高三 9 月数学试卷参考答案

1. D　$M\cup N=\{-1,0,2,3,5\}$.

2. B　由题意得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(m,4)$. 因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, 所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=-m+8=0$, 即 $m=8$.

3. A　当 α 是正偶数时, $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$. 当 $f(x)=\sqrt{x}$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$, 但 α 不是正偶数. 故“α 是正偶数”是“$f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$”的充分不必要条件.

4. D　由题意可得 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)=1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$.

5. D　因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-4)=-f(4)$, 则 $f(-4)+f(4)=0$, $f(-4)-f(4)=-2f(4)$, 所以 A, B 均错误. 因为 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(3)>f(4)$, 则 $f(3)=-f(-3)>f(4)$, 得 $f(-3)+f(4)<0$, C 错误, D 正确.

6. B　由 $\frac{T}{2}=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$, 得 $T=4$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$. 由图可知 $f\left(\frac{3}{2}\right)=A\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=0$, 则 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$, 得 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$, 又 $|\varphi|<\pi$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 由图可知 $f(0)=A\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$, 得 $A=2$. 综上, $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$, 得 $f(2)=2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$.

7. C　设 $AB=x$ m, 则 $BC=x$ m, $BD=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$ m, 在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos\angle CBD$, 即 $23.8^2=x^2+3x^2-3x^2$, 得 $x=23.8$.

8. D　令 $h(x)=2f(x)+g(x)=2\ln x-2(a+1)x+ax^2+a+2(x\geqslant1)$, 则 $h'(x)=\frac{2}{x}-2(a+1)+2ax=\frac{2(x-1)(ax-1)}{x}$. 若 $a\leqslant0$, 则 $h'(x)\leqslant0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立, 则 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减, 则 $h(x)\leqslant h(1)=0$, 不符合题意. 若 $0<a<1$, 则当 $x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减, 则 $h(x)\leqslant h(1)=0$, 不符合题意. 若 $a\geqslant1$, 则 $h'(x)\geqslant0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立, 则 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增, 即 $h(x)\geqslant h(1)=0$, 符合题意. 故 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

9. ACD　由题意得 $f'(x)=2x(2x-3)+2(x^2-6)=6(x+1)(x-2)$. 当 $x<-1$ 或 $x>2$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $-1<x<2$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减. 故 A 正确, B 错误. $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=25$, $f(x)$ 的极小值为 $f(2)=-2$, 所以 $f(x)$ 有 3 个零点, 直线 $y=-3$ 与 $f(x)$ 的图象仅有 1 个公共点, C, D 正确.

10. AB　由正弦定理得 $ab+ac=5a$, 得 $b+c=5$, 则 $bc=b+c+1=6$. 由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{2}$, 得 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 得 $\cos A=\pm\frac{1}{3}$. 由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, 得 $a^2=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A=9$ 或 17, 即 $a=3$ 或 $\sqrt{17}$, 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 8 或 $5+\sqrt{17}$.

11. BD　易知 $f(-x)\neq-f(x)$, 故 A 错误; $f\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)+f(x)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\right.$

$x)+\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin x+\cos x+x=-\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$对称,故 B 正确;$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\cos(\pi-x)+\pi-x=\sin x-\cos x+\pi-x\neq f(x)$,故 C 错误;$f'(x)=\cos x-\sin x+1=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,并结合 $y=f'(x)$的图象(图略),可知 $x=\frac{\pi}{2}$是 $f(x)$的极大值点,故 D 正确.

12. $-\frac{7}{11}$　$\tan 2\beta=\tan[\alpha+\beta-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=-\frac{7}{11}$.

13. 1;8　由题意得$\frac{a\sqrt{b}}{ab}+\frac{2b\sqrt{a}}{ab}=\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{2}{\sqrt{a}}=1$,则$(\sqrt{a}+2\sqrt{b})\left(\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)=4+\frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 4+2\sqrt{\frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}=8$,当且仅当$\frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,即 $a=4b=16$ 时,等号成立.

