

福建师范大学 数学与统计 学院

2022—2023 学年第二学期考试 B 卷

考 样	生 系	信 息	年 级	姓 名	学 号
-----	-----	-----	-----	-----	-----

学院 装 订 线

知明行笃



立诚致广

专业: 全校性专业 年级: 2022 级
课程名称: 高等数学 A (上) 任课教师: 张世芳等
试卷类别: 开卷 () 闭卷 (✓) 考试用时: 120 分钟
考试时间: 2023 年 2 月 25 日 上午 8 点 0 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
考生须知	1. 答案一律写在答题纸上, 否则无效. 2. 答题要写清题号, 不必抄原题. 3. 考试结束, 试卷与答题纸一并提交.							

一、单选题(每小题3分, 共15分)

1. 如下四个选项, 极限不存在的是 () .

A. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$ C. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域有定义, 则 $f(x)$ 在该点可导的一个充分条件是 () .

A. $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f(a + \frac{1}{h}) - f(a) \right]$ 存在 B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a + h)}{h}$ 存在

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$ 存在 D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{h}$ 存在

3. 若 $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$, 则 () .

A. $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点 B. $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

C. $x = x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值点 D. 不能断定 $x = x_0$ 是否为极值点

4. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = () .$

A. $\arctan(x - 1) + C$ B. $\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

C. $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$ D. $2 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 是 () .

A. 一个常数 B. $f(x)$ 的一个原函数 C. 一个函数族 D. 一个非零常数

二、填空题(每小题3分, 共15分)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} \sin(x^2 + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(u)$ 为可导函数且 $f(2x - 1) = x^3$, 则 $f'(2x - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 写出函数 $f(x) = x^2 e^x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式_____.

4. $\int x^{-\frac{9}{2}} dx = \text{_____}.$

5. $\int_{-1}^1 (\sin x + |x|) e^{x^2} dx = \text{_____}.$

三、计算题(每题 8 分, 共 40 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}(x - \sin x)}{\sqrt{1-x^3} - 1}.$

2. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - 2x$ 在 $(2, 0)$ 处有公共切线, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2n}{n+1}\right).$

3. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}.$

4. 求不定积分 $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$

5. 求定积分 $\int_{-\sqrt{2}}^2 \min\{2, x^2\} dx$

四、(12 分) 就 a 的各种情况, 讨论函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4$ 的极值.

五、(10 分) (1) 证明 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \sin^2 x}{1+e^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx;$

(2) 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \sin^2 x}{1+e^x} dx.$

六、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 上可导, 且 $f(0) = 0, f(2) = 2$.

证明 (1) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使得 $f'(\eta) = 1$.