宁德市 2023-2024 学年度第二学期期末高一质量检测

数学参考答案及评分标准

说明:

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解法不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则.

二、对计算题，当考生的解答在某一部分解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分.

一、单项选择题: 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. C　2．A　3．D　4．D　5. B　6.C　7．C　8．B

第 8 题解析：

由 $\vec{a}//\vec{b}$ 可得，$(3m-4)\times(-1)-(n-2)\times 1=0$ ，

所以 $n=6-3m$.

因为 θ 为钝角，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ ，且 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，

所以 $\begin{cases}(3m-4)\times 1+(n-2)\times(-1)<0\\ n\neq 6-3m\end{cases}$ ，即 $3m<n+2$ ，且 $n\neq 6-3m$.

当 $m=1$ 时，有 $n>1$ 且 $n\neq 3$ ，所以 n 可取 2，4，5，6；

当 $m=2$ 时，有 $n>4$ ，n 可取 5，6；

当 $m=3$ ，$m=4$ ，$m=5$ ，$m=6$ 时，$n>3m-2>6$ ，此时无解.

综上所述，满足条件的 m,n 有 6 种可能.

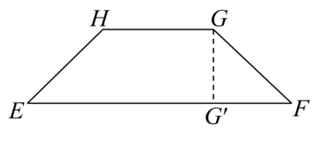
又先后抛掷两次，得到的样本点数共 36 种，

所以 θ 为钝角的概率 $p=\frac{1}{6}$.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分， 共 18 分. 在每小题给出的选项中有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

9．AD　10．ACD　11. AC

第 11 题解析：



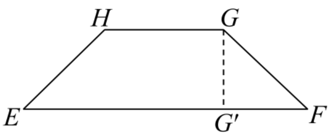
对于 A ．该“刍童”的表面积为 $20+12\sqrt{3}$ ，所以正确

对于 B ．由轴截面的等腰梯形 $EFGH$ 可知，其高 $GG'=\sqrt{2}$ ，如图所示：

能够被完整放入该“刍童”内的圆台的最大的体积为$\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi$,所以不正确

对于 C ．该“刍童”的外接球的球心到平面$ABCD$的距离为$\sqrt{2}$，而平面$A'B'BA$的外接圆的圆心恰为线段BA的中点，故该“刍童”的外接球的球心到平面$A'B'BA$的距离为$\sqrt{6}$，所以正确.

对于 D ，若正四面体在此容器内部可以任意转动，则正四面体的外接球可以放进容器，棱长为$\sqrt{2}$的正四面体的外接球直径为$\sqrt{3}$，由轴截面的等腰梯形$EFGH$可知，其高$GG'=\sqrt{2}$，如下图所示：



可知此棱台可放入的最大球的直径为$\sqrt{2}$，小于正四面体的外接球直径，

故不可以在此空心棱台容器内部任意转动，所以 D 不正确.

故选：AC

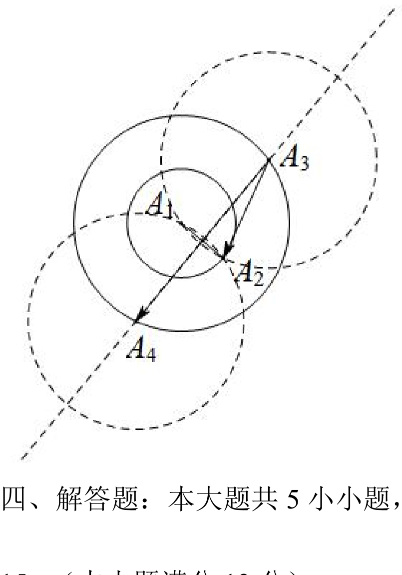
三、填空题:（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分. 把答案填在答题卡的相应位置）

12. 2800　　13.　$\sqrt{2}$　14. $\frac{15}{2}$

第 14 题解析：

如图示，可知：$A_1A_3A_2A_4$是边长为 2 的菱形，且$A_1A_2=1$，$A_2A_3=2$，

$A_3A_4=\sqrt{A_2A_3{}^2-\left(\frac{1}{2}A_1A_2\right)^2}=\sqrt{15}$，所以$\overrightarrow{A_3A_4}\cdot\overrightarrow{A_3A_2}=\frac{15}{2}$



四、解答题：本大题共 5 小小题，共 77 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 13 分）

（1）因为$\overline{z}_1+z_2=(m+1)+5i$，$\cdots\cdots$2 分

所以$m=-1$$\cdots\cdots$4 分

所以$z_1z_2=(-1-3i)(1+2i)=5-5i$ $\cdots\cdots$6 分

（2）因为$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{m-3i}{1+2i}=\dfrac{(m-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$\cdots\cdots$7 分

