

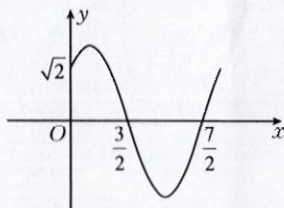
高三9月数学试卷

注意事项:

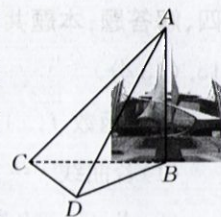
1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:集合、常用逻辑用语、不等式、函数的概念与性质、一元函数的导数及其应用、平面向量、三角函数与解三角形。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M=\{-1,2,3\}$, $N=\{-1,0,2,5\}$, 则 $M \cup N =$
A. $\{-1,2\}$ B. $\{-1,2,3\}$
C. $\{-1,0,2,5\}$ D. $\{-1,0,2,3,5\}$
2. 若向量 $\mathbf{a}=(-1,2)$, $\mathbf{b}=(m+1,2)$, 且 $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 则 $m =$
A. -8 B. 8 C. -2 D. 2
3. 已知 $f(x)=x^\alpha$ 是幂函数, 则“ α 是正偶数”是“ $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 若 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) =$
A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$
C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{7}{9}$
5. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 则
A. $f(-4) - f(4) > 0$ B. $f(-4) + f(4) > 0$
C. $f(-3) + f(4) > 0$ D. $f(-3) + f(4) < 0$
6. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示, 则 $f(2) =$
A. -1 B. $-\sqrt{2}$
C. $-\sqrt{3}$ D. -2



7. “三山一水”城市雕塑位于福建省福州市五一广场, 是福州市的标志性雕塑. 这座雕塑以福州的自然景观和历史文化为灵感, 通过艺术的形式展现了福州“三山两塔一条江”的独特城市风貌和地域文化特色. 如图, 为了测量“三山一水”城市雕塑的高度, 选取了与该雕塑底部 B 在同一平面内的两个测量基点 C 与 D . 现测得 $\angle CBD = 30^\circ$, $CD = 23.8$ m, 在 C 点测得雕塑顶端 A 的仰角为 45° , 在 D 点测得雕塑顶端 A 的仰角为 30° , 则雕塑的高度 $AB =$



- A. 47.6 m B. 35.7 m
C. 23.8 m D. 11.9 m

8. 已知函数 $f(x) = \ln x - (a+1)x + 1$, $g(x) = a(x^2 + 1)$. 当 $x \geq 1$ 时, $2f(x) + g(x) \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为

- A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(0, 1]$ D. $[1, +\infty)$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分。

9. 已知函数 $f(x) = (x^2 - 6)(2x - 3)$, 则
A. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减
B. $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增
C. $f(x)$ 有3个零点
D. 直线 $y = -3$ 与 $f(x)$ 的图象仅有1个公共点
10. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \sin B + c \sin A = 5 \sin A$, $bc = b + c + 1$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长可能为
A. 8 B. $5 + \sqrt{17}$ C. 9 D. $5 + \sqrt{15}$
11. 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x + x$, 则下列结论正确的是
A. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称
B. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ 对称
C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
D. $x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的极大值点

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分。

12. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = 4$, $\tan(\alpha - \beta) = -3$, 则 $\tan 2\beta =$ \blacktriangle .
13. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a} = ab$, 则 $\frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} =$ \blacktriangle , $\sqrt{a} + 2\sqrt{b}$ 的最小值为 \blacktriangle .
14. 对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 函数 $g(x)$ 满足 $g(x+y) = g(x)g(y)$. 若 $f(2) = -1$, $g(3) = 8$, 则 $g(f(2024)) =$ \blacktriangle .

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

已知函数 $f(x) = x - x \ln x - a$.

(1)若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = bx + 2$, 求 a 和 b 的值;

(2)求 $f(x)$ 的单调区间与最大值.

16. (15 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A - a \cos B = 0$.

(1)求角 B 的大小;

(2)若 $c = \sqrt{2}, b = \sqrt{5}$, 求 a ;

(3)若 $c = 2\sqrt{2}a$, 求 $\tan A$ 的值.

17. (15 分)

已知函数 $f(x+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}a, & x < 0, \\ ax^2 + (2a-1)x + a+1, & x \geq 0. \end{cases}$

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)若函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调, 求 a 的取值范围.

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{2} \cos^2 x + 2\sqrt{2} \sin x \cos x$.

(1)将 $f(x)$ 化成 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的形式;

(2)求 $f(x)$ 的单调区间;

(3)若 $f(x)$ 在 $[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{4}]$ 上的值域为 $[a, b]$, 求 $b - a$ 的取值范围.

19. (17 分)

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在 x_1, x_2 ($a < x_1 < x_2 < b$), 使得 $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, f'(x_2) =$

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 则称 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的“双中值函数”, 其中 x_1, x_2 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的中值点.

(1)判断函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 是否是 $[-1, 3]$ 上的“双中值函数”, 并说明理由.

(2)已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \ln x - ax$, 存在 $m > n > 0$, 使得 $f(m) = f(n)$, 且 $f(x)$ 是 $[n, m]$ 上的“双中值函数”, x_1, x_2 是 $f(x)$ 在 $[n, m]$ 上的中值点.

①求 a 的取值范围;

②证明: $x_1 + x_2 > a + 2$.