福建师范大学 数学与统计 学院

2021—2022 学年第 二 学期考试 A 卷

知明行笃 立诚致广

专　　业： 全校性专业　　年　　级： 2021 级

课程名称： 高等数学 A（下）　　任课教师： 张世芳等

试卷类别： 开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时： 120 分钟

考试时间： 2022 年 6 月 20 日 上 午 9 点 0 分

题号	一	二	三	四	五	六			总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

考生信息栏

学院＿＿＿＿ 系＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿

装　订　线

2021—2022 学年第二学期《高等数学 A》（A）卷

答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 已知 y_1， y_2， y_3 是二阶非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的特解，C_1，C_2，C_3 为任意常数，则下列是该微分方程通解的是（ D ）.

A. $y=y_1+C_2y+C_3y_3$　　B. $y=C_1y_1+C_2(y_2-y_3)$

C. $y=y_1+C_2(y_1+y_2)+C_3(y_1+y_3)$　　D. $y=y_1+C_1(y_2-y_3)+C_2(y_1-y_3)$

2. 直线 $L:\begin{cases}x+2y+3z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$ 和平面 $\Pi: x-y-z+1=0$ 的位置关系是（ A ）.

A. L 与 Π 斜交　　B. $L\perp\Pi$

C. $L\in\Pi$　　D. $L\parallel\Pi$ 且 $L\notin\Pi$

3. 设函数 $f(x)$ 连续，若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中 D_{uv} 是第一象限内由圆周 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=u^2(u>1)$ 和直线 $y=vx(v>0)$ 、x 轴所围成区域，则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$ （ A ）

A. $\arctan v f(u^2)$　　B. $\dfrac{\arctan v}{u}f(u^2)$　　C. $\arctan v f(u)$　　D. $\dfrac{\arctan v}{u}f(u)$

4. 设 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 z=3 的下方部分，则下列积分不为零的是（ C ）.

A. $\iint\limits_{\Sigma}xdS$　　B. $\iint\limits_{\Sigma}xzdS$　　C. $\iint\limits_{\Sigma}zdS$　　D. $\iint\limits_{\Sigma}xydS$

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\cos nx}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+\sqrt{2})}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln(1+\dfrac{1}{n^2})$，其中收敛的有（ B ）.

A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 0 个

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1．微分方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的特解的待定形式为___ $y*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$ _____.

2．方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$ 所表示的曲面是__椭圆抛物面____，该曲面被平面 $z=z_0(z_0>0)$ 所截得的曲线形状是____椭圆____.

3．设 $f(x,y)=2x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $f_x(x,1)$=______2______.

4．设 $\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le a^2\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z(1+z)dv$ =___ $\frac{4\pi a^5}{15}$ ___.

5．设曲线 $L:x^2+y^2=R^2$，则 $\int_L (x+y)^2 ds=$____ $2\pi R^3$ ______.

三、计算题(每题 8 分，共 40 分)

1. 求微分方程 $y''=\frac{2x}{1+x^2}y'$ 的通解.

解: 微分方程属于 $y''=f(x,y')$ 型, 设 $y'=P(x)$, 则 $y''=P'$.－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－2 分

故原方程可化为 $\frac{dP}{P}=\frac{2x}{1+x^2}dx$, 两边分别积分得

$P=C_1(1+x^2)$, 即 $y'=C_1(1+x^2)$.－－5 分

方程两边积分可得方程的通解 $y=C_1(\frac{x^3}{3}+x)+C_2$.－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－8 分

2. 求二元函数 $f(x,y)=xe^x+y\ln y-y$ 的极值.

解：由 $\begin{cases} f_x=(x+1)e^x=0 \\ f_y=\ln y=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1. \end{cases}$

从而 $(-1,1)$ 为函数 $f(x,y)$ 的唯一驻点. －－4 分

记 $A=f_{xx}=(x+2)e^x$, $B=f_{xy}=0$, $C=f_{yy}=\frac{1}{y}$.

在 $(-1,1)$ 处，$A=\frac{1}{e},B=0,C=1$. 因为 $AC-B^2>0,A>0$，故 $(-1,1)$ 是 $f(x,y)$ 的唯一极小

值点，且极小值为 $f(-1,1)=-\frac{1}{e}-1$. --8 分

3.计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 D 由 $x^2+y^2=2y, x^2+y^2=4y$ 及 $x=0$ 在第一象限所围成的平面闭区域.

解：设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$ 则 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 2\sin\theta\le r\le 4\sin\theta\}$.

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\cdot rdr$$ --4 分

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Big|_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\,d\theta=60\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta$$

$$=60\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{45\pi}{4}.$$ --8 分

4. 计算曲线积分 $\int_L zdx+xdy+ydz$，其中曲线 L 为平面 $x+y+z=1$ 被三坐标平面所截三角形的整个边界，取逆时针方向.

