2018—2019 学年第二学期《高等数学 A》期末

试题(B)答案

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则下列结论正确的是（C）

(A) 偏导数 $f_x(0,0)$ 不存在　　(B) 在 $(0,0)$ 处可微

(C) 在 $(0,0)$ 处连续　　(D) 在 $(0,0)$ 处极限不存在

2. 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，则 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处沿增加最快的方向的方向导数为(B).

A．0　　B. $\sqrt{2}$　　C. $-\sqrt{2}$　　D. 2

3. 将 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ 写成极坐标形式的二重积分为（ B ）

A. $\int_0^{\pi} d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\ dr$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\ rdr$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_1^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\ rdr$　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\ rdr$

4. 设曲面 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=0$ 及 $z=1$ 所截得的部分，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分，则下列式子中成立的是（D）

A. $\iint\limits_{\Sigma} xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$　　B. $\iint\limits_{\Sigma} ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$

C. $\iint\limits_{\Sigma} xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$　　D. $\iint\limits_{\Sigma} zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} zdS$

5. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha+\cos n\alpha}{n^2}$ 的收敛性(A), 其中 α 为常数

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 无法判断

二、填空(每小题 3 分，共 15 分)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)}\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}=$ ______ $\dfrac{\sqrt{2}}{\ln\frac{3}{4}}$ ________.

2.

3.　交换二次积分的顺序

$$\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy+\int_2^{2\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy = \underline{\quad}\int_0^2 dy\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx \underline{\qquad\qquad}.$$

4. 设曲面 Σ 为 $x^2+y^2=9$ 介于 $z=0$ 及 $z=3$ 间的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+1)ds=$

$\underline{\quad 180\pi \quad}$.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域是 $\underline{\quad [4,6) \qquad\qquad}$.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 设 $w=f(x-y,x^2y)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$.

解：令 $u=x-y, v=x^2y$，则 $w=f(u,v)$.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1^{'}+2xyf_2^{'},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial w}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(f_1^{'}+2xyf_2^{'})=\frac{\partial f_1^{'}}{\partial y}+2xf_2^{'}+2xy\frac{\partial f_2^{'}}{\partial y}$$

其中

$$\frac{\partial f_1^{'}}{\partial y}=\frac{\partial f_1^{'}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_1^{'}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-f_{11}^{''}+x^2f_{12}^{''}$$

$$\frac{\partial f_2^{'}}{\partial y}=\frac{\partial f_2^{'}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2^{'}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-f_{21}^{''}+x^2f_{22}^{''}$$

因此

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=-f_{11}^{''}+x^2f_{12}^{''}+2xf_2^{'}+2xy(-f_{21}^{''}+x^2f_{22}^{''})=-f_{11}^{''}+x(x-2y)f_{12}^{''}+2xf_2^{'}+2x^3yf_{22}^{''}$$

2. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D 是平面区域 $1\le x^2+y^2\le 4$.

解： 在极坐标系中，积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\big|1\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi\}$，

于是

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma = \iint_D \ d\rho d\theta \ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 d\rho \ = 2\pi$$

3．计算三重积分 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围区域.

解：在球面坐标系下

$$\Omega: \begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

$$\therefore \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/4} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \int_0^1 r^4 \, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{5}\pi(2-\sqrt{2})$$

4. 计算曲线积分 $\int_L (e^x \sin y - m)dx + (e^x \cos y - mx)dy$ ，其中 m 为常数，L 为由点 $A(a,0)$ 至原点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax \ \ (a>0)$.

解. 记 L 与有向直线段 $\overline{OA}$ 所围成的闭区域为 D，则由格林公式，得

$$I_2 = \oint_{L+\overline{OA}} (e^x \sin y - m)dx + (e^x \cos y - mx)dy = -m\iint_D d\sigma = -\frac{\pi}{8}ma^2$$

$$\text{而} \ I_1 = \int_{\overline{OA}} (e^x \sin y - m)dx + (e^x \cos y - mx)dy = -m\int_0^a dx = -ma$$

$$\therefore \int_L (e^x \sin y - m)dx + (e^x \cos y - mx)dy = I_2 - I_1 = ma - \frac{\pi}{8}ma^2.$$

5．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求其收敛区间.

解 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

而 $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2+(x-1)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{2})^n, -1< x<3$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tfrac{x-1}{3})^n, -2< x<4$$

则

$$\frac{1}{x^2+3x+2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tfrac{x-1}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tfrac{x-1}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tfrac{1}{2^{n+1}}-\tfrac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n,-1<x<3$$

四、（10 分） 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(1-x^2)dydz+(4x+1)ydzdx-2xzdxdy$ ，这里 Σ 为半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：添加辅助曲面 $\Sigma_1=\left\{(x,y,z)\,|\,z=0,x^2+y^2\le 1\right\}$，取下侧，则由 Σ 与 Σ_1 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma}(1-x^2)dydz+(4x+1)ydzdx-2xzdxdy$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(1-x^2)dydz+(4x+1)ydzdx-2xzdxdy$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}(1-x^2)dydz+(4x+1)ydzdx-2xzdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}1dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}(1-x^2)dydz+(4x+1)ydzdx-2xzdxdy$$

$$=\frac{2\pi}{3}-0=\frac{2\pi}{3}$$

五、(10分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域，并在收敛域内求其和函数.

解　收敛域为 $(-1,1)$

令：$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，　$s'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$

$s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$　　$x\in(-1,1)$

六、(10分) 求原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离.

解　问题就是在约束条件

$(x-y)^2-z^2=1$ 下求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

构造辅助函数

$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1]$.

求解方程组$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda(x-y) = 0 \\ L_y = 2y - 2\lambda(x-y) = 0 \\ L_z = 2z - 2\lambda z = 0 \\ (x-y)^2 - z^2 = 1 \end{cases}$ 得 $x = \pm\dfrac{1}{2}, y = \mp\dfrac{1}{2}, z = 0$，

从而得两处可能的条件极值点 $M_1(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0)$, $M_2(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0)$.于是，原点到曲面 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ 的最短距离必是 $|OM_1|$, $|OM_2|$ 的较小者，而 $|OM_1| = |OM_2| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故求原点到曲面 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ 的最短距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$