# 福宁古五校教学联合体 2024-2025 学年第一学期期中质量监测

# 高三数学参考答案

一、单选题

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | C | D | C | C | D | B | D |

8．解：$\because f\left(x\right)\geq 1$，$\therefore e^{2x+\ln x}-(2x+\ln x)+x-|a|x\geq 1$，即

$|a|-1\leq \dfrac{e^{2x+\ln x}-(2x+\ln x)-1}{x}$，易知$e^x\geq x+1$，$\therefore e^{2x+\ln x}-(2x+\ln x)-1\geq 0$，又

$\because x>0$，$\therefore \dfrac{e^{2x+\ln x}-(2x+\ln x)-1}{x}\geq 0$，当且仅当$2x+\ln x=0$时，等号成立.

$\therefore (\dfrac{e^{2x+\ln x}-(2x+\ln x)-1}{x})_{\min}=0$，$\therefore |a|-1=0$，$\therefore -1\leq a\leq 1$.故选 D.

二、多选题

| 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|
| ACD | ABD | BD |

11．解：令$x=0$，$y=1$，则$f(1)-f(0)\cdot f(1)=0$，又$f(1)\neq 0$，$\therefore f(0)=1$，故 A 错误；

令$x=1$，$y=-1$，则$f(0)-f(1)\cdot f(-1)=1$，$\therefore f(1)\cdot f(-1)=0$，又$f(1)\neq 0$，

$\therefore f(-1)=0$，再令$y=-1$，$f(x-1)-f(x)\cdot f(-1)=x$，$\therefore f(x-1)=x$，

$\therefore f(x)=x+1$，$\therefore f(x)$的图象关于$(-1,0)$中心对称，故 B 正确；

由 B 得$f(x)=x+1$，当$x=0$时，$e^x=x+1$，故 C 错误；

由 B 得$f(x)=x+1$，$y=-xf(x)=-x^2-x$，在$x=-\dfrac{1}{2}$时取到最大值，故 D 正确.

三、填空题

12. 1;　　13. $4+2\sqrt{3}$；　14. $(1,\dfrac{e}{2})$

14．解：设$g\left(x\right)=t$，则$f\left(t\right)=a$，

$g'(x)=\mathrm{e}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，得 $x=\mathrm{e}$，

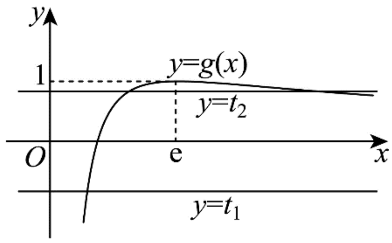


图1

当 $x\in(0,\mathrm{e})$， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，

当 $x=\mathrm{e}$ 时，函数 $g(x)$ 取得最大值 1，

如图 1，画出函数 $t=g(x)$ 的图象，

由 $f(t)=a$，即 $\mathrm{e}^t-at=a$，则 $\mathrm{e}^t=a(t+1)$， $y=a(t+1)$ 恒过点 $(-1,0)$，

如图，画出函数 $y=\mathrm{e}^t$ 的图象，设过点 $(-1,0)$ 的切线与 $y=\mathrm{e}^t$ 相切于点 $(t_0,\mathrm{e}^{t_0})$，

则 $\dfrac{\mathrm{e}^{t_0}}{t_0+1}=\mathrm{e}^{t_0}$，得 $t_0=0$，即切点(0,1)，所以切线方程为 $y=x+1$，如图 2，

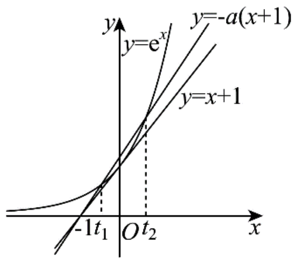


图2

则 $y=a(t+1)$ 与 $y=\mathrm{e}^t$ 有 2 个交点， $a>1$，

如图可知，若函数 $y=f(g(x))+a$ 恰有三个零点，则 $-1<t_1<0$，

$0<t_2<1$，

则 $\mathrm{e}^1>a(1+1)$，所以 $a<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，

综上可知，$1<a<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

故答案为： $(1,\dfrac{\mathrm{e}}{2})$

四、解答题

15.（1）因为函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}+a$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

