2022— 2023 第二学期《高等数学 B》期末

试题(B)答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．已知 $y''+y=x$ 的一个解为 $y_1=x$，$y''+y=2e^x$ 的一个解为 $y_2=e^x$，则方程 $y''+y=x+2e^x$ 的通解为（ B ）

A. $y=x+e^x$　　B. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x+x$

C. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$　　D. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$

2. 设直线的方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$，则该直线一定（ C ）.

A. 不过原点且垂直于 x 轴　　B. 不过原点且垂直于 z 轴

C.过原点且垂直于 x 轴　　D. 过原点且垂直于 y 轴

3. 函数 $z=x^3+y^3$ 和 $z=(x^2+y^2)^2$ 在 $(0,0)$ 处有 （ D ）

A. 这两个函数都无极值　　B. 这两个函数都有极值

C. $z=x^3+y^3$ 有极小值，而 $z=(x^2+y^2)^2$ 无极值

D. $z=x^3+y^3$ 无极值，而 $z=(x^2+y^2)^2$ 有极小值

4. 设区域 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$（ D ）

A. $ab\pi$　　B. $\frac{ab}{2}\pi$　　C. $(a+b)\pi$　　D. $\frac{a+b}{2}\pi$

5. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha+\cos n\alpha}{n^2}$ 的收敛性（ A ），其中 α 为常数.

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 无法判断

二、填空(每小题 3 分，共 15 分)

1. 曲面 $x^2-y^2-z^2=1$ 可由 xOy 面上的曲线____ $x^2-y^2=1$ ____绕 x 轴旋转一周得到.

2．已知微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$，则该微分方程为 $y''-6y'+9y=0$______________.

3．函数 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在点 $(1,1)$ 处沿下降最快的方向的方向导数为 __$-\sqrt{2}$__.

4. $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy=\underline{\frac{1}{2}(e-1)}$.

5．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=$____0_______.

三、(8 分) 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$ 的通解.

解：原方程可化为一阶线性微分方程的标准形式：$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-y$

记 $P(y)=-\frac{2}{y}$， $Q(y)=-y$

由求解公式可知 $x=e^{-\int P(y)dy}(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C)$

$$=e^{\int\frac{2}{y}dy}(\int(-y)e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy+C)$$ --------------4 分

$$=e^{2\ln y}(\int -ye^{-2\ln y}dy+C)$$

$$=y^2(\int -\frac{1}{y}dy+C)$$

$$=y^2(-\ln|y|+C)$$

-----------------------8 分

四、(8 分) 设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g(x)$，其中 f 具有二阶连续偏导数， g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'y+f_2'\frac{1}{y}+g'(x)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2'$

----------4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''-\frac{x}{y}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{x}{y}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

----------8 分

五、(8 分) 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+3x+4y-6)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big|1\le x^2+y^2\le 4\}$.

解：D 关于 x,y 轴对称，被积函数 $3x+4y^3$ 关于 y 是奇函数，

$\therefore \iint\limits_D (3x+4y)dxdy=0$，------2 分

故 $\iint\limits_D (x^2+3x+4y-6)dxdy=\iint\limits_D (3x+4y)dxdy+\iint\limits_D (x^2-6)dxdy$ ------4 分

$$=0+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 (r^2\cos^2\theta-6)rdr=-\frac{57\pi}{4}$$ ------8 分

六、(8 分) 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=498$ 上平行于平面 $x+3y+5z=0$ 的切平面方程.

解： 设 (x_0,y_0,z_0) 为椭球面上的切点,则切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0,$$ --------------2 分

依题意, 切平面方程平行于已知平面, 得

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{3}=\frac{6z_0}{5}$$

$\because (x_0,y_0,z_0)$ 是椭球面上的切点,满足椭球面方程,代入得 $x_0=\pm 6$, 从而切点为

$(6,9,10),(-6,-9,-10)$

故切平面方程(1) $x+3y+5z=83$;

切平面方程(2) $x+3y+5z=-83$. ----------------------8 分

七、(8 分) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{(3-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数，并求 $f^{(2023)}(0)$.

解：(1) $\dfrac{1}{(3-x)^2}=(\dfrac{1}{3-x})'$ ---------------------2 分

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}\qquad x\in(-3,3)，$$ ---------- 4 分

$$\frac{1}{(3-x)^2}=(\frac{1}{3-x})'=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}})'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}x^{n-1}，\quad x\in(-3,3)$$.----------------------6 分

（2）$f^{(2023)}(0)=\dfrac{2024!}{3^{2025}}$ ------------------8 分

八、（10 分） 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+2)x^n$的和函数,并给出收敛域. .

解 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{2n+4}=1$，

当$x=1$时，幂级数成为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+2)$，是发散的；

当$x=-1$时， 幂级数成为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)$，是发散的.

因此，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+2)x^n$ 的收敛域为$(-1,1)$. ---------------------4 分

设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+2)x^n$ 和函数为$S(x)$，即有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'=2(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})'=2(\frac{x}{1-x})'$$ ……….8 分

$$=2(\frac{x-1+1}{1-x})'=2(-1-\frac{1}{x-1})'=\frac{2}{(x-1)^2},|x|<1$$ ……….10 分

九、（10分） 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2xy}\sin(x^2y), & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，

(1) 该函数在点$(0,1)$是否连续?为什么?

(2) 求$f_x(0,1), f_y(0,1)$.

解：(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1}{2xy}\sin(x^2y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1}{2xy}(x^2y)=0=f(0,0)$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续；　　　　　　　　　　----------4 分

当 $x^2+y^2=0$ 时，

$$f_x(0,1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2x}\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$ ----------7 分

$$f_y(0,1)=\lim_{y\to 1}\frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{0-0}{y-1}=0$$ ----------10 分

十、(10分) 已知空间曲线 C 的一般方程为：$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求该空间曲线 C 上距离 xoy 平面最远的点和最近的点.

解：　设 (x,y,z) 为空间曲线 C 上的任意点, 它到 xoy 面的距离为 $|z|$.

故求 C 上距离 xoy 平面最远的点和最近的点的坐标等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$，$x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点.

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$$

----------------------6 分

求偏导，可得

$$\begin{cases}L_x=2\lambda x+\mu=0\\ L_y=2\lambda y+\mu=0\\ L_z=2z-4\lambda z+3\mu=0\\ x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z-5=0\end{cases}$$

解得

$$x_1=-5, y_1=-5, z_1=5;\ x_2=1, y_2=1, z_2=1.$$

根据几何意义，曲线 C 上存在距离 xoy 平面最远的点和最近的点，故距离 xoy 平面最远的点为 $(-5,-5,5)$，最近的点为 $(1,1,1)$.　----------------------10 分