

一、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 为了使 $\sin^2 \frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^k}$ 成等价的无穷小, k 应为 ().
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3
2. 已知 $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$, 那么 $x=0$ 是 $f(x)$ 的()
- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 无穷间断点 D. 振荡间断点
3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, $f'(x) > 0$, 并且 $f(0) < 0, f(1) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内().
- A. 至少有两个零点 B. 有且仅有一个零点
C. 没有零点 D. 零点个数不能确定
4. 函数 $y = f(x)$ 满足 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ 是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 成立的 ()
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件
5. $\int |x| dx = ()$.
- A. $|x| + C$ B. $x|x| + C$ C. $\frac{1}{2}x^2 + C$ D. $\frac{1}{2}x|x| + C$

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}} =$ _____.
2. 设 $y = xe^x$, 则 $y^{(100)} =$ _____.
3. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 则 $y = y(x)$ 的极值点是_____.

4. 设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内可导, 写出 $n=0$ 时 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的带有拉格朗日余项的泰勒公式_____.

5. 已知 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx =$ _____.

三、计算题(每题 8 分, 共 48 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

2. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$.

3. 设 $y = \sqrt{x + \sqrt{x}} + \ln \ln \ln x + x^{\frac{1}{x}} + \cos 1$ ($x > 0$), 求 dy .

4. 计算不定积分 $\int [\frac{1}{x(1+2\ln x)} + \tan^3 x \sec x] dx$

5. 计算不定积分 $\int \arctan \sqrt{x} dx$.

6. 求函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 的定义域、凹凸区间、拐点以及渐近线.

四、应用题(8分) 某房地产公司有 50 套公寓要出租, 当每套月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多出一套公寓租不出去, 而租出去的房子每月需花费 100 元的维护费. 试问月租金定为多少时, 可获得最大收入? 并求最大收入.

五、(8分) 证明不等式: 当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

六、(6分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 可导, 且 $f(1) = 0$. 证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$2022f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$