2023 届高三毕业班第一次质量检测

数学试题参考答案及评分细则

2023.1

一、选择题：

1-8：**B　A　D　C　C　B　A　B**

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9-12: **AB　AC　AD　BCD**

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\sqrt{3}$　　14.100

15. $\frac{1}{2^{|x|}}$（答案不唯一）　16.348

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．解：

（1）依题意 $a_n>0$，

当 $n=1$ 时，$4a_1=4S_1=(a_1-1)(a_1+3)$，解得 $a_1=3$，…………………………1 分

由 $4S_n=(a_n-1)(a_n+3)(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n\geq 2$ 时，有 $4S_{n-1}=(a_{n-1}-1)(a_{n-1}+3)$，

作差得：$4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，…………………………2 分

所以 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，…………………………3 分

因为 $a_n+a_{n-1}>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2(n\geq 2)$，…………………………4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，所以 $a_n=2n+1$．…………………………5 分

（2）$a_{50}=101$，又 $2^6<101<2^7$，同时 $a_{44}=89>2^6$，故 $b_{50}=a_{44}$ …………………………7 分

所以 $b_1+b_2+...+b_{50}=(a_1+a_2+...+a_{44})+(2^1+2^2+...+2^6)$ …………………………8 分

$=\dfrac{44}{2}(a_1+a_{44})+\dfrac{2(2^6-1)}{2-1}=2150.$ ………………………………………………………………10 分

18．解：

（1）已知 $3bc\cos A+4ac\cos B=ab\cos C$， ……………………………………………………2 分

代入余弦定理，$3(b^2+c^2-a^2)+4(a^2+c^2-b^2)=a^2+b^2-c^2$，……………………………………4 分

化简得：$4c^2=b^2$，所以 $\dfrac{b}{c}=2$. ………………………………………………………………5 分

（2）由正弦定理知 $\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$ 即 $\sin B=2\sin C$，………………………………………………6 分

又 $B=3C$，故 $\sin B=\sin 3C=\sin(2C+C)=\sin 2C\cdot\cos C+\cos 2C\cdot\sin C$ ………………………7 分

$=2\sin C\cdot(1-\sin^2 C)+(1-2\sin^2 C)\sin C=3\sin C-4\sin^3 C=2\sin C$，…………………………8 分

即 $3-4\sin^2 C=2$，得 $\sin C=\dfrac{1}{2}$，……………………………………………………………9 分

故 $C=\dfrac{\pi}{6}(C=\dfrac{5}{6}\pi$ 舍去)，

此时，$B=3C=\dfrac{\pi}{2}$，…………………………………………………………………………10 分

$b=2c=2AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，则 ΔABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………12 分

19．解：

（1）$\because EF\perp$ 面 AA_1CC_1，又 $A_1C\subset$ 面 AA_1CC_1，$\therefore EF\perp A_1C$， …………………………………1 分

又 $\because F$ 为 A_1C 的中点，$\therefore EA_1=EC$，…………………………………………………………2 分

又在 $\mathrm{Rt}\Delta A_1B_1E$、$\mathrm{Rt}\Delta BEC$ 中，$BE=EB_1$，

易证得 $\Delta A_1B_1E\cong\Delta CBE$，…………………………………………………………………3 分

故 $A_1B_1=BC$.

又 $AB=A_1B_1$，所以 $AB\perp BC$，……………………………………………………………4 分

$AC=\sqrt{2}$，故 $AB=1$. ………………………………………………………………………5 分

（2）以点 B_1 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 B_1-xyz，…………………………………6 分

其中 $A_1(1,0,0)$，$E(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$C(0,1,\sqrt{2})$，………………………………………………7 分

则 $\overrightarrow{A_1E}=(-1,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$， $\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,\sqrt{2})$，

不妨设 $\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 CA_1E 的一个法向量，

那么 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_0+\frac{\sqrt{2}}{2}z_0=0\\ -x_0+y_0+\sqrt{2}z_0=0\end{cases}$，令 $z_0=2$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},2)$. .... 9 分

又 $B_1C_1\perp$ 面A_1B_1BA，

故 $\overrightarrow{B_1C_1}=(0,1,0)$ 是平面 A_1B_1BA 的一个法向量. .... 10 分

设 α 为二面角 $C-A_1E-A$ 所成平面角，

则 $\cos\alpha=\frac{\left|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}\right|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{B_1C_1}|}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

即二面角 $C-A_1E-A$ 的余弦值为 $\frac{1}{2}$. .... 12 分

20.解：

（1）设“操作成功”为事件 S，“选择设备 M ”为事件 A，“选择设备 N ”为事件 B ....1 分

由题意， $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$， $P(S|A)=\frac{2}{3}$， $P(S|B)=\frac{1}{2}$ .... 2 分

