福建师范大学 数学与统计 学院

2022—2023 学年第 二 学期考试 A 卷

知明行笃 立诚致广

专　　业： 全校性专业　　　　年　　级： 2022 级

课程名称: 高等数学 A（下）　　任课教师： 张世芳等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时： 120 分钟

考试时间： 2023 年 9 月 13 日 下 午 2:00 点____分

题号	一	二	三	四	五	六			总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

考生信息栏

学院______系______专业______年级______姓名______学号______

装　订　线

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 过点 $(-6,5,2)$ 作一直线平行于 y 轴，则此线与原点距离为 11 的点位于第二卦限的坐标为(C)

A. $(-6,-\sqrt{41},2)$　　B. $(-6,\sqrt{41},2)$　　C. $(-6,9,2)$　　D. $(-6,-9,2)$

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点（2, 0） (B).

A.不是 $f(x,y)$ 的连续点　　B.不是 $f(x,y)$ 的极值点

C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　D.是 $f(x,y)$ 的极小值点

3. 设 $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|xy|\,dxdy$, $I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}|xy|\,dxdy$, $I_3=\iint\limits_{\substack{|x|\le 1,\\|y|\le 1}}|xy|\,dxdy$,则（ D ）

A. $I_3>I_2>I_1$　B. $I_1>I_2>I_3$　C. $I_2>I_1>I_3$　D. $I_3>I_1>I_2$

4. 设Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 z=3 的下方部分，则下列积分不为零的是（ C ）.

A. $\iint\limits_{\Sigma} xdS$　　B. $\iint\limits_{\Sigma} xzdS$　　C. $\iint\limits_{\Sigma} zdS$　　D. $\iint\limits_{\Sigma} xydS$

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n\ge 0)$ 收敛,则下列级数发散的是(A).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+1}{3+a_n^2}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

6．平面直线 $x+y=0$ 绕 y 轴旋转得到旋转曲面方程是 $\underline{x^2+z^2=y^2.}$

7．设 $z=e^{2y}\cos x$, 则 $\dfrac{\partial^6 z}{\partial x^4 \partial y^2}=$ $\underline{\quad 4e^{2y}\cos x \quad}$.

8．设 $D=\{(x,y):|x|\le 1,|y|\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (1+2x+3y)dxdy=$ $\underline{\quad 4 \quad}$.

9．设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则曲线积分 $\int_L x^2 ds=$ $\underline{18\pi}$.

10．设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=6, \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}=8,$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=$ $\underline{\quad 10 \quad}$.

三、(8 分)求椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 在点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面方程和法线方程.

解:设 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$

则曲线在点 $(-1,-2,3)$ 处的一个切向量为

$$gradF(x,y,z)\big|_{(-1,-2,3)}=(6x,2y,2z)\big|_{(-1,-2,3)}=-2(3,2,-3).$$ ----------------------------4 分

从而所求切平面方程为：$3(x+1)+2(y+2)-3(z-3)=0,$

即 $3x+2y-3z+16=0.$ --6 分

法线方程为：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-3}.$ --8 分

四、(8 分)求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截得（含在圆柱面内的部分） 立体 Ω 的体积.

解：设 Ω_1 表示立体 Ω 在第一象限的部分，它在 xOy 面的投影区域为

$$D=\{(x,\ y):\ x^2+y^2\le 2ax, x\ge 0, y\ge 0\}.$$

则 $V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_1}dxdydz$

$$=4\iint\limits_D dxdy\int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$=4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$ ---4 分

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,rdr$$ --6 分

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,d(4a^2-r^2)$$

$$=-2\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2a\cos\theta}\,d\theta$$

$$=-\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}8a^3\sin^3\theta-8a^3d\theta$$

$$=\frac{32a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-\sin^3\theta d\theta=\frac{16\pi a^3}{3}-\frac{64a^3}{9}.$$ -------------------------8 分

五、(8 分)计算$\iint\limits_{\Sigma} zdS$，其中$\Sigma$为平面$z-x-y=a$在圆柱体$x^2+y^2\le a^2$内的部分.

