

一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、设 A, B, C 是三个事件, 则 A, B, C 中至少有两个发生可表示为 ()。

A、 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$; B、 ABC ; C、 $AB \cup BC \cup AC$; D、 $A \cup B \cup C$ 。

2、设随机变量 X 与 Y 满足 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 则下列结论正确的是 ()。

A、 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$;

B、 X 与 Y 独立;

C、 $D(XY) = D(X)D(Y)$;

D、 $D(X-Y) = DX - DY$ 。

3、设 X_1, X_2, \dots, X_{10} 是来自正态总体 $N(0, 1)$ 的一个样本, \bar{X} 是样本均值, 则 \bar{X} 服从 ()。

A、 $\chi^2(9)$; B、 $\chi^2(10)$; C、 $N(0, 1)$; D、 $N(0, \frac{1}{10})$ 。

4、设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自参数为 2 的指数分布总体的一个样本, \bar{X}, S^2 分别是样本均值和样本方差, 则 $E(2S^2 - \bar{X}) = ()$

A、2;

B、4;

C、6;

D、8。

5、设总体 X 的分布函数 $F(x, \theta)$ 含有一个未知参数 $\theta, \theta \in \Theta$ 。对于给定值 $\alpha (0 < \alpha < 1)$:

若由来自 X 的样本 X_1, X_2, \dots, X_n 确定的两个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 对于任意的 $\theta \in \Theta$, 满足_____, 则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

A、 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \geq \alpha$;

B、 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \geq 1-\alpha$;

C、 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \leq \alpha$;

D、 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \leq 1-\alpha$ 。

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6、将 3 个球随机地投入 4 个杯子中, 则每个杯子至多有一个球的概率是_____。

7、设 A, B, C 是三个相互独立的事件, $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(C) = 0.4$ 。则 A, B , 至少有一个发生的概率为_____

8、设 $X \sim \pi(\lambda)$ 且 $P(X > 0) = 1 - e^{-2}$ ，则 $D(-2X + 1) =$ _____。

9、设 X 和 Y 是两个随机变量，满足 $Y = -3X + 5$ ，则 X 与 Y 的相关系数为_____。

10、设估计量 $\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计。若对于任意的 $\theta \in \Theta$ ，

有 _____ 且至少对于某一个 $\theta \in \Theta$ 上式中的不等号成立，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效。

三、(8 分) 某商店有 100 台相同型号的冰箱待售，其中 60 台是甲厂生产的，25 台是乙厂生产的，15 台是丙厂生产的，已知这三个厂生产的冰箱质量不同，它们的不合格率依次为 0.1、0.4、0.2，现有一位顾客从这批冰箱中随机地取了一台，如果顾客开箱测试后发现冰箱不合格，试问这台冰箱来自甲厂的概率是多大？

四、(6 分) 设 (X, Y) 的联合概率分布为

$Y \backslash X$	-1	2	3	4	5
1	0.1	0.2	0	0.3	0.1
2	0.04	0.06	0.05	0.05	0
3	0.01	0.02	0.03	0	0.04

请判断 X 与 Y 的独立性并说明理由。

五、(10 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{cx}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求常数 c ；(2) 求 $Y = X^2 + 1$ 的概率密度函数。

六、(12 分) 设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 21e^{-3x-4y}, & x > y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 X, Y 的边缘密度函数； (2) X, Y 相互独立吗？

七、(10 分) 设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & , 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求数学期望 $E(X)$, $E(Y)$;

(2) 求 X 与 Y 的协方差 $Cov(X, Y)$ 。

八、(12 分) 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{-\theta} & , x > 1 \\ 0 & , \text{其它} \end{cases}$$

其中 $\theta > 1$ 是未知参数。设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本。

(1) 求 θ 的矩估计量; (2) 求 θ 的最大似然估计量。

九、(12 分) 随机地从一批电子元件中抽取 16 个, 测得它们的电阻 (欧) 分别为: 14.0, 16.0, 15.1, 14.5, 14.6, 14.2, 14.6, 14.7, 14.0, 13.9, 13.8, 14.2, 13.6, 13.8, 14.4

这批数据为 x_i , 已经计算得到 $\sqrt{\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} \approx 0.60$, $\bar{x} \approx 14.3$ 。设这批元件的

服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

(1) 能否认为这批元件的电阻的均值 μ 大于 14? (显著性水平为 0.05);

(2) 能否认为这批元件的电阻的方差是 0.2? (显著性水平为 0.05)

附: 参考数据

$$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9772,$$

$$z_{0.05} = 1.645, z_{0.025} = 1.96, t_{0.05}(15) = 1.7531, t_{0.025}(15) = 2.1315, t_{0.05}(16) = 1.7558,$$

$$t_{0.025}(16) = 2.1199, \chi_{0.95}^2(15) = 7.261, \chi_{0.975}^2(15) = 6.262, \chi_{0.05}^2(15) = 24.996,$$

$$\chi_{0.025}^2(15) = 27.488, \chi_{0.95}^2(16) = 7.796, \chi_{0.975}^2(16) = 6.908, \chi_{0.05}^2(16) = 26.559.$$