宁德市 2023-2024 学年度第一学期期末高一质量检测

数学试题参考答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，有且只有一个是符合题目要求的．

1-5.DCCAB　6-8ACB

8.解析：因为 $y=f(4-3x)$ 为偶函数，所以 $f(4-3x)=f(4+3x)$，所以 $f(x)$ 关于 $x=4$ 对称. $y=g(2x+4)+1$ 为奇函数，所以 $g(-2x+4)+1=-g(2x+4)-1$，所以 $g(x)$ 关于 $(4,-1)$.

因为 $f(x)+g(x)=x^2+2$，所以 $f(2)+g(2)=6$……①，$f(6)+g(6)=38$……②.又因为 $f(2)=f(6), g(2)+g(6)=-2$，由②-①得：$g(6)-g(2)=32$.

所以 $g(6)=15$，$f(6)=23$.

所以 $f(6)g(6)=345$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分.

9.AC　10.BD　11.ABD　**12.ACD**

12.解析：由图可知 $0<t<1$，所以选项 A 是正确的；

$\left|\log_2(x-1)\right|=1$ 得　$x=\dfrac{3}{2}$ 或 $x=3$.因为 $\left|\log_2(x_3-1)\right|=\left|\log_2(x_4-1)\right|$，所以 $\dfrac{3}{2}<x_3<2$；

$2<x_4<3$，$-\log_2(x_3-1)=\log_2(x_4-1)$，所以 $\log_2\dfrac{1}{(x_3-1)}=\log_2(x_4-1)$，

所以 $(x_3-1)(x_4-1)=1$ 所以 $x_3x_4=x_3+x_4$，$\dfrac{1}{2}<x_3-1<1$，

$$x_3+x_4=(x_3-1)+(x_4-1)+2=(x_3-1)+\frac{1}{(x_3-1)}+2\in(4,\frac{9}{2}).$$

所以 $x_3x_4\in(4,\dfrac{9}{2})$，所以 B 错误.

因为 $x_1+x_2=1$，$x_1+x_2+x_3+x_4=1+x_3+x_4\in(5,\dfrac{11}{2})$ 所以 C 正确.

因为 $x_1\in(0,\dfrac{1}{2}), f(x_4)\in(0,1)$，所以 $x_1f(x_4)\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，所以 D 正确.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡的相应位置

13．$(2,2)$.　　　　14．$(-4,1)$

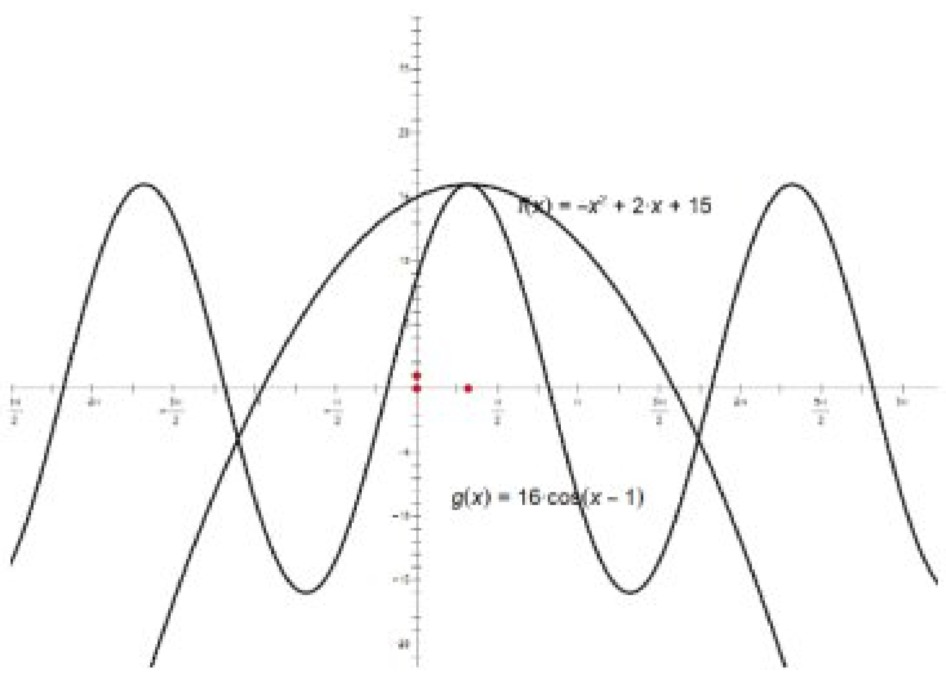
15．y=0 或,y=1 或 $y=\sqrt{x}$，形如 $y=x^{\alpha}(\alpha\in(0,1))$ 均可.　　　　16． 1.

