绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2023-2024学年福州市高三年级第三质量检测评分参考

数　　学　　2024.4

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	B	B	C	A	D

1．已知复数 z 满足 $(z+1)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$（i是虚数单位），则 $z=$

A． -1　　B． 1　　C． $-\mathrm{i}$　　D． i

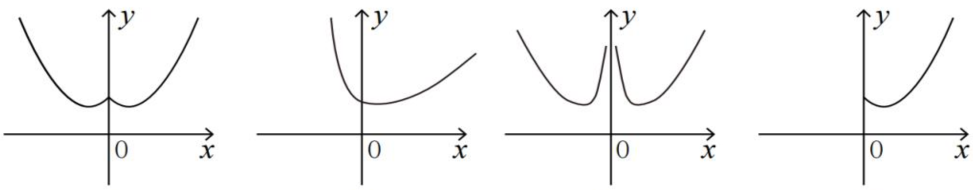
解析：$\because z\mathrm{i}+\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，$\therefore z\mathrm{i}=1$，即 $z=-\mathrm{i}$，故选C.

2．已知角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴非负半轴重合，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$P(m,2)$ 为其终边上一点，则 $m=$

A． -4　　B． 4　　C． -1　　D． 1

解析：$\because \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \tan\alpha=\dfrac{2}{m}=2$，$\therefore m=1$，故选D.

3．函数 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

解析：结合该函数为偶函数，及 $f\left(0\right)=3$ 可判断应选A.

4．在菱形 $ABCD$ 中，若 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$，且 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\lambda\overrightarrow{AB}$，则 $\lambda=$

A． $-\dfrac{1}{2}$　　B． $\dfrac{1}{2}$　　C． $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D． $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：由已知 $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 知该菱形中 $AB=AD=BD$，

$\therefore$由 D 向 AB 作垂线，垂足即为 AB 中点，$\therefore \lambda=\dfrac{1}{2}$，故选B　．

5．已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_2 a$，$c=(\dfrac{1}{2})^b$，则

A. $c>b>a$　　B. $c>a>b$　　C. $a>b>c$　　D. $b>c>a$

解析：$\because a=\log_5 2<\log_5 5=1$，$\therefore b=\log_2 a<0$，$c=(\frac{1}{2})^b>1$，$\therefore c>a>b$，故选 B.

6．棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 为 BD_1 上的动点，O 为底面 $ABCD$ 的中心，则 OP 的最小值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：在正方体中，易知 $AC\perp BD$，$AC\perp DD_1$，且 $BD\cap DD_1=D$，$\therefore AC\perp$ 平面 BDD_1，

易知当 $OP\subset$ 平面 BDD_1，且 $OP\perp BD_1$ 时，OP 的长度最小，

在 RT$\triangle BDD_1$ 中,不难求得 $OP=\frac{\sqrt{6}}{6}$，故选 C.

7．若直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切，则 $a+b$ 的取值范围为

A．$(-\infty,\mathrm{e}]$　　B．$[2,\mathrm{e}]$　　C．$[\mathrm{e},+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

解析：设切点为 (x_0,e^{x_0})，则 $a=\mathrm{e}^{x_0}$，

$\therefore$ 切线方程为 $y=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)+\mathrm{e}^{x_0}$，则 $b=(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}$，$\therefore a+b=(2-x_0)\mathrm{e}^{x_0}$，

设 $f(x)=(2-x_0)\mathrm{e}^{x_0}$，则 $f'(x)=(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}$，

易知函数 $f(x)\le f(1)=\mathrm{e}$，又 $f(2)=0<2$，故可判断选 A .

（由图象知当且仅当切线与曲线相切于 $(1,\mathrm{e})$ 时，$a+b=a\times 1+b=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$ 最大，亦可知选 A .）

8．已知函数 $f(x)=2\sin\omega x(\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x)$ $(\omega>0)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调递增，且对任意的实数 a，$f(x)$ 在 $(a,a+\pi)$ 上不单调，则 ω 的取值范围为

A．$(1,\frac{5}{2}]$　　B．$(1,\frac{5}{4}]$　　C．$(\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$　　D．$(\frac{1}{2},\frac{5}{4}]$

解析：$\because f(x)=2\sin\omega x(\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x)=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}$，

$\because f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调递增，$\therefore 2\omega\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore \omega\le\frac{5}{4}$，

