

高等数学C(上) 期中考试试题

福建师范大学 2025-2026 学年第一学期

年级：2025级 课程名称：高等数学C（上） 任课教师：朱金才等 试卷类别：闭卷

考试用时：120分钟 考试时间：2025年11月30日上午10点30分

排版：@Xuuyuan 题目著作权归福建师范大学数学与统计学院所有。

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分，每小题给出四种选择，有且仅有一个是正确的，将你认为正确的代号填入括号内）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时，与 x 不等价的无穷小量是（ ）。

A. $\sin x$

B. $\tan x$

C. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

D. $\ln^2(x+1)$

2. 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有定义，是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的（ ）。

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 非充分非必要条件

D. 充分且必要条件

3. 以下极限错误的是（ ）。

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)\sin n}{3n^3} = \frac{1}{3}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$

4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x = 0$ 处的极限为（ ）。

A. ∞

B. 不存在且不为 ∞

C. 1

D. 0

5. 设 $f(0) = 0$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$ （ ）。

A. $f(0)$

- B. $f'(0)$
 C. $f'(x)$
 D. 0

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分，不填解题过程）

- 函数 $y = \arcsin x$ 的定义域为 _____。
- 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + b}{x - 1} = 5$ ，则 $b =$ _____。
- 函数 $f(x) = \frac{\sin 3x}{x(x+1)}$ 的可去间断点是 _____。
- 函数 $y = \sin(f(x^2))$ ，其中 f 可导，则 $\frac{dy}{dx} =$ _____。
- 函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{e^x \cdot \Delta x}{1 + x^2} + \alpha$ ，且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， α 是 Δx 的高阶无穷小，则 $\frac{dy}{dx} =$ _____。

三、(8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$ 。

四、(8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$ 。

五、(8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2 \tan x} - \sqrt{3}}{x(1-\cos x)}$ 。

六、(8 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ 。

七、(8 分)

设 $y = \sin(\ln(\arctan \sqrt{2x}))$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

八、(10 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & x \leq 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续、可导，求 a, b 的值。

九、(10 分)

设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ ，

- 求 $f(x)$ 的表达式；
- 讨论 $f(x)$ 的连续性，如果有间断点，判断其类型。

十、(10 分)

1. 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间。
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, x_1, x_2, x_3 为 $[a, b]$ 上的 3 个点, 证明: 在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = \frac{1}{3}(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$ 。