高三半期考数学试卷参考答案

1. C　因为 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$.

2. D　函数 $y=\tan\left(\frac{4}{\pi}x-\frac{1}{3}\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{4}{\pi}}=\frac{\pi^2}{4}$.

3. B　若甲的生肖不是马，则甲的生肖未必不属于六畜；若甲的生肖不属于六畜，则甲的生肖一定不是马. 故“甲的生肖不是马”是“甲的生肖不属于六畜”的必要不充分条件.

4. A　因为 $z=(-2+\sqrt{3}\mathrm{i})^3=(1-4\sqrt{3}\mathrm{i})(-2+\sqrt{3}\mathrm{i})=10+9\sqrt{3}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}$ 的虚部为 $-9\sqrt{3}$.

5. A　因为 $\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AD}$，所以 $AD/\!/BC$，且 $\frac{DE}{BE}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{5}$，所以 $\overrightarrow{ED}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.

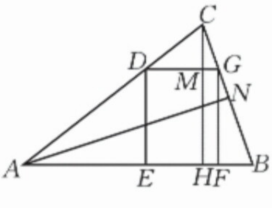
6. A　依题意可得 $f(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$. 因为 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{7\pi}{3},0\right)$ 对称，所以 $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{7\pi}{3}\right)+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\frac{5\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $|\varphi|$ 的最小值为 $\left|\frac{5\pi}{3}-2\pi\right|=\frac{\pi}{3}$.

7. D　因为 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$，所以 $16x^2+9y^2=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(16x^2+9y^2)=25+\frac{9y^2}{x^2}+\frac{16x^2}{y^2}\geqslant 25+2\sqrt{\frac{9y^2}{x^2}\cdot\frac{16x^2}{y^2}}=49$，当且仅当 $\frac{9y^2}{x^2}=\frac{16x^2}{y^2}$，即 $x^2=\frac{7}{4}$，$y^2=\frac{7}{3}$ 时，等号成立. 故 $1-16x^2-9y^2$ 的最大值为 $1-49=-48$.

8. B　因为 $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$，$\frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha}=\tan 6\alpha$，且 $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha}$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}=6\alpha+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\alpha=-\frac{\pi}{20}-\frac{k\pi}{5}(k\in\mathbf{Z})$，所以 α 的值可以为 $-\frac{\pi}{20}$.

9. AC　因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数、奇函数，所以 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$，所以 $h(-x)=f(-x)g(-x)=-h(x)$，则 $h(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，故选 AC.

10. ACD　取 BC 的中点 N，连接 AN，则 $AN\perp BC$，且 $AN=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，A 正确. 过 C 作 $CH\perp AB$，垂足为 H，设 CH 与 DG 交于点 M，由等面积法可得 $\frac{1}{2}AB\cdot CH=2\sqrt{2}$，则 $CH=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 由 $\frac{CM}{CH}=\frac{DG}{AB}$，得 $CM=\frac{CH\cdot DG}{AB}=\frac{4\sqrt{2}x}{9}$，则 $MH=CH-CM=\frac{4\sqrt{2}}{3}$



$-\frac{4\sqrt{2}x}{9}$，所以 $S(x)=DG\cdot DE=DG\cdot MH=\frac{4\sqrt{2}}{9}(3x-x^2)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\sqrt{2}(0<x<3)$，则 $S(1)=\frac{8\sqrt{2}}{9}$，则 $S(x)$ 在 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left[\frac{3}{2},3\right)$ 上单调递减，所以 $S(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，B 错误，C，D 均正确.

11. BC　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6^2+1^2-12\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{31}$，A 错误. 建立平面直角坐标系 xOy，不妨假设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(6,0)$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=(x,y)$，则 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(x-6,y)$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，代入 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=3$，整理得 $\left(x-\frac{13}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{43}{4}$，所以点 C 在以 $M\left(\frac{13}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 为圆心，$\frac{\sqrt{43}}{2}$ 为半径的圆上. 因为该圆经过坐标原点，所以 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 $\sqrt{43}$，B 正确. 因为 $\left(6-\frac{13}{4}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{31}{4}<\frac{43}{4}$，所以点 A 在圆 M 内，因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{AC}|$，$|AM|=\frac{\sqrt{31}}{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{43}-\sqrt{31}}{2}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{43}+\sqrt{31}}{2}$，C 正确，D 错误.

12. $\frac{15}{2}$　$\log_2\sqrt{8^5}=\frac{1}{2}\log_2 8^5=\frac{5}{2}\log_2 8=\frac{15}{2}$.

