高二第一学期期中
数学试卷参考答案

1. D　因为 $a_2=4$，所以 $a_3=9$.

2. C　由题意得 $y=2x\cos 30°-8=\sqrt{3}x-8$，所以该直线的倾斜角为 $60°$.

3. C　$d=\frac{11-1}{5-3}=5$.

4. B　因为抛物线 $y=x^2+2x+3$ 的顶点坐标为 $(-1,2)$，所以圆 C 的圆心坐标为 $(-1,2)$. 又圆 C 经过点 $(1,6)$，所以圆 C 的半径 $R=\sqrt{(-1-1)^2+(2-6)^2}=2\sqrt{5}$，所以圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$.

5. D　因为 $4+5+9=2+2+14$，所以 $a_4a_5a_9=a_2^2a_{14}$，在等比数列 $\{a_n\}$ 中，各项均不为 0，所以必有 $a_{14}=1$.

6. A　$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$ 表示点 (x,y) 与点 $A(0,1)$，$B(0,-1)$ 的距离之和为 2，因为点 $A(0,1)$，$B(0,-1)$ 的距离也为 2，所以 M 表示线段 AB.

7. D　由题意得圆心 M 到直线 $3x+4y=0$ 的距离 $d=\frac{|3\times2+4\times1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$，则 $|AB|=2\sqrt{16-4}=4\sqrt{3}$，所以 $\triangle MAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$.

8. C　根据题意，从 2023 年 10 月 26 日开始到读完的前一天，他每天阅读《巴黎圣母院》的时间(单位:分钟)依次构成等差数列，且首项为 60，公差为 -2，

则由 $60n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)\leqslant820$，且 $60-2n\geqslant0$，得 $n\leqslant20$，所以小方读此书 20 天恰好可以读完，故他恰好读完《巴黎圣母院》的日期为 2023 年 11 月 14 日.

9. AC　因为 $a_1=2$，$a_2=16$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式可能为 $a_n=14n-12$ 或 $a_n=2^{n^2}$.

10. ACD　点 $(1,\sqrt{3})$ 在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，点 $(1,0)$ 到直线 $y=\sqrt{3}x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，A 正确，B 错误.

因为 $2\times(-\frac{1}{2})=-1$，所以直线 $y=2x$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 垂直，C 正确. 圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 外切，D 正确.

11. ABC　当 $a_n=2\sqrt{2}-2n$ 时，$\{a_n\}$ 是单调递减数列，$|a_n|=\begin{cases}2\sqrt{2}-2, n=1,\\ 2n-2\sqrt{2}, n\geqslant2,\end{cases}$ 因为 $|a_1|-|a_2|=4\sqrt{2}-6<0$，当 $n\geqslant2$ 时，$\{2n-2\sqrt{2}\}$ 单调递增，所以 $\{|a_n|\}$ 是单调递增数列，所以 $\{2\sqrt{2}-2n\}$ 是 T 数列.

当 $a_n=(-4)^n$ 时，易知 $\{(-4)^n\}$ 不是递增数列，因为 $|(-4)^n|=4^n$，所以 $\{|a_n|\}$ 是单调递增数列，所以 $\{(-4)^n\}$ 是 T 数列.

因为$\frac{1-n^2}{2n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-n)$，所以$\{\frac{1-n^2}{2n}\}$是递减数列，因为$|\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-n)|=\frac{1}{2}(n-\frac{1}{n})\geqslant 0$，且$\{|a_n|\}$是单调递增数列，所以$\{\frac{1-n^2}{2n}\}$是 T 数列.

当 $a_n=\frac{2^n}{3n-1}$时，$a_n>0$，$a_1=1>a_2=\frac{4}{5}$，所以$\{|a_n|\}$不是单调递增数列，$\{\frac{2^n}{3n-1}\}$不是 T 数列.

12. BD　因为曲线$(x+\sqrt{3})(\sqrt{3}x-y-2)=0$ 与圆 $x^2+(y-m)^2=m^2$ 恰有 4 个公共点，所以直线 $x+\sqrt{3}=0$，$\sqrt{3}x-y-2=0$ 均与圆 $x^2+(y-m)^2=m^2$ 相交，且两直线的交点$(-\sqrt{3},-5)$不在该圆上，

则有$\begin{cases}\sqrt{3}<|m|,\\ \frac{|\sqrt{3}\times 0-m-2|}{\sqrt{3+1}}<|m|,\\ (-\sqrt{3})^2+(-5-m)^2\neq m^2,\end{cases}$　解得 $m\in(-\infty,-\frac{14}{5})\cup(-\frac{14}{5},-\sqrt{3})\cup(2,+\infty)$.

13. 30　这个数列的第 5 项为 $5\times 6=30$.

14. $\sqrt{5}$　两平行直线 $y=2x$ 与 $y=2x-5$ 之间的距离为$\frac{5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$.

15. $(-\sqrt{3},\frac{3}{4})$　点$(1,0)$到直线 $ax+y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}>1$，解得 $a<\frac{3}{4}$. 点$(0,1)$到直线 $ax+y-2=0$ 的距离 $d'=\frac{|-1|}{\sqrt{a^2+1}}>\frac{1}{2}$，解得$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$.

故 a 的取值范围是$(-\sqrt{3},\frac{3}{4})$.