$\because$ 对任意的实数 a，$f(x)$ 在区间 $(a,a+\pi)$ 上不单调，$\therefore f(x)$ 的周期 $T<2\pi$，

$\therefore T=\frac{2\pi}{2\omega}<2\pi$，$\therefore \omega>\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{2}<\omega\le\frac{5}{4}$，故选 D.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

题号	9	10	11
答案	ABD	ACD	BC

9．双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1\ (a>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，且$C$的两条渐近线的夹角为$\theta$，若$|F_1F_2|=2e$（$e$为$C$的离心率），则

A．$a=1$　　B．$\theta=\dfrac{\pi}{3}$　　C．$e=\sqrt{2}$　　D．C的一条渐近线的斜率为$\sqrt{3}$

解析：易知该双曲线实半轴为a，虚半轴为$\sqrt{3}a$，半焦距为$2a$，

$\therefore$离心率$e=\dfrac{2a}{a}=2$，$\therefore$焦距$4a=4$，即$a=1$，$\therefore$选项 A 正确，选项 C 错误；

易知C的两条渐近线的斜率为$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}a}{a}=\pm\sqrt{3}$，$\therefore$这两条渐近线的倾斜角分别为$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore C$的两条渐近线的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore$选项 B，D 正确；

综上所述，应选 ABD .

10. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$的值域为$(-\infty,0)$，且$f(2x)+f(x+y)f(x-y)=0$，则

A．$f(0)=-1$　　B．$f(4)+[f(1)]^2=0$

C．$f(x)f(-x)=1$　　D．$f(x)+f(-x)\le -2$

解析：令$x=y=0$，则$f\left(0\right)+f^2\left(0\right)=0$，

$\because$函数$f(x)$的值域为$(-\infty,0)$，$\therefore f(0)=-1$，选项 A 正确；

令$x=1$，$y=0$，则$f(2)=-[f(1)]^2$，

令$x=2$，$y=0$，则$f(4)=-[f(2)]^2=-[f(1)]^4$，$\therefore$选项 B 错误；

令$x=0$，则$f(0)+f(y)f(-y)=0$，

$\therefore f(y)f(-y)=-f(0)=1$，即$f(x)f(-x)=1$，$\therefore$选项 C 正确；

$\because -f(x)>0$，$-f(-x)>0$，$\therefore -[f(x)+f(-x)]\ge 2\sqrt{f(x)f(-x)}=2$

$\therefore f(x)+f(-x)\le -2$，故选项 D 正确；

综上所述，应选 ACD .

11. 投掷一枚质地均匀的硬币三次，设随机变量$X_n=\begin{cases}1, & 第n次投出正面,\\ -1, & 第n次投出反面,\end{cases}(n=1,2,3)$. 记A表示事件“$X_1+X_2=0$”，B表示事件“$X_2=1$”，　C表示事件“$X_1+X_2+X_3=-1$”，则

A．B 和 C 互为对立事件　　B．事件 A 和 C 不互斥

C．事件 A 和 B 相互独立　　D．事件 B 和 C 相互独立

解析：考查选项 A，事件 B 和 C 均会出现“反，正，反”的情况，故选项 A 错误；

考查选项 B，事件 A 和 C 均会出现“反，正，反”的情况，故选项 B 正确；

考查选项 C，易知 $P(A)=C_2^1(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$， $P(B)=\frac{1}{2}$，

事件 AB 为前两次投出的硬币结果为“反，正”，则 $P(AB)=\frac{1}{4}$，

$\therefore P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}$，故选项 C 正确；

考查选项 D，由选项 AC 可知 $P(BC)=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$， $P(B)=\frac{1}{2}$，

在事件 C 中三次投出的硬币有一次正面，两次反面，则 $P(C)=C_3^2(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$，

$\therefore P(BC)\neq P(B)P(C)$，故选项 D 错误；

综上所述，应选 BC．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 160；　　13. 2；　　14. $\frac{2m}{m+2}$；1 或 2．

12. $(x+\frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项为___________.

解析：易知该二项展开式通项为 $C_6^r x^{6-r}(\frac{2}{x})^r$，$\therefore$ 当 $r=3$ 时，得到常数项为 160，故应填 160．

13．某圆锥的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$，其侧面展开图为半圆，则该圆锥的母线长为___________.

