2023-2024 学年宁德市普通高中高二下学期期末质量检查

数学试题参考答案及评分标准

说明：

1.本解答指出了每题要考察的主要知识和能力，给出一种或几种解法供参考．如果考生的解法与给出的解法不同，可根据试题的主要考察内容比照评分标准确定相应的评分细则．

2.对解答题，当考生的解答在某一步出现错误，但整体解决方案可行且后续步骤没有出现推理或计算错误，则错误部分依细则扣分，并根据对后续步骤影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过后续部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3.解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4.解答题只给整数分数，填空题不给中间分．

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算，每小题 5 分，满分 40 分．

1．B　2．C　3．A　4．C　5．C　6．D　7．B　8．A

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．AC　10．ABD　11．ABD

三、填空题：本题考查基础知识和基本运算，每小题 5 分，满分 15 分．

12．12　13. $-\dfrac{2}{27}$　14．$[\mathrm{e},+\infty)$

四、解答题：本大题共 5 小题，满分 77 分，解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

15. 本题主要考三次函数极值、零点、图象等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想、函数与方程思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．满分 13 分．

（1）$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$，……………………………………………………1 分

因为 $x=1$ 是 $f(x)$ 极值点，所以 $f'(1)=6(1-a)=0$，

解得 $a=1$，……………………………………………………………………3 分

经检验，$a=1$ 符合题意，所以 $a=1$……………………………………………………4 分

（2）若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，则曲线 $f(x)$ 与直线 $y=m$ 有三个不同的交点, ………………5 分

由（1）可得 $f(x)=2x^3-3x^2$，

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$，……………………………………………………6 分

令 $f'(x)=0$，则 $x=0$ 或 $x=1$……………………………………………………7 分

当 $x\le 0$ 时，$f'(x)\ge 0$，此时 $f(x)$ 单调递增,

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)\le 0$，此时 $f(x)$ 单调递减,

当 $x\ge 1$ 时，$f'(x)\ge 0$，此时 $f(x)$ 单调递增

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减. ……………………10 分

所以 $f(x)_{极小值}=f(1)=-1$;……………………………………………………11 分

$f(x)_{极大值}=f(0)=0$……………………………………………………12 分

又 $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$, $f(x)\to+\infty$

所以 $-1<m<0$

即实数 m 的取值范围为 $(-1,0)$ .. ……………………………………………………………………13 分

16. 本小题主要考查一元线性回归方程、概率分布列、超几何分布、期望等基础知识，考查数据处理能力、运算求解、数学建模能力，考查然与必然思想、化归与转化思想等，考查数学抽象、逻辑推理、数学建模、数据分析和数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 15 分．

（1）$\bar{x}=\dfrac{2+4+5+6+8}{5}=5$，$\bar{y}=\dfrac{3+4+4+5+5}{5}=\dfrac{21}{5}$，………………………………………………………2 分

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i\cdot y_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\dfrac{112-5\times5\times\dfrac{21}{5}}{145-5\times5^2}=\dfrac{7}{20}$，……………………………………………………………3 分

$a=\bar{y}-b\bar{x}=\dfrac{21}{5}-\dfrac{7}{20}\times5=\dfrac{49}{20}$，……………………………………………………………………4 分

所以 $y=\dfrac{7}{20}x+\dfrac{49}{20}$，………………………………………………………………………………5 分

当 $x=12$ 时，$y=6.65$（百千克）. …………………………………………………………………7 分

所以预测当液体肥料每亩使用量为 12 千克时，豆角亩产量的增加量为 6.65 百千克..………………8 分

（2）由表可知，优质试验田有 2 亩，……………………………………………………………………9 分

所以 X 的可能取值为 0，1，2，…………………………………………………………………………10 分

$P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$；$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{5}$；$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$ ……………………………………13 分

故 X 分布列为

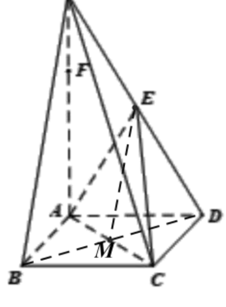
X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{3}{10}$

………………………………………………………………………14 分

$E(X)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{6}{5}$ ……………………………………………………………15 分

或因为 $X\sim H(5,2,3)$，所以 $E(X)=3\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}$

17．本小题主要考查空间中直线与直线、直线与平面的位置关系，空间角的计算、函数的最值等基础知识，考查空间想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．满分 15 分



