保密★启用前

准考证号________________________ 姓名__________

（在此卷上答题无效）

福建省部分地市2024届高中毕业班第一次质量检测

数学试题

2024.1

本试卷共4页，22小题，满分150分，考试用时120分钟.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的学校、班级和姓名填在答题卡上，正确粘贴条形码.
2. 作答选择题时，用2B铅笔在答题卡上将对应答案的选项涂黑.
3. 非选择题的答案必须写在答题卡各题目的指定区域内相应位置上，不准使用铅笔和涂改液.
4. 考试结束后，考生上交答题卡.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $z\cdot\mathrm{i}=z+1$（i为虚数单位），则 $|z|=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

2. 设集合 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y|y=2^x+1\}$，则 $M\cup N=$

A. $[-2,+\infty)$　　B. $(1,2]$　　C. $[1,2]$　　D. $(1,+\infty)$

3. 已知直线 l 与曲线 $y=x^3-x$ 在原点处相切，则 l 的倾斜角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

5. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2-2x+1$，则 $f(2)+f(0)=$

A. 2　　B. 1　　C. -8　　D. -9

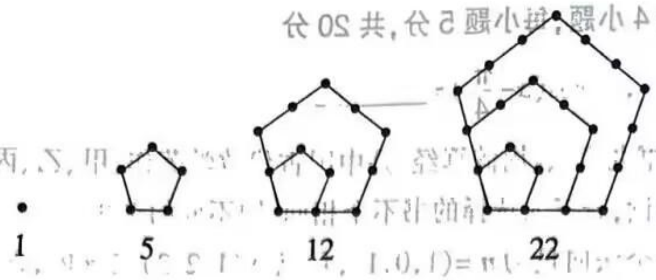
6. 已知 $a=x+\frac{1}{x}$，$b=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，$c=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，则下列结论错误的为

A. $\exists x\in[-1,1]$，$a>c$　　B. $\exists x\in[-1,1]$，$b>c$

C. $\exists x\in[-1,1]$，$a<c$　　D. $\exists x\in[-1,1]$，$b<c$

7. 传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家用沙粒和小石子来研究数，他们根据沙粒或小石子所排列的形状把数分成许多类，如图所示的1，5，12，22被称为五边形数，将所有的五边形数从小到大依次排列，则其第8个数为

A. 51　　B. 70　　C. 92　　D. 117



(第 7 题图)

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$, $f(x+1)f(y+1)=f(x+y)-f(x-y)$，若 $f(0)\neq0$，则 $f(2024)=$

A. -2　　B. -4　　C. 2　　D. 4

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3},0)$ 成中心对称

C. $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

D. 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，则 $\sin2x_0=\frac{1}{2}$

10. 已知甲、乙两组数据分别为：20,21,22,23,24,25 和 a,23,24,25,26,27，若乙组数据的平均数比甲组数据的平均数大 3，则

A. 甲组数据的第 70 百分位数为 23　　B. 甲、乙两组数据的极差相同

C. 乙组数据的中位数为 24.5　　D. 甲、乙两组数据的方差相同

11. 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 的直线与 C 交于 A,B 两点，若 $|F_1F_2|=2$，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8，则

A. $a=2$　　B. C 的离心率为 $\frac{1}{4}$

C. $|AB|$ 可以为 π　　D. $\angle BAF_2$ 可以为直角

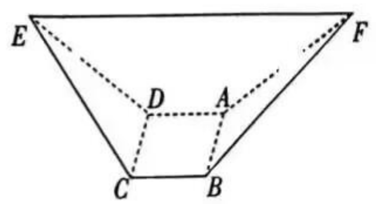
12. 如图所示，在五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形，$\triangle ABF$ 和 $\triangle DCE$ 均是等边三角形，且 $AB=2\sqrt{3}$, $EF=x(x>0)$，则

A. $EF /\!/$ 平面 $ABCD$

B. 二面角 $A-EF-B$ 随着 x 的减小而减小

C. 当 $BC=2$ 时，五面体 $ABCDEF$ 的体积 $V(x)$ 最大值为 $\frac{27}{2}$

D. 当 $BC=\frac{3}{2}$ 时，存在 x 使得半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的球能内含于五面体 $ABCDEF$



(第 12 题图)

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 若 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{3}{5}$,则 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=$________.

14. 《九章算术》、《数书九章》、《周髀算经》是中国古代数学著作,甲、乙、丙三名同学计划每人从中选择一种来阅读,若三人选择的书不全相同,则不同的选法有________种.

