宁德市 2024-2025 学年度第一学期期末高一质量检测

数学试题参考答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，有且只有一个是符合题目要求的．

1-5. DABDB　6-8 CDB

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得部分分，有选错得 0 分.

9.ACD　　10.ACD　　11.AB

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．把答案填在答题卡的相应位置

12．$\frac{3\pi}{8}$　　13．-1　　14．$(2,\frac{1}{2})$

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．解：

（1）$A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}<0\right.\right\}=\{x|-1<x<2\}$ ……………………………………3 分

当 $a=3$ 时，

$B=\{x|(x+1)(x-3)<0\}=\{x|-1<x<3\}$ ……………………………………5 分

所以 $A\cap B=\{x|-1<x<2\}$ ……………………………………8 分

（2）若 $a>0$ 时，

$B=\{x|-1<x<a\}$ ……………………………………10 分

又 $B\subseteq A$．

所以 $a\le 2$ ……………………………………12 分

所以 a 的取值范围为 $(0,2]$ ……………………………………13 分

16．解：

（1）最符合实际的函数模型为① $y=m\log_2 x+n$，……………………………………2 分

根据表格知函数解析式需满足在 $[1,+\infty)$ 上有定义，所以② $y=m\sqrt{x-2}+n$ 不满足，…4 分

又随着月份的增加，会员人数增加速度又会减慢，所以③ $y=2^{x-m}+n$ 不符合，………6 分

只有① $y=m\log_2 x+n$ 同时满足上述两个特征，故 $y=m\log_2 x+n$ 最符合………………7 分

（2）可选取表格中的两组数据为：$(1,2)$，$(2,5)$

代入 $y=m\log_2 x+n$ 得 $\begin{cases}2=m\log_2 1+n\\5=m\log_2 2+n\end{cases}$ ……………………………………9分

解得 $\begin{cases}m=3\\n=2\end{cases}$，　即 $y=3\log_2 x+2$，……………………………………12 分

当 $y=14$ 时，$3\log_2 x+2=14$，解得，$x=16$，……………………………………14 分

所以，可预测第 16 个月，会员人数达到 14 万人……………………………………15 分

17. 解法一：(1) 当 $x_1=\frac{1}{3}$ 时，因为 α 为锐角

则 $\cos\alpha=\frac{1}{3},\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$， 即 $A(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$ ……………………………………………1 分

又 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ ……………………………………………2 分

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha=\frac{1}{3}$ ……………………………………………3 分

$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha=\frac{1}{3}$ ……………………………………………

…………4 分

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ……………………………………………5 分

所以 $\frac{\cos(\pi-\alpha)\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)\sin(-\alpha)}=\frac{-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\times(-\frac{2\sqrt{2}}{3})}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ……………………………………………6 分

(2) 因为 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$

所以 $B(-\sin\alpha,\cos\alpha)$ ……………………………………………7 分

则 $C(-\sin\alpha,-\cos\alpha)$ ……………………………………………8 分

所以 $|x_1-x_3|=|\cos\alpha+\sin\alpha|$，$|y_1-y_3|=|\sin\alpha+\cos\alpha|$

又 α 为锐角

所以 $|x_1-x_3|+|y_1-y_3|=2(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

即 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………………9 分

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{9}{5}$ ……………………………………………10 分

则 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{9}{5}$

即 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{9}{5}$.

$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$ ……………………………………………11 分

则 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2}{5}$ ……………………………………………12 分

所以 $\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2}{5}$ ……………………………………………13 分

即 $2\tan^2\alpha-5\tan\alpha+2=0$

解得 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………15 分

解法二：（1）同解法一

（2）因为 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$

所以 $B(-\sin\alpha,\cos\alpha)$ ……………………………………………………………… 7 分

则 $C(-\sin\alpha,-\cos\alpha)$ ……………………………………………………………8 分

所以 $|x_1-x_3|=|\cos\alpha+\sin\alpha|$，$|y_1-y_3|=|\sin\alpha+\cos\alpha|$

又 α 为锐角

所以 $|x_1-x_3|+|y_1-y_3|=2(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

即 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………………………9 分

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$$ ……………………………………………………10 分

联立解得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………12 分

当 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan\alpha=2$ ……………………………………………………………………………13 分

当 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………………14 分

所以 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………15 分

18. 解法一：

（1）因为 $f(x)$ 的定义域为 R

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数；……………………………………………………………3 分

（2） 任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，……………………………………………4 分

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{x_1(x_2^2+1)-x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$ ……………………………5 分

$=\frac{x_1x_2^2-x_2x_1^2+x_1-x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$ ……………………………………7 分

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0, x_1^2+1>0, x_2^2+1>0$

当 $x_1,x_2\in(0,1)$ 时 $x_1x_2-1<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$

