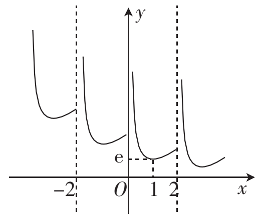
福建省部分达标学校 2023～2024 学年第一学期期中质量监测
高三数学试卷参考答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. D　2. A　3. B　4. C　5. B　6. C　7. A　8. B

8. **解析**：依题作出函数 $f(x)$ 的图象，结合图象可知：



当 $x\in(-2,0]$ 时，$f(x)_{极小值}=f(-1)=2e$；

当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)_{极小值}=f(1)=e$；

当 $x\in(2,4]$ 时，$f(x)_{极小值}=f(3)=\frac{e}{2}$.

若对 $\forall x\in(-\infty,m]$，$f(x)_{极小值}\geqslant 2e$，则 $m\leqslant 1$，

所以 m 的最大值为 1，B 正确.

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

9. AB　10. BC　11. ACD　12. ABD

12. **解析**：对于选项 A，$f(x+2\pi)=e^{\sin(x+2\pi)}-e^{\cos(x+2\pi)}=e^{\sin x}-e^{\cos x}=f(x)$，故选项 A 正确.

对于选项 B，由 $f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}$，得 $f'(x)=\cos xe^{\sin x}+\sin xe^{\cos x}$，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)=\cos xe^{\sin x}+\sin xe^{\cos x}>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，故选项 B 正确.

对于选项 C，$f(x+\frac{\pi}{4})=e^{\sin(x+\frac{\pi}{4})}-e^{\cos(x+\frac{\pi}{4})}$，

设 $g(t)=e^{\sin(t+\frac{\pi}{4})}-e^{\cos(t+\frac{\pi}{4})}$，

则 $g(-t)=e^{\sin(-t+\frac{\pi}{4})}-e^{\cos(-t+\frac{\pi}{4})}=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t}-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}=e^{\cos(t+\frac{\pi}{4})}-e^{\sin(t+\frac{\pi}{4})}=-g(t)$，

所以函数 $g(t)$ 即 $f(x+\frac{\pi}{4})$ 是奇函数，故选项 C 不正确.

对于选项 D，由 $f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}$，

得 $f'(x)=\cos xe^{\sin x}+\sin xe^{\cos x}$，令 $t(x)=\cos xe^{\sin x}+\sin xe^{\cos x}$，

则 $t'(x)=e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)+e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$.

①当 $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ 时，$\cos^2 x-\sin x<0$，$\cos x-\sin^2 x<0$，

所以 $t'(x)<0$，即 $f'(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ 上单调递减，

又 $f'(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}e^{\sin\frac{\pi}{2}}+\sin\frac{\pi}{2}e^{\cos\frac{\pi}{2}}=1>0$，

$f'(\frac{3\pi}{4})=\cos\frac{3\pi}{4}e^{\sin\frac{3\pi}{4}}+\sin\frac{3\pi}{4}e^{\cos\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}})<0$，

所以 $f'(x)$在区间$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$上存在唯一零点；

②当 $x\in(\frac{3\pi}{4},\pi)$时，$f'(x)=\cos x e^{\sin x}+\sin x e^{\cos x}$，

又 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})<0, e^{\sin x}>e^{\cos x}$，

所以 $f'(x)=\cos x e^{\sin x}+\sin x e^{\cos x}<(\cos x+\sin x)e^{\sin x}<0$，

则 $f'(x)$在区间$(\frac{3\pi}{4},\pi)$上无零点.

综上，$f(x)$在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$上有且仅有一个极值点，故选项 D 正确.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\{x|-4<x\leqslant 2\}$（或$(-4,2]$）

14. $-x$（答案不唯一，形如 $kx(k<0)$即可）

15. $\frac{\sqrt{62}}{8}$

16. $a>1$ **解析：**$f'(x)=x^2+2ax+b$，设切点为$(x_0,f(x_0))$，则切线斜率为 $f'(x_0)$，
切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，由于切线过点 $P(1,0)$，
$\therefore -f(x_0)=f'(x_0)(1-x_0)$，整理得$\frac{2}{3}x_0^3+(a-1)x_0^2-2ax_0-\frac{4}{3}=0$.
构造函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3+(a-1)x^2-2ax-\frac{4}{3}$，$\therefore y=g(x)$有三个不同的零点，
$g'(x)=2x^2+2(a-1)x-2a=2(x-1)(x+a)$，
易知 $a\neq-1$，$g(1)\cdot g(-a)<0$，即$(-\frac{5}{3}-a)(\frac{1}{3}a^3+a^2-\frac{4}{3})<0$，即$(a+\frac{5}{3})(a-1)\cdot(a+2)^2>0$，又点 $P(1,0)$在曲线下方，$\therefore f(1)>0$，即 $a>-\frac{5}{3}$，解得 $a>1$.

