福宁古五校教学联合体2023-2024学年第二学期期中质量监测

高二数学试题答案

一、选择题

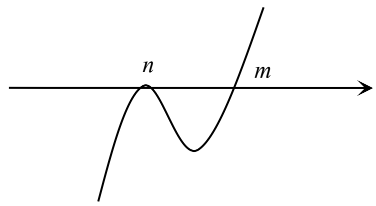
1.C　2.D　3.B　4.C　5.A　6.D　7. B　8.B

8.解析: $f'(x)=3x^2+2ax-b$,为二次函数,其图像开口向上.

若$\Delta\le 0$，则$f'(x)\ge 0$，函数$f(x)$在R上单调递增，不符合题意;

若$\Delta>0$,方程$3x^2+2ax-b=0$有两个不等实根x_1,x_2，

不妨设$x_1<x_2$,当$x\in(-\infty,x_1),f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，$x\in(x_1,x_2),f'(x)<0$，函数单调递减，$x\in(x_2,+\infty),f'(x)>0$，函数单调递增，若使$f(x)<0$的解集为$\{x\,|\,x<m,且x\ne n\}$,则$f(x)$的大致图像如图所示.



则m,n为函数$f(x)$的两个零点,且n为函数$f(x)$的极大值点,

所以$f(x)=(x-m)^2(x-n)$或$f(x)=(x-m)(x-n)^2$

当$f(x)=(x-m)^2(x-n)$时，$f'(x)=2(x-m)(x-n)+(x-m)^2$，

$f'(n)\ne 0$即n不是函数$f(x)$的极值点,不符合题意:

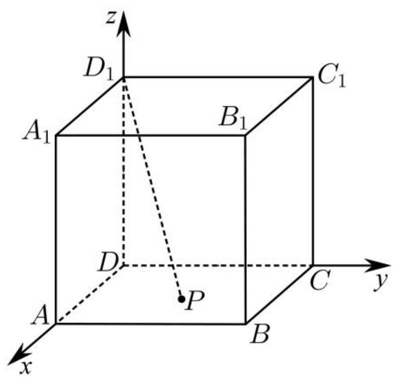
当$f(x)=(x-m)(x-n)^2$时，$f'(x)=(x-n)^2+(x-m)\cdot 2(x-n)=(x-n)(3x-n-2m)$ ，

令$f'(x)=0,$则$x=n$或$x=\dfrac{n+2m}{3}=\dfrac{n+2(n+1)}{3}=n+\dfrac{2}{3}$，所以$x=n+\dfrac{2}{3}$为极小值点.

所以$f(x)$的极小值为$f(n+\dfrac{2}{3})=(n+\dfrac{2}{3}-n-1)(n-\dfrac{2}{3}-n)^2=-\dfrac{4}{27}$. 故选B.

二、多选题

9. BC　10.ABD　11.AC



11.解析：对于A，以D为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，

设$P(x,y,0)$，则$D_1(0,0,1)$，$A(1,0,0)$，$\overrightarrow{D_1P}=(x,y,-1)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$；

若$D_1P\perp AD_1$，则$\overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$，即$x=-1$，与题意矛盾，所以A正确;

对于B，取BB_1中点Q，连接D_1M,MQ,AQ，因为$D_1A//MQ$，

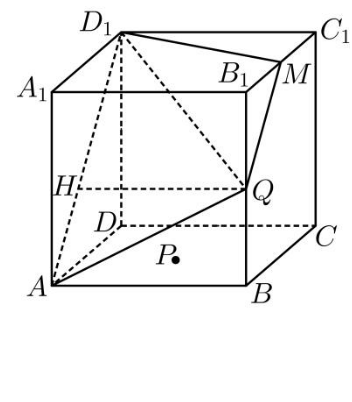
所以可得A、M、D_1、Q四点共面，

所以过三点A、M、D_1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的截面为以MQ,AD_1为底的等腰梯形，

$AD_1=\sqrt{2},MQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2},D_1M=\sqrt{D_1C_1^{\,2}+C_1M^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

过点Q作$QH\perp D_1A$，所以$AH=\dfrac{AD_1-MQ}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以梯形的高为$QH=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

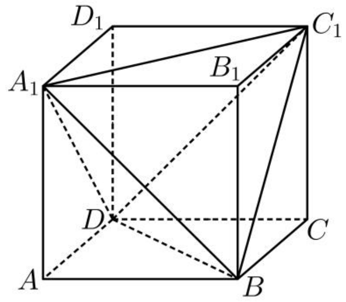


所以，$S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)\times\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{9}{8}$，故 B 错误；

