2023~2024 学年福建百校联考高三正月开学考•数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	B	C	C	A	D
题号	9	10	11	12				
答案	BC	BC	AC	ABD				

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．【答案】D

【解析】由 $A=\{x\in\mathbf{Z}|-3<x<5\}=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$，$B=\{x|x>1\}$，可得 $A\cap B=\{2,3,4\}$，故选 D．

2．【答案】A

【解析】由 $z=\dfrac{-1+3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}=-\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}=-\dfrac{(1-3\mathrm{i})^2}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}=-\dfrac{-8-6\mathrm{i}}{10}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$，可得复数 z 在复平面内所对应的点所在的象限为第一象限，故选 A．

3．【答案】B

【解析】由点 P 在圆 C 上，又由直线 PC 的斜率为 $\dfrac{0-(-1)}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$，可得直线 l 的斜率为 2，则直线 l 的方程为 $y=2x-2$．故选 B．

4．【答案】B

【解析】由 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}$，有

$\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\dfrac{-\dfrac{4}{3}-3}{1+\left(-\dfrac{4}{3}\right)\times 3}=\dfrac{13}{9}$．故选 B．

5．【答案】C

【解析】高 $OP=x$，$OQ=y$，有 $AP=\sqrt{x^2+1}$，$AQ=\sqrt{y^2+1}$，由 $AP\perp AQ$，有 $AP^2+AQ^2=PQ^2$，可得 $x^2+1+y^2+1=(x+y)^2$，可得 $xy=1$，又由上下圆锥侧面积之比为 $2:1$，可得 $PA=2QA$，有 $\sqrt{x^2+1}=2\sqrt{y^2+1}$，有 $x^2=4y^2+3$，代入 $y=\dfrac{1}{x}$ 整理为 $x^4-3x^2-4=0$，解得 $x=2$，可得 $y=\dfrac{1}{2}$，

$OP=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$．故选 C.

6.【答案】C

【解析】设 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}\left(0<\lambda<1\right)$，可得 $\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DC}$，有 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}$，有

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\lambda\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left(\lambda^2+1\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\lambda\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=4\lambda+2\left(\lambda^2+1\right)+4\lambda=2\lambda^2+8\lambda+2$，又由 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\dfrac{13}{2}$，有

$2\lambda^2+8\lambda+2=\dfrac{13}{2}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\lambda=-\dfrac{9}{2}$（舍），可得 $EF=1$．故选 C.

7.【答案】A

【解析】由 $f'\left(x\right)=3x^2-6x=3x\left(x-2\right)$．可得函数的单调增区间为 $\left(-\infty,0\right)$，$\left(2,+\infty\right)$．减区间 $\left(0,2\right)$，

$f\left(2\right)=-1$，当 $x^3-3x^2+3=-1$ 时，$x^3+1+3\left(1-x^2\right)=\left(x+1\right)\left(x-2\right)^2=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=2$，∴有

$\begin{cases}a+6>2,\\-1\le a<2,\end{cases}$ 解得 $-1\le a<2$．故选 A.

8.【答案】D

【解析】由题意有 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$，设直线 $x=2$ 与 x 轴的交点为 Q，设 $\left|PQ\right|=t$，有 $\tan\angle PF_1Q=\dfrac{\left|PQ\right|}{\left|F_1Q\right|}=\dfrac{t}{3}$，

$\tan\angle PF_2Q=\dfrac{\left|PQ\right|}{\left|F_2Q\right|}=t$，可得 $\tan\angle F_1PF_2=\tan\left(\angle PF_2Q-\angle PF_1Q\right)=\dfrac{t-\dfrac{t}{3}}{1+\dfrac{t^2}{3}}=\dfrac{2t}{t^2+3}\le\dfrac{2t}{2\sqrt{3}t}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅

当 $t=\sqrt{3}$ 时取等号，可得 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$，故选 D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9.【答案】BC

【解析】对于 A 选项，由 2023 年 1~8 月份，社会消费品零售总额为 302281 亿元，可得社会消费品零售总额的月平均值约为 $\dfrac{302281}{8}\approx37785.1$ 亿元，故 A 选项错误；

对于 B 选项，由 2023 年 8 月份．社会消费品零售总额为 37933 亿元．同比增长 4.6%，可得 2022 年 8 月份，社会消费品零售总额约为 $\dfrac{37933}{1-4.6\%}\approx36264.8$ 亿元．故 B 选项正确；

