考生信息栏
学院________系________专业________年级________姓名________学号________
装 订 线

福建师范大学 数学与统计 学院

2022—2023 学年第 一 学期考试 B 卷

知明行笃 立诚致广

专　　业： 全校性专业　　　　年　　级： 2022 级

课程名称： 高等数学 A（上）　　任课教师： 张世芳等

试卷类别： 开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时： 120 分钟

考试时间： 2023 年 2 月 25 日 上 午 8 点 0 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									

考生须知	1. 答案一律写在答题纸上，否则无效. 2. 答题要写清题号，不必抄原题. 3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交.

2022—2023 学年第一学期《高等数学 A》（B）卷

答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．如下四个选项，极限不存在的是（ B ）.

A. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ B. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin x$ C. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin x$ D. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

2．设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域有定义，则 $f(x)$ 在该点可导的一个充分条件是（ D ）

A. $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在 B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在 D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}$ 存在

3．若 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，$f''(x_0)<0$，则（ A ）

A. $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点 B. $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

C. $x=x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值点 D. 不能断定 $x=x_0$ 是否为极值点

4．$\int\dfrac{dx}{x^2-2x+5}=$（ C ）

A. $\arctan(x-1)+C$ B. $\arctan\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+C$

C. $\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+C$ D. $2\arctan\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+C$

5．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^b f(x)dx$ 是（ A ）.

A. 一个常数 B. $f(x)$ 的一个原函数 C. 一个函数族 D. 一个非零常数

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}\sin(x^2+1)=$____ 0 ______.

2. 设 $f(u)$ 为可导函数且 $f(2x-1)=x^3$，则 $f'(2x-1)=$___ $\dfrac{3x^2}{2}$ __.

3. 写出函数 $f(x)=x^2e^x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式___ $x^2e^x=x^2+x^3+o(x^3)$ __.

4. $\int x^{-\frac{9}{2}}dx=$___ $-\dfrac{2}{7}x^{\frac{-7}{2}}+C$ ______.

5. $\int_{-1}^{1}(\sin x+|x|)e^{x^2}dx=$____ $e-1$ _______.

三、计算题(每题 8 分，共 40 分)

1. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^2}(x-\sin x)}{\sqrt{1-x^3}-1}$.

解　原式= $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^2}(x-\sin x)}{\sqrt{1-x^3}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{1-x^3}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{-\frac{1}{2}x^3}$ ----------------4 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{-\frac{1}{2}x^3}=-2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}.$ ------------------------------8 分

2. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-2x$ 在 $(2,0)$ 处有公共切线, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{2n}{n+1})$.

解：(1) $f(2)=x^2-2x|_{x=2}=0,\ f'(2)=(x^2-2x)'|_{x=2}=(2x-2)|_{x=2}=2.$ -----------4 分

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{2n}{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{2n}{n+1})-f(2)}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(2+\frac{-2}{n+1})-f(2)}{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f(2+\frac{-2}{n+1})-f(2)}{\frac{-2}{n+1}}\frac{\frac{-2}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-2}{n+1}}{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{f(2+\frac{-2}{n+1})-f(2)}{\frac{-2}{n+1}}$$

$=-2f'(2)=-4$ ——————————————————————8 分

3. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{(\sin t)'}{(t+e^t)'}=\frac{\cos t}{1+e^t}$ ——————————————————————3 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{\cos t}{1+e^t})'}{(t+e^t)'}=\frac{-\sin t-(\sin t+\cos t)e^t}{(e^t+1)^3}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}=\frac{-\sin t-(\sin t+\cos t)e^t}{(e^t+1)^3}|_{t=0}=-\frac{1}{8}.$ ——————————————————8 分

4. 计算不定积分 $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

解：当 $x>0$ 时，$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}d\frac{1}{x^2}$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}d(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})^2$$

$$=-\int 1d\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C$$

$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$ ——————————————————6 分

当$x<0$时，类似可求得$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

综上，$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$--8 分

5. $\int_{-\sqrt{2}}^{2} \min\{2,x^2\}dx$

解：$\int_{-\sqrt{2}}^{2}\min\{2,x^2\}dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x^2dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}2dx$ -------------------------------------4 分

$=\frac{x^3}{3}\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}+2(2-\sqrt{2})=4-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$--8 分

四、 (12 分) 就a的各种情况，讨论函数$f(x)=x^3-3ax^2+4$的极值.

解：$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$. 令$f'(x)=0$解得驻点：$x_1=0,x_2=2a.$

所以(I)当$a=0$时，$f(x)=x^3+3$单调递增，无极值；-------------------------6 分

(II)当$a>0$时，$f(x)$在$x=0$处取得极大值4，$f(x)$在$x=2a$处取得极小值$4(1-a^3)$；

(II)当$a<0$时，$f(x)$在$x=0$处取得极小值4，$f(x)$在$x=2a$处取得极大值$4(1-a^3)$.

---12 分

五、(10 分)（1）证明$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$；

（2）计算$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx.$

解：（1）设$x=-t$，则$dx=-dt$, 且当$x=\pi$时，$t=-\pi$; 当$x=-\pi$时，$t=\pi$.

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx=\int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{-t}\sin^2(-t)}{1+e^{-t}}d)(-t)=-\int_{\pi}^{-\pi}\frac{\sin^2 t}{1+e^t}dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 t}{1+e^t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx.$$

故有 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$ ----------------------------------5 分

（2） 解： 由（1）的结论可知：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\frac{\pi}{2}.$$ --10 分

六、（8 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可导, 且 $f(0)=0,\quad f(2)=2$.

证明 (1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $f'(\eta)=1$.

证明： （1） 设 $F(x)=f(x)+x-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 且

$F(0)=f(0)+0-1=-1<0,\ \ F(2)=f(2)+2-1=3>0$. 由连续函数的零点存在性定理可知：

存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $F(\xi)=0$. 即 $f(\xi)=1-\xi$. ----------------------------4 分

（2） 设 $H(x)=f(x)-x$，则 $H(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导, 且

$H(0)=H(2)=0$. 由罗尔定理可知：存在 $\eta\in(0,2)$，使得

$H'(\eta)=0$, 即 $f'(\eta)=1$. --8 分