

## 数 学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

## 注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑;非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答;字体工整,笔迹清楚。
4. 考试结束后,请将试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| < 4\}$ ,  $B = \{x \mid \log_2 x > 0\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{-1, 0, 1, 2\}$       B.  $\{1, 2, 3, 4\}$       C.  $\{3, 4\}$       D.  $\{2, 3, 4\}$

2. 复数  $z = \frac{(1+i)(1+2i)}{1+3i}$  在复平面内所对应的点所在的象限为

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

3. 过点  $P(1, 0)$  的直线  $l$  与圆  $C: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$  相切, 则直线  $l$  的方程为

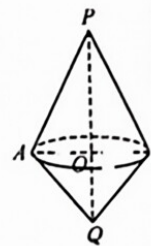
- A.  $y = x - 1$       B.  $y = 2x - 2$       C.  $y = 3 - 3x$       D.  $y = 1 - x$

4. 已知  $\tan \alpha = 3$ ,  $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = 2$ , 则  $\tan \beta =$

- A.  $-4$       B.  $\frac{13}{9}$       C.  $\frac{14}{3}$       D.  $\frac{17}{3}$

5. 如图是两个底面半径都为 1 的圆锥底面重合在一起构成的几何体, 上面圆锥的侧面积是下面圆锥侧面积的 2 倍,  $AP \perp AQ$ , 则  $PQ =$

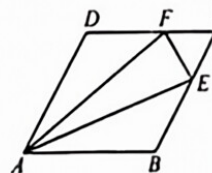
- A.  $\frac{7}{4}$       B.  $\frac{\sqrt{26}}{2}$       C.  $\frac{5}{2}$       D. 3



6. 如图, 在边长为 2 的菱形  $ABCD$  中,  $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$ , 点  $E, F$  分别在边  $CB, CD$  上, 且  $CE = CF$

若  $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = \frac{13}{2}$ , 则  $EF =$

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{2}{3}$       C. 1      D.  $\frac{3}{2}$



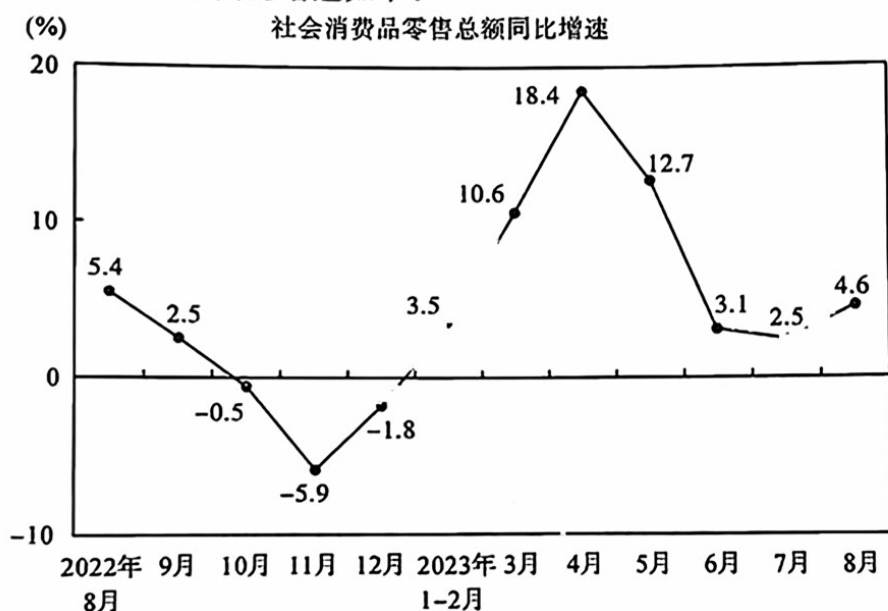
7. 已知函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$  在区间  $(a, a+6)$  上存在最小值, 则实数  $a$  的取值范围为

