2023届宁德市普通高中毕业班五月份质量检查

数学试题参考答案及评分标准

说明：

1.本解答指出了每题要考察的主要知识和能力，给出一种或几种解法供参考．如果考生的解法与给出的解法不同，可根据试题的主要考察内容比照评分标准确定相应的评分细则．

2.对解答题，当考生的解答在某一步出现错误，但整体解决方案可行且后续步骤没有出现推理或计算错误，则错误部分依细则扣分，并根据对后续步骤影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过后续部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3.解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4.解答题只给整数分数，填空题不给中间分．

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分40分．

1．D　2．C　3．B　4．B　5．C　6．D　7．A　8．B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分．

9．ABD　10．BC　11．ACD　12．AD

三、填空题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分20分．

13．5　14．$f(x)=-x^2$ （答案不唯一：如 $f(x)=x+1-\mathrm{e}^x$， $f(x)=\cos x-1$ 等）

15．-1　16．8

三、解答题：本大题共6小题，满分70分，解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

17. 本小题主要考查等差数列的通项公式、求和等基础知识，考查运算求解能力，逻辑推理能力，化归与转化思想等．满分10分．

解：（1）由 $b_n=a_n+n^2$ 得 $b_1=a_1+1$， $b_2=a_2+4$，……1分

代入 $a_1+b_1=3$， $a_2+b_2=8$ 得 $2a_1+1=3$， $2a_2+4=8$，

解得 $a_1=1$，$a_2=2$，……3分

又因为数列$\{a_n\}$为等差数列，故公差为 $d=a_2-a_1=1$，……4分

因此 $a_n=n$， $b_n=n+n^2$．……5分

（2）证明：由（1）可得 $b_n=n+n^2$，

所以 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n+n^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，……7分

所以 $S_n=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots+\frac{1}{b_n}$

$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=1-\frac{1}{n+1}$ ……8分

又因为$n\in\mathbf{N}^{*}$,所以$0<\dfrac{1}{n+1}\le\dfrac{1}{2}$（$n=1$时等号成立），

所以$\dfrac{1}{2}\le 1-\dfrac{1}{n+1}<1$，即$\dfrac{1}{2}\le S_n<1$．…………………………………………………10 分

18．本小题主要考查空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，空间角的计算等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想等．满分 12 分．

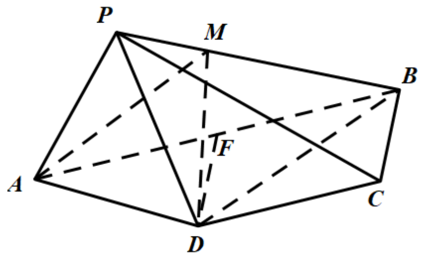
解法一：（1）取AB的中点F，连结BD，DF．

在四边形$ABCD$中，$BC\perp CD$，$AB//CD$，故四边形$ABCD$为直角梯形，

又$AB=2BC=2CD=2$，故$AF=BF=\dfrac{1}{2}AB=1$，$BD=\sqrt{2}$．

又由$CD//BF$，$CD=BF$，所以四边形$BCDF$为正方形，

故$DF=1=\dfrac{1}{2}AB$，



从而$BD\perp AD$；…………………………………2 分

又$PD=1$，$PB=\sqrt{3}$，

所以$PD^2+BD^2=PB^2$，故$BD\perp PD$………………3 分

由$PD\cap AD=D$，$PD\subset$平面PAD，$AD\subset$平面PAD，

从而$BD\perp$平面PAD，…………………………………………………………………4 分

又$BD\subset$平面$ABCD$，

所以平面$PAD\perp$平面$ABCD$．…………………………………………………………5 分

（2）取AD的中点O，连接OP，OF，

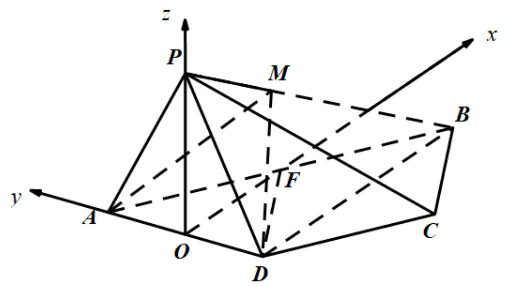
由$PA=PD=1$，所以$PO\perp AD$，

因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，且平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，

所以$PO\perp$平面$ABCD$．……………………6 分

又O，F为AD，AB的中点，

所以$OF//BD$，且$OF=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，



由（1）知$BD\perp AD$，故 $OF\perp AD$．

以O为原点，OF、OA、OP所在的直线分别为x、y、z轴，建立如图的空间直角坐标系，

则$O(0,0,0)$，$A\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$D\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$P\left(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$B\left(\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，…7 分

则 $\overrightarrow{AD}=\left(0,-\sqrt{2},0\right)$， $\overrightarrow{PB}=\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$， $\overrightarrow{AP}=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

设 $\frac{PM}{PB}=\lambda$， $\lambda\in\left(0,1\right)$，则 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PB}=\left(\sqrt{2}\lambda,-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\left(\sqrt{2}\lambda,-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$，

平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(1,0,0\right)$， ……………………………………………8 分

设平面 ADM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(x,y,z\right)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{2}y=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{2}\lambda x-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\lambda+1\right)y+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\lambda\right)z=0,\end{cases}$$

令 $z=2\lambda$，则 $\boldsymbol{n}=\left(\lambda-1,0,2\lambda\right)$， ……………………………………………………10 分

因为二面角 $P-AD-M$ 的大小为 45°，所以

$$\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\frac{\left|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\boldsymbol{m}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{\left|\lambda-1\right|}{\sqrt{\left(\lambda-1\right)^2+\left(2\lambda\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

由 $\lambda\in\left[0,1\right]$，解得：$\lambda=\frac{1}{3}$，

所以线段 PB 上存在点 M，当 $\frac{PM}{PB}=\frac{1}{3}$ 时，使得二面角 $P-AD-M$ 大小为 45°． ….12 分

解法二：（1）取 AD 的中点 O， AB 的中点 F，连结 PO，BO， DF．

在四边形 $ABCD$ 中， $BC\perp CD$， $AB//CD$，故四边形 $ABCD$ 为直角梯形，

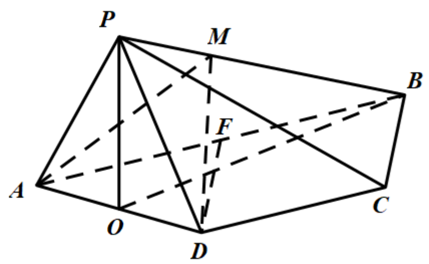
又 $AB=2BC=2CD=2$，

故 $CD//BF$，且 $CD=BF=BC=1$，

所以四边形 $BCDF$ 为正方形，

故 ΔADF 为等腰直角三角形，

从而 $AD=\sqrt{2}$， $\angle BAD=45^{\circ}$，



ΔPAD 为等腰直角三角形. ……………………………………………………………1 分

在 ΔABO 中， $BO^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times2\times\cos45^{\circ}=\frac{5}{2}$，

又因为 $PA=PD=1$，所以 $PO\perp AD$，

$PO=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $PB=\sqrt{3}$，

所以 $PB^2=PO^2+BO^2$，

故 $PO\perp OB$，……………………………………………………………………3 分

由 $AO\bigcap BO=O$，$AO\subset$ 平面 $ABCD$，$OB\subset$ 平面 $ABCD$，

从而 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，…………………………………………………………4 分

又 $PO\subset$ 平面 PAD，

所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$． ……………………………………………………5 分

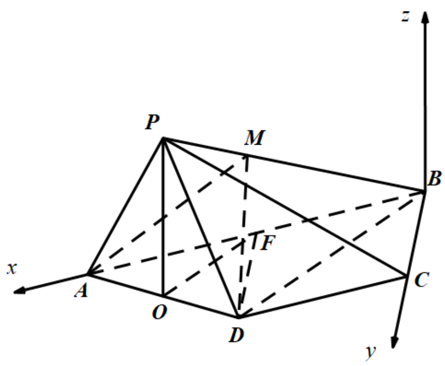
（2）过 B 作 $Bz//PO$，则 $Bz\perp$ 平面 $ABCD$． ……………………………………6 分

以 B 为原点，BA、BC、Bz 所在的直线分别为 x、y、z 轴，建立如图的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(1,1,0)$，$P\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

设 $\frac{BM}{BP}=\lambda$，$\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BP}=(\frac{3}{2}\lambda,\frac{1}{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda)$，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=\left(\frac{3}{2}\lambda-2,\frac{1}{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$，

$\overrightarrow{AD}=(-1,1,0)$，……………………………7 分



设平面 ADM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=-x+y=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=\left(\frac{3}{2}\lambda-2\right)x+\frac{1}{2}\lambda y_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda z=0,\end{cases}$

令 $y=\lambda$，得 $\boldsymbol{n}=\left(\lambda,\lambda,2\sqrt{2}(1-\lambda)\right)$，…………………………………………………9 分

因为二面角 $P-AD-M$ 的大小为 45°，

所以平面 ADM 与平面 $ABCD$ 所成的角也等于 45°，

平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，…………………………………………10 分

$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|2\sqrt{2}(1-\lambda)\right|}{\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+8(1-\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $\lambda\in[0,1]$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$，…………………………………………………………11 分

所以线段 PB 上存在点 M，当 $\frac{BM}{BP}=\frac{2}{3}$，即 $\frac{PM}{PB}=\frac{1}{3}$ 时，使得二面角 $P-AD-M$ 大小为 45°．

……………………………………12 分

解法三：（1）同解法二；

（2）过 M 点作 $MH\perp OB$ 于 H，过 H 作 $HE\perp AD$ 于 E，连结 ME

由（1）知平面 $POB\perp$ 平面$ABCD$，所以 $MH\perp$ 平面$ABCD$，故 $MH\perp AD$，

所以 $AD\perp$ 平面MHE，因而 $ME\perp AD$，

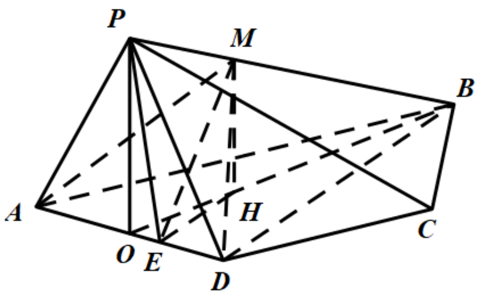
所以 $\angle MEH$ 是二面角 $M-AD-B$ 的平面角. ……………………………………………7 分

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，二面角 $P-AD-M$ 大小为 $45°$，

所以二面角 $M-AD-B$ 大小为 $45°$，从而 $\angle MEH=45°$，故 $MH=EH$ ……………8 分

设 $MH=h$，则 $EH=h$，

因为 $HE\perp AD$，$BD\perp AD$，从而 $HE/\!/BD$，



所以 $\dfrac{OH}{OB}=\dfrac{EH}{BD}=\dfrac{h}{\sqrt{2}}$，

从而 $\dfrac{BH}{OB}=\dfrac{\sqrt{2}-h}{\sqrt{2}}$ ………9 分

因为 $MH\perp OB$，$PO\perp OB$，从而 $MH/\!/PO$，

所以 $\dfrac{BH}{OB}=\dfrac{MH}{PO}=\dfrac{BM}{PB}$，

即 $\dfrac{\sqrt{2}-h}{\sqrt{2}}=\dfrac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，解得 $h=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$， ……………………………………………………11 分

所以 $\dfrac{BM}{PB}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2}{3}$，从而 $\dfrac{PM}{PB}=\dfrac{1}{3}$ ………………………………………………12 分

19．本题主要考查正弦定理、余弦定理、三角形面积公式等基础知识，考查运算求解能力，考查化归与转化思想等．满分 12 分．

解法一：（1）由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即 $49=a^2+c^2-ac$． ………………………1 分

又内切圆半径为 $\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\times\sqrt{3}$， …………………………2 分

故 $ac=2(a+c)+14$， ………………………………………………………………3 分

于是 $\begin{cases}49=a^2+c^2-ac,\\ ac=2(a+c)+14,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ac=40,\\ a+c=13,\end{cases}$， ………………………………………………4 分

得 $\begin{cases}a=8,\\ c=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5,\\ c=8.\end{cases}$

因为 $a>c$，所以 $\begin{cases} a=8, \\ c=5. \end{cases}$ ……………………………………………………………………6 分

（2）设 $BD=x,CD=y$，由 $\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{7}$， ……………………………………………8 分

又因为 $x+y=8$，

所以 $BD=\dfrac{5}{12}\times 8=\dfrac{10}{3}$． ……………………………………………………………………9 分

在 ΔABD 中，由余弦定理 $AD^2=BA^2+BD^2-2BA\cdot BD\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$,………………………10 分

