2024～2025 学年高三 10 月测评(福建)·数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	A	A	B	B	C	A
题号	9	10	11					
答案	BC	ACD	ABD					

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】D

【解析】因为 $M\cap N=\{4\}$,所以 $4\in N$,代入 $x^2-3x-n=0$,可得 $n=4$,所以方程变为 $x^2-3x-4=0$,可解得 $x=-1$ 或 4,所以 $N=\{-1,4\}$,故选 D.

2.【答案】D

【解析】因为“$\exists x\in[-1,2]$,$\frac{1}{2}x^2-a\leqslant 0$”,所以 $a\geqslant\left(\frac{1}{2}x^2\right)_{\min}$,所以 $a\geqslant 0$.结合选项及充分不必要条件知“$a\geqslant 3$”是“$a\geqslant 0$”的充分不必要条件.故选 D.

3.【答案】A

【解析】$f(-x)=(2^{-x}+m2^x)\cos(-x)=(2^{-x}+m2^x)\cos x$,$\because f(x)$是奇函数,$\therefore f(x)+f(-x)=[2^{-x}+2^x+m(2^x+2^{-x})]\cos x=0$,$\therefore(m+1)(2^{-x}+2^x)\cos x=0$,$\therefore m+1=0$,$m=-1$.故选 A.

4.【答案】A

【解析】$h'(x)=\frac{1}{x}-2a$,若函数 $h(x)=\ln x-2ax$ 在$[1,3]$上不单调,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-2a=0$ 时 $x=\frac{1}{2a}$,故 $1<\frac{1}{2a}<3$,则$\frac{1}{6}<a<\frac{1}{2}$.故选 A.

5.【答案】B

【解析】$\because \sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{2}{3}$,$\therefore\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}$,$\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$,$\therefore\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{9}$,$\therefore-\cos\left(4\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(4\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)=2\cos^2\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)-1=\frac{17}{81}$,$\therefore\cos\left(4\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{17}{81}$,故选 B.

6.【答案】B

【解析】$\because S_n=(2S_n+1)S_{n+1}$,$\therefore S_n=S_{n+1}+2S_n\cdot S_{n+1}$,$\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=2$,$\therefore\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是以 1 为首项,公差为 2 的等差数列,$\therefore\frac{1}{S_n}=2n-1$,$S_n=\frac{1}{2n-1}$,$S_{11}=\frac{1}{21}$,$a_5=S_5-S_4=\frac{1}{9}-\frac{1}{7}=-\frac{2}{63}$,$\therefore\frac{a_5}{S_{11}}=-\frac{2}{63}\times 21=-\frac{2}{3}$,故选 B.

7.【答案】C

【解析】由 $f(x)=e^{2x}-2ae^x-4a^2x(a>0)$,

有 $f'(x)=2e^{2x}-2ae^x-4a^2=2(e^x+a)(e^x-2a)$.

当 $a>0$ 时,$e^x+a>0$,$f(x)$在$(-\infty,\ln 2a)$上单调递减,在$(\ln 2a,+\infty)$上单调递增,

则 $f(x)_{\min}=f(\ln 2a)=-4a^2\ln 2a$,故 $f(x)$的值域为$[-4a^2\ln 2a,+\infty)$,

令 $t=f(x)$,则 $t\in[-4a^2\ln 2a,+\infty)$,要使得 $f(f(x))$的值域也为$[-4a^2\ln 2a,+\infty)$,

则$-4a^2\ln 2a\leqslant\ln 2a$,即$(1+4a^2)\ln 2a\geqslant 0$,故 $a\geqslant\frac{1}{2}$.故选 C.

8.【答案】A

【解析】设 $h(x)=f(x)-g(x)=\sin\omega x-\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $h(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上最多有两个零点，故 $2\pi-\pi<\frac{3}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $0<\omega<3$.