- A.  $[-1, 2)$       B.  $[-\frac{5}{2}, 1)$       C.  $[-2, \frac{3}{2})$       D.  $[-1, 1)$

8. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别  $F_1, F_2$ , 椭圆的长轴长为  $2\sqrt{2}$ , 短轴长为 2,  $P$  为直线  $x = 2b$  上的任意一点, 则  $\angle F_1 P F_2$  的最大值为
- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{\pi}{4}$       C.  $\frac{\pi}{3}$       D.  $\frac{\pi}{6}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 据国家统计局网站 2023 年 9 月 15 日消息, 8 月份, 社会消费品零售总额为 37933 亿元, 同比增长 4.6% (同比一般情况是指本年第  $N$  月与去年的第  $N$  月比). 其中, 除汽车以外的消费品零售额为 33820 亿元, 增长 5.1%. 1~8 月份, 社会消费品零售总额为 302281 亿元, 同比增长 7.0%. 其中, 除汽车以外的消费品零售额为 271888 亿元, 增长 7.2%. 2022 年 8 月至 2023 年 8 月社会消费品零售总额同比增速如下:



则下列说法正确的是

- A. 2023 年 1~8 月份, 社会消费品零售总额的月平均值约为 25422.6 亿元
- B. 2022 年 8 月份, 社会消费品零售总额约为 36264.8 亿元
- C. 除掉 2022 年 8 月至 2023 年 8 月社会消费品零售总额同比增速数据的最大值和最小值所得数据的标准差比原数据的标准差小
- D. 2022 年 8 月至 2023 年 8 月社会消费品零售总额同比增速数据的极差比中位数的 8 倍还多
10. 在前  $n$  项和为  $S_n$  的正项等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 a_4 = 8, a_3 = a_2 + 2, b_n = \frac{\log_2 a_n}{S_n + 1}$ , 则

A.  $a_6 - 4a_5 = -48$

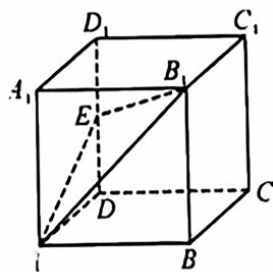
B.  $S_7 = 127$

C.  $S_n = 2a_n - 1$

D. 数列  $\{b_n\}$  中的最大项为  $b_2$

11. 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$  中,  $E$  是线段  $DD_1$  上的动点 (不包括端点), 过  $A, B_1, E$  三点的平面将正方体截为两个部分, 则下列说法正确的是

- A. 正方体的外接球的表面积是正方体内切球的表面积的 3 倍
- B. 存在一点  $E$ , 使得点  $A_1$  和点  $C$  到平面  $AEB_1$  的距离相等
- C. 正方体被平面  $AEB_1$  所截得的截面的面积随着  $D_1 E$  的增大而增大
- D. 当正方体被平面  $AEB_1$  所截得的上部分的几何体的体积为  $\frac{1}{3}$  时,  $E$  是  $DD_1$  的中点





12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  的右顶点为  $A$ , 直线  $l$  与以  $O$  为圆心,  $|OA|$  为半径的圆相切, 切点为  $P$ . 则

A. 双曲线  $C$  的离心率为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. 当直线  $OP$  与双曲线  $C$  的一条渐近线重合时, 直线  $l$  过双曲线  $C$  的一个焦点

C. 当直线  $l$  与双曲线  $C$  的一条渐近线平行时, 若直线  $l$  与双曲线  $C$  的交点为  $Q$ , 则  $|OQ| = \sqrt{5}$

D. 若直线  $l$  与双曲线  $C$  的两条渐近线分别交于  $D, E$  两点, 与双曲线  $C$  分别交于  $M, N$  两点, 则  $|DM| = |DN|$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设  $A, B$  是一个随机试验中的两个事件, 若  $P(B) = \frac{3}{4}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A+B) = \frac{2}{3}$ , 则  $P(A) =$

14. 已知  $(1+x)\left(ax + \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中  $x^3$  的系数为 240, 则实数  $a =$

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a(x-a)^2 - 1, & x < a \\ |x-2a| - 2, & x \geq a \end{cases}$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围为

16. 方程  $\cos 2x = 3\cos x - 2$  的最小的 29 个非负实数解之和为

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知正项数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + 1$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记数列  $b_n = \frac{2\sqrt{a_n} + 1}{2na_n + 1}$  的前  $n$  项和  $S_n$ , 求满足  $S_n < \frac{99}{100}$  的正整数  $n$  的集合.

18. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $c(5\cos A - \cos 2A)\sin B = 3b\sin C$ .

(1) 求  $A$ ;

(2) 过点  $A$  作  $AB$  的垂线与  $BC$  的延长线交于点  $D$ ,  $BC = 3CD$ ,  $\triangle ABD$  的面积为  $2\sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

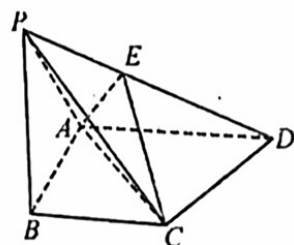
19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是直角梯形,  $AB \perp BC$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AD = 2BC$ ,  $DE = 2PE$ .

(1) 证明:  $BP \parallel$  平面  $ACE$ ;

(2) 已知  $AD = 2$ ,  $AP = \sqrt{2}$ ,  $PD = \sqrt{10}$ , 平面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ , 若平面

$PAC$  与平面  $EAC$  的夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ , 求  $AB$ .



20. (本小题满分 12 分)

驾驶员考试(机动车驾驶员考试)是由公安局车管所举办的资格考试,只有通过驾驶员考试才能取得驾照,才能合法的驾驶机动车辆. 考试内容和合格标准全国统一,根据不同准驾车型规定相应的考试项目. 机动车驾驶人考试内容分为道路交通安全法律、法规和相关知识考试科目(以下简称“科目一”)、场地驾驶技能考试科目(以下简称“科目二”)、道路驾驶技能和安全文明驾驶常识考试科目(以下简称“科目三”). 申请人科目一、科目二、科目三考试均合格后,就可以领取驾驶证. 某驾校经统计,驾驶员科目一考试平均通过的概率为 $\frac{15}{16}$ ,科目二平均通过的概率为 $\frac{4}{5}$ ,科目三平均通过的概率为 $\frac{4}{5}$ . 该驾校王教练手下有 4 名学员参加驾驶员考试.

- (1)记这 4 名学员参加驾驶员考试,通过考试并领取驾驶证的人数为  $X$ ,求  $X$  的分布列和数学期望及方差;
- (2)根据调查发现,学员在学完固定的学时后,每增加一天学习,没有通过考试拿到驾驶证的概率会降为原来的 0.4,请问这 4 名学员至少要增加多少天的学习,才能保证这 4 名学员都能通过考试并领取驾驶证?(我们把概率超过 0.99 的事件称为必然事件,认为在一次试验中必然事件一定会发生)

参考数据:  $\sqrt[4]{0.99} \approx 0.9975$ ,  $\lg 2 \approx 0.3010$

21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 过抛物线  $C$  的准线上任意一点  $P$  作不过焦点  $F$  的直线  $l$  与抛物线  $C$  相交于  $M, N$  两点. 当直线  $l$  的方程为  $y = -2x + 4$  时,  $|MF| = 2$ ,  $|NF| = 5$ .

- (1)求抛物线  $C$  的标准方程;
- (2)证明:直线  $PF$  是  $\angle MFN$  的外角平分线.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) + ax(\ln x - 1)$ , 其中  $a \neq 0$ .

- (1)讨论函数  $f(x)$  的单调性;
- (2)若  $a > 0$ , 证明:函数  $f(x)$  有唯一的零点;
- (3)若  $f(x) > 0$ , 求实数  $a$  的取值范围.