得 $AD^2=25+\dfrac{100}{9}-2\times 5\times\dfrac{10}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{175}{9}$，所以 $AD=\dfrac{5\sqrt{7}}{3}$． …………………………12 分

解法二：（1）设圆 O 与边 BC 相切于点 E，连结 OE， OB，

则 $OE\perp BC$，且 $OE=\sqrt{3}$，且 $\angle OBE=\dfrac{\pi}{6}$，

故 $BE=\sqrt{3}OE=3$……………………………………………………………………………1 分

因为 ΔABC 三边与圆 O 相切，切线长相等

所以 $(a-3)+(c-3)=7$，即 $a+c=13$， ……………………………………………2 分

根据余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $49=a^2+c^2-ac$，……………………3 分

所以 $ac=\dfrac{1}{3}[(a+c)^2-49]=40$，…………………………………………………………4 分

解得 $\begin{cases} a=8, \\ c=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=5, \\ c=8. \end{cases}$

因为 $a>c$，所以 $\begin{cases} a=8, \\ c=5. \end{cases}$． ……………………………………………………………6 分

（2）由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{25+49-64}{2\times 5\times 7}=\dfrac{1}{7}$． ………………………………………………7 分

$\overrightarrow{AD}=\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)=\dfrac{\lambda}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{7}\overrightarrow{AC}$． ……………………………………………8 分

又因为 $\dfrac{\lambda}{5}+\dfrac{\lambda}{7}=1$，$\lambda=\dfrac{35}{12}$． ……………………………………………………………9 分

$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2==\left[\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)\right]^2=\lambda^2(1+1+2\times 1\times 1\times\dfrac{1}{7})=\dfrac{16}{7}\lambda^2$,………………………11 分

所以 $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}\times\dfrac{35}{12}=\dfrac{5\sqrt{7}}{3}$． ……………………………………………………12 分

解法三：（1）同解法一；

（2）在 ΔABC 中，由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{25+49-64}{2\times5\times7}=\dfrac{1}{7}$，

所以 $\sin A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，……………………………………………………………………7 分

又 $\cos A=1-2\sin^2\dfrac{A}{2}$，所以 $\dfrac{1}{7}=1-2\sin^2\dfrac{A}{2}$，所以 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．

且 $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$．……………………9 分

$\sin\angle ADB=\sin(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{A}{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{A}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$．……10 分

在 ΔABD 中，由 $\dfrac{AD}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，

得 $\dfrac{AD}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{5}{\frac{3\sqrt{21}}{14}}$，所以 $AD=\dfrac{5\sqrt{7}}{3}$ ……………………………………………………………12 分

20. 本小题主要考查列联表、二项分布、概率的期望等基础知识，考查运算求解能力、数据处理能力、应用意识，考查统计思想、化归与转化思想．满分 12 分．

解：（1）（i）依题意得 2×2 列联表如下：

	正确识别	错误识别	合计
A 组软件	40	20	60
B 组软件	20	20	40
合计	60	40	100

……………………………1 分

因为 $\chi^2=\dfrac{100(40\times20-20\times20)^2}{60\times40\times60\times40}=\dfrac{25}{9}\approx2.778<3.841$，……………………………3 分

且 $\mathrm{P}(\chi^2\geq3.841)=0.05$

所以没有 95% 的把握认为软件类型和是否正确识别有关,. ………………………4 分

（ii）由（i）得 $P_1=\dfrac{2}{3}$，$P_2=\dfrac{1}{2}$，……………………………………………………5 分

故方案二在一次测试中通过的概率为

$$P=C_2^1\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot C_2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot C_2^1\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+C_2^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

……………………………7 分

（2）方案二每次测试通过的概率为

$$P=C_2^1\cdot P_1(1-P_1)\cdot C_2^2\cdot(P_2)^2+C_2^2(P_1)^2\cdot C_2^1\cdot P_2(1-P_2)+C_2^2(P_1)^2\cdot C_2^2(P_2)^2$$ …………8 分

$$=P_1P_2(\frac{8}{3}-3P_1P_2)$$

$$=-3(P_1P_2)^2+\frac{8}{3}P_1P_2$$ ……………………………………………………………9 分

$$=-3\left(P_1P_2-\frac{4}{9}\right)^2+\frac{16}{27}$$

所以当 $P_1P_2=\frac{4}{9}$ 时，P 取到到最大值 $\frac{16}{27}$，……………………………………………10 分

又 $P_1+P_2=\frac{4}{3}$，此时 $P_1=P_2=\frac{2}{3}$.