由 $x\in[\pi,2\pi]$ 得 $\omega x-\frac{\pi}{4}\in\left[\pi\omega-\frac{\pi}{4},2\pi\omega-\frac{\pi}{4}\right]$.

(1)由$\begin{cases}\pi\omega-\frac{\pi}{4}\leqslant 0,\\2\pi\omega-\frac{\pi}{4}<2\pi\end{cases}$得 $0<\omega\leqslant\frac{1}{4}$；(2)由$\begin{cases}0<\pi\omega-\frac{\pi}{4}\leqslant\pi,\\2\pi\omega-\frac{\pi}{4}<3\pi\end{cases}$得$\frac{1}{4}<\omega\leqslant\frac{5}{4}$；

(3)由$\begin{cases}\pi<\pi\omega-\frac{\pi}{4}\leqslant 2\pi,\\2\pi\omega-\frac{\pi}{4}<4\pi\end{cases}$得$\frac{5}{4}<\omega<\frac{17}{8}$；(4)由$\begin{cases}2\pi<\pi\omega-\frac{\pi}{4}\leqslant 3\pi,\\2\pi\omega-\frac{\pi}{4}<5\pi\end{cases}$得$\frac{9}{4}<\omega<\frac{21}{8}$；

(5)由$\begin{cases}3\pi<\pi\omega-\frac{\pi}{4}\leqslant 4\pi,\\2\pi\omega-\frac{\pi}{4}<6\pi\end{cases}$得此时不等式组无实数解.

综上可得 $\omega\in\left(0,\frac{17}{8}\right)\cup\left(\frac{9}{4},\frac{21}{8}\right)$，故选 A.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.【答案】BC(全部选对得 6 分，选对 1 个得 3 分，有选错的得 0 分)

【解析】对选项 A，取 $a=-1,b=1$，满足 $ab\neq 0$ 且 $a<b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，错误；

对选项 B，因为函数 $y=x^3$ 单调递增，当 $a<b$ 时，$a^3<b^3$，正确；

对选项 C，因为函数 $y=x|x|=\begin{cases}x^2,x\geqslant 0,\\-x^2,x<0\end{cases}$单调递增，当 $a|a|<b|b|$，则 $a<b$，正确；

对选项 D，$a>b>0$，要使$\frac{b+1}{a+1}<\frac{b}{a}$，即 $ab+a<ab+b$，即 $a<b$，错误，故选 BC.

10.【答案】ACD(全部选对得 6 分，选对 1 个得 2 分，选对 2 个得 4 分，有选错的得 0 分)

【解析】对于 A，令 $x=y=0$，得 $\varphi(0)=t$，A 正确；

对于 B，令 $y=-x$ 得，$\varphi(0)=\varphi(x)+\varphi(-x)-t$，结合 A 知$\varphi(x)+\varphi(-x)=2t$，$\therefore\varphi(x)$图象关于点$(0,t)$中心对称，B 错误；

对于 C，结合 B 知 $\varphi(x)+\varphi(-x)=2t$，取 $x=2\ 024$ 得 $\varphi(2\ 024)+\varphi(-2\ 024)=2t$，C 正确；

对于 D，设 $x_1<x_2$，则 $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi[(x_2-x_1)+x_1]-\varphi(x_1)=\varphi(x_2-x_1)+\varphi(x_1)-t-\varphi(x_1)=\varphi(x_2-x_1)-t$，由于 $x_2-x_1>0$，$\therefore\varphi(x_2-x_1)<t$，$\therefore\varphi(x_2)-\varphi(x_1)<0$ $\therefore\varphi(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，D 正确. 所以答案为 ACD.