解法一：（1）存在符合题意的点 M，

此时点 M 为线段 AC 的中点……………………………………………………1 分

因为底面 $ABCD$ 为正方形

所以 M 也为线段 BD 的中点…………………………………………………2 分

又 E 为 PD 的中点

则 EM 为 ΔDPB 的中位线……………………………………………………3 分

$EM // PB$ …………………………………………………………………………4 分

因为 $PB\subset$ 平面 PAB，

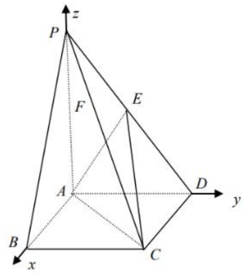
$EM \not\subset$ 平面 PAB ……………………………………………………………………………5 分

所以 $EM //$ 平面 PAB ……………………………………………………………………6 分

此时 $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{1}{2}$ …………………………………………………………………………7 分

（2）如图，

以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立空间直角坐标系……8 分



则 $A(0,0,0),C(1,1,0),E(0,\frac{1}{2},1),D(0,1,0)$ ……………………………………9 分

则 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,\frac{1}{2},1)$

设平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y=0\\ \frac{1}{2}y+z=0\end{cases}$

令 $x=2$，则 $y=-2,z=1$，即 $\vec{n}=(2,-2,1)$ ……………………………………………………10 分

因为点 F 在线段 PA 上运动，可设 $F(0,0,t)(0\le t\le 2)$

则 $\overrightarrow{DF}=(0,-1,t)$ ………………………………………………………………………………11 分

设直线 DF 与平面 ACE 所成角为 θ

则 $\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{DF}>\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{DF}\right|}=\dfrac{|2+t|}{3\sqrt{1+t^2}}$ ………………………………………………12 分

所以 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{4+4t+t^2}{1+t^2}$

设 $g(t)=\dfrac{4+4t+t^2}{1+t^2}$，则 $g'(t)=\dfrac{-2(2t^2+3t-2)}{(1+t^2)^2}$ …………………………………………13 分

因为当 $t\in[0,\frac{1}{2})$ 时，$g'(t)>0$，当 $t\in[\frac{1}{2},1]$ 时，$g'(t)<0$

所以 $g(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，在 $[\frac{1}{2},1]$ 上单调递减

所以当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，$g(t)$ 取得最大值，即 $\sin^2\theta$ 取得最大值……………………………………14 分

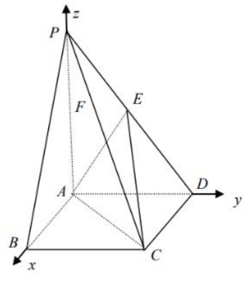
又 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，函数 $y=\sin x$ 单调递增.

所以直线 DF 与平面 ACE 所成角 θ 最大时，线段 AF 的长度为 $\dfrac{1}{2}$ ………………………………15 分

解法二：

（1）如图，

以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立空间直角坐标系……1 分



$A(0,0,0),C(1,1,0),E(0,\frac{1}{2},1)$ ……………………………………………………2 分

假设存在满足题意的点 M，

设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}(0\le\lambda\le 1)$，

则 $\overrightarrow{AM}=(\lambda,\lambda,0)$.

$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AE}=(\lambda,\lambda-\frac{1}{2},-1)$ ……………………………………………3 分

因为平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,1,0)$ ……………………………………4 分

若 $EM//$ 平面 PAB，

则 $\overrightarrow{EM}\perp\vec{m}$ 即 $\overrightarrow{EM}\cdot\vec{m}=(\lambda,\lambda-\frac{1}{2},-1)\cdot(0,1,0)=\lambda-\frac{1}{2}=0$.

解得 $\lambda=\frac{1}{2}\in[0,1]$……………………………………………………………………5 分

又 $EM\not\subset$ 平面 PAB，

所以 $EM//$ 平面 PAB……………………………………………………………………6 分

所以存在满足题意的点 M，此时 $\frac{AM}{AC}=\frac{1}{2}$……………………………………………………7 分

（2）$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,\frac{1}{2},1)$ ……………………………………………………………8 分

设平面 ACE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y=0\\ \frac{1}{2}y+z=0\end{cases}$，

