

# 福建师范大学 数学与统计 学院

2022 — 2023 学年第 一 学期考试 B 卷

知 明 行 笃



应 诚 致 广

专 业: 全校性专业 年 级: 2022 级  
课程名称: 高等数学 A (上) 任课教师: 张世芳等  
试卷类别: 开卷 ( ) 闭卷 (√) 考试用时: 120 分钟  
考试时间: 2023 年 2 月 25 日 上 午 8 点 0 分

题号	一	二	三	四	五	六	七		总分
得分									
<b>考生须知</b>	1. 答案一律写在答题纸上, 否则无效. 2. 答题要写清题号, 不必抄原题. 3. 考试结束, 试卷与答题纸一并提交.								

## 一、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 如下四个选项, 极限不存在的是 ( ).

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$     B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$     C.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x$     D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

2. 设函数  $f(x)$  在  $x=a$  的某邻域有定义, 则  $f(x)$  在该点可导的一个充分条件是 ( ).

A.  $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[ f(a + \frac{1}{h}) - f(a) \right]$  存在    B.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$  存在  
C.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$  存在    D.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h}$  存在

3. 若  $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ , 则 ( ).

- A.  $x = x_0$  是  $f(x)$  的极大值点    B.  $x = x_0$  是  $f(x)$  的极小值点  
C.  $x = x_0$  不是  $f(x)$  的极值点    D. 不能断定  $x = x_0$  是否为极值点

4.  $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = ( ).$

A.  $\arctan(x-1) + C$     B.  $\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$   
C.  $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$     D.  $2 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

5. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $\int_a^b f(x) dx$  是 ( ).

- A. 一个常数    B.  $f(x)$  的一个原函数    C. 一个函数族    D. 一个非零常数

## 二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} \sin(x^2 + 1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设  $f(u)$  为可导函数且  $f(2x-1) = x^3$ , 则  $f'(2x-1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 写出函数  $f(x) = x^2 e^x$  的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式\_\_\_\_\_.

4.  $\int x^{-\frac{9}{2}} dx =$ \_\_\_\_\_.

5.  $\int_{-1}^1 (\sin x + |x|) e^{x^2} dx =$ \_\_\_\_\_.

### 三、计算题(每题 8 分, 共 40 分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} (x - \sin x)}{\sqrt{1-x^3} - 1}$ .

2. 设曲线  $y = f(x)$  与  $y = x^2 - 2x$  在  $(2, 0)$  处有公共切线, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ .

3. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$  确定, 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0}$ .

4. 求不定积分  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$

5. 求定积分  $\int_{-\sqrt{2}}^2 \min\{2, x^2\} dx$

四、(12 分) 就  $a$  的各种情况, 讨论函数  $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4$  的极值.

五、(10 分) (1) 证明  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \sin^2 x}{1 + e^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + e^x} dx$ ;

(2) 计算  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \sin^2 x}{1 + e^x} dx$ .

六、(8 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  上可导, 且  $f(0) = 0$ ,  $f(2) = 2$ .

证明 (1) 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $f(\xi) = 1 - \xi$ ;

(2) 存在  $\eta \in (0, 2)$ , 使得  $f'(\eta) = 1$ .