绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

福建省部分地市2024届高中毕业班第一次质量检测

数学试题答案及评分参考

2024.1

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	C	B	D	D	C	A

二、多项选择题：

题号	9	10	11	12
答案	BC	BD	AC	ACD

三、填空题：

13．$-\dfrac{3}{5}$；　　14．24；　　15．$\sqrt{2}$；　　16．$\sqrt{26}$；$(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},2)$．

三、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（10分）

已知△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$a^2\cos B+ab\cos A=2c$．

(1) 求a；

(2) 若$A=\dfrac{2\pi}{3}$，且△ABC的周长为$2+\sqrt{5}$，求△ABC的面积.

解：(1) $\because a^2\cos B+ab\cos A=2c$，$\therefore a(a\cos B+b\cos A)=2c$，…………………………1分

由正弦定理，得$a\left(\sin A\cos B+\sin B\cos A\right)=2\sin C$，…………………………2分

即$a\sin(A+B)=2\sin C$，…………………………3分

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore \sin(A+B)=\sin C$，…………………………4分

$\therefore a\sin C=2\sin C$，

$\because 0<C<\pi$，$\therefore \sin C>0$，

$\therefore a=2$．…………………………5分

(2)由(1) 知$a=2$，

在△ABC中，由余弦定理，得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-4}{2bc}$，…………………………6分

$\therefore \dfrac{b^2+c^2-4}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，整理得：$b^2+c^2+bc=4$　　①，…………………………7分

$\because a+b+c=\sqrt{5}+2$，$\therefore b+c=\sqrt{5}$　　②，…………………………8分

由①，②得 $b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc=4$，∴ $bc=1$， ……………………………………9 分

记△ ABC 的面积为 S，

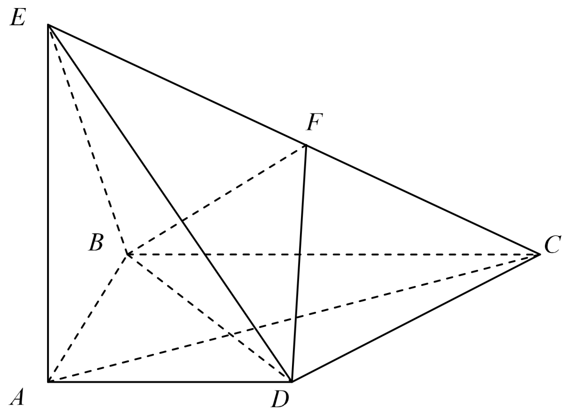
∴ $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$． ……………………………………10 分

18.（12 分）

如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，$AD//BC$，$2AD=BC=2$，$AB=\sqrt{2}$，$AB\perp AD$，$EA\perp$ 平面 $ABCD$，过点 B 作平面 $\alpha\perp BD$．

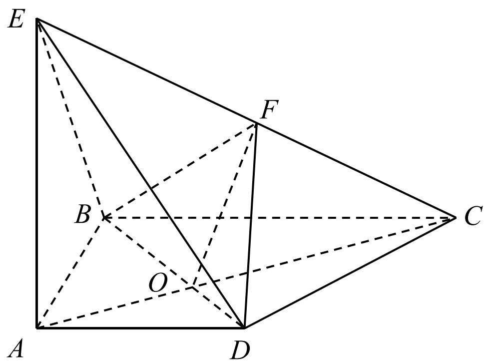
(1) 证明：平面 $\alpha//$ 平面 EAC；

(2) 已知点 F 为棱 EC 的中点，若 $EA=2$，求直线 AD 与平面 FBD 所成角的正弦值.



(第 18 题图)

证明：(1) 设 AC 与 BD 的交点为 O，



∵ $AD//BC$，且 $AB\perp AD$，∴ $AB\perp BC$，

∵ $AD=1$，$AB=\sqrt{2}$，$AB\perp AD$，

且 $AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AB\perp BC$，

∴△ $ABD\sim$△ BCA， …………………………2 分

∴ $\angle ABD=\angle BCA$，

∴ $\angle BAC+\angle ABD=\angle BAC+\angle BCA$，

∵ $AB\perp BC$，∴ $\angle BAC+\angle BCA=90°$，

∴ $\angle BAC+\angle ABD=90°$，

即 $\angle BAO+\angle ABO=90°$，∴ $\angle AOB=90°$，

∴ $AO\perp BO$，即 $AC\perp BD$， ……………………………………4 分

∵ $EA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EA \perp BD$，

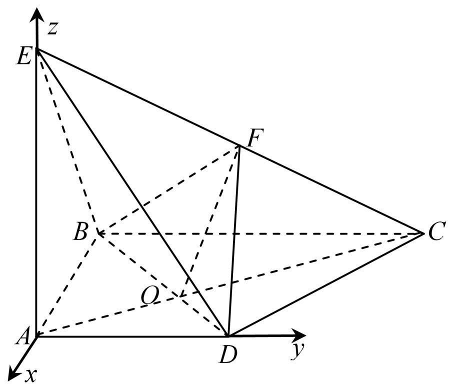
$\because EA \cap AC = A$， $EA, AC \subset$ 平面 EAC，

$\therefore BD \perp$ 平面 EAC，

又$\because \alpha \perp BD$，且 $B \notin$ 平面 EAC，

$\therefore$ 平面 $\alpha //$ 平面 EAC． ……………………………………………………………5 分

(2) （方法一）$\because AB \perp AD$， $EA \perp$ 平面 $ABCD$，



$\therefore AB$， AD， AE 两两垂直.

如图，以 A 为原点， AB， AD， AE 分别为 x 轴，y 轴， z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$， $D(0,1,0)$， $B(-\sqrt{2},0,0)$，

$E(0,0,2)$， $C(-\sqrt{2},2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=(0,1,0)$， $\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},1,0)$， $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$， $\overrightarrow{BE}=(\sqrt{2},0,2)$， ……………8 分

$\because$ 点 F 为棱 EC 的中点，

$\therefore \overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE})=(\frac{\sqrt{2}}{2},1,1)$， ……………………………………………………9 分

设平面 FBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}\sqrt{2}x+y=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+y+z=0,\end{cases}$

取 $x=2$，得 $y=-2\sqrt{2}$， $z=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 平面 FBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2\sqrt{2},\sqrt{2})$， ……………………………………10 分

记直线 AD 与平面 FBD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2\sqrt{2}|}{1\times\sqrt{4+8+2}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

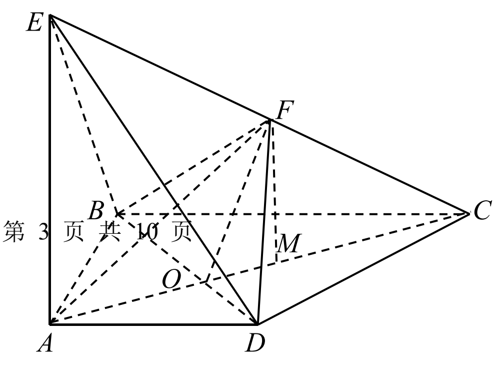
$\therefore$ 直线 AD 与平面 FBD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$． ……………………………………12 分

（方法二）如图，取 AC 中点 M，连接 FM，

$\because F$ 为棱 EC 的中点，

$\therefore FM=\frac{EA}{2}=1$，且 $FM // EA$，

$\because EA \perp$ 平面 $ABCD$，



$\therefore FM\perp$ 平面 $ABCD$， ……………………………6 分

$\because OM\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore FM\perp OM$，

$\because AB\perp AD$， $AB\perp BC$，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3}$， $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6}$， ……………………………7 分

易知$\triangle OBC\sim\triangle ODA$，

$\therefore \dfrac{OA}{OC}=\dfrac{DA}{BC}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore OA=\dfrac{OC}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，即 $OA=\dfrac{AC}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

又 $AM=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore OM=AM-OA=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

$\because FM=1$，且 $FM\perp OM$，$\therefore OF=\sqrt{1+\dfrac{1}{6}}=\sqrt{\dfrac{7}{6}}$， ……………………………8 分

$\because BD\perp$ 平面 EAC， $OF\subset$ 平面 EAC，

$\therefore BD\perp OF$，

$\therefore S_{\Delta FBD}=\dfrac{1}{2}\times BD\times OF=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{\dfrac{7}{6}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$， ……………………………………………9 分

$\because AD=1$， $AB=\sqrt{2}$，且 $AB\perp AD$，$\therefore S_{\Delta ABD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； ……………………………10 分

设 h 为 A 到平面 BFD 的距离，

$\because V_{A-BFD}=V_{F-ABD}$，$\therefore \dfrac{1}{3}S_{\Delta BFD}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABD}\cdot FN$，

即 $\dfrac{\sqrt{14}}{4}\times h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 1$，解得 $h=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$， ……………………………………………………11 分

记直线 AD 与平面 FBD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{h}{AD}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore$直线 AD 与平面 FBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$． ……………………………………12 分

19.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_2=2a_1=4$，当 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geq 2$ 时，$S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}$．

(1) 证明：$\{a_n\}$ 为等比数列；

(2) 设 $b_n=\dfrac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，若 $T_m+\dfrac{1}{7\times 2^{m-2}}>1$，求正整数 m 的最小值．

解：(1) $\because$当 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geq 2$ 时， $S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}$ ，

$\therefore$ 当 $n\geq 2$ 时，$S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})$，

$\therefore a_{n+1}=2a_n\ (n\geq 2)$，……………………………………………………………3 分

$\because a_2=2a_1=4$，$\therefore a_{n+1}=2a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=2$，

$\therefore \{a_n\}$ 是以首项为 2，且公比也为 2 的等比数列. ……………………………………5 分

(2)由(1) 易知 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，……………………………………6 分

$\because b_n=\dfrac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，…………………………8 分

$\therefore T_n=(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7})+\cdots+(\dfrac{1}{2^{n-1}-1}-\dfrac{1}{2^n-1})+(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，…………9 分

$\because T_m+\dfrac{1}{7\times 2^{m-2}}>1$，$\therefore 1-\dfrac{1}{2^{m+1}-1}+\dfrac{1}{7\times 2^{m-2}}>1$，

$\therefore 2^{m+1}-1>7\times 2^{m-2}$，即 $8\times 2^{m-2}-1>7\times 2^{m-2}$，………………………………………10 分

$\therefore 2^{m-2}>1$，$\therefore m-2>0$，$\therefore m>2$，

$\therefore m\geq 3$，即正整数 m 的最小值为 3. ……………………………………………………12 分

20.（12 分）

已知甲、乙两支登山队均有 n 名队员，现有新增的 4 名登山爱好者 a，b，c，d 将依次通过摸出小球的颜色来决定其加入哪支登山队，规则如下：在一个不透明的箱中放有红球和黑球各 2 个，小球除颜色不同之外，其余完全相同．先由第一名新增登山爱好者从箱中不放回地摸出 1 个小球，再另取完全相同的红球和黑球各 1 个放入箱中；接着由下一名新增登山爱好者摸出 1 个小球后，再放入完全相同的红球和黑球各 1 个，如此重复，直至所有新增登山爱好者均摸球和放球完毕．新增登山爱好者若摸出红球，则被分至甲队，否则被分至乙队．

