# 2020—2021 学年第一学期《高等数学 A》（B）卷

# 答案及评分标准

## 一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 当$x\to 0$时，$x-\tan x$是$x^3$的（ D ）

A. 低阶无穷小　　B. 等价无穷小

C. 高阶无穷小　　D. 同阶但不等价无穷小

2. 设$f(x)=\dfrac{e^{1/(x-1)}-1}{e^{1/(x-1)}+1}$，则$x=1$是$f(x)$的（ C ）

A．连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3. $f(x)$二阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=-3$，则（ B ）

A. $f(0)$是极小值　　B. $f(0)$是极大值

C. $x=0$是驻点但不是极值点　　D. $(0,f(0))$是曲线的拐点

4. 若$\int f'(x^2)dx=x^4+C$，则$f(x)=$（ C ）

A．$x^2+C$　　B. $\dfrac{x^3}{3}+C$　　C. $\dfrac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$　　D. $x^4+C$

5. 下列结论正确的是（ A ）

A. 若$\int_0^{+\infty}f(x)dx$和$\int_{-\infty}^0 f(x)dx$中有一个发散，则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$一定发散

B. 若$\int_0^{+\infty}f(x)dx$发散，$\int_0^{+\infty}g(x)dx$发散，则$\int_0^{+\infty}[f(x)+g(x)]dx$一定发散

C. 若$\int_1^{+\infty}f(x)dx$发散，$\int_1^{+\infty}g(x)dx$发散，则$\int_1^{+\infty}f(x)g(x)dx$一定发散

D. 若$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛，$\int_1^{+\infty}g(x)dx$发散，则$\int_1^{+\infty}f(x)g(x)dx$一定发散

## 二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1． $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{2x}=$ ____$-\dfrac{1}{2}$____.

2．设 $x_0>0$， $f'(x_0)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x^2-x_0^2}=$ ____$\dfrac{a}{2x_0}$____.

3．设 $f(x)=x\cos x$，则 $f(x)$ 按 $x$ 的幂展开的泰勒公式中 $x^7$ 项的系数=____$-\dfrac{1}{6!}$____.

4. $\int\dfrac{1}{x^2+2x-3}dx=$ ____$\dfrac{1}{4}\ln|\dfrac{x-1}{x+3}|+C$____；

5． $\int_{-1}^{1}(x^4+\tan x)|x|dx=$ ____$\dfrac{1}{3}$____；

## 三、计算题(每题 8 分，共 40 分)

1． 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x te^{2t-1}(e^{2t}-1)dt}{\ln(1+\sin x)(\sqrt{1+2x^2}-1)}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x te^{2t-1}(e^{2t}-1)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^{2x-1}(e^{2x}-1)}{3x^2}$ ------------5分

$=\lim\limits_{x\to0}e^{2x-1}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^{2x}-1)}{3x^2}=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{3x^2}=\dfrac{2}{3e}$ ----------------8分

2. 若 $y^2f(x)+xf(y)=x^2$，其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $\mathrm{d}y$.

解：方程两边同时微分得

$$2yf(x)dy+y^2f'(x)dx+f(y)dx+xf'(y)dy=2xdx$$ ------------4 分

那么 $[2yf(x)+xf'(y)]dy=[2x-y^2f'(x)-f(y)]dx$

从而 $dy=\dfrac{2x-y^2f'(x)-f(y)}{2yf(x)+xf'(y)}dx$ ------------------------8 分

3. 计算不定积分 $\int\left(\frac{1}{x\ln x}+\sec^4 x\right)\mathrm{d}x$ .

解： $\int\left(\frac{1}{x\ln x}+\sec^4 x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x+\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x$

$\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x}=\ln|\ln x|+C$ ----------------------------------4 分

$\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x=\int(\tan^2 x+1)\,\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$

$\int\left(\frac{1+\ln x}{x\ln x}+\sec^4 x\right)\mathrm{d}x=\ln(|\ln x|)+\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$ . ------------------8 分

4. 计算定积分 $\int_0^{2\pi}x\sin^2 x dx$ .

解： $\int_0^{2\pi}x\sin^2 x dx=\int_0^{2\pi}x\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}xdx-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos 2xdx$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2]_0^{2\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}xd\sin 2x$ --------------------------------4 分

$=\pi^2-\frac{1}{4}[x\sin 2x]_0^{2\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin 2xdx$

$=\pi^2+\frac{1}{8}[-\cos 2x]_0^{2\pi}=\pi^2$ ------------------------------------8 分

5. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2e^t+t+1\\ y=4(t-1)e^t+t^2\end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{(4(t-1)e^t+t^2)'}{(2e^t+t+1)'}=\frac{4(t-1)e^t+4e^t+2t}{2e^t+1}=2t$ ------------------------4 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(2t)'}{(2e^t+t+1)'}=\frac{2}{2e^t+1}$ ------------------------------------------8 分

**四、应用题（8 分）**现要建一个容量为$V$的密闭圆柱形容器。已知圆柱上下底面的单位面积造价是其侧面单位面积造价的 2 倍。问该容器的高与底面半径之比为多少时，其造价最低？

解：设容器体积为定值$V$，底面半径为$r$，则高为$\frac{V}{\pi r^2}$，从而总造价为

$$f(r)=4\pi r^2+\frac{2v}{r}, r>0.$$

由 $f'(r)=8\pi r-\frac{2v}{r^2}=0$, 解得 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$.——————————————————————5 分

注意到$r\to 0, r\to\infty$时，总造价为无穷大.

因而，当$r=\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}, h=\sqrt[3]{\frac{16V}{\pi}}$时，

即$h:r=4:1$时，$f(r)$取得最小值. ——————————————————————8 分

**五、（12 分）** 证明不等式：

（1）当 $x>0$ 时， $\frac{1}{x+1}\le \ln(x+1)-\ln(x)\le\frac{1}{x}$；

（2）当$n\ge 2$ 时， $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\le \ln n\le\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n-1}$.

**证明：**（1）考虑函数$f(t)=\ln t, t\in[x,x+1]$，由拉格朗日中值定理，

存在 $\xi\in(x,x+1)$ 使得 $\ln(x+1)-\ln(x)=f'(\xi)((x+1)-x)=\frac{1}{\xi}$.

注意到 $\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{\xi}\le\frac{1}{x}$，从而有$\frac{1}{x+1}\le\ln(x+1)-\ln(x)\le\frac{1}{x}$. ————————————6 分

由（1）可知$\frac{1}{k+1}\le\ln(k+1)-\ln(k)\le\frac{1}{k}$, $\quad k=1,2,\ldots,n-1$. .

以及$\ln n=[\ln n-\ln(n-1)]+[\ln(n-1)-\ln(n-2)]+\ldots+[\ln 2-\ln 1]$,

可得 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\le\ln n\le\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n-1}$.——————————————12 分

**六、（10 分）** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=1$.

**证明:** (1)引进辅助函数 $\varphi(x)=f(x)+x-1$,

易知 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\varphi(0)=-1, \varphi(1)=1$, 即 $\varphi(0)\varphi(1)<0$ .

因此，由零点定理得，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $\varphi(\xi)=0$，即

$f(\xi)=1-\xi$. --------------------------5 分

(2) 引进辅助函数 $\psi(x)=f(x)-x$,

易知 $\psi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\psi(0)=\psi(1)=0$, .

因此，由罗尔定理得，至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使 $\psi'(\eta)=0$，即

$f'(\eta)=1$. ----------------------------------10 分