

福建师范大学 数学与统计 学院

2024—2025 学年第一学期考试 B 卷

知 明 行 笃



云 诚 收 广

专 业： 全校性专业 年 级： 2024 级

课程名称： 高等数学 A 任课教师： 蔡裕华等

试卷类别： 开卷（ ） 闭卷（√） 考试用时： 120 分钟

考试时间： 2025 年 1 月 2 日 上 午 9 点 00 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									
考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效。 2. 答题要写清题号，不必抄原题。 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交。								

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)$ 有原函数，则 $f(x)$ 的任意两条不同积分曲线在相同横坐标下所对应的点上的切线（ C ）.

A. 相互垂直

B. 平行 x 轴

C. 相互平行

D. 平行 y 轴

2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}})$ 利用定积分可表示为（ A ）.

A. $\int_0^1 e^x dx$

B. $\int_0^1 x e^x dx$

C. $\int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx$

D. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} dx$

3. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的偶函数且存在一个原函数 $F(x)$ ，则（ D ）.

A. $F(x) = F(-x)$

B. $F(x) = F(-x) + c$

C. $F(x) = -F(-x)$

D. $F(x) = -F(-x) + c$

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界， $\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（ B ）.

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛

D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

5. 下列反常积分中收敛的是（ D ）.

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$

D. $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2+2x}$ 的无穷间断点个数为 2.

2. 曲线 $y = x e^{-x}$ 的拐点为 $(2, 2e^{-2})$.

3. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$ ，则 $f'(x) =$ $2x^{-3}$.

4. 设函数 $f(x)$ 可导且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} = -1$ ，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值.

5. 根据定积分的几何意义 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx =$ $\frac{\pi}{4}$.

三、(8分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - \cos t) dt}{\int_0^x t(e^t - 1) dt}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(e^x - 1)}$ (3分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot x} \quad (6分)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (8分)$$

四、(8分) 求 $y = (\arctan \sqrt{1+x})^2$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解: $\frac{dy}{dx} = 2 \arctan \sqrt{1+x} (\arctan \sqrt{1+x})'$ (3分)

$$= 2 \arctan \sqrt{1+x} \cdot \frac{1}{2+x} (\sqrt{1+x})' \quad (6分)$$

$$= \frac{\arctan \sqrt{1+x}}{(2+x)\sqrt{1+x}}. \quad (8分)$$

五、(8分) 求不定积分 $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$.

解: 原式 = $\int \frac{x^3+x-x}{1+x^2} dx$

$$= \int \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx \quad (2分)$$

$$= \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c. \quad (\text{每个积分 3 分, 共 8 分})$$

六、(8分) 求定积分 $\int_1^e \sin(\ln x) dx$.

解: 令 $u = \ln x$, 则 $x = e^u$ 且 $dx = e^u du$.

当 $x = 1$ 时, $u = 0$. 当 $x = e$ 时, $u = 1$. (3分)

$$\int_1^e \sin(\ln x) dx$$

$$= \int_0^1 e^u \sin u du \quad (6分)$$

$$= \frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} e (\sin 1 - \cos 1). \quad (8分)$$

七、(10 分) 判断曲线 $y = (2x + 1)e^{\frac{1}{x}}$ 是否存在斜渐近线, 若有, 请求出斜渐近线方程.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{2x+1}{x} = 2 \neq 0$, 则曲线存在斜渐近线 (4 分)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1)e^{\frac{1}{x}} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{e^{\frac{1}{x}-1}}{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} = 3, \quad (8 \text{ 分})$$

故曲线的斜渐近线为 $y = 2x + 3$. (10 分)

八、(10 分) 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x(1 + ax) = 1 + bx^2 + o(x^2)$, 求常数 a 和 b .

解: 由 e^x 的 3 阶带佩亚诺余项的麦克劳林公式 $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, 有 (3 分)

$$e^x(1 + ax) = 1 + (1 + a)x + \left(\frac{1}{2} + a\right)x^2 = 1 + bx^2 + o(x^2) \quad (6 \text{ 分})$$

比较同类项系数可得 $\begin{cases} 1 + a = 0 \\ \frac{1}{2} + a = b \end{cases}$, (8 分)

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}. \quad (10 \text{ 分})$$

九、(10 分) 证明曲线 $y = \ln x$ 与直线 $y = \frac{x}{e} - 1$ 有且仅有两个交点.

证: 令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 1$, $x > 0$ 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, 因此 $x = e$ 为最大值点. (4 分)

因为 $f(e) = 1 > 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. (8 分)

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根, 即两曲线有 2 个不同交点. (10 分)

十、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_\xi^b f(x) dx.$$

证: 构造函数 $F(x) = \int_a^x f(x) dx - \int_x^b f(x) dx$, (2 分)

因为 $F(a)$ 与 $F(b)$ 异号, 且 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (4 分)

由零点定理可知, $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 故 $\int_a^\xi f(x) dx = \int_\xi^b f(x) dx$. (8 分)