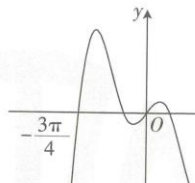


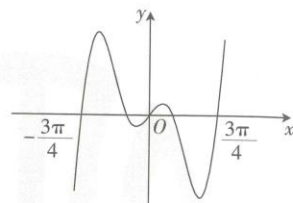
福建省部分达标学校 2023~2024 学年第一学期期中
高三数学质量监测

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:集合与常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、解三角形、数列。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 命题“ $\forall x \in \mathbf{N}_+, x^2$ 的个位数字不等于 2”的否定是
- A. $\exists x \in \mathbf{N}_+, x^2$ 的个位数字等于 2
B. $\exists x \in \mathbf{N}_+, x^2$ 的个位数字不等于 2
C. $\forall x \in \mathbf{N}_+, x^2$ 的个位数字等于 2
D. $\forall x \notin \mathbf{N}_+, x^2$ 的个位数字不等于 2
2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid -2 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 2\}$, 则 $A \cap B$ 的真子集的个数为
- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
3. 已知 α 是第一象限角, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\cos 2\alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$
- A. $-\frac{13}{5}$
B. $-\frac{7}{5}$
C. $\frac{13}{5}$
D. $\frac{1}{10}$
4. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1, a_2 a_6 - 6a_4 - 16 = 0$, 则 $\frac{S_6}{a_4 - 1} =$
- A. 9
B. 8
C. 7
D. 6
5. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为
- A. $f(x) = (3^x + 3^{-x}) \sin 2x$
B. $f(x) = (3^x + 3^{-x}) \cos 2x$
C. $f(x) = (3^x - 3^{-x}) \sin 2x$
D. $f(x) = (3^x - 3^{-x}) \cos 2x$
- 



6. 若 $a > 0, b > 0$, 则 “ $a + b \geq 4$ ” 是 “ $ab \geq 4$ ” 的
- A. 充分必要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件
7. 曲线 $y = e^x$ 在点 (x_0, e^{x_0}) 处的切线在 y 轴上的截距的取值范围为
- A. $(-1, 1]$
B. $(-\infty, 1]$
C. $(-\infty, 0]$
D. $(0, 1]$

【高三数学 第 1 页(共 4 页)】

• 24 - 122C •

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(1-2x)$ 为偶函数, $f(x-1)$ 为奇函数, 则
- A. $f(0)=0$ B. $f(-2)=0$ C. $f(-3)=0$ D. $f(-5)=0$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 设集合 $M = \{3, 9, 3x\}$, $N = \{3, x^2\}$, 且 $N \subseteq M$, 则 x 的值可以为
- A. -3 B. 3 C. 0 D. 1

10. 信号处理是对各种类型的电信号,按各种预期的目的及要求进行加工过程的统称,信号处理以各种方式被广泛应用于医学、声学、密码学、计算机科学、量子力学等各个领域.而信号处理背后的“功臣”就是余弦型函数, $f(x)=\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{4}$ 的图象就可以近似地模拟某种信号的波形,下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 为偶函数
B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称
C. $f(x)$ 为周期函数, 且最小正周期为 π
D. 设 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 则 $f'(x) < 3$

11. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意正整数 n , $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等差数列, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“二阶等差数列”. 若 $\{a_n\}$ 不是等比数列, 但 $\{a_n\}$ 中存在不相同的三项可以构成等比数列, 则称 $\{a_n\}$ 是“局部等比数列”. 若数列 $\{a_n\}$ 既是“二阶等差数列”, 又是“局部等比数列”, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式可以是

- A. $a_n=1$
B. $a_n=n$
C. $a_n=n^2$
D. $a_n=\sqrt{n}$

12. 若方程 $|\ln x + 2x - 2| = a$ 有两个根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 则

- A. $x_2 > 1 + \frac{a}{2}$ B. $x_1 > 1 - \frac{a}{3}$
C. $x_1 x_2 < e^{\frac{a}{3}}$ D. $\frac{x_2}{x_1} > e^{\frac{a}{3}}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知正数 a, b 满足 $3a+b=1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{27}{b}$ 的最小值为 ▲ .

14. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a = \sqrt{3}$, $A = 60^\circ$, $C = 75^\circ$, 则 $b =$.

15. 生物学家为了了解某药品对土壤的影响,常通过检测进行判断. 已知土壤中某药品的残留量 $y(\text{mg})$ 与时间 $t(\text{年})$ 近似满足关系式 $y = a \log_2 \frac{12}{t+1}$ ($a \neq 0$), 其中 a 是残留系数, 则大约经过

_____年后土壤中该药品的残留量是2年后残留量的 $\frac{1}{4}$. (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, 答案保留一位小数)

16. 高斯是德国著名的数学家,近代数学奠基者之一,享有“数学王子”的称号.为了纪念数学家高斯,我们把取整函数 $y=[x], x \in \mathbf{R}$ 称为高斯函数,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,例如 $[1.9]=1, [-1.3]=-2$. 已知等差数列 $\{a_n^2\}$ 满足 $a_n > 0, a_1^2=3, a_3^2=5$, 则 $\frac{1}{a_1+a_2} +$

$$\frac{1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_{97} + a_{98}} = \underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}.$$

【高三数学 第2页(共4页)】

• 24 - 122C •

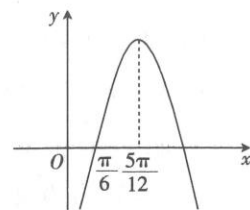
四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示。

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域。



18. (12分)

已知函数 $f(x) = ax\sin x + \cos x$ 在 $x = \frac{3\pi}{2}$ 处取得极值。

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的值域。

19. (12分)

已知递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 2$, 且 $a_1, a_2, a_3 - 1$ 成等差数列。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \begin{cases} a_n - 1 & (n \text{ 为奇数}), \\ \frac{1}{2}a_n & (n \text{ 为偶数}), \end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前20项和。

20. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $c\sin \frac{A+C}{2} = b\sin C$ 。

(1) 求角 B ;

(2) 设 BD 是 AC 边上的高, 且 $BD = 1, b = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长。

21. (12分)

为了减少碳排放, 某企业采用新工艺, 将生产中产生的二氧化碳转化为一种化工产品。已知该企业每月的处理量最少为30吨, 最多为400吨。月处理成本 $f(x)$ (元) 与月处理量 x (吨) 之间的函数关系近似地表示为 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 300x + 64800$ 。

(1) 该企业每月处理量为多少吨时, 才能使月处理成本最低? 月处理成本最低是多少元?

(2) 该企业每月处理量为多少吨时, 才能使每吨的平均处理成本最低? 每吨的平均处理成本最低是多少元?

22. (12分)

已知函数 $f(x) = -x\ln(-x), g(x) = e^x - x$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: $g(x) - f(x) < 3$ 。

密 封 线 以 下 不 要 答 题