四、解答题.

17. 解：(1)在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$， ………… 1 分

则$\frac{5}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$，解得 $\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$. ………… 2 分

又由题设知$\angle ADB\in(0^\circ,90^\circ)$， ………… 3 分

所以 $\cos\angle ADB=\sqrt{1-\sin^2\angle ADB}=\frac{\sqrt{23}}{5}$. ………… 4 分

(2)$\cos\angle BDC=\cos(90^\circ-\angle ADB)=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$， ………… 5 分

$\sin\angle BDC=\sqrt{1-\cos^2\angle BDC}=\frac{\sqrt{23}}{5}$， ………… 6 分

由 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}DB\cdot DC\cdot\sin\angle BDC$，得$\sqrt{46}=\frac{1}{2}\times5\times DC\times\frac{\sqrt{23}}{5}$， ………… 7 分

解得 $DC=2\sqrt{2}$. …………………………………………………………………………………… 8分

由余弦定理得 $BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC=25$， ……………………………… 9分

又 $BC>0$,所以 $BC=5$. …………………………………………………………………………… 10分

18.解：(1) $f(x)=2\sin x\cdot\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$. ……………………………………………………………………………… 3分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$, …………… 5分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$,

则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间为 $[0,\frac{\pi}{12}]$, $[\frac{7\pi}{12},\pi]$. ………………………………… 7分

(2)由题设知 $m\leqslant f(x)_{\min}$, ……………………………………………………………………… 8分

当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时, $2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$, ……………………………………………………… 9分

则 $\frac{1}{2}\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{3})\leqslant 1$,即 $f(x)_{\min}=\frac{1}{2}$, …………………………………………………… 11分

所以 $m\leqslant\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………………………………… 12分

19.(1)证明:如图,连接 AC,交 BD 于点 O,连接 OE,则 O 为 AC 的中点,

$\because E$ 是 AD_1 的中点, $\therefore OE\parallel CD_1$. …………………………………………………………… 1分

$\because OE\subset$ 平面 $BDEF$, $CD_1\not\subset$ 平面 $BDEF$,

$\therefore CD_1\parallel$ 平面 $BDEF$, ………………………………………………………………………… 2分

又 F 是 AB_1 的中点, $\therefore EF\parallel B_1D_1$, …………………………………………………………… 3分

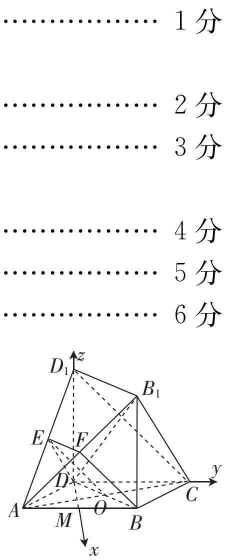
$\because EF\subset$ 平面 $BDEF$, $B_1D_1\not\subset$ 平面 $BDEF$,

$\therefore B_1D_1\parallel$ 平面 $BDEF$, ……………………………………………………………………… 4分

又 CD_1, $B_1D_1\subset$ 平面 CB_1D_1, $B_1D_1\cap CD_1=D_1$, …………………………………………… 5分

$\therefore$ 平面 $BDEF\parallel$ 平面 CB_1D_1. ………………………………………………………………… 6分

(2)解:取 AB 的中点 M,连接 DM.



在菱形 $ABCD$ 中, $\because\angle ADC=120^\circ$, $\therefore\triangle ABD$ 为正三角形,则 $DM\perp DC$,

又 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$, ……………………………………………………… 7分

$\therefore$ 以 DM,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $D(0,0,0)$, $B(3,\sqrt{3},0)$, $E(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1)$, $B_1(3,\sqrt{3},2)$, ………… 8分

$\therefore \overrightarrow{DB_1}=(3,\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{DB}=(3,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DE}=(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1)$.

