19-20-1 概率论与数理统计期末试卷 A 标准答案及评分标准

一、选择题（共 15 分）

1. D　　2. A　　3. A　　4. D　　5.B

二、填空题（共 15 分）

6. $\frac{13^4}{C_{52}^4}$　　7. 1　　8. $\frac{19}{27}$　　9. $\frac{1}{2(n-1)}$　　10. $\hat{\theta}_1$

三、计算题（共 60 分）

11.（10分）解：设 A_1 和 A_2 分别表示取出的零件是第一台、第二台车床加工的，

B 表示“取出的零件是合格品”，（2分）

（1）$P(B)=P(A_1)(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{3}\times 0.97+\frac{1}{3}\times 0.94=0.96$；（6分）

（2）$P(A_2|\overline{B})=\frac{P(A_2\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.06}{0.04}=0.5$．（10分）

12.（10 分）解：$P(X=0)=0.3, P(X=1)=0.7,\ \ P(Y=0)=0.4, P(Y=1)=0.2, P(Y=2)=0.4,$

（2 分）

$$P(X=1|Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.1}{0.2}=0.5.$$

$$P(Y=0|X=0)=\frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=0)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}.$$ （6 分）

(2) $P(X=0,Y=0)=0.2$，$P(X=0)P(Y=0)=0.3\times 0.4=0.12$，

$P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$, 不独立　　（8 分）

(3)：$E(X)=0.7, E(Y)=1, E(XY)=0.9$,

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.9-0.7=0.2.$　　（10 分）

13.（8 分）解：X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ （2 分）

分别记 X 和 Y 的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$．

先求$F_Y(y)$．当X在$(0,1)$取值时$Y>0$，故当$y\le 0$时，$F_Y(y)=0$，从而$f_Y(y)=0$.

当$y>0$时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-\ln X\le y\}=P\{X\ge e^{-y}\}$$

$$=1-P\{X<e^{-y}\}=1-F_X(e^{-y}),\qquad (6\text{ 分})$$

于是 $f_Y(y)=-f_X(e^{-y})(-e^{-y})=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$（8 分）

14．（12 分）解：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$ 得出 $A=2$（4 分）

(2) $f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\infty}2e^{-(2x+y)}\,dy=2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$（7 分）

$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{\infty}2e^{-(2x+y)}\,dx=e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$（10 分）

(3) $f(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$，独立（12 分）

15.（10 分）解：

(1) 根据$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$, 令$EX=\bar{X}$, 即有

$\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\bar{X}$,, 得$\sqrt{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$，故$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\left(\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$.（5 分）

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k;\theta)=\begin{cases}\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\theta}x_k^{\sqrt{\theta}-1}, 0\le x_k\le 1(k=1,\cdots,n),\\ 0, \qquad \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\theta^{\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}x_k^{\sqrt{\theta}-1}, 0\le x_k\le 1(k=1,\cdots,n),\\ 0, \qquad \text{其他}.\end{cases}$$

当$0\le x_k\le 1(k=1,\cdots,n)$时，$\ln L(\theta)=\dfrac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{k=1}^{n}\ln x_k$，求导得似然方程

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{k=1}^{n}\ln x_k=0,$$

其唯一解为$\theta=\dfrac{n^2}{(\sum\limits_{k=1}^{n}\ln x_k)^2}$，故$\theta$的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{(\sum\limits_{k=1}^{n}\ln X_k)^2}$.（10 分）

16、(10 分）解：

(1) 由于$P\{X_i=x_i\}=\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i\,!}e^{-\lambda},\quad x_i=0,1,2,\cdots,\lambda>0$ （2分）

因此样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的概率分布为

$$\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i\,!}e^{-\lambda}=e^{-n\lambda}\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\Big/\prod_{i=1}^{n}x_i\,!$$ （4分）

(2) 因为简单随机样本相互独立，所以$Cov(X_1,X_2)=0.$ （6分）

(3) 由于$E(X)=D(X)=\lambda$，则$E(\bar{X})=E(X)=\lambda$， （8分）

$$D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\lambda}{n},\quad E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]=\lambda.$$ （10分）

四、应用题（共 10 分）

17、(10 分)解：设这一天维尼纶纤度$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，假设

$$H_0:\ \sigma^2=0.048^2\quad vs\quad H_1:\ \sigma^2\neq 0.048^2,$$ （2 分）

选取统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi\left(n-1\right)$ （4 分）

显著水平$\alpha=0.05$，$\chi^2_{1-\alpha/2}\left(n-1\right)=\chi^2_{0.975}\left(4\right)=0.484$，$\chi^2_{\alpha/2}\left(n-1\right)=\chi^2_{0.025}\left(4\right)=11.143$，

双侧拒绝域$W=\left\{\chi^2\leq 0.484或\chi^2\geq 11.143\right\}$ （6 分）

因$\sigma^2=0.048^2$，$s^2=0.0882^2$，$n=5$，

则$\chi^2=\dfrac{4\times 0.0882^2}{0.048^2}=13.5069\in W$， （8 分）

并且检验的p值$p=2P\left\{\chi^2\geq 13.5069\right\}=0.0181<\alpha=0.05$，

故拒绝H_0，接受H_1，即可以认为这一天纤维的总体方差不正常. （10 分）