$=\dfrac{(m-6)+i(-2m-3)}{5}$$\cdots\cdots$9 分

所以$\begin{cases}m-6<0\\-2m-3<0\end{cases}$$\cdots\cdots$11 分

所以$-\dfrac{3}{2}<m<6$$\cdots\cdots$13 分

16. （本小题满分 15 分）

解：（1）证明：由于底面$ABCD$为矩形，所以$AD\perp CD$$\cdots\cdots$1 分

又有$AE\perp$平面PCD，$CD\subset$平面PCD，所以$AE\perp CD$$\cdots\cdots$4 分

因为$AD\bigcap AE=A$，所以$CD\perp$平面$PAD$$\cdots\cdots$6 分

因为$CD\subset$平面$ABCD$，所以平面$PAD\perp$平面$ABCD$$\cdots\cdots$7 分

（2）解：由于$AB//CD$即$\angle PCD$为异面直线PC和AB所成角所成的角．$\cdots\cdots$8 分

因为异面直线PC和AB所成角的正切值为2，

由于$CD\perp$平面PAD所以$CD\perp PD$

所以在$Rt\Delta PBC$中，$PD=4$，所以$DC=2$$\cdots\cdots$9 分

由于ΔAPD是边长为 4 的正三角形，取AD的中点M，连接PM，

所以$PM\perp AD,PM=2\sqrt{3}$$\cdots\cdots$10 分

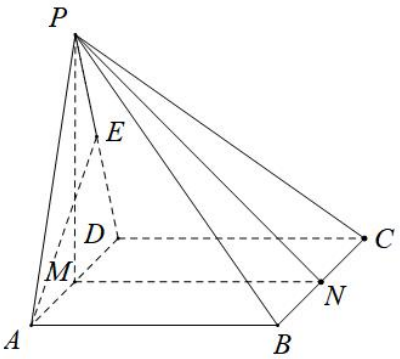
因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PM\subset$平面PAD，所以$PM\perp$平面$ABCD$．$\cdots\cdots$11 分

取BC的中点N，连接MN，PN，$MN//DC$，$MN\perp BC$，所以$PN\perp BC$

所以$\angle PNM$为二面角$P-BC-D$的平面角，$\cdots\cdots$13 分

在$\mathrm{Rt}\Delta MNP$中，$MP=2\sqrt{3},MN=2$，所以$\angle PNM=\dfrac{\pi}{3}$． $\cdots\cdots$14 分

所以$\angle PNM$为二面角$P-BC-D$的平面角$\dfrac{\pi}{3}$$\cdots\cdots$15 分



17.（本小题满分 15 分）

解：（1）根据正弦定理可得：$2\sin C\cos C=\sin A\cos B+\sin B\cos A$ ， ……………… 2 分

$$=\sin(A+B)$$
$$=\sin(\pi-C)$$
$$=\sin C$$ ……………………………………………3 分

因为$C\in$(0，π)，$\sin C\neq 0$……………………………………………………………………4 分

所以$\cos C=\frac{1}{2}$…………………………………………………………………………… 5 分

即$C=\frac{\pi}{3}$………………………………………………………………………………7 分

法二:根据余弦定理可得$a\cos B+b\cos A=a\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$ ……………2 分

即$2c\cos C=c$，……………………………………………………………………3 分

所以$\cos C=\frac{1}{2}$…………………………………………………………………………… 4 分

因为$C\in$(0，π)，………………………………………………………………………5 分

所以$C=\frac{\pi}{3}$.……………………………………………………………………………7 分

(2)解：因为$S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$， $AC=2,\ \angle ACB=\frac{\pi}{3}$,

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\quad 2\quad BC\quad \sin\frac{\pi}{3}\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}$………………………………………………… 8 分

解得$BC=3$,…………………………………………………………………………9 分

因为CD平分$\angle ACB$,

在ΔACD中根据正弦定理得：$\frac{AD}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$

在ΔBCD中根据正弦定理得：$\frac{BD}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BC}{\sin\angle ADC}$

所以$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$，…………………………………………………………………… 11 分

所以$\frac{AD}{BD}=\frac{2}{3}$，……………………………………………………………………… 12 分

所以$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$ ………………… 13 分

所以$\overrightarrow{CD}^2=\frac{9}{25}\overrightarrow{CA}^2+\frac{12}{25}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{4}{25}\overrightarrow{CB}^2=\frac{108}{25}$， ……………………………………… 14 分

解得$\left|\overrightarrow{CD}\right|=\frac{6\sqrt{3}}{5}$，即$CD=\frac{6\sqrt{3}}{5}$； ……………………………………………………… 15 分

法二:因为$S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$AC=2,\ \angle ACB=\frac{\pi}{3}$,

