

# 高二期中考试数学试卷

## 参考答案

1. C 原直线的倾斜角为  $60^\circ$ , 旋转后倾斜角为  $120^\circ$ , 即所得新直线的斜率为  $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ .

2. B 因为  $a=3, b=\sqrt{5}$ , 所以  $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$ , 故  $\triangle PF_1F_2$  的周长为  $2a+2c=10$ .

3. B 由题意知,  $\mathbf{a}=(2, -1, 1), \mathbf{b}=(1, x+1, 2), \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 所以  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=2-(x+1)+2=0$ , 解得  $x=3$ .

4. A 因为椭圆  $C$  的一个焦点坐标为  $(2, 0)$ , 所以  $a^2=5, b^2=-m, c^2=4$ .

因为  $a^2=b^2+c^2$ , 所以  $5=-m+4$ , 故  $m=-1$ .

5. D 因为  $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}$

$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AA_1},$$

所以  $x=-1, y=1, z=\frac{1}{6}$ , 故  $x+y+z=\frac{1}{6}$ .

6. C 因为  $l_1 \parallel l_2$ , 所以  $\begin{cases} m^2=1, \\ \frac{1}{m} \neq -1, \end{cases}$  得  $m=1$ .

7. D 因为  $\overrightarrow{AP}=(1, -1, 1), \mathbf{n}=(-1, -2, 2)$ , 所以  $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}=-1+2+2=3, |\mathbf{n}|=\sqrt{1+4+4}=3$ ,

则点  $P$  到平面  $\alpha$  的距离  $d=\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=1$ .

8. A 因为椭圆  $C$  的离心率  $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $a=\sqrt{2}c$ .

因为  $a^2=b^2+c^2$ , 所以  $b=c$ , 所以椭圆  $C$  的蒙日圆的半径为  $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}b$ .

因为  $MP \perp MQ$ , 所以  $PQ$  为蒙日圆的直径, 所以  $|PQ|=2\sqrt{3}b$ ,

所以  $|MP|^2+|MQ|^2=|PQ|^2=12b^2$ .

因为  $|MP| \cdot |MQ| \leq \frac{|MP|^2+|MQ|^2}{2}=6b^2$ , 当且仅当  $|MP|=|MQ|=\sqrt{6}b$  时, 等号成立,

所以  $\triangle MPQ$  面积的最大值为  $\frac{1}{2}MP \cdot MQ=3b^2$ .

9. BD 因为  $k_{OA}=2>1, k_{OB}<0$ , 所以直线  $x-y=0$  与线段  $AB$  无公共点, A 错误. 因为  $k_{AB}=\frac{4-2}{-3-1}=-\frac{1}{2}>$

$-1$ , 所以直线  $AB$  的倾斜角大于  $135^\circ$ , B 正确. 因为线段  $BC$  的中点为  $(-\frac{5}{2}, 2)$ , 且直线  $BC$  的斜率为  $\frac{4-0}{-3+2}$

$=-4$ , 所以  $BC$  上的中垂线所在直线的方程为  $y-2=\frac{1}{4}(x+\frac{5}{2})$ , 即  $y=\frac{1}{4}x+\frac{21}{8}$ , C 错误. 因为  $k_{BC}=\frac{4}{-3+2}$

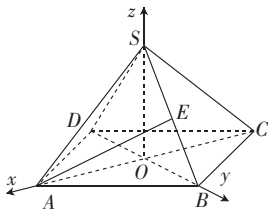
$=-4$ , 所以  $BC$  上的高所在直线的方程为  $y-2=\frac{1}{4}(x-1)$ , 即  $x-4y+7=0$ , D 正确.

10. BCD 以  $O$  为原点建立如图所示的空间直角坐标系  $O-xyz$ .

可知  $AD=\sqrt{AO^2+OD^2}=\sqrt{2}, SA=\sqrt{6}$ , 所以  $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{5}$ .

因为  $A(1, 0, 0), S(0, 0, \sqrt{5}), C(-1, 0, 0), E(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ , 所以  $\overrightarrow{AE}=(-1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ ,

$\overrightarrow{CS}=(1, 0, \sqrt{5})$ . 因为  $\cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CS} \rangle = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{CS}|} = \frac{-1+\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{10}$ , 所以



异面直线  $AE$  与  $SC$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{10}$ .