11.【答案】ABD(全部选对得 6 分，选对 1 个得 2 分，选对 2 个得 4 分，有选错的得 0 分)

【解析】依题意$(3n+2)(S_n+a_{n+1})+(3n-1)(S_n-a_n)=(6n+1)S_n$，$\therefore(3n+2)a_{n+1}=(3n-1)a_n(n\geqslant 2)$，

$\therefore(3n-1)a_n=\cdots=5a_2=1$，$\therefore a_n=\frac{1}{3n-1}$. $n=1$ 满足，$\therefore a_n=\frac{1}{3n-1}$，$a_5=\frac{1}{14}$. $\therefore\frac{1}{a_n}=3n-1$. $\therefore$A，B 正确；

$\because\frac{a_n}{a_{n+1}^2}=\frac{(3n+2)^2}{3n-1}=\frac{(3n-1+3)^2}{3n-1}=(3n-1)+\frac{9}{3n-1}+6$，当 $3n-1>3$ 时递增，当 $0<3n-1<3$ 时递减，当 $n=1$ 时，$\frac{a_n}{a_{n+1}^2}=\frac{25}{2}$，当 $n=2$ 时，$\frac{a_n}{a_{n+1}^2}=\frac{64}{5}$，最小值为$\frac{25}{2}$. $\therefore$C 错；

而$\frac{(-1)^n}{a_na_{n+1}}=(-1)^n(3n-1)(3n+2)=(-1)^n9n^2+(-1)^n(3n-2)$，$\therefore T_{2n}=9(-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-(2n-1)^2+(2n)^2)+(-1+4-7+10-\cdots-(6n-5)+(6n-2))=9(1+2+3+4+\cdots+(2n-1)+2n)+3n=\frac{9\times2n(2n+1)}{2}+3n=18n^2+12n$. ∴D 正确. 故选 ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.**【答案及评分细则】**$\left[0,\frac{1}{4}\right]$（5 分，写成不等式或集合形式，只要结果正确均给分）

【解析】当 $a=0$ 时，符合题意；当 $a\neq0$ 时，需$\begin{cases}a>0\\\Delta\geqslant0\end{cases}$，解得 $0<a\leqslant\frac{1}{4}$. 故 $a\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$.

13.**【答案及评分细则】**1（5 分，其他结果均不得分）

【解析】因为 $a_1=1,a_2=2$，且 $a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，所以 $a_3=a_2-a_1=1,a_4=a_3-a_2=-1,a_5=a_4-a_3=-2,a_6=a_5-a_4=-1,a_7=a_6-a_5=1,a_8=a_7-a_6=2,\cdots$，所以 $\{a_n\}$ 是以 6 为周期的数列，因为 $2\ 029=6\times338+1$，所以 $a_{2\,029}=a_1=1$.

14.**【答案及评分细则】**$(-\infty,3]$（5 分，写成不等式或集合形式，只要结果正确均给分）

【解析】依题意有 $a-2\leqslant x^2e^x-(2\ln x+x)=e^{x+2\ln x}-(x+2\ln x)$.

而 $e^{x+2\ln x}-(x+2\ln x)\geqslant x+2\ln x+1-(x+2\ln x)=1$，当且仅当 $x+2\ln x=0$ 时等号成立，即 $a-2\leqslant1$，

$\therefore a\leqslant3$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

15.**【答案】**(1)$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$，$\sqrt{2}$　(2)$f(x)$在区间$\left(0,\frac{4\pi}{3}\right)$上有且仅有两个极值点

【解析及评分细则】(1)当 $\omega=2$ 时，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$，…… 2 分

所以 $f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，…… 4 分

令 $2x+\frac{5\pi}{12}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}$，所以 $f(x)$的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$. …… 6 分

(2)易知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{12}\right)$，

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$\omega x+\frac{5\pi}{12}\in\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\omega\pi}{2},\frac{5\pi}{12}\right)$，

所以$\frac{5\pi}{12}-\frac{\omega\pi}{2}\geqslant-\frac{\pi}{2}$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{11}{6}$，…… 8 分

因为 $\omega\in\mathbf{N}^*$，所以 $\omega=1$，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$，…… 9 分

