2024～2025 学年高三 2 月测评(福建)·数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	B	B	D	A	C
题号	9	10	11					
答案	AD	ABD	ACD					

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.**【答案】**A

【解析】易知 $B=\{2,3\}$,所以 $A\cap B=\{2,3\}$,故选 A.

2.**【答案】**B

【解析】$z=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$,所以 $|z|=\sqrt{5}$,故选 B.

3.**【答案】**C

【解析】两边平方可得,$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\boldsymbol{a}^2-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{5}$,$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{5}$,故 $\sin\theta=\frac{4}{5}$,故选 C.

4.**【答案】**B

【解析】设椭圆长轴为 $2a$,焦距为 $2c$,易知 $a-c=1.47\times10^8$,$a+c=1.52\times10^8$,解得 $2c=5.00\times10^6$,所以椭圆的焦距约为 5.00×10^6 km,故选 B.

5.**【答案】**B

【解析】因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调,且当 $x\leqslant2$ 时,$f(x)=x-2$ 单调递增,$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则需满足

$$\begin{cases}a>1,\\2^2-2a\geqslant0,\\\frac{a}{2}\leqslant2,\\2-2\leqslant\log_a(2^2-2a),\end{cases}$$

解得 $1<a\leqslant\frac{3}{2}$,即 a 的取值范围是 $\left(1,\frac{3}{2}\right]$,故选 B.

6.**【答案】**D

【解析】由 $\sin(\alpha+\beta)=3\sin(\alpha-\beta)$ 可知,$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=3\sin\alpha\cos\beta-3\cos\alpha\sin\beta$,所以 $2\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta$,可得 $\tan\alpha=2\tan\beta$,设 $\tan\beta=m$,则 $\tan\alpha=2m$,$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m}{1+2m^2}\leqslant\frac{m}{2\sqrt{2}m}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,当且仅当 $\tan\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,等号成立,故选 D.

7.**【答案】**A

【解析】在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$,即 $4=16-2ac(1+\cos B)$,整理得 $1+\cos B=\frac{6}{ac}\geqslant\frac{24}{(a+c)^2}=\frac{3}{2}$,所以 $\cos B\geqslant\frac{1}{2}$,故 $0<\sin B\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\frac{b}{\sin B}=2R\geqslant\frac{4}{\sqrt{3}}$,所以 $R\geqslant$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积的最小值为 $4\pi\left[\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]=8\pi$，故选 A.

8.【答案】C

【解析】设 $|MN|=|OM|=m$，则 $|F_2N|=|NP|=m$，所以 $|F_2P|=2m$，$|F_1P|=4m$，因为 $|F_1P|-|F_2P|=4m-2m=2a$，所以 $m=a$，即 $|F_2P|=2a$，$|F_1P|=4a$，在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由勾股定理，有 $(4a)^2+(2a)^2=(2c)^2$，解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，故选 C.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.【答案】AD（全部选对得 6 分，选对 1 个得 3 分，有选错的得 0 分）

【解析】由 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，$g(x)$ 的最小正周期为 π，A 选项正确；

由 $2\times\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$，$g(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{5\pi}{6}$ 对称，B 选项错误；

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{3}$，可得 $g(x)_{\min}=-1$，C 选项错误；

函数 $h(x)=g\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]=\sin 2x$，为奇函数，D 选项正确，故选 AD.

10.【答案】ABD（全部选对得 6 分，选对 1 个得 2 分，选对 2 个得 4 分，有选错的得 0 分）

【解析】当 $a=0$ 时，$f(x)+f(-x)=2b$，A 选项正确；

$f'(x)=3x^2+2ax-1$，因为 $\Delta=4a^2+12>0$，所以 $f'(x)=3x^2+2ax-1=0$ 有两个不相等的实数根，即 $f(x)$ 恒有两个极值点，B 选项正确；

易知 $x_1+x_2=-\frac{2a}{3}$，$x_1x_2=-\frac{1}{3}$，$|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{a^2+3}}{3}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，C 选项错误；

由 $f(m)=f(n)$（其中 $m<n$）可知，$m^3-m+b=n^3-n+b$，

即 $(m-n)(m^2+mn+n^2-1)=0$，所以 $m^2+mn+n^2-1=(m-n)^2+3mn-1=0$，

所以 $(m-n)^2-1=-3mn\leqslant\frac{3(-m+n)^2}{4}$，

所以 $n-m\leqslant 2$，D 选项正确；故选 ABD.

