

(在此卷上答题无效)

2024-2025 学年高三年级第二次质量检测

数学试题

(完卷时间 120 分钟; 满分 150 分)

友情提示: 请将所有答案填写到答题卡上! 请不要错位、越界答题!

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U = A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{2, 4\}$, $B \cap (\complement_U A) = \{1\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{1, 3\}$ C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{3\}$

2. 复数 $\frac{4}{1 - \sqrt{3}i}$ 的共轭复数是

A. $1 + \sqrt{3}i$ B. $\sqrt{3} + i$ C. $1 - \sqrt{3}i$ D. $\sqrt{3} - i$

3. 已知圆台上下底面积分别为 π , 4π , 母线长为 $\sqrt{5}$, 则该圆台的体积为

A. $\frac{7\pi}{3}$ B. $\frac{10\pi}{3}$ C. $\frac{14\pi}{3}$ D. $\frac{20\pi}{3}$

4. 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\alpha \cos\beta =$

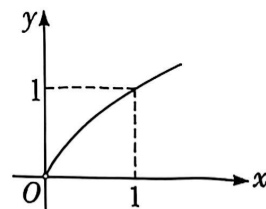
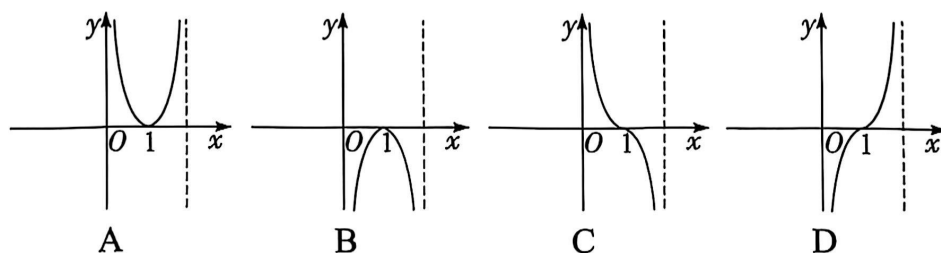
A. $\frac{1}{12}$ B. $-\frac{1}{12}$ C. $-\frac{5}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

5. 已知 $|a| = 3$, $|b| = 2$, $(a - 3b) \cdot (a + 2b) = -18$, 则 a 与 b 的夹角为

A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

6. 若函数 $f(x) = x^a$, $x \in (0, +\infty)$ 的图象如图所示, 则函数

$g(x) = \log_a x + \log_a(2 - x)$ 的图象大致为



7. 金箔是黄金锻制而成的矩形薄片，其规格是指金箔制成后的尺寸. 我国南京金箔锻制技艺被国务院列为第一批国家级非物质文化遗产名录. K 系列的矩形金箔 $K_0, K_1, K_2, \dots, K_{13}$ 共 14 种规格，其规格具有下列特点：① 较长边长与较短边长的比值都相同；② 每一序号的金箔(K_{13} 除外) 对裁后，可以得到两张后一序号的金箔. 比如 1 张 K_1 金箔对裁后可以得到 2 张 K_2 金箔. 若 K_4 金箔的较短边长为 210mm，则 K_{11} 金箔的较长边长约为

A. 9mm B. 13mm C. 18mm D. 26mm

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上， $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$ ，且 $3\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$ ，则 $\cos \angle BAF_1 =$

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线与 x 轴交于点 M ，点 A 在抛物线上(除原点外)，则

A. 当 $AF \perp x$ 轴时， $|AM| = 2\sqrt{2}$
 B. 当 $|AF| = 3$ 时， $\triangle AMF$ 的面积为 2
 C. 以 AF 为直径的圆与 y 轴相切
 D. $\triangle AMF$ 外接圆的面积最小值为 π

10. 若数列 $\{a_n\}$ 为递增数列且数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 也为递增数列，则称 $\{a_n\}$ 为“重增数列”. 下列数列中，是重增数列的有

A. $\{3^n\}$ B. $\{n^5\}$ C. $\{\log_2 n\}$ D. $\{\sin n\}$

11. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 满足：① 当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ，且 $g(x) > 0$ ；
 ② $g(x+y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ ；③ $g(x-y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$ ，则

A. $g(0) = 1$ B. $g(x)$ 为偶函数
 C. $f(x)$ 为奇函数 D. $f(x)$ 为周期函数

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知随机变量 $\xi \sim N(4, \sigma^2)$ ，若 $P(\xi \leq 5) = 0.6$ ，则 $P(3 < \xi < 4) =$ _____.

13. 函数 $f(x) = \sin x - \frac{1}{3}$ ， $x \in (0, \pi)$ 恰有两个零点 x_1, x_2 ，则 $f(x_1 + x_2) =$ _____.

14. 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，动直线 l 与函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax$ 的图象交于 A, B, C 三点，且点 A 在 y 轴的左侧， M 为线段 BC 的中点，则点 M 的横坐标的取值范围为 _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $a \cos B - b \cos A = a - c$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b^2 = ac$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. (15 分)

已知 O 为坐标原点，双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 经过点 $A(-5, 2)$ ，左、右

焦点分别为 $F_1(-6, 0)$ ， $F_2(6, 0)$.

(1) 求 E 的离心率;

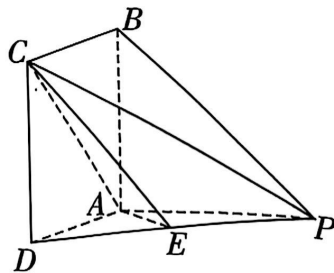
(2) 一组平行于 OA 的直线与 E 相交，证明这些直线被 E 截得的线段的中点在同一条直线上.

17. (15 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $PA = AB$ ， $AB \perp PD$ ， $\angle PAD = 120^\circ$ ， E 为线段 PD 的中点.

(1) 证明：直线 $PB \parallel$ 平面 ACE ;

(2) 求直线 AE 与平面 PAC 所成角的正弦值.



18. (17 分)

已知函数 $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 1$, $g(x) = \frac{1}{2}ax^2 + 2x - e^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) $\forall a \in \mathbf{R}$, 写出一条与曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 都相切的定直线的方程(无需写出求解过程);

(3) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$, 求 a 的取值范围.

19. (17 分)

某商店售卖一种珠环, 消费者从红、蓝两种颜色的装饰珠中各选出偶数个, 按随机的顺序用绳子穿成“串”(穿在一根绳子上, 之后固定位置不可移位), 再将绳子首尾相接连成“环”. 小王现在选了 6 个红珠 4 个蓝珠穿成一个“串”.

(1) 如果小王将这一串装饰珠剪了一刀分成了两串, 每串各有 5 个装饰珠, 求这两串装饰珠都恰好是 3 个红珠和 2 个蓝珠的概率;

(2) 在把 10 个装饰珠连成环后, 小王剪了两刀将珠环分成各含 4 个装饰珠和 6 个装饰珠的两串. 设 4 个装饰珠串里红珠的个数为随机变量 X , 求 X 的分布列与期望;

(3) 如果小王选了 $2m$ 个红珠和 $2n$ 个蓝珠以任意顺序连成一个“环” ($m, n \in \mathbf{N}^*$), 求证: 只需要在合适的位置剪两刀, 总可将环分成两串, 每串都恰好是 m 个红珠和 n 个蓝珠.