部分中学 2025 届高中毕业班上学期期中质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	B	C	A	C	D	B	D	D

1． 答案：B

解析：$B=\{x|-1<x<3\}$，则 $A\cap B=\{0,1,2\}$，故选 B．

2． 答案：C

解析：$m^3>n^3\Leftrightarrow m>n$，$3^m>3^n\Leftrightarrow m>n$，故选 C．

3． 答案：A

解析：复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot(z-\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$，则 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}+\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，故选 A．

4． 答案：C

解析：$y'=2\mathrm{e}^{2x}$，设切点为 $P(x_0,\mathrm{e}^{2x_0})$，则在该点处的切线方程为 $y=2\mathrm{e}^{2x_0}(x-x_0)+\mathrm{e}^{2x_0}$，

所以 $\begin{cases}2\mathrm{e}^{2x_0}=a\\(1-2x_0)\mathrm{e}^{2x_0}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2}\\a=2\mathrm{e}\end{cases}$，故选 C．

5． 答案：D

解析：依题意得 $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3},\\\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{7}{24},\\\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{24},\end{cases}$

两式相比得 $\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{7}{24}\times\dfrac{24}{1}$，即 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=7$，故选 D．

6． 答案：B

解析：$\dfrac{2x-y+2}{xy}=\dfrac{2x-y+2(x+y)}{xy}=\dfrac{4x+y}{xy}=\dfrac{(x+y)(4x+y)}{xy}=\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{x}+5\geqslant 2\sqrt{\dfrac{4x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}}+5=9$，

当且仅当 $\dfrac{4x}{y}=\dfrac{y}{x}$，即 $x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$ 时取等，故选 B．

7． 答案：D

解析：$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=1$，可得 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(\vec{c}-2\vec{a}+2\vec{a})=\vec{b}\cdot(\vec{c}-2\vec{a})+2\vec{b}\cdot\vec{a}\leqslant|\vec{b}|\cdot|\vec{c}-2\vec{a}|+1=2$，故选 D．

8． 答案：D

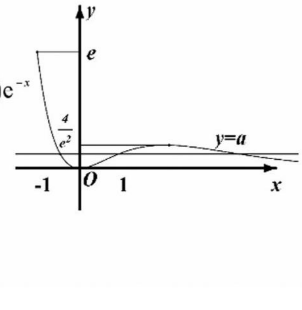
解析：$f(x)$ 图象经过四个象限，即 $x>0$ 时，$f(x)$ 有正有负，$x<0$ 时，$f(x)$ 有正有负，

又 $-1<x<0$ 时 $\ln(x+1)<0$，$x>0$ 时 $\ln(x+1)>0$，

所以 $y=x^2-a\mathrm{e}^x$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 均至少各有一个变号零点，

$x^2-a\mathrm{e}^x=0\Leftrightarrow a=x^2\mathrm{e}^{-x}$，设 $g(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$，$x\in(-1,+\infty)$，$g'(x)=-x(x-2)\mathrm{e}^{-x}$

当 $-1<x<0$，$x>2$ 时，$g'(x)<0$，当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，



所以$g(x)$在$(-1,0)$，$(2,+\infty)$上递减，$(0,2)$递增；

作出$y=g(x)$图象，由图可知，$a\in(0,4e^{-2})$，故选D．

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

题号	9	10	11
选项	BD	ABD	ABD

9．答案：BD

解析：$S_{20}=\dfrac{20(a_1+a_{20})}{2}=\dfrac{20(a_{10}+a_{11})}{2}=200$，所以$a_{11}=11$，公差$d=2$，故选项B正确；

又$a_{10}=a_1+9d$，则$a_1=-9$，故选项A错误；

$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}=n^2-10n$，所以$S_5$最小，故选项C错误；

$S_n>0$，解得$n>10$，故选项D正确；

所以选BD．

10．答案：ABD

解析：$f(x)=\sin 2x+a\cos 2x=\sqrt{1+a^2}\sin(2x+\varphi)$，$f(x)\leqslant f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$，即$f_{\max}(x)=f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$，

