

# 宁德市 2023-2024 学年度第一学期期末高一质量检测

## 数学试题

本试卷共 22 题. 考试时间 120 分钟, 满分 150 分.

注意事项:

1. 答题前考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名, 考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号, 姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致.

2. 选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应的题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号; 填空题和解答题用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答, 在试题卷上作答, 答案无效.

3. 考试结束, 考生必须将试题卷和答题卡一并交回.

**一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 有且只有一个是符合题目要求的.**

1.  $\sin 83^\circ \cos 53^\circ - \cos 83^\circ \sin 53^\circ = ( )$

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{2}$

2. 已知命题  $p: \forall x \in (0, +\infty), x > \sqrt{x}$ , 则命题  $p$  的否定是 ( )

- A.  $\forall x \in (0, +\infty), x \leq \sqrt{x}$       B.  $\exists x \in (0, +\infty), x > \sqrt{x}$   
C.  $\exists x \in (0, +\infty), x \leq \sqrt{x}$       D.  $\forall x \notin (0, +\infty), x > \sqrt{x}$

3. 已知扇形的面积为  $6\text{cm}^2$ , 圆心角为  $3\text{rad}$ , 则此扇形的周长为 ( )

- A. 2cm      B. 6cm      C. 10cm      D. 12cm

4. 设  $a=5^{0.2}$ ,  $b=\sin 2$ ,  $c=\log_5 0.2$ , 则  $a, b, c$  的大小关系正确的是 ( )

- A.  $a > b > c$       B.  $b > a > c$       C.  $b > c > a$       D.  $c > a > b$

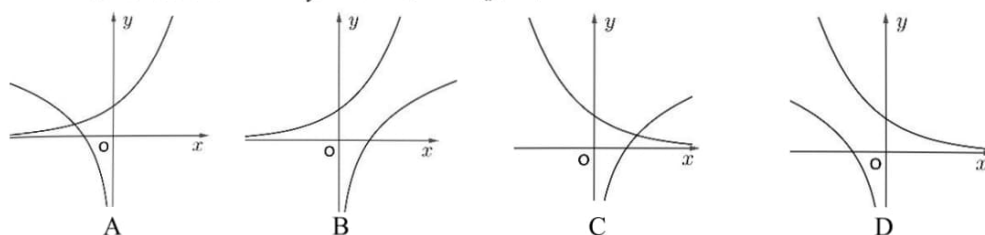
5. 已知函数  $y=f(x)$  的图象是一条连续不断的曲线, 且有如下对应值表:

则下列结论正确的是 ( )

$x$	1	2	3	4	5	6
$y$	10	8	-3	2	-7	-9

- A.  $f(x)$  在  $(1, 6)$  内恰有 3 个零点      B.  $f(x)$  在  $(1, 6)$  内至少有 3 个零点  
C.  $f(x)$  在  $(1, 6)$  内最多有 3 个零点      D.  $f(x)$  在  $(1, 6)$  内不可能有 4 个零点

6. 已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 函数  $y=a^x$  与  $y=\log_a(-x)$  的图象是 ( )



7.  $a > 1$  是函数  $f(x) = \log_a^{(2x-x^2)}$  在  $(0,1)$  上单调递增的 ( )

- A. 充分不必要条件  
B. 必要不充分条件  
C. 充要条件  
D. 既不充分也不必要条件

8. 函数  $f(x)$  和  $g(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ , 且  $y = f(4-3x)$  为偶函数,  $y = g(2x+4)+1$  为奇函数,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 均有  $f(x)+g(x)=x^2+2$ , 则  $f(6)g(6) = ( )$

- A. 335  
B. 345  
C. 356  
D. 357

**二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分。**

9. 已知  $a > b > 0$ , 则下列选项正确的是 ( )

- A.  $a^3 > b^3$   
B.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$   
C.  $\lg a > \lg b$   
D.  $2^{-a} > 2^{-b}$

10. 下列函数中，在  $(0, +\infty)$  上有零点且单调递增的函数有 ( )

- A.  $y = x^2 + 2x + 1$   
B.  $y = \frac{x-1}{x+1}$   
C.  $y = \cos 2x$   
D.  $y = x - \frac{1}{x}$

11. 若将函数  $f(x) = \left| \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \right|$  的图象先向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度，再将所得的图象上所有点的横坐标缩短为原来的  $\frac{1}{2}$  (纵坐标不变)，得到函数  $g(x)$  的图象，则 ( )

- A.  $g(x)$  的最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$   
B.  $g(x)$  的定义域为  $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}\right\}$   
C.  $g(x)$  图象的一个单调区间为  $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$   
D.  $g(x)$  图象的一条对称轴方程为  $x = -\frac{\pi}{12}$

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & 0 < x \leq 1 \\ |\log_2(x-1)|, & x > 1 \end{cases}$ , 若存在四个实数  $x_1, x_2, x_3, x_4 (x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ , 使得  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = t$ , 则 ( )

- A.  $t$  的范围为  $(0,1)$   
B.  $x_3x_4$  的取值范围为  $(3,6)$   
C.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  的取值范围为  $\left(5, \frac{11}{2}\right)$   
D.  $x_1f(x_4)$  的取值范围为  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

**三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡的相应位置**

13. 函数  $y = a^{x-2} + 1$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图象经过的定点坐标为\_\_\_\_\_.

