保密★启用前

准考证号________________________________ 姓名____________

（在此卷上答题无效）

名校联盟全国优质校2023届高三大联考

数 学 试 题

2023.2

本试卷共4页，总分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名，准考证号和座号填在答题卡上，正确粘贴条形码.
2. 作答选择题时，用2B铅笔在答题卡上将对应答案的选项涂黑.
3. 非选择题的答案必须写在答题卡各题目的指定区域内相应位置上，不准使用铅笔和涂改液.
4. 考试结束后，考生上交答题卡.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid\sqrt{x}\leqslant2\}$，集合 $B=\{y\mid y=x^2+2\}$，则 $A\cap B=$

A. $[1,4]$　　B. $[2,4]$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 若复数 z 满足 $z\mathrm{i}=-1-2\mathrm{i}$，则 $\bar{z}$ 在复平面上所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 在梯形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，若 $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{AC}=$

A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　B. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　C. $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

4. 设圆 C：$x^2-2x+y^2-3=0$，若直线 l 在 y 轴上的截距为1，则 l 与 C 的交点个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 以上都有可能

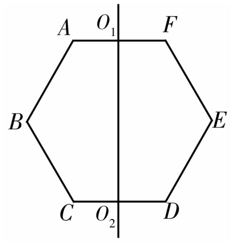
5. 甲、乙两选手进行羽毛球单打比赛，已知每局比赛甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$，若采用3局2胜制，则甲以2∶1获胜的概率为

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{8}{27}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{4}{27}$

6. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为6，设边 AF，CD 的中点分别为 O_1，O_2. 已知某几何体是由此正六边形 $ABCDEF$ 绕直线 O_1O_2 旋转一周而成，则该几何体的体积为

A. $378\sqrt{3}\pi$　　B. $126\sqrt{3}\pi$

C. $90\sqrt{3}\pi$　　D. $63\sqrt{3}\pi$



（第6题图）

7. 已知 $a=0.25$，$b=\sin 0.25$，$c=\mathrm{e}^{-0.7}$，则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

8. 已知任意三次函数的图象必存在唯一的对称中心，若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，且 $M(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，则必有 $g'(x_0)=0$（其中函数 $g(x)=f'(x)$）．若实数 m，n 满足 $\begin{cases} m^3+6m^2+13m=10, \\ n^3+6n^2+13n=-30, \end{cases}$ 则 $m+n=$

A. -4　　B. -3　　C. -2　　D. -1

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 设函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，则下列结论正确的为

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{8},0)$ 对称

C. $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到

D. $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上的最大值为 1

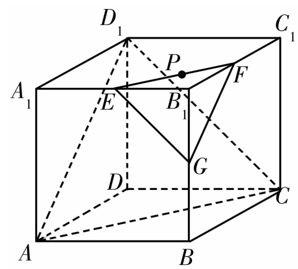
10. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F，G 分别为 A_1B_1，B_1C_1，B_1B 的中点，若点 P 在线段 EF 上运动，则下列结论正确的为

A. AC_1 与 EF 为共面直线

B. 平面 ACD_1 // 平面 EFG

C. 三棱锥 $P-AD_1C$ 的体积为定值

D. AC_1 与平面 A_1BC 所成角的正切值为 $\sqrt{3}$



（第 10 题图）

11. 已知直线 l 经过抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点 F，且与 C 交于 A，B 两点，过 A，B 分别作直线 $x=-\frac{p}{2}$ 的垂线，垂足依次记为 A_1，B_1．若 $|AB|$ 的最小值为 4，则下列结论正确的为

A. $p=2$

B. $\angle A_1FB_1$ 为钝角

C. $|AB|=|AF|\cdot|BF|$

D. 若点 M，N 在 C 上，且 F 为 $\triangle AMN$ 的重心，则 $|AF|+|MF|+|NF|=5$

12. 若一条直线与两条或两条以上的曲线均相切，则称该直线为这些曲线的公切线. 已知直线 l：$y=kx+b$ 为曲线 C_1：$y=e^{ax}$ 和 C_2：$y=\frac{\ln x}{a}$（$a>0$）的公切线，则下列结论正确的为

A. C_1 和 C_2 关于直线 $y=x$ 对称

B. 当 $a=1$ 时，$k\mathrm{e}^{b+1}=1$

C. 若 $b=0$，则 $a=\frac{1}{2}$

D. 当 $a=1$ 时，C_1 和 C_2 必存在斜率为$\frac{1}{k}$的公切线

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设等差数列$\{a_n\}$的前项和为 S_n，若 $a_1=2$，$S_5=30$，则公差 $d=$________.

14. 若$(2x-\frac{1}{x})^n$ 的展开式的二项式系数之和为 32，则$(x+1)(x-y)^n$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为________.

15. 已知 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，若不等式 $\sin 2x-t\sin^2 x\leqslant t$ 恒成立，则实数 t 的最小值为________.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，记 F_1 为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左焦点，以 OF_1 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 O，A 两点，且线段 AF_1 与 C 交于点 B，若 $\overrightarrow{F_1B}=\lambda\overrightarrow{F_1A}$（$\lambda>\frac{1}{2}$），则 C 的离心率的取值范围为________.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-1$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=na_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18. （12 分）

设△ABC 的三个角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{a-c}{a+b}$.

（1）求 B；

（2）已知 $b=3$，且 AC 边上存在点 D，使得 BD 平分 $\angle ABC$. 当 $BD=2$ 时，求△ABC 的面积.

19. （12 分）

某校筹办运动会，设计了方案一、方案二两种方案．为了解对这两种方案的支持情况，在校内随机抽取 100 名同学，得到数据如下：

	男		女	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	20 人	40 人	30 人	10 人
方案二	35 人	25 人	25 人	15 人

假设校内所有同学支持何种方案互不影响.

（1）依据所给数据及小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，能否认为支持方案一与性别有关？

（2）以抽取的 100 名同学的支持率高低为决策依据，应选择哪种方案？

（3）用频率估计概率，从全校支持方案一的学生中随机抽取 3 人，其中男生的人数记为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

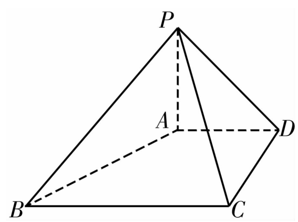
α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20. （12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\perp$ 平面 PCD.

（1）证明：$AD\perp CD$；

（2）若 $AD\parallel BC$，且 $BC=2AP=2AD=2$，记平面 BPC 与平面 PCD 的夹角为 θ，当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$时，求 CD 的长度.



（第 20 题图）

21. （12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，O 是坐标原点，点 A，B 分别为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的上、下顶点，直线 l：$x=2$ 与 C 有且仅有一个公共点，设点 D 在 C 上运动，且 D 不在坐标轴上，当直线 BD 的斜率为$\sqrt{3}$时，C 的右焦点恰在直线 BD 上.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 BD 交 x 轴于点 P，直线 AD 交 l 于点 Q，直线 PQ 交 C 于 M，N 两点.

（ⅰ）证明：直线 PQ 的斜率为定值；

（ⅱ）求△OMN 面积的取值范围.

22. （12 分）

已知函数$f(x)=e^a\ln x-ax+2a(a\in\mathbf{R})$.

（1）判断$f(x)$在区间$(e,+\infty)$上的单调性；

（2）若$f(x)$恰有两个不同的零点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_1+3x_2>a+\dfrac{4}{a}+4$.