由 $f(0)=0$， $\therefore a=-\dfrac{1}{2}$，………3 分

此时 $f(x)=\dfrac{1-e^x}{2(e^x+1)}$，显然为奇函数………4 分

所以 $a=-\dfrac{1}{2}$……….5 分

（2）由（1）得：$g(x)=2(e^x+1)f(x)+2x=2x-e^x+1$，$g(x)$ 定义域为 R, ………6 分

$\therefore g'(x)=2-e^x$，………7 分

由 $g'(x)>0$ 得 $x<\ln 2$；由 $g'(x)<0$ 得 $x>\ln 2$，

$\therefore g\left(x\right)$在$\left(-\infty,\ln 2\right)$上单调递增，$g\left(x\right)$在$\left(\ln 2,+\infty\right)$上单调递减，………10 分

所以$g\left(x\right)$在$x=\ln 2$处取得极大值，

$f\left(x\right)_{极大值}=f\left(\ln 2\right)=2\ln 2-1$；无极小值………13 分

（不写无极小值扣 1 分）

16. （1）因为$\tan A+\tan B=\dfrac{2\sqrt{3}c^2}{a^2+c^2-b^2}$，由余弦定理得

$\tan A+\tan B=\dfrac{2\sqrt{3}c^2}{2ac\cos B}=\dfrac{\sqrt{3}c}{a\cos B}=\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}$，………2 分

由正弦定理得

$\tan A+\tan B=\dfrac{\sin C}{\sin A\cos B}=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin A\cos B+\sin B\cos A}{\cos A\cos B}=\dfrac{\sin\left(A+B\right)}{\cos A\cos B}=\dfrac{\sin C}{\cos A\cos B}$，

………4 分

又$\triangle ABC$是锐角三角形，所以$\sin C>0,\cos B>0$，

所以$\sin A=\sqrt{3}\cos A$，所以$\tan A=\sqrt{3}$，

又$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$． ………6 分

（2）由余弦定理可得$a^2=c^2+b^2-2cb\cos A=c^2+b^2-cb=3$，………7 分

又$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，所以

$\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{4}\left(c^2+b^2+bc\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(3+2bc\right)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}bc$，………9 分

由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$，所以$b=2\sin B$，

$c=2\sin C=2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B)$，………11 分

所以

$bc=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos B+\dfrac{1}{2}\sin^2 B\right)=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2B+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\cos 2B}{2}\right)=2\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$，…12 分

由题意得$\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2},\\0<\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$解得$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，则$2B-\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，………13 分

所以$\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，所以$bc\in(2,3]$，………14 分

所以$\overrightarrow{AD}^2\in\left(\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right]$，所以线段$AD$长的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{3}{2}\right]$………15 分

17. （1）解法一：连接$AM$ 交$BN$与点O，则$\angle MAC=\angle MCA$，

$\tan\angle MCA=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\tan\angle ABN=\frac{AN}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$\angle ABN=\angle MCA=\angle MAC$，………2 分

从而$\angle MAB+\angle ABN=\angle MAB+\angle MAC=90^\circ$，从而$AM\perp BN$，………4 分

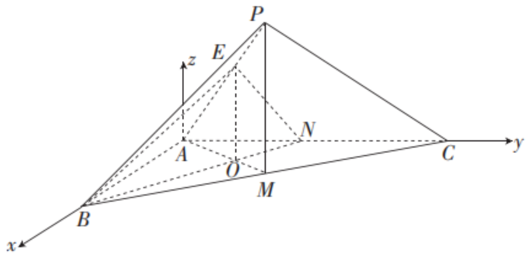
$\because PM\perp$底面$ABC$， $BN\subset$底面$ABC$，$\therefore PM\perp BN$，………5 分

又$AM\cap PM=M$，故$BN\perp$平面$APM$ ………6 分

（1） 解法二：连接$AM$，由$M$,$N$分别为$BC$,$AC$的中点，所以

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，………2 分




又因为$AB\perp AC$， $AB=1$， $AC=\sqrt{2}$，所以

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=0$，故$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BN}$，从而$AM\perp BN$， ………4 分

$\because PM\perp$底面$ABC$， $BN\subset$底面$ABC$，$\therefore PM\perp BN$， ………5 分

又$AM\cap PM=M$，故$BN\perp$平面$APM$ ………6 分

(2)因为AB⊥AC，故以点$_A$为坐标原点， AB，AC所在直线分别为x, y轴，过点$_A$作垂直于平面ABC的直线为$_z$轴建立如图所示的空间直角坐标系，………7 分

