高一期中考试数学试卷
参考答案

1. A　集合 $M=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{N}^*,x+y<3\}=\{(1,1)\}$，$M$ 中只有 1 个元素.

2. D　全称量词命题的否定是存在量词命题.

3. B　导火索燃烧的时间为$\frac{x}{0.6}$秒，人在此时间内跑的路程为 $4\times\frac{x}{0.6}$米，由题意可得 $4\times\frac{x}{0.6}\geqslant 50$.

4. C　因为 $a>0$，所以 $a>b$ 等价于$\frac{b}{a}<1$，故"$a>b$"是"$\frac{b}{a}<1$"的充要条件.

5. D　因为 $0.6^{1.6}<0.6^{0.6}<1,1.6^{0.6}>1$，所以 $c>a>b$.

6. A　$f(x)=\frac{x\cdot 2^x}{|x|}-x=\begin{cases}2^x-x,x>0,\\-2^x-x,x<0,\end{cases}$因为 $f(-x)=-\frac{x\cdot 2^{-x}}{|x|}+x$，$f(x)+f(-x)\neq 0$，所以 $f(x)$不是奇函数，排除 B. 因为 $f(-1)=\frac{1}{2}$，$f(-2)=\frac{7}{4}$，所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上不是单调递增函数，排除 C. 当 $0<x<1$ 时，因为 $2^x>1$，所以 $f(x)=2^x-x>0$，排除 D. 故选 A.

7. C　由题意可得$\begin{cases}2a\geqslant 1,\\a>0,\\1-4a+5a\geqslant 2a,\end{cases}$解得$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$.

8. C　当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调递增，$f(x)$在$(-\infty,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增，则 $f(x)$在$[-2,-1]$上单调递减，因为 $f(x)\leqslant a$ 恒成立，所以 $f(-2)=a^{4+4a}\leqslant a$，解得 $a\leqslant-\frac{3}{4}$(舍去). 当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调递减，$f(x)$在$(-\infty,a)$上单调递增，在$(a,+\infty)$上单调递减，则 $f(x)$在$[-2,-1]$上单调递增，因为 $f(x)\leqslant a$ 恒成立，所以 $f(-1)=a^{1+2a}\leqslant a$，解得 $a\geqslant 0$，故 $0<a<1$. 综上，a 的取值范围是$(0,1)$.

9. BD　将点$(\frac{1}{2},2)$的坐标代入 $f(x)=x^\alpha$，可得 $\alpha=-1$，则 $f(x)=\frac{1}{x}$，$f(x)$的图象不经过点$(2,4)$，A 错误. $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，C 错误. 根据反比例函数的图象与性质可得 B，D 正确.

10. BCD　函数 $y=\frac{1}{f(x)}+g(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$，当 $x=\frac{1}{2}$时，$y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$，当 $x=1$ 时，$y=2$，所以函数 $y=\frac{1}{f(x)}+g(x)$在$(0,+\infty)$上不单调递增，A 错误. 函数 $y=\frac{1}{f(x)}-g(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$，因为函数 $y=\frac{1}{x}$和函数 $y=-\sqrt{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以 $y=\frac{1}{f(x)}-g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，B 正确. 因为函数 $y=f(x)+g(x)=x+\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上单调递增，且当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $y=f(x)+g(x)$的最小值为 0，C 正确. 函数 $y=f(x)-g(x)=x-\sqrt{x}=(\sqrt{x}-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$，当$\sqrt{x}=\frac{1}{2}$时，函数 $y=f(x)-g(x)$取得最小值，且最小值为$-\frac{1}{4}$，D 正确.

11. BC　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=x-y>0$，A 错误. $\frac{9}{x}+\frac{1}{y}=(\frac{9}{x}+\frac{1}{y})(x+y)=10-(\frac{-x}{y}+\frac{-9y}{x})\leqslant 10-2\times 3=4$，当且仅当 $x=\frac{3}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$时，等号成立，B 正确. $2^x-2^{-y}=\frac{2^{x+y}-1}{2^y}=\frac{1}{2^y}$，因为 $y<0$，所以 $2^x-2^{-y}=\frac{1}{2^y}>1$，C 正确. 因为 $2^{-x}+2^{-y}=\frac{2^x+2^y}{2^{x+y}}=\frac{2^x+2^y}{2}$，所以 $2^x+2^y>2^{-x}+2^{-y}$，D 错误.

