

福建师范大学 公共课（数统） 学院

2024—2025 学年第一学期 高等数学 A 期中考试

知 明 行 笃



立 诚 致 广

专 业： 全校性专业 年 级： 2024 级

课程名称： 高等数学 A 任课教师： 蔡裕华等

试卷类别： 开卷（ ） 闭卷（☒） 考试用时： 120 分钟

考试时间： 2024 年 11 月 24 日 午 点 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分	评卷人
得分								

## 一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 以下四个选项中，极限不存在的是（ ）.

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

B.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)|\sin x|$

C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$

D.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$

2. 当  $x \rightarrow 0$  时，函数  $f(x) = \tan x - \sin x$  是  $x$  的（ ）阶无穷小量.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

3. 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax - 2}{x - 1} = b$ ，则（ ）.

A.  $a = -1, b = 3$

B.  $a = 1, b = -3$

C.  $a = -1, b = -3$

D.  $a = 1, b = 3$

4. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ 1 - e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \end{cases}$ ，则  $f(x)$  在  $x = 0$  处（ ）.

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导

D. 可导

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) =$ （ ）.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

## 二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = a$ ， $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = b$ ，则  $a + b =$  \_\_\_\_\_.

2. 若任意的  $x$ ，函数  $f(-x) = f(x)$  且  $f'(1) = -2$ ，则  $f'(-1) =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $f(x) = x^n(x^n + 1)$ ，则  $f^{(n)}(0) =$  \_\_\_\_\_.

4. 设函数  $y = f(\ln x)$  且  $f'(u)$  存在，则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

5. 曲线  $x^y = y^x$  在点  $(1, 1)$  的切线方程为 \_\_\_\_\_.

三、(8分) 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n}$ .

四、(8分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{3}$ .

五、(8分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x)}{e^{x^2}-1}$ , 其中  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = -2$ .

六、(8分) 求函数  $y = \arctan \frac{1}{x} + \ln|x - \sqrt{1+x^2}|$  的一阶导数.

七、(8分) 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 1 - t^3 \\ y = t^4 - t^3 \end{cases}$ ,  $t \neq 0$  确定, 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

八、(10分) 设  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2+x_n}$ , 讨论数列  $\{x_n\}$  的极限是否存在, 若存在, 求出此极限.

九、(12分) 指出函数  $f(x) = \frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}$  的间断点, 判断其类型并说明理由.

十、(8分) 设  $0 < a < b$ , 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $f(a) = 0$ , 且存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $f(c)f(b) < 0$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ .