2023—2024 学年第 1 学期考试高等数学 C 卷

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）.

1. 设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

A.可去间断点；　　B.振荡间断点；
C.无穷间断点；　　D.跳跃间断点.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\le 1 \\ 2x, x>1 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（　　）

A.左右导数都存在;　　B.左导数存在，右导数不存在;
C.左右导数都不存在;　　D.右导数存在，左导数不存在.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 x_0 是 $f(x)$ 的（　　）

A.驻点;　　B.不可导点;

C.驻点或不可导点;　　D.以上都不是.

4. 设 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处（　　）

A. $f'(a)$ 不存在；　　B. $f'(a)$ 存在，但 $f'(a)\neq 0$；

C. $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值；　　D. $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

5. 在价格为 100 元时，商品的需求价格弹性为 -0.5，则价格下跌到 99 元时，需求量将（　　）.

A.下降 50% ；　　B. 上升 50% ；　　C. 下降 0.5%；　　D. 上升 0.5%.

二、填空题（每空 3 分，共 15 分，不填解题过程）.

1. 若 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，则 $k=$______.

2. 设 $f(x)$ 可导且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{\sin x}=2$，则 $f'(1)=$________.

3. 设$\sin xy+\ln(y-x)=x$，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

4. 设$y=x^{\ln x}$，则$y'(e)=$________________.

5.已知泰勒公式$x\ln(1+x)=p(x)+o(x^4)$，则多项式$p(x)=$____________.

三、（8 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1-2x)}$

四、（8 分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

五、（8 分） 求$\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t), \end{cases}$ ($f''(t)$存在且不为零) 所确定的函数$y=y(x)$的一阶、二阶导数.

六、（8 分） 设函数$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 讨论$f(x)$在$x=0$连续性与可导性.

七、（12 分） 求函数$y=\dfrac{x^2}{x+1}$的定义域、单调性、极值、渐近线.

八、（8 分） 设价格函数为$P=15e^{-\frac{x}{e}}$ (x为产量)，求最大收益.

九、（10 分）证明不等式：$2e^x - 2 > 2x + x^2 \quad (x > 0)$

十、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(1) = f(0) = 0$，$f(\frac{1}{2}) = 1$.

证明：(1)存在 $\eta \in (\frac{1}{2},1)$.使得 $f(\eta) = \eta$；

(2)存在 $\xi \in (0,1)$,使得$f(\xi) = 2\xi - \xi f'(\xi)$.