

# 福建师范大学 数学与统计 学院

## 2023—2024 学年第一学期考试 B 卷

知明行笃



信诚致广

考 生 信 息 栏  
学院 \_\_\_\_\_ 系 \_\_\_\_\_ 专业 \_\_\_\_\_ 年级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

线  
装 订

专业: 全校性专业 年 级: 2023 级

课程名称: 高等数学 A 任课教师: 蔡裕华等

试卷类别: 开卷 ( ) 闭卷 (✓) 考试用时: 120 分钟

考试时间: \_\_\_\_\_ 年 \_\_\_\_\_ 月 \_\_\_\_\_ 日 \_\_\_\_\_ 午 \_\_\_\_\_ 点 \_\_\_\_\_ 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
考生 须知	1. 答案一律写在答题纸上, 否则无效. 2. 答题要写清题号, 不必抄原题. 3. 考试结束, 试卷与答题纸一并提交.							

## 参考答案及评分标准

### 一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

- 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$  利用定积分可表示为 ( B ).  
A.  $\int_0^1 (1+x) dx$       B.  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$       C.  $\int_0^1 x dx$       D.  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$
- 设  $x_0$  是连续函数  $f(x)$  的极大值点，则  $x_0$  必是  $f(x)$  的 ( D ).  
A. 一阶导数为零的点      B. 二阶导数为零的点  
C. 二阶导数小于零的点      D. 以上都不对
- $f(x)$  在  $[a, b]$  连续是  $\int_a^b f(x) dx$  存在的 ( A ).  
A. 充分条件      B. 必要条件  
C. 充要条件      D. 既非充分也非必要条件
- 设  $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则  $f(x)$  在  $x = 0$  处 ( C ).  
A. 是可去间断点      B. 是振荡间断点  
C. 连续但不可导      D. 可导
- 下列反常积分中收敛的是 ( D ).  
A.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$       B.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx$   
C.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cos x} dx$       D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x \sin x} dx$

### 二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

- 函数  $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$  的间断点个数为 2.
- 设  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$ ，则  $f(x)$  的极小值点为  $x = 3$ .
- 设  $F(x)$  是  $\cos x$  的一个原函数，则  $F'(2x) = \underline{\cos 2x}$ .

4. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\frac{d}{dx} \left[ \int_a^b f(x) dx \right] = \underline{\hspace{2cm} 0 \hspace{2cm}}$ .

5. 设  $y = f(\ln x)$ , 其中  $f$  可导, 则  $dy = \underline{\hspace{2cm} \frac{f'(\ln x)}{x} dx \hspace{2cm}}$ .

三、(8分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x}$ .

解: 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{\cos x}$  (6分)  
 $= 1.$  (8分)

四、(8分) 求由  $y = 1 + xe^y$  所确定的隐函数在  $x = 0$  处的导数  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ .

解: 方程两端对  $x$  的求导得到

$$\frac{dy}{dx} = e^y + xe^y \frac{dy}{dx}, \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{1 - xe^y}. \quad (4 \text{ 分})$$

因为当  $x = 0$  时, 从原方程得  $y = 1$ , (6分)

故  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = e.$  (8分)

五、(8分) 求不定积分  $\int \arctan x \, dx$ .

解:  $\int \arctan x \, dx$   
 $= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$  (4分)  
 $= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$  (8分)

六、(8分) 求定积分  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$ .

解: 令  $u = \sqrt{e^x - 1}$ , 则  $x = \ln(1+u^2)$  且  $dx = \frac{2u}{1+u^2} \, du$ .

当  $x = 0$  时,  $u = 0$ . 当  $x = \ln 2$  时,  $u = 1$ .

于是  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx = 2 \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} \, du$  (5分)  
 $= 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) \, du = 2 - \frac{\pi}{2}.$  (8分)

七、(8分) 求定积分  $\int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} \, dx$ .

解:  $\int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} \, dx$

$$= - \int_1^e \ln x \, d\frac{1}{1+x} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= - \frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x(1+x)} \, dx$$

$$= - \frac{1}{1+e} + \int_1^e \frac{1}{x(1+x)} \, dx$$

$$= - \frac{1}{1+e} + \int_1^e \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) \, dx \quad (6 \text{ 分})$$

$$= - \frac{1}{1+e} + \ln \left( \frac{e}{1+e} \right) + \ln 2. \quad (8 \text{ 分})$$

八、(10 分) 求函数  $y = x^2 + 2\sqrt{2}\cos x$  在  $[0, \pi]$  的一阶导数、二阶导数并列表说明其凹凸区间。

解:  $\frac{dy}{dx} = 2x - 2\sqrt{2}\sin x, \quad (2 \text{ 分})$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 2\sqrt{2}\cos x, \quad (4 \text{ 分})$$

由  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$ , 解得  $x_0 = \frac{\pi}{4}$

$x$	$(0, \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4}, \pi)$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	—	0	+
$y$	凸	拐点	凹

(10 分)

九、(12 分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,

(1) 证明  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \, dx,$

(2) 计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 3\cos x}{\sin x + \cos x} \, dx.$

证: (1) 设  $x = \frac{\pi}{2} - u$ , 则  $dx = -du$ , 且当  $x = 0$  时,  $u = \frac{\pi}{2}$ , 当  $x = \frac{\pi}{2}$  时,  $u = 0$ .

于是  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx$

$$= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) \, du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u) \, du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 3 \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 3\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 3\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x + \sqrt{1 - \cos^2 x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 3 \sin x}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin x + 4 \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \pi. \end{aligned} \quad (12 \text{ 分})$$

十、(8分) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx - g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx = 0.$$

证: 不妨构造函数 $F(x) = \int_a^x f(u) du \int_x^b g(u) du$ , 则 $F(a) = F(b) = 0$ . (4分)

因为 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $(a, b)$ 内可导, 由罗尔定理可得,

$\exists \xi \in (a, b)$ , 使得 $F'(\xi) = 0$ , 即 $f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx - g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx = 0$ . (8分)