此时，$y=f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是增函数；……………………………………………8 分

当 $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ 时 $x_1x_2-1>0$ ，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$

此时， $y=f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是减函数。……………………………………………………9 分

综上：函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是增函数，在区间 $[1,+\infty)$ 上是减函数。…………10 分

（3）因为 $\forall x_1 \in (1,a), \exists x_2 \in (-1,-\frac{2}{5})$ ，所以 $a>1$ ，

$\frac{1}{a^2+1}<\frac{1}{x_1^2+1}<\frac{1}{2}$ ，……………………………………………………………11 分

$-1<\frac{x_2}{x_1}<-\frac{2}{5a}$ ……………………………………………………………………12 分

由（2）知，函数 $f(x)$ 为奇函数，在区间 $(-1,1)$ 上是增函数，在区间 $[1,+\infty)$ 上是减函数

又 $f(\frac{x_2}{x_1})+f(\frac{1}{x_1^2+1})=0$ ，

所以 $\left(\frac{1}{a^2+1},\frac{1}{2}\right)\subseteq(\frac{2}{5a},1)$ ，……………………………………………………14 分

所以， $\frac{1}{a^2+1}>\frac{2}{5a}$ ，整理得 $2a^2-5a+2<0$ ，解得 $\frac{1}{2}<a<2$ ……………………………16 分

综上： $1<a<2$ ………………………………………………………………………………17 分

解法二：（1）（2）同解法一

（3）因为 $x_1 \in (1,a), x_2 \in (-1,-\frac{2}{5})$ ，所以 $a>1$ ，

且 $-1<\frac{x_2}{x_1}<\frac{1}{x_1^2+1}<1$ ，…………………………………………………………11 分

由（2）知，函数 $f(x)$ 为奇函数，在区间 $(-1,1)$ 上是增函数，在区间 $[1,+\infty)$ 上是减函数

又 $f(\frac{x_2}{x_1})+f(\frac{1}{x_1^2+1})=0$ ，所以， $\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{x_1^2+1}=0$ ……………………………12 分

整理， $-x_2=\frac{x_1}{x_1^2+1}$ ，

所以 $\frac{x_1}{x_1^2+1}\in\left(\frac{a}{a^2+1},\frac{1}{2}\right)$ ， $-x_2\in(\frac{2}{5},1)$ ……………………………………………14 分

所以， $\frac{a}{a^2+1}>\frac{2}{5}$ ，整理得 $2a^2-5a+2<0$ ，解得 $\frac{1}{2}<a<2$ …………………………16 分

综上： $1<a<2$ ……………………………………………………………………………17 分

19.解：

（1） $f(x)=x^2$ 是凸函数……………………………………………………………………1 分

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$$

$$=\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_2^2-(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)^2$$

理由如下： $=\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_2^2-\lambda^2x_1^2-2\lambda(1-\lambda)x_1x_2-(1-\lambda)^2x_2^2$

$$=\lambda(1-\lambda)(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)$$

$$=\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2$$

由于 $\lambda\in[0,1]$，所以 $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le 0$，即 $f(x)=x^2$ 是凸函数.………4 分

（2）任取 $x_1,x_2\in[-b,-a]$，所以 $-x_1,-x_2\in[a,b]$，因为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的凸函数，所以 $g(-\lambda x_1-(1-\lambda)x_2)\le\lambda g(-x_1)+(1-\lambda)g(-x_2)$，……………………………………6 分

又因为 $g(x)$ 是偶函数，所以 $g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)$，所以 $g(x)$ 在 $[-b,-a]$ 上也是凸函数……………………………………………………………………………………………8 分

（3）因为 $\lambda_i\in[0,1]$，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，

由对称性不妨设当 $\lambda_1=1$ 时，则 $\lambda_2=\lambda_3=0$，

此时 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)$ 显然成立，……………………10 分

当 $\lambda_1\ne1$ 时，因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是凸函数，

所以 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)=f\left(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)\frac{\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{1-\lambda_1}\right)\le\lambda_1f(x_1)+(1-\lambda_1)f\left(\frac{\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{1-\lambda_1}\right)$

………13 分

而 $f\left(\frac{\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{1-\lambda_1}\right)=f\left(\frac{\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right)$，再次根据凸函数的定义，

则 $f\left(\frac{\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right)=f\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}x_2+\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}x_2\right)\le\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}f(x_2)+\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}f(x_3)$ ……………15 分

所以

$$\lambda_1f(x_1)+(1-\lambda_1)f\left(\frac{\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{1-\lambda_1}\right)$$

$$=\lambda_1f(x_1)+(\lambda_2+\lambda_3)f\left(\frac{\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right)\le\lambda_1f(x_1)+(\lambda_2+\lambda_3)\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}f(x_2)+\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}f(x_3)\right]$$

$$=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)$$

………17 分