15. 已知平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$,且点 $A(1,2,3)$ 在 α 内,则点 $B(1,1,1)$ 到 α 的距离为________.

16. 设$\triangle ABC$ 是面积为 1 的等腰直角三角形,D 是斜边 AB 的中点,点 P 在$\triangle ABC$ 所在的平面内,记$\triangle PCD$ 与$\triangle PAB$ 的面积分别为 S_1, S_2,且 $S_1-S_2=1$.当 $|PB|=\sqrt{10}$,且 $|PA|>|PB|$ 时,$|PA|=$________;记 $||PA|-|PB||=a$,则实数 a 的取值范围为________.(注:第一空 2 分,第二空 3 分)

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

17. (10分)

已知$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $a^2\cos B+ab\cos A=2c$.

(1) 求 a;

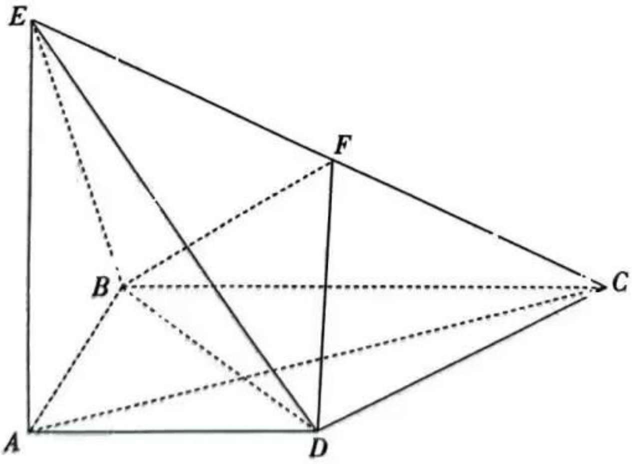
(2) 若 $A=\frac{2\pi}{3}$,且$\triangle ABC$ 的周长为 $2+\sqrt{5}$,求$\triangle ABC$ 的面积.

18. (12分)

如图,在四棱锥 $E-ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,$2AD=BC=2$,$AB=\sqrt{2}$,$AB\perp AD$,$EA\perp$平面 $ABCD$,过点B作平面 $\alpha\perp BD$.

(1) 证明:平面 $\alpha/\!/$平面 EAC;

(2) 已知点 F 为棱 EC 的中点,若 $EA=2$,求直线 AD 与平面 FBD 所成角的正弦值.



(第 18 题图)

19. (12分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2=2a_1=4$，当 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant2$ 时，$S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}$.

(1) 证明：$\{a_n\}$为等比数列；

(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$，记数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，若 $T_m+\dfrac{1}{7\times2^{m-2}}>1$，求正整数 m 的最小值.

20. (12分)

已知甲、乙两支登山队均有 n 名队员，现有新增的 4 名登山爱好者 a,b,c,d 将依次通过摸出小球的颜色来决定其加入哪支登山队，规则如下：在一个不透明的箱中放有红球和黑球各 2 个，小球除颜色不同之外，其余完全相同.先由第一名新增登山爱好者从箱中不放回地摸出 1 个小球，再另取完全相同的红球和黑球各 1 个放入箱中；接着由下一名新增登山爱好者摸出 1 个小球后，再放入完全相同的红球和黑球各 1 个，如此重复，直至所有新增登山爱好者均摸球和放球完毕.新增登山爱好者若摸出红球，则被分至甲队，否则被分至乙队.

(1) 求 a,b,c 三人均被分至同一队的概率；

(2) 记甲、乙两队的最终人数分别为 n_1,n_2，设随机变量 $X=|n_1-n_2|$，求 $E(X)$.

21. (12分)

已知函数 $f(x)=a\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$ 有两个极值点 x_1,x_2.

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 证明：$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\dfrac{a-2a^2}{a-1}$.

22. (12分)

在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(1,0)$，点 A 为动点，以线段 AP 为直径的圆与 y 轴相切，记 A 的轨迹为 Γ，直线 AP 交 Γ 于另一点 B.

(1) 求 Γ 的方程；

(2) $\triangle OAB$ 的外接圆交 Γ 于点 C(不与 O,A,B 重合)，依次连接 O,A,C,B 构成凸四边形 $OACB$，记其面积为 S.

(i) 证明：$\triangle ABC$ 的重心在定直线上；

(ii) 求 S 的取值范围.