高三数学试卷参考答案

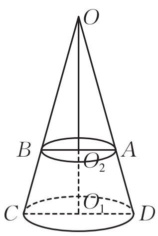
1. B　$B=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$，$A\cap B=\{-1\}$.

2. D　$(3+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})=6-6\mathrm{i}+4\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2=10-2\mathrm{i}$.

3. C　令 $2^x=3$，可得 $x=\log_2 3$，则 $f(3)=\log_2 3$.

4. D　2019 年的居民消费水平比 2020 年的居民消费水平高，A 错误. 2019 年的城镇居民消费水平比 2020 年的城镇居民消费水平高，B 错误. 2018 年至 2022 年我国居民消费水平数据从小到大排序为 25245，27439，27504，31013，31718，$5\times 60\%=3$，2018 年至 2022 年我国居民消费水平数据的 60% 分位数为 $\frac{27504+31013}{2}=29258.5$ 元，C 错误. 设我国农村人口数为 x，城镇人口数为 y，则 $31718=\frac{19530x+38289y}{x+y}$，化简得 $\frac{y}{x}=\frac{12188}{6571}>\frac{3}{2}$，所以 2022 年我国城镇人口数比农村人口数的 1.5 倍还要多，D 正确.

5. C　因为 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})+\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin\alpha$，所以 $\sqrt{2}\sin\alpha=\sin\alpha$，则 $\sin\alpha=0$，即 $\alpha=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\tan(k\pi-\frac{\pi}{4})=-1$.



6. B　延长 CB，DA 交于点 O，设圆台上、下个底面的圆心分别为 O_2，O_1. 连接 OO_1，

设 $OB=x$，$O_2B=r$，$O_1C=R$. 因为 $\triangle OO_2B\backsim\triangle OO_1C$，所以 $\frac{r}{R}=\frac{OB}{OC}$，

则 $x=20$ cm. 设所求圆心角为 θ，则 $x\theta=2\pi r$，所以 $\theta=\frac{2\pi r}{x}=\frac{\pi}{2}$.

7. A　圆 M：$x^2-6x+y^2-6y+16=0$，即圆 M：$(x-3)^2+(y-3)^2=2$，圆心 $M(3,3)$ 到直线 l 的距离为 d，AB 的中点为 C. 因为 $|OA|=|AB|$，所以 $|OC|=3|AC|$. 因为 $|OM|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，所以 $|OC|=\sqrt{|OM|^2-d^2}=\sqrt{18-d^2}$. 又因为 $|AC|=\sqrt{2-d^2}$，所以 $\sqrt{18-d^2}=3\sqrt{2-d^2}$，解得 $d=0$，所以直线 l 经过圆心 $M(3,3)$，所以 $k=\frac{3-0}{3-0}=1$.

8. C　令 $t=\omega x+\varphi$，由题意可得 $\sin t=0$ 在 $(\varphi,\frac{\pi\omega}{2}+\varphi)$ 上有解.

因为 $\sin t=0$ 在 $[a,b]$ 内有解的最短区间长度为 $b-a=\pi$，所以 $\frac{\pi\omega}{2}+\varphi-\varphi>\pi$，解得 $\omega>2$.

9. AC　$|OB|=c=|OF_1|=|OF_2|$，点 B 在以 O 为圆心，$|OF_1|$ 为半径的圆上，所以 $BF_1\perp BF_2$，A 正确. 直线 BF_2 的斜率为 $-\frac{b}{c-a}$，直线 AO 的斜率为 $-\frac{b}{a}$，$-\frac{b}{c-a}$ 与 $-\frac{b}{a}$ 不一定相等，所以直线 BF_2 与直线 AO 不一定平行，B 错误. $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=ab=2$，双曲线 C 的焦距为 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{2ab}=2\sqrt{4}=4$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以双曲线 C

的焦距的最小值为4,C正确,D错误.

10. ACD　设等差数列2,5,8,11,14,…的通项公式为$b_n=3n-1$.数阵中前7行共$1+2+3+\cdots+7=28$个数,数阵中前7行所有数的和为$2\times28+\frac{28\times27\times3}{2}=1190$,A正确.