因为每次测试都是独立事件，

故 n 次实验测试通过的次数 $X\sim B(n,P)$，期望值 $E(X)=nP=16$，

因为 $p\le\frac{16}{27}$，所以 $n=\frac{16}{p}\ge 16\times\frac{27}{16}=27$ ……………………………………………11 分

所以测试至少 27 次，此时 $P_1=P_2=\frac{2}{3}$. ……………………………………………12 分

21. 本题主要考查直线、双曲线、直线与双曲线的位置关系等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查化归与转化思想、数形结合思想，考查考生分析问题和解决问题的能力，满分 12 分.

解法一：（1）因为点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=4$，

所以点 M 的轨迹为双曲线的右支，…………………………………………………………1 分

故 $a=2$，$c=\sqrt{5}$，所以 $b=1$，………………………………………………………3 分

所以曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1(x>0)$. ……………………………………………4 分

(未注明右支或 $x>0$ 扣 1 分)

（2）设 BC 与 AQ 的交点为 D.

显然直线 BC 的斜率存在，设 BC 的方程为 $y=kx+m$，

联立方程 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2-4y^2=4,\end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2-1)x^2+8kmx+4m^2+4=0$，

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2-1}\\x_1x_2=\dfrac{4m^2+4}{4k^2-1}\end{cases}$. ………………………………5 分

又 $k_{AC}=\frac{y_2}{x_2-2},k_{AB}=\frac{y_1}{x_1-2}$，因为 $k_{AC}\cdot k_{AB}=-1$，

所以 $\frac{y_2}{x_2-2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=-1$，……………………………………………………………6 分

故 $(k^2+1)x_1x_2+(mk-2)(x_1+x_2)+m^2+4=0$，

代入 $(k^2+1)\frac{4m^2+4}{4k^2-1}+(mk-2)(-\frac{8km}{4k^2-1})+m^2+4=0$，整理得 $20k^2+3m^2+16km=0$，

即 $(10k+3m)(2k+m)=0$，解得 $m=-\frac{10}{3}k$ 或 $m=-2k$（舍）. …………………………8 分

所以直线 BC 的方程为 $y=k(x-\frac{10}{3})$，即直线 BC 恒过定点 $(\frac{10}{3},0)$．…………………9 分

因为 A,B,Q,C 四点共圆，且 BC 为直径，由 $BC\perp AD$，

所以点 D 为 AQ 中点，且直线 AD 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-2)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-\frac{10}{3}), \\ y=-\frac{1}{k}(x-2), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{10k^2+6}{3(k^2+1)}, \\ y=\frac{-4k}{3(k^2+1)}. \end{cases}$

所以点 $D\left(\frac{10k^2+6}{3(k^2+1)},\frac{-4k}{3(k^2+1)}\right)$，故 $Q\left(\frac{14k^2+6}{3(k^2+1)},\frac{-8k}{3(k^2+1)}\right)$，……………………………11 分

代入曲线 E 的方程 $\left[\frac{14k^2+6}{3(k^2+1)}\right]^2-4\left[\frac{-8k}{3(k^2+1)}\right]^2=4$，

解得 $k^4-k^2=0$，即 $k=\pm1$，所以直线 BC 的斜率为 ±1……………………………12 分

解法二：（1）同解法一；

（2）由对称性，直线 BC 必过定点 $(t,0)$，…………………………………………………5 分

设 BC 的方程为 $x=my+t$，联立方程 $\begin{cases} x=my+t, \\ x^2-4y^2=4, \end{cases}$

消去 x 得 $(m^2-4)y^2+2tmy+t^2-4=0$，

设 $B(x_1,y_2)$，$C(x_2,y_2)$，所以 $\begin{cases} y_1+y_2=-\frac{2tm}{m^2-4} \\ y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2-4} \end{cases}$．………………………………………6 分

$k_{AC}=\frac{y_2}{x_2-2},k_{AB}=\frac{y_1}{x_1-2}$，

因为 $k_{AC}\cdot k_{AB}=-1$，所以 $\frac{y_2}{x_2-2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=-1$，