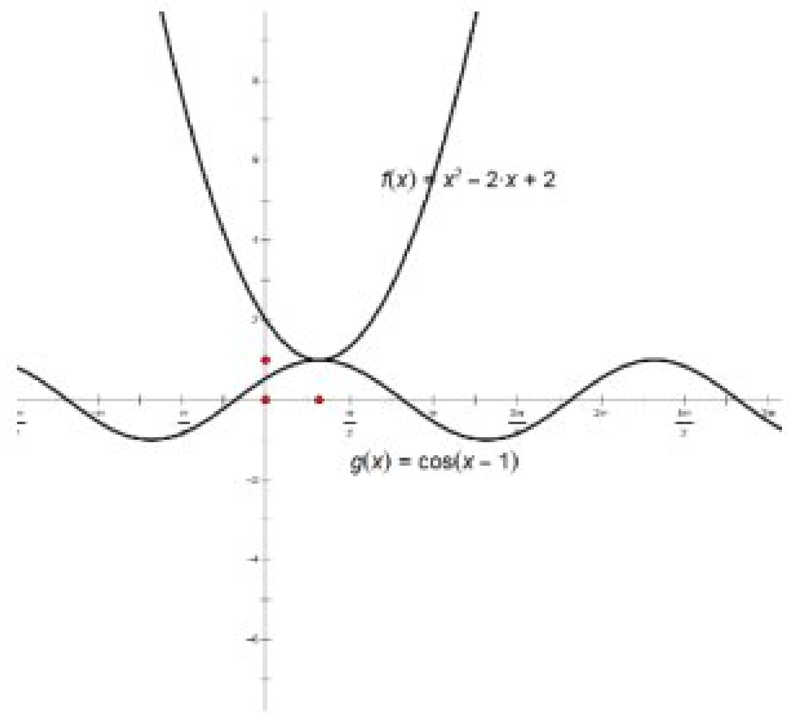
16.解析：

由 $f(x)=x^2-2x-m\cos(x-1)+m^2+16m-15=(x-1)^2-m\cos(x-1)+m^2+16m-16$，

可得对称轴 $x=1$， 所以 $f(1)=0$，即 $m^2+15m-16=0$，解得 $m=-16$ 或 $m=1$．

当 $m=-16$ 时，$f(x)=x^2-2x-15+16\cos(x-1)$，令 $f(x)=0$ 得 $-x^2+2x+15=16\cos(x-1)$，





由图可知 $y=-x^2+2x+15$ 与 $y=16\cos(x-1)$ 的图像有三个交点，不合题意，舍去.

当 $m=1$ 时，$f(x)=x^2-2x+2-\cos(x-1)$，令 $f(x)=0$ 得 $x^2-2x+2=\cos(x-1)$，

由图可知，$y=x^2-2x+2$ 与 $y=\cos(x-1)$ 的图像有且仅有一个交点，符合题意.

综上所述，$m=1$．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17． 解：(1) 当 $m=0$ 时，$B=\{x|0\le x\le 1\}$，……………………………1 分

得 $A\cap B=\left\{x\middle|0\le x\le\frac{1}{2}\right\}$ ………………………………………………3 分

即 $\complement_R(A\cap B)=\left\{x\middle|x<0或x>\frac{1}{2}\right\}$ ……………………………………4 分

(2) 由 $A\cup B=A$ 得 $B\subseteq A$ ………………………………………………5 分

若 $B=\varnothing$ 时，$2m>m+1$ 即 $m>1$；…………………………………6 分

若 $B\neq\varnothing$ 时 $\begin{cases}2m\le m+1\\2m\ge -2\\m+1\le\frac{1}{2}\end{cases}$