易知，$f(x)$的对称轴为 $x=k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，…… 10 分

当 $x\in\left(0,\frac{4\pi}{3}\right)$时，$0<k\pi+\frac{\pi}{12}<\frac{4\pi}{3}$，解得 $k=0,1$，…… 12 分

所以 $f(x)$在区间$\left(0,\frac{4\pi}{3}\right)$上有且仅有两个极值点. …… 13 分

16.**【答案】**(1)$0<x<\log_2 3$　(2)$a\geqslant-\frac{7}{3}$

【解析及评分细则】(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\log_2(4^x+2\cdot2^x+1)=2\log_2(2^x+1)$，…… 2 分

$2<f(x)<4$，即 $1<\log_2(2^x+1)<2$，$2<2^x+1<4$，解得 $0<x<\log_2 3$，…… 4 分

所以不等式 $2<f(x)<4$ 的解集为$\{x|0<x<\log_2 3\}$. …… 6 分

(2) $f(x)\geqslant x$，即 $f(x)=\log_2[4^x+(a+2)2^x+a+1]\geqslant\log_2(2^x)$， …………………… 8分

等价于 $4^x+(a+2)2^x+a+1\geqslant 2^x$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立， …………………… 9分

设 $t=2^x\geqslant 2$，即 $t^2+(a+1)t+a+1\geqslant 0$ 对任意 $t\geqslant 2$ 恒成立， …………………… 10分

设 $g(t)=t^2+(a+1)t+a+1$，

当 $-\frac{a+1}{2}\leqslant 2$ 时，$g(2)=4+(a+1)2+a+1\geqslant 0$，解得 $a\geqslant -\frac{7}{3}$， …………………… 12分

当 $-\frac{a+1}{2}>2$ 时，$\Delta=(a+1)^2-4(a+1)\leqslant 0$，$a$ 无解， …………………… 14分

综上，a 的取值范围是 $a\geqslant -\frac{7}{3}$. …………………… 15分

17.【答案】(1) $y=x-2$　(2) $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有且仅有两个零点

【解析及评分细则】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=x+\cos x-1$，$f'(x)=1-\sin x$.

所以 $f(\pi)=\pi+\cos\pi-1=\pi-2$，$f'(\pi)=1-\sin\pi=1$， …………………… 2分

切线方程为 $y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)$，即 $y=x-2$. …………………… 4分

(2)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\frac{x}{2}+\cos x-1$，$f'(x)=\frac{1-2\sin x}{2}$， …………………… 5分

所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递减， …………………… 8分

因为 $f(0)=0$，故 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)>0$，又 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{6}-1=\frac{5\pi}{12}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，使得 $f(x_0)=0$， …………………… 10分

当 $x\in\left(\frac{5\pi}{6},2\pi\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，因为 $f(2\pi)=\pi+1-1>0$，

所以存在 $x_1\in\left(\frac{5\pi}{6},2\pi\right)$，使得 $f(x_1)=0$， …………………… 11分

当 $x\geqslant 2\pi$ 时，$f(x)\geqslant\pi-1-1=\pi-2>0$，$f(x)$ 无零点. …………………… 13分

综上，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有且仅有两个零点. …………………… 15分

18.【答案】(1) $a_n=\frac{n+2}{2^{n+1}}$，$b_n=-5\left(-\frac{2}{3}\right)^n$　(2)当 n 是奇数时，$S_n<T_n$；当 n 是偶数时，$S_n>T_n$

【解析及评分细则】(1)令 $n=1$，则 $2a_2-a_1=\frac{1}{4}$，所以 $a_2=\frac{1}{2}$，$S_2=a_1+a_2=\frac{5}{4}$， …………………… 2分

$T_2=\frac{8}{9}S_2=b_1\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{9}$，解得 $b_1=\frac{10}{3}$. 所以 $b_n=-5\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. …………………… 4分

由 $2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^{n+1}}$ 可知，$2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n=\frac{1}{2}$，