对于 C，如下图知：四面体 A_1C_1BD 的体积为正方体体积减去四个三棱锥的体积，

可知四面体 A_1C_1BD 是棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体，

取 $\triangle A_1DC_1$ 的外心 O_1，连接 BO_1，则 $BO_1\perp$ 平面 A_1DC_1，



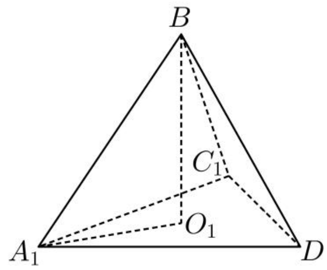
则 $2A_1O_1=\frac{\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}$，则 $A_1O_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $BO_1=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以四面体 A_1C_1BD 的高 $BO_1=h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

设四面体 A_1C_1BD 的侧面积为 S，其内切球的半径为 r，球心为 O，

$\because V_{A_1C_1BD}=4V_{O-A_1C_1B}$，$\therefore \frac{1}{3}Sh=4\times\frac{1}{3}Sr$，

即 $r=\frac{h}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$S=4\pi r^2=\frac{\pi}{3}$，所以 C 正确；



对于 D，$N\left(1,1,\frac{1}{5}\right)$，$\overrightarrow{NP}=\left(x-1,y-1,-\frac{1}{5}\right)$，$\because D_1P\perp NP$，$\therefore \overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{NP}=0$，

即 $x\left(x-1\right)+y\left(y-1\right)+\frac{1}{5}=0$，可得轨迹为圆：$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{10}$，

所以，圆心 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$r=\frac{\sqrt{30}}{10}>\frac{1}{2}\left|AB\right|=\frac{1}{2}$，又 $x,y\in\left[0,1\right]$，

所以，轨迹为圆：$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{10}$ 被四边形 $ABCD$ 截得的 4 段圆弧，

所以 D 错误；故选：AC.

三、填空题

12．$\frac{10}{3}$　13．$\frac{5}{6}$　14．$\sqrt{2}-1$

14. 设点 P 坐标为 (x_0,e^{x_0}), $F(1,0)$ 为曲线 C_2 的焦点.

点 N 到 C_2 准线距离为 N_x+1，根据抛物线定义，$NF=x_N+1$，则 $N_x=\left|NF\right|-1$.

则 $\left|MN\right|+N_x=\left|MN\right|+\left|NF\right|-1\geq\left|MF\right|-1$.

有 $\left|MF\right|^2=(x_0-1)^2+(e^{x_0}-0)^2=e^{2x_0}+x_0{}^2-2x_0+1$。

设 $f(x)=e^{2x}+x^2-2x+1$，$f'(x)=2e^{2x}+2x-2$，$f''(x)=4e^{2x}+2>0$，

因此 $f'(x)$ 是增函数，又 $f'(0)=0$，故当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$；$x<0$ 时，$f'(x)<0$，

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

则 $f(x)\geq f(0)=2$，故 $\left|NF\right|=\sqrt{f(x_0)}\geq\sqrt{2}$，则 $\left|NF\right|-1\geq\sqrt{2}-1$。

因此 $\left|MN\right|+N_x\geq\sqrt{2}-1$，$\left|MN\right|+N_x$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$。

15．【详解】

（1）由 $l//\alpha$ 得 $\vec{u}\perp\vec{n}$，所以 $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$，……………………………………………2 分

即 $3\times1+(a+b)\times2+(a-b)\times3=0$，……………………………………………4 分

整理得 $5a-b+3=0$；……………………………………………………………………6 分

（2）由 $l\perp\alpha$ 得 $\vec{u}//\vec{n}$，……………………………………………………………………8 分

所以 $\dfrac{3}{1}=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a-b}{3}$，……………………………………………………………………10 分

解得 $a=\dfrac{15}{2}$，$b=-\dfrac{3}{2}$．……………………………………………………………………13 分

16.【详解】（1）$f'(x)=e^x-a$ ……………………………………………………………………1 分

设 $P(x_0,y_0)$ 为切点，依题意 $\begin{cases} y_0=e^{x_0}-ax_0 \\ y_0=x_0 \\ e^{x_0}-a=1 \end{cases}$ ……………………………………………………………………4 分

解得 $a=e-1$ ……………………………………………………………………6 分

（2）$f(x)\geq\dfrac{1}{2}x^2+1$，$x\geq1$ 等价于 $e^x-ax\geq\dfrac{1}{2}x^2+1$，$x\geq1$，

等价于 $a\leq\dfrac{2e^x-x^2-2}{2x}$，$x\geq1$ …………………………………………………………………… 8 分

设 $g(x)=\dfrac{2e^x-x^2-2}{2x}$，$x\geq1$，则 $g'(x)=\dfrac{2xe^x-2e^x-x^2+2}{2x^2}$

设 $h(x)=2xe^x-2e^x-x^2+2$，$x\geq1$，…………………………………………………………………… 10 分

则 $h'(x)=2x\left(e^x-1\right)$

$x\geq1$ 时，$h'(x)=2x\left(e^x-1\right)>0$，$h(x)>h(1)=1>0$． …………………………………………… 12 分

所以 $g'(x)>0$，$g(x)\geq g(1)=\dfrac{2e-3}{2}=e-\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………………………………14 分

所以，当 $a\leq e-\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)\geq\dfrac{1}{2}x^2+1$ 在 $x\geq1$ 时恒成立. …………………………………………… 15 分

17.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{2}{5}$.

