangle ABC$的内接矩形.设等腰$\triangle ABC$的内接矩形为$DEFG$,取BC的中点I,连接AI交DE于点H.设HE的长度为$x(0<x<40)$m,HI的长度为$y(0<y<30)$m.易得$IC=IB=40$ m,$AI=30$ m,$\triangle AHE\backsim\triangle AIC$,所以$\frac{AH}{AI}=\frac{HE}{IC}$,得$\frac{30-y}{30}=\frac{x}{40}$,则$\frac{x}{40}+\frac{y}{30}=1\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{40}\cdot\frac{y}{30}}$,即$xy\leqslant 300$,当且仅当$\frac{x}{40}=\frac{y}{30}$,即$x=20$,$y=15$时,等号成立,所以该矩形花园面积的最大值为600 m^2.

9. AC 【解析】本题考查函数的概念,考查数学运算的核心素养.

$y=t^2+1$与$y=x^2+1$的解析式一致,定义域均为$\mathbf{R}$,值域均为$[1,+\infty)$,A正确.

$y=x^4+1$与$y=x^2+1$的解析式不一致,B错误.

$y=\sqrt{x^4}+1=x^2+1$,$y=\sqrt{x^4}+1$与$y=x^2+1$的解析式一致,定义域均为$\mathbf{R}$,值域均为$[1,+\infty)$,C正确.

$y=(\sqrt{x})^4+1$的定义域为$[0,+\infty)$,D错误.

10. ABC 【解析】本题考查不等式的性质,考查数学运算和逻辑推理的核心素养.

易得$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<1$,$\frac{1}{c}>\frac{1}{d}>-1$,$ad>bc$,A,B,C均正确.当$a=2$,$b=3$,$d=-2$,$c=-3$时,$a+d=b+c=0$,D错误.

11. BC 【解析】本题考查幂函数的性质,考查数学运算与直观想象的核心素养.

设$f(x)=x^{\alpha}$,由幂函数的性质可知$f(x)$的图象必定经过点B.

若$f(x)$的图象经过A,B,C三点,由$f(-1)=(-1)^{\alpha}=-1$,得α为正奇数,则$f(x)$的解析式可能为$f(x)=x$,$f(3)=3$.

若$f(x)$的图象经过A,B,D三点,由$f(4)=4^{\alpha}=2$,得$\alpha=\frac{1}{2}$,则$f(x)=\sqrt{x}$,$f(3)=\sqrt{3}$.

$f(x)$的图象不可能同时经过B,C,D三点.

12. ABD 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查数学抽象的核心素养.

因为函数$F(x)=f(2x-1)$为奇函数,所以$F(0)=f(-1)=0$,A正确.

由$f(x-3)$为偶函数,得$f(x-3)=f(-x-3)$,即$f(x)=f(-x-6)$,B正确.

由$f(2x-1)$为奇函数,得$f(2x-1)=-f(-2x-1)$,所以$f(x-1)=-f(-x-1)$,即$f(x)=-f(-x-2)$,C错误.

由上可知$f(-x-6)=-f(-x-2)$,则$f(x)=-f(x+4)$,则$f(x)=f(x+8)$,所以$f(7)=f(-1+8)=f(-1)=0$,D正确.

13. $2\sqrt{6}$ 【解析】本题考查基本不等式,考查数学运算的核心素养.

由题意得$2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt{2\sqrt{x}\cdot\frac{3}{\sqrt{x}}}=2\sqrt{6}$,当且仅当$2\sqrt{x}=\frac{3}{\sqrt{x}}$,即$x=\frac{3}{2}$时,等号成立.

14. 12 【解析】本题考查一元二次不等式及韦达定理,考查数学运算的核心素养.

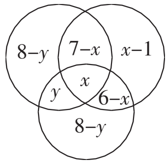
由题意得关于x的方程$x^2+ax+b=0$两根为-1和4,则$\begin{cases}-1+4=-a,\\(-1)\times 4=b,\end{cases}$得$\begin{cases}a=-3,\\b=-4,\end{cases}$所以

$ab=12$.

15. $[-2,0)$ **【解析】本题考查分段函数的单调性,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.**

由题意得 $f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递减,所以$\begin{cases}a<0,\\2a-3\geqslant-4+4-7,\end{cases}$解得$-2\leqslant a<0$.

16. 20 **【解析】本题考查不等式的性质与 Venn 图的应用,考查逻辑推理的核心素养和应用意识.**



设这三天售出相同种类的水果有 x 种,第一天售出、第二天未售出、且第三天售出的水果相同种类有 y 种,则这三天售出水果的种类关系如图所示.

