福建师范大学 公共课 数信学院

2020—2021 学年第 1 学期期末考试卷

知明行笃 立诚致广

专 业：______ 年 级：______

课程名称：概率论与数理统计 任课教师：______

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√） 考试用时：120 分钟

考试时间：2021 年 1 月 16 日 下 午 14 点 30 分

题号	一	二	三	四	五	总得分	评卷人
得分							
题号	六	七	八	九	十		
得分							

考生信息栏

学院______ 系______ 专业______ 年级______ 姓名______ 学号______

装 订 线

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设随机事件 A、B 相互独立且满足 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.25$。则 $P(A\cup B)$ 等于(　　)。D

A. 0.35；　　B. 0.45；　　C. 0.50；　　D. 0.55。

2、对于随机变量的独立性，下列三个说法有几个正确？　(　　) B

（1）　若$X<Y$，则X，Y不独立，因为他们有大小关系。

（2）　若$P(X=Y)>0$，则X，Y不独立，因为他们的取值有影响。

（3）若X，Y独立，则必有$P(X<0,Y>0)=P(X<0)P(Y>0)$。

A. 0 个；　　B. 1 个；　　C. 2 个；　　D. 3 个。

3、若 X，Y 相互独立同分布且 $P(X=1)=P(Y=1)=0.4$，$P(X=2)=P(Y=2)=0.4$，$P(X=3)=P(Y=3)=0.2$，则 $P(X>Y)=($　　$)$。A

A. 0.32；　　B. 0.33；　　C. 0.35；　　D. 0.37。

4、对于矩法估计，下列三个说法有几个正确？　(　　)D

（1）　总体矩的矩法估计量一定是样本矩。

（2）　总体均值的矩法估计量一定是无偏估计量。

（3）　总体方差的矩法估计量一定不是无偏估计量。

A. 0 个；　　B. 1 个；　　C. 2 个；　　D. 3 个。

5、设$(X_1,\cdots,X_n)$是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2 是未知参数。记 $\overline{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差。则检验问题 $H_0:\mu=3\leftrightarrow H_1:\mu\neq 3$ 的显著性水平为 0.05 的拒绝域是(　　)。C

A. $\dfrac{|\overline{X}-3|}{S/\sqrt{n}}\geq 1.96$；　　B. $\dfrac{|\overline{X}-3|}{\sigma/\sqrt{n}}\geq 1.96$；

C. $\dfrac{|\overline{X}-3|}{S/\sqrt{n}}\geq t_{0.975}(n-1)$；　　D. $\dfrac{|\overline{X}-3|}{\sigma/\sqrt{n}}\geq t_{0.95}(n-1)$。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6、概率的可列可加性是______________________________。

若 A_1，A_2，…，A_n，… 互不相容，则 $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)$

7、在 1～100 中随机地取一个整数，则该数既能被 2 整除也能被 3 整除的概率是__________。

0.16

8、记 $N(0,1)$ 的分布函数为 $\Phi(x)$ ，设 $Y\sim N(2,4)$，则 $P(-3<Y<3)$ 可以用 $\Phi(x)$ 的函数值表示为__________。

$P(-3<Y<3)=\Phi(0.5)-1+\Phi(2.5)$或 $\Phi(0.5)-\Phi(-2.5)$

9、设总体 X 取 0，1，3 的概率分别为 $1-p,1-2p$和$3p-1$。其中，$1/3\le p\le 1/2$ 为参数。现有一组来自 X 的样本值 0，0，1，1，1，3。则似然函数为 $L(p)=$__________。

$(1-p)^2(1-2p)^3(3p-1)$

10、参数 α 的置信度为 0.95 的置信区间的定义是：__________________________。

满足 $P(\underline{\theta}\le\theta\le\overline{\theta})=0.95$ 的统计量 $\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$ 构成的区间 $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$

三、计算题（共 60 分）

11、(8 分)某商品由三个厂家供应，其供应量为：甲厂家是乙厂家的 2 倍；乙、丙两厂相等。各厂产品的次品率为 2%, 2%, 4%. 若从市场上随机抽取一件此种商品，发现是次品，求它是甲厂生产的概率?

解： 用 1、2、3 分别记甲、乙、丙厂，设

$A_i=$"取到第i个工厂的产品"，　$B=$"取到次品"。

由题意得：

$$P(A_1)=0.5,\ P(A_2)=P(A_3)=0.25;$$
$$P(B|A_1)=P(B|A_2)=0.02,\ P(B|A_3)=0.04.$$

4 分

由 Bayes 公式得：$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=0.4.$　　8 分

12、（12 分）设随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1;\\ 0\ , & \text{其他},\end{cases}$$

（1）求 (X,Y) 分别关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；

（2）判断 X 与 Y 是否相互独立，并说明理由；

解：(1) X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$ **(4 分)**

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$ **(8 分)**

(2) 由于 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立. **(12 分)**

13、（12 分）设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为：

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
2	α	$\frac{1}{5}$	β

若 X,Y 相互独立，试求

（1） α,β 的值；

（2） X 和 Y 的边缘分布律，及 ρ_{XY}；

（3）在 $X=1$ 的条件下 Y 的条件分布律。

解：（1）由于离散型随机变量的分布律必须满足 $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$，所以

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\alpha+\frac{1}{5}+\beta=1,$$

即 $\alpha+\beta=\frac{2}{5}.$

又因为 X,Y 相互独立，所以

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j), i=1,2,3;\ j=1,2,$$

于是有

$$\begin{aligned}\alpha &= P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2)\\ &=\left(\frac{1}{4}+\alpha\right)\left(\alpha+\frac{1}{5}+\beta\right)\end{aligned}$$

将 $\alpha+\beta=\frac{2}{5}$ 代入上式可解得 $\alpha=\frac{3}{8}$，从而 $\beta=\frac{1}{40}$. 3 分

(2) X,Y 的边缘分布律分别见下表

X	1	2	3
$p_{i\cdot}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$

5 分

Y	1	2
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

7 分

因为X,Y相互独立，则X,Y一定不相关，则$\rho_{XY}=0$. 8 分

（3） $P(Y=1|X=1)=\dfrac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\dfrac{1/4}{5/8}=\dfrac{2}{5}$.