【解析】（1）因为 $PC\perp$ 平面 $ABCD$，

$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PC\perp AC$． …………………………………………………………………… 2 分

因为 $AB=2AD=2CD$，

所以 $AC=BC=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}CD$，所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，…………………………………………… 4 分

故 $AC\perp BC$．又 $BC\cap PC=C$，所以 $AC\perp$ 平面 PBC． ……………………………………………5 分

因为 $AC\subset$ 平面 EAC，所以平面 $EAC\perp$ 平面 PBC．……………………………………………6 分

（2）如图，以 C 为原点，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CP}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系，

…… 7 分

设 $CB=2$，$CP=2a$ $(a>0)$，则 $C(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$B(2,0,0)$，$P(0,0,2a)$，

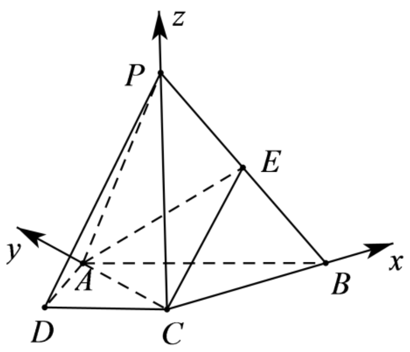
则 $E(1,0,a)$，$\overrightarrow{CA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,2a)$，$\overrightarrow{CE}=(1,0,a)$，8 分

易知 $\vec{m}=(1,0,0)$ 为平面 PAC 的一个法向量. ……………………………………………9 分

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 EAC 的一个法向量，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y=0\\ x+az=0\end{cases}$ $\therefore y=0$，

取 $x=a$，则 $z=-1$，$\vec{n}=(a,0,-1)$. ……………………………11 分



依题意，$\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，解得 $a=2$.

于是，$\vec{n}=(2,0,-1)$，$\overrightarrow{PA}=(0,2,-4)$. ……………………………13 分

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{PA},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2}{5}$.

所以直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{5}$. ……………15 分

18. 【详解】（1）$d(M,N_1)=|x|+|y-2|=|x|+\left|\dfrac{1}{2}x-2\right|=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+2,x<0\\ \dfrac{1}{2}x+2,0\le x<4\\ \dfrac{3}{2}x-2,x\ge 4\end{cases}$，

则 $d(M,N_1)\ge 2$，即 $d(M,N_1)$ 的最小值为 2；……………………………………………………4 分

$d(M,N_2)=|x|+|y-2|=|x|+|2x-2|=\begin{cases}2-3x,x<0\\ 2-x,0\le x<1\\ 3x-2,x\ge 1\end{cases}$，

则 $d(M,N_2)\ge 1$，即 $d(M,N_2)$ 的最小值为 1. ……………………………………………………7 分

（2）$f(x)=d(M,N)=|x-1|+|y-1|=|x-1|+|\ln x-1|=\begin{cases}2-x-\ln x,\dfrac{1}{e^6}\le x<1\\ x-\ln x,1\le x\le e\\ x+\ln x-2,e<x\le e^2\end{cases}$ …………9 分

当 $\dfrac{1}{e^6}\le x<1$ 时，$f(x)=2-x-\ln x,f'(x)=-1-\dfrac{1}{x}<0,f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{e^6},1\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{e^6}\right)=8-\dfrac{1}{e^6}$；……………………………………………………11 分

当 $1\le x\le e$ 时，$f(x)=x-\ln x,f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0,f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\max}=f(e)=e-1<8-\dfrac{1}{e^6}$；……………………………………………………13 分

当 $e<x\le e^2$ 时，$f(x)=x+\ln x-2,f'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0,f(x)$ 在 $(e,e^2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\max}=f(e^2)=e^2$；……………………………………………………………15 分

又$e \in (2.7,2.8)$，所以$f\left(\frac{1}{e^6}\right)=8-\frac{1}{e^6}>8-\frac{1}{2^6}>7.9$, $f\left(e^2\right)=e^2<2.8^2=7.84<7.9<8-\frac{1}{e^6}=f\left(\frac{1}{e^6}\right)$.

