《线性代数》期中考试

- 福建师范大学 2025-2026 学年 第 1 学期
- 考试年级：2024 级、2025 级 任课教师：唐嘉等
- 闭卷考试 考试时间：2025 年 11 月 30 日 8 时至 10 时
- **说明**：试卷中的矩阵默认都是实矩阵，E 为单位矩阵。

排版：@Xuuyuan

一、单项选择题：1~6 小题，每小题 3 分，共 18 分

1. 设 A, B, C 都是 n 阶可逆矩阵，则必有（ ）
   (A) $(A+B)^{-1}C = A^{-1}C + B^{-1}C$
   (B) $AB = BA$
   (C) $R(ABC) = R(BAC)$
   (D) $ABC = E$
2. 以下说法正确的是（ ）
   (A) $A \neq B \Rightarrow |A| \neq |B|$
   (B) 若 A, B 均为 n 阶对称矩阵，则 AB 也为对称矩阵
   (C) $|AB| = |A||B|$
   (D) 若 A, E 均为 n 阶方阵，则 $R(E, A) = n$
3. 若 3 阶方阵 A 满秩，以下说法错误的是（ ）
   (A) A 仅有一个三阶不为零的子式
   (B) A 至少有一个二阶子式不等于零
   (C) $A + E$ 可逆
   (D) A 和 E 等价
4. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ 4 & b & 7 \end{pmatrix}$，则 $R(A) = (\quad)$
   (A) 1
   (B) 2
   (C) 3
   (D) 与 a, b 取值有关
5. 设 n 阶方阵 A 经过有限次初等行变换化为 B，则下列结论错误的是（ ）
   (A) $|A| = |B|$
   (B) $R(A) = R(B)$

(C) A 可逆的充要条件是 B 可逆

(D) A 和 B 有相同的行最简形矩阵

6. 设 A 为 $s\times t$ 矩阵，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷解，则（ ）

(A) $R(A)=R(A,b)-1$

(B) $R(A)\neq R(A,b)$

(C) $R(A)=R(A,b)<s$

(D) $R(A)=R(A,b)<t$

二、填空题：7~12 小题，每小题 3 分，共 18 分

7. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是 3×1 的矩阵，设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_3,\alpha_1,4\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$，若 $|A|=4$，则 $|B|=$ ____________。

8. 设行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&0&4&1\\1&3&4&2\\4&3&3&-1\end{vmatrix}$，$M_{ij}$ 和 A_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$ 分别为 $|A|$ 的 (i,j) 元的余子式和代数余子式，则 $2A_{31}+3A_{32}+5M_{33}-2M_{34}=$ ____________。

9. 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2-A-8E=0$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，则 $(A-3E)^{-1}=$ ____________。

10. 设 A,B 均为 3 阶矩阵，且 $|A|=-1,|B|=2$，则 $\begin{vmatrix}-A^{-1}&0\\0&B^*\end{vmatrix}=$ ____________。

11. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&4&5\end{pmatrix}$，则 $R(ABC)=$ ____________。

12. 计算 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}4&2&3\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^3=$ ____________。

三、解答题：13~17 小题，共 64 分（要求写出证明过程或演算步骤）

13. **(10 分)** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a-1&-1&1&1\\-1&a-1&1&1\\-1&-1&a+1&+1\\-1&-1&1&a+1\end{vmatrix}$ 的值。

14. **(24 分)** 已知 $\alpha=(1,0,1)^T,\beta=(0,-1,0)^T,A=E-\alpha\beta^T,B=E+\alpha\beta^T$，计算

(1) BA；

(2) 若 $f(x)=(x-1)^3+2(x-1)^2+3(x-1)+4$，求 $f(B)$；

(3) B 的伴随矩阵 B^*；

(4) 将 B^* 按列分块成 $B^*=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，求 $B(\beta_1+2\beta_2+3\beta_3)$。

15. **(12 分)** 设矩阵 $A^*=\mathrm{diag}(1,1,1,8)$，$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求矩阵 B。

16. **(12 分)** 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -5 \end{cases}$$

17. **(6 分)** 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 满足 $A^3 = 0, A^2 \neq 0$，证明：$R(A) = 2$。