福建师范大学 数学与统计 学院

2021 — 2022 学年第 一 学期考试 A 卷

学院______ 系______ 专业______ 年级______ 姓名______ 学号______

考 生 信 息 栏

装 订 线

专　　业：全校性专业　　　　年　　级：2021 级

课程名称：高等数学 A（上）　　任课教师：杨文生等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2022 年__月__日__午__点__分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

2021—2022 学年第一学期《高等数学 A》（A）卷

答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，与 x 等价的无穷小是（ A ）.

A. $3\sqrt[3]{1+x}-3$　　　　B. $\dfrac{\sin x^2}{(\sin x)^3}$

C. $\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}$　　　　D. $\dfrac{\sin x}{x}$

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是（ B ）.

A. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续　　　　B. $f(x)-f(0)=Ax+o(x)$，其中 A 是常数

C. $f'_{-}(0)$ 与 $f'_{+}(0)$ 都存在　　　　D. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$F(x)=f(\cos x)$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值的一个充分条件是（ D ）.

A. $f''(1)<0$　　B. $f''(1)>0$　　C. $f'(1)<0$　　D. $f'(1)>0$

4. 设 $\int f(x)dx=\ln x^2+C$，则下面式子正确的是（ B ）

A. $\int e^x f(e^x)dx=e^{2x}+C$　　　　B. $\int e^x f(e^x)dx=2x+C$

C. $\int e^{-x} f(e^{-x})dx=-2x+C$　　　　D. $\int e^{-x} f(e^{-x})dx=e^{-2x}+C$

5. 下列反常积分中收敛的是（ C ）

A. $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx$　　B. $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$　　C. $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)^2}$　　D. $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x-1}=$ ____$\dfrac{1}{2}$____.

2. 设 $y=xe^x$，则 $y^{(20)}=$____ $y=(20+x)e^x$ _______.

3. 已知点 $(1,2)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$___-1___，$b=$__3__.

4. $\int \tan x\sec^2 xdx=$ ____ $\frac{1}{2}\tan^2 x+C$ ____________.

5. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=$___2_______.

三、计算题(每题 8 分，共 40 分)

1. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x})$

解: $\lim\limits_{x\to\infty} x^3(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x})=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t}{t^3}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t-\sin t\cos t}{t^3}$ ----------------------------4 分

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t(1-\cos t)}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t\cdot\frac{t^2}{2}}{t^3}=\frac{1}{2}$ ----------------8 分

2. 求 $y=(2x+1)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

解：(1)由于 $\lim\limits_{x\to0^+}(2x+1)e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, 则 $x=0$ 是函数的铅直渐近线;

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}2x+1=\infty$, 故函数无水平渐近线; --------------4 分

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x}=2$,

且 $\lim\limits_{x\to\infty}[y-2x]=\lim\limits_{x\to\infty}[(2x+1)e^{\frac{1}{x}}-2x]$

$$=\lim_{x\to\infty}[(2x+1)(1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))-2x]$$ 泰勒展开

$$=\lim_{x\to\infty}[2x+3+\frac{1}{x}+2x\cdot o(\frac{1}{x})+o(\frac{1}{x})-2x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}[3+\frac{1}{x}+2x\cdot o(1)]=3.$$

故有斜渐近线 $y=2x+3$. ——————————————————————8 分

3. 计算不定积分 $\int \arctan\sqrt{x}dx$.

解： 原式 $=x\cdot\arctan\sqrt{x}-\int xd\arctan\sqrt{x}$ ——————————————————2 分

$$=x\cdot\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$=x\cdot\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+x}d\sqrt{x}$$ ——————————————————4 分

$$=x\cdot\arctan\sqrt{x}-\int 1-\frac{1}{1+x}d\sqrt{x}$$

$$=x\cdot\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$$

$$=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$$ ——————————————————8 分

4. 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2+\sin^{2021}x\cos^{2022}x}{1+x^2}dx$.