解析：设该圆锥的母线长为 l，底面圆半径为 r，根据侧面展开图为半圆得 $2\pi r=\pi l$，

即 $l=2r$，又根据圆锥体积得 $\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$，解得 $r=1$，$l=2$，故应填 2．

14. 设 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，若 $T_n+a_n=m$，其中常数 $m>0$．则 $a_2=$___________（结果用 m 表示）；若数列 $\{\frac{1}{T_n}\}$ 为等差数列，则 $m=$___________.

解析：易知 $T_1=a_1=\frac{m}{2}$，$\therefore m=a_1a_2+a_2=a_2(\frac{m}{2}+1)$，解得 $a_2=\frac{2m}{m+2}$，故应填 $\frac{2m}{m+2}$；

（方法一）$\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_{n-1}}=\frac{1}{m-a_n}-\frac{1}{m-a_{n-1}}=\frac{1}{m-\frac{m}{m-a_{n-1}+1}}-\frac{1}{m-a_{n-1}}=\frac{1-a_{n-1}}{m^2-ma_{n-1}}\ (n\geq 2)$，

若数列$\{\frac{1}{T_n}\}$为等差数列，则$\frac{1-a_{n-1}}{m^2-ma_{n-1}}$为常数$d$，

①若$d=0$，则$a_{n-1}=1\ (n\geq 2)$恒成立，即$a_n=1\ (n\geq 1)$恒成立，$\therefore m=2$；

②若$d\neq 0$，则$1-a_{n-1}=dm^2-dma_{n-1}$，$\therefore \begin{cases}1=dm^2,\\1=dm,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=1,\\d=1,\end{cases}$

综上所述，若数列$\{\frac{1}{T_n}\}$为等差数列，则$m=1$，或$m=2$，故应填1或2.

（方法二）$\because \{\frac{1}{T_n}\}$为等差数列，$\therefore \frac{1}{T_n}=\frac{1}{T_{n-1}}+d\ (n\geq 2)$，易知$\frac{1}{T_1}=\frac{2}{m}$，且$\frac{1}{T_n}=\frac{2}{m}+(n-1)d$，

当$n\geq 2$时，$\because T_n+a_n=m$，$\therefore T_n+\frac{T_n}{T_{n-1}}=m$，$\therefore \frac{m}{T_n}=1+\frac{1}{T_{n-1}}$，

$\therefore$由$\frac{1}{T_n}=\frac{2}{m}+(n-1)d$，可得$2+m(n-1)d=1+\frac{2}{m}+(n-2)d$，

$\therefore (m-1)dn=-1+\frac{2}{m}+(m-2)d$ 对于任意n恒成立，

$\therefore \begin{cases}m=1,\\-1+\frac{2}{m}+(m-2)d=0,\end{cases}$或$\begin{cases}d=0,\\-1+\frac{2}{m}+(m-2)d=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=1,\\d=1,\end{cases}$或$\begin{cases}d=0,\\m=2,\end{cases}$

综上所述，若数列$\{\frac{1}{T_n}\}$为等差数列，则$m=1$，或$m=2$，故应填1或2.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）

$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$a\sin C=c\sin B$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

（1）求B的大小；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，求BC边上中线的长.

解：（1）$\because a\sin C=c\sin B$，$\therefore$由正弦定理，得$\sin A\sin C=\sin C\sin B$，…………2 分

$\because 0<C<\pi$，$\therefore \sin C>0$，$\therefore \sin A=\sin B$，…………3 分

$\because 0<A<\pi$，$0<B<\pi$，$\therefore A=B$，…………5 分

$\because A+B+C=\pi$，且$C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$.…………6 分

（2）依题意 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$， ……………………………………………………………7 分

$\because A=B$，$\therefore a=b$， ……………………………………………………………8 分

$\therefore \dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}a^2\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$，解得 $a=\sqrt{3}$， ………………………………………………10 分

设边 BC 的中点为 D，$\therefore CD=\dfrac{\sqrt{3}}{2},AC=\sqrt{3}$，

$\therefore$在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理知 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C$

$=3+\dfrac{3}{4}-2\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{21}{4}$， ………………………………………………12 分

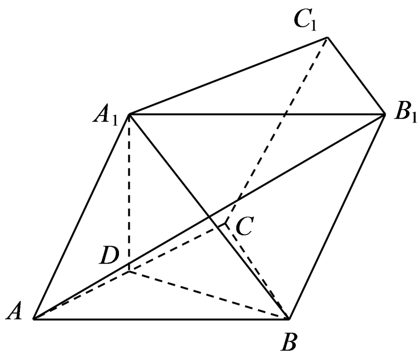
$\therefore BC$ 边上中线的长为 $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. ……………………………………………………………13 分

16.（15 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，$AB=AC=BC=AA_1=2$，$A_1B=\sqrt{6}$.

