2023届宁德市普通高中毕业班五月份质量检测

数 学 试 题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若集合 $M=\left\{x\middle|-3<x\leq 1\right\}$， $N=\{x\in \mathbf{Z}\mid x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{x\mid -2<x\leq 1\}$　　B．$\{-2,-1,0,1\}$　　C．$\{x\mid -3<x<2\}$　　D．$\{-1,0,1\}$

2．某学校利用实践基地开展劳动教育活动，在其中一块土地上栽种某种蔬菜，并指定一位同学观测其中一棵幼苗生长情况，该同学获得前6天的数据如下：

第 x 天	1	2	3	4	5	6
高度 y (cm)	1	4	7	9	11	13

经这位同学的研究，发现第 x 天幼苗的高度 y（cm）的经验回归方程为 $\hat{y}=2.4x+\hat{a}$，据此预测第10天这棵幼苗的高度大约为

A．19cm　　B．21cm　　C．23cm　　D．25cm

3．使 $x>y$ 成立的一个充分不必要条件是

A．$x^{\frac{1}{3}}>y^{\frac{1}{3}}$　　B．$x-y+\dfrac{1}{x-y}>2$

C．$\ln x^2>2\ln y$　　D．$a^{x-y}>1\left(a>0,且a\neq 1\right)$

4．已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F，P 为抛物线上一个动点，$A(-1,3)$，则 $|PA|+|PF|$ 的最小值为

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

5．在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 为圆 $O:x^2+y^2=1$ 上的任一点，$A\left(2,0\right)$，$B\left(-1,1\right)$．若 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $2\lambda+\mu$ 的最大值为

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{6}$

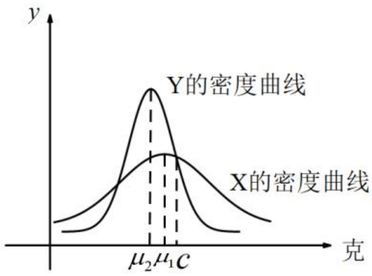
6．某地生产红茶已有多年，选用本地两个不同品种的茶青生产红茶．根据其种植经验，在正常环境下，甲、乙两个品种的茶青每500克的红茶产量（单位：克）分别为X，Y，且$X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$，$Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$，其密度曲线如图所示，则以下结论错误的是

A．Y的数据较X更集中

B．$P\left(X \le c\right) < P\left(Y \le c\right)$

C．甲种茶青每500克的红茶产量超过μ_2的概率大于$\frac{1}{2}$

D．$P\left(X > c\right) + P\left(Y \le c\right) = 1$

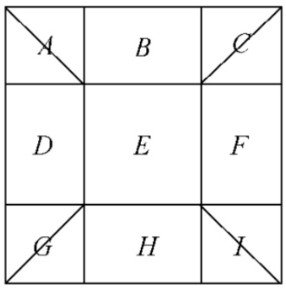


7．已知$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$，$a = \sin^3\alpha - \sin^3\beta$，$b = 3(\ln\sin\alpha - \ln\sin\beta)$，$c = 3(\sin\alpha - \sin\beta)$，则

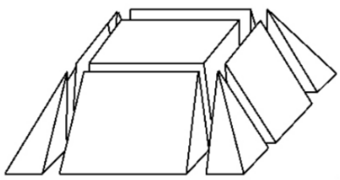
A．$b < c < a$　　B．$c < b < a$　　C．$c < a < b$　　D．$a < b < c$

8．中国古代数学家很早就对空间几何体进行了系统的研究，中国传世数学著作《九章算术》卷五"商功"主要讲述了以立体问题为主的各种形体体积的计算公式．例如在推导正四棱台（古人称方台）体积公式时，将正四棱台切割成九部分进行求解．下图（1）为俯视图，图（2）为立体切面图．E对应的是正四棱台中间位置的长方体；B、D、H、F对应四个三棱柱，A、C、I、G对应四个四棱锥．若这四个三棱柱的体积之和为12，四个四棱锥的体积之和为4，则该正四棱台的体积为

A．24　　B．28　　C．32　　D．36



图（1）



图（2）

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．

9．若$(x-1)^6 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 + \cdots + a_6(x+1)^6$，则

A．$a_0 = 64$　　B．$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = 365$

C．$a_5 = 12$　　D．$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 = -6$

10．某工厂有甲、乙两个车间生产同一种产品，其产量比为$2:3$．从两个车间中各随机抽取了10个样品进行测量，其数据（单位：mm）如下：

甲车间：9.4　10.1　9.8　10.2　10.0　10.1　10.2　9.6　10.3　9.8

乙车间：10.3　9.2　9.6　10.0　10.3　9.8　10.4　9.4　10.2　10.3

规定数据在$(9.5,10.5)$之内的产品为合格品．若将频率作为概率，则以下结论正确的是

A．甲车间样本数据的第 40 百分位数为9.8

B．从样本数据看，甲车间的极差小于乙车间的极差

C．从两个车间生产的产品任取一件，取到合格品的概率为0.84

D．从两个车间生产的产品任取一件，若取到不合格品，则该产品出自甲车间的概率为0.4

11．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{2}$，P，Q，M分别为BC，CC_1，BB_1的中点，则以下结论正确的是

