2023—2024学年第一学期《高等数学B》A卷

答案及评分标准

一、单选题(每小题3分，共15分)

1. 当$x\to 0$时，$\left(1-\cos x\right)\left(2^x-1\right)$与$x^3$相比是（　　）

A. 高阶无穷小；　　B. 等价无穷小；

C. 同阶但不等价无穷小；　　D. 低阶无穷小.

2. 设$f(x)=\dfrac{\arcsin^2 x}{\ln\sqrt{1+x^2}}$，则$x=0$是$f(x)$的（　　）.

A. 连续点　　B. 第二类间断点　　C.跳跃间断点　　D. 可去间断点

3. 已知$f'(x_0)=-1$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}$=(　　).

A. 1/5　　B. －1/5　　C. 1　　D. －1

4.设$\boldsymbol{f(x)=x^3+ax^2+bx+c}$，$\boldsymbol{x_0}$是方程$\boldsymbol{f(x)=0}$的最大的根,则必有(　　)

A. $\boldsymbol{f'(x_0)\ge 0}$　　B. $\boldsymbol{f'(x_0)>0}$　　C. $\boldsymbol{f'(x_0)\le 0}$　　D. $\boldsymbol{f'(x_0)<0}$

5. 若$f'\left(x\right)=\sin\left(x^2\right)$，则$\int xf''\left(x^2\right)dx=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{2}\cos\left(x^4\right)+c$　　B. $-\dfrac{1}{2}\cos\left(x^4\right)$　　C. $-\dfrac{1}{2}\sin\left(x^4\right)+c$　　D. $\dfrac{1}{2}\sin\left(x^4\right)+c$

二、填空题(每小题3分，共15分)

1. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\alpha x-7}{x-1}=\beta$，则常数$\alpha+\beta=$____________________.

2. 设$y=e^{1-2x}$，则$y^{(2024)}(0)=$____________.

3. 已知$y=x^2+2x$，在点$x=3$处，$\Delta x=0.1$，则$dy=$ ______.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=$__________.

5. 若 $\int xf(x)dx=\arctan x+C$，则 $\int\dfrac{1}{f(x)}dx=$____________________.

三、(8 分) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\sin x}$

四、(8 分) 求参数方程 $\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$ 所确定的 $y=f(x)$ 的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$,其中 $f''(t)$ 存在且不为零.

五、(8 分) 计算不定积分 $\int\dfrac{\sin x+3\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

六、(8 分) 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 计算不定积分 $\int f(x)dx$.

七、(10 分) 求函数 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域以及渐近线.

八、(10 分) 应用题： 在半径为 R 的半圆内作内接梯形，使其底为直径其它三边为圆的弦，问应怎样设计，才能使梯形的面积最大？

九、(12 分) 证明不等式： 当 $x>1$ 时，$e^x>\dfrac{e}{2}(x^2+1)$.

十、(6 分) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$