福建师范大学 数学与信息 学院

2020—2021 学年第 一 学期考试 A 卷

知明行笃 立诚致广

专　　业：全校性专业　　　　年　　级：2020 级

课程名称：高等数学 A（上）　　任课教师：杨文生等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2021 年 3 月 27 日 上 午 9 点 00 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	
	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

考生信息栏

学院______ 系______ 专业______ 年级______ 姓名______ 学号______

装订线

2020—2021 学年第一学期《高等数学 A》（A）卷

答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．设$\{x_n\}$是数列，下列命题不正确的是（　D　）.

A. 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

B. 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

C. 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

D. 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

2. 若$f(x)$二阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=2$，则（　A　）

A. $f(0)$是极小值　　B. $f(0)$是极大值

C. $x=0$是驻点但不是极值点　　D. $(0, f(0))$是曲线的拐点

3. 若函数$f(x)$在$x=x_0$处可导，则$|f(x)|$在$x=x_0$处（　C　）

A. 可导　　B. 不可导

C. 连续但未必可导　　D. 不连续

4. 若$\int f'(2x)dx = x^2 + C$，则$f(x)$=（ B ）.

A．$2x^2+C$　B. $\frac{1}{2}x^2+C$　C. x^2+C　D. $\frac{x^2}{4}+C$

5. 已知反常积分$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}dx$收敛，则$k$的取值范围为（ A ）.

A. $(1,+\infty)$　B. $[1,+\infty)$　C. $(-\infty,1)$　D. $(-\infty,1]$

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x\arctan x}=$ ____ $\dfrac{2}{\pi}$ ____.

2．设 $f(x)=e^x(e^x-1)(e^x-2)\cdots(e^x-n)(n\geq 2)$, 则 $f'(0)=$ ______$\underline{(-1)^{n-1}(n-1)!}$______.

3．$y=x+\dfrac{1}{x-1}$ 的斜渐近线是______$\underline{y=x}$______.

4．设 $f(x)=x\sin x$，则 $f(x)$ 按 x 的幂展开的泰勒公式中含 x^8 项的系数=___$-\dfrac{1}{7!}$___.

5．$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x\cos x}{1+x^2}dx$=________$2-2\arctan 1$__________;

三、计算题(每题 8 分，共 48 分)

1. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

解：$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\cot x}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}}$ ---4 分

$\displaystyle=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\tan x\cdot\csc^2 x}{1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{\cos x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{-1}.$ --------------------------------8 分

2. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{3+t}\tan t^2dt}{\ln(1+x^2+x^3)(e^{2x}-1)}$.

解：原式$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{3+t}\tan t^2dt}{2x(x^2+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{3+t}\tan t^2dt}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3+x}\tan x^2}{6x^2}$ ----------------------4 分

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}e^{3+x}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{6x^2}=e^3\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{6x^2}=\frac{e^3}{6}$ ----------------------------8 分

3. 求 $\displaystyle\int_1^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}dx$

解：$\displaystyle\int_1^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int_1^3\frac{2t}{1+t}dt=\int_1^3 2-\frac{2}{1+t}dt=4-2\ln 2$ ____________4 分

$\displaystyle\int_1^9 e^{\sqrt{x}}dx=\int_1^3 2te^tdt=2[te^t-e^t]_1^3=4e^3$

$$\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}dx=4-2\ln 2+4e^3$$ ---------------------------8 分

4. 计算不定积分$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

解： $\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x \ =\int \ln(1+x^2)d(\frac{x^2}{2})$

$$=\ \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{1+x^2}dx$$ ------------------------------------4 分

$$=\ \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\int (x-\frac{x}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$ --------------------------------8 分

5. 求参数方程$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 所确定的函数$y=y(x)$的一阶导数和二阶导数.

解： $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$$ -- 4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a}\sec^4 t\csc t$$ --------------------------------------8 分

6. 讨论函数 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的定义域，凸凹区间和拐点.

解 定义域为 $(0,\infty)$，

则 $y'=16x^3(3\ln x-1)$， $y''=144x^2\ln x$. --3 分

当 $x<1$ 时， $y''<0$，于是函数的凸区间为 $(0,1]$； ------------------------------5 分

当 $x>1$ 时， $y''>0$，于是函数得凹区间为 $[1,+\infty)$

函数的拐点为 $(1,-7)$． --8 分

四、应用题（8 分）现要建一个容量为V 的密闭圆柱形容器. 已知圆柱上下底面的单位面积造价是其侧面单位面积造价的 2 倍. 问该容器的高与底面半径之比为多少时，其造价最低？

解：设容器体积为定值V，底面半径为r，则高为$\dfrac{V}{\pi r^2}$，从而总造价为

$$f(r)=4\pi r^2+\frac{2v}{r},r>0.$$

由 $f'(r)=8\pi r-\dfrac{2v}{r^2}=0,$ 解得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}$.-----------------------------------5 分

注意到$r\to 0,r\to\infty$时，总造价为无穷大.

因而，当$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}},h=\sqrt[3]{\dfrac{16V}{\pi}}$时，

即$h:r=4:1$时，$f(r)$取得最小值. ---8 分

五、（8 分）证明不等式：$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}\quad(x>0)$.

证：令$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且有

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0,(x>0)$$ ---------------------4 分

故$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，从而有

$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$

即$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$，

或$x>0$时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$. ---8 分

六、（6 分）设$f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且$f(a)=0$，

证明存在一点$\xi\in(0,a)$使得$3f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证： 设$F(x)=x^3f(x)$, 则$F(x)$在$[0,a]$上连续,$(0,a)$内可导.

$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$,且$F(0)=0,F(a)=a^3f(a)=0$.---------------------**4 分**

由罗尔定理，存在一点$\xi\in(0,a)$，使得$F'(\xi)=0$.

即 $3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi)=0$.

由于$\xi\neq 0$, 所以 $3f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$. -----------------------------6 分