11. AC 因为  $\overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{FM}$ , 所以  $B, F, M$  三点共线. 连接  $OM$  (图略), 在  $\triangle ABC$  中, 因为  $OM$  为中位线, 所以  $\triangle OFM \sim \triangle AFB$ , 所以  $\frac{|FM|}{|BF|} = \frac{|OF|}{|FA|} = \frac{|OM|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ , 所以  $\lambda = 2$ , 故 A 正确.

因为  $\frac{|OF|}{|FA|} = \frac{c}{a-c} = \frac{1}{2}$ , 所以  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ , 故 C 正确.

12. ABD 设  $C(x, y)$ , 因为  $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} = \frac{1}{2}$ ,

所以  $x^2 + y^2 + 4x = 0$ , 即  $(x+2)^2 + y^2 = 4$ ,

所以动点  $C$  的轨迹为以  $N(-2, 0)$  为圆心, 2 为半径的圆, 故 A 正确.

因为直线  $l$  过定点  $M(-1, 1)$ , 而点  $M(-1, 1)$  在圆  $C$  内, 所以直线  $l$  与圆  $C$  相交, 故 B 正确.

当直线  $l$  与  $NM$  垂直时, 动点  $C$  到直线  $l$  的距离最大, 且最大值为  $r + |NM| = 2 + \sqrt{2}$ , 故 C 错误.

记圆心  $N$  到直线  $l$  的距离为  $d$ , 则  $d = \frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$ .

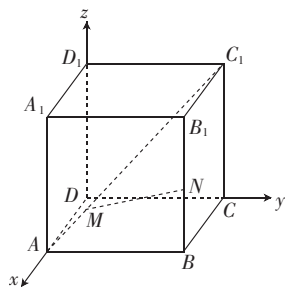
因为  $|PQ|^2 = 4(r^2 - d^2)$ , 所以  $4(r^2 - d^2) = 8$ .

因为  $r = 2$ , 所以  $d = \sqrt{2}$ . 由  $\frac{(m-1)^2}{m^2+1} = 2$ , 得  $m = -1$ , 故 D 正确.

13. 6 因为椭圆  $C$  的焦距为  $2\sqrt{5}$ , 所以  $c = \sqrt{5}$ . 因为  $c^2 = a^2 - b^2$ , 所以  $a = 3$ , 故椭圆  $C$  的长轴长为  $2a = 6$ .

14.  $\sqrt{11}$  如图所示, 以点  $D$  为坐标原点, 以  $DA, DC, DD_1$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴, 建立空间直角坐标系  $D-xyz$ , 则  $M(3, 1, 1), N(4, 4, 2)$ ,  $|MN| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ .

15.  $\pm\sqrt{7}$  设圆心  $C$  到直线  $ax + y + 2 = 0$  的距离为  $d$ , 则  $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{4-d^2} \cdot d = 2$ , 则  $d^4 - 4d^2 + 4 = 0$ , 解得  $d = \sqrt{2}$ , 即  $\frac{|2+2|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2}$ , 解得  $a = \pm\sqrt{7}$ .



16.  $4\sqrt{2}$  设点  $A$  关于直线  $x + y - 1 = 0$  对称的点为  $A'(a, b)$ , 设军营所在区域的圆心为  $C(0, -2)$ .

根据题意,  $|A'C| - \sqrt{2}$  为最短距离,  $AA'$  的中点为  $(\frac{a-4}{2}, \frac{b}{2})$ , 直线  $AA'$  的斜率为 1,

故直线  $AA'$  方程为  $y = x + 4$ , 由  $\begin{cases} \frac{a-4}{2} + \frac{b}{2} - 1 = 0, \\ \frac{b}{2} = \frac{a-4}{2} + 4, \end{cases}$  解得  $a = 1, b = 5$ ,

所以  $|A'C| = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$ , 故  $|A'C| - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ , 即“将军饮马”的最短总路程为  $4\sqrt{2}$ .