13. $\frac{3}{4}$　因为 $x\in[0,\omega\pi]$，所以 $x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\omega\pi-\frac{\pi}{4}\right]$，又 $\omega>\frac{1}{4}$，所以 $\omega\pi-\frac{\pi}{4}>0$，所以 $\omega\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega\leqslant\frac{3}{4}$，则 ω 的最大值为 $\frac{3}{4}$

14. $\left(0,\frac{2}{e^2}\right)\cup\left(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}\right)$　令 $f(x)=0$，得 $\frac{x}{e^x}=m$，令 $g(x)=0$，得 $\frac{x}{e^2}=m$.

设 $h(x)=\frac{x}{e^x}$，$h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=\frac{1}{e}$. 当 $x>0$ 时，$h(x)>0$，所以结合 $h(x)$，$k(x)=\frac{x}{e^2}$ 的图象（图略）及 $h(2)=k(2)=\frac{2}{e^2}<\frac{1}{e}$，得 m 的取值范围是 $\left(0,\frac{2}{e^2}\right)\cup\left(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}\right)$.

15. 解：(1) 因为 $c\sin A\cos B=a\sin B\sin C$，

所以 $\sin C\sin A\cos B=\sin A\sin B\sin C$， …………………………………………………… 2 分

因为 $\sin A>0,\sin C>0$,所以 $\cos B=\sin B$， ………………………………………………… 4 分

所以 $\tan B=1$. ………………………………………………………………………………………… 6 分

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{4}$ ……………………………………………………………………… 7 分

(2)因为 $\frac{1}{2}\times 3c\sin\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}$,所以 $c=3\sqrt{2}$， ……………………………………………………… 9 分

所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+18-2\times 9\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=9$， ………………………………… 12 分

解得 $b=3$. ……………………………………………………………………………………………… 13 分

16. 解:(1) $f'(x)=3x^2-1-\frac{2}{\sqrt{x}}$， ……………………………………………………………… 2 分

所以 $f'(4)=48-1-1=46$. ………………………………………………………………………… 3 分

因为 $f(4)=64-4-8=52$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(4,f(4))$ 处的切线方程为 $y-52=46(x-4)$,即 $y=46x-132$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2) $f'(x)=3x^2-1-\frac{2}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………… 8 分

因为 $f'(1)=0$， ………………………………………………………………………………………… 9 分

所以当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增， ……………………………………………… 11 分

所以 $\ln m<f(x)_{\min}=f(1)=-4$， …………………………………………………………………… 13 分

解得 $0<m<\frac{1}{e^4}$,故 m 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{e^4}\right)$. ……………………………………………… 15 分

17. 解:(1) $f(x)=1-\left(4\times\frac{1}{2}\sin x-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\sin x=1-2\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x$ … 1 分

$=1-2\times\frac{1-\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. ………………… 4 分

(2)由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$. ………………………………………………… 5 分

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 时,$f(x)$ 取得最小值,最小值为 $2\sin\frac{\pi}{6}=1$； ……………………………… 6 分

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)$ 取得最大值,最大值为 $2\sin\frac{\pi}{2}=2$. ……………………………… 7 分

故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[1,2]$. ……………………………………………………………… 8 分

(3)由题意可得 $h(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$， …

…… 11 分

则不等式 $h(x)\geqslant 0$ 即为 $2\cos 2x\geqslant 0$，得 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，………… 13 分

解得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即不等式 $h(x)\geqslant 0$ 的解集为 $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. ………………………………………………………………………………… 15 分

18.(1)解：因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $f'(x)=2e^x+e^{-x}+a\geqslant 0$ 恒成立，………… 2 分

因为 $f'(x)\geqslant 2\sqrt{2e^x\cdot e^{-x}}+a=2\sqrt{2}+a$，…………………………………………… 3 分

当且仅当 $2e^x=e^{-x}$，即 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$ 时，等号成立，………………………………… 4 分

所以 $2\sqrt{2}+a\geqslant 0$，即 $a\geqslant -2\sqrt{2}$，a 的取值范围为 $[-2\sqrt{2},+\infty)$. ……………………… 5 分

(2)证明：因为 $f(x)=2e^x-e^{-x}+ax$，$f(x)+g(x)=(2e^2-1)e^{-x}+\left(2-\frac{1}{e^2}\right)e^x+2a$，