令 $x=2$，则 $y=-2,z=1$，即 $\vec{n}=(2,-2,1)$……………………………………………………10 分

又点 F 在线段 PA 上运动，设 $F(0,0,t)(0\le t\le 2)$，

则 $\overrightarrow{DF}=(0,-1,t)$……………………………………………………………………11 分

设直线 DF 与平面 ACE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{DF}>\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{DF}\right|}=\frac{|2+t|}{3\sqrt{1+t^2}}$……………………………………………12 分

令 $2+t=m(2\le m\le 4)$

则 $\sin\theta=\frac{2+t}{3\sqrt{1+t^2}}=\frac{m}{3\sqrt{m^2-4m+5}}$

$=\frac{1}{3\sqrt{1-\frac{4}{m}+\frac{5}{m^2}}}$……………………………………………………………13 分

当 $\frac{1}{m}=\frac{2}{5}$ 时，$f(m)=1-\frac{4}{m}+\frac{5}{m^2}$ 取得最小值 $\frac{1}{5}$.

此时 $2+t=\frac{5}{2}$，解得 $t=\frac{1}{2}\in[0,2]$……………………………………………………………14 分

又 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，函数 $y=\sin x$ 单调递增.

所以直线 DF 与平面 ACE 所成角 θ 最大时，线段 AF 的长度为 $\frac{1}{2}$……………………………15 分

解法三：

（1）同解法一、解法二

（2）过点 D 作平面 ACE 的垂线，垂足为 N，

连接 DF 交 AE 于 G，…………………………………………………8 分

则直线 DF 与平面 ACE 所成角即为 $\angle DGN$ ……………………………9 分

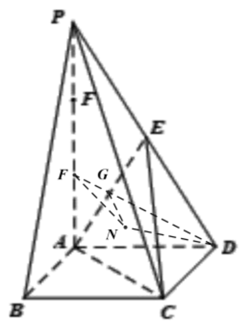
所以 $\sin\angle DGN=\frac{DN}{DG}$ ……………………………………………………10 分

又 DN 为定值,

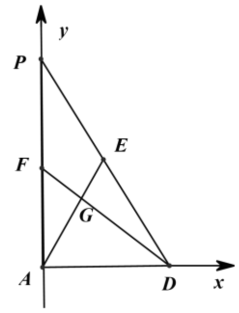
当 DG 最小时，$\angle DGN$ 最大…………………………………………11 分

此时，$DG\perp AE$.

即 $DF\perp AE$ ………………………………………………………………12 分



如图建立平面直角坐标系，



$A(0,0),D(1,0),E(\frac{1}{2},1),F(0,t)(0\le t\le 2)$ ……………………………………13 分

$\overrightarrow{DF}=(-1,t),\overrightarrow{AE}=(\frac{1}{2},1)$.

因为 $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AE}=(-1,t)\cdot(\frac{1}{2},1)=-\frac{1}{2}+t=0$.

解得 $t=\frac{1}{2}\in[0,2]$ ……………………………………………………………14 分

所以直线 DF 与平面 ACE 所成角 θ 最大时，线段 AF 的长度为 $\frac{1}{2}$ ……………………………15 分

18. 本小题主要考查全概率公式、概率的分布列及期望、递推数列及等比数列等基础知识，考查数学建模能力、运算求解能力、数据处理能力、应用意识，考查或然与必然思想、化归与转化思想，考查数学抽象、逻辑推理、数学建模、数据分析和数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 17 分．

（1）由频率分布直方图，得 $10\times\left(0.005+a+0.019+0.03+0.02+a+0.002\right)=1$，

解得 $a=0.012$． ……………………………………………………………………………2 分

（2）由题意得 $\mu=80\times0.05+90\times0.12+100\times0.19+110\times0.3+120\times0.2+130\times0.12+140\times0.02=109.2$

……………………………………………………………4 分

$X\sim N\left(109.2,13^2\right)$，$P\left(X>135.2\right)=P\left(X>\mu+2\sigma\right)=\dfrac{1-P\left(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma\right)}{2}\approx0.02275$ ……5 分

$Y\sim B\left(10,0.02275\right)$ ……………………………………………………………………………6 分

$E(Y)=np=0.2275\approx0.23$ ………………………………………………………………………7 分

（3）记甲同学第 $n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 关通过为事件 A_n，依题意，$P_1=\frac{1}{3}$， ……………………………8 分

当 $n\ge2$ 时，$P\left(A_n\mid A_{n-1}\right)=\frac{1}{3}$，$P\left(A_n\mid\overline{A_{n-1}}\right)=\frac{1}{2}$，$P_n=P\left(A_n\right)$， ……………………………10 分