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\quad 2\quad BC\quad \sin\frac{\pi}{3}\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ………………………………………………………… 8 分

解得$BC=3$,……………………………………………………………………………9 分

因为CD平分$\angle ACB$,

所以$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\times(AC+BC)CD\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ …………………………… 12 分

整理得：$\frac{5}{4}CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………………………………………… 14 分

即$CD=\frac{6\sqrt{3}}{5}$ ……………………………………………………………………………… 15 分

18. （本小题满分 17 分）

（1）根据频率分布直方图有，男生成绩样本数据的平均数

$\overline{x}=45\times0.1+55\times0.15+65\times0.15+75\times0.3+85\times0.25+95\times0.05=71$……………………4 分

所以男生成绩样本数据的平均数为 71.（列式正确，计算错误扣 1 分）

（2）在区间$[40,50)$和$[90,100]$内的男生成绩样本数据分别有 4 个和 2 个，………5 分

分别用a,b,c,d和m,n表示，则在这 6 个数据中随机抽取两个的样本空间Ω包含的样本点

有$(a,b),(a,c,),(a,d),(a,m),(a,n)$，

$(d,m),(d,n),(m,n)\ (b,c),(b,d),(b,m),(b,n),(c,d),(c,m),(c,n)$，

个数为$n(\Omega)=15$， ………………………………………………………………………… 7 分

记事件$A=$“这两个样本来自同一区间”，

则事件 A 包含的样本点有$(a,b),(a,c,),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d),(m,n)$

个数为$n(A)=7$，………………………………………………………………………………9 分

所以$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{7}{15}$； ………………………………………………………………… 10 分

（3）设男生成绩样本数据为x_1，x_2，…，x_{40}，其平均数为71，方差为$s_x^2=194$;

女生成绩样本数据为y_1，y_2，…，y_{60}，其平均数为$\overline{y}=76$，

方差为$s_y{}^2=120$；总样本的平均数为$\overline{z}$，方差为s^2.……………………………………11 分

由按比例分配分层随机抽样总样本平均数与各层样本平均数的关系，

得$\overline{z}=\dfrac{40}{100}\overline{x}+\dfrac{60}{100}\overline{y}=74$.……………………………………………………13 分

$s^2=\dfrac{1}{100}\left\{40\left[s_x{}^2+(\overline{x}-\overline{z})^2\right]+60\left[s_y{}^2+(\overline{y}-\overline{z})^2\right]\right\}$……………………………14 分

$=\dfrac{1}{100}\left\{40\left[194+(71-74)^2\right]+60\left[120+(76-74)^2\right]\right\}$……………………………15 分

$=155.6$.……………………………………………………………………………………17 分

所以总样本的平均数和方差分别为74和155.6.

19.（本小题满分 17 分）

（1）解：由于$ABCD-A'B'C'D'$是正方体，

两直线AP，MP与面$DCC'D'$所成的角相等

即$\angle APD=\angle MPC$，由于$\angle ADP=\angle MCP=90^0$……………………………………1 分

法 1：$\tan\angle APD=\tan\angle MPC$，即$\dfrac{AD}{PD}=\dfrac{MC}{PC}=2$……………………………3 分

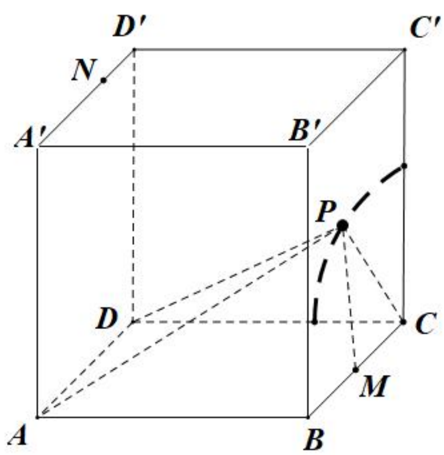
法 2：所以$\mathrm{Rt}\Delta ADP\backsim\mathrm{Rt}\Delta MCP$，又有$M$是$BC$的中点，$\therefore\dfrac{AD}{MC}=\dfrac{PD}{PC}=2$…… 3 分

即$PD=2PC$，

依题意平面内点P到两定点D,C距离之比为2,故点P的轨迹是圆，

而点P是正方体表面$DCC'D'$上一动点（包括边界），

即点P的轨迹是一段阿波罗尼斯圆的弧.……………………………………………4 分



画出上图弧线即给分，不要求精确……………………………………………………5 分

（2）依题意可知：圆心O在DC所在的直线上，…………………………………………6 分

法一：作圆O与DC交于点E，与DC的延长线上交于点F，显然EF恰为圆O的直径，

故依$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$，$E$恰好为$DC$线段的三分之一分点，$EC=2$，