（1）设 D 为 AC 中点，证明：$AC\perp$ 平面 A_1DB；

（2）求平面 A_1AB_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值.



（第 16 题图）

解：（1）$\because D$ 为 AC 中点，且 $AB=AC=BC=2$，

$\therefore$在$\triangle ABC$ 中，有 $BD\perp AC$，且 $BD=\sqrt{3}$， ……………………………………………1 分

$\because$平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，且平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，

$\therefore BD\perp$ 平面 ACC_1A_1， ……………………………………………………………2 分

$\because A_1D\subset$ 平面 ACC_1A_1，$\therefore BD\perp A_1D$， ………………………………………………3 分

$\because A_1B=\sqrt{6}$，$BD=\sqrt{3}$，$\therefore A_1D=\sqrt{3}$， ………………………………………………4 分

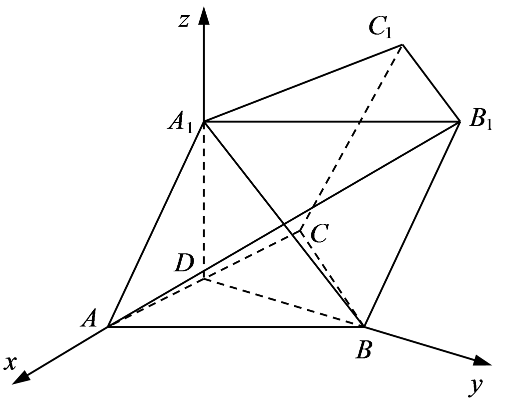
$\because AD=1$，$AA_1=2$，$A_1D=\sqrt{3}$，

$\therefore$由勾股定理，有 $AC\perp A_1D$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯6 分

$\because AC\perp BD$，$A_1D\cap BD=D$，

$\therefore AC\perp$平面 A_1DB，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯7 分

（2）如图所示，以 D 为原点，DA，DB，DA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，



可得 $A(1,0,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,\sqrt{3},0)$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯9 分

$\therefore \overrightarrow{AA_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯10 分

设平面 A_1AB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-x+\sqrt{3}z=0,\\ -x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=1$，$z=1$，$\therefore \boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯12 分

由（1）可知，$BD\perp$平面 ACC_1A_1，

$\therefore$平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD}=(0,-\sqrt{3},0)$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯13 分

记平面 A_1AB_1 与平面 ACC_1A_1 的夹角为 α，

$\therefore \cos\alpha=|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BD}|}|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$平面 A_1AB_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯15 分

17．（15 分）

从一副扑克牌中挑出 4 张 Q 和 4 张 K，将其中 2 张 Q 和 2 张 K 装在一个不透明的袋中，剩余的 2 张 Q 和 2 张 K 放在外面．现从袋中随机抽出一张扑克牌，若抽出 Q，则把它放回袋中；若抽出 K，则该扑克牌不再放回，并将袋外的一张 Q 放入袋中.如此操作若干次，直到将袋中的 K 全部置换为 Q.

（1）在操作 2 次后，袋中 K 的张数记为随机变量 X，求 X 的分布列及数学期望；

（2）记事件“在操作 $n+1\ (n\in \mathbf{N}^*)$ 次后，恰好将袋中的 K 全部置换为 Q．”为 A_n，记 $P_n=P(A_n)$．

（i）在第 1 次取到 Q 的条件下，求总共 4 次操作恰好完成置换的概率；

（ii）试探究 P_{n+1} 与 P_n 的递推关系，并说明理由.