故 $(m^2+1)y_1y_2+(tm-2m)(y_1+y_2)+t^2-4t+4=0$，………………………………7 分

代入 $(m^2+1)\times\frac{t^2-4}{m^2-4}+m(t-2)(-\frac{2tm}{m^2-4})+\left(t-2\right)^2=0$，

因为 $t\neq2$，整理得 $3t-10=0$，解得 $t=\frac{10}{3}$．……………………………………………8 分

所以直线 BC 的方程为 $x=my+\frac{10}{3}$，即直线 BC 恒过定点 $(\frac{10}{3},0)$．……………………9 分

联立 $\begin{cases} x=my+\frac{10}{3}, \\ y=-m(x-2), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{6m^2+10}{3(\mathrm{m}^2+1)}, \\ y=\frac{-4m}{3(m^2+1)}. \end{cases}$

所以点 $D\left(\dfrac{6m^2+10}{3(m^2+1)},\dfrac{-4m}{3(m^2+1)}\right)$，故 $Q\left(\dfrac{6m^2+14}{3(m^2+1)},\dfrac{-8m}{3(m^2+1)}\right)$，…………………………11 分

代入曲线 E 的方程 $\left[\dfrac{6m^2+14}{3(m^2+1)}\right]^2-4\left[\dfrac{-8m}{3(m^2+1)}\right]^2=4$，

解得 $m^2-1=0$，即 $m=\pm1$，所以直线 BC 的斜率为 ±1．……………………………12 分

解法三：（1）同解法一；

（2）设 AC 方程为 $y=k(x-2)$，设 AB 方程为 $y=-\dfrac{1}{k}(x-2)$，

联立方程 $\begin{cases}y=k(x-2)\\x^2-4y^2=4\end{cases}$，消去 y 得 $(1-4k^2)x^2+16k^2x-16k^2-4=0$，

设 $C(x_1,y_1)$，则 $2\cdot x_1=\dfrac{-16k^2-4}{1-4k^2}$，得 $x_1=\dfrac{8k^2+2}{4k^2-1}$，

所以 $y_1=k(\dfrac{8k^2+2}{4k^2-1}-2)=\dfrac{4k}{4k^2-1}$，所以点 $C(\dfrac{8k^2+2}{4k^2-1},\dfrac{4k}{4k^2-1})$．………………………5 分

用 $-\dfrac{1}{k}$ 替换 k 得点 $B(\dfrac{-2k^2-8}{k^2-4},\dfrac{4k}{k^2-4})$．………………………………………………6 分

所以 BC 斜率 $k_{BC}=\dfrac{\dfrac{4k}{4k^2-1}-\dfrac{4k}{k^2-4}}{\dfrac{8k^2+2}{4k^2-1}+\dfrac{2k^2+8}{k^2-4}}=-\dfrac{3k}{4(k^2-1)}$，……………………………………7 分

故直线 BC 方程为 $y=-\dfrac{3k}{4(k^2-1)}(x+\dfrac{2k^2+8}{k^2-4})+\dfrac{4k}{k^2-4}$，

即 $y=-\dfrac{3k}{4(k^2-1)}x+\dfrac{10k}{4(k^2-1)}$，

即 $y=-\dfrac{3k}{4(k^2-1)}(x-\dfrac{10}{3})$．所以直线 BC 恒过定点 $(\dfrac{10}{3},0)$．……………………………9 分

下同解法一．

解法四：（1）同解法一；

（2）将坐标系原点平移到 $A(2,0)$，则双曲线 E 的方程变为 $\dfrac{(x+2)^2}{4}-y^2=1$，

即 $x^2-4y^2+4x=0$．新坐标系下直线 BC 的方程设为 $mx+ny=1$，……………………5 分

代入双曲线方程有 $x^2-4y^2+4x(mx+ny)=0$，

即 $(1+4m)x^2-4y^2+4nxy=0$，…………………………………………………………6 分

两边同除以 x^2 得 $4(\dfrac{y}{x})^2-4n\dfrac{y}{x}-4m-1=0$，……………………………………………7 分

设直线 AC,AB 的斜率分别为 k_1,k_2，

则 $k_1 \cdot k_2 = \frac{-4m-1}{4} = -1$，所以 $m = \frac{3}{4}$，…………………………………………………………8 分