即$\sqrt{1+a^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，解得$a=1$，故选项A正确；

$f(x)$的对称中心为$\left(\dfrac{4k-1}{8}\pi,0\right),k\in Z$，取$k=-2$，即为$\left(-\dfrac{9\pi}{8},0\right)$，故选项B正确；

当$\dfrac{\pi}{2}<2x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{2}$，即$\dfrac{\pi}{8}<x<\dfrac{5\pi}{8}$时，$f(x)$单调递减，故选项C错误；

$f(\lambda x)=\sin\left(2\lambda x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，设$t=2\lambda x+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},2\lambda\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$，由$y=\sin t$图象可知，$2\lambda\pi+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right]$

即$\lambda\in\left(\dfrac{5}{8},\dfrac{9}{8}\right]$，选项D正确；

所以选ABD．

11．答案：ABD

解析：解法1：函数模型$f(x)=\sin\dfrac{\pi}{2}x$满足条件；

解法2：令$x=y=0$，得$f(0)=f(0)f(1)+f(0)f(1)$，即$f(0)=0$，故选项A正确；

令$y=1$，得$f(x+1)=f(x)f(0)+f(1)f(1-x)=f(1-x)$，即$f(x)=f(2-x)$，故选项B正确

令$x=-1$，则$f(y-1)=f(-1)f(1-y)+f(y)f(2)$，又$f(2)=f(0)=0$

所以$f(y-1)=f(-1)f(1-y)$，即$f(x)=f(-1)f(-x)$，

再令$x=1$，得$f(1)=f^2(-1)$，即$f(-1)=\pm1$

若$f(-1)=1$，则$f(x)$为偶函数，取$x=-\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$，得$f(0)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

又$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，则$f^2\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，即$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，

取$x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$，得$f(1)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，与$f(1)=1$矛盾，

所以$f(-1)=-1$，此时$f(x)=f(-1)f(-x)=-f(-x)$，即$f(x)$是奇函数故选项C错误；

所以 $f(x)=-f(-x)=-f(x+2)$，所以 $f(x+4)=-f(2+x)=f(x)$，故 $f(x)$ 周期为 4，

$f(1)=1$，$f(2)=f(0)=0$，$f(3)=f(-1)=-f(1)=-1$，$f(4)=0$，

所以 $f(4k-3)+f(4k-2)+f(4k-1)+f(4k)=0$，$\sum_{k=1}^{2025}f(k)=506\sum_{k=1}^{4}f(k)+f(1)=1$，

故选项 D 正确；所以选 ABD．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．答案：$\dfrac{63}{32}$

解析：公比 $q=-\dfrac{1}{2}$，所以 $|a_n|=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 6 项和为 $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{63}{32}$．

13．答案：-1

解析：$f(x)$ 定义域为 $\{x|x(x+b)>0\}$ 关于 $x=1$ 对称，所以 $b=-2$，则 $f(x)=(x-a)^3\ln\dfrac{x-2}{x}$，

依题意 $f(x)=f(2-x)$，$(x-a)^3\ln\dfrac{x-2}{x}=(2-x-a)^3\ln\dfrac{-x}{2-x}=-(2-x-a)^3\ln\dfrac{x-2}{x}$，

所以 $(x-a)^3=-(2-x-a)^3=(x+a-2)^3$，所以 $-a=a-2$，即 $a=1$，所以 $a+b=-1$．

14．答案：$2+\sqrt{5}$ / $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

解析：设 $\angle ABD=\theta$，则 $BD=2\cos\theta$，$BC=4\cos\theta$，

$\triangle ABC$ 中，余弦定理可得 $AC^2=BA^2+BC^2-2BA\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，

即 $AC^2=1+16\cos^2\theta-8\cos\theta\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=8\cos2\theta+9+4\sin2\theta=4\sqrt{5}\sin(2\theta+\varphi)+9\leqslant9+4\sqrt{5}$

所以 $AC\leqslant\sqrt{9+4\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}$．

四、解答题：共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．解：（1）依题意得 $c=1$，…………1 分