解：（1）由题意 X 的取值可能为 0，1，2，…………………………………………1 分

当 $X=0$ 时，即第一次取出 K，第二次也取出 K，

$\therefore P(X=0)=\dfrac{2}{2+2}\times\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{8}$，…………………………………………………………2 分

当 $X=1$ 时，即第一次取出 Q，第二次取出 K，或第一次取出 K，第二次取出 Q，

$\therefore P(X=1)=\dfrac{2}{2+2}\times\dfrac{2}{2+2}+\dfrac{2}{2+2}\times\dfrac{3}{3+1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$，…………………………………3 分

当 $X=2$ 时，即第一次取出 Q，第二次也取出 Q，

$\therefore P(X=2)=\dfrac{2}{2+2}\times\dfrac{2}{2+2}=\dfrac{1}{4}$，…………………………………………………………4 分

$\therefore X$ 的概率分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{5}{8}$	$\dfrac{1}{4}$

……………………………………………………………………5 分

$\therefore X$ 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{8}+1\times\dfrac{5}{8}+2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{8}$．……………………………………6 分

（2）（i）记事件“第 1 次取到 Q ”为 B，事件“总共 4 次操作恰好完成置换”为 C，则 $P(B)=\dfrac{1}{2}$，

……………………………………………………………………………………7 分

依题意，若第 1 次取出 Q，则剩余的 3 次操作，须将袋中 K 全部置换为 Q，

①若第 2 次亦取出 Q，则第 3 次和第 4 次均须取出 K，

其概率为$\frac{1}{2}\times\frac{2}{2+2}\times\frac{2}{2+2}\times\frac{1}{3+1}=\frac{1}{32}$；　…………………………………………………………8 分

①若第 2 次取出 K，则第 3 次须取出 Q，第 4 次须取出 K，

其概率为$\frac{1}{2}\times\frac{2}{2+2}\times\frac{3}{3+1}\times\frac{1}{3+1}=\frac{3}{64}$；　…………………………………………………………9 分

$\therefore P(C\mid B)=\frac{P(CB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{32}+\frac{3}{64}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{32}$，即在第1次取到 Q 的条件下，总共 4 次操作恰好完成置换的概率为$\frac{5}{32}$.　…………………………………………………………10 分

（ii）（方法一）由题可知若事件 A_{n+1} 发生，即操作 $n+2$ 次后，恰好将袋中的 K 全部置换为 Q，

①当第1次取出 Q，则剩余的 $n+1$ 次操作，须将袋中 K 全部置换为 Q，

概率为$\frac{2}{2+2}\times P_n=\frac{1}{2}P_n$；　…………………………………………………………12 分

②当第1次取出 K，则从第 2 次起，直到第 $n+1$ 次均须取出 Q，且第 $n+2$ 次取出 K，

概率为$\frac{2}{2+2}\times(\frac{3}{3+1})^n\times\frac{1}{3+1}=\frac{1}{8}\times(\frac{3}{4})^n$；　…………………………………………………………14 分

$\therefore P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{8}\times(\frac{3}{4})^n$.　…………………………………………………………15 分

（方法二）由题可知若事件 A_{n+1} 发生，即操作 $n+2$ 次后，恰好将袋中的 K 全部置换为 Q，则一定有第 $n+2$ 次（最后一次）取出 K，

①当第 $n+1$ 次（倒数第二次）取出 Q，则须在之前的 n 次操作中的某一次取出 K，

概率为$\frac{3}{3+1}\times P_n=\frac{3}{4}P_n$；　…………………………………………………………12 分

②当第 $n+1$ 次（倒数第二次）取出 K，则从第1次起，直到第 n 次均须取出 Q，

概率为$(\frac{2}{2+2})^n\times\frac{2}{2+2}\times\frac{1}{3+1}=\frac{1}{8}\times(\frac{1}{2})^n=(\frac{1}{2})^{n+3}$；　…………………………………………………………14 分

$\therefore P_{n+1}=\frac{3}{4}P_n+(\frac{1}{2})^{n+3}$.　…………………………………………………………15 分

18．（17 分）

在直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 M， N 两点，且当 l 的斜率为1时，$|MN|=8$.

（1）求 C 的方程；

（2）设 l 与 C 的准线交于点 P，直线 PO 与 C 交于点 Q（异于原点）. 记线段 MN 的中

点为 R，若 $|QR|\le 3$，求 $\triangle MNQ$ 面积的取值范围.

