福建师范大学 数学与统计 学院

2024—2025 学年第一学期考试 A 卷

学院______系______专业______年级______姓名______学号______

考生信息栏

装 订 线

知明行笃 立诚致广

专　　业：全校性专业　　　　年　　级：2024 级

课程名称：高等数学 A　　　　任课教师：蔡裕华等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2025 年___月___日___午___点___分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设$f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$，那么$x=0$是$f(x)$的（　B　）.

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

2. 函数$f(x)$在$x=0$处可导的充分必要条件是（　C　）.

A. $f(x)$在$x=0$处连续　　B. $f'_-(0)$与$f'_+(0)$都存在

C. $f(x)-f(0)=Ax+o(x)$，其中A是常数　　D. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$存在

3. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$利用定积分可表示为（　D　）.

A. $\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

4. 设$f(x)=\int_x^{x+\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$，则$f(x)$（　C　）.

A. 恒为零　　B. 为小于 0 的常数

C. 为大于 0 的常数　　D. 不为常数

5. 下列反常积分中发散的是（　A　）.

A. $\int_0^1\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+8}\mathrm{d}x$

C. $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设$\alpha\in(0,1)$，则极限$\lim\limits_{n\to+\infty}((n+1)^\alpha-n^\alpha)=$____0____.

2. 曲线$y=x^3-3x^2+2x+1$的拐点为____(1,1)____.

3. 设$\sin x$是$f(x)$的原函数，则$\int\frac{1}{x}f'(\ln x)\mathrm{d}x=$____$\cos(\ln x)+c$____.

4. 设$f'(1)=2$，则$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=$____1____.

5. 设$f(x)$为奇函数，则$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$为____偶____函数.

三、（8 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x-1}$.

解： 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{(x+2)\frac{2x-1}{x+2}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right)^{\frac{2x-1}{x+2}} \qquad (4\ 分)$$

$$= e^2\,. \qquad (8\ 分)$$

四、（8 分） 求 $f(x)=\cos(1-\ln x)$ 在 $x=e$ 处的二阶导数 $f''(e)$.

解： $f'(x)=\frac{\sin(1-\ln x)}{x}$ (3 分)

$$f''(x)=\frac{-\sin(1-\ln x)-\cos(1-\ln x)}{x^2} \qquad (6\ 分)$$

$$f''(e)=-e^{-2}\,. \qquad (8\ 分)$$

五、（8 分） 求不定积分 $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

解： 原式 $=\int \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,\mathrm{d}e^x$

$$= e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \int\frac{e^x}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}}\,\mathrm{d}\sqrt{1-e^{2x}} \qquad (4\ 分)$$

$$= e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \int \mathrm{d}\sqrt{1-e^{2x}}$$

$$= e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \sqrt{1-e^{2x}} + c\,. \qquad (8\ 分)$$

六、（8 分） 求定积分 $\int_0^1\frac{\ln(2+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

解： 原式 $=\int_0^1 \ln(2+x)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2-x}\right)$

$$= \left.\frac{\ln(2+x)}{2-x}\right|_0^1 - \int_0^1\frac{1}{(2-x)(2+x)}\mathrm{d}x \qquad (3\ 分)$$

$$= \ln 3-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right)\mathrm{d}x \qquad (6\ 分)$$

$$= \ln 3-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 3$$

$$= \frac{3}{4}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 2. \qquad (8\ 分)$$

七、（10 分） 求曲线$y = x - \arctan x$的所有斜渐近线.

解： $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\arctan x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 1 - \frac{\arctan x}{x} = 1$， (2 分)

$\lim\limits_{x\to-\infty} x - \arctan x - x = -\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$， (5 分)

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - \arctan x - x = -\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$， (8 分)

故曲线的两条斜渐近线分别为$y = x + \frac{\pi}{2}$和$y = x - \frac{\pi}{2}$. (10 分)

八、（10 分） 设函数$f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t}\mathrm{d}t$，

（1）求一阶导数$f'(x)$，

（2）求$f(x)$在$[-2, 2]$上的最大值和最小值.

解：（1）$f'(x) = 2x(2-x^2)e^{-x^2}$. (2 分)

（2）$f(x) = 2\int_0^{x^2} e^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^{x^2} te^{-t}\mathrm{d}t = -2e^{-t}|_0^{x^2} + te^{-t}|_0^{x^2} + e^{-t}|_0^{x^2}$

$= (x^2-1)e^{-x^2} + 1$ (4 分)

由$f'(x) = 0$解得$x_1 = 0$，$x_2 = -\sqrt{2}$，$x_3 = \sqrt{2}$，且 (6 分)

$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 1 + e^{-2}, f(0) = 0$以及$f(-2) = f(2) = 1 + 3e^{-4}$. (8 分)

因此，$f(x)$在$[-2, 2]$上的最大值为$1 + e^{-2}$，最小值为 0. (10 分)

九、（10 分） 利用函数凹凸性证明：任意$x > 0$，$y > 0$且$x \neq y$，有$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.

证： 令$f(u) = u\ln u$，$u > 0$， (2 分)

则 $f'(u) = 1 + \ln u$，$f''(u) = \frac{1}{u} > 0$. (4 分)

故$f(u)$在$(0, +\infty)$是下凸的， (6 分)

则对任意$x > 0$，$y > 0$，$x \neq y$，有$\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$， (8 分)

即$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ (10 分)

十、（8 分） 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.

证： 由积分中值定理，存在$\eta\in(0,1)$，使得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)=1$ (4 分)

因为$f(\eta)=f(1)=1$，再由罗尔定理可得，

存在$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$. (8 分)