所以 $g(x)=2e^{2-x}-e^{x-2}+2a-ax$，…………………………………………………… 7 分

所以 $g(x)=2e^{2-x}-e^{-(2-x)}+a(2-x)=f(2-x)$，……………………………………… 9 分

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. ………………………………………… 10 分

(3)解：因为 $f(x)+f(e^x-m)=2g(2-x)$，所以由(2)知 $f(x)+f(e^x-m)=2f(x)$，

即 $f(e^x-m)=f(x)$. ……………………………………………………………………… 12 分

由(1)知，当 $a\geqslant -2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $e^x-m=x$，

即 $m=e^x-x$. ……………………………………………………………………………… 13 分

设 $h(x)=e^x-x(-1\leqslant x\leqslant 1)$，则 $h'(x)=e^x-1(-1\leqslant x\leqslant 1)$，

当 $-1\leqslant x<0$ 时，$h'(x)<0$，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$h'(x)>0$，………………………………… 14 分

所以 $h(x)_{\min}=h(0)=1$，又 $h(-1)=1+\frac{1}{e}$，$h(1)=-1+e>h(-1)$，

所以 $h(x)_{\max}=h(1)=e-1$. …………………………………………………………… 16 分

故 m 的取值范围是 $[1,e-1]$. ……………………………………………………… 17 分

19.证明：(1)由 $h(-x)=h(x)$，得 $-x+(-x)^5=x+x^5$，

则 $2(x+x^5)=2x(1+x^4)=0$，……………………………………………………………… 1 分

解得 $x=0$，所以 $h(x)$ 只有 1 个偶点，且偶点为 0，

所以 $h(x)=x+x^5$ 为"缺陷偶函数"，且偶点唯一. ……………………………………… 3 分

(2)由题意得 $f(x)+g(x)-x^2=-f(y)+2g(y)+y$ 对 $x,y\in\mathbf{R}$ 恒成立，………… 4 分

所以存在常数 a，使得 $f(x)+g(x)-x^2=-f(y)+2g(y)+y=a$. ……………………… 5 分

令 $y=x$，得 $\begin{cases}f(x)+g(x)-x^2=a,\\-f(x)+2g(x)+x=a,\end{cases}$ 解得 $g(x)=\frac{x^2-x+2a}{3}$. ………………… 6 分

①$y=\frac{g(x)}{x}=\frac{x}{3}+\frac{2a}{3x}-\frac{1}{3}$，由 $\frac{g(-x)}{-x}=\frac{g(x)}{x}$，得 $\frac{x}{3}+\frac{2a}{3x}=0$，

即 $x^2=-2a(x\neq 0)$，则 $-2a>0$，即 $a<0$. ……………………………………………… 7 分

$F(x)=xg(x)=\dfrac{x^3-x^2+2ax}{3}$，$F'(x)=\dfrac{3x^2-2x+2a}{3}$，

因为 $\Delta=4-24a>0$，所以 $F'(x)=0$ 必有两根 x_1,x_2(设 $x_1<x_2$)，…………………… 8分

当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，$F'(x)>0$，当 $x_1<x<x_2$ 时，$F'(x)<0$，

所以函数 $F(x)=xg(x)$ 有2个极值点 x_1,x_2. ………………………………………………… 9分

②若 $g(3)=\dfrac{6+2a}{3}=2$，则 $a=0$，$g(x)=\dfrac{x^2-x}{3}$， ………………………………… 10分

当 $x>1$ 时，要证 $g(x)>\dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)$，只需证 $x^2-x>\dfrac{3}{2}\ln(x^2-1)$，

因为 $x^2-x-(3x-4)=(x-2)^2\geqslant 0$，所以 $x^2-x\geqslant 3x-4$，

所以只需证 $3x-4>\dfrac{3}{2}\ln(x^2-1)$. ……………………………………………………… 12分

设函数 $p(x)=3x-4-\dfrac{3}{2}\ln(x^2-1)(x>1)$，

则 $p'(x)=3-\dfrac{6x}{2(x^2-1)}=\dfrac{3(x^2-x-1)}{x^2-1}(x>1)$，

当 $1<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$p'(x)<0$，当 $x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$p'(x)>0$，…………………… 14分

所以 $p(x)_{\min}=p\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，

所以 $p(x)_{\min}=\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}-4-\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx\dfrac{3\times 2.236-5}{2}-\dfrac{3}{2}\times 0.481=0.1325$，…… 16分

所以 $p(x)_{\min}>0$，从而 $p(x)=3x-4-\dfrac{3}{2}\ln(x^2-1)>0$，

故当 $x>1$ 时，$g(x)>\dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)$. ………………………………………………… 17分