设平面 $BDEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}3x+\sqrt{3}y=0,\\ \frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=-3$，$\therefore \boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-3)$. ………………………… 10 分

设直线 DB_1 与平面 $BDEF$ 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DB_1},\boldsymbol{n}\rangle|=|\frac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DB_1}||\boldsymbol{n}|}|=\frac{3\sqrt{13}}{26}$，

$\therefore$直线 DB_1 与平面 $BDEF$ 所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{13}}{26}$. ………………………… 12 分

20.(1)解：因为 $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}(x>0)$，所以 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$， ………………………… 1 分

则曲线 $y=f(x)$ 在 $A(1,1)$ 处的切线的斜率为 $f'(1)=-1$.

因为 $g(x)=\frac{ae}{e^x}+\frac{1}{x}-bx$，所以 $g'(x)=-\frac{ae}{e^x}-\frac{1}{x^2}-b$， ………………………… 2 分

则曲线 $y=g(x)$ 在 $A(1,1)$ 处的切线的斜率为 $g'(1)=-a-1-b$.
因为曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在 $A(1,1)$ 处的切线互相垂直，
所以 $f'(1)\cdot g'(1)=-1$，即 $a+b=-2$，① ………………………… 4 分
又 $g(1)=1$，所以 $a-b=0$，② ………………………… 5 分
联立①②得 $a=-1$，$b=-1$. ………………………… 6 分

(2)证明：由(1)知 $g(x)=-\frac{e}{e^x}+\frac{1}{x}+x$.

(法一)要证 $f(x)+g(x)\geqslant\frac{2}{x}$，即证 $1-\frac{\ln x}{x}-\frac{e}{e^x}-\frac{1}{x}+x\geqslant 0$.

令 $h(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{e}{e^x}-\frac{1}{x}+x(x\geqslant 1)$，

则 $h'(x)=\frac{-1+\ln x}{x^2}+\frac{e}{e^x}+\frac{1}{x^2}+1=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{e}{e^x}+1$. ………………………… 8 分

因为 $x\geqslant 1$，所以 $h'(x)=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{e}{e^x}+1>0$， ………………………… 9 分

所以 $h(x)$ 在$[1,+\infty)$上单调递增， ………………………… 10 分

所以当 $x\geqslant 1$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=0$，………………………… 11 分

即 $1-\frac{\ln x}{x}-\frac{e}{e^x}-\frac{1}{x}+x\geqslant 0$，

所以当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant\frac{2}{x}$. ………………………… 12 分

(法二)设 $h_1(x)=\ln x-x+1$，则 $h'_1(x)=\frac{1}{x}-1$，

因为 $x\geqslant 1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1\leqslant 0$，所以 $h_1(x)$ 在$[1,+\infty)$上单调递减，

所以 $h_1(x)\leqslant h_1(1)=0$，即 $\ln x-x+1\leqslant 0$，

所以 $\ln x \leqslant x-1$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立. ………………………………………… 7 分

设 $h_2(x)=e^x-ex$,则 $h_2'(x)=e^x-e$,

因为当 $x\geqslant 1$ 时,$h_2'(x)=e^x-e\geqslant 0$,所以 $h_2(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h_2(x)\geqslant h_2(1)=0$,即 $e^x-ex\geqslant 0$,

所以 $e^x\geqslant ex$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立. ………………………………………… 8 分

要证 $f(x)+g(x)\geqslant\frac{2}{x}$,即证 $1-\frac{\ln x}{x}-\frac{e}{e^x}-\frac{1}{x}+x\geqslant 0$.

又 $x\geqslant 1$,所以即证 $x-\ln x-\frac{ex}{e^x}-1+x^2\geqslant 0$

由 $\ln x\leqslant x-1$,$e^x\geqslant ex$,

得 $x-\ln x-\frac{ex}{e^x}-1+x^2\geqslant x-(x-1)-\frac{ex}{ex}-1+x^2=x^2-1$(当 $x=1$ 时,等号成立),

即证 $x^2-1\geqslant 0$, ………………………………………………………………… 10 分

又 $h(x)=x^2-1$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,则 $h(x)\geqslant h(1)=0$,即 $x^2-1\geqslant 0$,

所以当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)+g(x)\geqslant\frac{2}{x}$. ………………………………………… 12 分

21. 解:(1)由正弦定理得 $\frac{a}{b+c}+\frac{b^2}{ab+bc}=1$, ………………………………………… 2 分

整理得 $a^2+b^2-c^2=ab$,即 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,

由余弦定理得 $\cos C=\frac{1}{2}$, ………………………………………………………… 4 分

又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $A+B=\frac{2\pi}{3}$,即 $A=\frac{2\pi}{3}-B$.