综上：$f(x)$的最大值为$8-\frac{1}{e^6}$. ……………………………………………………………………17 分

19. 【详解】（1）解：因为$f(x)=ax+(a-1)\ln x+\frac{1}{x}$，

所以$f'(x)=a+\frac{a-1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax^2+(a-1)x-1}{x^2}=\frac{(x+1)(ax-1)}{x^2}$，其中$x>0$. ………………2 分

①当$a \le 0$时，$f'(x)<0$，所以函数$f(x)$的减区间为$(0,+\infty)$，无增区间；………………3 分

②当$a>0$时，由$f'(x)>0$得$x>\frac{1}{a}$，由$f'(x)<0$可得$0<x<\frac{1}{a}$. ………………………………4 分

所以函数$f(x)$的增区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，减区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$. ……………………………………5 分

综上：当$a \le 0$时，函数$f(x)$的减区间为$(0,+\infty)$，无增区间；

当$a>0$时，函数$f(x)$的增区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，减区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$. ……………………………6 分

（2）解：（i）方程$xf(x)=x^2\mathrm{e}^x-x\ln x+1$可化为$x\mathrm{e}^x=ax+a\ln x$，即$\mathrm{e}^{x+\ln x}=a(x+\ln x)$.

令$t(x)=x+\ln x$，因为函数$t(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

易知函数$t(x)=x+\ln x$的值域为$\mathbf{R}$，…………………………………………………………………8 分

结合题意，关于t的方程$\mathrm{e}^t=at$（*）有两个不等的实根.

又因为$t=0$不是方程（*）的实根，所以方程（*）可化为$\frac{\mathrm{e}^t}{t}=a$.

令$g(t)=\frac{\mathrm{e}^t}{t}$，其中$t \ne 0$，则$g'(t)=\frac{\mathrm{e}^t(t-1)}{t^2}$.

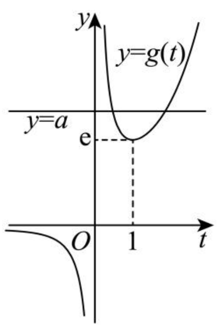
由$g'(t)<0$可得$t<0$或$0<t<1$，由$g'(t)>0$可得$t>1$，

所以，函数$g(t)$在$(-\infty,0)$和$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增. ……………………10 分

所以，函数$g(t)$的极小值为$g(1)=\mathrm{e}$，

且当$t<0$时，$g(t)=\frac{\mathrm{e}^t}{t}<0$；当$t>0$时，则$g(t)=\frac{\mathrm{e}^t}{t}>0$.

作出函数$g(t)$和$y=a$的图象如图所示：



由图可知，当$a>\mathrm{e}$时，函数$y=a$与$g(t)$的图象有两个交点，……………………………12 分

所以，实数a的取值范围是$(\mathrm{e},+\infty)$.

（ii）要证$\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_2}+\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_1}>\frac{2a}{x_1x_2}$，只需证$x_1\mathrm{e}^{x_1}+x_2\mathrm{e}^{x_2}>2a$，即证$\mathrm{e}^{t_1}+\mathrm{e}^{t_2}>2a$.

因为$e^t = at$，所以只需证$t_1 + t_2 > 2$． ……………………………………………………………13 分

由（ⅰ）知，不妨设$0 < t_1 < 1 < t_2$．

因为$e^t = at$，所以$t = \ln a + \ln t$，即$\begin{cases} t_1 = \ln a + \ln t_1 \\ t_2 = \ln a + \ln t_2 \end{cases}$，作差可得$t_2 - t_1 = \ln \frac{t_2}{t_1}$． ……………………14 分

所以只需证$\frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} > \frac{2}{\ln \frac{t_2}{t_1}}$，即只需证$\frac{\frac{t_2}{t_1} + 1}{\frac{t_2}{t_1} - 1} > \frac{2}{\ln \frac{t_2}{t_1}}$．

令$p = \frac{t_2}{t_1}\left(t > 1\right)$，只需证$\ln p > \frac{2\left(p-1\right)}{p+1}$． ……………………………………………………………15 分

令$h\left(p\right) = \ln p - \frac{2\left(p-1\right)}{p+1}$，其中$p > 1$，则$h'\left(p\right) = \frac{1}{p} - \frac{4}{\left(p+1\right)^2} = \frac{\left(p-1\right)^2}{p\left(p+1\right)^2} > 0$，…………………16 分

所以$h\left(p\right)$在$\left(1, +\infty\right)$上单调递增，故$h\left(p\right) > h\left(1\right) = 0$，即$h\left(p\right) > 0$在$\left(1, +\infty\right)$上恒成立．

所以原不等式得证． ……………………………………………………………………………………17 分