解：(1) 不妨设 l 的方程为 $x=my+\dfrac{p}{2}$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 l 与 C 的方程，得 $y^2-2mpy-p^2=0$，　　　　……………………………………………1 分

$\therefore y_1+y_2=2mp$，$y_1y_2=-p^2$，　　　　……………………………………………………2 分

则 $|MN|=x_1+x_2+p=m(y_1+y_2)+2p=2p(m^2+1)$，　　　　…………………………………3 分

$\therefore$ 由题可知当 $m=1$ 时，$|MN|=8$，$\therefore p=2$，　　　　…………………………………………4 分

$\therefore C$ 的方程为 $y^2=4x$.　　　　………………………………………………………………………5 分

(2) 由(1)知 $y_R=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2m$，

将 R 的纵坐标 $2m$ 代入 $x=my+1$，得 $R(2m^2+1,2m)$，　　　　…………………………………6 分

易知 C 的准线方程为 $x=-1$，又 l 与 C 的准线交于点 P，$\therefore P(-1,-\dfrac{2}{m})$，　　……………7 分

则直线 OP 的方程为 $x=\dfrac{m}{2}y$，　　　　………………………………………………………………8 分

联立 OP 与 C 的方程，得 $y^2=2my$，$\therefore Q(m^2,2m)$，　　　　…………………………………9 分

$\therefore Q$，R 的纵坐标相等，$\therefore$ 直线 $QR /\!/ x$ 轴，　　　　…………………………………………11 分

$\therefore |QR|=|2m^2+1-m^2|=m^2+1$，　　　　…………………………………………………………12 分

$\therefore S_{\triangle MNQ}=S_{\triangle QRM}+S_{\triangle QRN}=\dfrac{1}{2}|QR||y_1-y_2|=2(m^2+1)\cdot\sqrt{m^2+1}=2|QR|^{\frac{3}{2}}$，　　…………14 分

$\because$ 点 Q（异于原点），$\therefore m\ne 0$，　　　　……………………………………………………15 分

$\because |QR|\le 3$，$\therefore 1<|QR|\le 3$，

$\therefore 2<2|QR|^{\frac{3}{2}}\le 6\sqrt{3}$，即 $S_{\triangle MNQ}\in(2,6\sqrt{3}]$.　　　　……………………………………17 分

19.（17 分）

若实数集 A，B 对 $\forall a\in A$，$\forall b\in B$，均有 $(1+a)^b\ge 1+ab$，则称 $A\to B$ 具有 Bernoulli 型关系.

（1）判断集合 $M=\{x\,|\,x>1\}$，$N=\{1,2\}$ 是否具有 Bernoulli 型关系，并说明理由；

（2）设集合 $S=\{x\,|\,x>-1\}$，$T=\{x\,|\,x>t\}$，若 $S\to T$ 具有 Bernoulli 型关系，求非负实数 t 的取值范围；

（3）当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，证明：$\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})^{-\frac{1}{k}} < n + \frac{5}{8}$．

解：(1)依题意，$M \to N$ 是否具有 Bernoulli 型关系，等价于判定以下两个不等式对于 $\forall x > 1$ 是否均成立：① $(1+x)^1 \ge 1+x$，② $(1+x)^2 \ge 1+2x$，　…………………………………2 分

$\because \forall x > 1$，$(1+x)^1 = 1+x$，$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$

$\therefore M \to N$ 具有 Bernoulli 型关系.　…………………………………………………4 分

（2）（方法一）令 $f(x) = (1+x)^b - bx - 1$，$x \in S$，$b \in (0,+\infty)$，

则 $f'(x) = b[(1+x)^{b-1} - 1]$，　……………………………………………………………5 分

①当 $b = 1$ 时，显然有 $(1+a)^b = 1+ab$，$\therefore (1+x)^b \ge 1+xb$ 成立；　…………………………6 分

②当 $b > 1$ 时，

若 $-1 < x < 0$，则 $(1+x)^{b-1} < (1+x)^0 = 1$，即 $f'(x) < 0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减，

若 $x = 0$，则 $(1+0)^{b-1} - 1 = 0$，即 $f'(0) = 0$，

若 $x > 0$，则 $(1+x)^{b-1} > (1+x)^0 = 1$，即 $f'(x) > 0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 0$，$\therefore f(x) \ge f(0) = 0$，$\therefore (1+x)^b - (bx+1) \ge 0$，

$\therefore (1+x)^b \ge 1+xb$ 成立；　………………………………………………………………8 分

③当 $0 < b < 1$ 时，

若 $-1 < x < 0$，则 $(1+x)^{b-1} > (1+x)^0 = 1$，即 $f'(x) > 0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递增，