则$A(0,0,0)$, $C(0,\sqrt{2},0)$, $B(1,0,0)$, $P(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$, $N(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0)$,………8 分

则$\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{2},0)$, $\overrightarrow{BN}=(-1,\frac{\sqrt{2}}{2},0)$, $\overrightarrow{AP}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$,………9 分

因为平面$EBN\perp$底面$ABC$，易得平面$EBN$的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{2},0)$，设平面$PAC$的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，可得$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\\ \sqrt{2}y=0\end{cases}$，令$x=1$可得$\overrightarrow{n_2}=(1,0,-1)$，………12 分

设二面角$A-EN-B$为$\theta$，则$\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>|=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

………14 分

故二面角$A-EN-B$的正弦值为$\frac{\sqrt{30}}{6}$.………15 分

18.(1)当$a=1$时，$f(x)=\frac{x-2}{e^x}-(3x-1)$，则$f'(x)=\frac{3-x}{e^x}-3$，………1 分

令$f'(x)>0$，解得$x<0$，令$f'(x)<0$，解得$x>0$，………3 分

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递增，$(0,+\infty)$单调递减；………4 分

(2)$\because$函数$f\left(x\right)$的图象是连续的，且在定义域上是单调函数，

$\therefore f'(x)=\frac{3-x}{e^x}-3a\geq 0$在定义域内恒成立，或$f'(x)=\frac{3-x}{e^x}-3a\leq 0$，在定义域内恒成立. ………5 分

$f''(x)=\frac{x-4}{e^x}$在$\left(-\infty,4\right)$为负，$\left(4,+\infty\right)$为正，

所以$f'(x)=\frac{3-x}{e^x}-3a$在$\left(-\infty,4\right)$单调递减，$\left(4,+\infty\right)$单调递增，………7 分

① 若$f'(x)=\frac{3-x}{e^x}-3a\geq 0$在定义域内恒成立，

只需$f'(x)_{\min}=f'(4)=-\frac{1}{e^4}-3a\geq 0$，即$a\leq-\frac{1}{3e^4}$ ………8 分

② 若$f'(x)=\frac{3-x}{e^x}-3a\leq 0$在定义域内恒成立，

$\because x\to-\infty$时，$f'(x)\to+\infty$，故该情况$a$无解.

………9 分

综上：$a\leq-\frac{1}{3e^4}$.………10 分

(3)若$f(x)\leq 0$恒成立，则$\frac{x-2}{e^x}-a\left(3x-1\right)-b-1\leq 0$，当$x=2$时，$-5a-b-1\leq 0$，即$5a+b\geq-1$，………11 分

下证$5a+b=-1$成立，由$5a+1=-b$得，$\dfrac{x-2}{e^x}-a\left(3x-1\right)+5a\le 0$恒成立，

即$\dfrac{x-2}{e^x}-a\left(3x-6\right)\le 0$，………12 分

记$F(x)=\dfrac{x-2}{e^x}-a\left(3x-6\right)$ $\Rightarrow F(2)=0$，故$F'(2)=0$，

而$F'(x)=\dfrac{3-x}{e^x}-3a$，则$\dfrac{1}{e^2}-3a=0$，解得$a=\dfrac{1}{3e^2}$，………14 分

只需证$F(x)=\dfrac{x-2}{e^x}-\dfrac{1}{3e^2}\left(3x-6\right)\le 0$恒成立，

$F'(x)=\dfrac{3-x}{e^x}-\dfrac{1}{e^2}$，由（2）得$F'(x)$在$(-\infty,4)$上单调递减，在$(4,+\infty)$上单调递增，

又$F'(2)=0$，$\therefore F'(x)$在$(-\infty,2)$上为正，在$(2,4)$上为负，在$(4,+\infty)$上为负，

$\therefore F(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减，$\therefore F(x)_{\max}=F(2)=0$，

即$F(x)\le 0$恒成立，………16 分

$\therefore 5a+b$最小值为$-1$. ………17 分

19.解：（1）$\because f(x)$图象的相邻的两条对称轴间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)$的最小正周期为$T=2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$ $\because \omega>0, \therefore \omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，………1 分

$\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)$又$\because f(x)$的图象过点$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore f(0)=\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because \left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}, \therefore \varphi=\dfrac{\pi}{3}$，$f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ ………2 分

