福建师范大学

2022— 2023 学年第二学期《 高等数学 A》期中考试卷

学院__________专业__________________姓名：__________学号_________

考生类别：2022 级全校各相关专业　　考试日期：2023 年 4 月 22 日上午 8 点 00 分

试卷类别：闭卷　　　　　　　　　　　考试时间：120 分钟

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上满足 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 的一段弧的弧长为（　　）

A. $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}dx$　　B. $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(\dfrac{1}{1-x^2})^2}dx$

C. $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\dfrac{-2x}{1-x^2}}dx$　　D. $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+[\ln(1-x^2)]^2}dx$

2．已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的解，则 $\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的表达式是（　　）

A. $-\dfrac{y^2}{x^2}$　　B. $\dfrac{y^2}{x^2}$　　C. $-\dfrac{x^2}{y^2}$　　D. $\dfrac{x^2}{y^2}$

3. 已知 y_1， y_2， y_3 是二阶非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的特解，C_1，C_2，C_3 为任意常数，则下列是该微分方程通解的是（　　）

A. $y=y_1+C_2y+C_3y_3$　　B. $y=C_1y_1+C_2(y_2\text{-}y_3)$

C. $y=y_1+C_1(y_2-y_3)+C_2(y_1-y_3)$　　D. $y=y_1+C_2(y_1+y_2)+C_3(y_1+y_3)$

4. 关于曲面 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}-\dfrac{z^2}{4^2}=1$，下列说法**正确**的是　　　　（　　）

A. 旋转双叶双曲面，由 xOy 面上双曲线 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ 绕 y 轴旋转得到

B. 旋转双叶双曲面，由 xOy 面上双曲线 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ 绕 x 轴旋转得到

C. 圆锥面，由 xOy 面上直线 $x=\dfrac{3}{4}y$ 绕 y 轴旋转得到

D. 圆锥面，由 xOy 面上直线 $x=\dfrac{3}{4}y$ 绕 x 轴旋转得到

5. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域有定义，则下述性质中哪个能推出其它三个 (　　)

A. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微

B. $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 都连续

C. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续

D. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 沿任意方向的方向导数都存在

二、填空(每小题 3 分，共 15 分)

1. 曲线 $y=\cos x \quad (-\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2})$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积=__________________.

2. 微分方程 $\dfrac{d^3y}{dx^3}=e^{ax}$ 的通解为____________________.

3. 上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在 xoy 面的投影为__________________.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\arcsin(x+y)}{x^2-y^2}=$__________________.

5. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 的梯度 $gradf(0,1)=$______________.

三、(8 分) 求微分方程 $xy'(x)-2y=e^x x^3$ 的通解.

四、(8 分) 求微分方程 $y''+3y'+2y=e^x$ 的通解.

五、(8 分) 求点 $(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}2x-y+z-4=0\\ y-z+2=0\end{cases}$ 距离.

六、(8 分) 设平面过原点及点 $(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=1$ 垂直，求此平面方程.

七、(8 分) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

八、（**10 分**）求星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 的**全长** l，所围平面图形的**面积** A.

九、（**10 分**）**设** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

（1）求 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$;（2）探讨 $f(x,y)$ 在点（0, 0）连续性和可微性，并给出理由.

十、（**10 分**）求 $\boldsymbol{f(x,y)=x^2+6x-y^2}$ 在约束条件 $\boldsymbol{x^2-2x+y^2-8=0}$ 下的最值.