解： 原式 $=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{1+x^2}dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^{2021}x\cos^{2022}x}{1+x^2}dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{1+x^2}dx+0$$ ——————————————————3 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\frac{1}{1+x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}-2$$ ----------------8 分

5. 求参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数和二阶导数.

解: $$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{(\arctan t)'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t},$$ -------------------------4 分

$$y''(x)=\frac{(\frac{1}{2t})'}{x'(t)}=\frac{(\frac{1}{2t})'}{(\ln(1+t^2))'}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$ ----------------------8 分

四、(12 分) 已知函数 $f(x)=x^3-3ax+2$,

(1) 当 $a=1$ 时，试求 $f(x)$ 的极值点；

(2) 若 $f(x)$ 无极值点，试确定 a 的取值范围；

(3) 若方程 $f(x)=0$ 只有唯一实根，试确定 a 的取值范围.

解:(1) 当 $a=1$ 时， $f(x)=x^3-3x+2$ ， $f'(x)=3(x^2-1)$ ， $f''(x)=6x.$

令 $f'(x)=0$, 解得驻点 $x=\pm1$. 又 $f''(\pm1)=\pm6$, 所以

$x=1$ 和 $x=-1$ 分别是函数的极小值点和极大值点. --------------------4 分

(2) $f'(x)=3(x^2-a)$ ， $f''(x)=6x.$

当 $a\le 0$ 时，若 $x\ne 0$, 则 $f'(x)>0$, 进而 $f(x)$ 严格单调递增，因此函数无极值点；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm\sqrt{a}$.

显然， $f''(\sqrt{a})=6\sqrt{a}>0$ ，从而 $x=\sqrt{a}$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点；

$f''(-\sqrt{a})=-6\sqrt{a}<0$ ，从而 $x=-\sqrt{a}$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点.

综上，$f(x)$ 无极值点的充要条件 $a \le 0$. ----------------------------------8 分

(3) 当 $a \le 0$ 时，连续函数 $f(x)$ 严格单调递增，又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$=-∞，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$=+∞，

故 $f(x)$=0 有且只有一个实根；

当 $a>0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$=-∞，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$=+∞，$f(x)$=0 至少有一个实根；根据函数的图像，不难推出：$f(x)$=0 只有一个实根的充要条件是 $f(\sqrt{a})f(-\sqrt{a})>0$. 于是由

$$f(\sqrt{a})f(-\sqrt{a})=(-2a^{\frac{3}{2}}+2)((-2a^{\frac{3}{2}}+2)=4(1-a^{3})>0,$$ 解得 $a<1$.

综上，方程 $f(x)=0$ 有且只有唯一实根的充要条件是 $a<1$. ------------------12 分

五、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

(1) 证明 $\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$；

(2) 计算 $\int_0^\pi x\sin^2 xdx$.

(1) 证明：设 $x=\pi-t$，则 $dx=-dt$, 且当 $x=0$ 时，$t=\pi$; 当 $x=\pi$ 时，$t=0$.

于是
$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=-\int_\pi^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]dt$$
$$=\int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)\,dt$$
$$=\pi\int_0^\pi f(\sin t)\,dt-\int_0^\pi tf(\sin t)\,dt$$
$$=\pi\int_0^\pi f(\sin t)\,dt-\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx$$

所以 $$\int_0^\pi xf(\sin x)dx==\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$ -------------------5 分

(2) $$\int_0^\pi x\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^2 xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

或 $$\int_0^\pi x\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{4}.$$ ----------------10 分

六、（8 分）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 上可导，且 $f(1)=1$.

(1) 设 $g(x)=xf(x)$，求 $f(0)$ 和 $g'(0)$；

(2) 试证明存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

解：(1) 由 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，则 $f(0)=0$；

又 $g'(x)=[xf(x)]'=f(x)+xf'(x)$, 则 $g'(0)=[xf(x)]'|_{x=0}=f(0)+0f'(0)=0$. -----4 分

另解：由导数的定义可知，$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-0f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{x-0}=f(0)=0.$

(2) 证明：设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导，且

$F(0)=F(1)=0$. 由罗尔**定理**，存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$.

即 $f'(\xi)=1$. --8 分