福建师范大学__公共课（数统）__学院

2023—2024学年第一学期 高等数学A 期中考试

知明行笃　立诚致广

专　　业： 全校性专业　　　**年　　级：** 2023级

课程名称： 高等数学A　　　**任课教师：** 蔡裕华等

试卷类别： 开卷（ ）闭卷（√）　　　**考试用时：** 120 **分钟**

考试时间： 2023 **年** 12 **月** 2 **日** 上 **午** 9 **点** 00 **分**

题号	一	二	三	四	五	六	总分	评卷人
得分								

考生信息栏

学院________ 系________ 专业________ 年级________ 姓名________ 学号________

装　订　线

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 以下四个选项中，极限不存在的是（ B ）.

A. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

C. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+5e^x}{3x+7e^x} =$（ D ）.

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{5}{7}$　　C. 1　　D. 不存在

3. 当$x \to 0$时，函数$f(x) = \tan x - \sin x$是x的（ C ）阶无穷小量.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 设$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{4x^2-3}{x+2} - ax - b\right) = 2$，则（ A ）.

A. $a = 4$，$b = -10$　　B. $a = 4$，$b = -2$

C. $a = -4$，$b = 2$　　D. $a = -4$，$b = 10$

5. 设函数$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$，则$f(x)$在$x = 0$处（ C ）.

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导　　D. 可导

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数$f(x)$在区间$(-1,0)$上满足$\frac{x^2+x-2}{x+3} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{x^2+2x-1}{x+3}$且极限$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$存在，则 $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) =$ ____-1____.

2. 设$\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = a$，$\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = b$，则$a + b =$ ____$e+1$____.

3. 设函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上可导，且有$f(1) = f'(-1) = -f'(1) = -1$，则$f\big(f(x)\big)$在$x = 1$处的导数为 ____$-1$____.

4. 设函数$y = \ln(\sin x)$，则$dy =$ ____$\cot x\, dx$____.

5. 曲线$(1+x)^y = y^{(1+x)}$在点$(0,1)$的切线方程为 ____$y = x + 1$____.

三、（8 分）求极限 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

解：因为$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$， （4 分）

且 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\frac{1}{2}$，故由夹逼准则可得，原式极限为$\frac{1}{2}$. （8 分）

四、（8 分）求极限$\lim_{x\to1}\frac{1-\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

解：原式$=\lim_{u\to0}\frac{1-\cos u}{1-\sin\frac{\pi}{2}(u+1)}$ （换元） （3 分）

$=\lim_{u\to0}\frac{1-\cos u}{1-\cos\frac{\pi}{2}u}$ （平移） （6 分）

$=\lim_{u\to0}\frac{\frac{1}{2}u^2}{\frac{1}{8}\pi^2u^2}$ （等价代换）

$=\frac{4}{\pi^2}$ （也可通过使用两次洛必达法则来求解） （8 分）

五、（8 分）求极限$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{e^{2x}-1}$，其中$f(0)=0$，$f'(0)=3$.

解：原式$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{x}{e^{2x}-1}$ （3 分）

$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}$ （6 分）

$=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{3}{2}$ （8 分）

六、（8 分）求函数$y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+(\arctan x)^2$的一阶导数.

解：令$y_1=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，则$y_1{}'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. （4 分）

再令$y_2=(\arctan x)^2$，则$y_2{}'=\frac{2\arctan x}{1+x^2}$.

故$y'=y_1{}'+y_2{}'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2\arctan x}{1+x^2}$. （8 分）

七、（8 分）设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2(1-\sin t)\\ y=3(1-\cos t)\end{cases}$，$t\neq\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$，$n\in\mathbf{Z}$确定，求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：由于$\frac{dx}{dt}=-2\cos t$，$\frac{dy}{dt}=3\sin t$，那么 （2 分）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin t}{-2\cos t}=-\frac{3}{2}\tan t,$$ （5 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}\tan t\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3}{4\cos^3 t}\ .$$ （8 分）

八、（10 分）设$x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$，讨论数列$\{x_n\}$的极限是否存在，若存在，求出此极限.

解：因为$x_1=10$，$x_2=\sqrt{10+6}=4<x_1$，假设$x_k<x_{k-1}$成立，则$x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}<\sqrt{x_{k-1}+6}=x_k$，故由数学归纳法可知，$\{x_n\}$为单调减少数列. （3 分）

又对任意$n\in N_+$，$x_n>0$. 故$\{x_n\}$有下界. 根据单调有界准则，$\{x_n\}$的极限存在. （6 分）

对$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$两边取极限，解得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$（舍去$-2$）. （10 分）

九、（12 分）指出函数$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$的间断点，并判断其类型.

解：由于$f(-1^+)=f(-1^-)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$x=-1$为$f(x)$的可去间断点； （4 分）

由于$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，故$x=1$为$f(x)$的无穷间断点； （8 分）

由于$f(0^+)=-1$，但$f(0^-)=1$，故$x=0$为$f(x)$的跳跃间断点. （12 分）

十、（8 分） 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，$f(a)=0$，且存在$c\in(a,b)$，使得$f(c)f(b)<0$，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=kf(\xi)$.

证： 由于函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且存在$c\in(a,b)$，使得$f(c)f(b)<0$，故由零点定理可知，存在$\eta\in(c,b)$，使得$f(\eta)=0$. （4 分）

令函数$F(x)=e^{-kx}f(x)$，$k\in\mathbf{R}$，则$F(x)$在$[a,\eta]$上连续，在(a,η)内可导，且$F(a)=F(\eta)=0$，故由罗尔定理可知，存在$\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$，使得$F'(\xi)=-ke^{-k\xi}f(\xi)+e^{-k\xi}f'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=kf(\xi)$. （4 分）