

**2021 — 2022 学年第一学期《高等数学 B》A 卷**

**一、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)**

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = a (a \neq 0)$ , 则 ( )

A. 数列  $\{x_n\}$  收敛

B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -a$

D. 数列  $\{x_n\}$  可能收敛, 也可能发散

2. 设  $f(x) = \frac{e^{x-1} \ln(x+1)}{e^x - 1}$  的第二类间断点的个数为 ( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

3. 函数  $y = x \sin x + 2 \cos x (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2})$  的拐点坐标为 ( ).

A.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

B.  $(\pi, -2)$

C.  $(0, -2)$

D.  $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

4. 设  $f(x)$  的一个原函数是  $\frac{1}{x}$ , 则  $f'(x) =$  ( )

A.  $\frac{2}{x^3}$

B.  $\frac{1}{x}$

C.  $-\frac{1}{x^2}$

D.  $\ln|x|$

5. 设函数  $y = \sec x$  在  $x=0$  处的二次泰勒多项式为  $1+ax+bx^2$ , 则 ( ).

A.  $a=1, b=-\frac{1}{2}$

B.  $a=1, b=\frac{1}{2}$

C.  $a=0, b=-\frac{1}{2}$

D.  $a=0, b=\frac{1}{2}$

**二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)**

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\sin 4x^3}{1 - \cos ax}$  与  $ax$  是等价无穷小, 则  $a =$  \_\_\_\_.

2. 物体的运动规律  $s = t\sqrt[3]{t^2}$  (m) 则物体在  $t=2$  (s) 时的速度 = \_\_\_\_.

3. 曲线  $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$  的垂直渐近线方程是 \_\_\_\_\_

4.  $y = (2x+1)^8$ , 则  $y^{(8)} =$  \_\_\_\_\_.

5.  $\int \frac{e^x}{x^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

### 三、计算题(每题 8 分, 共 48 分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$

2. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x)}$ .

3. 设  $y = (1+x^2) \arctan x + x^{\sin x} - e^2$ , 求  $y'$ .

4.  $\int e^{\sqrt{2x+4}} dx$  ;

5. 设  $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \ln(2x+1), & x > 0 \end{cases}$  求  $\int f(x) dx$ .

6. 就  $a$  的各种情况, 讨论函数  $f(x) = x^3 - 12ax + 3$  的极值.

**四、应用题 (8 分)** 要各造一圆柱形油罐, 体积为  $V$ , 问底半径  $r$  和高  $h$  等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底面直径和高比为多少?

**五、(8 分)** 证明不等式: 当  $0 < a < b$  时,  $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$ .

**六、(6 分)** 设  $f(x)$  在  $[-1,1]$  上具有二阶导数, 且  $f'(1) = f'(-1) = 1$ , 证明:

存在一点  $\xi \in (-1,1)$ , 使得  $f''(\xi) + f'(\xi) = 1$ ;