所以直线 BC 的方程为 $\frac{3}{4}x + ny = 1$，从而直线 BC 恒过定点 $(\frac{4}{3}, 0)$，

故原坐标系下直线 BC 恒过定点 $(\frac{10}{3}, 0)$．……………………………………………………9 分

由 A, B, Q, C 四点共圆，设 BC 的直线方程为 $y = k(x - \frac{10}{3})$，

即 $kx - y - \frac{10}{3}k = 0$；设 AQ 的直线方程为 $y = -\frac{1}{k}(x-2)$，即 $x + ky - 2 = 0$．

所以过四点 A, B, Q, C 的二次曲线系方程为 $(kx - y - \frac{10}{3}k)(x + ky - 2) + \lambda(x^2 - 4y^2 - 4) = 0$，

……………………………………………………………………………………11 分

等式左边 xy 的系数为 $k^2 - 1$，所以 $k^2 - 1 = 0$，所以 $k = \pm 1$，即直线 BC 的斜率为 ± 1．

……………………………………………………………………………………12 分

解法五：（1）同解法一；

（2）由直线 BC 不过点 $(2,0)$，故设直线 BC 的方程为 $m(x-2) + ny = 1$，…………5 分

所以由 $x^2 - 4y^2 = 4$ 得 $(x-2+2)^2 - 4y^2 = 4$，

即 $\left[(2m+1)(x-2) + 2ny\right]^2 - 4y^2 = 4\left[m(x-2) + ny\right]^2$，……………………………6 分

两边同除以 $(x-2)^2$ 得 $\left[(2m+1) + 2n \cdot \frac{y}{x-2}\right]^2 - 4\left(\frac{y}{x-2}\right)^2 = 4(m + n \cdot \frac{y}{x-2})^2$，………7 分

设 $\frac{y}{x-2} = k$，上式整理得 $4k^2 - 4nk - 4m - 1 = 0$.

设直线 AC, AB 的斜率分别为 k_1, k_2，则 $k_1 \cdot k_2 = \frac{-4m-1}{4} = -1$，

解得 $m = \frac{3}{4}$，…………………………………………………………………………8 分

所以直线 BC 的方程为 $\frac{3}{4}(x-2) + ny = 1$，即 $\frac{3}{4}\left(x - \frac{10}{3}\right) + ny = 0$，

从而 BC 恒过定点 $(\frac{10}{3}, 0)$．…………………………………………………………………9 分

下同解法五.

22．本小题主要考查导数及其应用、不等式等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、创新意识等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想等．满分 12 分.

解法一、（1）当 $a \le 0$ 时，由 $e^x > 0$，且 $x \in (0, \pi)$ 时 $\sin x > 0$，

故 $f(x) \le 1$ 成立；………………………………………………………………………1 分

当$a>0$时，即为$f(x)_{\max}\le 1$.

由$f'(x)=a\cdot\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$，……………………………………………………………2 分

令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{\pi}{4}$，

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$单调递增，在$\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$单调递减，…………………………………3 分

所以$f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{a}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\le 1$，即$0<a\le\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$..……………………………………4 分

综上，$a\le\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$..……………………………………………………………………5 分

（2）$f(x)=\dfrac{4\sin x}{e^x}$，$f'(x)=\dfrac{4(\cos x-\sin x)}{e^x}$，

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$单调递增，在$\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$单调递减，

故$0<x_1<\dfrac{\pi}{4}<x_2<\pi$……………………………………………………………………6 分

先证$\dfrac{\pi}{2}-x_1<x_2$，由$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}-x_1$，

故即证$f(x_2)<f\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$，由$f(x_1)=f(x_2)$，

故即证$f(x_1)<f\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$，设$h(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-f(x)$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，…………………7 分

则$h'(x)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-f'(x)=-4\times\dfrac{(\sin x-\cos x)\left(e^x-e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)}{e^{\frac{\pi}{2}}}<0$，

所以$h(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上单调递减，所以$h(x)>h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$………………………………8 分

现证$\dfrac{\pi-x_2}{e^{\pi-x_2}}<\sin x_2$，即证$\dfrac{\pi-x_2}{e^{\pi-x_2}}<\sin(\pi-x_2)$，$x_2\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$.