A．直线A_1M与平面APQ平行

B．直线DD_1与直线AQ垂直

C．平面APQ截正方体所得的截面面积为$\dfrac{9}{4}$

D．四面体A_1D_1PQ的体积为$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

12．已知函数$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称．当$x\geq 1$时，$f(x)=(\ln x-ax+1)\cdot(x-\mathrm{e})$，则以下结论正确的是

A．当$x<1$时，$f(x)=-(x+\mathrm{e}-2)[\ln(2-x)+ax-2a+1]$

B．若$a=1$，则$f(x)>0$的解集为$(2-\mathrm{e},\mathrm{e})$

C．若$f(x)$恰有四个零点，则a的取值范围是$(0,1)$

D．若对$x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leq 0$，则$a=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知复数z满足$|z|-z=1-3\mathrm{i}$，则$|z|=$__________．

14．已知函数$f(x)$满足如下条件：①定义域为$\mathbf{R}$；②存在$x_0\in\mathbf{R}$，使得$f(x_0)=f'(x_0)=0$；③$f(x)\leq 0$，试写出一个符合上述要求的函数$f(x)=$__________．

15．已知函数$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A>0,|\varphi|\leq\dfrac{\pi}{2},\ \omega>0\right)$，射线$y=-2(x\geq 0)$与该函数图象的交点的横坐标从左至右依次构成数列$\{x_n\}$，且$x_n=4n-\dfrac{7}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$f(5)=$__________．

16．已知椭圆C的一个焦点为F，短轴B_1B_2的长为$2\sqrt{3}$，P，Q为C上异于B_1，B_2的两点．设$\angle PB_1B_2=\alpha$，$\angle PB_2B_1=\beta$，且$\tan(\alpha+\beta)=-3(\tan\alpha+\tan\beta)$，则$\Delta PQF$的周长的最大值为__________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+n^2$，$a_1+b_1=3$，$a_2+b_2=8$，且数列$\{a_n\}$是等差数列．

（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

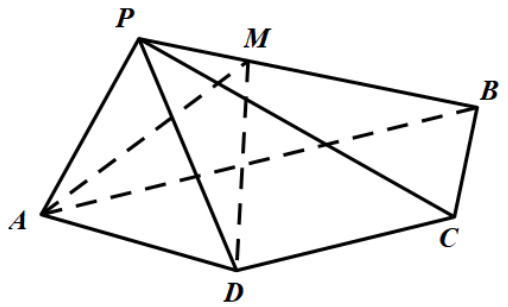
（2）记数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，求证：$\dfrac{1}{2}\le S_n<1$．

18．（12 分）

在四棱锥$P-ABCD$中，$AB//CD$，$\angle BCD=90^\circ$，$BC=CD=PA=PD=1$，$AB=2$，$PB=\sqrt{3}$．

（1）证明：平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

（2）在线段PB上是否存在点M，使得二面角$P-AD-M$的大小为45°？若存在，求$\dfrac{PM}{PB}$的值；若不存在，说明理由．



19．（12 分）

记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c．已知$B=\dfrac{\pi}{3}$，$b=7$，$a>c$，且其内切圆O的面积为3π．

（1）求a和c；

（2）连接AO交BC于点D，求AD的长．

20．（12 分）

人工智能(AI)是一门极富挑战性的科学，自诞生以来，理论和技术日益成熟．某校成立了 A， B 两个研究性小组，分别设计和开发不同的 AI 软件用于识别音乐的类别．记两个研究性小组的 AI 软件每次能正确识别音乐类别的概率分别为 P_1， P_2．

为测试 AI 软件的识别能力，计划采取两种测试方案．

方案一：将 100 首音乐随机分配给 A， B 两个小组识别，每首音乐只被一个 AI 软件识别一次，并记录结果；

方案二：对同一首歌， A， B 两组分别识别两次，如果识别的正确次数之和不少于三次，则称该次测试通过．

（1）若方案一的测试结果如下：正确识别的音乐数之和占总数的 $\frac{3}{5}$；在正确识别的音乐数中， A 组占 $\frac{2}{3}$；在错误识别的音乐数中， B 组占 $\frac{1}{2}$．

（i）请根据以上数据填写下面的 2×2 列联表，并通过独立性检验分析，是否有95%的把握认为识别音乐是否正确与两种软件类型有关？

	正确识别	错误识别	合计
A 组软件			
B 组软件			
合计			100

（ii）利用（i）中的数据，视频率为概率，求方案二在一次测试中获得通过的概率；

（2）研究性小组为了验证 AI 软件的有效性，需多次执行方案二，假设 $P_1+P_2=\frac{4}{3}$，问该测试至少要进行多少次，才能使通过次数的期望值为 16？并求此时 P_1， P_2 的值．

附： $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

$P(\chi^2\geq x_0)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
x_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

21．（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1\left(-\sqrt{5},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{5},0\right)$，点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=4$，记点 M 的轨迹为 E .

（1）求 E 的方程；

（2）点 $A(2,0)$，点 B，C 为 E 上的两个动点，且满足 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$. 过 A 作直线 $AQ\perp BC$ 交 E 于点 Q . 若 $\angle BQC=\dfrac{\pi}{2}$，求直线 BC 的斜率.

22．（12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a\sin x}{e^x}$， $x\in\left(0,\pi\right)$.

（1）若 $f\left(x\right)\le 1$，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $a=4$，且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$， $x_1<x_2$，求证： $x_1+x_2>\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\dfrac{\pi-x_2}{e^{\pi-x_2}}<\sin x_2$.