因为△ABC 为锐角三角形,所以 $\begin{cases}0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\\ 0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$. ……………………… 6 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,得 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{b}{\sin B}$, ……………………… 7 分

则 $a+b+c=\frac{2}{\sin B}[\sin(\frac{2\pi}{3}-B)+\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$=\frac{2}{\sin B}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2})$

$=3+\frac{\sqrt{3}(1+\cos B)}{\sin B}$

$=3+\frac{\sqrt{3}\times 2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$

$=3+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\dfrac{B}{2}}$, …………………………………………………………………………… 9 分

当$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$时,$\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{B}{2}<\dfrac{\pi}{4}$,则 $\tan\dfrac{\pi}{12}<\tan\dfrac{B}{2}<\tan\dfrac{\pi}{4}$, ……………………………… 10 分

又 $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$, ………………………… 11 分

所以 $2-\sqrt{3}<\tan\dfrac{B}{2}<1$,$\sqrt{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\dfrac{B}{2}}<3+2\sqrt{3}$,$3+\sqrt{3}<3+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\dfrac{B}{2}}<6+2\sqrt{3}$,

即 $3+\sqrt{3}<a+b+c<6+2\sqrt{3}$,

所以$\triangle ABC$周长的取值范围是$(3+\sqrt{3},6+2\sqrt{3})$. ………………………………… 12 分

22. 解:(1)当 $a=0$ 时,$f(x)=\dfrac{x}{e^x}(x\in\mathbf{R})$,$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$. ……………………………… 1 分

当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减, …………………………… 2 分

所以 $f(x)$的最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{e}$. ………………………………………………………… 3 分

(2)$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}+2a(x-1)=\dfrac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}$. ………………………………… 4 分

①当 $a\leqslant 0$ 时,$2ae^x-1<0$,

当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,

所以 $f(x)$的极大值为 $f(1)=\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$,符合题意. ………………………………………… 5 分

②当 $a=\dfrac{1}{2e}$时,$f'(x)=\dfrac{(x-1)(e^{x-1}-1)}{e^x}$,

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

此时 $f(x)$无极值点. ………………………………………………………………………… 6 分

③当 $a>\dfrac{1}{2e}$时,令 $f'(x)=\dfrac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}$,

解得 $x_1=1$,$x_2=-\ln(2a)$,且$-\ln(2a)<1$.

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$;当$-\ln(2a)<x<1$ 时,$f'(x)<0$;当 $x<-\ln(2a)$时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(-\infty,-\ln(2a))$上单调递增,在$(-\ln(2a),1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)$的极大值为 $f(-\ln(2a))=\dfrac{-\ln(2a)}{e^{-\ln(2a)}}+a[-\ln(2a)-1]^2=a+a[\ln(2a)]^2$.

……………………………………………………………………………………………… 7 分

令 $t=\ln 2a>-1$，则 $f(-\ln(2a))=\frac{1}{2}e^{t}(1+t^{2})$.

设 $g(t)=\frac{1}{2}e^{t}(1+t^{2})$，

则 $g'(t)=\frac{1}{2}e^{t}(1+t)^{2}>0$，所以 $g(t)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

由题意知 $f(x)_{极大值}=f(-\ln(2a))=\frac{1}{2}e^{t}(1+t^{2})\leqslant\frac{1}{2}$，即 $g(t)\leqslant\frac{1}{2}=g(0)$，

所以 $t\leqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2e}<a\leqslant\frac{1}{2}$. ………………………………………………………… 9 分

④当 $0<a<\frac{1}{2e}$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)(2ae^{x}-1)}{e^{x}}=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=-\ln(2a)$，且满足 $-\ln(2a)>1$.

当 $x>-\ln(2a)$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<-\ln(2a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,-\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(-\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，符合题意. ………………………………… 11 分

综上，$a\in(-\infty,\frac{1}{2e})\cup(\frac{1}{2e},\frac{1}{2}]$. ………………………………………………………… 12 分