14. 2　令 $y=0$,得 $2f(x)=2f(0)f(x)$,则 $f(0)=1$ 或 $f(x)=0$(舍去).令 $x=y=1$,得 $f(2)+f(0)=2[f(1)]^2=0$,则 $f(1)=0$,则 $f(x+1)+f(x-1)=0$,则 $f(x+4)=f(x)$,则 $f(2024)=f(0)=1$.因为 $g(x+y)=g(x)g(y)$,所以 $g(3)=g(2)g(1)=[g(1)]^3=8$,则 $g(1)=2$,从而 $g(f(2024))=g(1)=2$.

15. 解:(1)$f'(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x$, ………… 2 分

所以 $f'(1)=b=0$. ………… 4 分

又 $f(1)=1-a$,所以 $1-a=2$,则 $a=-1$. ………… 6 分

(2)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. ………… 7 分

$f'(x)=-\ln x$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$, ………… 9 分

所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减, ………… 11 分

所以 $f(x)$的最大值为 $f(1)=1-a$. ………… 13 分

16. 解:(1)由正弦定理得 $\sin B\sin A-\sin A\cos B=0$. ………… 2 分

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A\neq 0$,则 $\sin B-\cos B=0$,即 $\tan B=1$. ………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{4}$. ………… 5 分

(2)根据余弦定理得 $5=a^2+2-2\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, ………… 8 分

解得 $a=3$ 或 -1(舍去),故 $a=3$. ………… 10 分

(3)方法一.

由 $c=2\sqrt{2}a$,得 $\sin C=2\sqrt{2}\sin A$,即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin A$. ………… 12 分

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A=2\sqrt{2}\sin A$,即$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin A$, ………… 14 分

得 $\tan A=\frac{1}{3}$. ………… 15 分

方法二.

根据余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+8a^2-4\sqrt{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5a^2$， ………………… 11 分

则 $b=\sqrt{5}a$. ……………………………………………………………………………… 12 分

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5a^2+8a^2-a^2}{4\sqrt{10}a^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，……………………………………… 13 分

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，………………………………………………………… 14 分

故 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{3}$. …………………………………………………………… 15 分

17. 解：(1)令 $t=x+1$，得 $x=t-1$，则 $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}a(t-1)+\frac{1}{2}a, t-1<0,\\ a(t-1)^2+(2a-1)(t-1)+a+1, t-1\geqslant 0,\end{cases}$ …

……………………………………………………………………………………………… 2 分

得 $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}at, t<1,\\ at^2-t+2, t\geqslant 1,\end{cases}$ 即 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}ax, x<1,\\ ax^2-x+2, x\geqslant 1.\end{cases}$ ……………………… 4 分

(2)当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}0, x<1,\\ -x+2, x\geqslant 1\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调. ………………………………… 6 分

当 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增时，$\begin{cases}a>0,\\ -\frac{-1}{2a}\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}a\leqslant a-1+2,\end{cases}$ 得 $a\geqslant\frac{1}{2}$. ……………………………… 10 分

当 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减时，$\begin{cases}a<0,\\ -\frac{-1}{2a}\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}a\geqslant a-1+2,\end{cases}$ 得 $a\leqslant -2$. ……………………………… 14 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………… 15 分

18. 解：(1) $f(x)=2\sqrt{2}\times\frac{1+\cos 2x}{2}+\sqrt{2}\sin 2x=\sqrt{2}\cos 2x+\sqrt{2}\sin 2x+\sqrt{2}$ ………… 2 分

$=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)由 $-\pi+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，………… 5 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$. ……………………………… 6 分

由 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，………… 7 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. ………………………………… 8分

(3)由题意得 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

由(2)可知 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

若 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，则 $\begin{cases}\alpha\geqslant\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\\ \alpha+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$， ………………………… 9分

得 $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$， ……………………………………………………… 10分

则 $b-a=\left|f(\alpha)-f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|2\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|=|\sqrt{2}\cos 2\alpha+\sqrt{2}\sin 2\alpha-\sqrt{2}\cos 2\alpha+\sqrt{2}\sin 2\alpha|=|2\sqrt{2}\sin 2\alpha|$. ………………………………………………… 11分

由 $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant 2\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $|\sin 2\alpha|\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，

