2025 — 2026 学年第一学期《高等数学 B》A 卷

答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+\alpha x-2}{x-1}=\beta$，则常数$\alpha,\beta$满足（ A ）．

A. $\alpha=1,\beta=3$　　B. $\alpha=-1,\beta=3$

C. $\alpha=-1,\beta=-3$　　D. $\alpha=1,\beta=-3$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\le1\\ x, & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$处的（ C ）.

A.左右导数都存在　　B.左右导数都不存在

C.左导数存在，右导数不存在　　D.左导数不存在，右导数存在

3. 设 $f(x)=x^3+2x+3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内零点的个数为（ B ）.

A.没有零点　　B.有且只有一个零点

C.至少两个零点　　D.至少三个零点

4. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)<0$， 则（ D ）.

A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　D. $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 设 $f(x)$ 为函数 $2x+\sin x$ 的原函数，则下列为 $f(x)$ 的原函数是（ D ）.

A. $x^2-\cos x+1$　　B. $\dfrac{x^3}{3}+\cos x$

C. $x^2+\cos x$　　D. $\dfrac{x^3}{3}-\sin x-x$

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1． $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$ =______ $\dfrac{2^{20}\cdot 3^{30}}{5^{50}}$ ______.

2． $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$ ___1___.

3．若 $f(x)$ 不为 0 且可导，则 $d\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=$ ________ $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx$ ________.

4．已知点（1，3）是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $b-a$ =___6___.

5. $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=$ ________ $\sqrt{x^2-1}+C$ ________.

三、（8 分） 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$$ -----------2 分

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x[1-\cos(\sin x)]}{3x^2}$$ -----------4 分

$$=\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$ ---------------- 8 分.

四、（8 分） 设 $y=f(x)$ 由方程 $y-2x=e^{x(1-y)}$ 所确定的隐函数，求 $y'(0)$ 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}2n(f(\dfrac{1}{n})-1)$.

解：方程两边同时对 x 求导得

$y'-2=e^{x(1-y)}(1-y-xy')$ ①，----------------2 分

又 $x=0$ 时，$\mathrm{y}=1$----------------4 分

从而 $x=0$，$\mathrm{y}=1$ 代入①式得 $y'(0)=2$，----------------6 分

故

$$\lim_{n\to\infty}2n(f(\frac{1}{n})-1)=2\lim_{n\to\infty}\frac{(f(\frac{1}{n})-1)}{\frac{1}{n}}=2f'(0)=4.$$ ----------------8 分

五、(8 分) 计算不定积分 $\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

解：$\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx=-\frac{1}{2}\int\arctan e^x de^{-2x}$ ----------------2 分

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x+\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}dx$ ----------------4 分

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x+\frac{1}{2}\int(\frac{1}{e^{2x}}-\frac{1}{1+e^{2x}})\ de^x$ ----------------6 分

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\arctan e^x+C$ ----------------8 分

六、(8 分) 计算不定积分 $\int\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}dx$.

解：令 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 tdt$ ------------2 分

$\int\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}dx=\int\frac{1}{\sec t}dx=\int\cos tdx=\sin t+C$ ------------------6 分

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$ ------------------8 分

七、应用题（10 分）某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20 米长的墙壁，问应围成怎样的长方形才能使这间小屋面积最大？

解：设这间小屋长的宽为x米，长为y米，由已知$2x+y=20$，故小屋面积

$S = x(20-2x) = 20x - 2x^2, x \in (0,10)$， ------4 分

则$S' = 20-4x, S'' = -4$，令$S'=0$得$x=5$ -------6 分

又$S''<0$，所以$x=5$是极大值点，从而为最大点， -------------------8 分

故当宽为 5 米，长为 10 米时这间小屋面积最大.----------------------------10 分

八、（12 分）求函数$y = \frac{x^2}{2x-1}$的定义域、极值以及渐近线.

解：（1）定义域为$\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$ ——————————————2 分

（2）$y' = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$，令$y'=0$，得到$x=0, x=1$.——————————————4 分

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y	递增	极大	递减		递减	极小	递增

因此，在$x=0$时，函数取得极大值0；

在$x=1$时，函数取得极小值1.————————8 分

(3) 因为$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2x-1} = \infty$，故$x=\frac{1}{2}$为铅直渐近线. ————————10 分

因为$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(2x-1)} = \frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{1}{2}x) = \frac{1}{4}$ 故$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$为渐近线. ————————12 分

九、（10 分）证明不等式：当$x>0$时，$1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

证明：设$f(x) = 1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$ -----------------------------2 分

当$x>0$时，$f'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) > 0$， ---------------------------6 分

由$f(x)$在$[0,+\infty)$连续.则$f(x)$在$[0,+\infty)$单调增加.--------------------------------8 分

则对任意 $x>0$ 有 $f(x)>f(0)=0$

即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$ --------------------------------------10 分

十、(6 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=2026f(\xi)$.

证明：设辅助函数 $F(x)=f(x)e^{-2026x}$， -----------------2 分

则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$f'(\xi)e^{-2026\xi}-2026f(\xi)e^{-2026\xi}=0$， -----------------4 分

因为 $e^{-2026\xi}\neq 0$ 从而 $f'(\xi)=2026f(\xi)$. -----------------6 分