对于 C 选项，由图表可知去掉 -5.9，18.4 数据更集中，标准差相对于原数据来说变小了，故 C 选项正确；对于 D 选项，极差为 $18.4\%-\left(-5.9\%\right)=24.3\%$，中位数为 $\dfrac{3.1\%+3.5\%}{2}=3.3\%$，可得 $3.3\%\times8=26.4\%$，

$24.3\% < 26.4\%$，故 D 选项错误．故选 BC．

10．【答案】BC

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由$a_1a_4=8$，有$a_2a_3=8$，联立方程$\begin{cases}a_2a_3=8,\\a_3=a_2+2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_2=2,\\a_3=4\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=-4,\\a_3=-2\end{cases}$（舍去），有$q=\dfrac{a_3}{a_2}=2$，可得$a_n=a_2q^{n-2}=2\times 2^{n-2}=2^{n-1}$．

对于 A 选项，由$a_5=2^5=32$，$a_5=2^4=16$，有$a_6-4a_5=32-64=-32$，故 A 选项错误；

对于 B 选项，$S_7=\dfrac{1-2^7}{1-2}=127$，故 B 选项正确；

对于 C 选项，由$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，有$S_n=2a_n-1$，故 C 选项正确；

对于 D 选项，由$\dfrac{\log_2 a_n}{S_n+1}=\dfrac{\log_2 2^{n-1}}{\left(2^n-1\right)+1}=\dfrac{n-1}{2^n}$，令$f\left(n\right)=\dfrac{n-1}{2^n}$，有$f\left(n+1\right)-f\left(n\right)=\dfrac{n}{2^{n+1}}-\dfrac{n-1}{2^n}=\dfrac{2-n}{2^{n+1}}$，可得$f\left(1\right)<f\left(2\right)=f\left(3\right)>f\left(4\right)>\cdots$有$f\left(n\right)_{\min}=f\left(2\right)=f\left(3\right)=\dfrac{1}{4}$，可得数列$\{b_n\}$中的最大项为$b_2$或$b_3$，故 D 选项错误，故选 BC．

11．【答案】AC

【解析】对于 A 选项，正方体外接球的半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，内切球的半径为$\dfrac{1}{2}$，可得正方体的外接球的表面积是正方体内切球的表面积的$\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=3$倍，故 A 选项正确；

对于 B 选项，由点A_1和点 B 到平面AEB_1的距离相等，若点A_1和点C到平面AEB_1的距离相等，必有$BC\,/\!/$平面AEB_1，又由$BC\,/\!/\,AD$．可得$AD\,/\!/$平面AEB_1，与$AD\cap$平面$AEB_1=A$矛盾，故 B 选项错误；

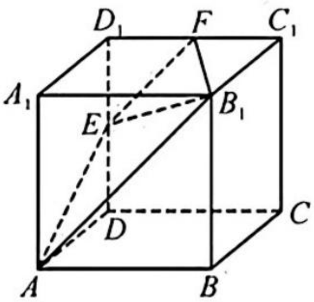
对于 C 选项，如图，在C_1D_1上取一点 F，使得$EF\,/\!/\,C_1D$，连接B_1F，设$D_1E=a\left(0<a<1\right)$，由$EF\,/\!/\,C_1D\,/\!/\,AB_1$，可得平面$AB_1FE$为过 A，B_1，E 三点的截面，在梯形AB_1FE中，$AB_1=\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{2}a$，$AE=\sqrt{1^2+\left(1-a\right)^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$，$B_1F=\sqrt{1^2+\left(1-a\right)^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$，梯形$AB_1FE$的高为$\sqrt{a^2-2a+2-\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}a}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}a^2-a+\dfrac{3}{2}}$，梯形$AB_1FE$的面积为

$\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}a\right)\times\sqrt{\frac{1}{2}a^2-a+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(a+1)\sqrt{a^2-2a+3}=\frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2\left(a^2-2a+3\right)}$，令

$f(a)=(a+1)^2\left(a^2-2a+3\right)(0<a<1)$，有

$f'(a)=2(a+1)\left(a^2-2a+3\right)+(a+1)^2(2a-2)=4(a+1)\left(a^2-a+1\right)=4(a+1)\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$．可得函数 $f(a)$ 单调递增．可得正方体被平面 AEB_1 所截得的截面面积随着 D_1E 的增大而增大．故C选项正确；

对于D选项，$V_{E-AA_1B_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$，$V_{E-A_1B_1FD_1}=\frac{1}{3}\times a\times\left[1\times1-\frac{1}{2}\times1\times(1-a)\right]=\frac{1}{6}\left(a^2+a\right)$，被平面 AEB_1 所截得的上部分的几何体的体积为 $\frac{1}{6}\left(a^2+a\right)+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$，整理为 $a^2+a-1=0$，解得 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，故D选项错误．故选AC．



12.【答案】ABD

【解析】对于A选项．由 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$，可得双曲线 C 的离心率为 $e=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故A选项正确；

对于B选项，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$．由对称性，不妨设直线 l 与渐近线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 重合，点 P 位于第四象限，记直线 l 与 x 轴的交点为 T，由直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$，有 $\angle POT=\frac{\pi}{6}$，又由 $|OP|=\sqrt{3}$，可得 $|OT|=2$．又由 $|OF|=2$，故直线 l 过双曲线 C 的一个焦点，故B选项正确；

对于C选项，当直线 l 与双曲线 C 的一条渐近线平行时，由对称性，不妨设直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+m$（其中 $m<0$），有 $\frac{|m|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=\sqrt{3}$，可得 $m=-2$，直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$，联立方程 $\begin{cases}\frac{x}{3}-y^2=1,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2,\end{cases}$ 解方程

组可得点 Q 的坐标为 $\left(\frac{5\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4}\right)$．可得 $|OQ|=\sqrt{\frac{75}{16}+\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$，故 C 选项错误；

对于 D 选项，设点 P 的坐标为 (s,t)，可得直线 l 的方程为 $sx+ty=3$．其中 $s^2+t^2=3$．联立方程 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\\ sx+ty=3,\end{cases}$

解得 $x=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}s+t}$，联立方程 $\begin{cases}y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x,\\ sx+ty=3.\end{cases}$ 解得 $x=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}s-t}$，可得线段 DE 的中点的横坐标为

$\frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}s+t}+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}s-t}\right)=\frac{9s}{3s^2-t^2}$，联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-y^2=1,\\ sx+ty=3,\end{cases}$，消去 y 后整理为

$\left(3s^2-t^2\right)x^2-18sx+\left(3t^2+27\right)=0$，可得线段 MN 的中点的横坐标为 $\frac{1}{2}\times\frac{18s}{3s^2-t^2}=\frac{9s}{3s^2-t}$，可得线段 DE 和 MN 的中点相同，故有 $|DM|=|EN|$，故 D 选项正确．故选 ABD．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．【答案】$\frac{1}{6}$

【解析】由 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，有 $P(AB)=P(A|B)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，又由

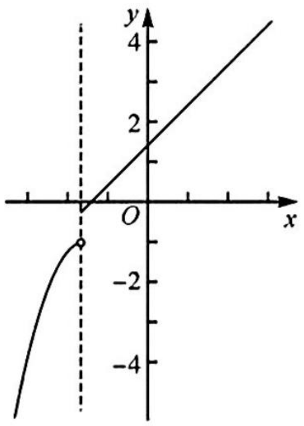
$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，有 $P(A)+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$，可得 $P(A)=\frac{1}{6}$．

14．【答案】±2

【解析】$\left(ax+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中无含 x^3 项，含 x^2 的项为 $\mathrm{C}_6^2(ax)^4\left(\frac{1}{x}\right)^2=15a^4x^2$，$\therefore(1+x)\left(ax+\frac{1}{x}\right)^6$ 中含 x^3 的项为 $15a^4x^3$，则 $15a^4=240$．解得 $a=\pm2$．

15．【答案】$[-1,0)$

【解析】①当 $a\geq0$ 时，若 $x<a$，可得 $f(x)\geq-1$，若 $x\geq a$，$f(x)\geq-2$，函数 $f(x)$ 的值域不可能为 $\mathbf{R}$；②当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$，$[a,+\infty)$ 上单调递增，若函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$．只需 $|a|-2\leq-1$，可得 $-1\leq a<0$．由上知，实数 a 的取值范围为 $[-1,0)$．



16.【答案】$\dfrac{811\pi}{3}$

【解析】方程 $\cos 2x=3\cos x-2$ 可化为 $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$，因式分解为 $(\cos x-1)\cdot\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)=0$，解得 $\cos x=1$ 或 $\cos x=\dfrac{1}{2}$，方程的最小的 29 个非负实数解中有 10 个是以 0 为首项，2π 为公差的等差数列．其和为 $10\times 0+\dfrac{10\times 9}{2}\times 2\pi=90\pi$；有 10 个是以 $\dfrac{\pi}{3}$ 为首项，2π 为公差的等差数列，其和为 $10\times\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{10\times 9}{2}\times 2\pi=\dfrac{280\pi}{3}$；有 9 个是以 $\dfrac{5\pi}{3}$ 为首项，2π 为公差的等差数列，其和为 $9\times\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{8\times 9}{2}\times 2\pi=87\pi$．可得方程的最小的 29 个非负实数解之和为 $90\pi+\dfrac{280\pi}{3}+87\pi=\dfrac{811\pi}{3}$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤．

17.【答案】(1) $a_n=n^2$　　(2) $\left\{n\in\mathbf{N}^*\middle|1\le n\le 8\right\}$

【解析】(1) 由 $a_{n+1}=a_n+2\sqrt{a_n}+1$，有 $a_{n+1}=\left(\sqrt{a_n}+1\right)$，

有 $\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_n}+1$，有 $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=1$，

可得数列 $\left\{\sqrt{a_n}\right\}$ 是公美为 1 的等差数列，

有 $\sqrt{a_n}=\sqrt{a_1}+n-1=n$，

可得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2$；

(2) 由 $b_n=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$．

有 $S_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$，

不等式$S_n<\frac{99}{100}$可化为$1-\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{99}{100}$，解得$0<n<9$，

可得满足$S_n<\frac{99}{100}$的正整数n的集合为$\left\{n\in\mathbf{N}^*\middle|1\le n\le 8\right\}$．

18.【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$　　(2) $3+3\sqrt{3}$

【解析】(1) 由正弦定理有$bc\left(5\cos A-\cos 2A\right)=3bc$．

两边除以bc，有$5\cos A-\cos 2A=3$，

由二倍角公式，有$5\cos A-\left(2\cos^2 A-1\right)=3$，

整理为$2\cos^2 A-5\cos A+2=0$，

上式因式分解为$\left(2\cos A-1\right)\left(\cos A-2\right)=0$，

解得$\cos A=\frac{1}{2}$或$\cos A=2$（舍去），

又由$0<A<\pi$，可得$A=\frac{\pi}{3}$；

(2) 由$AB\perp AD$．有$\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，

又由$BC=3CD$，可得$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ACD}$，有$\frac{1}{2}AB\times AC\sin\frac{\pi}{3}=3\times\frac{1}{2}AD\times AC\sin\frac{\pi}{6}$，可得$AB=\sqrt{3}AD$，又由$\triangle ABD$的面积为$2\sqrt{3}$及$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，有$\frac{1}{2}AB\times AD=2\sqrt{3}$，

代入$AB=\sqrt{3}AD$，可得$AD=2$，$AB=2\sqrt{3}$，

又由$S_{\triangle ABC}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABD}$，有$\frac{1}{2}AB\times AC\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\times 2\sqrt{3}$，代入$AB=2\sqrt{3}$，可得$AC=\sqrt{3}$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，有$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-AB\times AC}=\sqrt{12+3-2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=3$，

有$\triangle ABC$的周长为$2\sqrt{3}+\sqrt{3}+3=3+3\sqrt{3}$．

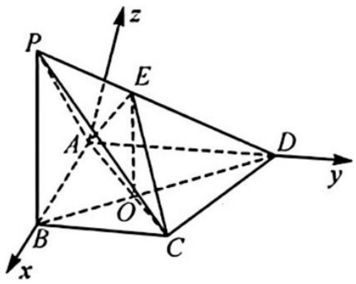
19.【答案】(1) 略　　(2) $AB=\sqrt{2}$

【解析】(1) 证明：如图，连接BD与AC相交于点O，连接OE．

$\because BC\,/\!/\,AD$，$AD=2BC$，$\therefore OD=2OB$，

$\because OD=2OB$，$DE=2PE$．$\therefore OE\,/\!/\,BP$，

$\because OE\,/\!/\,BP$，$OE\subset$平面ACE，$BP\not\subset$平面ACE．$\therefore BP\,/\!/$平面ACE



（2）在$\triangle PAD$中，$\cos\angle PAD=\dfrac{AP^2+AD^2-DP^2}{2AP\cdot AD}=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}{2\times2\times\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可得$\angle PAD=\dfrac{3\pi}{4}$，

由$AB\perp AD$，平面$PAD\perp$底面$ABCD$，过点A作底面$ABCD$的垂线l，垂线在平面PAD内，

以A为坐标原点，AB，AD，直线l分别为x，y，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，

有$A\left(0,0,0\right)$，$D\left(0,2,0\right)$.

又由$AP=\sqrt{2}$，$\angle PAD=\dfrac{3\pi}{4}$，可得点$P$的坐标为$\left(0,-1,1\right)$

又由$\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PD}=\dfrac{1}{3}\times\left(0,3,-1\right)=\left(0,1,-\dfrac{1}{3}\right)$，有$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=\left(0,-1,1\right)+\left(0,1,-\dfrac{1}{3}\right)=\left(0.0,\dfrac{2}{3}\right)$，

设$AB=a\left(a>0\right)$，可得点B的坐标为$\left(a,0,0\right)$，点C的坐标为$\left(a,1,0\right)$，

设平面PAC的法向量为$\vec{m}=\left(x,y,z\right)$．由$\overrightarrow{AC}=\left(a,1,0\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,-1,1\right)$，

有$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{m}=ax+y=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{m}=-y+z=0,\end{cases}$取$x=-1$，$y=a$，$z=a$，可得平面$PAC$的一个法向量为$\vec{m}=\left(-1,a,a\right)$，

设平面EAC的法向量为$\vec{n}=\left(p,q,r\right)$，由$\overrightarrow{AC}=\left(a,1,0\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0.0,\dfrac{2}{3}\right)$，

有$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=ap+q=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=\dfrac{2}{3}r=0,\end{cases}$取$p=1$，$q=-a$，$r=0$，可得平面$ACE$的一个法向量为$\vec{n}=\left(1,-a,0\right)$.

由$\vec{m}\cdot\vec{n}=-a^2-1$，$\left|\vec{m}\right|=\sqrt{2a^2+1}$，$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{a^2+1}$，有$\left|\cos\left\langle\vec{m}\cdot\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|a^2+1\right|}{\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(2a^2+1\right)}}$，

又由平面PAC与平面EAC的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．有$\dfrac{\left|a^2+1\right|}{\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(2a^2+1\right)}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

化简为$5a^2+5=6a^2+3$，解得$a=\sqrt{2}$或$a=-\sqrt{2}$（舍）.

由上知$AB=\sqrt{2}$.

20.【答案】（1）分布列见解析，$E\left(X\right)=\dfrac{12}{5}$，$D\left(X\right)=\dfrac{24}{25}$

（2）这 4 名学员至少要增加 6 天的学习，才能保证这 4 名学员都能通过考试并领取驾驶证

【解析】（1）1 名学员通过考试并领取驾驶证的概率为$\dfrac{15}{16}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{5}$，根据题意可知$X\sim B\left(4,\dfrac{3}{5}\right)$，

X的取值分别为 0，1，2，3，4，

$$P\left(X=0\right)=\mathrm{C}_4^0\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^4=\frac{16}{625},$$

$$P\left(X=1\right)=\mathrm{C}_4^1\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^3=\frac{96}{625},$$

$$P\left(X=2\right)=\mathrm{C}_4^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625},$$

$$P\left(X=3\right)=\mathrm{C}_4^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{216}{625},$$

$$P\left(X=4\right)=\mathrm{C}_4^4\times\left(\frac{3}{5}\right)^4\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^0=\frac{81}{625},$$

故X的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{16}{625}$	$\dfrac{96}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{81}{625}$

$$E\left(X\right)=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}，D\left(X\right)=4\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25};$$

（2）增加k（k为正整数）天学习后，每位学员通过考试拿到驾驶证的概率为$1-\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^k\times\dfrac{2}{5}=1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k+1}$，

若这 4 名学员都能通过考试并领取驾驶证，有$\left[1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k+1}\right]^4>0.99$，

有$1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k+1}>0.9975$，有$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k+1}<0.0025$，有$k>\log_{0.4}0.0025-1$，

又由$\log_{0.4}0.0025=\dfrac{\lg0.0025}{\lg0.4}=\dfrac{\lg25-4}{\lg4-1}=\dfrac{2-\lg4-4}{\lg4-1}=\dfrac{2+2\lg2}{1-2\lg2}\approx\dfrac{2+2\times0.3010}{1-2\times0.3010}\approx6.54$.

可得$k>5.54$，

故这 4 名学员至少要增加 6 天的学习，才能保证这 4 名学员都能通过考试并领取驾驶证.

21.【答案】(1) $y^2=4x$　　(2) 略

【解析】设 M，N 的坐标分别为 $\left(x_1,y_1\right)$，$\left(x_2,y_2\right)$，

(1) 由抛物线的定义有 $\left|MF\right|=x_1+\frac{p}{2}=2$，$\left|NF\right|=x_2+\frac{p}{2}=5$，可得 $x_1=2-\frac{p}{2}$，$x_2=5-\frac{p}{2}$，

联立方程 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=-2x+4,\end{cases}$ 消去 y 后整理为 $2x^2-\left(p+8\right)x+8=0$，有 $x_1x_2=4$，

有 $\left(2-\frac{p}{2}\right)\left(5-\frac{p}{2}\right)=4$，整理为 $p^2-14p+24=0$，解得 $p=2$ 或 $p=12$（舍去），

故抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$；

(2) 证明：直线 l 的斜率为 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=\frac{4}{y_2+y_1}$，

直线 l 的方程为 $y-y_1=\frac{4}{y_2+y_1}\left(x-x_1\right)$，代入 $x_1=\frac{y_1}{4}$ 后整理为 $4x-\left(y_1+y_2\right)y+y_1y_2=0$，

令 $x=-1$，得 $y=\frac{y_1y_2-4}{y_1-y_2}$. 可得点 P 的坐标为 $\left(-1,\frac{y_1y_2-4}{y_1+y_2}\right)$，

焦点 F 的坐标为 $\left(1,0\right)$，直线 MF 的方程为 $\left(x_1-1\right)y=y_1\left(x-1\right)$，整理为 $y_1x-\left(x_1-1\right)y-y_1=0$，

点 P 到直线 MF 的距离为 $d_1=\frac{\left|-y_1-\frac{\left(y_1y_2-4\right)\left(x_1-1\right)}{y_1+y_2}-y_1\right|}{\sqrt{\left(x_1-1\right)^2+y_1^2}}=\frac{\left|2y_1+\frac{\left(y_1y_2-4\right)\left(\frac{y_1^2}{4}-1\right)}{y_1+y_2}\right|}{\sqrt{\left(x_1-1\right)^2+4x_1}}$

$=\frac{\left|4y_1^2+4y_1y_2+y_1^3y_2+16\right|}{4\sqrt{\left(x_1+1\right)^2}\left|y_1+y_2\right|}=\frac{\left|4\left(y_1^2+4\right)+y_1y_2\left(y_1^2+4\right)\right|}{\left|\left(y_1+y_2\right)\left(4x_1+4\right)\right|}=\frac{\left|\left(y_1^2+4\right)\left(y_1y_2+4\right)\right|}{\left|\left(y_1+y_2\right)\left(y_1^2+4\right)\right|}=\frac{\left|y_1y_2+4\right|}{\left|y_1+y_2\right|}$，

同理点 P 到直线 NF 的距离为 $d_2=\frac{\left|y_1y_2+4\right|}{\left|y_1+y_2\right|}$，

由 $d_1=d_2$ 及直线 l 与抛物线 C 的位置关系，可得直线 PF 是 $\angle MFN$ 的外角平分线.

