保密★启用前 试卷类型：A

名校联盟全国优质校2024届高三大联考

数学试题答案及评分参考

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	A	D	B	A	C

二、多项选择题

题号	9	10	11
答案	BCD	AC	BCD

三、填空题

12. 4047　　13. $(\frac{5}{3},\frac{8}{3}]$　　14. $\sqrt{3}-1$

四、解答题

15.（13分）

（1）证明：由 $S_n=2a_n+n-4$，当 $n=1$ 时，可得 $a_1=3$；　　…………1分

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-5)$，所以 $a_n=2a_{n-1}-1(n\geq 2)$，　　…………3分

$\therefore n\geq 2$ 时，$a_n-1=2(a_{n-1}-1)$，　　…………4分

$\therefore$ 数列 $\{a_n-1\}$ 是以 $a_1-1=2$ 为首项，$q=2$ 为公比的等比数列：　　…………5分

$\therefore a_n-1=2^n$，$\therefore a_n=1+2^n$.　　…………6分

（2）证明：由（1）知，$a_{n+1}=1+2^{n+1}$，$\therefore b_n=\log_2(a_{n+1}-1)=n+1$，　　…………7分

$\therefore b_n(a_n-1)=(n+1)\cdot 2^n$，　　…………8分

$\therefore T_n=2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+(n+1)\times 2^n$，

$2T_n=2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n+1)\times 2^{n+1}$　　…………11分

$-T_n=2\times 2^1+(2^2+2^3\cdots+2^n)-(n+1)2^{n+1}$　　…………12分

所以 $T_n=n\cdot 2^{n+1}$.　　…………13分

16.（15 分）

（1）因为点 D 为等腰三角形 B_1AC 的底边 AC 的中点，所以 $B_1D\perp AC$． ············1 分

又因 $\cos\angle BB_1D=\dfrac{12}{13}$．由余弦定理，$\cos\angle BB_1D=\dfrac{13^2+B_1D^2-5^2}{2\times13\times B_1D}=\dfrac{12}{13}$， ············3 分

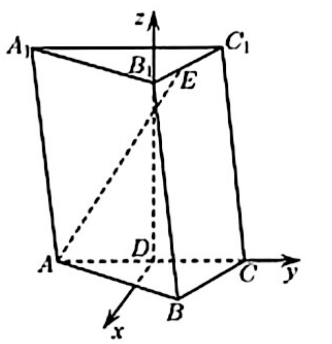
解得 $B_1D=12$． ············4 分

因为 $BD^2+B_1D^2=BB_1^2$，由勾股定理知，$BD\perp B_1D$． ············5 分

又因为 $BD\cap AC=D$，所以 $B_1D\perp$ 平面 ABC． ············6 分

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $BC\perp B_1D$． ············7 分

（2）过点 D 作 $Dx\perp AC$，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，如图， ············8 分



则有 $A(0,-5,0)$，$B\left(\dfrac{24}{5},\dfrac{7}{5},0\right)$，$C(0,5,0)$，$B_1(0,0,12)$ ············9 分

又 $\overline{AB_1}=(0,5,12)$． ············10 分

设平面 B_1BC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\bar{m}\cdot\overline{BC}=0\\ \bar{m}\cdot\overline{B_1B}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\dfrac{24}{5}x+\dfrac{18}{5}y=0\\ \dfrac{24}{5}x+\dfrac{7}{5}y-12z=0\end{cases}$． ············11 分

令 $x=9$，解得平面 B_1BC 的一个法向量为 $\vec{m}=(9,12,5)$． ············13 分

设 $\overline{AB_1}$ 与面 B_1BC 的夹角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overline{AB_1},\vec{m}\rangle|=\dfrac{12\times5+12\times5}{13\sqrt{81+144+25}}=\dfrac{12\sqrt{10}}{65}$， ············14 分

所以 AB_1 与面 B_1BC 的夹角的正弦值 $\dfrac{12\sqrt{10}}{65}$ ············15 分

17.（15 分）

（1）记事件 A,B,C 为男双比赛第一，二，三局甲俱乐部获胜，　　…………1 分

则所求概率为 $P=P(AB+\overline{A}BC+A\overline{B}C)$，因为 $AB,\overline{A}BC,A\overline{B}C$ 互斥　　…………2 分

故 $P=P(AB)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)$，又因为 A,B,C 独立　　…………3 分

所求为 $P=P(AB)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)=0.7\times0.7+0.3\times0.7\times0.7+0.7\times0.3\times0.7=0.784\approx0.8$

…………6 分

（2）由（1）知，甲俱乐部男双，女双，男单获胜的概率均为0.8.

乙俱乐部混双获胜的概率 $P=0.8\times0.8+0.2\times0.8\times0.8+0.8\times0.2\times0.8=0.896\approx0.9$

…………8 分

故甲俱乐部混双，女单的概率均为0.1，故

$P(X=3)=0.8\times0.8\times0.1+0.2\times0.2\times0.9=0.1$　　…………10 分

$P(X=4)=(0.2\times0.8\times0.1+0.8\times0.2\times0.1+0.8\times0.8\times0.9)\times0.8+$
$(0.8\times0.2\times0.9+0.2\times0.8\times0.9+0.2\times0.2\times0.1)\times0.2\approx0.5$　　…………13 分

$P(X=5)=1-(0.1+0.5)=0.4$

X 的分布列如下表

X	3	4	5
P(X)	0.1	0.5	0.4

…………14 分

所以 $E(X)\approx3\times0.1+4\times0.5+5\times0.4=4.3$.　　…………15 分

18. （17 分）

（1）因为椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$，得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，　　…………1 分

