福建省部分达标学校2024—2025学年第一学期期中

高一数学质量监测参考答案

1. A　依题意可得 $A\cap B=\{x|\sqrt{3}<x<4\}$.

2. D　“每个三角形的重心都在其内部”的否定是”至少有一个三角形的重心不在其内部”.

3. C　因为 $f(x)$是幂函数,所以 $m^2-5m+5=1$,即 $m^2-5m+4=0$,解得 $m=1$ 或 $m=4$. 当 $m=1$ 时,$f(x)=x^{-2}$ 是偶函数,符合题意;当 $m=4$ 时,$f(x)=x$ 是奇函数,不符合题意. 故 $m=1$.

4. A　由$\dfrac{1-2x}{7x-3}\geqslant 0$,得$\dfrac{2x-1}{7x-3}\leqslant 0$,得$(2x-1)(7x-3)\leqslant 0(7x-3\neq 0)$,解得 $x\in\left(\dfrac{3}{7},\dfrac{1}{2}\right]$.

5. C　因为 $f(x)=-(x-2a)^2+a+4a^2$ 在区间$[-2,6]$上为增函数,所以 $2a\geqslant 6$,得 $a\geqslant 3$,所以 a 的最小值为 3 且 a 无最大值.

6. D　因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$. 若 $B=\varnothing$,则 $5a-1\geqslant a+11$,即 $a\geqslant 3$;若 $B\neq\varnothing$,则 $\begin{cases}a<3,\\5a-1\geqslant 5,\end{cases}$解得$\dfrac{6}{5}\leqslant a<3$. 综上,$a$ 的取值范围是$\left[\dfrac{6}{5},+\infty\right)$.

7. C　依题意可得$\begin{cases}f(2)-3f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-2,\\f\left(\dfrac{1}{2}\right)-3f(2)=\dfrac{1}{2}-8,\end{cases}$解得 $f(2)=\dfrac{45}{16}$.

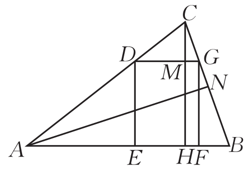
8. A　因为 $m+n=5$,所以 $m-1+n=4$,所以$\dfrac{1}{m-1}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{4}(m-1+n)\left(\dfrac{1}{m-1}+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n}{m-1}+\dfrac{m-1}{n}+2\right)$. 因为 $m>1,n>0$,所以$\dfrac{n}{m-1}>0,\dfrac{m-1}{n}>0$,所以$\dfrac{n}{m-1}+\dfrac{m-1}{n}\geqslant 2$,当且仅当$\dfrac{n}{m-1}=\dfrac{m-1}{n}$,即 $m=3,n=2$ 时,等号成立,则$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n}{m-1}+\dfrac{m-1}{n}+2\right)\geqslant 1$,即$\dfrac{1}{m-1}+\dfrac{1}{n}$的最小值是 1.

9. BCD　方程组$\begin{cases}x+2y=3,\\2x+y=3\end{cases}$的解集为$\{(1,1)\}$,A 错误. 梯形有一组对边平行,但有一组对边平行的四边形不一定是梯形,B 正确. 当 $a=3$ 时,$6-a=a^2-6=3$,由 $a^2-6=a(a\neq 3)$,得 $a=-2$,C 正确. D 显然是正确的.

10. AC　因为 $f(x)$与 $g(x)$分别为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数、奇函数,所以 $f(-x)=f(x)$,$g(-x)=-g(x)$,所以 $h(-x)=f(-x)g(-x)=-h(x)$,则 $h(x)$为奇函数,其图象关于原点对称. 故选 AC.