所以 $P\left(A_n\right)=P\left(A_{n-1}\right)P\left(A_n\mid A_{n-1}\right)+P\left(\overline{A_{n-1}}\right)P\left(A_n\mid\overline{A_{n-1}}\right)$， ……………………………11 分

所以 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{2}(1-P_{n-1})=-\frac{1}{6}P_{n-1}+\frac{1}{2}$，

所以 $P_n-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(P_{n-1}-\frac{3}{7}\right)$， ……………………………………………………………11 分

又因为 $P_1=\frac{1}{3}$，则 $P_1-\frac{3}{7}=-\frac{2}{21}\ne0$，

所以数列 $\left\{P_n-\frac{3}{7}\right\}$ 是首项为 $-\frac{2}{21}$，公比为 $-\frac{1}{6}$ 的等比数列， ……………………………12 分

所以 $P_n=\frac{3}{7}-\frac{2}{21}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$． ……………………………………………………………13 分

当 n 为奇数时，$P_n=\frac{3}{7}-\frac{2}{21}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{3}{7}-\frac{2}{21}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}<\frac{3}{7}$， ……………………………………14 分

当 n 为偶数时，$P_n=\frac{3}{7}+\frac{2}{21}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$，则 P_n 随着 n 的增大而减小，……………………………………15 分

所以，$P_n\le P_2=\frac{4}{9}$ ………………………………………………………………………………16 分

又 $\frac{4}{9}>\frac{3}{7}$，

所以 P_n 的最大值为 $\frac{4}{9}$ ………………………………………………………………………………17 分

19. 本小题主要考查导数及其应用、函数的零点和不等式等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性，满分 17 分.

解法一：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，……………………………………………………………1 分

$$f'(x)=1+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x+a}{x^2}.$$

令 $g(x)=x^2+x+a, x>0,\ \Delta=1-4a$，

①当 $\Delta=1-4a\le 0$, 即 $a\ge\frac{1}{4}$ 时，$g(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

此时 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以当 $a\ge\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.……………………………………………………………3 分

②当 $\Delta=1-4a>0$, 即 $a<\frac{1}{4}$ 时，

（i）当 $a<0$ 时，由 $\begin{cases}x>0,\\ g(x)>0,\end{cases}$ 可解得 $x>\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$, 此时 $f'(x)>0$,

由 $\begin{cases}x>0,\\ g(x)<0,\end{cases}$ 可解得 $0<x<\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$, 此时 $f'(x)<0$,

所以当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递增………………5 分

(ii)当 $0\le a<\frac{1}{4}$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………6 分

综上所述，当 $a\ge 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递增………………………………………………………………………………7 分

(也可表述为：当 $a\ge 0$ 时，$f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$，无单调减区间；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(0,\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2})$，单调增区间为 $(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$)

（2）因为 $f'(x)=1+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}$，所以 $k_1=1+\frac{a}{{x_1}^2}+\frac{1}{x_1}, k_2=1+\frac{a}{{x_2}^2}+\frac{1}{x_2}$,

$$k_3=\frac{x_2-\frac{a}{x_2}+\ln x_2-x_1+\frac{a}{x_1}-\ln x_1}{x_2-x_1}=1+\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}+a(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})}{x_2-x_1},$$

要证 $k_1+k_2-2k_3>0$，只要证 $1+\frac{a}{x_1^2}+\frac{1}{x_1}+1+\frac{a}{x_2^2}+\frac{1}{x_2}>2(1+\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}+a(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})}{x_2-x_1})$，……………………9 分

不妨设 $x_1<x_2$，则只要证 $(\frac{a}{x_1^2}+\frac{1}{x_1}+\frac{a}{x_2^2}+\frac{1}{x_2})(x_2-x_1)>2[\ln\frac{x_2}{x_1}+a(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})]$，

只要证 $a(\frac{x_2}{x_1^2}-\frac{x_1}{x_2^2}-\frac{3}{x_1}+\frac{3}{x_2})>2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$，

只要证 $\frac{a}{x_2}(\frac{x_2^2}{x_1^2}-\frac{x_1}{x_2}-\frac{3x_2}{x_1}+3)>2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ ……………………………………………………………10 分

令 $\frac{x_2}{x_1}=t$，因为 $x_1,x_2\in(0,1]$ 且 $x_1<x_2$，则 $t>1$，

所以只要证 $\frac{a}{x_2}(t^2-\frac{1}{t}-3t+3)>2\ln t-t+\frac{1}{t}$ ……………………………………………………………………12 分

