2025 — 2026 学年第一学期《高等数学 B》A 卷

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+\alpha x-2}{x-1}=\beta$，则常数$\alpha,\beta$满足（　　　）.

A. $\alpha=1,\beta=3$　　B. $\alpha=-1,\beta=3$

C. $\alpha=-1,\beta=-3$　　D. $\alpha=1,\beta=-3$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\le1\\ x, & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（　　）.

A. 左右导数都存在　　B. 左右导数都不存在

C. 左导数存在，右导数不存在　　D. 左导数不存在，右导数存在

3. 设 $f(x)=x^3+2x+3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内零点的个数为（　　　）.

A. 没有零点　　B. 有且只有一个零点

C. 至少两个零点　　D. 至少三个零点

4. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)<0$， 则（　　　）.

A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　D. $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 设 $f(x)$ 为函数 $2x+\sin x$ 的原函数，则下列为 $f(x)$ 的原函数是（　　）.

A. $x^2-\cos x+1$　　B. $\dfrac{x^3}{3}+\cos x$

C. $x^2+\cos x$　　D. $\dfrac{x^3}{3}-\sin x-x$

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}=$__________.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$________.

3. 若 $f(x)$ 不为 0 且可导，则 $d\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=$______________.

4. 已知点（1，3）是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $b-a$=_____.

5. $\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=$_____.

三、(8 分) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

四、(8 分) 设 $y=f(x)$ 由方程 $y-2x=e^{x(1-y)}$ 所确定的隐函数，求 $y'(0)$ 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}2n(f(\frac{1}{n})-1)$.

五、(8 分) 计算不定积分 $\int\dfrac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

六、(8 分) 计算不定积分 $\int\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}dx$.

七、应用题 (10 分) 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20 米长的墙壁，问应围成怎样的长方形才能使这间小屋面积最大？

八、(12 分) 求函数 $y=\dfrac{x^2}{2x-1}$ 的定义域、极值以及渐近线.

九、(10 分) 证明不等式： 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

十、(6 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=2026f(\xi)$.