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $a=\sqrt{2}$，$b^2=a^2-c^2=2-1=1$，…………3 分

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；…………4 分

（2）已知 $F(1,0)$，

①当直线 l 斜率不存在时，显然不满足条件，舍去；…………5 分

②当直线 l 斜率存在时，设直线的方程为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立直线与椭圆方程 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 化简得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

$\Delta=8(k^2+1)>0$，$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$，…………7 分

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2k=k\cdot\dfrac{4k^2}{1+2k^2}-2k=\dfrac{-2k}{1+2k^2}$，

所以 AB 的中点坐标为 $G\left(\dfrac{2k^2}{1+2k^2},\dfrac{-k}{1+2k^2}\right)$，…………8 分

当 $k=0$ 时，满足条件，此时 AB 的中垂线为 $x=0$，…………9 分

当 $k\neq0$ 时，$|MA|=|MB|$，得到 MG 所在的直线与直线 l 垂直，

$k_{MG}=\dfrac{\frac{-k}{1+2k^2}-\frac{1}{3}}{\frac{2k^2}{1+2k^2}-0}=\dfrac{-3k-1-2k^2}{6k^2}=\dfrac{-1}{k}$，整理得 $2k^2-3k+1=0$，解得 $k=1$ 或 $k=\dfrac{1}{2}$，…………12 分

综上，直线 l 的方程为 $y=0$ 或 $x-y-1=0$ 或 $x-2y-1=0$．…………13 分

16．解：（1）解法 1：

$\frac{b-2\cos A}{a}=\frac{2\cos C}{c}\Leftrightarrow bc-2c\cos A=2a\cos C$，……2 分

由正弦定理得：$c\sin B=2\sin A\cos C+2\sin C\cos A=2\sin(A+C)$，

又因为 $A+B+C=\pi$，$\sin(A+C)=\sin B$，……4 分

所以 $c\sin B=2\sin B$，又因为 $\sin B\neq 0$，……5 分

所以 $c=2$.……6 分

解法 2：

由余弦定理可得 $\frac{b-\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}}{a}=\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}}{c}$，……2 分

化简可得 $bc-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)}{b}=\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)}{b}$，即 $bc=2b$，……5 分

所以 $c=2$.……6 分

（2）解法 1：

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow c\cos B=2b\cos C$，……7 分

$c\cos B=2b\cos C\Leftrightarrow \sin C\cos B=2\sin B\cos C$，……8 分

所以 $3\sin C\cos B=2\sin B\cos C+2\sin C\cos B=2\sin\left(B+C\right)=2\sin A$，……10 分

由正弦定理可得 $3c\cos B=2a$，……11 分

所以 $a=3\cos B$，……12 分

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=3\sin B\cos B=\frac{3}{2}\sin 2B\leqslant\frac{3}{2}$，当 $B=\frac{\pi}{4}$ 时取等.……15 分

解法 2：

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow c\cos B=2b\cos C$，……7 分

$c\cos B=2b\cos C$，余弦定理可得 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2+2b^2-2c^2}{a}$，

即 $a^2+3b^2=3c^2=12$ ……9 分

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+4-4b\cos A$，

则有 $12=a^2+3b^2=4b^2+4-4b\cos A$，

化简可得 $b^2-b\cos A=2$，

即 $\cos A=\frac{b^2-2}{b}$，……12 分

所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=b\sin A=b\sqrt{1-\left(\frac{b^2-2}{b}\right)^2}=\sqrt{-b^4+5b^2-4}$，

当 $b^2=\frac{5}{2}$ 时，$S_{\max}=\frac{3}{2}$.……15 分

解法 3：

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow c\cos B=2b\cos C$，……7 分

$c\cos B=2b\cos C$，余弦定理可得 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2+2b^2-2c^2}{a}$，

即 $a^2+3b^2=3c^2=12$，

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+4-4a\cos B$，

则有 $12=a^2+3b^2=4a^2+12-12a\cos B$，

化简可得 $a=3\cos B$，……12 分

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=a\sin B=3\sin B\cos B=\frac{3}{2}\sin 2B\leqslant\frac{3}{2}$，当 $B=\frac{\pi}{4}$ 时取等.……15 分