得 $-1\le m\le-\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………9 分

综上所述 $-1\le m\le-\frac{1}{2}$ 或 $m>1$ ……………………………………………………10 分

18． 解：(1) 解法一：因为 $f(x)=f(2-x)$，

所以 $f(x)$ 的对称轴是 $x=1$，…………………………2 分

所以 $\frac{a-3}{2}=1$ 得 $a=5$ ……………………………………………………4 分

解法二：因为 $f(x)=f(2-x)$，

所以 $x^2+(3-a)x-3a=(2-x)^2+(3-a)(2-x)-3a$，……………………2 分

所以 $a=5$ ……………………………………………………………4 分

解法三：令 $x=3$，则 $f(3)=f(-1)$，

所以 $9+3(3-a)-3a=1+a-3-3a$，………………………………2 分

所以 $a=5$ ……………………………………………………………3 分

经过检验，$a=5$ 符合题意…………………………………………4 分

(2) 解：不等式等价于 $(x+3)(x-a)<0$ 对应方程的解为 $x_1=-3, x_2=a$；…5 分

若 $a=-3$ 时，解集为 $\varnothing$；………………………………………………7 分

若 $a>-3$ 时，解集为 $(-3,a)$；…………………………………………9 分

若 $a<-3$ 时，解集为 $(a,-3)$ ………………………………………………11 分

综上所述：当 $a=-3$ 时，解集为 $\varnothing$；

当 $a>-3$ 时，解集为 $(-3,a)$；

当 $a<-3$ 时，解集为 $(a,-3)$ ……………………………………12 分

19．(课本 P194 第 4 题改编，P228 第 2 题改编)

解：(1) 由 $P(\frac{1}{7},m)$ 在单位圆上，得 $\frac{1}{49}+m^2=1$；

又因为 α 为锐角，所以 $m=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，……………………………………1 分

所以 $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，……………………………………2 分

所以 $\tan\alpha=4\sqrt{3}$ ………………………………………………………3 分

$$\frac{\sqrt{3}\sin(\alpha+\pi)+cos\alpha}{2\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}=\frac{-\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}$$ ……………………………4 分

$$=\frac{-\sqrt{3}\tan\alpha+1}{2-\sqrt{3}\tan\alpha}$$ ……………………………………5 分

$$=\frac{-\sqrt{3}\times4\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}\times4\sqrt{3}}=\frac{11}{10}$$ ……………………………………6 分

（2）因为 $Q(-\frac{11}{14},t)$ 在单位圆上，所以 $t^2+\left(-\frac{11}{14}\right)^2=1$，

又因为 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以 $t=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，……………………………………………7 分

所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$ ………………………………………8 分

$\cos\beta=\cos(\alpha+\beta-\alpha)$，…………………………………………………9 分

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$ …………………………10 分

$=-\frac{11}{14}\times(\frac{1}{7})+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$ ………………………………12 分

20.（课本 P86 第 5 题改编）

解：(1) 因为 $f(x)=\frac{x+a}{x^2+b}$ 是定义域为 R 的奇函数，

所以 $f(0)=0$ 且 $f(-1)\neq f(1)$，

因此②③选其一，…………………………………………1 分

①必选，又由 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递增，知 $f(1)>f(0)$ 可知满足①③

代入可得 $\begin{cases}\frac{a}{b}=0\\ \frac{1+a}{1+b}=\frac{1}{2}\end{cases}$，……………………………………………………………3 分

得 $\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$ ……………………………………………………………………4 分

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ……………………………………………………………5 分

（2）$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，证明如下

$\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$，设 $x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}$ ……………………………………6 分

$=\frac{x_1(x_2^2+1)-x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$ ………………………………7 分

$=\frac{x_1x_2^2+x_1-x_2x_1^2-x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

$=\frac{x_1x_2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$ ………………………8 分

$=\dfrac{(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$ ....9 分

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0$，........................10 分