(1) 求 a，b，c 三人均被分至同一队的概率；

(2) 记甲、乙两队的最终人数分别为 n_1，n_2，设随机变量 $X=|n_1-n_2|$，求 $E(X)$．

解：(1) a，b，c 三人均被分至同一队当且仅当三人同分至甲队或同分至乙队．

设事件 A =“a 被分至甲队”，B =“b 被分至甲队”，C =“c 被分至甲队”，

当 a 即将摸球时，箱中有 2 个红球和 2 个黑球，则 a 被分至甲队即 a 摸出红球的概率为

$P(A)=\dfrac{2}{2+2}=\dfrac{1}{2}$，……………………………………………………………1 分

当 a 被分至甲队时，箱中有 2 个红球和 3 个黑球，则 b 被分至甲队即 b 摸出红球的概率为

$P(B\mid A)=\dfrac{2}{2+3}=\dfrac{2}{5}$，……………………………………………………………2 分

当a，b均被分至甲队时，箱中有2个红球和4个黑球，则c被分至甲队即c摸出红球的概率为$P(C|AB)=\frac{2}{2+4}=\frac{1}{3}$， ……………………………………………………3分

$\therefore P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，

$\therefore P(ABC)=P(AB)P(C|AB)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$， ……………………………………4分

同理可知，新增登山爱好者a，b，c均被分至乙队的概率也为$\frac{1}{15}$，

$\therefore a$，b，c三人均被分至同一队的概率为$\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$. ………………………………5分(2)

由题设可知，X的可能取值为4，2，0， ……………………………………………6分

$X=4$表明新增的4名登山爱好者均被分至甲队或乙队，

$\therefore P(X=4)=2\times\frac{2\times2\times2\times2}{4\times5\times6\times7}=\frac{4}{105}$； ……………………………………………………7分

$X=2$表明新增的4名登山爱好者中有3名均被分至同一队，其余1名则被分至另一队，

设新增的第k $(k=1,2,3,4)$名登山爱好者被单独分至甲队或乙队，

则$P_1=P(k=1)=2\times\frac{2\times3\times3\times3}{4\times5\times6\times7}=\frac{9}{70}$，$P_2=P(k=2)=2\times\frac{2\times3\times3\times3}{4\times5\times6\times7}=\frac{9}{70}$，

$P_3=P(k=3)=2\times\frac{2\times2\times4\times3}{4\times5\times6\times7}=\frac{4}{35}$，$P_4=P(k=4)=2\times\frac{2\times2\times2\times5}{4\times5\times6\times7}=\frac{2}{21}$，

……………………………………9分

$\therefore P(X=2)=P_1+P_2+P_3+P_4=\frac{7}{15}$； ……………………………………………………10分

$X=0$表明新增的4名登山爱好者中各有2名被分至甲队和乙队，

$\therefore P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=4)=\frac{52}{105}$； ……………………………………………11分

$\therefore X$的数学期望$E(X)=4\times\frac{4}{105}+2\times\frac{7}{15}+0\times\frac{52}{105}=\frac{38}{35}$. ………………………………12分

21.（12分）

已知函数$f(x)=a\ln x-\frac{x-1}{x+1}$有两个极值点$x_1$，$x_2$.

(1) 求实数a的取值范围；

(2) 证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\frac{a-2a^2}{a-1}$.

解：(1) 易知$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2(a-1)x+a}{x(x+1)}(x>0)$， ………………………1分

若$a\le0$，则$f'(x)\le0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不可能有两个极值点，与题设矛盾，

$\therefore a>0$， ……………………………………………………………………2 分

$\because f(x)$ 有两个极值点 x_1， x_2，

$\therefore$关于 x 的方程 $ax^2+2(a-1)x+a=0$ $(a>0)$ 有两个相异的正实数根 x_1， x_2， ………3 分

$$\therefore \begin{cases} \Delta=4(a-1)^2-4a^2=4(1-2a)>0, \\ -\dfrac{a-1}{a}>0, \\ a>0, \end{cases}$$ ……………………………………………………4 分

解得 $0<a<\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$实数 a 的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{2})$． ……………………………………………………5 分

(2) 由(1)知， $0<a<\dfrac{1}{2}$，且 $x_1+x_2=\dfrac{2(1-a)}{a}$， $x_1x_2=1$， ………………………………6 分