解法 4：

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow c\cos B=2b\cos C$，……7 分

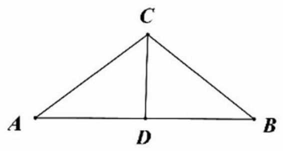
$c\cos B=2b\cos C$，余弦定理可得 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2+2b^2-2c^2}{a}$

即 $a^2+3b^2=3c^2=12$，……9分

如图过点 C 作底边 AB 的高 CD，不妨设 $AD=1+d$，$BD=1-d$，$CD=h$，

则有 $b^2=(1+d)^2+h^2$，$a^2=(1-d)^2+h^2$，

则 $3b^2+a^2=3(1+d)^2+3h^2+(1-d)^2+h^2=12$，



整理可得 $h^2+(d+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$，

所以 $h^2\leqslant\frac{9}{4}$，即 $h\leqslant\frac{3}{2}$，当且仅当 $d=-\frac{1}{2}$ 时取等，

则有 $S=\frac{1}{2}c\cdot h\leqslant\frac{3}{2}$.……15分

解法5：

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow c\cos B=2b\cos C$，……7分

$c\cos B=2b\cos C$，余弦定理可得 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2+2b^2-2c^2}{a}$，

即 $a^2+3b^2=3c^2=12$，……9分

所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2a^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2})^2}$，

$a^2=12-3b^2$ 代入化简可得 $S=\sqrt{-b^4+5b^2-4}$，

当 $b^2=\frac{5}{2}$ 时，$S_{\max}=\frac{3}{2}$.……15分

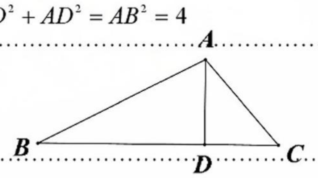
解法6：

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow c\cos B=2b\cos C$……7分

正弦定理可得 $\sin C\cos B=2\sin B\cos C$ 即 $\tan C=2\tan B$……8分

易知 B，C 均为锐角，如图，做边 BC 上的高 AD，则有 $BD^2+AD^2=AB^2=4$

则 $\tan C=2\tan B\Rightarrow BD=2CD$，……11分



则 $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}S_{\triangle ABD}=\frac{3}{4}BD\cdot AD\leqslant\frac{3}{4}\cdot\frac{BD^2+AD^2}{2}=\frac{3}{2}$，

当且仅当 $BD=AD$，即 $B=\frac{\pi}{4}$ 时取等.……15分

解法7：

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow c\cos B=2b\cos C$，……7分

$c\cos B=2b\cos C$，正弦定理可得 $\sin C\cos B=2\sin B\cos C$ 即 $\tan C=2\tan B$，……8分

由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即 $a=\frac{2\sin A}{\sin C}$，$b=\frac{2\sin B}{\sin C}$，

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{2\sin A\sin B}{\sin C}$$
$$=\frac{2\sin A\sin B}{\sin(A+B)}$$
$$=\frac{2\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\sin A\cos B}$$
$$=\frac{2\tan A\tan B}{\tan A+\tan B},$$

又 $\tan A=-\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}=\frac{3\tan B}{2\tan^2B-1}$，

则 $S=\frac{2\times\frac{3\tan^2B}{2\tan^2B-1}}{\frac{3\tan B}{2\tan^2B-1}+\tan B}=\frac{6\tan B}{2\tan^2B+2}\leqslant\frac{6\tan B}{4\tan B}=\frac{3}{2}$，当 $B=\frac{\pi}{4}$ 时取等.……15分

17.（1）证明：连接 BO 并延长交 AC 于点 D，连接 OA、DA_1，

依题意 $A_1O\perp$ 平面 ABC，$AO,BO\subset$ 平面 ABC，

所以 $A_1O\perp AO$、$A_1O\perp BO$， ……………………………………………………………………… 1 分

又 $A_1A=A_1B$，所以 $\triangle A_1OA\cong\triangle A_1OB$，即 $OA=OB$，所以 $\angle OAB=\angle OBA$，