又因为 $x_1>1, x_2>1$，

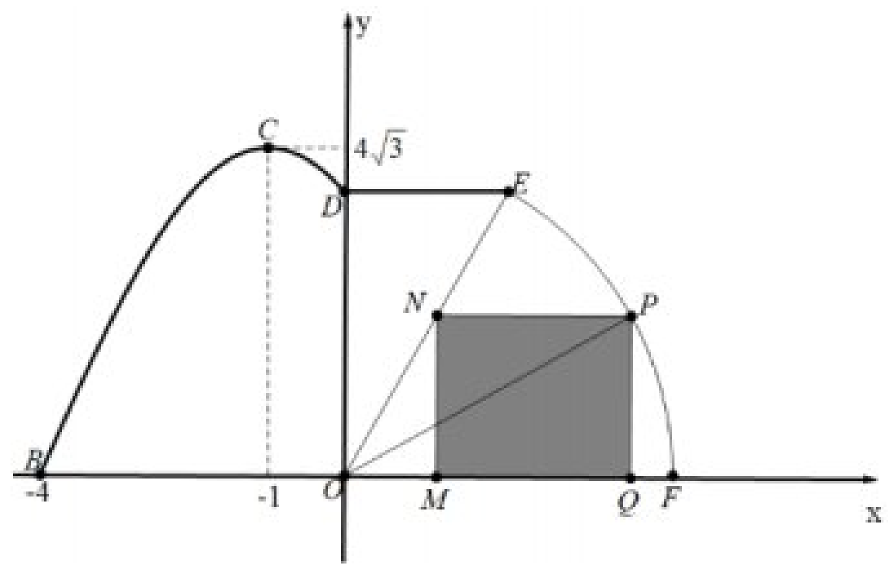
所以 $x_1x_2>1$，

所以 $x_1x_2-1>0$，..................11 分

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$， $f(x_1)>f(x_2)$

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减...................12 分

21. （课本 P227 例 10，P241 第 4 题改编）



解:

(1) $A=4\sqrt{3}$ ....1 分

因为 $\dfrac{T}{4}=3$，所以 $T=12$，所以 $\omega=\dfrac{\pi}{6}$ ....2 分

所以 $y=4\sqrt{3}\cos(\dfrac{\pi}{6}x+\varphi)$．

把 $(-4,0)$ 代入 $y=4\sqrt{3}\cos(\dfrac{\pi}{6}x+\varphi)$ 得： $\cos(-\dfrac{2\pi}{3}+\varphi)=0$，..................3 分

所以 $-\dfrac{2}{3}\pi+\varphi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$

又因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$， 所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ ....4 分

所以 $y=4\sqrt{3}\cos(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{6})$，

令 $x=0$，则 $y=6$，所以 $OD=6$ ....5 分

所以 $\tan\angle DOE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\angle DOE=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $\angle EOF=\dfrac{\pi}{3}$ ....6 分

(2)因为 $R=OE=4\sqrt{3}$，

所以 $\angle POF=\theta$，

所以 $P(4\sqrt{3}\cos\theta, 4\sqrt{3}\sin\theta)$．

所以 $PQ=4\sqrt{3}\sin\theta$，...7 分

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{MN}{OM}$,所以 $OM=4\sin\theta$ ，……………………………………8 分

所以 $MQ=OQ-OM=4\sqrt{3}\cos\theta-4\sin\theta$……………………………9 分

$S=MQ\bullet PQ=4\sqrt{3}\sin\theta\bullet(4\sqrt{3}\cos\theta-4\sin\theta)$

$=16\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)$

$=16\sqrt{3}\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})-8\sqrt{3}$ ……………………………………………10 分

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ ，所以 $\frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$ ，…………………………11 分

当 $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ ，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时， $S_{\max}=8\sqrt{3}$ ………………………12 分

22. （课本 P160 第 6 题改编）

解:(1) $\sinh(2x)=2\sinh x\bullet\cosh x$ ； …………………………2 分

（2）因为 $\cos 2x+m\bullet\cosh x\ge 0$ 对任意的 $x\in[-1,1]$ 恒成立，

所以 $\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+m\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\ge 0$ 对任意的 $x\in[-1,1]$ 恒成立，

