2024—2025 学年第 1 学期考试高等数学C试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分，每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的）

1．考虑函数 $f(x)=\frac{x}{x}$ 和 $g(x)=\frac{|x|}{x}$，下述说法正确的是（　　）.

A. 上述两个函数是一样的

B. 当 $x\to 0$ 时，两个函数的极限均存在

C. 当 $x\to 0$ 时，两个函数的极限均不存在

D. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限存在，但 $g(x)$ 的极限不存在

2. $x=1$ 是 $f\left(x\right)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ 的（　　）间断点.

A.可去　　B.跳跃　　C.无穷　　D.振荡

3．设函数 $y=f(u)$ 是可微函数，u 是 x 的可微函数，则 dy=（　　）

A. $f'(u)udx$；　B. $f'(u)du$；　C. $f'(u)dx$　D. $f'(u)u'du$.

4. 设 x_0 是连续函数 $f(x)$ 的极大值点，则 x_0 必是 $f(x)$ 的（　　）

A. 一阶导数为零的点；；　B.二阶导数为零的点；

C. 二阶导数小于零的点；　D.以上都不对.

5. 设某产品在 100 元价格水平下的需求价格弹性为 －0.15，说明价格在 100 元的基础上上涨 1%时，　需求量将(　　)

A. 上升 0.15%；　B.上升 15%；　C. 下降 0.15%；　D.下降 15%.

二、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

1．若分段函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{\arcsin x}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，那么 $a=$__________.

2．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+y^3-5x=0$ 所确定，则 $y'(0)=$____________.

3．函数 $f(x)=e^{-x^2}(x>0)$ 的图形的拐点是 ____________.

4．$y=\ln[1+f^2(x)]$ 的微分为 $dy=$____________dx.

5．设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-3h^2)-f(x_0)}{h\ln(1-h)}=$____________.

三、（8分）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

四、（8分）求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(1-e^{(x^2-1)\ln x})}{1-x+x\ln x}$

五、（8分）设参数方程 $\begin{cases}x=2(\mathrm{t}-\sin\mathrm{t})\\ y=2(1-\cos\mathrm{t})\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

六、（8分）确定 a,b 的值使 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 处处可导

七、（8分）证明不等式：当 $0<x<1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$

八、（12 分）设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$，

1.**(8 分)**求函数的单调区间与极值.

2.（**4 分**）求函数渐近线;

九、应用题（8 分）用薄铁皮做成一个容积为 V_0 的**有盖**长方匣，其底为正方形，由于下底面无需喷漆，故其每单位面积成本仅为其余各面的一半，问长方匣的底面边长为多少时，才能使匣子的造价最低？

十、（10 分）证明下列各题.

1.证明方程 $\sin x+2x+1=0$ 在 区间 $(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 内有且仅有一个根.

2.若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f'(x)$ 单增，证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 内也是单增的.