又 $AB\perp AC$，即 $\angle BAC=90^\circ$，所以 $\angle OAB+\angle OAD=90^\circ$，$\angle OBA+\angle ODA=90^\circ$，

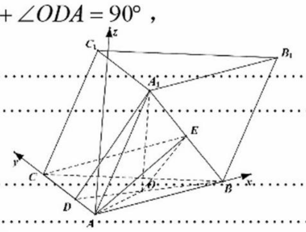
所以 $\angle ODA=\angle OAD$，

所以 $AO=DO$，即 $AO=DO=OB$，所以 O 为 BD 的中点， ………………………………………… 4 分

又 E 为 A_1B 的中点，所以 $OE//A_1D$， ………………………………………………………… 5 分

又 $OE\not\subset$ 平面 AA_1C_1C，$A_1D\subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $OE//$ 平面 AA_1C_1C. ………………………………………………………………………… 6 分



（2）过点 A 作 $Az//OA_1$，如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$， ………………………………… 7 分

以 $OB=OA=\sqrt{AA_1^{\,2}-A_1O^2}=2$，设 $AB=2a,AD=2b$，则有 $a^2+b^2=4$， …………………… 8 分

$O(a,b,0)$，$B(2a,0,0)$，$A_1\left(a,b,2\sqrt{3}\right)$，$C(0,3,0)$，$E\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{b}{2},\sqrt{3}\right)$，

则 $\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{b}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(2a,0,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,3,0)$， …………………………………… 9 分

设平面 AEC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=\dfrac{3a}{2}x+\dfrac{b}{2}y+\sqrt{3}z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3y=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，则 $y=0$，$z=-\sqrt{3}a$，所以 $\vec{n}=\left(2,0,-\sqrt{3}a\right)$， …………… 11 分

所以 $\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\right\rangle=\dfrac{4a}{\sqrt{4+3a^2}\cdot 2a}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$， ……………………………………………… 13 分

解得 $a=\sqrt{2}$，即 $AB=2\sqrt{2}$， …………………………………………………………………… 14 分

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=|A_1O|S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=6\sqrt{6}$； …………………… 15 分

（2）过点 E 作 $EF//OA_1$ 交 BD 于点 F，则 $EF\perp$ 平面 ABC，

又 $AC\subset$ 平面 ABC，$EF\perp AC$，

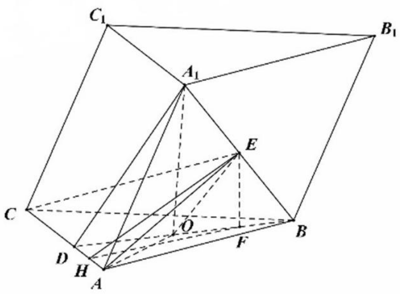
过 F 点作 $FH//\text{AB}$ 交 AC 于点 H，则 $FH\perp AC$，

又 $EF,FH\subset$ 平面 EFH，$EF\cap FH=F$，

所以 $AC\perp$ 平面 EFH，又 $EH\subset$ 平面 EFH，

所以 $AC\perp EH$，

因为 $\dfrac{BE}{BA_1}=\dfrac{BF}{BO}$，所以 $BF=\dfrac{1}{2}BO=\dfrac{1}{4}BD$，则 $\dfrac{HF}{AB}=\dfrac{DF}{DB}=\dfrac{3}{4}$，



设 $AB=a$，则 $HF=\dfrac{3}{4}a$，$HE=\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}a\right)^2+3}$， ………………………………………………………… 8 分

设点 B 到平面 ACE 的高为 h，

则直线 AB 与平面 EAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{h}{AB}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，即 $h=\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$， ……………………………… 10 分

所以 $V_{BACE}=\dfrac{1}{3}hS_{\triangle EHF}HE=\dfrac{1}{3}h\cdot\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}a\right)^2+3}=\dfrac{h}{2}\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}a\right)^2+3}=\dfrac{\sqrt{10}a}{10}\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}a\right)^2+3}$， ……………… 11 分

