

福建师范大学 数学与统计 学院

2024—2025 学年第一学期考试 B 卷



# 知明行篤

云山故里

专 业: 全校性专业 年 级: 2024 级

年 级: 2024 级

课程名称: 高等数学 A 任课教师: 蔡裕华等

任课教师: 蔡裕华等

试卷类别: 开卷( )闭卷(√) 考试用时: 120分钟

考试时间：2025年1月2日上午9点00分

重排版 : Github@Xuuyuan

欢迎了解WeFJNU项目(<https://wefjnu.nekoark.com>)！

学院\_\_\_\_\_ 考\_\_\_\_\_ 系\_\_\_\_\_ 生\_\_\_\_\_ 专业\_\_\_\_\_ 信\_\_\_\_\_ 息\_\_\_\_\_ 年级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 栏

线订装

## 一、单选题（每题3分，共15分）

1. 设 $f(x)$ 有原函数，则 $f(x)$ 的任意两条不同积分曲线在相同横坐标下所对应的点上的切线（ ）。
- A. 相互垂直      B. 平行 $x$ 轴  
C. 相互平行      D. 平行 $y$ 轴
2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} \right)$ 利用定积分可表示为（ ）。
- A.  $\int_0^1 e^x dx$       B.  $\int_0^1 x e^x dx$   
C.  $\int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx$       D.  $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} dx$
3. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的偶函数且存在一个原函数 $F(x)$ ，则（ ）。
- A.  $F(x) = F(-x)$       B.  $F(x) = F(-x) + c$   
C.  $F(x) = -F(-x)$       D.  $F(x) = -F(-x) + c$
4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界， $\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（ ）。
- A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛      B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛  
C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛      D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛
5. 下列反常积分中收敛的是（ ）。
- A.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$       B.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$   
C.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$       D.  $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

## 二、填空（每小题3分，共15分）

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2+2x}$ 的无穷间断点个数为 \_\_\_\_\_.
2. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点为 \_\_\_\_\_.
3. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$ ，则 $f'(x) =$  \_\_\_\_\_.
4. 设函数 $f(x)$ 可导且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} = -1$ ，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极 \_\_\_\_\_ 值.
5. 根据定积分的几何意义 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

三、(8分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - \cos t) dt}{\int_0^x t(e^t - 1) dt}$ .

四、(8分) 求  $y = (\arctan \sqrt{1+x})^2$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

五、(8分) 求不定积分  $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$ .

六、(8分) 求定积分  $\int_1^e \sin(\ln x) dx$ .

七、(10分) 判断曲线  $y = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}$  是否存在斜渐近线, 若有, 请求出斜渐近线方程.

八、(10分) 设  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x(1+ax) = 1+bx^2+o(x^2)$ , 求常数  $a$  和  $b$ .

九、(10分) 证明曲线  $y = \ln x$  与直线  $y = \frac{x}{e} - 1$  有且仅有两个交点.

十、(8分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且  $f(x) > 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_\xi^b f(x) dx.$$