设 $h(t)=t^2-\frac{1}{t}-3t+3$，$t>1$，

则 $h'(t)=2t+\frac{1}{t^2}-3=\frac{(t-1)(2t+1)}{t^2}>0$，当 $t>1$ 时恒成立，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(t)>h(1)=0$. ……………………………………………………………14 分

设 $m(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t},\ t>1.$

$m'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$，当 $t>1$ 时恒成立，

所以 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $m(t)<m(1)=0$. ……………………………………………………………16 分

因为 $a>0,x_2>0,$ 所以 $\frac{a}{x_2}h(t)>0>m(t),$

所以原不等式得证…………………………………………………………………………………………17 分

解法二:

（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，……………………………………………………………………1 分

$f'(x)=1+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x+a}{x^2}$ ……………………………………………………………………………2 分

令 $g(x)=x^2+x+a,x>0,\ \Delta=1-4a$，

①当 $a\geq 0$ 时，$f'(x)\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；…………………………4 分

②当 $a<0$ 时，$\Delta=1-4a>0$，

若 $0<x<\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调递减，

若 $x>\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调递增……………………………………………………6 分

所以当 $a<0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a\ge 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a<0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2})$ 上单调递减，

在 $(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$ 上单调递增……………………………………………………………………7 分

（注：此处综上所述未写不扣分）

（2）因为 $f'(x)=1+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}$，所以 $k_1=1+\frac{a}{{x_1}^2}+\frac{1}{x_1},k_2=1+\frac{a}{{x_2}^2}+\frac{1}{x_2}$,

$$k_3=\frac{x_2-\frac{a}{x_2}+\ln x_2-x_1+\frac{a}{x_1}-\ln x_1}{x_2-x_1}=1+\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}+a(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})}{x_2-x_1},$$

要证 $k_1+k_2-2k_3>0$，只要证 $1+\frac{a}{{x_1}^2}+\frac{1}{x_1}+1+\frac{a}{{x_2}^2}+\frac{1}{x_2}>2(1+\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}+a(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})}{x_2-x_1})$，……………………9 分

不妨设 $x_1<x_2$，则只要证 $(\frac{a}{{x_1}^2}+\frac{1}{x_1}+\frac{a}{{x_2}^2}+\frac{1}{x_2})(x_2-x_1)>2[\ln\frac{x_2}{x_1}+a(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})]$，

只要证 $a(\frac{x_2}{{x_1}^2}-\frac{x_1}{{x_2}^2}-\frac{3}{x_1}+\frac{3}{x_2})>2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$，

只要证 $\frac{a}{x_2}(\frac{{x_2}^2}{{x_1}^2}-\frac{x_1}{x_2}-\frac{3x_2}{x_1}+3)>2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$， ……………………………………………………………10 分

令 $\frac{x_2}{x_1}=t$，因为 $x_1,x_2\in(0,1]$ 且 $x_1<x_2$，则 $t>1$，

所以只要证 $\frac{a}{x_2}(t^2-\frac{1}{t}-3t+3)>2\ln t-t+\frac{1}{t}$……………………………………………………………………12 分

设 $h(t)=t^2-\frac{1}{t}-3t+3$， $t>1$，

则 $h'(t)=2t+\frac{1}{t^2}-3=\frac{(t-1)(2t+1)}{t^2}>0$，当 $t>1$ 时恒成立，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(t)>h(1)=0$.…………………………………………………14 分

因为 $a\ge 1$， $x_2\in(0,1]$

所以 $\frac{a}{x_2}(t^2-\frac{1}{t}-3t+3)>t^2-\frac{1}{t}-3t+3$…………………………………………………………………15 分

所以只要证 $t^2-\frac{1}{t}-3t+3>2\ln t-t+\frac{1}{t}$，

设 $m(t)=t^2-\frac{1}{t}-3t+3-(2\ln t-t+\frac{1}{t})$，

$m'(t)=2t+\frac{2}{t^2}-2-\frac{2}{t}=\frac{2(t^3+1-t^2-t)}{t^2}=\frac{(t-1)^2(t+1)}{t^2}>0$， ……………………………………………16 分

所以 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m(t)>m(1)=0$.

所以 $t^2-\frac{1}{t}-3t+3>2\ln t-t+\frac{1}{t}$ 得证……………………………………………………………………17 分