又 $V_{B-ACE}=V_{E-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times3a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

即 $\dfrac{\sqrt{10}a}{10}\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}a\right)^2+3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

解得 $a=\sqrt{2}$，即 $AB=2\sqrt{2}$， …………………………………………………………………… 14 分

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=|A_1O|S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=6\sqrt{6}$. ………………………15 分

18．解：（1）当 $a=0$ 时，$F(x)=f(x)+x=x-\ln x-1$，$x\in(0,+\infty)$，

则$F'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，……………………………………………………………………1 分

当$0<x<1$，时，$F'(x)<0$，当$x>1$时，$F'(x)>0$，

所以$F(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，……………………………………3 分

所以$F_{\min}(x)=F(1)=0$；……………………………………………………………………4 分

（2）解法 1：$f'(x)=ae^{x-a}-\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

①当$a=0$时，$f(1)=-1<0$，舍去；……………………………………………………………5 分

②当$a>0$时，$f''(x)=ae^{x-a}+\frac{1}{x^2}>0$，即$f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

由（1）可得$x-1\geqslant\ln x$，即$e^{x-1}\geqslant x$，所以$f'(x)=ae^{x-a}-\frac{1}{x}=\frac{a}{e^a}e^x-\frac{1}{x}<\frac{1}{e}e^x-\frac{1}{x}$，

所以$f'(1)=ae^{1-a}-1<0$，$f'(x)=ae^{x-a}-\frac{1}{x}=\frac{a}{e^a}e^x-\frac{1}{x}>\frac{a}{e^a}ex-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-e^{a-1}}{e^{a-1}x}$，

所以$f'\left(\sqrt{\frac{e^{a-1}}{a}}\right)>0$，所以$\exists x_0\in(1,+\infty)$使得$f'(x_0)=0$，即$ae^{x_0-a}=\frac{1}{x_0}$，……………………………8 分

所以当$0<x<x_0$，时$f'(x)<0$，当$x>x_0$时，$f'(x)>0$，

即$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增；

所以$f_{\min}(x)=f(x_0)=ae^{x_0-a}-\ln x_0-1=\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1\geqslant0$，…………………………………9 分

显然$y=\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1$单调递减，且$x_0=1$时，，$y=0$

所以$\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1\geqslant0$，解得$0<x_0\leqslant1$，………………………………………………11 分

又$ae^{x_0-a}=\frac{1}{x_0}$，即$\frac{e^a}{a}=x_0e^{x_0}\in(0,e]$，

所以$e^{a-1}\leqslant a$，即$a\leqslant\ln a+1$由（1）得$a\geqslant\ln a+1$，所以$a=\ln a+1$，此时，$a=1$

综上$a=1$.……………………………………………………………………………………12 分

解法 2：$f(x)\geqslant0\Leftrightarrow ae^{-a}\geqslant(\ln x+1)e^{-x}$，……………………………………………5 分

设$m(x)=(\ln x+1)e^{-x}$，$x\in(0,+\infty)$，$m'(x)=\left(\frac{1}{x}-\ln x-1\right)e^{-x}$，

易得$n(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$在$(0,+\infty)$单调递减，且$n(1)=0$，……………………………………7 分

所以当$0<x<1$，时$m'(x)>0$，当$x>1$时，$m'(x)<0$，

即$m(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

所以$m_{\max}(x)=m(1)=e^{-1}$，即$ae^{-a}\geqslant e^{-1}$，……………………………………………10 分

即$a\geqslant e^{a-1}$，即$\ln a\geqslant a-1$，

又由（1）可知由（1）可得$a-1\geqslant\ln a$，则$a-1=\ln a$，

此时$a=1$.,……………………………………………………………………………………12 分

（3）①当$a=0$时，由（1）可得$f(x)+x>0$，成立；…………………………………13 分

②当$a>0$时，

当$x\geqslant a$时，

$f(x)+|x-a|=ae^{x-a}-\ln x+x-a-1=a\left(e^{x-a}-1\right)+(x-\ln x-1)$，

由（1）知$x\geqslant\ln x+1$，则$f(x)+|x-a|\geqslant a\left(e^{x-a}-1\right)\geqslant0$；………………………15 分

