

一、单项选择题（每小题3分，共15分）

1、设  $A, B, C$  是三个事件，则  $A, B, C$  中至少两个发生可表示为（ ）。

- A、 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ ； B、 $ABC$ ； C、 $AB \cup BC \cup AC$ ； D、 $A \cup B \cup C$ 。

2、设随机变量  $X$  与  $Y$  满足  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ，则下列结论正确的是（ ）。

- A、 $D(X+Y) = D(X)+D(Y)$ ； B、 $X$  与  $Y$  独立；  
C、 $D(XY) = D(X)D(Y)$ ； D、 $D(X-Y) = DX - DY$ 。

3、设  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  是来自正态总体  $N(0, 1)$  的一个样本， $\bar{X}$  是样本均值，则  $\bar{X}$  服从（ ）。

- A、 $\chi^2(9)$ ； B、 $\chi^2(10)$ ； C、 $N(0, 1)$ ； D、 $N(0, \frac{1}{10})$ 。

4、设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自参数为 2 的指数分布总体的一个样本， $\bar{X}, S^2$  分别是样本均值和样本方差，则  $E(2S^2 - \bar{X}) =$  （ ）

- A、2； B、4； C、6； D、8。

5、设总体  $X$  的分布函数  $F(x, \theta)$  含有一个未知参数  $\theta, \theta \in \Theta$ 。对于给定值  $\alpha (0 < \alpha < 1)$ ：若由来自  $X$  的样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  确定的两个统计量  $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  和  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，对于任意的  $\theta \in \Theta$ ，满足 \_\_\_\_\_，则称随机区间  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$  为  $\theta$  的置信水平为  $1-\alpha$  的置信区间。

- A、 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \geq \alpha$ ； B、 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \geq 1-\alpha$ ；  
C、 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \leq \alpha$ ； D、 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \leq 1-\alpha$ 。

二、填空题（每小题3分，共15分）

6、将 3 个球随机地投入 4 个杯子中，则每个杯子至多有一个球的概率是 \_\_\_\_\_。

7、设  $A, B, C$  是三个相互独立的事件， $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(C) = 0.4$ 。则  $A, B, C$  至少有一个发生的概率为 \_\_\_\_\_。

8、设  $X \sim \pi(\lambda)$  且  $P(X > 0) = 1 - e^{-2}$ , 则  $D(-2X + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9、设  $X$  和  $Y$  是两个随机变量, 满足  $Y = -3X + 5$ , 则  $X$  与  $Y$  的相关系数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

10、设估计量  $\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n)$  和  $\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)$  都是  $\theta$  的无偏估计。若对于任意的  $\theta \in \Theta$ ,  
有  $\underline{\hspace{2cm}}$  且至少对于某一个  $\theta \in \Theta$  上式中的不等号成立, 则称  $\hat{\theta}_1$  较  $\hat{\theta}_2$  有效.

三、(8分) 某商店有 100 台相同型号的冰箱待售, 其中 60 台是甲厂生产的, 25 台是乙厂生产的, 15 台是丙厂生产的, 已知这三个厂生产的冰箱质量不同, 它们的不合格率依次为 0.1、0.4、0.2, 现有一位顾客从这批冰箱中随机地取了一台, 如果顾客开箱测试后发现冰箱不合格, 试问这台冰箱来自甲厂的概率有多大?

四、(6分) 设  $(X, Y)$  的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	2	3	4	5
1	0.1	0.2	0	0.3	0.1
2	0.04	0.06	0.05	0.05	0
3	0.01	0.02	0.03	0	0.04

请判断  $X$  与  $Y$  的独立性并说明理由。

五、(10分) 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \frac{cx}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1)求常数  $c$ ; (2)求  $Y = X^2 + 1$  的概率密度函数。

六、(12分) 设  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 21e^{-3x-4y}, & x > y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求  $X, Y$  的边缘密度函数; (2)  $X, Y$  相互独立吗?

七、(10分) 设  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求数学期望  $E(X)$ ,  $E(Y)$ :

(2) 求  $X$  与  $Y$  的协方差  $Cov(X,Y)$ 。

八、(12分) 已知总体  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{-\theta}, & x > 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中  $\theta > 1$  是未知参数。设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的一个简单随机样本。

(1) 求  $\theta$  的矩估计量; (2) 求  $\theta$  的最大似然估计量。

九、(12分) 随机地从一批电子元件中抽取 16 个, 测得它们的电阻(欧)分别为: 14.0, 16.0, 15.1, 14.5, 14.6, 14.2, 14.6, 14.7, 14.0, 13.9, 13.8, 14.2, 13.6, 13.8, 14.1, 14.3, 14.4

这批数据为  $x_i$ , 已经计算得到  $\sqrt{\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} \approx 0.60$ ,  $\bar{x} \approx 14.3$ 。设这批元件的

服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ 。

- (1) 能否认为这批元件的电阻的均值  $\mu$  大于 14? (显著性水平为 0.05);  
 (2) 能否认为这批元件的电阻的方差是 0.2? (显著性水平为 0.05)

附: 参考数据

$$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9772,$$

$$z_{0.05} = 1.645, z_{0.025} = 1.96, t_{0.05}(15) = 1.7531, t_{0.025}(15) = 2.1315, t_{0.05}(16) = 1.7119, t_{0.025}(16) = 2.1199, \chi^2_{0.95}(15) = 7.261, \chi^2_{0.975}(15) = 6.262, \chi^2_{0.05}(15) = 24.4, \chi^2_{0.025}(15) = 27.488, \chi^2_{0.95}(16) = 7.796, \chi^2_{0.975}(16) = 6.908, \chi^2_{0.05}(16) = 26.8, \chi^2_{0.025}(16) = 29.758.$$