福建师范大学 数学与统计 学院

2024—2025 学年第一学期考试 A 卷

考生信息栏

学院______ 系______ 专业______ 年级______ 姓名______ 学号______

装 订 线

知明行笃 立诚致广

专　业：全校性专业　　年　级：2024 级

课程名称：高等数学 A　　任课教师：蔡裕华等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2025 年___月___日___午___点___分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设$f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$，那么$x=0$是$f(x)$的（　　　　）.

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

2. 函数$f(x)$在$x=0$处可导的充分必要条件是（　　　　）.

A. $f(x)$在$x=0$处连续　　B. $f'_-(0)$与$f'_+(0)$都存在

C. $f(x)-f(0)=Ax+o(x)$，其中A是常数　　D. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$存在

3. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$利用定积分可表示为（　　　　）.

A. $\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

4. 设$f(x)=\int_x^{x+\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$，则$f(x)$（　　　　）.

A. 恒为零　　B. 为小于 0 的常数

C. 为大于 0 的常数　　D. 不为常数

5. 下列反常积分中发散的是（　　　　）.

A. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+8}\mathrm{d}x$

C. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设$\alpha\in(0,1)$，则极限$\lim\limits_{n\to+\infty}((n+1)^\alpha-n^\alpha)=$________________.

2. 曲线$y=x^3-3x^2+2x+1$的拐点为______________.

3. 设$\sin x$是$f(x)$的原函数，则$\int\frac{1}{x}f'(\ln x)\mathrm{d}x=$________________.

4. 设$f'(1)=2$，则$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=$__________________.

5. 设$f(x)$为奇函数，则$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$为________________ 函数.

三、（8 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x-1}$.

四、（8 分） 求 $f(x)=\cos(1-\ln x)$ 在 $x=e$ 处的二阶导数 $f''(e)$.

五、（8 分） 求不定积分 $\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

六、（8 分） 求定积分 $\int_0^1\frac{\ln(2+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

七、（10 分） 求曲线 $y=x-\arctan x$ 的所有斜渐近线.

八、（10 分） 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}\mathrm{d}t$，

（1）求一阶导数 $f'(x)$，

（2）求 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值.

九、（10 分） 利用函数凹凸性证明：任意 $x>0$，$y>0$ 且 $x\neq y$，有 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.

十、（8 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.