11. ACD　取 BC 的中点 N,连接 AN,则 $AN\perp BC$,且 $AN=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$,所以$\triangle ABC$ 的面积为$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,A 正确. 过 C 作 $CH\perp AB$,垂足为 H,设 CH 与 DG 交于点 M,由

等面积法可得$\frac{1}{2}AB \cdot CH = 2\sqrt{2}$，则 $CH = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. 由$\frac{CM}{CH} = \frac{DG}{AB}$，得 $CM = \frac{CH \cdot DG}{AB} = \frac{4\sqrt{2}x}{9}$，则 $MH = CH - CM = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}x}{9}$，所以 $S(x) = DG \cdot DE = DG \cdot MH = \frac{4\sqrt{2}}{9}(3x - x^2) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \sqrt{2}(0 < x < 3)$，则 $S(1) = \frac{8\sqrt{2}}{9}$，则 $S(x)$在$\left(0, \frac{3}{2}\right)$上单调递增，在$\left[\frac{3}{2}, 3\right)$上单调递减，所以 $S(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，B 错误，C，D 均正确.



12. $\in$；$\notin$；$\in$　因为泰国属于亚洲，所以泰国$\in A$. 因为 $\mathbf{Q} = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbf{Z}, p \neq 0 \right\}$，所以$\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$，$\frac{2}{7} \in \mathbf{Q}$.

13. 15 元；7 小时　依题意可得他的车在车库停留的时间大于 8 小时且小于 9 小时，所以他需交的停车费为 15 元. 因为 $2\times4=8<10$，$2\times7=14<15$，$2\times9=18$，$2\times12=24$，所以小林停车时长的最大值为 7 小时.

14. $(-7,2)$　当 $a+7>0$ 时，$f(x)$为增函数；当 $a+7<0$ 时，$f(x)$为减函数. 当 $a-2>0$ 时，$g(x)$为减函数；当 $a-2<0$ 时，$g(x)$为增函数. 若 $f(x)$与 $g(x)$的单调性相同，则$(a+7)(a-2)<0$，解得$-7<a<2$.

15. 解：(1)令 $3x-1=t$，得 $x=\frac{t+1}{3}$，…… 2 分

则 $f(t)=(t+1)^2$. …… 5 分

故 $f(x)$的解析式为 $f(x)=(x+1)^2$. …… 6 分

(2)当 $x=-1$ 时，$f(x)$取得最小值，且最小值为 0. …… 9 分

因为 $f(-2)=1$，$f(2)=9$，所以 $f(x)$的最大值为 9. …… 12 分

故 $f(x)$在$[-2,2]$上的值域为$[0,9]$. …… 13 分

16. 解：(1)因为 $f(x)$为奇函数，所以 $f(-1)=-f(1)$，…… 2 分

因为当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+1$，所以 $f(-1)=2$，…… 4 分

所以 $f(1)=-2$. …… 5 分

(2)$M=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|\frac{18}{x+1}\in\mathbf{N}\right\}=\{0,1,2,5,8,17\}$. …… 9 分

(3)由 $x^2+2x\geqslant8$，得$(x+4)(x-2)\geqslant0$，得 $x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant2$. …… 11 分

由 $x^2-x<30$，得$(x-6)(x+5)<0$，得$-5<x<6$. …… 13 分

故不等式组$\begin{cases}x^2+2x\geqslant8,\\x^2-x<30\end{cases}$的解集为$\{x|-5<x\leqslant-4$ 或 $2\leqslant x<6\}$. …… 15 分

17. (1)解：因为 $x>0$，$y>0$，且 $x+4y=4\sqrt{3}$，所以 $4\sqrt{3}\geqslant2\sqrt{4xy}=4\sqrt{xy}$，…… 3 分

所以 $xy\leqslant3$，…… 4 分

当且仅当 $x=4y=2\sqrt{3}$，即 $x=2\sqrt{3}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，等号成立. ………………………… 6 分

故 xy 的最大值为 3. ………………………………………………………… 7 分

(2)证明：因为 x，y，z 都是正数，所以 $x+4y\geqslant 2\sqrt{4xy}=4\sqrt{xy}$，$y+z\geqslant 2\sqrt{yz}$，$4z+x\geqslant 2\sqrt{4xz}=4\sqrt{xz}$， ………………………………………………………… 10 分

所以$(x+4y)(y+z)(4z+x)\geqslant 32\sqrt{xy\cdot yz\cdot xz}=32xyz$， ………………… 12 分

当且仅当 $x=4y=4z$ 时，等号成立. ………………………………………… 14 分

故$(x+4y)(y+z)(4z+x)\geqslant 32xyz$. ………………………………………… 15 分

18.(1)证明：当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$时，$y=|f(x)|=-2x-1$. ………………………… 2 分

