

保密★启用前

准考证号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

(在此卷上答题无效)



名校联盟全国优质校2025届高三大联考

# 数学试题

2025.2

本试卷共4页，19小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若  $z = -1 + i$ ，则  $|\bar{z}| =$

A.  $\frac{1}{2}$

B. 1

C.  $\sqrt{2}$

D. 2

2. 已知集合  $A = \{x | \ln x > 0\}$ ， $B = \{x | y = \sqrt{4 - x^2}\}$ ，则  $A \cap B =$

A.  $(1, 2]$

B.  $(0, 2]$

C.  $[0, +\infty)$

D.  $(1, +\infty)$

3. 记等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_1 a_6 = 8a_3$ ， $a_5 = 16$ ，则  $S_5 =$

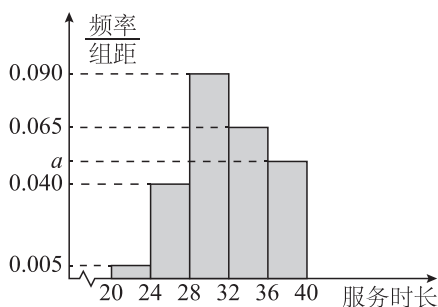
A. 16

B. 31

C. 32

D. 63

4. 市环保局开展了环境治理专项活动，活动结束后对志愿者做了一次随机抽样调查，统计整理了部分志愿者的服务时长（单位：小时），得到如图所示的频率分布直方图，据此估计志愿者服务时长的第90百分位数为



A. 36

B. 37

C. 38

D. 39

5. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ , 点  $A$  在  $C$  上, 过  $A$  作  $l$  的垂线, 垂足为  $A_1$ , 若  $|AF| = |A_1F|$ , 则  $|AF| =$
- A. 2                      B. 4                      C. 6                      D. 8
6. 存在函数  $f(x)$  满足: 对任意  $x \in \mathbf{R}$  都有
- A.  $f(x^2) = x$                       B.  $f(\sin x) = x$
- C.  $f(e^x + e^{-x}) = x$                       D.  $f(e^x - e^{-x}) = x$
7. 已知  $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ , 若  $\tan(\frac{\pi}{3} - \alpha) \cos 2\alpha + 1 = \sin 2\alpha$ , 则  $\tan 2\alpha =$
- A.  $-2 - \sqrt{3}$                       B.  $\sqrt{3} - 2$                       C.  $-2\sqrt{3}$                       D.  $-\sqrt{3}$
8. 若斜率为  $-1$  的直线  $l$  交曲线  $y = \ln x$  于点  $A$ , 交曲线  $y = \ln(ex + e)$  于点  $B$ , 则  $|AB| =$
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\sqrt{2}$                       C. 1                      D. 2

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知  $x = \frac{\pi}{3}$  为函数  $f(x) = \cos(2x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) 图象的一条对称轴, 则
- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$                       B.  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{6}, 0)$  对称
- C.  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{\pi}{3})$  上单调递减                      D. 函数  $y = f(x - \frac{\pi}{3})$  为偶函数
10. 已知某工人需至少使用甲、乙两种仪器中的一种对某产品进行质量检测, 记事件  $A =$  “该工人在检测过程中使用过甲仪器”, 事件  $B =$  “该工人在检测过程中使用过乙仪器”, 事件  $C =$  “该工人在检测过程中使用过甲、乙两种仪器”, 事件  $D =$  “该工人在检测过程中仅使用过甲、乙两种仪器中的一种”, 已知  $P(A) = 0.6$ ,  $P(B) = 0.5$ , 则
- A.  $A$  与  $B$  相互独立                      B.  $C$  与  $D$  互为对立
- C.  $P(\bar{B}|A) = \frac{5}{6}$                       D.  $P(A|D) + P(B|D) = 1$
11. 已知函数  $f(x) = (x - a)(x^2 - b)$ , 其中  $a > 0$ , 且当  $x > 0$  时,  $f(x) \geq 0$ , 则
- A.  $b = a^2$
- B.  $x = a$  为  $f(x)$  的极大值点
- C. 若关于  $x$  的方程  $f(x) = a$  有 3 个不同的实数根, 则  $a > \frac{3\sqrt{6}}{8}$
- D. 若对任意  $x$  都有  $f(x) \leq f(x + m)$ , 则  $m \geq \frac{4\sqrt{3}a}{3}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知  $\overrightarrow{OA} = (1, 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (4, -2)$ , 则  $\triangle OAB$  的面积为\_\_\_\_\_.

13. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  的直线与  $C$  的左、右两支分别交于  $A, B$  两点, 若  $|AF_1| = |BF_1|$ ,  $|AB| = 8$ , 则  $|F_1F_2| =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知某圆锥侧面展开后的扇形面积为定值, 设扇形的圆心角为  $\alpha$ , 则当圆锥的内切球体积最大时,  $\alpha =$ \_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. (13分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $c(1 - 2\cos B) = b(2\cos C - 1)$ .

(1) 证明:  $b, a, c$  成等差数列;

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ , 求  $A$ .

16. (15分)

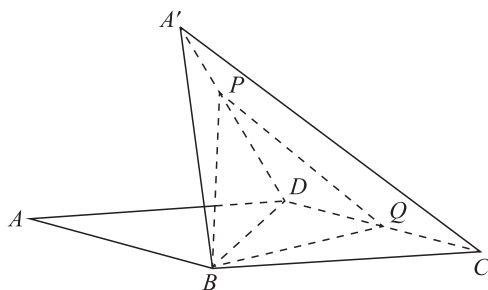
设函数  $f(x) = (e^x + a)(x - 2a)$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(2) 已知  $a \in \mathbb{Z}$ , 若  $f(x)$  为增函数, 求  $a$ .

17. (15分)

如图, 在菱形  $ABCD$  中,  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $A = 60^\circ$ , 将  $\triangle ABD$  沿  $BD$  翻折至  $\triangle A'BD$ , 使得三棱锥  $A' - BCD$  的表面积最大.



(1) 求三棱锥  $A' - BCD$  的体积;

(2) 设  $Q$  为棱  $CD$  的中点,  $P$  在棱  $A'D$  上, 若二面角  $P - BQ - D$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ , 求  $\frac{DP}{DA'}$ .

18. (17分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左顶点为  $A$ , 过点  $(1,0)$  的直线  $l$  交  $C$  于  $P, Q$  两点, 记  $\triangle APQ$  的外接圆为圆  $N$ .

- (1) 当  $l$  与  $x$  轴垂直时, 求圆  $N$  的方程;
- (2) 求圆  $N$  面积的最大值.

19. (17分)

设正整数  $n \geq 3$ , 集合  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ , 已知有穷数列  $A_0: a_1, a_2, \dots, a_n$  经过一次  $M$  变换后得到数列  $A_1: \max\{a_1, a_2\}, \max\{a_2, a_3\}, \dots, \max\{a_{n-1}, a_n\}, \max\{a_n, a_1\}$ , 其中  $\max\{a, b\}$  表示  $a, b$  中的最大者. 记数列  $A$  的所有项之和为  $S(A)$ .

- (1) 若  $A_0: 1, 3, 2, 4$ , 求  $S(A_1)$ ;
- (2) 当  $n = 5$  时, 求  $S(A_1)$  的最大值;
- (3) 若  $A_1$  经过一次  $M$  变换后得到数列  $A_2$ , 求  $S(A_2)$  的最大值.