所以 $2^na_n=\frac{3}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{n+2}{2}$，$a_n=\frac{n+2}{2^{n+1}}$. …………………… 6分

(2)当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2^n}-a_n$，

累加可得，$a_n-a_1=\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-S_n+a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-S_n+\frac{3}{4}$，

所以 $S_n=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$，$T_n=\frac{10}{3}\times\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=2-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. …………………… 10分

当 n 是奇数时，$S_n<2<T_n$， ……………………

当 n 是偶数时，记 $c_n=\frac{2-T_n}{2-S_n}=\frac{4}{n+4}\left(\frac{4}{3}\right)^n$，$\frac{c_{n+2}}{c_n}=\frac{16}{9}\left(1-\frac{2}{n+6}\right)\geqslant\frac{16}{9}\times\left(1-\frac{2}{2+6}\right)=\frac{4}{3}>1$，

$\therefore\{c_n\}$单调递增，$c_n\geqslant c_2=\frac{4}{6}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{32}{27}>1$，$\therefore 2-T_n>2-S_n$，所以 $S_n>T_n$. ………………… 15 分

综上，当 n 是奇数时，$S_n<T_n$；

当 n 是偶数时，$S_n>T_n$. ………………………………………………………………………………… 17 分

19.【答案】(1)详见解析　(2)详见解析　(3)经过 4 次迭代后，x_0 的近似值 x_5 与 x_0 的差值小于10^{-7}

【解析及评分细则】(1)$f'(x)=3x^2+1>0$，所以 $f(x)$单调递增， ………………………………… 1 分

因为 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}+\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{27}<0$，$f(1)=1+1-1=1>0$，……………………………… 3 分

所以 $f(x)$存在唯一零点 x_0，且$\frac{2}{3}<x_0<1$. ………………………………………………… 4 分

(2)$f(x)$在点$(x_n,f(x_n))$处的切线方程为 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$， ………………………… 5 分

令 $y=0$，解得 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3+x_n-1}{3x_n^2+1}=\frac{2x_n^3+1}{3x_n^2+1}$， ……………………… 6 分

$|x_{n+1}-x_0|=\left|\frac{2x_n^3+1}{3x_n^2+1}-x_0\right|=\left|\frac{2x_n^3-3x_n^2x_0+1-x_0}{3x_n^2+1}\right|$， ………………………………… 7 分

易知 $x_0^3+x_0=1$，所以$|x_{n+1}-x_0|=\left|\frac{2x_n^3-3x_n^2x_0+x_0^3}{3x_n^2+1}\right|=(x_n-x_0)^2\ \frac{2x_n+x_0}{3x_n^2+1}$，………………… 9 分

要证$|x_{n+1}-x_0|<|x_n-x_0|^2$，只需证$\frac{2x_n+x_0}{3x_n^2+1}<1$， ……………………………………… 10 分

即 $x_0<3x_n^2-2x_n+1$，

因为 $3x_n\left(x_n-\frac{2}{3}\right)+1>1>x_0$，所以$|x_{n+1}-x_0|<|x_n-x_0|^2$. ……………………………… 11 分

(3)由(2)可知，$|x_2-x_0|<|x_1-x_0|^2=(1-x_0)^2<\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，…………………………… 13 分

所以$|x_3-x_0|<|x_2-x_0|^2<\frac{1}{81}$， ………………………………………………………………… 14 分

所以$|x_4-x_0|<|x_3-x_0|^2<\frac{1}{81^2}=\frac{1}{6\ 561}$，…………………………………………………… 15 分

所以$|x_5-x_0|<|x_4-x_0|^2<\frac{1}{6\ 561^2}<\frac{1}{6\ 000^2}=\frac{1}{3.6}\times10^{-7}<10^{-7}$， ……………………… 16 分

所以经过 4 次迭代后，x_0 的近似值 x_5 与 x_0 的差值小于10^{-7}. ………………………………… 17 分