11.【答案】ACD（全部选对得 6 分，选对 1 个得 2 分，选对 2 个得 4 分，有选错的得 0 分）

【解析】当 $n\geqslant 2$ 时，由 $a_n=\frac{t}{Q_{n-1}+1}=\frac{t}{t-a_{n-1}+1}$，选项 A 正确；

由 $n=1$ 时，$Q_1+a_1=t$，可得 $a_1=\frac{t}{2}$，可得 $a_2=\frac{t}{3}$；$n=2$ 时，$\frac{t}{2}a_2+a_2=t$，代入 $a_2=\frac{t}{3}$，有 $\frac{t^2}{6}+\frac{t}{3}=t$，可得 $t=4$，故 B 选项错误；

当 $t=2$ 时，$a_1=1$，$a_n=\frac{2}{3-a_{n-1}}$，所以 $a_n-1=\frac{a_{n-1}-1}{3-a_{n-1}}$，因为 $a_1-1=0$，所以 $a_2-1=0$，$a_n-1=0$，所以 $\{a_n\}$ 为常数列，故选项 C 正确；

$\frac{1}{Q_n}-\frac{1}{Q_{n-1}}=\frac{1}{t-a_n}-\frac{1}{t-a_{n-1}}=\frac{1}{t-\frac{t}{t-a_{n-1}+1}}-\frac{1}{t-a_{n-1}}=\frac{1-a_{n-1}}{t^2-ta_{n-1}}(n\geqslant 2)$，若数列 $\left\{\frac{1}{Q_n}\right\}$ 为等差数列，则 $\frac{1-a_{n-1}}{t^2-ta_{n-1}}$ 为常数 d，

①若 $d=0$,则 $a_{n-1}=1(n\geqslant 2)$恒成立,即 $a_n=1(n\geqslant 1)$恒成立,所以 $t=2$;

②若 $d\neq 0$,则 $1-a_{n-1}=dt^2-dta_{n-1}(n\geqslant 2)$,所以$\begin{cases}1=dt^2,\\1=dt,\end{cases}$解得$\begin{cases}t=1,\\d=1,\end{cases}$

所以 $t=1$ 或 $t=2$,故选项 D 正确;故选 ACD.

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12.**【答案及评分细则】**0.136(5 分,结果正确即给分)

【解析】易知 $P(X<0)=P(X>2)$,所以 $P(2<X<3)=P(X<0)+P(X<3)-1=1.136-1=0.136$.

13.**【答案及评分细则】**9(5 分,其他结果均不得分)

【解析】设 $a+1=x>0,2-b=y>0$,则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$,$a-b=x+y-3=3(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-3=$

$3\left(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)-3\geqslant 9$.(当且仅当 $x=y=6$ 时,即 $a=5,b=-4$ 取"=")

14.**【答案及评分细则】**$(7,11)\cup(13,16]$(5 分,结果正确即给分)

【解析】设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,则当 $x\in[0,3]$时,$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$,所以 $g(x)$在$[0,3]$上单调递增,

因为 $g(-x)=\frac{f(-x)}{e^{-x}}=-\frac{f(x)}{e^x}=-g(x)$,所以 $g(x)$为奇函数,又 $g(3+x)=\frac{f(3+x)}{e^{3+x}}=\frac{f(3-x)}{e^{3-x}}=g(3-x)$,

所以 $g(x)$关于 $x=3$ 对称,$g(5)=\frac{f(5)}{e^5}=\frac{1}{e}$,

由$|g(x)|$的对称性可知,$|g(5)|=|g(7)|=|g(11)|=|g(13)|=|g(17)|$.

由$|f(x)|>e^{x-1}$可得,$|g(x)|>e^{-1}$,所以关于 x 的不等式$|f(x)|>e^{x-1}$在区间$[6,16]$内的解集为$(7,11)\cup(13,16]$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

15.**【答案】**(1)详见解析　(2)$\frac{\sqrt{3}}{6}$

【解析及评分细则】(1)因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,$BE\subset$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BE$,…… 1 分

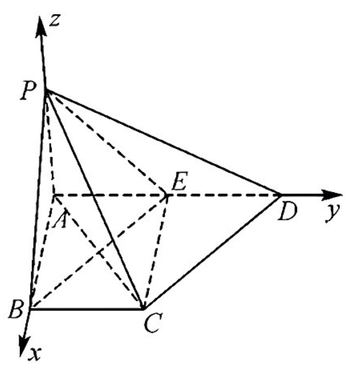
连接 EC,由 $AD\perp AB$,$BC/\!/AD$,$AD=2BC=2AB$,

故四边形 $ABCE$ 是正方形,故 $BE\perp AC$,…… 3 分

因为 $PA\cap AC=A$,$PA,AC\subset$平面 PAC,所以 $BE\perp$平面 PAC,…… 4 分

因为 $BE\subset$平面 PBE,所以平面 $PBE\perp$平面 PAC;…… 6 分

(2)如图所示建立空间直角坐标系,



则 $P(0,0,1)$,$B(1,0,0)$,$C(1,1,0)$,$D(0,2,0)$,…… 7 分

所以$\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$,$\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$,…… 8 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0,\\2y-z=0,\end{cases}$…… 10 分

