高等数学A(上) 期中考试试题

福建师范大学 2025-2026 学年第一学期
年级：2025级 课程名称：高等数学A（上） 试卷类别：闭卷
考试用时：120分钟 考试时间：2025年11月30日上午10点30分

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=$（　　）.
   A. $+\infty$　　B. 1　　C. 0　　D. $-\infty$
2. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 与下列无穷小量（　　）等价.
   A. x　　B. x^2　　C. x^3　　D. x^4
3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\sin x, & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0, & |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$，则下列正确的是（　　）.
   A. $x=-\frac{\pi}{2}$ 是跳跃间断点　　B. $x=-\frac{\pi}{2}$ 是可去间断点
   C. $x=\frac{\pi}{2}$ 是跳跃间断点　　D. $x=\frac{\pi}{2}$ 是可去间断点
4. 设 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$，则必有（　　）.
   A. $x_n<y_n$ 对任意 n 成立　　B. $y_n<z_n$ 对任意 n 成立
   C. $\lim\limits_{n\to\infty}x_nz_n$ 不存在　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}y_nz_n$ 不存在
5. 设函数 $f(x)=x^3+2x+3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内零点的个数为（　　）.
   A. 没有零点　　B. 有且只有一个零点
   C. 至少有两个零点　　D. 至少有三个零点

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-x\sin\frac{1}{x^2}}=$ ________.
2. 设 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2x^2-1$，则 $f'(2)=$ ________.
3. 设 $f(x)=x^2e^x$，则 $f''(0)=$ ________.
4. 设函数 $y=f(e^{2x})$ 且 $f'(u)$ 存在，则 $dy=$ ________.
5. 曲线 $x=\cos(x+y)$ 在点 $(0,\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程为 ________.

三、(8 分)

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

四、(8 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})}{\sin x}$.

五、(8 分)

已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$f(1)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(e^x)-f(e^{-x})}{x}=2$，求 $f'(1)$.

六、(8 分)

设 $y=\ln(x+e^x)+x^{\sin x}$，其中 $x>0$，求 $\frac{dy}{dx}$.

七、(8 分)

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=e^t\\ y=1+t^3\end{cases}$ 确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ 和 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

八、(10 分)

设 $x_1=2,\quad x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求出此极限.

九、(12 分)

指出函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{(1-x)(3-x)}\ln|6-x|$ 的间断点，判断其类型并说明理由.

十、(8 分)

设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$(b^3-a^3)f'(\xi)=3\xi^2(f(b)-f(a)).$$