因为函数$y=f(x+m)=\sin(2x+2m+\dfrac{\pi}{3})$是偶函数

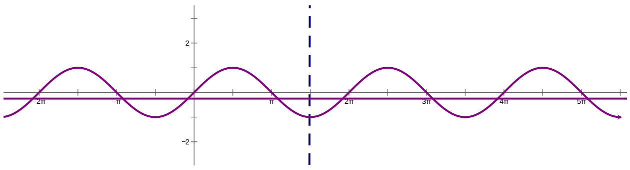
$\therefore 2m+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，$\therefore m=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$ ………3 分

$\therefore$ |m|的最小值$\dfrac{\pi}{12}$……….4 分

（2）由$g(x)=4f(x)+1=4\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1=0$可得$\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{1}{4}$ ………5 分

$\because x\in\left[-\dfrac{17\pi}{12},\dfrac{31\pi}{12}\right]$，$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{11\pi}{2}\right]$………6 分

设$2x_i+\dfrac{\pi}{3}=t_i$，由$y=\sin t$与$y=-\dfrac{1}{4}$图象可知在$\left[-\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{11\pi}{2}\right]$共有 8 个交点………7 分



$t_1+t_8=t_2+t_7=t_3+t_6=t_4+t_5=3\pi$ ………8 分

$\therefore 2x_1+\dfrac{\pi}{3}+2x_8+\dfrac{\pi}{3}=3\pi, \therefore x_1+x_8=\dfrac{7\pi}{6}$，同理 $2x_2+2x_3+2x_4+2x_5+2x_6+2x_7=7\pi$，………9 分

$\therefore x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5+2x_6+2x_7+x_8=\dfrac{49\pi}{6}$ ……….10 分

（3）$\because f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，$\therefore h(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x f(\lambda x-\dfrac{\pi}{6})=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \sin(2\lambda x)$ ………11 分

假设存在非零实数 $\lambda$，使得函数 $h(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \sin 2\lambda x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的周期为 $T$ 的 $T$ 级周期函数，

即 $\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $h(x+T)=T\cdot h(x)$，

则 $\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+T}\sin(2\lambda x+2\lambda T)=T\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \sin 2\lambda x$ 成立，

则 $\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $\sin(2\lambda x+2\lambda T)=T\cdot 2^T\sin 2\lambda x$ 成立，………13 分

当 $\lambda\neq 0$ 时，$\forall x\in\mathbf{R}$，则 $2\lambda x\in\mathbf{R}$，$2\lambda x+2\lambda T\in\mathbf{R}$，

所以，$-1\le\sin 2\lambda x\le 1$，$-1\le\sin(2\lambda x+2\lambda T)\le 1$，

要使得 $\sin(2\lambda x+2\lambda T)=T\cdot 2^T\sin 2\lambda x$ 恒成立，则有 $T\cdot 2^T=\pm 1$……….14 分

当 $T\cdot 2^T=1$ 时，则 $T>0$，即 $2^T=\dfrac{1}{T}$，令 $p(x)=2^x-\dfrac{1}{x}$，其中 $x>0$，

则 $p\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$，$p(1)=2-1=1>0$，

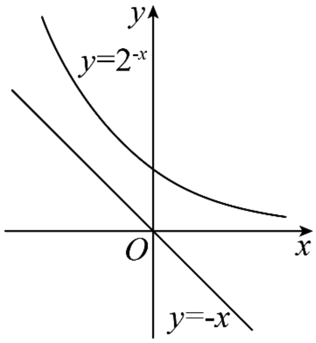
且函数 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象是连续的，

由零点存在定理可知，函数 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点，

此时，$\sin\left(2\lambda x+2\lambda T\right)=\sin 2\lambda x$ 恒成立，则 $2\lambda T=2m\pi\left(m\in\mathbf{Z}\right)$，即

$\lambda=\dfrac{m\pi}{T}\left(m\in\mathbf{Z}\right)$；………15 分

当 $T\cdot 2^{T}=-1$ 时，则 $T<0$，即 $-T=2^{-T}$，作出函数 $y=-x$、$y=2^{-x}$ 的图象如下图所示：




由图可知，函数 $y=-x$、$y=2^{-x}$ 的图象没有公共点，

故方程 $T\cdot 2^{T}=-1$ 无实数解. ………16 分

综上所述，存在 $\lambda=\dfrac{m\pi}{T}\left(m\in\mathbf{Z}\right)$ 满足题意，其中 $T$ 满足 $T\cdot 2^{T}=1$……….17 分