22.【答案】(1) 详解见解析　　(2) 略　　(3) $\left(-e^{\frac{3}{2}},-\frac{1}{4}\right)$

【解析】（1）函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[2x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+x\right]+a\left(\ln x-1+1\right)=x\ln x+a\ln x=\left(x+a\right)\ln x，$$

①当 $a>0$ 时，解不等式 $f'\left(x\right)>0$．有 $x>1$，函数 $f\left(x\right)$ 的减区间为 $\left(0,1\right)$，增区间为 $\left(1,+\infty\right)$；

②当 $a=-1$ 时．$f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\ln x$，若 $x>1$，$x-1>0$，$\ln x>0$，可得 $f'\left(x\right)>0$；若 $x<1$，$x-1<0$，$\ln x<0$，可得 $f'\left(x\right)>0$；若 $x=1$，可得 $f'\left(x\right)=0$．故有 $f'\left(x\right)\geq 0$，函数 $f\left(x\right)$ 单调递增，增区间为 $\left(0,+\infty\right)$，没有减区间；

③当 $-1<a<0$ 时，解不等式 $f'\left(x\right)>0$，有 $x>1$ 或 $0<x<-a$，故函数 $f\left(x\right)$ 的增区间为 $\left(0,-a\right)$，$\left(1,+\infty\right)$，减区间为 $\left(-a,1\right)$；

④当 $a<-1$ 时，解不等式 $f'\left(x\right)>0$．有 $x>-a$ 或 $0<x<1$，故函数 $f\left(x\right)$ 的增区间为 $\left(0,1\right)$，$\left(-a,+\infty\right)$，减区间为 $\left(1,-a\right)$；

（2）证明：若 $a>0$，函数 $f\left(x\right)$ 的减区间为 $\left(0,1\right)$，增区间为 $\left(1,+\infty\right)$，$f\left(1\right)=-\frac{1}{4}-a<0$．

当 $0<x<1$ 时，由 $\ln x<0$，有 $f\left(x\right)=x\left[\frac{1}{2}x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+a\left(\ln x-1\right)\right]<0$，$f\left(\mathrm{e}\right)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2>0$，

由上知，函数 $f\left(x\right)$ 有唯一的零点；

（3）由（2）知．若 $f\left(x\right)>0$，必有 $a<0$．又由 $f\left(1\right)=-a-\frac{1}{4}>0$，可得 $a<-\frac{1}{4}$．

又由 $x>0$，不等式 $f\left(x\right)>0$ 可化为 $\frac{1}{2}x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+a\left(\ln x-1\right)>0$，

设 $g\left(x\right)=\frac{1}{2}x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+a\left(\ln x-1\right)$，

有 $g'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)+\frac{a}{x}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{a}{x}+\frac{1}{4}=\frac{2x\ln x+x+4a}{4x}$，

当 $0<x<1$ 且 $0<x<-4a$ 时，$\ln x<0$，$x+4a<0$，可得 $g'\left(x\right)<0$，

当 $x>1$ 且 $x>-4a$ 时，$\ln x>0$，$x+4a>0$，可得 $g'\left(x\right)>0$，

当 $a<0$ 时，函数 $y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{a}{x}+\frac{1}{4}$ 单调递增，故存在正数 m 使得 $2m\ln m+m+4a=0$．

若 $0<m\leq 1$，有 $\ln m\leq 0$，$4a<-1$，有 $2m\ln m+m+4a<m-1<0$，与 $2m\ln m+m+4a=0$ 矛盾，可得 $m>1$，

当 $x>m$ 时，$g'(x)>0$；当 $x<m$ 时，$g'(x)<0$，可得函数 $g(x)$ 的减区间为 $(0,m)$，增区间为 $(m,+\infty)$，

若 $g(x)>0$，必有 $g(m)=\frac{1}{2}m\left(\ln m-\frac{1}{2}\right)+a(\ln m-1)>0$，有 $2m\ln m-m+4a\ln m-4a>0$，

又由 $2m\ln m+m+4a=0$，有 $2m\ln m-m+4a\ln m-4a+(2m\ln m+m+4a)>0$，

有 $m\ln m+a\ln m>0$，有 $(m+a)\ln m>0$．

又由 $m>1$，有 $m>-a$，可得 $a>-m$，

有 $2m\ln m+m+4a=0>2m\ln m+m-4m=2m\ln m-3m$，可得 $1<m<e^{\frac{3}{2}}$，

由 $a=-\frac{1}{4}(2m\ln m+m)$，及 $1<2m\ln m+m<4e^{\frac{2}{2}}$，可得 $-e^{\frac{3}{2}}<a<-\frac{1}{4}$，

若 $f(x)>0$．则实数 a 的取值范围为 $\left(-e^{\frac{3}{2}},-\frac{1}{4}\right)$．