

2021 — 2022 学年第一学期《高等数学 B》A 卷
答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = a (a \neq 0)$, 则 (D)
A. 数列 $\{x_n\}$ 收敛 B. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -a$ D. 数列 $\{x_n\}$ 可能收敛, 也可能发散
2. 设 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(x+1)}{e^x - 1}$ 的第二类间断点的个数为 (C).
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
3. 函数 $y = x \sin x + 2 \cos x (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2})$ 的拐点坐标为 (B).
A. $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ B. $(\pi, -2)$
C. $(0, -2)$ D. $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
4. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$, 则 $f'(x) =$ (A)
A. $\frac{2}{x^3}$ B. $\frac{1}{x}$ C. $-\frac{1}{x^2}$ D. $\ln|x|$
5. 设函数 $y = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的二次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$, 则 (D).
A. $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ B. $a = 1, b = \frac{1}{2}$
C. $a = 0, b = -\frac{1}{2}$ D. $a = 0, b = \frac{1}{2}$

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin 4x^3}{1 - \cos ax}$ 与 ax 是等价无穷小, 则 $a =$ 2.

2. 物体的运动规律 $s = t\sqrt[3]{t^2}$ (m) 则物体在 $t=2$ (s) 时的速度 = $\frac{5}{3}\sqrt[3]{2^2}$.

3. 曲线 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ 的垂直渐近线方程是 $x = -\frac{1}{e}$

4. $y = (2x+1)^8$, 则 $y^{(8)} = 8!2^8$.

5. $\int \frac{e^x}{x^2} dx = -e^x + C$.

三、计算题(每题 8 分, 共 48 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x)}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\ln(1 + 2x) \sim 2x$,

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} = \frac{9}{2}.$$

3. 设 $y = (1+x^2)\arctan x + x^{\sin x} - e^2$, 求 y' .

$$\text{解: } \begin{aligned} \because (1+x^2)\arctan x' &= 2x\arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= 2x\arctan x + 1 \end{aligned}$$

$$(x^{\sin x})' = (e^{\sin x \ln x})'$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$(e^2)' = 0$$

$$\therefore y' = 2x \arctan x + 1 + x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \quad .$$

4. $\int e^{\sqrt{2x+4}} dx ;$

解: 令 $t = \sqrt{2x+4}$, 则 $x = \frac{t^2 - 4}{2}$, $dx = t dt$

$$\text{原式} = \int t e^t dt = \int t de^t = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

$$= (\sqrt{2x+4} - 1)e^{\sqrt{2x+4}} + C$$

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \ln(2x+1), & x > 0 \end{cases}$ 求 $\int f(x) dx$.

解: 当 $x < 0$ 时, $\int f(x) dx = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1$,

当 $x > 0$ 时, $\int f(x) dx = \int \ln(2x+1) dx = x \ln(2x+1) - x + \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C_2$,

再由 $\int f(x) dx$ 在 $x = 0$ 连续, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(2x+1) - x + \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C_2] \Rightarrow C_1 = C_2 + \frac{1}{2}$$

故

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + C & x \leq 0 \\ x \ln(2x+1) - x + \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C & x > 0 \end{cases}$$

6. 就 a 的各种情况, 讨论函数 $f(x) = x^3 - 12ax + 3$ 的极值.

解: $f'(x) = 3x^2 - 12a = 3(x^2 - 4a)$, $f''(x) = 6x$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{4a} = \pm 2\sqrt{a}$ ($a \geq 0$)

所以当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 无极值;

当 $a > 0$ 时, $f''(2\sqrt{a}) = 12\sqrt{a} > 0$, $f(x)$ 在 $x = 2\sqrt{a}$ 取极小值 $3 - 16\sqrt{a^3}$;

$f''(-2\sqrt{a}) = -12\sqrt{a} < 0$, $f(x)$ 在 $x = -2\sqrt{a}$ 取极大值 $3 + 16\sqrt{a^3}$.

四、应用题 (8 分) 要各造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底面直径和高比为多少?

解: 已知 $h = \frac{V}{\pi r^2}$,

则圆柱形油罐表面积

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, r \in (0, +\infty),$$

$$A' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}, A'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

令 $A' = 0$, 得 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 由 $A'' \Big|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = 12\pi > 0$ 知 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 为极小值点, 又驻点唯一, 故

$$\text{极小值点就是最小值点, 此时, } h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r \Rightarrow 2r:h = 1:1$$

所以当底半径 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 和高 $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, 才能使表面积最小, 这时底面直径和高比为

1:1.

五、(8 分) 证明不等式: 当 $0 < a < b$ 时, $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

证明:

令 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日定理的条件. 故

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b),$$

则 $\arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a)$

再由，故 $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$

六、(6分) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f'(1) = f'(-1) = 1$ ，证明：

存在一点 $\xi \in (-1,1)$ ，使得 $f''(\xi) + f'(\xi) = 1$ ；

证明 令 $\varphi(x) = [f'(x)-1]e^x$ ，

由题意，则 $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 上可导，且 $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$

由罗尔定理知，存在一点 $\xi \in (-1,1)$ ，使得 $\varphi'(\xi) = 0$ 。

又 $\varphi'(x) = (f''(x) + f'(x)-1)e^x$ ， $e^x \neq 0$

故 $f''(\xi) + f'(\xi) = 1$