所以 $b-a=|2\sqrt{2}\sin 2\alpha|\in[2,2\sqrt{2}]$. ………………………………………………… 12分

若 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{4}\right]$ 上不单调，则 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{4}\right]$ 上的图象上必定有一个最高点或最低点，且 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{4}\right]$ 上的图象无论经过任何一个最高点或任何一个最低点，$b-a$ 的取值范围均相同. ………………………………………………………………………………… 13分

假设 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{4}\right]$ 上的图象的最高点为 $A\left(\frac{\pi}{8},2+\sqrt{2}\right)$，则 $b=2+\sqrt{2}$，

当 $\alpha+\alpha+\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$，即 $\alpha=0$ 时，$a=f(0)=2\sqrt{2}$，此时 $b-a$ 取得最小值，且最小值是 $2-\sqrt{2}$. …………………………………………………………………………………………… 14分

易得 $a>f\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则 $b-a<2$， …………………………………………………… 15分

所以 $b-a\in[2-\sqrt{2},2)$. ………………………………………………………………… 16分

综上，$b-a$ 的取值范围为 $[2-\sqrt{2},2\sqrt{2}]$. ………………………………………………… 17分

19.(1)解：函数 $f(x)$ 是 $[-1,3]$ 上的"双中值函数". ………………………………………… 1分

理由如下：

因为 $f(x)=x^3-3x^2+1$，所以 $f'(x)=3x^2-6x$. ………………………………………… 2分

因为 $f(3)=1$，$f(-1)=-3$，所以 $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=1$. ………………………………… 3分

令 $f'(x)=1$，得 $3x^2-6x=1$，即 $3x^2-6x-1=0$，解得 $x=\frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}$. ………………… 4分

因为$-1<\frac{3-2\sqrt{3}}{3}<\frac{3+2\sqrt{3}}{3}<3$,所以 $f(x)$是$[-1,3]$上的“双中值函数”. …………… 5 分

(2)①解:因为 $f(m)=f(n)$,所以$\frac{f(m)-f(n)}{m-n}=0$.

因为 $f(x)$是$[n,m]$上的“双中值函数”,所以 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. ……………………… 6 分

由题意可得 $f'(x)=x-\ln x-a-1$.

设 $g(x)=f'(x)=x-\ln x-a-1$,则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$. ……………………………… 7 分

当 $x\in(0,1)$时,$g'(x)<0$,则 $g(x)$为减函数,即 $f'(x)$为减函数;

当 $x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)>0$,则 $g(x)$为增函数,即 $f'(x)$为增函数.

故 $f'(x)_{\min}=f'(1)=-a$. ……………………………………………………………………… 9 分

因为 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$,所以$-a<0$,所以 $a>0$,即 a 的取值范围为$(0,+\infty)$. …… 10 分

②证明:不妨设 $0<x_1<1<x_2$,

则 $x_1-\ln x_1-a-1=0$,$x_2-\ln x_2-a-1=0$,即 $x_1-\ln x_1=a+1$,$x_2-\ln x_2=a+1$. ……

……………………………………………………………………………………………… 11 分

要证 $x_1+x_2>a+2$,即证 $x_2>a+2-x_1=1-\ln x_1$. ………………………………………… 12 分

设 $h(x)=g(x)-g(1-\ln x)=x-1+\ln(1-\ln x)(0<x<1)$,则 $h'(x)=1-\frac{1}{x(1-\ln x)}(0<x<1)$.

设 $\varphi(x)=x(1-\ln x)(0<x<1)$,则 $\varphi'(x)=-\ln x>0$,

所以 $\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增,所以 $0<\varphi(x)<\varphi(1)=1$,所以 $h'(x)=1-\frac{1}{x(1-\ln x)}<0$,

则 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减. …………………………………………………………………… 14 分

因为 $h(1)=g(1)-g(1)=0$,所以 $h(x)>0$,即 $g(x)>g(1-\ln x)$.

因为 $0<x_1<1$,所以 $g(x_1)>g(1-\ln x_1)$. …………………………………………………… 15 分

因为 $g(x_1)=g(x_2)=0$,所以 $g(x_2)>g(1-\ln x_1)$.

因为 $0<x_1<1$,所以 $1-\ln x_1>1$. …………………………………………………………… 16 分

由①可知 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,所以 $x_2>1-\ln x_1$,即 $x_1+x_2>a+2$ 得证. ………

……………………………………………………………………………………………… 17 分