

2021 — 2022 学年第一学期《高等数学 B》A 卷

答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = a (a \neq 0)$ , 则 ( D )
- A. 数列  $\{x_n\}$  收敛  
B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$   
C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -a$   
D. 数列  $\{x_n\}$  可能收敛, 也可能发散
2. 设  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(x+1)}{e^x - 1}$  的第二类间断点的个数为 ( C ) .
- A. 0  
B. 1  
C. 2  
D. 3
3. 函数  $y = x \sin x + 2 \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ) 的拐点坐标为 ( B ) .
- A.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$   
B.  $(\pi, -2)$   
C.  $(0, -2)$   
D.  $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
4. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $\frac{1}{x}$ , 则  $f'(x) =$  ( A )
- A.  $\frac{2}{x^3}$   
B.  $\frac{1}{x}$   
C.  $-\frac{1}{x^2}$   
D.  $\ln|x|$
5. 设函数  $y = \sec x$  在  $x = 0$  处的二次泰勒多项式为  $1 + ax + bx^2$ , 则 ( D ) .
- A.  $a = 1, b = -\frac{1}{2}$   
B.  $a = 1, b = \frac{1}{2}$   
C.  $a = 0, b = -\frac{1}{2}$   
D.  $a = 0, b = \frac{1}{2}$

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\sin 4x^3}{1 - \cos ax}$  与  $ax$  是等价无穷小, 则  $a =$  2 .

2. 物体的运动规律  $s = t\sqrt[3]{t^2}$  (m) 则物体在  $t = 2$  (s) 时的速度 =  $\frac{5}{3}\sqrt[3]{2^2}$  .

3. 曲线  $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$  的垂直渐近线方程是  $x = -\frac{1}{e}$  .

4.  $y = (2x+1)^8$ , 则  $y^{(8)} = 8!2^8$  .

5.  $\int \frac{e^x}{x^2} dx = -\frac{1}{x}e^x + C$  .

### 三、计算题(每题 8 分, 共 48 分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$

解  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

2. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x)}$  .

解 当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $\ln(1 + 2x) \sim 2x$ ,

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} = \frac{9}{2}.$$

3. 设  $y = (1+x^2)\arctan x + x^{\sin x} - e^2$ , 求  $y'$  .

解:  $\because ((1+x^2)\arctan x)' = 2x\arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$$= 2x\arctan x + 1$$

$$\begin{aligned}(x^{\sin x})' &= (e^{\sin x \ln x})' \\ &= x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)\end{aligned}$$

$$(e^2)' = 0$$

$$\therefore y' = 2x \arctan x + 1 + x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) .$$

4.  $\int e^{\sqrt{2x+4}} dx ;$

解: 令  $t = \sqrt{2x+4}$ , 则  $x = \frac{t^2-4}{2}$ ,  $dx = t dt$

$$\text{原式} = \int t e^t dt = \int t de^t = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

$$= (\sqrt{2x+4} - 1)e^{\sqrt{2x+4}} + C$$

5. 设  $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \ln(2x+1), & x > 0 \end{cases}$  求  $\int f(x) dx$ .

解: 当  $x < 0$  时,  $\int f(x) dx = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1$ ,

当  $x > 0$  时,  $\int f(x) dx = \int \ln(2x+1) dx = x \ln(2x+1) - x + \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C_2$ ,

再由  $\int f(x) dx$  在  $x=0$  连续, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(2x+1) - x + \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C_2] \Rightarrow C_1 = C_2 + \frac{1}{2}$$

故

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + C & x \leq 0 \\ x \ln(2x+1) - x + \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C & x > 0 \end{cases}$$

6. 就  $a$  的各种情况, 讨论函数  $f(x) = x^3 - 12ax + 3$  的极值.

解:  $f'(x) = 3x^2 - 12a = 3(x^2 - 4a)$ ,  $f''(x) = 6x$

令  $f'(x) = 0$  得  $x = \pm\sqrt{4a} = \pm 2\sqrt{a} (a \geq 0)$

所以当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  无极值;

当  $a > 0$  时,  $f''(2\sqrt{a}) = 12\sqrt{a} > 0$ ,  $f(x)$  在  $x = 2\sqrt{a}$  取极小值  $3 - 16\sqrt{a^3}$ ;

$f''(-2\sqrt{a}) = -12\sqrt{a} < 0$ ,  $f(x)$  在  $x = -2\sqrt{a}$  取极大值  $3 + 16\sqrt{a^3}$ .

**四、应用题 (8 分)** 要各造一圆柱形油罐, 体积为  $V$ , 问底半径  $r$  和高  $h$  等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底面直径和高比为多少?

解: 已知  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ ,

则圆柱形油罐表面积

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, r \in (0, +\infty),$$

$$A' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}, A'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

令  $A' = 0$ , 得  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ , 由  $A'' \Big|_{r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = 12\pi > 0$  知  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  为极小值点, 又驻点唯一, 故

极小值点就是最小值点, 此时,  $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r \Rightarrow 2r : h = 1 : 1$

所以当底半径  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  和高  $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  时, 才能使表面积最小, 这时底面直径和高比为

1:1.

**五、(8 分)** 证明不等式: 当  $0 < a < b$  时,  $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$ .

证明:

令  $f(x) = \arctan x$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足拉格朗日定理的条件. 故

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b),$$

则  $\arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a)$

再由, 故  $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$

**六、(6分)** 设  $f(x)$  在  $[-1,1]$  上具有二阶导数, 且  $f'(1) = f'(-1) = 1$ , 证明:

存在一点  $\xi \in (-1,1)$ , 使得  $f''(\xi) + f'(\xi) = 1$ ;

**证明** 令  $\varphi(x) = [f'(x) - 1]e^x$ ,

由题意, 则  $\varphi(x)$  在  $[-1,1]$  上连续, 在  $(-1,1)$  上可导, 且  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$

由罗尔定理知, 存在一点  $\xi \in (-1,1)$ , 使得  $\varphi'(\xi) = 0$ .

又  $\varphi'(x) = (f''(x) + f'(x) - 1)e^x$ ,  $e^x \neq 0$

故  $f''(\xi) + f'(\xi) = 1$