

2021 — 2022 学年第一学期《高等数学 B》A 卷

一、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = a (a \neq 0)$, 则 ().
 A. 数列 $\{x_n\}$ 收敛
 B. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
 C. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -a$
 D. 数列 $\{x_n\}$ 可能收敛, 也可能发散
- 设 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(x+1)}{e^x - 1}$ 的第二类间断点的个数为 ().
 A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3
- 函数 $y = x \sin x + 2 \cos x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2})$ 的拐点坐标为 ().
 A. $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 B. $(\pi, -2)$
 C. $(0, -2)$
 D. $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
- 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$, 则 $f'(x) =$ ().
 A. $\frac{2}{x^3}$
 B. $\frac{1}{x}$
 C. $-\frac{1}{x^2}$
 D. $\ln|x|$
- 设函数 $y = \sec x$ 在 $x=0$ 处的二次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$, 则 ().
 A. $a=1, b=-\frac{1}{2}$
 B. $a=1, b=\frac{1}{2}$
 C. $a=0, b=-\frac{1}{2}$
 D. $a=0, b=\frac{1}{2}$

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin 4x^3}{1 - \cos ax}$ 与 ax 是等价无穷小, 则 $a =$ _____.
- 物体的运动规律 $s = t^3 \sqrt{t^2}$ (m) 则物体在 $t=2$ (s) 时的速度=_____.

3. 曲线 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ 的垂直渐近线方程是_____

4. $y = (2x + 1)^8$, 则 $y^{(8)} =$ _____.

5. $\int \frac{e^x}{x^2} dx =$ _____.

三、计算题(每题 8 分, 共 48 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x)}$.

3. 设 $y = (1 + x^2) \arctan x + x^{\sin x} - e^2$, 求 y' .

4. $\int e^{\sqrt{2x+4}} dx$;

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \ln(2x+1), & x > 0 \end{cases}$ 求 $\int f(x) dx$.

6. 就 a 的各种情况, 讨论函数 $f(x) = x^3 - 12ax + 3$ 的极值.

四、应用题 (8 分) 要各造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底面直径和高比为多少?

五、(8 分) 证明不等式: 当 $0 < a < b$ 时, $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

六、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f'(1) = f'(-1) = 1$, 证明:

存在一点 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\xi) + f'(\xi) = 1$;