解： 由第一型曲面积分的计算公式有

$$\iint\limits_{\Sigma} zdS=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+a)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+a)\sqrt{1+1+1}\,dxdy$$

$$=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+a)dxdy$$ ---4 分

$$=\sqrt{3}\left(\iint\limits_{D_{xy}}(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}adxdy\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(0+\iint\limits_{D_{xy}}adxdy\right)$$ 奇偶性

$$=\sqrt{3}\pi a^3.$$ --8 分

六、(8 分) 计算曲线积分$\int_L (e^{x^2}-x^2y)dx+(xy^2-\sin y^2)dy$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$

$(a>0)$ 取顺时针方向.

解：由格林公式，得

$$I=\oint_L (e^{x^2}-x^2y)dx+(xy^2-\sin y^2)dy$$

$$=\iint_D -(e^{x^2}-x^2y)'_y+(xy^2-\sin y^2)'_x dxdy$$

$$=\iint_D x^2+y^2 dxdy$$ --4 分

$$=\int_0^{2\pi}dx\int_0^a r^3dr=\frac{\pi a^4}{2}.$$ --8 分

七、(8 分) 将函数 $f(x)=\int_0^x \cos t^2 dt$ 展开为 x 的幂级数.

解： $f'(x)=(\int_0^x \cos t^2 dt)'=\cos x^2$

$$\cos x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n},-\infty<x<+\infty,$$ --4 分

注意到 $f(0)=\int_0^0 \cos t^2 dt=0$, 则有

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x \cos t^2 dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{4n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^x t^{4n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\quad -\infty<x<+\infty.$$ ----------8 分

八、（10 分）求二元函数 $f(x,y)=xe^{-x}-y\ln y+y$ 的驻点和极值，并说明是极大值还是极小值.

解：由 $\begin{cases} f_x=(1-x)e^{-x}=0 \\ f_y=-\ln y=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

从而 $(1,1)$ 为函数 $f(x,y)$ 的唯一驻点. --4 分

记 $A=f_{xx}=(x-2)e^{-x}$， $B=f_{xy}=0$， $C=f_{yy}=-\dfrac{1}{y}$.

在 $(1,1)$ 处， $A=-\dfrac{1}{e},B=0,C=-1$. 因为 $AC-B^2>0,A<0$，故 $(1,1)$ 是 $f(x,y)$ 的唯一极大值点，且极大值为 $f(1,1)=1+\dfrac{1}{e}$.--10 分

九、（10 分）设 $F(t)=\oint\!\!\oint_{\Omega(t)} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 $\Omega(t)$ 为球面

$x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 外侧. 求 $F'(t)$.

解：由高斯公式可得

$$F(t)=\oint\!\!\oint_{\Omega(t)} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega(t)}(x^3)'_x+(y^3)'_y+(z^3)'_z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint_{\Omega(t)}x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ --4 分

$$=9\iiint_{\Omega(t)}z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ --6 分

$$=9\int_{-t}^{t}z^2dz\iint_{D_Z}dxdy$$

$$=9\int_{-t}^{t}z^2\cdot\pi(t^2-z^2)dz$$

$$=18\pi\int_0^t t^2z^2-z^4)dz=\frac{12}{5}\pi t^5.$$ ---8 分

$$F'(t)=(\frac{12}{5}\pi t^5)'=12\pi t^4.$$ --10 分

十、（10 分）（1）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$；

（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$.

解：(I) 设 $u_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{nx^{n+2}}{(n+1)x^{n+1}}|=|x|$.

由 $|x|<1$ 解得幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，该级数为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，故发散.

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 为交错级数，由莱布尼茨定理可知该级数（条件）收敛.

所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$. --4 分

(II) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$, 则 $s(x)=xf(x)$, 且 $s(0)=f(0)=0$.

又
$$f'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n})'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},|x|<1.$$

故
$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x);$$

由连续性可知，

$$s(x)=xf(x)=-x\ln(1-x), x\in[-1,1).$$ --8 分

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n}=f(\frac{1}{2})=2s(\frac{1}{2})=\ln 2.$$ ---10 分