令$b_n=3n-1=101$,解得$n=34$,前7行共28个数,第8行有8个数,所以101是数阵中第8行从左至右的第6个数,B错误.记每一行的第1个数组成数列$\{a_n\}$,则$a_1=2$,$a_2-a_1=3$,$a_3-a_2=6=3\times2$,$a_4-a_3=9=3\times3$,…,$a_n-a_{n-1}=3\times(n-1)$,累加得$a_n-a_1=3\times(1+2+3+\cdots+n-1)=\frac{3n(n-1)}{2}$,所以$a_n=\frac{3n^2-3n+4}{2}$,$a_{10}=137$,C正确.数阵中第10行从左至右的第4个数是$137+(4-1)\times3=146$,D正确.

11. ACD　令$x=y=0$,可得$f(0)=0$.

令$x=y=1$,可得$[f(1)]^2=f(1)$.因为当$x>0$时,$f(x)\neq0$,所以$f(1)=1$.

令$x=y$,可得$[f(x)]^2=f(x^2)\geqslant0$.

因为$x^2\geqslant0$,所以当$x\geqslant0$时,$f(x)\geqslant0$.

又因为当$x>0$时,$f(x)\neq0$,所以当$x>0$时,$f(x)>0$.

令$y=1$,可得$f(x)[f(x)-f(x-1)]=f(x)$,①

所以$f(x)-f(x-1)=1$,$f(x+1)-f(x)=1$,两式相加可得$f(x+1)-f(x-1)=2$.

令$y=-1$,可得$f(x)[f(x)-f(x+1)]=f(-x)$.②

①-②可得$f(x)[f(x+1)-f(x-1)]=f(x)-f(-x)$,化简可得$f(x)=-f(-x)$,所以$f(x)$是奇函数,C正确.

由$f(x)-f(x-1)=1$,可得$f(2)=f(1)+1=2$,$f(3)=f(2)+1=3$,$f(4)=f(3)+1=4$,…,$f(10)=10$,B错误.

由$\begin{cases}f(x+1)-f(x)=1,\\f(x)=-f(-x),\end{cases}$可得$\begin{cases}f(\frac{1}{2})-f(-\frac{1}{2})=1,\\f(\frac{1}{2})=-f(-\frac{1}{2}),\end{cases}$解得$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$,A正确.

令$x=x_1$,$y=x_1-x_2$,可得$f(x_1)-f(x_2)=\frac{f(x_1(x_1-x_2))}{f(x_1)}$.

令$0<x_2<x_1$,则$x_1-x_2>0$,$x_1(x_1-x_2)>0$.

因为当$x>0$时,$f(x)>0$,所以$f(x_1)>0$,$f(x_1(x_1-x_2))>0$,

所以$f(x_1)-f(x_2)=\frac{f(x_1(x_1-x_2))}{f(x_1)}>0$,即$f(x_1)>f(x_2)$,

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

因为$f(x)$为奇函数,所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,D正确.

12. 4　$|PF|=\frac{p}{4}+\frac{p}{2}=3$,解得$p=4$.

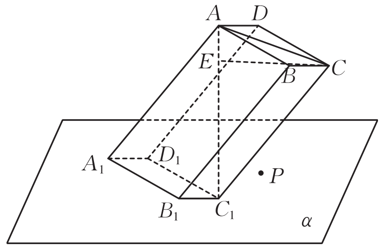
13. $\frac{12}{25}$;$\frac{81}{125}$　到第3局才分出胜负,则前两局甲、乙各赢一局,其概率为$C_2^1\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$.

若甲获胜,分 2 种情况：

①甲连赢 2 局,其概率为$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$,

②前两局甲、乙各赢一局,第三局甲赢,其概率为 $C_2^1\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$.

故甲获胜的概率为$\frac{9}{25}+\frac{36}{125}=\frac{81}{125}$.



14. $\sqrt{51}$　过点 C 作 $CE\perp AC_1$,垂足为 E,连接 AC. 易得 $CE//$平面 α,所以点 C 到平面 α 的距离为 C_1E. $AC=3\sqrt{2}$,$AC_1=\sqrt{AC^2+CC_1^2}=3\sqrt{6}$,$CE=\frac{AC\cdot CC_1}{AC_1}=2\sqrt{3}$,$C_1E=\sqrt{CC_1^2-CE^2}=2\sqrt{6}$. 过点 C 作 $CC'\perp$平面 α,垂足为 C'(图略). 当 C',C_1,P 三点共线,且 $C'P=C'C_1+C_1P$ 时,PC 取得最大值,最大值为 $\sqrt{C_1E^2+(C'C_1+C_1P)^2}=\sqrt{C_1E^2+(CE+C_1P)^2}=\sqrt{51}$.

