

## 一、单选题(每小题3分,共15分)

1. 当  $n \rightarrow \infty$  时, 为了使  $\sin^2 \frac{1}{n}$  与  $\frac{1}{n^k}$  成等价的无穷小,  $k$  应为 ( ) .
- A.  $\frac{1}{2}$       B. 1      C. 2      D. 3
2. 已知  $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ , 那么  $x=0$  是  $f(x)$  的( )
- A. 可去间断点      B. 跳跃间断点  
C. 无穷间断点      D. 振荡间断点
3. 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续,  $(0,1)$  内可导,  $f'(x) > 0$ , 并且  $f(0) < 0, f(1) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $(0,1)$  内( ).
- A. 至少有两个零点      B. 有且仅有一个零点  
C. 没有零点      D. 零点个数不能确定
4. 函数  $y = f(x)$  满足  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$  是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  成立的( )
- A. 充分非必要条件      B. 必要非充分条件  
C. 充要条件      D. 既非充分也非必要条件
5.  $\int |x| dx =$  ( ).
- A.  $|x| + C$       B.  $x|x| + C$       C.  $\frac{1}{2}x^2 + C$       D.  $\frac{1}{2}x|x| + C$

## 二、填空题(每小题3分,共15分)

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}} =$  \_\_\_\_\_.

2. 设  $y = xe^x$ , 则  $y^{(100)} =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $y = y(x)$  是由方程  $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$  所确定, 则  $y = y(x)$  的极值点是\_\_\_\_\_.

4. 设  $f(x)$  在  $U(x_0)$  内可导, 写出  $n=0$  时  $f(x)$  在  $x=x_0$  处的带有拉格朗日余项的泰勒公式\_\_\_\_\_.

5. 已知  $\sin x$  是  $f(x)$  的原函数, 则  $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}} \underline{\hspace{2cm}}.$

### 三、计算题(每题 8 分, 共 48 分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin x}$

2. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})].$

3. 设  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}} + \ln \ln \ln x + x^{\frac{1}{x}} + \cos 1 \quad (x > 0)$ , 求  $dy$ .

4. 计算不定积分  $\int [\frac{1}{x(1+2\ln x)} + \tan^3 x \sec x] dx$

5. 计算不定积分  $\int \arctan \sqrt{x} dx.$

6. 求函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  的定义域、凹凸区间、拐点以及渐近线.

**四、应用题(8分)** 某房地产公司有 50 套公寓要出租, 当每套月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多出一套公寓租不出去, 而租出去的房子每月需花费 100 元的维护费. 试问月租金定为多少时, 可获得最大收入? 并求最大收入.

**五、(8分)** 证明不等式: 当  $x > 0$  时,  $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}.$

**六、(6分)** 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  连续, 在  $(0,1)$  可导, 且  $f(1)=0$ . 证明存在  $\xi \in (0,1)$  使得

$$2022 f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$