保密★启用前

准考证号________________________姓名____________

(在此卷上答题无效)

福建省部分地市2024届高中毕业班4月诊断性质量检测

数学试题

2024.4

本试卷共4页，考试时间120分钟，总分150分。

注意事项:

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

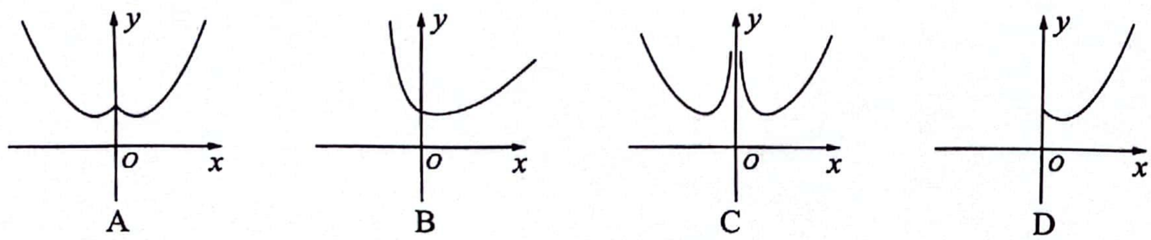
1．已知复数z满足$(z+1)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，则$z=$

A．-1　　B．1　　C．$-\mathrm{i}$　　D．i

2．已知角α的顶点在坐标原点，始边与x轴非负半轴重合，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$P(m,2)$为其终边上一点，则$m=$

A．-4　　B．4　　C．-1　　D．1

3．函数$f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$的图象大致为



4．在菱形$ABCD$中，若$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$，且$\overrightarrow{AD}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影向量为$\lambda\overrightarrow{AB}$，则$\lambda=$

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

5．已知$a=\log_5 2, b=\log_2 a, c=(\frac{1}{2})^b$，则

A．$c>b>a$　　B．$c>a>b$　　C．$a>b>c$　　D．$b>c>a$

6. 棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P为BD_1上的动点，O为底面$ABCD$的中心，则OP的最小值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. 若直线$y=ax+b$与曲线$y=e^x$相切，则$a+b$的取值范围为

A. $(-\infty,e]$　　B. $[2,e]$　　C. $[e,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

8. 函数$f(x)=2\sin\omega x(\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x)(\omega>0)$在$(0,\dfrac{\pi}{3})$上单调递增，且对任意的实数$a$，$f(x)$在$(a,a+\pi)$上不单调，则$\omega$的取值范围为

A. $(1,\dfrac{5}{2}]$　　B. $(1,\dfrac{5}{4}]$　　C. $(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}]$　　D. $(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}]$

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1(a>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，且$C$的两条渐近线的夹角为$\theta$，若$|F_1F_2|=2e$ (e为C的离心率)，则

A. $a=1$　　B. $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

C. $e=\sqrt{2}$　　D. C的一条渐近线的斜率为$\sqrt{3}$

10. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$的值域为$(-\infty,0)$，且$f(2x)+f(x+y)f(x-y)=0$，则

A. $f(0)=-1$　　B. $f(4)+[f(1)]^2=0$

C. $f(x)f(-x)=1$　　D. $f(x)+f(-x)\leqslant -2$

11. 投掷一枚质地均匀的硬币三次，设随机变量$X_n=\begin{cases}1, & 第n次投出正面,\\ -1, & 第n次投出反面,\end{cases}$ $(n=1,2,3)$. 记A表示事件“$X_1+X_2=0$”，B表示事件“$X_2=1$”，C表示事件“$X_1+X_2+X_3=-1$”，则

A. B和C互为对立事件　　B. 事件A和C不互斥

C. 事件A和B相互独立　　D. 事件B和C相互独立

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12．$(x+\frac{2}{x})^6$的展开式中的常数项为________．

13．某圆锥的体积为$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$，其侧面展开图为半圆，则该圆锥的母线长为________．

14．设T_n为数列$\{a_n\}$的前n项积，若$T_n+a_n=m$，其中常数$m>0$，则$a_2=$________(结果用m表示)；若数列$\{\frac{1}{T_n}\}$为等差数列，则$m=$________．

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13分）

$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，且$a\sin C=c\sin B$，$C=\frac{2\pi}{3}$．

（1）求B；

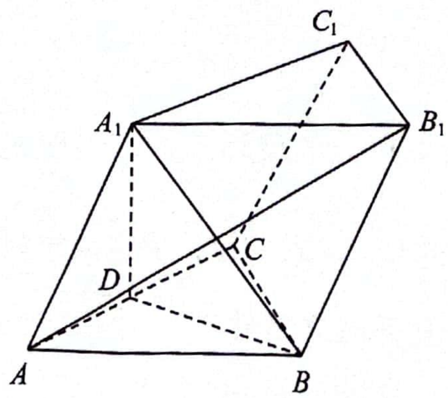
（2）若$\triangle ABC$面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，求BC边上中线的长．

16．（15分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC，$AB=AC=BC=AA_1=2$，$A_1B=\sqrt{6}$．

（1）设D为AC中点，证明：$AC\perp$平面A_1DB；

（2）求平面A_1AB_1与平面ACC_1A_1夹角的余弦值．



17．（15分）

从一副扑克牌中挑出4张Q和4张K，将其中2张Q和2张K装在一个不透明的袋中，剩余的2张Q和2张K放在外面．现从袋中随机抽出一张扑克牌，若抽出Q，则把它放回袋中；若抽出K，则该扑克牌不再放回，并将袋外的一张Q放入袋中．如此操作若干次，直到将袋中的K全部置换为Q．

（1）在操作2次后，袋中K的张数记为随机变量X，求X的分布列及数学期望；

（2）记事件“在操作$n+1(n\in\mathbf{N}^*)$次后，恰好将袋中的K全部置换为Q”为A_n，记$P_n=P(A_n)$.

(i) 在第1次取到Q的条件下，求总共4次操作恰好完成置换的概率；

(ii) 试探究P_{n+1}与P_n的递推关系，并说明理由．

18．（17分）

在直角坐标系xOy中，已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过F的直线l与C交于M，N两点，且当l的斜率为1时，$|MN|=8$.

（1）求C的方程；

（2）设l与C的准线交于点P，直线PO与C交于点Q（异于原点），线段MN的中点为R，若$|QR|\leqslant 3$，求$\triangle MNQ$面积的取值范围．

19．（17分）

若实数集A，B对$\forall a\in A$，$\forall b\in B$，均有$(1+a)^b\geqslant 1+ab$，则称$A\to B$具有Bernoulli型关系．

（1）若集合$M=\{x|x\geqslant 1\}$，$N=\{1,2\}$，判断$M\to N$是否具有Bernoulli型关系，并说明理由；

（2）设集合$S=\{x|x>-1\}$，$T=\{x|x>t\}$，若$S\to T$具有Bernoulli型关系，求非负实数t的取值范围；

（3）当$n\in\mathbf{N}^*$时，证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)^{-\frac{1}{k}}<n+\frac{5}{8}$.