若 $x = 0$，则 $(1+0)^{b-1} - 1 = 0$，即 $f'(0) = 0$，

若 $x > 0$，则 $(1+x)^{b-1} < (1+x)^0 = 1$，即 $f'(x) < 0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)$ 的最大值为 $f(0) = 0$，$\therefore f(x) \le f(0) = 0$，

$\therefore (1+x)^b - (bx+1) \le 0$，即 $(1+x)^b \le bx+1$，

$\therefore$ 当 $x \in S$，且 $0 < b < 1$ 时，$(1+x)^b \ge 1+xb$ 不能恒成立，　…………………………10 分

综上所述，可知若 $S \to T$ 具有 Bernoulli 型关系，则 $T \subseteq \{x \mid x \ge 1\}$，

$\therefore$ 非负实数 t 的取值范围为 $[1,+\infty)$．　………………………………………………11 分

（方法二）当 $b = 1$，或 $0 < b < 1$ 时，与方法一相同；　…………………………………8 分

当$b>1$时，

若$ab+1\le 0$，$\because (1+a)^b>0\ge 1+ab$，$\therefore (1+a)^b\ge 1+ab$，

若$ab+1>0$，则$ab>-1$，又$b>1$，$\therefore 0<\dfrac{1}{b}<1$，

$\therefore$由方法一的结论，可知$(1+ab)^{\frac{1}{b}}\le 1+ab\cdot\dfrac{1}{b}=1+a$，

即$(1+ab)^{\frac{1}{b}}\le 1+a$，　………………………………………………………………9 分

$\because 1+ab>0$，且$a\in(-1,+\infty)$，

$\therefore [(1+ab)^{\frac{1}{b}}]^b\le (1+a)^b$，即$1+ab\le (1+a)^b$，即$(1+a)^b\ge 1+ab$；………………………10 分

$\therefore$若集合$S=\{x\,|\,x>-1\}$，$T=\{x\,|\,x>t\}$具有 Bernoulli 型关系，则$T\subseteq\{x\,|\,x\ge 1\}$，

$\therefore$非负实数t的取值范围为为$[1,+\infty)$.　………………………………………………11 分

（3）$\because (\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}})^{-\frac{1}{k}}=(\dfrac{k^2+1}{k^2})^{\frac{1}{2k}}=(1+\dfrac{1}{k^2})^{\frac{1}{2k}}$，　…………………………………12 分

显然$\dfrac{1}{k^2}>-1$，且$0<\dfrac{1}{2k}<1$，

由（2）中的结论：当$0<b<1$时，$(1+x)^b\le 1+xb$，可知$(1+\dfrac{1}{k^2})^{\frac{1}{2k}}\le 1+\dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{1}{2k}=1+\dfrac{1}{2k^3}$，

………………………………………………………………………………………13 分

当$k\ge 2$时，$\dfrac{1}{2k^3}\le\dfrac{2}{4(k^3-k)}=\dfrac{k+1-(k-1)}{4(k-1)k(k+1)}=\dfrac{1}{4}[\dfrac{1}{(k-1)k}-\dfrac{1}{k(k+1)}]$，

$\therefore (1+\dfrac{1}{k^2})^{\frac{1}{2k}}\le 1+\dfrac{1}{4}[\dfrac{1}{(k-1)k}-\dfrac{1}{k(k+1)}]$，$k\ge 2$，……………………………15 分

当$n=1$时，$\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}})^{-\frac{1}{k}}<n+\dfrac{5}{8}$显然成立；　……………………………………16 分

当$n\ge 2$时，$\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}})^{-\frac{1}{k}}=\sqrt{2}+\sum\limits_{k=2}^{n}(\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}})^{-\frac{1}{k}}<\dfrac{3}{2}+\sum\limits_{k=2}^{n}[1+\dfrac{1}{4(k-1)k}-\dfrac{1}{4k(k+1)}]$

$=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=2}^{n}[\dfrac{1}{(k-1)k}-\dfrac{1}{k(k+1)}]=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\cdot[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n(n+1)}]=n+\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{4n(n+1)}<n+\dfrac{5}{8}$，

综上所述，当$n\in\mathbf{N}^*$时，$\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}})^{-\frac{1}{k}}<n+\dfrac{5}{8}$.　……………………………17 分