16. 90；$108-\frac{162}{3^n}$（$108-\frac{162}{3^n}$也可以写为 $108-54\times(\frac{1}{3})^{n-1}$（或 $108-\frac{54}{3^{n-1}}$），还可以写为 $108-2\times(\frac{1}{3})^{n-4}$（或 $108-\frac{2}{3^{n-4}}$））　设小球第 1 次落地时经过的路程为 a_1，小球从第 $n-1(n\geqslant 2)$次落地到第 n 次落地时经过的路程为 a_n 米，则 $a_1=54$，$a_2=54\times\frac{1}{3}\times 2$，$a_3=54\times(\frac{1}{3})^2\times 2$，$\cdots$，$a_n=54\times(\frac{1}{3})^{n-1}\times 2(n\geqslant 2)$，

所以小球第 2 次落地时，经过的路程是 $54+54\times\frac{1}{3}\times 2=90$ 米，小球第 $n(n\geqslant 2)$次落地时，经过的路程是 $a_1+a_2+\cdots+a_n=54+108\times[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}]=54+108\times\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}$

$=108-\frac{162}{3^n}$米.

17. 解：当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2+3^{n+1}-3^n=2n-1+2\times 3^n$，……………… 6 分

$a_1=S_1=1^2+3^2=10$, …………………………………………………… 8分

所以 $a_n=\begin{cases}10, n=1,\\ 2n-1+2\times3^n, n\geqslant2.\end{cases}$ …………………………………………… 10分

18.解:(1)由$\begin{cases}x-y+1=0,\\ 2x+y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=2,\end{cases}$即 l_1 和 l_2 的交点坐标为(1,2), ………………… 2分

因为直线 l 经过点(3,3),所以直线 l 的斜率为$\frac{3-2}{3-1}=\frac{1}{2}$, ……………………………… 4分

所以直线 l 的方程为 $y-2=\frac{1}{2}(x-1)$, ………………………………………………… 5分

令 $y=0$,得 $x=-3$,所以直线 l 在 x 轴上的截距为-3. ……………………………… 6分

(2)因为直线 l 与直线 l_3: $4x+5y-12=0$ 平行,

所以可设直线 l 的方程为 $4x+5y+m=0$, ……………………………………………… 8分

又直线 l 经过点(1,2),所以 $4\times1+5\times2+m=0$,得 $m=-14$, ……………………… 11分

所以直线 l 的一般式方程为 $4x+5y-14=0$. ……………………………………………… 12分

19.解:(1)由 $a_n=a_{n+1}+2$,得 $a_{n+1}-a_n=-2$, ………………………………………… 1分

所以$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列, ………………………………………………………… 2分

因为 $a_3=-5$,所以 $a_1=a_3-2\times(-2)=-1$. …………………………………………… 3分

所以 $a_n=1-2n$. ……………………………………………………………………………… 5分

(2)由(1)知$\frac{1}{a_n(2n+1)}=-\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=-\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$, ………………… 8分

所以 $S_n=-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=-\frac{n}{2n+1}$. ……

…………………………………………………………………………………………………… 12分

20.解:(1)因为圆 M 的圆心在 y 轴上,所以可设圆 M 的方程为 $x^2+(y-b)^2=r^2$. ……… 2分

又圆 M 经过 $A(-1,0)$,$B(1,4)$两点,所以$\begin{cases}1^2+b^2=r^2,\\ 1^2+(4-b)^2=r^2,\end{cases}$得$\begin{cases}b=2,\\ r^2=5.\end{cases}$ ……………… 4分

故圆 M 的圆心坐标为(0,2),半径为$\sqrt{5}$. ………………………………………………… 6分

(2)由题意得圆心 M 到直线 $x+2y+11=0$ 的距离为$\frac{|0+2\times2+11|}{\sqrt{1^2+2^2}}=3\sqrt{5}$, ………… 9分

所以 P 到直线 $x+2y+11=0$ 的距离的最小值为 $3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$. ……………… 12分

21.(1)证明:因为 $a_{n+1}=2a_n+n-1$,所以$\frac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n}=\frac{2a_n+n-1+n+1}{a_n+n}=\frac{2(a_n+n)}{a_n+n}=2$. ……

…………………………………………………………………………………………………… 3分

又 $a_1=3$,所以 $a_1+1=4$, ………………………………………………………………… 4分

所以数列$\{a_n+n\}$是等比数列,且首项为4,公比为2. ………………………………………… 5分

(2)解:由(1)知 $a_n+n=4\cdot2^{n-1}$, ………………………………………………………… 6分

即 $a_n+n=2\cdot2^n$,则$\frac{2n}{a_n+n}=\frac{n}{2^n}$. ………………………………………………………… 7分

$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$, ………………………………………………………… 8 分

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$, ……………………………………………………… 9 分

则$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$, …………………… 11 分

所以 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. ………………………………………………………… 12 分

22.(1)证明:圆 C 的方程可化为$\lambda(x^2+y^2-5)-2x-4y+6=0$. ……………………… 1 分

令$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\-2x-4y+6=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{11}{5},\\y=\frac{2}{5},\end{cases}$ …………………………………… 3 分

故圆 C 恒过两个定点,且这两个定点的坐标为$(-1,2)$和$(\frac{11}{5},\frac{2}{5})$. …………………… 4 分

(2)解:当$\lambda=1$时,圆 C 的方程可化为 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.

由题知直线 l 的斜率 k 存在且不为 0,设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$. ……………… 5 分

联立$\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y+1=0,\\y=k(x+1),\end{cases}$消去 x 得$(1+k^2)y^2-4k(1+k)y+4k^2=0$,………… 7 分

所以$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{4k(1+k)}{1+k^2},\\y_1y_2=\frac{4k^2}{1+k^2},\end{cases}$ ……………………………………………… 8 分

$\Delta=16k^2(1+k)^2-16k^2(1+k^2)>0$,解得 $k>0$. …………………………………… 9 分

因为$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{1+k}{k}$, ……………………………………………………… 10 分

所以$\frac{1+k}{k}=k$,解得$=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,………………………………………………………… 11 分

又 $k>0$,所以 $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ………………………………………………………… 12 分