15. 解:(1)设$\{a_n\}$的公比为 q,则$\begin{cases}a_1+a_1q=6,\\a_1\cdot a_1q^2=a_1q^3,\end{cases}$ ………… 2 分

解得 $a_1=q=2$ 或 $q=-3$(舍去). ………… 3 分

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. ………… 5 分

(2)因为$\{a_n\}$是递增数列,所以 $M_n=2^n$,$m_n=2$, ………… 8 分

$b_n=\frac{M_n+m_n}{2}=\frac{2^n+2}{2}=2^{n-1}+1$. ………… 10 分

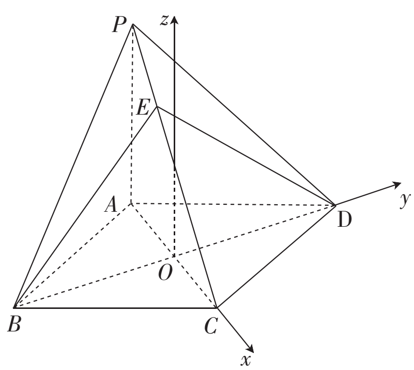
$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}+n=2^n+n-1$. ………… 13 分

16. 解:(1)数字 2 填在第 2 个空格中的概率为$\frac{C_{97}^1}{C_{99}^3}=\frac{1}{1617}$. ………… 6 分

(2)由题意可得 $2\leqslant x\leqslant 98$,且 $x\in\mathbf{N}_+$. ………… 8 分

$P(x)=\frac{C_{x-1}^1C_{99-x}^1}{C_{99}^3}=\frac{(x-1)(99-x)}{C_{99}^3}$. ………… 12 分

当 $x=50$ 时,$P(x)$取得最大值,最大值为$\frac{49^2}{C_{99}^3}=\frac{49}{3201}$. ………… 15 分



17. (1)证明:记 $AC\cap BD=O$.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $BD\perp AC$. ………… 1 分

因为 $BD\perp PC$,$PC\subset$平面 PAC,$AC\subset$平面 PAC,且 $AC\cap PC=C$,所以 $BD\perp$平面 PAC. ………… 3 分

因为 $PA\subset$平面 PAC,所以 $BD\perp PA$. ………… 4 分

因为 $PA\perp AC$,$AC\subset$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,且 $AC\cap BD=O$,所以 $PA\perp$平面 $ABCD$. ………… 6 分

(2)解:以 O 为坐标原点,分别以$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OD}$的方向为 x,y 轴

的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AB=4$，则 $B(0,-2\sqrt{3},0)$，$D(0,2\sqrt{3},0)$，$E(-1,0,3)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,2\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{BD}=(0,4\sqrt{3},0)$. ………………………………………………………………………… 9 分

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=4\sqrt{3}y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-x+2\sqrt{3}y+3z=0,\end{cases}$ 令 $x=3$，得 $\boldsymbol{m}=(3,0,1)$. ………………………… 11 分

平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$. ……………………………………………… 12 分

$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

易得二面角 A-BD-E 为锐角，故二面角 A-BD-E 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ………………… 15 分

18. (1)解：由题意得椭圆 C 的半焦距 $c=1$，且 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，所以 $a=2$. ………………………… 2 分

又因为 $b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………… 4 分

(2)证明：当直线 l 的斜率为 0 时，直线 l 的方程为 $y=0$，………………………………… 5 分

此时 AB 为椭圆 C 的长轴，以弦 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=4$，该圆的半径为 2.

圆$(x-\dfrac{3}{4})^2+y^2=\dfrac{25}{16}$的半径为$\dfrac{5}{4}$，两圆的圆心距为 $2-\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}$. ……………………………… 7 分

满足圆$(x-\dfrac{3}{4})^2+y^2=\dfrac{25}{16}$恒与以弦 AB 为直径的圆相切. ………………………………… 8 分

当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$.