17. 解: (1) 因为椭圆经过  $P(2\sqrt{3}, 0), Q(0, \sqrt{6})$  两点, 所以  $a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{6}$ , ..... 3 分

故椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ . ..... 5 分

(2) 因为焦点坐标分别为  $(0, 5), (0, -5)$ , 所以  $c = 5$ . ..... 6 分

因为短半轴长为 4, 所以  $b = 4$ , 所以  $a^2 = b^2 + c^2 = 41$ , ..... 8 分

故椭圆的标准方程为  $\frac{y^2}{41} + \frac{x^2}{16} = 1$ . ..... 10 分

18. 解: (1) 设所求直线的方程为  $3x - y + b = 0$ , ..... 1 分

将  $A$  的坐标代入, 得  $b = 6$ , ..... 3 分

则所求直线的方程为  $3x - y + 6 = 0$ . ..... 4 分

(2)由题意得  $k_{MN} = \frac{4-3}{0-2} = -\frac{1}{2}$ . ..... 5分

所求直线的斜率  $k = -\frac{1}{k_{MN}} = 2$ . ..... 6分

设所求直线的斜截式方程为  $y = 2x + b$ , ..... 7分

当  $x = 0$  时,  $y = b$ , 当  $y = 0$  时,  $x = -\frac{b}{2}$ , 由  $b + \frac{b}{2} = 3$ , 得  $b = 2$ , ..... 9分

故所求直线的方程为  $y = 2x + 2$  (或  $2x - y + 2 = 0$ ). ..... 12分

19. 解: (1) 当  $G$  为  $AB$  的中点时, 满足  $AF \parallel$  平面  $PCG$ . ..... 1分

证明如下: 如图 1, 设  $PC$  的中点为  $H$ , 连接  $FH, PG, CG, GH$ ,

则  $FH \parallel CD$ , 且  $FH = \frac{1}{2}CD$ . ..... 2分

因为  $GA = \frac{1}{2}AB, AB \parallel CD, AB = CD$ ,

所以  $GA \parallel HF, GA = HF$ , ..... 3分

所以四边形  $AGHF$  为平行四边形,

则  $AF \parallel GH$ . ..... 5分

因为  $GH \subset$  平面  $PCG, AF \not\subset$  平面  $PCG$ ,

所以  $AF \parallel$  平面  $PCG$ . ..... 6分

(2) 选择①: 如图 2, 取  $BC$  的中点  $E$ , 连接  $AE$ , 取  $AD$  的中点  $M$ , 连接  $FM, CM$ , 则  $FM \parallel PA$ .

因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 所以  $FM \perp$  平面  $ABCD$ ,

则  $FC$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $\angle FCM$ , 即  $\angle FCM = \frac{\pi}{6}$ .

在直角  $\triangle FCM$  中, 因为  $FM = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}, \angle FCM = \frac{\pi}{6}$ , 所以  $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

因为  $CM = AE$ , 所以  $AE^2 + BE^2 = AB^2$ ,

所以  $BC \perp AE$ , 所以  $AE, AD, AP$  两两垂直. ..... 7分

分别以  $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$  的方向为  $x, y, z$  轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系  $A-xyz$ .

因为  $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), E(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), F(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), P(0, 0, 1)$ ,

所以  $\overrightarrow{AF} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \overrightarrow{CF} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}), \overrightarrow{CP} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ . ..... 8分

设平面  $FAC$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

则  $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CF} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z = 0, \end{cases}$  令  $x = 1$ , 得  $\mathbf{n} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ . ..... 10分

设直线  $CP$  与平面  $FAC$  所成的角为  $\theta$ ,

则  $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{CP} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CP}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{CP}|} = \frac{\sqrt{42}}{14}$ ,

故直线  $CP$  与平面  $FAC$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{42}}{14}$ . ..... 12分

选择②: 因为  $PA \perp$  平面  $ABCD, BC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PA \perp BC$ ,

如图 3, 取  $BC$  的中点  $E$ , 连接  $AE$ .

因为底面  $ABCD$  是菱形,  $\angle ABC = 60^\circ$ , 所以  $\triangle ABC$  是正三角形.

因为  $E$  是  $BC$  的中点, 所以  $BC \perp AE$ ,

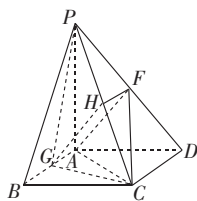


图 1

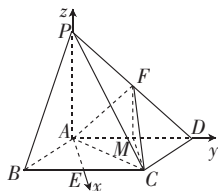


图 2

所以  $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$  两两垂直. .... 7 分

分别以  $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$  的方向为  $x, y, z$  轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系  $A-xyz$ .