$P(Y=2|X=1)=\dfrac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)}=\dfrac{3/8}{5/8}=\dfrac{3}{5}$. 12 分

14、（10 分）（1）随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}Ax, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 A 为常数，试求 $E(X)$ 和 $D(X)$。

（2）设随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y\ge 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

并且 X，Y 相互独立，试求 $E(XY)$。

解：(1) 由概率密度函数的性质知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=\int_0^1 Ax\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx$$
$$=\frac{A}{2}x^2\Big|_0^1+[2x-\frac{1}{2}x^2]\Big|_1^2=\frac{A}{2}+\frac{1}{2},$$

故 $A=1$. 2 分

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot x\,dx+\int_1^2 x(2-x)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+[x^2-\frac{1}{3}x^3]\Big|_1^2=1,$$

3 分

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\int_0^1 x^2\cdot x\,dx+\int_1^2 x^2(2-x)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1+[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4]\Big|_1^2=\frac{7}{6}.$$

由方差的计算公式得

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)^2]=\frac{1}{6}.$$ 6 分

（2）因为 X，Y 相互独立，所以

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y).$$ 8 分

而

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\,dy=\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy$$

$$=-\int_0^{+\infty} yde^{-y}=-[ye^{-y}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-y}dy]=1,$$ 9 分

所以 $E(XY)=1.$ 10 分

15、（8 分）设从均值为 μ，方差为 $\sigma^2>0$ 的总体中，分别抽取容量为 n_1 和 n_2 的两独立样本，$\bar{X}_1$ 和 $\bar{X}_2$ 分别是这两个样本的均值。对于任意常数 a，试说明 $Y=a\bar{X}_1+(1-a)\bar{X}_2$ 是 μ 的无偏估计，并确定常数 a 使 $D(Y)$ 达到最小。

解：因 $E(Y)=aE(\bar{X}_1)+(1-a)E(\bar{X}_2)=\mu,$

故 Y 是 μ 的无偏估计； 3 分

因 $D(Y)=a^2D(\bar{X}_1)+(1-a)^2D(\bar{X}_2)=a^2\cdot\frac{\sigma^2}{n_1}+(1-a)^2\cdot\frac{\sigma^2}{n_2}=(\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}a^2-\frac{2}{n_2}a+\frac{1}{n_2})\sigma^2,$

令 $\frac{d}{da}D(Y)=(\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}2a-\frac{2}{n_2})\sigma^2=0,$ 得 $a=\frac{n_1}{n_1+n_2},$

又因为 $\frac{d^2}{d^2a}D(Y)=\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}\cdot 2\sigma^2>0,$

故当 $a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$ 时，$D(Y)$ 达到最小值。 8 分

16、（10 分）设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中，$\theta>-1$ 为未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自于 X 的容量为 n 的样本。分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量。

解（1）总体 X 只含有一个未知参数，只需求总体一阶原点矩，

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

令 $\frac{\theta+1}{\theta+2}=\bar{X}$，得到未知参数 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}.$$ 5 分

（2）当 $0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta},$$

$$lnL(\theta)=nln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}ln\,x_i,$$

由 $\frac{\partial lnL(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}ln\,x_i\overset{\text{令}}{=\!=}0$，得 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$，即

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}lnX_i}.$$ 10 分

四、应用题（共 10 分）

17、（10 分）随机地从一批元件中抽取 5 个，测得它们的电阻（欧）分别为：x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，

计算得 $\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=13.92,\ \sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=0.21$。设这批元件的电阻服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。试问能否认为这批元件电阻的方差是 1？（显著性水平为 0.05）。

常用分布的上分位点如下：

$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.05}(10)=1.8125$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$t_{0.025}(10)=2.2281$，

$u_{0.025}=1.96$，$u_{0.05}=1.645$，$u_{0.005}=2.57$，$\chi^2_{0.95}(4)=0.711$，$\chi^2_{0.975}(4)=0.484$，

$\chi^2_{0.05}(4)=9.488$，$\chi^2_{0.025}(4)=11.143$，$\chi^2_{0.95}(5)=0.711$，$\chi^2_{0.975}(5)=0.831$，

$\chi^2_{0.05}(5)=11.071$，$\chi^2_{0.025}(5)=12.833$

解：要检验的假设是 $H_0:\sigma^2=1,\ H_1:\sigma^2\neq 1$。 ………2 分

取检验统计量为 $\chi^2=\sum_{i=1}^{5}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(4)$， ………4 分

则拒绝域是 $\chi^2>\chi^2_{0.025}(4)$ 和 $\chi^2<\chi^2_{0.975}(4)$ ………7 分

其中 $\chi^2_{0.025}(4)=11.143$，$\chi^2_{0.975}(4)=0.484$。因为 χ^2 的观测值是

$\chi^2=0.21<\chi^2_{0.975}(4)$ ………9 分

所以拒绝原假设，即不能认为这批元件的电阻的方差是 1。 ………10 分