设 x_1，x_2 是区间$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$上任意两个实数，且 $x_1<x_2$， ………………… 3 分

则$|f(x_2)|-|f(x_1)|=-2(x_2-x_1)<0$， ………………………………… 5 分

于是$|f(x_2)|<|f(x_1)|$，由函数单调性的定义可知，函数 $y=|f(x)|$在区间$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$上单调递减. ………………………………………………………… 6 分

(2)解：当 $a=-\frac{1}{2}$时，$h(x)$的单调递增区间为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$，$[0,+\infty)$， ………… 8 分

$h(x)$的单调递减区间为$\left[-\frac{1}{2},0\right)$. ………………………………………… 9 分

(3)解：由 $x^2>2x+1$，得 $x<1-\sqrt{2}$或 $x>1+\sqrt{2}$. ………………………… 11 分

由题意得 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，………………………………………… 12 分

$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$[0,+\infty)$上单调递增. ………………………… 13 分

因为 $h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为单调函数，所以 $h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数， ………………… 14 分

所以 $a\geqslant 1+\sqrt{2}$，即 a 的取值范围是$[1+\sqrt{2},+\infty)$. ………………………… 17 分

19.解：(1)由 $p(-x)=p(x)$，得$-x+1+\frac{1}{x}=x+1-\frac{1}{x}$， ………………………… 1 分

则 $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=0$，解得 $x=\pm 1$， ………………………………………… 3 分

所以函数 $p(x)=x+1-\frac{1}{x}$的偶点为± 1. ………………………………………… 4 分

(2)取 $h(x)=x^2-x$，$H(x)=x^2+2x$，易证这两个函数均为定义在 $\mathbf{R}$ 上的“缺陷偶函数”，
………………………………………………………………………………… 5 分

则 $y=h(x)+H(x)=2x^2+x$，则 $y=h(x)+H(x)$为“缺陷偶函数”，且偶点为 0，

所以 $y=h(x)+H(x)$可能为“缺陷偶函数”. ………………………………………… 7 分

取 $h(x)=x^2-x$，$H(x)=x^2+x$，易证这两个函数均为定义在 $\mathbf{R}$ 上的“缺陷偶函数”，
………………………………………………………………………………… 8 分

则 $y=h(x)+H(x)=2x^2$,因为 $2(-x)^2=2x^2$,所以 $y=h(x)+H(x)$为偶函数,…… 9 分

所以 $y=h(x)+H(x)$可能不是“缺陷偶函数”. …………………………………… 10 分

(3)由题意得 $f(x)+g(x)-x^2=-f(y)+2g(y)+y$ 对任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 恒成立,…… 11 分

所以存在常数 a,使得 $f(x)+g(x)-x^2=-f(y)+2g(y)+y=a$. ………………… 12 分

令 $y=x$,得 $\begin{cases}f(x)+g(x)-x^2=a,\\-f(x)+2g(x)+x=a,\end{cases}$ ……………………………………… 13 分

解得 $g(x)=\dfrac{x^2-x+2a}{3}$. ……………………………………………………………… 14 分

①$g(0)=g(1)=\dfrac{2a}{3}$. ……………………………………………………………………… 15 分

②$y=\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{2a}{3x}-\dfrac{1}{3}$,设 $y=\dfrac{g(x)}{x}$的偶点为 x_1,则由$\dfrac{g(-x_1)}{-x_1}=\dfrac{g(x_1)}{x_1}$,得$\dfrac{x_1}{3}+\dfrac{2a}{3x_1}=0$,

即 $x_1^2=-2a(x\neq0)$,…………………………………………………………………………… 16 分

则 $-2a>0$,即 $a<0$,则 $g(1)$的取值范围为$(-\infty,0)$. ……………………………… 17 分

【备注】第(2)问是一个开放题,举例的函数不唯一,阅卷时请结合具体情况斟酌给分.