不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

化简可得 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{a\ln x_1-\dfrac{x_1-1}{x_1+1}-a\ln x_2+\dfrac{x_2-1}{x_2+1}}{x_1-x_2}=\dfrac{a\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{2(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}}{x_1-x_2}$

$=\dfrac{a\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}-\dfrac{2}{x_1x_2+1+x_1+x_2}$， ……………………………………………7 分

$\therefore \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}-\dfrac{2}{2+\dfrac{2(1-a)}{a}}=\dfrac{a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}-a$， ……………………8 分

欲证 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\dfrac{a-2a^2}{a-1}$， 只需证 $\dfrac{1-2a}{a-1}<\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-1$，只需证 $\dfrac{a}{1-a}<\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

只需证 $\dfrac{2}{x_1+x_2}<\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$， 只需证 $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{\dfrac{x_1}{x_2}-1}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}$，

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，则需证 $\dfrac{1}{2}\ln t<\dfrac{t-1}{t+1}$， ………………………………………10 分

由(1)知，当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时， $ax^2+2(a-1)x+a=\dfrac{1}{2}(x-1)^2\geq 0$ ，即 $f'(x)\geq 0$，

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， ……………………………………………11 分

$\because 0<t<1$，$\therefore f(t)<f(1)=0$，即 $\dfrac{1}{2}\ln t-\dfrac{t-1}{t+1}<0$， 即 $\dfrac{1}{2}\ln t<\dfrac{t-1}{t+1}$，

$\therefore \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\dfrac{a-2a^2}{a-1}$． ……………………………………………………………12 分

22．（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(1,0)$，点 A 为动点，以线段 AP 为直径的圆与 y 轴相切，记 A 的轨迹为 Γ，直线 AP 交 Γ 于另一点 B．

(1) 求 Γ 的方程；

(2) $\triangle OAB$ 的外接圆交 Γ 于点 C（不与 O，A，B 重合），依次连接 O，A，C，B 构成凸四边形 $OACB$，记其面积为 S．

(i) 证明：$\triangle ABC$ 的重心在定直线上；

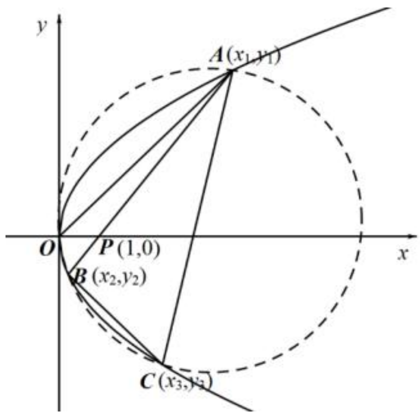
(ii) 求 S 的取值范围．

解：(1) 设 $A(x,y)$，则线段 AP 的中点坐标为 $(\dfrac{x+1}{2},\dfrac{y}{2})$， ………………………………1 分

$\because$ 以线段 AP 为直径的圆与 y 轴相切，$\therefore \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{2}|AP|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}$， ……………2 分

化简，得 $y^2=4x$． ……………………………………………………………………3 分

(2) (i)如图，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，



（方法一）$\because O$，A，C，B 四点共圆，

$\therefore \angle OAB=\angle OCB$， ………………………………4 分

由对称性可知直线 OA，AB，OC，BC 的斜率存在，不妨设其分别为 k_1，k_2，k_3，k_4，

且 OA，AB，OC，BC 的倾斜角为 α_1，α_2，α_3，α_4，

$\therefore \angle OAB=\alpha_2-\alpha_1$，$\angle OCB=\alpha_4-\alpha_3$，

$\because \angle OAB=\angle OCB$，$\therefore \tan\angle OAB=\tan\angle OCB$，

$\therefore \dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\dfrac{k_4-k_3}{1+k_3k_4}$ ①， ……………………………………………………5 分

$\because k_1=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_1}{\frac{1}{4}{y_1}^2}=\dfrac{4}{y_1}$，

