

2020—2021 学年第一学期《高等数学 A》期末

试题 (A) 答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 以下选项不是一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解的是 (C).
- A. $e^{-F(x)} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)} dx + C)$, 其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数
- B. $e^{-F(x)-C} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)+C} dx + C)$, 其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数
- C. $e^{-F(x)+C} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)+C} dx + C)$, 其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数
- D. $e^{-F(x)+C} \cdot (\int Q(x)e^{F(x)-C} dx + C)$, 其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数
2. 设 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处沿增加最快的方向的方向导数为 (B).
- A. 2; B. $\sqrt{2}$; C. 0; D. $-\sqrt{2}$.
3. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) =$ (A).
- A. $f(2)$; B. $2f(2)$; C. $-f(2)$; D. 0.
4. 设曲面 Σ 是抛物面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 xoy 面上方的部分, 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分, 则下列式子中成立的是 (D).
- A. $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$; B. $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$;
- C. $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$; D. $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$.
5. 设 $u_n = (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$, 则级数 (C).
- A、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛 B、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散
- C、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散 D、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

二、填空(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{e^x}$ 的通解为 $\arctan y = -e^{-x} + C$.

2. 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数, $z = f(x, y)$ 是由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数, 则 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.

3. 化二次积分 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 为极坐标形式的二次积分, 则

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

4. 第二类曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 化为第一类曲线积分是

$$\int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds.$$

5. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - 2019)$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2019$.

三、计算题(每小题 8 分, 共 40 分)

1. 求微分方程 $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ 的通解.

解 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1},$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$

故原方程变为 $u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1},$ 即 $x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u - 1}.$ (4 分)

分离变量得 $\left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}.$ 两边积分得 $u - \ln |u| + C = \ln |x|$ 或 $\ln |xu| = u + C.$

回代 $u = \frac{y}{x},$ 便得所给方程的通解为 $\ln |y| = \frac{y}{x} + C.$ (8 分)

2. 求函数 $u = f(x^2 + y^2 + z^2, xyz)$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z},$ 其中 f 具有二阶连续偏导数.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'_1 + yzf'_2,$ (4 分)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 4xzf''_{11} + 2x^2yf''_{12} + yf'_2 + yz(f''_{21}2z + xyf''_{22})$$
 (7 分)

$$= 4xz f''_{11} + 2y(x^2 + z^2) f''_{12} + xy^2 z f''_{22} + y f'_2 \quad \text{--- (8 分)}$$

3. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 内部的那部分面积.

解: 所求曲面在 xoy 面上的投影区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$ -----2 分

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{-----3 分}$$

所求曲面面积为:

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad \text{-----7 分}$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy$$

$$= \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \sqrt{2} \pi \quad \text{-----8 分}$$

4. 求曲线积分 $\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$, 其中 L 沿 $x^2 + y^2 = a^2 (x \geq 0, y \geq 0)$, 逆时针方向.

解: 圆的参数方程为: $x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ 1 分

$$\int_L (x+y)dx + (x-y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t + a \sin t) da \cos t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t - a \sin t) da \sin t \quad \text{.....5 分}$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t - \sin 2t) dt = \frac{a^2}{2} [\sin 2t + \cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -a^2 \quad \text{.....8 分}$$

5. 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

$$\text{解: } f'(x) = \left(\arctan \frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, -1 < x < 1, \quad \text{----- 3 分}$$

故

$$\int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

即

-----6 分

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ 又 } f(0) = \arctan \frac{1+0}{1-0} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 < x < 1.$$

由于上式右端的幂级数在 $x = -1$ 处收敛, 且 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 在 $x = -1$ 处连续,

$$\text{故 } \arctan \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \leq x < 1 \quad \text{-----8 分}$$

四、(10 分) 计算第二类曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - 2z dx dy$, 其中

Σ 是曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 被平面 $z=2$ 所截部分的外侧.

解. 取平面 $\Sigma_1: z=2, x^2 + y^2 \leq 4$, 上侧. 记 Σ, Σ_1 所围区域为 Ω .

$$P = z^2 + x, Q = 0, R = -2z. \quad \text{..... 2 分}$$

$$I = \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} P dydz + R dx dy - \iint_{\Sigma_1} P dydz + R dx dy$$

应用高斯公式

$$\iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} P dydz + R dx dy = \iiint_{\Omega} (1 + 0 - 2) dx dy dz = - \iiint_{\Omega} dx dy dz.$$

$$= - \int_0^2 dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 2z} dx dy = -2\pi \int_0^2 z dz = -4\pi \quad \text{..... 7 分}$$

而

$$\iint_{\Sigma_1} P dydz + R dx dy = -2 \iint_{\Sigma_1} z dx dy = -4 \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} dx dy = -16\pi$$

$$\text{故 } I = 12\pi. \quad \text{.....10 分}$$

五、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的和函数, 并给出收敛域.

解: 令 $x-1=t$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 的收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

当 $x=1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} n$, 是发散的;

当 $x = -1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$, 是发散的.

因此, $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$. -----4 分

设 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 和函数为 $\varphi(t)$, 即有

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = t \sum_{n=1}^{\infty} (t^n)' \\ &= t \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n \right)' = t \left(\frac{t}{1-t} \right)' = \frac{t}{(1-t)^2}, t \in (-1, 1) \quad \text{-----8 分}\end{aligned}$$

于是原级数的和函数

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = \varphi(x-1) = \frac{x-1}{(2-x)^2}, x \in (0, 2) \quad \text{-----10 分}$$

六、(10 分) 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 4$ 截成一椭圆, 求这椭圆上的点到原点的距离的最小值和最大值.

解: 设 $p(x, y, z)$ 为椭圆上任一点, 则点 p 到原点的距离为 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

构造拉格朗日函数

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - z) + \lambda_2(x + y + z - 4) \quad \text{----- 6 分}$$

$$\begin{cases} F_x = 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ F_y = 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ F_z = 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{-----8 分} \\ F_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F_{\lambda_2} = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

解得 $p_1(1, 1, 2), p_2(-2, -2, 8)$

$$d(p_1) = \sqrt{6} \text{ 为最小值, } d(p_2) = 6\sqrt{2} \text{ 为最大值} \quad \text{-----10 分}$$