由图可知,该水果店这三天售出水果有 $8-y+y+x+7-x+6-x+x-1+8-y=(28-y)$种,

由$\begin{cases}y\geqslant0,\\8-y\geqslant0,\\y\in\mathbf{N},\end{cases}$得 $0\leqslant y\leqslant8(y\in\mathbf{N})$,所以 $28-y\geqslant20$.故该水果店这三天售出的水果至少有 20 种.

17. 解:(1)由 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)<0$,得$-1<x<3$. ······ 2 分

因为 $x\in\mathbf{Z}$,所以 $A=\{0,1,2\}$. ······ 3 分

故 A 的子集的个数为 $2^3=8$. ······ 5 分

(2)由题意得 $B=\{0,1,2,3\}$, ······ 6 分

则$\complement_U B=\{-1,5\}$, ······ 8 分

所以 $A\cup(\complement_U B)=\{-1,0,1,2,5\}$. ······ 10 分

评分细则:

第(1)问,直接求出 $A=\{0,1,2\}$不扣分.

18. 解:(1)由题意得 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. ······ 1 分

因为 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,都有$-x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

且 $f(-x)=(-x)^3-\dfrac{1}{-x}=-x^3+\dfrac{1}{x}=-(x^3-\dfrac{1}{x})=-f(x)$, ······ 3 分

所以 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x}$是奇函数. ······ 4 分

(2)$f(x)$的定义域为$[-4,5]$,当 $x=5$ 时,$-x=-5\notin[-4,5]$, ······ 6 分

所以 $f(x)=|x|,x\in[-4,5]$既不是奇函数也不是偶函数. ······ 7 分

(3)当 $x\in(1,+\infty)$时,$-x\in(-\infty,-1)$,则 $f(-x)=(-x)^2+3(-x)=x^2-3x=f(x)$,
······ 9 分

当 $x\in(-\infty,-1)$时,$-x\in(1,+\infty)$,则 $f(-x)=(-x)^2-3(-x)=x^2+3x=f(x)$, ···
······ 11 分

所以 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x,x>1,\\x^2+3x,x<-1\end{cases}$是偶函数. ······ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问,未写“$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$”,扣 1 分.

【2】第(2)问,写"因为 $f(x)$ 的定义域不能分成关于原点对称的两部分,所以 $f(x)=|x|,x\in[-4,5]$ 既不是奇函数也不是偶函数",不扣分.

【3】第(3)问,直接写"因为 $f(x)=f(-x)$,所以 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x,x>1,\\x^2+3x,x<-1\end{cases}$ 是偶函数",给 2 分.

19. 解:(1)(方法一)设 $f(x)=a(x-2)^2-4$. …… 2 分

由题意得 $f(0)=4a-4=0$,得 $a=1$, …… 4 分

所以 $f(x)=(x-2)^2-4=x^2-4x$. …… 6 分

(方法二)设 $f(x)=ax^2+bx+c$, …… 2 分

由题意得 $\begin{cases}f(0)=c=0,\\-\dfrac{b}{2a}=2,\\f(2)=4a+2b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-4,\\c=0,\end{cases}$ …… 5 分

所以 $f(x)=x^2-4x$. …… 6 分

(2)由题意得 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增, …… 8 分

所以 $2\leqslant\dfrac{m}{2}<3$,得 $4\leqslant m<6$,即 m 的取值范围为 $[4,6)$. …… 12 分

评分细则:

第(1)问,答案写成"$f(x)=(x-2)^2-4$",不扣分.

20. (1)证明:由 $a+b=4$,得 $\dfrac{1}{4}(a+b)=1$, …… 1 分

所以 $\dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{4}(a+b)(\dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b})=\dfrac{1}{4}(10+\dfrac{9b}{a}+\dfrac{a}{b})\geqslant\dfrac{1}{4}(10+2\sqrt{\dfrac{9b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}})=4$, …… 4 分

当且仅当 $\dfrac{9b}{a}=\dfrac{a}{b}$,即 $a=3b=3$ 时,等号成立. …… 6 分

(2)解:$(a+\dfrac{3}{b})(b+\dfrac{3}{a})=ab+\dfrac{9}{ab}+6\geqslant2\sqrt{ab\cdot\dfrac{9}{ab}}+6=12$, …… 9 分

当且仅当 $ab=\dfrac{9}{ab}$,即 $\begin{cases}ab=3,\\a+b=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3,\\b=1\end{cases}$ 时,等号成立. …… 11 分

故 $(a+\dfrac{3}{b})(b+\dfrac{3}{a})$ 的最小值为 12. …… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问,未写"当且仅当 $\dfrac{9b}{a}=\dfrac{a}{b}$,即 $a=3b=3$ 时,等号成立",扣 2 分.