解：记 L_1： $z=0, y=1-x, x:1\to 0;$ L_2： $x=0, z=1-y, y:1\to 0;$

L_3： $y=0, z=1-x, x:0\to 1.$ 则有 $L=L_1+L_2+L_3$. --------------------------3 分

$$\int_L zdx+xdy+ydz=\int_{L_1+L_2+L_3}zdx+\int_{L_1+L_2+L_3}xdy+\int_{L_1+L_2+L_3}ydz$$

$$=\int_{L_3}zdx+\int_{L_1}xdy+\int_{L_2}ydz$$ ----------------------------------5 分

$$=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^0 xd(1-x)+\int_1^0 yd(1-y)$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^1 xdx+\int_0^1 ydy$$

$$=\frac{3}{2}.$$ --8 分

5. 将函数 $f(x)=\frac{x-1}{3-x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求 $f^{(n)}(1)$.

解： $\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{2(1-\dfrac{x-1}{2})}==\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{x-1}{2})^n, |x-1|<2,$------------------------4 分

进而， $f(x)=\dfrac{x-1}{3-x}=(x-1)\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{2}(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{x-1}{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{x-1}{2})^n, -1<x<3,$ 且

$f^{(n)}(1)=[\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{x-1}{2})^n]^{(n)}|_{x=1}=\dfrac{n!}{2^n}.$---8 分

四、（10 分）求空间曲面 $z+z^2=\int_y^x e^{-t^2}dt$ 在原点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程和法线方程.

(1) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+z^2=\int_y^x e^{-t^2}dt$ 所确定，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$； (2) 求曲面 $z+z^2=\int_y^x e^{-t^2}dt$ 在原点 $(0,0,0)$ 的切平面方程和法线方程.

解：(1)令 $F(x,y,z)=z+z^2-\int_y^x e^{-t^2}dt$ ，则有

$$F_x=-e^{-x^2}, F_y=e^{-y^2}, F_z=1+2z.$$

故有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{-e^{-x^2}}{1+2z}=\dfrac{e^{-x^2}}{1+2z}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{e^{-y^2}}{1+2z}=\dfrac{-e^{-y^2}}{1+2z}.$-------------5 分

(2) $gradF(x,y,z)=(F_x,F_y,F_z)=(-e^{-x^2},e^{-y^2},1+2z).$

于是所求切平面的一个法方向量为： $gradF(0,0,0)=(-1,1,1).$

故切平面为： $x-y-z=0;$

法线为： $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}.$--10 分

五、（10 分）求 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)dxdy$ ，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的上半部分，取上侧.

解法一：记 Σ 在 xOy 面的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}.$

$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dxdy=\iint_{\Sigma}(x+y)dxdy+\iint_{\Sigma}zdxdy$

$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y)dxdy=0.$(对称性) ------------------------------------4 分

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}zdxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\sqrt{4-r^2}\cdot rdr$$

$$=-\pi\int_0^2\sqrt{4-r^2}d(4-r^2)$$

$$=-\frac{2\pi}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^2=\frac{16\pi}{3}.$$ ------------------------------------10 分

解法二：取平面 $\Sigma_1:z=0,\quad x^2+y^2\le 4,$ 下侧. 记 Σ,Σ_1 所围几何体为 Ω, 显然 Ω 在 xOy 面的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}.$ ------------------------------------2 分

$$\iint\limits_{\Sigma}x+y+zdxdy=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x+y+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}x+y+zdxdy.$$

$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x+y+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)'_zdv=\iiint\limits_{\Omega}1dv=\frac{16}{3}\pi.$ ------------------------------6 分

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x+y+zdxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+0)dxdy=0.\text{(对称性)}$$

综上 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dxdy=\frac{16\pi}{3}.$ --10 分

六、（10 分） (1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的收敛域与和函数；

（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}n(n+1)}$

解：(I) 设 $u_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{n(n+1)x^{n+2}}{(n+1)(n+2)x^{n+1}}|=|x|.$

由$|x|<1$得幂级数的收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=\pm1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{x^n}{n(n+1)}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$，故级数绝对收敛.

所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$的收敛域为$[-1,1]$.————————————————————4 分

(II) 设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, 且$s(0)=s'(0)=0$.

进而 $$s''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},|x|<1.$$

故$s'(x)=s'(x)-s'(0)=\int_0^x s''(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$;

$$s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(t)dt=\int_0^x -\ln(1-t)dt=x+(1-x)\ln(1-x).$$

又$s(x)$在$[-1,1]$上连续，所以

$$s(1)=\lim_{x\to i^-}s(x)=\lim_{x\to i^-}(x+(1-x)\ln(1-x)=1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

综上$s(x)=\begin{cases}x+(1-x)\ln(1-x), & -1\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$————————————————8 分

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}n(n+1)}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}(\frac{1}{2})^{n+1}=4s(\frac{1}{2})=2(1-\ln 2)$.——————————10 分