设$t=\pi-x_2$，故即证$\dfrac{t}{e^t}<\sin t$，即证$e^t\sin t-t>0$……………………………………9 分

设$g(t)=e^t\sin t-t$，$t\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$，

则$g'(t)=e^t(\sin t+\cos t)-1$，设$p(t)=e^t(\sin t+\cos t)-1$，

由$p'(t)=2e^t\cos t$，所以$p(t)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递增，在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$单调递减，

又$p(0)=0$，$p\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-1>0$，$p\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-1<0$，

所以$\exists t_0\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，使得$p(t_0)=0$，

故$g(t)$在$(0,t_0)$单调递增，在$\left(t_0,\frac{3\pi}{4}\right)$单调递减，……………………………………10分

$g(t)_{\min}=\min\left\{g(0),g\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right\}$，

又$g(0)=0$，$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{3\pi}{4}=\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}-3\pi}{4}>\frac{e^3-3\pi}{4}>0$，……………………11分

所以$g(t)>0$，即$e^t\sin t-t>0$，

故$\frac{\pi-x_2}{e^{\pi-x_2}}<\sin x_2$……………………………………………………………………12分

解法二、（1）$f(x)=\frac{a\sin x}{e^x}\le 1$，由$e^x>0$，且$x\in(0,\pi)$时$\sin x>0$，…………………1分

所以$a\le\left(\frac{e^x}{\sin x}\right)_{\min}$ ……………………………………………………………2分

设$g(x)=\frac{e^x}{\sin x}$，则$g'(x)=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$，……………………………………………3分

令$g'(x)=0$，得$x=\frac{\pi}{4}$，

所以$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$单调递减，在$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$单调递增，……………………………………4分

所以$g(x)_{\min}=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$，即$a\le\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$……………………………………………5分

（2）$f(x)=\frac{4\sin x}{e^x}$，$f'(x)=\frac{4(\cos x-\sin x)}{e^x}$，

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$单调递增，在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$单调递减，

故$0<x_1<\frac{\pi}{4}<x_2<\pi$……………………………………………………………………6分

先证$\frac{\pi}{2}-x_1<x_2$，由$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-x_1$，

故即证$f(x_2)<f\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$，由$f(x_1)=f(x_2)$，

故即证$f(x_1)<f\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$，设$h(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-f(x)$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，…………………7分

则$h'(x)=f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-f'(x)=-4\times\frac{(\sin x-\cos x)\left(e^x-e^{\frac{\pi}{2}-x}\right)}{e^{\frac{\pi}{2}}}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，所以 $h(x)>h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

所以 $f(x_1)<f\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$，从而 $x_1+x_2>\frac{\pi}{2}$……………………………………………………8 分

$f(x)$ 在 $x=\pi$ 处的切线方程为 $y=\frac{-4}{e^{\pi}}(x-\pi)$，………………………………………………9 分

现证 $\frac{-4}{e^{\pi}}(x_2-\pi)<f(x_2)$.

设 $r(x)=\frac{-4}{e^{\pi}}(x-\pi)-\frac{4\sin x}{e^{x}}$， $x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

$r'(x)=\frac{-4}{e^{\pi}}-\frac{4(\cos x-\sin x)}{e^{x}}=-4\left(\frac{1}{e^{\pi}}+\frac{\cos x-\sin x}{e^{x}}\right)$,

设 $t(x)=-4\left(\frac{1}{e^{\pi}}+\frac{\cos x-\sin x}{e^{x}}\right)$，则 $t'(x)=\frac{8\cos x}{e^{x}}$，

所以 $r'(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，

$r'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{e^{\pi}}<0$， $r'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4\left(\frac{1}{e^{\pi}}-\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\right)>0$， $r'(\pi)=0$，

故所以 $\exists x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $r'(x_0)=0$，

故 $r(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},x_0\right)$ 单调递减，在 (x_0,π) 单调递增，……………………………………10 分

所以 $r(x)_{\max}=\max\left\{r\left(\frac{\pi}{4}\right),r(\pi)\right\}$，

又 $r\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{e^{\pi}}-\frac{2\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}=\frac{3\pi-2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{e^{\pi}}<0$，$r(\pi)=0$，……………………………………11 分

故 $r(x)<0$，即 $\frac{-4}{e^{\pi}}(x_2-\pi)<\frac{4\sin x_2}{e^{x_2}}$，所以 $\frac{\pi-x_2}{e^{\pi-x_2}}<\sin x_2$……………………………12 分