当$x<a$时，$f(x)+|x-a|=ae^{x-a}-\ln x+a-x-1=e^{x-a+\ln a}-\ln x+a-x-1$，

由（1）知$x\geqslant\ln x+1$，即$e^x\geqslant x+1$，所以$e^{x-a+\ln a}\geqslant x-a+\ln a+1$，

则 $f(x)+|x-a|\geqslant x-a+\ln a+1-\ln x+a-x-1=\ln a-\ln x>0$；

综上所述，$f(x)+|x-a|\geqslant 0$ ……………………………………………………………………………… 17 分

19．解：（1）$|a_{k+1}-a_k|=1$，设 $a_{k+1}-a_k=e_k$，$e_k\in\{-1,1\}$，

所以 $a_4=a_1+a_2-a_1+\cdots+a_4-a_3=1+e_1+e_2+e_3$，

对 e_k，$k=1,2,3,$ 中 1 的个数进行分类，

可得 $a_4\in\{-2,0,2,4\}$ ……………………………………………………………………………………… 5 分

（2）①$|a_{k+1}-a_k|=2^k$，设 $a_{k+1}-a_k=b_k2^k$，$b_k\in\{-1,1\}$，

所以 $a_n=a_1+a_2-a_1+\cdots+a_n-a_{n-1}=1+b_1 2^1+b_2 2^2+\cdots+b_{n-1}2^{n-1}$，

不妨假设 $(a_n)_i,(a_n)_j$ 是 a_n 中的所有可能中的任意两个，

假设 $(a_n)_i=1+b_{i_1}2^1+b_{i_2}2^2+\cdots+b_{i_{n-1}}2^{n-1}$，$(a_n)_j=1+b_{j_1}2^1+b_{j_2}2^2+\cdots+b_{j_{n-1}}2^{n-1}$，

不妨假设 $b_{i_{n-1}}=b_{j_{n-1}},b_{i_{n-2}}=b_{j_{n-2}},\cdots,b_{i_k}=b_{j_k},b_{i_{k-1}}\neq b_{j_{k-1}}$，

所以 $(a_n)_i-(a_n)_j=(1+b_{i_1}2^1+b_{i_2}2^2+\cdots+b_{i_{k-1}}2^{k-1})-(1+b_{j_1}2^1+b_{j_2}2^2+\cdots+b_{j_{k-1}}2^{k-1})$，

不妨假设 $b_{i_{k-1}}=1,b_{j_{k-1}}=-1$，则

$(a_n)_i-(a_n)_j\geqslant(1-2^1-2^2-\cdots-2^{k-2}+2^{k-1})-(1+2^1+2^2+\cdots+2^{k-2}-2^{k-1})$，

$=(-2^{k-1}+3+2^{k-1})-(2^{k-1}-1-2^{k-1})=4$ ……………………………………………………… 8 分

即 $a_n=1+b_12^1+b_22^2+\cdots+b_{n-1}2^{n-1}$ 中的 2^{n-1} 种表示中，其取值互不相等，……………………………… 9 分

即数列 $\{c_m\}$ 中共有 2^{n-1} 项，

易得 $c_1=1-2-2^2-\cdots-2^{n-1}=-2^n+3$，

$c_{2^{n-1}}=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$，

所以 $c_{2^{n-1}}-c_1=2^{n+1}-4$；……………………………………………………………………………… 11 分

又 $c_{2^{n-1}}-c_1=c_{2^{n-1}}-c_{2^{n-1}-1}+c_{2^{n-1}-1}-c_{2^{n-1}-2}+\cdots+c_2-c_1\geqslant 4+4+\cdots+4=4\times(2^{n-1}-1)=2^{n+1}-4$，