可取 $\boldsymbol{n}=(1,1,2)$,…… 11 分

设 PB 与平面 PCD 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,…… 12 分

所以 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$. ………………………………………… 13 分

16.【答案】(1)2　(2)$(0,2\mathrm{e}]$

【解析及评分细则】(1)由 $f'(x)=\ln x+1-\frac{a}{x}$, ………………………………………… 2 分

又由切线 l 在坐标轴上的截距相等,l 不过原点,可得 $f'(1)=1-a=-1$, ………………………… 4 分

故 $a=2$; ………………………………………… 5 分

(2)令 $g(x)=x\ln x+\mathrm{e}$,有 $g'(x)=\ln x+1$,令 $g'(x)>0$,有 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$, ………………………… 6 分

可得函数 $g(x)$ 的减区间为 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$,增区间为 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$,

可得 $g(x)_{\min}=\frac{1}{\mathrm{e}}\ln\frac{1}{\mathrm{e}}+\mathrm{e}=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}>0$, ………………………………………… 7 分

①当 $0<x\leqslant1$ 时,$\ln x\leqslant0$,有 $-a\ln x\geqslant0$,可得 $f(x)\geqslant\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}>0$; ………………………… 9 分

②当 $x>1$ 时,$f(x)\geqslant0$ 恒成立,可化为 $a\leqslant\frac{x\ln x+\mathrm{e}}{\ln x}$, ………………………… 10 分

令 $h(x)=\frac{x\ln x+\mathrm{e}}{\ln x}$,有 $h'(x)=\frac{(\ln x)^2-\frac{\mathrm{e}}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{x(\ln x)^2-\mathrm{e}}{x(\ln x)^2}$,

又由函数 $\varphi(x)=x(\ln x)^2-\mathrm{e}(x>1)$ 单调递增,且 $\varphi(\mathrm{e})=0$,可得函数 $h(x)$ 的减区间为 $(0,\mathrm{e})$,增区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$,有 $h(x)_{\min}=h(\mathrm{e})=2\mathrm{e}$,故 $a\leqslant2\mathrm{e}$,

由上知实数 a 的取值范围为 $(0,2\mathrm{e}]$. ………………………………………… 15 分

17.【答案】(1)详见解析　(2)$(2\sqrt{2}+2,2\sqrt{3}+2)$

【解析及评分细则】(1)由正弦定理,$\cos A=\frac{\sin B-\sin C}{2\sin C}$,所以 $2\sin C\cos A=\sin B-\sin C$. ………… 1 分

又 $A+B+C=\pi$,所以 $2\sin C\cos A=\sin(A+C)-\sin C$, ………………………………………… 2 分

所以 $\sin A\cos C-\cos A\sin C=\sin C$, ………………………………………… 3 分

所以 $\sin C=\sin(A-C)$, ………………………………………… 4 分

因 $A,C\in(0,\pi)$,所以 $C=A-C$,即 $A=2C$; ………………………………………… 6 分

(2)因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,所以$\frac{2}{\sin 2C}=\frac{c}{\sin C}$,

所以 $c=\frac{1}{\cos C}$. ………………………………………… 8 分

因为 $A=2C$,所以 $B=\pi-3C$,

$\because\triangle ABC$ 为锐角三角形,$\therefore\begin{cases}0<2C<\frac{\pi}{2}\\0<\pi-3C<\frac{\pi}{2}\\0<C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$,$\therefore C\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$,$\therefore\cos C\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ………… 10 分

因为 $\cos A=\frac{b-c}{2c}$,$a=2$,由余弦定理,$a^2-c^2=bc$,

所以 $b=\frac{4}{c}-c$,则 $b+c=\frac{4}{c}$,且 $c=\frac{1}{\cos C}\in\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$, ………………………… 13 分

所以$\frac{4}{c}\in(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$，即$b+c\in(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$.

所以周长的取值范围为$(2\sqrt{2}+2,2\sqrt{3}+2)$. ………………………………………………………… 15分

18.【答案】(1)91.7　(2)(i)$\frac{1}{3}$　(ii)100元

【解析及评分细则】(1)由频率分布直方图可知，

评分为$[90,95)$的节目的频率为$1-(0.01+0.04+0.07+0.04+0.01)\times5=0.15$，……………………… 2分

$\because 90+5\times\frac{0.85-0.80}{0.95-0.80}=\frac{275}{3}\approx91.7$， ………………………………………………………… 4分