12. AC　当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在$[0,2]$上单调递增，$f(x)_{\max}=f(2)=2|2-a|=2$，解得 $a=1$(舍去)或 $a=3$(舍去). 当 $a>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-x(x-a),x\leqslant a,\\x(x-a),x>a.\end{cases}$当$\frac{a}{2}>2$，即 $a>4$ 时，$f(x)_{\max}=f(2)=-2(2-a)=2$，解得 $a=3$(舍去). 当 $x>a$ 时，令 $f(x)=f(\frac{a}{2})$，解得 $x=\frac{(\sqrt{2}+1)a}{2}$. 当$\frac{a}{2}\leqslant 2\leqslant\frac{(\sqrt{2}+1)a}{2}$，即 $4(\sqrt{2}-1)\leqslant a\leqslant 4$ 时，

$f(x)_{\max}=f(\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}=2$，解得 $a=2\sqrt{2}$. 当 $2>\frac{(\sqrt{2}+1)a}{2}$，即 $a<4(\sqrt{2}-1)$ 时，$f(x)_{\max}=f(2)=2(2-a)=2$，

解得 $a=1$.

13. $(1,3)$　因为 $f(1)=a^0+2=3$，所以所过定点的坐标为 $(1,3)$.

14. $\frac{5}{18}$　$\sqrt[3]{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}=\sqrt[3]{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}=(a^{\frac{5}{6}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{18}}$.

15. 22　由题意得，观看两部电影的人数是 $15+14+11-31=9$，故仅观看了其中一部电影的人数是 $31-9=22$.

16. $(-1,2)$　因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)$.

设 $x_1<x_2$，则 $x_2+(-x_1)>0$，因为 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{x_1+x_2}<0$，所以 $\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}<0$，

则 $f(x_1)+f(-x_2)>0$，即 $f(x_1)-f(x_2)>0$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

因为 $f(x+1)<f(x^2-1)$，所以 $x+1>x^2-1$，解得 $-1<x<2$.

故不等式 $f(x+1)<f(x^2-1)$ 的解集为 $(-1,2)$.

17. 解：(1) $A=\{x|-1<x<3\}$，…… 1 分

$B=\{x|x>2\}$. …… 2 分

故 $A\cup B=\{x|x>-1\}$，…… 4 分

$A\cap B=\{x|2<x<3\}$. …… 6 分

(2) $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\{x|x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3\}$. …… 8 分

$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\leqslant 2\}$，…… 9 分

$(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=\{x|-1<x\leqslant 2\}$. …… 10 分

18. 解：(1) 由题意可得 $f(x)=f(-x)$，…… 2 分

则 $\frac{ax+1}{x^2+1}=\frac{-ax+1}{x^2+1}$，…… 3 分

解得 $a=0$. …… 5 分

(2) $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减. …… 6 分

证明如下：由(1)可得 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$，

令 $0\leqslant x_1<x_2$，则 $x_2^2-x_1^2>0$，…… 8 分

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1^2+1}-\frac{1}{x_2^2+1}=\frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}>0$，…… 10 分

即 $f(x_1)>f(x_2)$，…… 11 分

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减. …… 12 分

19. 解：(1) 令函数 $f(x)=x^2+2x-a$.

因为命题 p 为真命题，所以当 $x\in[1,3]$ 时，$f(x)_{\min}\geqslant 0$. …… 2 分

因为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=3-a$. …… 4 分

由 $3-a\geqslant 0$，解得 $a\leqslant 3$.

故 a 的取值范围是 $(-\infty,3]$. …… 5 分

(2) 由(1)可知，当命题 p 为真命题时，$a\leqslant 3$.