14.  $\forall x \in (2, +\infty)$ ,  $x + \frac{1}{x-2} > m^2 + 3m$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15.  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 函数  $f(x)$  同时满足: ①  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ ,

②  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ , 写出函数  $f(x)$  的一个解析式\_\_\_\_\_.

16. 关于  $x$  的方程  $x^2 - 2x + m^2 + 16m = m \cos(x-1) + 15$  有且仅有 1 个实数根, 则实数  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知集合  $A = \left\{ x \mid -2 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$ ,  $B = \{ x \mid 2m \leq x \leq m+1 \}$ .

(1) 当  $m=0$  时, 求  $\delta_R(A \cap B)$ ;

(2) 若  $A \cup B = A$ , 求实数  $m$  的取值范围.

18. (本题满分 12 分)

已知  $f(x) = x^2 + (3-a)x - 3a$  ( $a \in R$ ).

(1) 若  $f(x) = f(2-x)$ , 求  $a$  的值;

(2) 求关于  $x$  的不等式  $f(x) < 0$  的解集.

19. (本题满分 12 分)

在单位圆中, 已知锐角  $\alpha$  的终边与单位圆交于点  $P(\frac{1}{7}, m)$ , 将角  $\alpha$  的终边按照逆时针方向

旋转  $\beta$  ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ) 交单位圆于点  $Q(-\frac{11}{14}, t)$ .

(1) 求  $\frac{\sqrt{3} \sin(\alpha + \pi) + \cos \alpha}{2 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}$  的值;

(2) 求  $\cos \beta$  的值.

20. (本题满分 12 分)

定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数  $f(x) = \frac{x+a}{x^2+b}$  只能同时满足下列的两个条件:

- ①  $f(x)$  在区间  $[-1,1]$  上单调递增      ②  $f(-1) = \frac{1}{2}$       ③  $f(1) = \frac{1}{2}$

(1) 请写出这两个条件的序号, 并求  $f(x)$  的解析式;

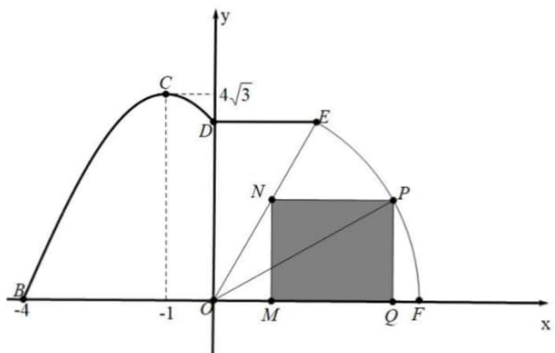
(2) 判断  $f(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  的单调性, 并用定义证明.

21. (本题满分 12 分)

如图为某市拟建的一块运动场地的平面图, 其中有一条运动赛道由三部分构成: 赛道的前一部分为曲线段  $BCD$ , 该曲线段为函数  $y = A\cos(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 在  $x \in [-4, 0]$  的图象, 且图象的最高点为  $C(-1, 4\sqrt{3})$ ; 赛道的中间部分为长度是  $2\sqrt{3}$  的水平跑道  $DE$ ; 赛道的后一部分是以  $O$  为圆心的一段圆弧  $\widehat{EF}$ .

(1) 求  $\omega$ ,  $\varphi$  和  $\angle EOF$  的值;

(2) 若要在圆弧赛道所对应的扇形区域内建一个矩形草坪  $PQMN$ , 如图所示. 记  $\angle POF = \theta$ , 求矩形草坪  $PQMN$  面积的最大值及此时  $\theta$  的值.



22. (本题满分 12 分)

固定项链的两端，在重力的作用下项链所形成的曲线是悬链线. 1691 年，莱布尼茨等

得出“悬链线”方程  $y = \frac{c(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}})}{2}$ ，其中  $c$  为参数. 当  $c=1$  时，就是双曲余弦函数

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，类似地我们可以定义双曲正弦函数  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . 它们与正、余弦函数

有许多类似的性质.

(1) 类比正弦函数的二倍角公式，请写出双曲正弦函数的一个正确的结论

$\sinh 2x =$  \_\_\_\_\_. (只写出即可，不要求证明)；

(2)  $\forall x \in [-1, 1]$ ，不等式  $\cosh 2x + m \cosh x \geq 0$  恒成立，求实数  $m$  的取值范围；

(3) 若  $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ ，试比较  $\cosh(\sin x)$  与  $\sinh(\cos x)$  的大小关系，并证明你的结论.