即 $e^{2x}+e^{-2x}+m(e^{x}+e^{-x})\ge 0$ 对任意的 $x\in[-1,1]$ 恒成立，…………………3 分

因为 $2\le e^{x}+e^{-x}\le 2+e+e^{-1}$ ， ……………………………………………………4 分

所以 $m\ge-\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 对任意的 $x\in[-1,1]$ 恒成立，

所以 $m\ge(-\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}})_{\max}$ ， $x\in[-1,1]$ ………………………………5 分

令 $t=e^{x}+e^{-x}$ ，则 $2\le t\le e+e^{-1}$ ，

则 $y=-\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{2-t^2}{t}=\frac{2}{t}-t$ ， $t\in[2,e+e^{-1}]$.

因为 $y=\frac{2}{t}-t$ 在 $t\in[2,e+e^{-1}]$ 上单调递减………………………………6 分

所以 $(\frac{2}{t}-t)_{max}=-1$ ，

所以 $m\ge-1$ ……………………………………………………………7 分

（3）令 $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ ， $g(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ ，

问题等价于比较 $f(\sin x)$ 与 $g(\cos x)$ 的大小.

$f(\sin x)-g(\cos x)=\frac{1}{2}(e^{\sin x}+e^{-\sin x}-e^{cosx}+e^{-\cos x})$ ....8 分

解法一:

当 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$ 时,

$f(\sin x)-g(\cos x)=\frac{1}{2}[(e^{-\cos x}+e^{-\sin x})+(e^{\sin x}-e^{cosx})]$.

因为 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$,

所以 $\sin x\ge\cos x$,

所以 $e^{\sin x}\ge e^{cosx}$,

所以 $e^{\sin x}-e^{cosx}\ge 0$.

又因为 $e^{-\cos x}+e^{-\sin x}>0$, 所以 $f(\sin x)-g(\cos x)>0$,

所以 $f(\sin x)>g(\cos x)$,

即 $\cosh(\sin x)>\sinh(\cos x)$ ....10 分

当 $\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ 时,

$f(\sin x)-g(\cos x)=\frac{1}{2}[(e^{\sin x}+e^{-\sin x})+(e^{-\cos x}-e^{cosx})]$,

因为 $\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{2}$,

所以 $-\cos x\ge\cos x$,

所以 $e^{-\cos x}\ge e^{cosx}$,

所以 $e^{-\cos x}-e^{cosx}\ge 0$.

又因为 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}>0$,

所以 $f(\sin x)-g(\cos x)>0$,

所以 $f(\sin x)>g(\cos x)$,

即 $\cosh(\sin x)>\sinh(\cos x)$.

综上所述，当 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ 时，都有 $\cosh(\sin x)>\sinh(\cos x)$ ....12 分

解法二:

当 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时,

$f(\sin x)-g(\cos x)=\frac{1}{2}[(e^{-\cos x}+e^{-\sin x})+(e^{\sin x}-e^{cosx})]$ ....8 分

因为 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$ ，

所以 $\sin x\ge\cos x$ ，

所以 $e^{\sin x}\ge e^{cosx}$ ，

所以 $e^{\sin x}-e^{cosx}\ge 0$.

又因为 $e^{-\cos x}+e^{-\sin x}>0$ ，所以 $f(\sin x)-g(\cos x)>0$ ，

所以 $f(\sin x)>g(\cos x)$ ，

即 $\cosh(\sin x)>\sinh(\cos x)$ ....10 分

当 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ 时，

$f(\sin x)-g(\cos x)=\frac{1}{2}[(e^{\sin x}+e^{-\sin x})+(e^{-\cos x}-e^{cosx})]$ ，

因为 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ ，

所以 $-\cos x\ge\cos x$ ，

所以 $e^{-\cos x}\ge e^{cosx}$ ，

所以 $e^{-\cos x}-e^{cosx}\ge 0$.

又因为 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}>0$ ，

所以 $f(\sin x)-g(\cos x)>0$ ，

所以 $f(\sin x)>g(\cos x)$ ，

即 $\cosh(\sin x)>\sinh(\cos x)$.

综上所述，当 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ 时，都有 $\cosh(\sin x)>\sinh(\cos x)$ ....12 分