$\therefore$估计所有参赛节目评分的第85百分位数为91.7；……………………………………………… 5分

(2)(i)评分在$[90,95)$的节目的频数为$40\times0.15=6$， ………………………………………………… 6分

$\therefore f(p)=C_6^2p^2(1-p)^4=15p^2(1-p)^4$，……………………………………………………………… 7分

$\therefore f'(p)=15[2p(1-p)^4-4p^2(1-p)^3]=30p(1-p)^3(1-3p)$，…………………………………… 8分

$\because 0<p<1$，$\therefore$当$0<p<\frac{1}{3}$时，$f'(p)>0$，$f(p)$单调递增，

当$\frac{1}{3}<p<1$时，$f'(p)<0$，$f(p)$单调递减，

当$p=\frac{1}{3}$时，$f(p)$取得极大值，……………………………………………………………………… 10分

$\therefore f(p)$的极大值点$p_0=\frac{1}{3}$； ………………………………………………………………………… 11分

(ii)设获得一等奖的节目数为随机变量X，总奖金为Y，

易知，$X\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，$\therefore E(X)=6\times\frac{1}{3}=2$， ………………………………………………… 13分

设二等奖奖金为a元，则$Y=500X+a(6-X)=6a+(500-a)X$，……………………………… 14分

$\therefore E(Y)=6a+(500-a)E(X)=1\ 000+4a\leqslant1\ 400$，解得$a\leqslant100$，……………………… 16分

$\therefore$二等奖奖金的最大值为100元. …………………………………………………………………………… 17分

19.【答案】(1)$x^2=4y$　(2)(i)详见解析　(ii)详见解析

【解析及评分细则】(1)抛物线C的准线方程为$y=-\frac{p}{2}$，…………………………………………… 1分

所以$|MF|=y_0+\frac{p}{2}$，

所以$y_0+\frac{p}{2}=1+y_0$，解得$p=2$，……………………………………………………………………… 2分

所以C的方程为$x^2=4y$；…………………………………………………………………………………… 3分

(2)(i)设$M_n\left(x_n,\frac{x_n^2}{4}\right)$，因为$y'=\frac{x}{2}$

所以点M_n处的切线斜率为$\frac{x_n}{2}$，所以直线M_nM_{n+1}斜率为$-\frac{2}{x_n}$， ………………………………… 4分

所以直线M_nM_{n+1}：$y-\frac{x_n^2}{4}=-\frac{2}{x_n}(x-x_n)$，

与$x^2=4y$联立可得，$\frac{x^2}{4}-\frac{x_n^2}{4}=-\frac{2}{x_n}(x-x_n)=\frac{(x-x_n)(x+x_n)}{4}$，

可得$x_{n+1}=-\frac{8}{x_n}-x_n$，即$M_{n+1}$的横坐标为$-\frac{8}{x_n}-x_n$，……………………………………… 6分

所以 $y_{n+1}=\frac{x_{n+1}^2}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{64}{x_n^2}+x_n^2+16\right)=\frac{x_n^2}{4}+\frac{16}{x_n^2}+4=y_n+\frac{16}{x_n^2}+4>y_n+4$，

当 $n\geqslant 2$ 时，有 $y_n=(y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+\cdots+(y_2-y_1)+y_1>4(n-1)+1=4n-3$，

又由 $y_1=1$，故 $y_n\geqslant 4n-3(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $|M_nF|\geqslant 4n-2$；…………………………………………………………………… 9 分

(ii)易知直线 M_nM_{n+1}：$y=-\frac{2x}{x_n}+\frac{x_n^2}{4}+2$，

F 到直线 M_nM_{n+1} 的距离为 $\frac{1+\frac{x_n^2}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{x_n}\right)^2}}$，…………………………………………………… 10 分

$|M_nM_{n+1}|=\sqrt{1+\left(\frac{2}{x_n}\right)^2}|x_{n+1}-x_n|=\sqrt{1+\left(\frac{2}{x_n}\right)^2}\left|\frac{8}{x_n}+2x_n\right|$，

所以 $S_n=\left(1+\frac{x_n^2}{4}\right)\left|\frac{4}{x_n}+x_n\right|=\frac{(x_n^2+4)^2}{4|x_n|}\geqslant\frac{4|x_n|(x_n^2+4)}{4|x_n|}=x_n^2+4$，………………………………… 12 分

因为 $x_{n+1}^2=\left(-\frac{8}{x_n}-x_n\right)^2=x_n^2+\frac{64}{x_n^2}+16>x_n^2+16$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$x_n^2>16n-12$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n>16n-8=8(2n-1)$，

所以 $\frac{1}{S_n^2}<\frac{1}{64}\times\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{1}{64}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n-3)}\right]=\frac{1}{128}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)$，……………………… 14 分

当 $n=1$ 时，$\frac{1}{S_1^2}=\frac{1}{64}<\frac{17}{128}$，…………………………………………………………………… 15 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k^2}<\frac{1}{64}+\frac{1}{128}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{64}+\frac{1}{128}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)<\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$

$=\frac{3}{128}<\frac{17}{128}$.

所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k^2}<\frac{17}{128}$. ………………………………………………………………………… 17 分