恰在第二次操作才成功的概率 $P=P(\overline{S})P(S)$，

$P(S)=P(A)P(S|A)+P(B)P(S|B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$，.. 3 分

$P(\overline{S})=1-P(S)=\frac{5}{12}$ .... 4 分

所以恰在第二次操作才成功的概率为 $\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{144}$. .... 5 分

（2）设方案甲和方案乙成功操作累计次数分别为 X,Y，则 X,Y 可能取值均为 0，1，2，

$P(X=0)=P(A)P(\overline{S}|A)P(\overline{S}|B)+P(B)P(\overline{S}|B)P(\overline{S}|A)$

$=\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{6}$；.. 7 分

$P(X=1)=P(A)P(\overline{S}|A)P(S|B)+P(A)P(S|A)P(\overline{S}|A)$
$\quad+P(B)P(\overline{S}|B)P(S|A)+P(B)P(S|B)P(\overline{S}|A)$

$=\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})=\frac{35}{72}$；...................... 8 分

$P(X=2)=P(A)P(S|A)P(S|A)+P(B)P(S|B)P(S|B)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{25}{72}$；……………………………………………………………………9 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{35}{72}+2\times\frac{25}{72}=\frac{85}{72}$ ……………………………………………………10 分

方法一：$P(Y=0)=P(A)P(\overline{S}\mid A)P(\overline{S}\mid A)+P(B)P(\overline{S}\mid B)P(\overline{S}\mid B)$

$=\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{2})=\frac{13}{72}$；

$P(Y=1)=P(A)P(\overline{S}\mid A)P(S\mid A)+P(A)P(S\mid A)P(\overline{S}\mid A)$

$+P(B)P(\overline{S}\mid B)P(S\mid B)+P(B)P(S\mid B)P(\overline{S}\mid B)$

$=\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})=\frac{17}{36}$

$P(Y=2)=P(A)P(S\mid A)P(S\mid A)+P(B)P(S\mid B)P(S\mid B)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{25}{72}$；

所以 $E(Y)=0\times\frac{13}{72}+1\times\frac{17}{36}+2\times\frac{25}{72}=\frac{84}{72}$ ……………………………………………………11 分

方法二：方案乙选择其中一种操作设备后，进行 2 次独立重复试验，

所以 $E(Y)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$，……………………………………………………11 分

决策一：因为 $E(X)>E(Y)$，故方案甲更好. ……………………………………………………12 分

决策二：因为 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 差距非常小，所以两种方案均可 ……………………………………12 分

21.解：

（1）由题意设焦距为 $2c$, 则 $c=2$， ……………………………………………………1 分

由离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=2\sqrt{2}$，……………………………………………………2 分

则 $b^2=a^2-c^2=4$，……………………………………………………3 分

Γ 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………4 分

（2）不存在，……………………………………………………5 分

证明如下：假设存在圆 F_1 满足题意，当圆 F_1 过原点 O 时，直线 PN 与 y 轴重合，

直线 PM 的斜率为 0，不合题意 ……………………………………………………6 分

依题意不妨设为 $PM: y=k_1x+2\ (k_1\neq0)$,

$PN: y=k_2x+2\ (k_2\neq0)$,， $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，圆 F_1 的半径为 r，

则圆心到直线PN的距离为$\dfrac{|-2k_1+2|}{\sqrt{1+k_1^2}}=r$，

即k_1,k_2是关于k的方程$(r^2-4)k^2+8k+r^2-4=0$的两异根，

此时$k_1k_2=1$，……………………………………………………………………………………8 分

再联立直线PM与椭圆方程$\begin{cases} y=k_1x+2 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得$(1+2k_1^2)x^2+8k_1x=0$，

得$M\left(\dfrac{-8k_1}{1+2k_1^2},\dfrac{2-4k_1^2}{1+2k_1^2}\right)$，令$k_1=\dfrac{1}{k_2}$，得$N\left(\dfrac{-8k_1}{2+k_1^2},\dfrac{2k_1^2-4}{2+k_1^2}\right)$，……………………………………10 分

由题意，$PM\perp MN$，即$k_{MN}=-\dfrac{1}{k_1}$，此时

$$k_{MN}=\frac{\dfrac{2-4k_1^2}{1+2k_1^2}-\dfrac{2k_1^2-4}{2+k_1^2}}{\dfrac{-8k_1}{1+2k_1^2}-\dfrac{-8k_1}{2+k_1^2}}=\frac{(-2k_1^2+1)(k_1^2+2)-(k_1^2-2)(2k_1^2+1)}{4k_1(2k_1^2+1)-4k_1(k_1^2+2)}=\frac{-4k_1^4+4}{4k_1(k_1^2-1)}=\frac{-(k_1^2+1)}{k_1}，$$ …… 11 分