所以 $\{c_m\}$ 中 $c_{i+1}-c_i=4$ 恒成立，…………………………………………………………………… 13 分

所以 $\{c_m\}$ 是以 $c_1=-2^n+3$ 为首项，4 为公差的等差数列；…………………………………………… 14 分

②当 $n=2$ 时，$\{c_m\}$ 只有两项，分别为 $-1,3$，故和为 2，……………………………………………… 15 分

当 $n\geqslant 3$，由①可得，其所有和为：$\dfrac{2^{n-1}\left(c_1+c_{2^{n-1}}\right)}{2}=2^{n-1}$，

综上，$\{c_m\}$ 中的所有项的和为 2^{n-1} ………………………………………………………………… 17 分

解法 2：

（2）①当 $n=3$ 时，a_3 的所有可能取值为 $7,-1,3,-5$，

所以数列 $\{c_m\}$ 共四项，为 $-5,-1,3,7$，

所以 $\{c_m\}$ 构成以 -5 为首项，4 为公差的等差数列，且共有 4 项；

猜测对于 $n\geqslant 3$，$\{c_m\}$ 构成以 $1-2-2^2-\cdots-2^{n-1}=3-2^n$ 为首项，4 为公差的等差数列，

且共有 2^{n-1} 项；………………………………………………………………………………………………… 7 分

下用数学归纳法证明：

当 $n=3$ 时，显然成立；

假设当 $n=k$，$k\geqslant 3$ 时成立，即 $a_k\in\{t\,|\,t=3-2^k+4(j-1),j=1,2,3,\cdots,2^{k-1}\}$；

当 $n=k+1$ 时，$|a_{k+1}-a_k|=2^k$，

所以 $a_{k+1}\in\{t\,|\,t=3-2^k+4(j-1)+2^k,j=1,2,3,\cdots,2^{k-1}\}\cup\{t\,|\,t=3-2^k+4(j-1)-2^k,j=1,2,3,\cdots,2^{k-1}\}$，

记 $A=\{t\,|\,t=3-2^k+4(j-1)+2^k,j=1,2,3,\cdots,2^{k-1}\}$，$B=\{t\,|\,t=3-2^k+4(j-1)-2^k,j=1,2,3,\cdots,2^{k-1}\}$，

下证明 $A\cap B=\varnothing$.

A 中的最小元素为 $3-2^k+2^k=3$，B 中的最大元素为 $3-2^k+4\left(2^{k-1}-1\right)-2^k=-1$，

所以 $A\cup B$ 共有 2^k 个元素，即 $\{c_m\}$ 共有 2^k 项，

显然 A 中的元素从小到大排列构成以 3 为首项 4 为公差的等差数列，共 2^{k-1} 项，

B 中的元素从小到大排列构成以 $3-2^k$ 为首项，-1 为末项，4 为公差的等差数列，共 2^{k-1} 项，
所以 $A\cup B$ 元素从小到大排列构成以 $3-2^k$ 为首项，4 为公差的等差数列，共 2^k 项，
即当 $n=k+1$ 时，$\{c_m\}$ 构成以 $3-2^k$ 为首项，4 为公差的等差数列，且共有 2^k 项，假设成立；
综上，当 $n\geqslant 3$，$\{c_m\}$ 构成以 $3-2^n$ 为首项，4 为公差的等差数列，且共有 2^{n-1} 项.……………………14 分
②对任意 $(a_n)_i=1+b_{i_1}2^1+b_{i_2}2^2+\cdots+b_{i_{n-1}}2^{n-1}$，
都存在 $(a_n)_j=1-b_{i_1}2^1-b_{i_2}2^2+\cdots-b_{i_{n-1}}2^{n-1}$ 与之对应，则 $(a_n)_i+(a_n)_j=2$，
即 $\{c_m\}$ 中任意一项 c_i，都存在另外一项 c_j 使得 $c_i+c_j=2$，
又 $\{c_m\}$ 共有 2^{n-1} 项，则其所有和为 $2\times\dfrac{2^{n-1}}{2}=2^{n-1}$.……………………………………………………17 分