【2】第(2)问,未写"当且仅当 $ab=\dfrac{9}{ab}$,即 $\begin{cases}ab=3,\\a+b=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3,\\b=1\end{cases}$ 时,等号成立",扣 2 分.

21. 解:(1)由题意得 $a^2-4a-4=1$, …… 1 分

得 $a=5$ 或 -1. …… 2 分

当 $a=5$ 时，$f(x)=x^5$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，不符合题意；………………………… 3 分

当 $a=-1$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，符合题意.

故 $a=-1$. …………………………………………………………………………… 4 分

(2)由题意得 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上单调递减. ………………………… 5 分

当 $\begin{cases}2x>0,\\x-1<0,\end{cases}$ 即 $0<x<1$ 时，$f(2x)>0>f(x-1)$ 恒成立. ……………………… 7 分

当 $\begin{cases}2x>0,\\x-1>0,\end{cases}$ 即 $x>1$ 时，由 $f(2x)>f(x-1)$，得 $2x<x-1$，得 $x<-1$，不符合题意. ……

…………………………………………………………………………………… 9 分

当 $\begin{cases}2x<0,\\x-1<0,\end{cases}$ 即 $x<0$ 时，由 $f(2x)>f(x-1)$，得 $2x<x-1$，得 $x<-1$，所以 $x<-1$. ……

…………………………………………………………………………………… 11 分

综上，不等式 $f(2x)>f(x-1)$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$. ……………………… 12 分

评分细则：

第(2)问，最后的答案写成“不等式 $f(2x)>f(x-1)$ 的解集为 $\{x|x<-1$ 或 $0<x<1\}$”，不扣分.

22. 解：(1)由 $x^2\neq4$，得 $x\neq\pm2$，因为 $8-x^3\neq0$，所以 $f(x)$ 的定义域 $D=\{x|x\neq\pm2\}$. … 1 分

因为 $f(-x)=\frac{8-x^3}{8+x^3}$，所以 $f(x)f(-x)=1$，所以 $f(x)$ 是“倒函数”. ………………… 3 分

(2)(i)设 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_2<-x_1<0$.

因为 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，$\forall x\in(-\infty,0)$，$g(x)>0$，

所以 $g(-x_1)>g(-x_2)>0$，则 $\frac{1}{g(-x_2)}>\frac{1}{g(-x_1)}>0$. ……………………………… 4 分

由 $g(x)g(-x)=1$，得 $g(x_1)=\frac{1}{g(-x_1)}$，$g(x_2)=\frac{1}{g(-x_2)}$，………………………… 5 分

所以 $g(x_1)<g(x_2)$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………… 6 分

又定义域为 $\mathbf{R}$ 的倒函数 $g(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

…………………………………………………………………………………… 7 分

(ii)由题意得 $g(2)=\frac{1}{g(-2)}=2$. 因为 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域为 $[\frac{1}{2},2]$. …………………………………………………………………………… 8 分

令 $t=g(x)+g(-x)=g(x)+\frac{1}{g(x)}$.

因为函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，当 $x=1$ 时，$y_{\min}=2$，当 x

$=\frac{1}{2}$或 2 时，$y_{max}=\frac{5}{2}$，所以 $y=x+\frac{1}{x}$在$[\frac{1}{2},2]$上的值域为$[2,\frac{5}{2}]$，则 $t=g(x)+\frac{1}{g(x)}\in[2,\frac{5}{2}]$. ······························ 9 分

因为$[g(x)]^2+[g(-x)]^2=t^2-2$，所以 $h(x)=[g(x)]^2+[g(-x)]^2-g(x)-g(-x)=t^2-t-2$. ······························ 10 分

因为函数 $y=x^2-x-2$ 在$[2,\frac{5}{2}]$上单调递增，所以 $h(x)_{min}=2^2-2-2=0$，$h(x)_{max}=(\frac{5}{2})^2-\frac{5}{2}-2=\frac{7}{4}$. ······························ 11 分

故 $h(x)$在$[-2,2]$上的值域为$[0,\frac{7}{4}]$. ······························ 12 分

评分细则：

第(2)问(i)中，只写“$g(x)$在 **R** 上单调递增”，未用定义证明，给 1 分.