所以$\dfrac{-(k_1^2+1)}{k_1}=-\dfrac{1}{k_1}$，因为$k_1\neq 0$，所以方程无解，命题得证. ……………………………………………12 分

22．解：

（1）已知$f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{ax^2}{2}$，$a>0$，则$f'(x)=\mathrm{e}^x-ax$，……………………………………………………1 分

令$g(x)=\mathrm{e}^x-ax$，则$g'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

当$x=\ln a$时，$g'(x)=0$，那么$g(x)$在$(-\infty,\ln a]$上单调增减，在$[\ln a,+\infty)$上单调递增，……………………2 分

则$g(x)\geq g(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$，

①当$0<a\leq \mathrm{e}$时，$g(x)\geq 0$恒成立，故$f(x)$在R上无极值点；……………………………………………3 分

②当$a>\mathrm{e}$时，$g(\ln a)<0$，显然$\dfrac{1}{a}<1<\ln a$，$g(\dfrac{1}{a})=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1>0$，

则$f(x)$在$(\dfrac{1}{a},\ln a)$上有一个极值点，…………………………………………………………………4 分

又$g(2\ln a)=a^2-2a\ln a=a(a-2\ln a)$，

令$h(x)=x-2\ln x\,(x>\mathrm{e})$，$h'(x)=1-\dfrac{2}{x}>1-\dfrac{2}{\mathrm{e}}>0$，

故$h(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增，则$g(2\ln a)>0$，则$f(x)$在$(\ln a,2\ln a)$上有一个极值点. ....5 分

综上，当$a\le \mathrm{e}$时，函数$f(x)$没有极值点；当$a>\mathrm{e}$时，函数$f(x)$有两个极值点.

（2）由（1）中知$f'(x)=\mathrm{e}^x-ax$，则x_1,x_2是方程$\mathrm{e}^x-ax=0$的两根，

不妨令$h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，$h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$，知$h(x)$在$(0,1)$上单减，在$(1,+\infty)$上单增，

观察图象知，当$a\in(\mathrm{e},\dfrac{\mathrm{e}^2}{2})$时，$0<x_1<1$，$1<x_2<2$，..6 分

下先证$x_1+x_2>2$（*）

由$\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1}=ax_1\\ \mathrm{e}^{x_2}=ax_2\end{cases}$，两边取对数得$\begin{cases}x_1=\ln a+\ln x_1\\ x_2=\ln a+\ln x_2\end{cases}$，作差，得$x_1-x_2=\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，

（*）等价于证明$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=1>\dfrac{2}{x_1+x_2}\Leftrightarrow \ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\dfrac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$，................................7 分

令$\dfrac{x_1}{x_2}=t(t\in(0,1))$，$\varphi(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1},t\in(0,1)$，

$\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t+1)^2-4t}{t(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\ge 0$，

故$\varphi(t)$在$(0,1)$上单增，从而$\varphi(t)<\varphi(1)=0$，即证得$x_1+x_2>2$，..8 分

那么$f(x_1)+2f(x_2)=\mathrm{e}^{x_1}-\dfrac{ax_1^2}{2}+2\mathrm{e}^{x_2}-ax_2^2=\mathrm{e}^{x_1}-\dfrac{x_1\mathrm{e}^{x_1}}{2}+2\mathrm{e}^{x_2}-x_2\mathrm{e}^{x_2}$

$=(1-\dfrac{x_1}{2})\mathrm{e}^{x_1}+(2-x_2)\mathrm{e}^{x_2}$， ....9 分

再证明$(2-x_2)\mathrm{e}^{x_2}<x_1\mathrm{e}^{2-x_1}$，

令$S(x)=(2-x)\mathrm{e}^x,x\in(1,2)$，$S'(x)=(1-x)\mathrm{e}^x<0$，故$S(x)$在$(1,2)$上单减，

则$S(x_2)<S(2-x_1)$，那么$f(x_1)+2f(x_2)<(1-\dfrac{x_1}{2})\mathrm{e}^{x_1}+x_1\mathrm{e}^{2-x_1}$，..10 分

再令$M(x)=(1-\dfrac{x}{2})\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{2-x},x\in(0,1)$，$M'(x)=\dfrac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^x+(1-x)\mathrm{e}^{2-x}=(1-x)(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x})>0$，

则$M(x)$在$(0,1)$上单增，故$M(x_0)<M(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}+\mathrm{e}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$，...11 分

即证得$f(x_1)+2f(x_2)<\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$. ....12 分