从而 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，　　…………2 分

$S_{\Delta ABO}=\sqrt{3}=\frac{1}{2}ab=\sqrt{3}c^2$，　　…………3 分

得 $c=1,a=2,b=\sqrt{3}$，　　…………5 分

即椭圆的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　…………6 分

（2）由题意，过点 $P(-2,1)$ 的直线斜率存在，设为 $kx-y-(k+2)=0$.　　…………7 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases} kx-y+2k+1=0 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $(4k^2+3)x^2+8k(2k+1)x+8(2k^2+2k-1)=0$，　　…………9 分

可得$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{8k(2k+1)}{4k^2+3} \\ x_1x_2=\dfrac{8(2k^2+2k-1)}{4k^2+3} \end{cases}$，　　…………10 分

$y_1+y_2=\dfrac{6(2k+1)}{4k^2+3}$，且 $x_1y_2+x_2y_1=\dfrac{-24k}{3k^2+4}$(*)

直线 AN： $y=\dfrac{y_2}{x_2+2}(x+2)$ 和 $x=x_1$ 联立，

得 $H(x_1,\dfrac{y_2(x_1+2)}{x_2+2})$，$T(x_1,\dfrac{1}{2}[y_1+\dfrac{y_2(x_1+2)}{x_2+2}])$　　…………11 分

令 $x=x_1\in[-2,2]$，$y=\dfrac{1}{2}[y_1+\dfrac{y_2(x_1+2)}{x_2+2}]=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1+2(y_1+y_2)}{2(x_2+2)}$

此时 $\dfrac{2y}{x+2}=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1+2(y_1+y_2)}{(x_2+2)(x_1+2)}$，

化简得 $\dfrac{2y}{x+2}=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1+2(y_1+y_2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$　　…………14 分

将(*)代入上式得 $\dfrac{2y}{x+2}=\dfrac{-24k+12(2k+1)}{8(2k^2+2k-1)-16k(2k+1)+4(4k_2+3)}$　　…………16 分

化简得 $\dfrac{2y}{x+2}=3$，即 T 所在的定直线为 $3x-2y+6=0$　　…………17 分

19.（17 分）

（1）因为 $a=-1$，所以 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$　　…………2 分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$.　　…………3 分

当 $x\in(0,1), f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty), f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，　　…………5 分

所以 $f(x)$ 只有极小值 $f(1)=-1$，没有极大值.　　…………6 分

（2）令 $x_1=x_0$，$x_2=\dfrac{x_0^2}{1-x_0}$.

当 $0<x_1<\dfrac{1}{2}$ 时，$0<x_2<x_1<\dfrac{1}{2}$

则原命题等价于存在实数 $x_1>x_2>0$，满足 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$.　　…………8 分

易知，$a<0$，因为$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$得$\ln x_1-\dfrac{a}{x_1}=\ln x_2-\dfrac{a}{x_2}$.

所以$\ln\dfrac{x_1}{x_2}=a\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}$. …………10 分

又因为$x_1+x_2=\dfrac{x_2}{x_1}$，所以$\dfrac{x_2}{x_1}\ln\dfrac{x_1}{x_2}=a\dfrac{x_2^2-x_1^2}{x_1x_2}=a\left(\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{x_1}{x_2}\right)$，

令$t=\dfrac{x_1}{x_2}(t>1)$代入上式得$\dfrac{1}{t}\ln t=a\left(\dfrac{1}{t}-t\right)$， …………11 分

即$\exists t>1$使得$\ln t+a\left(t^2-1\right)=0$，

令$g\left(t\right)=\ln t+a\left(t^2-1\right)$，

$g'\left(t\right)=\dfrac{1}{t}+2at=\dfrac{2at^2+1}{t}>0$，解得$0<t<\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}$，

$\therefore g\left(t\right)$在$\left(0,\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(\sqrt{-\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递减，

$g\left(1\right)=0$由题意得$\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}>1$，解得$-\dfrac{1}{2}<a<0$， …………14 分

$\therefore g\left(t\right)$在$\left(1,\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(\sqrt{-\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递减，其中$g\left(\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}\right)>0$.

下面只需证明存在t_0，使得$g\left(t_0\right)<0$，

令$p\left(t\right)=\ln t-\left(t-1\right)\left(t>1\right)$，$p'\left(t\right)=\dfrac{1}{t}-1=\dfrac{1-t}{t}<0$，$p\left(t\right)$在$(1,+\infty)$递减，所以$p\left(t\right)<p\left(1\right)=0$，

$\therefore t>1$时$\ln t<t-1$，$\therefore g\left(t\right)=\ln t+a\left(t^2-1\right)<\left(t-1\right)+a\left(t^2-1\right)=\left(at+a+1\right)\left(t-1\right)$，

由$\left(at+a+1\right)\left(t-1\right)=0$，

解得$t_2=-1-\dfrac{1}{a}>1$，$u\left(t\right)=\left(at+a+1\right)\left(t-1\right)$这个二次函数在$\left(t_2,+\infty\right)$单调递减，

$\therefore g\left(-1-\dfrac{1}{a}\right)<u\left(t_2\right)=0$，$\therefore$存在$t_0\geq-1-\dfrac{1}{a}$时，$g\left(t_0\right)<0$，$\therefore -\dfrac{1}{2}<a<0$. …………15 分

$f(a^2)=\ln a^2-\dfrac{1}{a}=2\ln(-a)-\dfrac{1}{a}$，所以$f'(a^2)=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{2a+1}{a^2}>0$， …………16 分

所以$f(a^2)$单调递增，故其取值范围是$(2-2\ln 2,+\infty)$. …………17 分