$\therefore$ 同理可得 $k_2=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，$k_3=\dfrac{4}{y_3}$，$k_4=\dfrac{4}{y_2+y_3}$，

代入①并化简，得$\dfrac{y_2}{y_1(y_1+y_2)+16}=\dfrac{y_2}{y_3(y_2+y_3)+16}$， ……………………………………6 分

即$y_1(y_1+y_2)=y_3(y_2+y_3)$，即$(y_1-y_3)(y_1+y_2+y_3)=0$，

$\because y_1\neq y_3$，$\therefore y_1+y_2+y_3=0$，即$\dfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)=0$，

$\because$△ABC的重心的纵坐标为$\dfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$，

$\therefore$△ABC的重心在定直线$y=0$上．……………………………………………………………7 分

（方法二）$\because O$，A，C，B四点共圆，设该圆方程为$x^2+y^2+dx+ey=0$，

联立$\begin{cases}x^2+y^2+dx+ey=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$消去$x$，得$y^4+(4d+16)y^2+16ey=0$， ……………………4 分

即$y(y^3+(4d+16)y+16e)=0$，

$\therefore y_1$，y_2，y_3即为关于y的方程$y^3+(4d+16)y+16e=0$的3个根，………………………5 分

则$y^3+(4d+16)y+16e=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$，

$\because (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)=y^3-(y_1+y_2+y_3)y^2+(y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3)y-y_1y_2y_3$

由y^2的系数对应相等得，$y_1+y_2+y_3=0$，即$\dfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)=0$，

$\because$△ABC的重心的纵坐标为$\dfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$，………………………………………………6 分

$\therefore$△ABC的重心在定直线$y=0$上．……………………………………………………………7 分

(ii) 记△OAB和△ABC的面积分别为S_1和S_2，

设直线$AB:x=my+1$，联立$\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$消去$x$，得$y^2-4my-4=0$，

$\therefore y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，

$\therefore S_1=\dfrac{1}{2}\cdot|OP|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{16m^2+16}=2\sqrt{m^2+1}$，………………………………8 分

由(i)得，$y_3=-(y_1+y_2)=-4m$，

$\therefore x_3=\dfrac{1}{4}{y_3}^2=4m^2$，即$C(4m^2,-4m)$，……………………………………………………9 分

$\because |AB|=x_1+x_2+2=m(y_1+y_2)+4=4m^2+4$，$C$到直线$AB$的距离$d=\dfrac{|8m^2-1|}{\sqrt{m^2+1}}$，

$\therefore S_2=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot(4m^2+4)\cdot\dfrac{|8m^2-1|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{m^2+1}\,|8m^2-1|$，

$\therefore S=S_1+S_2=2\sqrt{m^2+1}(1+|8m^2-1|)$，……………………………………………10 分

不妨设 $m>0$，且 A 在第一象限，即 $y_1>0$， $y_2<0$， $y_3=-4m<0$，

依次连接 O， A， C， B 构成凸四边形 $OACB$，$\therefore y_3=-(y_1+y_2)<y_2$，即 $-y_1<2y_2$，

又$\because y_1y_2=-4$，$\therefore \dfrac{4}{y_2}<2y_2$，即 ${y_2}^2<2$，即 $-\sqrt{2}<y_2<0$，

$\therefore 4m=y_1+y_2=y_2-\dfrac{4}{y_2}>-\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\sqrt{2}$，即 $m>\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，即 $m^2>\dfrac{1}{8}$，………………11 分

$\therefore S=2\sqrt{m^2+1}(1+|8m^2-1|)=16m^2\sqrt{m^2+1}$，

设 $t=\sqrt{m^2+1}$，则 $t>\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

令 $f(t)=16t(t^2-1)$，则 $f'(t)=16(3t^2-1)$，

$\because t>\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$\therefore f'(t)=16(3t^2-1)>0$，$\therefore f(t)$ 在区间 $(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(t)>f(\dfrac{3\sqrt{2}}{4})=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S$ 的取值范围为 $(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},+\infty)$． ……………………………………………………………12 分