当命题 q 为真命题时，$\Delta=a^2-4(a+3)\geqslant 0$，解得 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 6$. …… 7 分

当命题 p 为真，命题 q 为假时，$-2<a\leqslant 3$；…… 9 分

当命题 p 为假，命题 q 为真时，$a\geqslant 6$. …… 11 分

综上，a 的取值范围是 $(-2,3]\cup[6,+\infty)$. …… 12 分

20. 解：(1) 当 $a=6$ 时，$f(x)<0$，即 $2\times 4^{x+1}-6\times 2^x+1<0$，

则 $8\times(2^x)^2-6\times 2^x+1<0$，…… 1 分

即 $(4\times 2^x-1)(2\times 2^x-1)<0$，…… 3 分

则 $\frac{1}{4}<2^x<\frac{1}{2}$，…… 4 分

解得 $-2<x<-1$. …… 5 分

故不等式 $f(x)<0$ 的解集为$\{x|-2<x<-1\}$. …………………………………………………… 6 分

(2) $f(x)=0$,即 $2\times4^{x+1}-a\cdot2^x+1=0$,

则 $a=\dfrac{1+8\times4^x}{2^x}$ …………………………………………………………………………………… 8 分

$=\dfrac{1}{2^x}+8\times2^x\geqslant4\sqrt{2}$,…………………………………………………………………………… 10 分

当且仅当$\dfrac{1}{2^x}=8\times2^x$,即 $x=-\dfrac{3}{2}$时,等号成立. …………………………………………………… 11 分

故 a 的取值范围是$[4\sqrt{2},+\infty)$. …………………………………………………………………… 12 分

21.解:(1)因为每件产品的售价为 4.75 元,所以 x 万件产品的销售收入为 $4.75x$ 万元. ……………… 1 分

当 $0<x<9$ 时,$L(x)=4.75x-(\dfrac{1}{3}x^2+x)-2=-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{15}{4}x-2$; ………………………………… 3 分

当 $x\geqslant9$ 时,$L(x)=4.75x-(5x+\dfrac{81}{x}-18)-2=16-(\dfrac{x}{4}+\dfrac{81}{x})$.

所以 $L(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{15}{4}x-2,0<x<9,\\16-(\dfrac{x}{4}+\dfrac{81}{x}),x\geqslant9.\end{cases}$ …………………………………………………… 5 分

(2)当 $0<x<9$ 时,$L(x)=-\dfrac{1}{3}(x-\dfrac{45}{8})^2+\dfrac{547}{64}$, ………………………………………………… 7 分

当 $x=\dfrac{45}{8}$时,$L(x)$取得最大值$\dfrac{547}{64}$(万元). …………………………………………………………… 8 分

当 $x\geqslant9$ 时,$L(x)=16-(\dfrac{x}{4}+\dfrac{81}{x})\leqslant16-2\sqrt{\dfrac{x}{4}\cdot\dfrac{81}{x}}=7$,……………………………………………… 10 分

当且仅当$\dfrac{x}{4}=\dfrac{81}{x}$,即 $x=18$ 时,$L(x)$取得最大值 7(万元). ……………………………………………… 11 分

因为$\dfrac{547}{64}>7$,所以当月产量为$\dfrac{45}{8}$万件时,企业所获月利润最大,最大利润为$\dfrac{547}{64}$万元. ……………… 12 分

22.解:(1)因为函数 $f(x)=x^2-4x+m$ 图象的对称轴是直线 $x=2$,

所以 $f(x)$在$[2,3]$上单调递增. ……………………………………………………………………………… 1 分

$f(x)_{\max}=f(3)=3^2-4\times3+m=0$,……………………………………………………………………… 4 分

解得 $m=3$. 故 m 的值为 3. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)当 $n\leqslant0$ 时,$f(x)$的值域为$[f(2),f(n)]$,即$[-4+m,n^2-4n+m]$, ……………………………… 6 分

故 $n^2-4n+m-(-4+m)=2n-1$,解得 $n=1$(舍去)或 $n=5$(舍去). ……………………………… 7 分

当 $0<n\leqslant2$ 时,$f(x)$的值域为$[f(2),f(4)]$,即$[-4+m,m]$, …………………………………………… 8 分

故 $m-(-4+m)=2n-1$,解得 $n=\dfrac{5}{2}$(舍去). …………………………………………………………… 9 分

当 $2<n<4$ 时,$f(x)$的值域为$[f(n),f(4)]$,即$[n^2-4n+m,m]$, ………………………………………… 10 分

故 $m-(n^2-4n+m)=2n-1$,解得 $n=1+\sqrt{2}$或 $n=1-\sqrt{2}$(舍去). …………………………………… 11 分

经检验,$n=1+\sqrt{2}$满足题意,

所以存在常数 $n=1+\sqrt{2}$,使得当 $x\in[n,4]$时,$f(x)$的值域为区间 D,且 D 的长度为 $2n-1$. ………… 12 分