联立$\begin{cases}x=ty+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，……………………………………………… 9 分

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{6t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3t^2+4}$，

$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=-\dfrac{3t}{3t^2+4}$，$x_0=ty_0+1=\dfrac{4}{3t^2+4}$. ……………………………………… 11 分

$|AB|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{12(t^2+1)}{3t^2+4}$. ………………………………………… 13 分

记圆$(x-\dfrac{3}{4})^2+y^2=\dfrac{25}{16}$的圆心为 $N(\dfrac{3}{4},0)$，

$|MN|=\sqrt{(\dfrac{4}{3t^2+4}-\dfrac{3}{4})^2+(-\dfrac{3t}{3t^2+4})^2}=\dfrac{9t^2+4}{4(3t^2+4)}$. ……………………………… 15 分

$\dfrac{1}{2}|AB|-|MN|=\dfrac{6(t^2+1)}{3t^2+4}-\dfrac{9t^2+4}{4(3t^2+4)}=\dfrac{5(3t^2+4)}{4(3t^2+4)}=\dfrac{5}{4}$. ……………………… 16 分

满足圆$(x-\frac{3}{4})^2+y^2=\frac{25}{16}$恒与以弦 AB 为直径的圆相切.

综上,圆$(x-\frac{3}{4})^2+y^2=\frac{25}{16}$恒与以弦 AB 为直径的圆相切. ………………………… 17 分

19.解:(1)$f(a)=\sqrt{a}$,$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-a}}$,$f'(a)=\frac{1}{\sqrt{a}}$. ………………………… 2 分

曲线 $y=f(x)$在点$(a,f(a))$处的切线方程为 $y-\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}(x-a)$. ………………………… 3 分

因为该切线过点$(4,2)$,所以 $2-\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}(4-a)$,解得 $a=4$. ………………………… 4 分

(2)因为 $f(x)=\sqrt{2x-a}\leqslant a\mathrm{e}^{x-1}$,所以 $a>0$,且 $x>\frac{a}{2}$.

两边平方可得 $a^2\mathrm{e}^{2x-2}\geqslant 2x-a$. ………………………… 5 分

令函数 $g(x)=a^2\mathrm{e}^{2x-2}-2x+a(x>\frac{a}{2})$,$g'(x)=2(a^2\mathrm{e}^{2x-2}-1)$.

令函数 $h(x)=a^2\mathrm{e}^{2x-2}-1$,$h'(x)=2a^2\mathrm{e}^{2x-2}>0$,所以 $h(x)$是增函数.

令 $g'(x)=2(a^2\mathrm{e}^{2x-2}-1)=0$,得 $x=1-\ln a$. ………………………… 7 分

下面比较 $1-\ln a$ 与$\frac{a}{2}$的大小.

令函数 $u(a)=1-\ln a-\frac{a}{2}$,$u'(a)=-\frac{a+2}{2a}<0$,$u(a)$是减函数.

因为 $u(1)=\frac{1}{2}>0$,$u(2)=-\ln 2<0$,所以存在 $a_0\in(1,2)$,使得当 $a\in(0,a_0)$时,$u(a)>0$,

即 $1-\ln a>\frac{a}{2}$.当 $a\in[a_0,+\infty)$时,$u(a)\leqslant 0$,即 $1-\ln a\leqslant\frac{a}{2}$. ………………………… 10 分

当 $a\in(0,a_0)$时,

当 $x\in(\frac{a}{2},1-\ln a)$时,$h(x)<0$,即 $g'(x)<0$;

当 $x\in(1-\ln a,+\infty)$时,$h(x)>0$,即 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$在$(\frac{a}{2},1-\ln a)$上单调递减,在$(1-\ln a,+\infty)$上单调递增.

$g(x)_{\min}=g(1-\ln a)=a^2\mathrm{e}^{-2\ln a}-2(1-\ln a)+a=2\ln a+a-1$. ………………………… 13 分

令函数 $v(a)=2\ln a+a-1$,$v'(a)=\frac{2}{a}+1>0$,所以 $v(a)$是增函数.

由题意可得 $g(x)_{\min}=2\ln a+a-1\geqslant 0$,又因为 $v(1)=0$,所以 $1\leqslant a<a_0$. ………………………… 15 分

当 $a\in[a_0,+\infty)$时,$g(x)_{\min}=g(\frac{a}{2})>0$,符合题意. ………………………… 16 分

综上,a 的取值范围为$[1,+\infty)$. ………………………… 17 分