$\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{CF}$，$CF=6$，$EF=8$，$\overrightarrow{DO}=4\overrightarrow{CO}$ ………………………………………… 7 分

法二：易知此圆O与DC的交点为E，与CC'的交点为F，

则满足：$\frac{DE}{EC}=\frac{DF}{FC}=2$，故在$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$，$\angle FDC=30^0$，$EC=2$，$FC=2\sqrt{3}$，

在$Rt\Delta ECF$中，$\angle FEC=60^0$，$EF=4$

故ΔEFO为正三角形，故$EO=FO=EF=4$，$OC=2$，$\overrightarrow{DO}=4\overrightarrow{CO}$ ……………7 分

法一：设$\overrightarrow{OD'}$与$\overrightarrow{OP}$所成的角为θ，可知$\cos\theta\in\left[0,\frac{4}{5}\right]$…………………………8 分

$\overrightarrow{D'P}\cdot\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{D'O}\cdot\overrightarrow{OP}+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2$

$=-\left|\overrightarrow{OD'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\theta+16=-40\cos\theta+16$ ………………………………………… 9 分

$\overrightarrow{D'P}\cdot\overrightarrow{OP}\in[-24,-16]$………………………………………………………………10 分

法二：（建系）以O为平面直角的坐标原点，分别以DO，过点O垂直于DO的直线为x，y轴，建立平面直角坐标系，故可设$P(4\cos\theta,4\sin\theta)$，$D'(-8,6)$，$O(0,0)$，

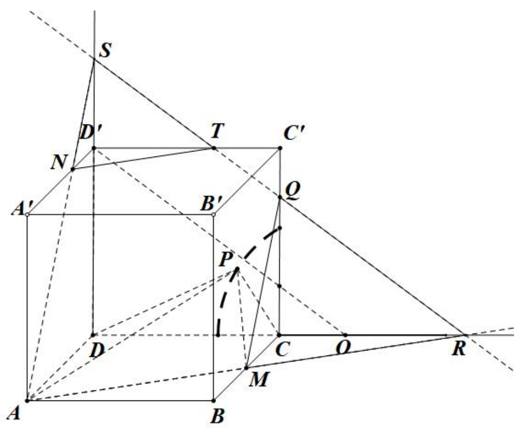
$\overrightarrow{D'P}=(4\cos\theta+8,4\sin\theta-6)$ $\overrightarrow{OP}=(4\cos\theta,4\sin\theta)$ $\theta\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$ ………………… 8 分

$\overrightarrow{D'P}\cdot\overrightarrow{OP}=16+32\cos\theta-24\sin\theta=16-40\sin(\theta-\varphi)$其中$\tan\varphi=\frac{4}{3}$……………9 分

故$\overrightarrow{D'P}\cdot\overrightarrow{OP}\in[-24,-16]$…………………………………………………………10 分

（3）由（2)可知，当线段$D'P$的长最短时，即点P在直线OD'上，

故延长AM交DC于点R，过点R做$RS\parallel OD'$，交DD'于点S，交$C'D'$于点T，交CC'于点Q，连接SA交$A'D'$于点N，所求的截面即为五边形$AMQTN$.



以下证明 $D'P$ // 平面 AMN，

由于 $D'P$ // SR，$D'P \not\subset$ 平面 AMN，$SR \subset$ 平 AMN

所以 $D'P$ // 平面 AMN，……………………………………………………………11 分

故有 $\frac{CQ}{DS}=\frac{CR}{DR}=\frac{1}{2}$，$\frac{SD'}{SD}=\frac{D'T}{DR}=\frac{OR}{DR}=\frac{D'N}{AD}=\frac{1}{3}$，

在 $Rt\Delta ABM$ 中，$AB=6, BM=3, AM=3\sqrt{5}$ ……………………………………12 分

在 $Rt\Delta MCQ$ 中，$MC=3, CQ=\frac{9}{2}, QM=\frac{3\sqrt{13}}{2}$ ……………………………13 分

在 $Rt\Delta QC'T$ 中，$QC'=\frac{3}{2}, C'T=2, QT=\frac{5}{2}$ ……………………………………14 分

在 $Rt\Delta TD'N$ 中，$TD'=4, D'N=2, TN=2\sqrt{5}$ ……………………………………15 分

在 $Rt\Delta NA'A$ 中，$NA'=4, A'A=6, AN=2\sqrt{13}$ ……………………………………16 分

所以所求的截面五边形 $AMQTN$ 的周长

$C_{AMQTN}=AM+MQ+QT+TN+NA$

$=3\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{13}}{2}+\frac{5}{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{13}$

$=\frac{5}{2}+5\sqrt{5}+\frac{7\sqrt{13}}{2}$ ……………………………………………………………17 分