2023—2024 学年第一学期《高等数学 B》A 卷

答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 当 $x\to 0$ 时， $(1-\cos x)(2^x-1)$ 与 x^3 相比是（ C ）

A. 高阶无穷小； B. 等价无穷小；

C. 同阶但不等价无穷小； D. 低阶无穷小.

2. 设 $f(x)=\dfrac{\arcsin^2 x}{\ln\sqrt{1+x^2}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ D ）.

A. 连续点 B. 第二类间断点 C.跳跃间断点 D. 可去间断点

3. 已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}$=(B).

A. 1/5 B. －1/5 C. 1 D. －1

4.设 $\boldsymbol{f(x)=x^3+ax^2+bx+c}$，$\boldsymbol{x_0}$ 是方程 $\boldsymbol{f(x)}=0$ 的最大的根, 则必有（ A ）

A. $\boldsymbol{f'(x_0)}\ge 0$ B. $\boldsymbol{f'(x_0)}>0$ C. $\boldsymbol{f'(x_0)}\le 0$ D. $\boldsymbol{f'(x_0)}<0$

5. 若 $f'(x)=\sin(x^2)$，则 $\int xf''(x^2)dx=$（ D ）

A. $-\dfrac{1}{2}\cos(x^4)+c$ B. $-\dfrac{1}{2}\cos(x^4)$ C. $-\dfrac{1}{2}\sin(x^4)+c$ D. $\dfrac{1}{2}\sin(x^4)+c$

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1．已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\alpha x-7}{x-1}=\beta$，则常数 $\alpha+\beta=$ ____14____.

2．设 $y=e^{1-2x}$，则 $y^{(2024)}(0)=$ ____$2^{2024}e$____.

3．已知 $y=x^2+2x$，在点 $x=3$ 处，$\Delta x=0.1$ ，则 $dy=$ ____0.8____.

4． $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=$ __1____.

5．若 $\int xf(x)dx=\arctan x+C$，则 $\int\dfrac{1}{f(x)}dx=$ ____ $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x^4+C$ ______.

三、(8 分) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to0^+}(1+\dfrac{2}{x})^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln(1+\frac{2}{x})^{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln(1+\frac{2}{x})}$ ---------2 分

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln(1+\dfrac{2}{x})=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(1+\dfrac{2}{x})\underline{\underline{\frac{1}{x}=t}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+2t)}{t}=0$ ---------------6 分

故 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\sin x}=1$ --------------------------- 8 分.

四、(8 分) 求参数方程 $\begin{cases}x=f'(t),\\y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$ 所确定的 $y=f(x)$ 的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 和二阶导数

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$,其中 $f''(t)$ 存在且不为零.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t=y'$； …………4 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{f''(t)}$.…………8 分

五、(8 分) 计算不定积分 $\int\dfrac{\sin x+3\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

解：令

$$\begin{aligned}\sin x+3\cos x&=A(\sin x+\cos x)+B(\sin x+\cos x)' \quad \text{--------2 分}\\&=(A-B)\sin x+(A+B)\cos x\end{aligned}$$

$\Rightarrow A=2,B=1$ --------4 分

$$\int\frac{\sin x+3\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int(2+\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x})\,dx=2x+\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$$

--------8 分

六、(8 分) 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 计算不定积分 $\int f(x)dx$.

解：令 $\ln x=t$, 则 $x=e^t$, $\therefore f(t)=\dfrac{\ln(1+e^t)}{e^t}$ ----------------2 分

$$\therefore\int f(x)dx=\int e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{1}{1+e^x}dx$$ --------4 分

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=-e^{-x}\ln(1+e^x)+x-\ln(1+e^x)+C$$

-------------------------8 分

七、(10 分) 求函数 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域以及渐近线.

解：（1）定义域为 $(-\infty,-\frac{1}{e})\cup(0,+\infty)$ -----------------2 分

（2）$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(e+\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(e+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln(e+u)}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{e+u}=0$，

-----------------5 分

$\lim\limits_{x\to(\frac{1}{e})^-}x\ln(e+\dfrac{1}{x})=\infty$，

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{e}$ 是铅直渐近线. ---------------------7 分

（3）

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(e+t)-1}{t}=\frac{1}{e}$$

$\therefore\quad y=x+\dfrac{1}{e}$ 是斜渐近线--10 分

八、(10 分)应用题：在半径为 R 的半圆内作内接梯形，使其底为直径其它三边为圆的弦，问应怎样设计，才能使梯形的面积最大？

解：设梯形的上底为$2x$，则高$h=\sqrt{R^2-x^2}$，

于是梯形面积$S=\dfrac{1}{2}(2x+2R)\sqrt{R^2-x^2}$，$(0<x<R)$ --------------------------------------3 分

$S'=\sqrt{R^2-x^2}-\dfrac{x(R+x)}{\sqrt{R^2-x^2}}=\dfrac{R^2-Rx-2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$，令$S'=0$，得$x=\dfrac{R}{2}$ ------------------------6 分

$\because x=\dfrac{R}{2}$是唯一驻点，又面积最大值存在.，$\therefore x=\dfrac{R}{2}$就是最大值点.

即当上底长为R时，S梯形最大.--10 分

九、(12 分)证明不等式：当 $x>1$ 时，$e^x>\dfrac{e}{2}(x^2+1)$.

证明：设 $f(x)=e^x-\dfrac{e}{2}(x^2+1)\quad(x>1)$------------------------------3 分

$f'(x)=e^x-ex$，所以 $f''(x)=e^x-e>0$------------------------------5 分

所以 $f'(x)=e^x-ex$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增------------------------------7 分

当 $x>1$ 时，$f'(x)>f'(1)=0$ ------------------------------9 分

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增

所以当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)$，即 $e^x>\dfrac{e}{2}(x^2+1)$------------------------12 分

十、(6 分) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$

证明 取辅助函数$F(x)=f(x)e^{g(x)}$. ……………………**2 分**

则$F(x)$在$\left[a,b\right]$ 连续，在(a,b)可导，且$F(a)=F(b)=0$

根据 Rolle 定理存在$\xi\in(0,1)$使得$F'(\xi)=0$

即$e^{g(\xi)}[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]=0$ ……………………**4 分**

又$e^{g(\xi)}\neq 0$

从而$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$ ……………………6 分