福建师范大学 公共课（数统） 学院

2024—2025 学年第二学期 高等数学 A 期中考试

知明行笃 立诚致广

专　业： 全校性专业　　**年　级：** 2024 级

课程名称： 高等数学 A　　**任课教师：** 蔡裕华等

试卷类别： 开卷（ ）闭卷（√）　　**考试用时：** 120 **分钟**

考试时间： 2025 **年** 4 **月** 26 **日** 上 **午**______**点**______**分**

题号	一	二	三	四	五	六	总分	评卷人
得分								

考生信息栏

学院______ 系______ 专业______ 年级______ 姓名______ 学号______

装　订　线

参考答案及评分标准

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1.（ B ）不是线性常微分方程.

A. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy-e^x=0$　　B. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$

C. $x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+e^xy+x^3=0$　　D. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y+x^2}{x}=0$

2. 空间曲线$\begin{cases}x^2+2y^2+z=2\\x+y+z=0\end{cases}$在$xOy$面上的投影曲线方程为（ D ）.

A. $\begin{cases}x^2+2y^2=2\\x=0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x^2+2y^2=2\\y=0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x^2+2y^2-x-y=2\\x=0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x^2+2y^2-x-y=2\\z=0\end{cases}$

3. 下列函数组在其定义区间内线性相关的是（ A ）.

A. 1，$\ln x$，$\ln x^2$

B. 1，$\sin x$，$\cos x$

C. 1，x，x^2，$\cdots$，x^k

D. 1，$e^{x+x^{-1}}$，$e^{x-x^{-1}}$

4. 设$y_1=x+e^x$和$y_2=x-e^x$为方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个特解，则$p(x)$和$q(x)$分别为（ C ）.

A．$p(x)=1$，$q(x)=1-x$

B．$p(x)=1$，$q(x)=1+x$

C．$p(x)=-1$，$q(x)=1-x$

D．$p(x)=-1$，$q(x)=1+x$

5. 设$z=f(x,y)$在点$(0,0)$的某领域有定义，则下述选项中（ D ）能推出其它三个.

A．$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续

B．$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微

C．$f_x(0,0)$和$f_y(0,0)$存在

D．$f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$在点$(0,0)$处连续

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ ____0____.

2. 直线$\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+3z=1\end{cases}$与平面$x-2y+z=1$的夹角为____$\frac{\pi}{2}$____.

3. 曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$被直线$y=\frac{\sqrt{2}}{3}x$所截下的有限部分的长度为____$-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$____.

4. 曲线$(1+2x+y)(1-y)=0$在点$\left(-\frac{1}{2},0\right)$的切线斜率为____$-2$____.

5. 设$z=xe^x(1+ye^y)$，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$____$2e$____.

三、（8 分）求由曲线$y=x^2$与$x=y^2$围成的平面图形绕x轴旋转一周得到几何体的体积.

解：联立方程得交点$x=0$和$x=1$，进而有体积 （2 分）

$V_x=\pi\int_0^1(x-x^4)\mathrm{d}x$ （6 分）

$=\frac{3}{10}\pi$， （8 分）

四、（8 分）求过直线l：$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$且垂直于平面$\Pi$：$x+2y+z=3$的平面方程.

解：直线l的方向向量为$\vec{s}=(1,-1,2)$， （2 分）

平面Π的法向量为$\vec{n}=(1,2,1)$， （4 分）

过直线l且垂直于平面Π的平面的法向量为

$$\vec{s}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}.$$ （6 分）

结合直线l的点$(0,-1,1)$，根据点法式可得所求平面方程为

$-5(x-0)+(y+1)+3(z-1)=0$

即$5x-y-3z+2=0$. （8 分）

五、（8 分）求点$(2,1,5)$到直线$\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=3-t\end{cases}$ $(t>0)$的最短距离，并求出直线上对应最短距离的点.

解：点$(2,1,5)$到直线的距离的平方为

$$d(t)=(1-2t)^2+(2-t)^2+(2+t)^2=6t^2-4t+9 \qquad \text{（3 分）}$$

对t求导并令导数为 0，解得

$$t=\frac{1}{3}. \qquad \text{（5 分）}$$

代入直线方程，解得直线上对应最短距离的点为$\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$. （8 分）

六、（8 分） 求微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-8y=e^{3x}$的通解.

解：原方程对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda-8=(\lambda-2)(\lambda+4)=0,$$

解得特征根

$$\lambda_1=2，\lambda_2=-4. \qquad \text{（2 分）}$$

因此，原方程对应齐次方程的通解为

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-4x}. \qquad \text{（4 分）}$$

由于 3 非上述特征根，故原方程有形如$\bar{y}=Ae^{3x}$的特解，代入原方程可得$A=\frac{1}{7}$，

即原方程有特解

$$\bar{y}=\frac{1}{7}e^{3x}. \qquad \text{（6 分）}$$

因此，原方程的通解为

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-4x}+\frac{1}{7}e^{3x}, \qquad \text{（8 分）}$$

其中c_1,c_2为任意常数.

七、（8 分） 设$z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$，其中$f$为可微函数，求 $\mathrm{d}z$.

解：方程两端对x求导得$\frac{\partial z}{\partial x}=y+f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$. （3 分）

方程两端对y求导得$\frac{\partial z}{\partial y}=x+f'\left(\frac{y}{x}\right)$. （6 分）

进而，$\mathrm{d}z=\left(y+f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)\mathrm{d}x+\left(x+f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)\mathrm{d}y$. （8 分）

八、（10 分）求解初值问题$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\sin x\\ y(0)=1\end{cases}$.

解： 对应齐次方程的通解$y=ce^x$， （3 分）

原方程的通解$y=ce^x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$， （8 分）

代入初值，得到初值问题的解为$y=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$. （10 分）

九、（12 分）设函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，判断该函数在$(0,0)$处是否连续，偏导数是否存在，以及该函数在$(0,0)$处是否可微，并说明理由.

解：（连续性）由$0\le\frac{2x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，

则$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. （4 分）

（偏导存在性）$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$. （8 分）

（可微性）由$0\le\left|\frac{2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}$，

则$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)-f_y(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0$，

故$f(x,y)$在$(0,0)$处可微. （12 分）

十、(8 分)设$G(u,v)$具有连续偏导数，a,b,c为常数，证明由方程$G(cx+az,cy+bz)=0$所确定的函数$z=f(x,y)$满足$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+c=0$.

解： 令$F(x,y,z)=G(cx+az,cy+bz)$，则

$F_x=cG_1'$，$F_y=cG_2'$，$F_z=aG_1'+bG_2'$， （3 分）

那么$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{cG_1'}{aG_1'+bG_2'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{cG_2'}{aG_1'+bG_2'}$， （5 分）

故$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+c=0$. （8 分）