因为  $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), E(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), F(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), P(0, 0, 1)$ ,

所以  $\overrightarrow{AF}=(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \overrightarrow{CF}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}), \overrightarrow{CP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ . .... 8 分

设平面  $FAC$  的法向量为  $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CF} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x=1, \text{ 得 } \boldsymbol{n}=(1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

设直线  $CP$  与平面  $FAC$  所成的角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{CP} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CP}|}{|\boldsymbol{n}| |\overrightarrow{CP}|} = \frac{\sqrt{42}}{14},$$

故直线  $CP$  与平面  $FAC$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{42}}{14}$ . .... 12 分

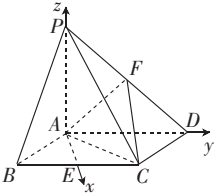


图 3

20. (1) 证明: 因为底面  $ABCD$  为矩形, 所以  $O$  为  $AC, BD$  的中点, .... 1 分

连接  $PO$ . 因为  $PA=PC, PB=PD$ , 所以  $PO \perp AC, PO \perp BD$ , .... 2 分

又  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ , 所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ . .... 3 分

因为  $PO \subset$  平面  $PAC$ , 所以平面  $PAC \perp$  平面  $ABCD$ . .... 5 分

(2) 解: 取  $AB$  的中点  $E, BC$  的中点  $F$ , 连接  $OE, OF$ . 因为底面  $ABCD$  为矩形,

所以  $OE \perp OF$ . 设  $AD=2$ , 则  $AB=2\sqrt{2}$ , 以  $O$  为原点, 建立如图所示的空间直

角坐标系, 则  $A(1, -\sqrt{2}, 0), B(1, \sqrt{2}, 0), D(-1, -\sqrt{2}, 0), P(0, 0, 1)$ ,

$\overrightarrow{AD}=(-2, 0, 0), \overrightarrow{AP}=(-1, \sqrt{2}, 1), \overrightarrow{AB}=(0, 2\sqrt{2}, 0)$ . .... 6 分

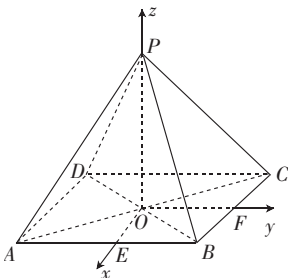
设平面  $PAB$  的法向量为  $\boldsymbol{n}=(x_1, y_1, z_1)$ ,

$$\text{由} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\sqrt{2}y_1 = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -x_1 + \sqrt{2}y_1 + z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_1=1, \text{ 所以 } \boldsymbol{n}=(1, 0, 1). \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面  $PAD$  的法向量为  $\boldsymbol{m}=(x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\text{由} \begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AD} = -2x_2 = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AP} = -x_2 + \sqrt{2}y_2 + z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_2=-1, \text{ 所以 } \boldsymbol{m}=(0, -1, \sqrt{2}). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

故  $|\cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}| |\boldsymbol{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以平面  $PAD$  与平面  $PAB$  夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . .... 12 分



21. (1) 解: 点  $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  的坐标满足  $x^2+y^2=4$ , 所以  $P$  为圆  $C$  上一点. .... 1 分

圆  $C: x^2+y^2=4$  的圆心为  $C(0, 0)$ , 则  $k_{CP}=1$ , .... 2 分

所以直线  $l$  的斜率为  $-1$ , .... 3 分

所以直线  $l$  的方程为  $y-\sqrt{2}=-(x-\sqrt{2})$ , 即  $x+y-2\sqrt{2}=0$ . .... 5 分

(2) 证明: 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 直线  $m$  的方程为  $y=kx+1$ ,

由圆  $C: x^2+y^2=4$ , 可得  $A(0, 2), B(0, -2)$ .

$$\text{联立方程组} \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=kx+1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并化简得 } (k^2+1)x^2+2kx-3=0,$$

所以  $x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+1}, x_1x_2=-\frac{3}{k^2+1}$ . .... 7 分

直线  $AM$  的方程为  $y=\frac{y_1-2}{x_1}x+2$ , ①

直线  $BN$  的方程为  $y = \frac{y_2+2}{x_2}x - 2$ , ② ..... 8 分

由①②知  $\frac{y-2}{y+2} = \frac{y_1-2}{x_1} \cdot \frac{x_2}{y_2+2} = \frac{x_2(kx_1-1)}{x_1(kx_2+3)} = \frac{kx_1x_2-x_2}{kx_1x_2+3x_1} = \frac{k \cdot \frac{-3}{k^2+1} - x_2}{k \cdot \frac{-3}{k^2+1} + 3(\frac{-2k}{k^2+1} - x_2)} = \frac{1}{3}$ , ..... 10 分

由  $\frac{y-2}{y+2} = \frac{1}{3}$ , 化简得  $y=4$ , 故点  $T$  在定直线  $y=4$  上. .... 12 分

22. 解: (1) 因为  $A(0, b), B(a, 0)$ , 所以直线  $AB$  的方程为  $bx + ay - ab = 0$ . .... 1 分

因为直线  $AB$  与圆  $O$  相切, 所以  $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 即  $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{4}{5}$ . .... 2 分

因为椭圆  $C$  的面积是圆  $O$  面积的  $\frac{5}{2}$  倍, 所以  $ab\pi = \frac{5}{2}\pi \times \frac{4}{5}$ ,  $ab=2$ , ..... 3 分

解得  $a=2, b=1$ , 故椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . .... 4 分

(2) 当过  $P$  的切线的斜率不存在时, 切线方程为  $x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 此时  $|PM| = |PN| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,

所以  $|PM| \cdot |PN| = \frac{4}{5}$ . .... 5 分

当过  $P$  的切线的斜率存在时, 设切线方程为  $y = kx + m$ ,

则  $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 所以  $m^2 = \frac{4}{5}(k^2+1)$ . .... 6 分

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 则  $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$

得  $(1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$ , ..... 7 分

所以  $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4m^2-4}{1+4k^2}$ . .... 8 分

因为  $|PM|^2 \cdot |PN|^2 = (x_1^2 + y_1^2 - \frac{4}{5})(x_2^2 + y_2^2 - \frac{4}{5})$ , 且  $y_1^2 = 1 - \frac{x_1^2}{4}, y_2^2 = 1 - \frac{x_2^2}{4}$ , ..... 9 分

所以  $|PM|^2 \cdot |PN|^2 = (\frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{5})(\frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{5})$   
 $= \frac{9}{16}x_1^2x_2^2 + \frac{3}{20}[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2] + \frac{1}{25}$   
 $= \frac{9}{16} \cdot \frac{(4m^2-4)^2}{(1+4k^2)^2} + \frac{3}{20}[\frac{64k^2m^2}{(1+4k^2)^2} - \frac{8m^2-8}{1+4k^2}] + \frac{1}{25}$   
 $= \frac{9(m^2-1)^2}{(1+4k^2)^2} + \frac{3}{20} \cdot \frac{8(m^2-1)(4k^2-1) + 64k^2}{(1+4k^2)^2} + \frac{1}{25}$ . .... 10 分

因为  $m^2 = \frac{4}{5}(k^2+1)$ , 所以  $m^2-1 = \frac{1}{5}(4k^2-1)$ ,

所以  $|PM|^2 \cdot |PN|^2 = \frac{\frac{9}{25}(4k^2-1)^2}{(1+4k^2)^2} + \frac{\frac{6}{25}(4k^2-1)^2 + \frac{48}{5}k^2}{(1+4k^2)^2} + \frac{1}{25}$   
 $= \frac{\frac{3}{5}(4k^2-1)^2 + \frac{48}{5}k^2}{(1+4k^2)^2} + \frac{1}{25} = \frac{\frac{3}{5}(4k^2+1)^2}{(1+4k^2)^2} + \frac{1}{25} = \frac{16}{25}$ , ..... 11 分

所以  $|PM| \cdot |PN| = \frac{4}{5}$ , 即  $|PM| \cdot |PN|$  为定值, 且  $|PM| \cdot |PN| = \frac{4}{5}$ . .... 12 分