福建师范大学 公共课（数统） 学院

2024—2025 学年第一学期 高等数学 A 期中考试

知明行笃 立诚致广

专　　业：全校性专业　　　　年　　级：2024 级

课程名称：高等数学 A　　　　任课教师：蔡裕华等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2024 年 11 月 24 日____午____点____分

题号	一	二	三	四	五	六	总分	评卷人
得分								

考生信息栏

学院________系________专业________年级________姓名________学号________

装　订　线

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 以下四个选项中，极限不存在的是（ D ）.

A. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)|\sin x|$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$

2. 当$x\to 0$时，函数$f(x)=\tan x-\sin x$是x的（ B ）阶无穷小量.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 设$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-ax-2}{x-1}=b$，则（ A ）.

A. $a=-1$，$b=3$　　B. $a=1$，$b=-3$

C. $a=-1$，$b=-3$　　D. $a=1$，$b=3$

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\geq 0\\ 1-e^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$，则$f(x)$在$x=0$处（ D ）.

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导　　D. 可导

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=$（ C ）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=a$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=b$，则$a+b=$ $\underline{\quad e+1\quad}$.

2. 若任意的x，函数$f(-x)=f(x)$且$f'(1)=-2$，则$f'(-1)=$ $\underline{\quad 2\quad}$.

3. 设$f(x)=x^n(x^n+1)$，则$f^{(n)}(0)=$ $\underline{\quad n!\quad}$.

4. 设函数$y=f(\ln x)$且$f'(u)$存在，则$dy=$ $\underline{\quad \frac{f'(\ln x)}{x}dx\quad}$.

5. 曲线$x^y=y^x$在点(1,1)的切线方程为 $\underline{\quad y=x\quad}$.

三、（8 分） 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$.

解： 由于$\frac{1}{n^2+n+n}\sum_{k=1}^{n}k\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}\sum_{k=1}^{n}kk$， （ 分）

且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+n+n}\sum_{k=1}^{n}k=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+4}=\frac{1}{2}$

及 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+n+1}\sum_{k=1}^{n}k=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+2n+2}=\frac{1}{2}$,

故由夹逼准则可得，原式极限为$\frac{1}{2}$. （ 分）

四、（8 分） 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

解： 原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})x^3}$ （4 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\frac{1}{2}x^2}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})x^3}$

$=\frac{1}{4}$. （8 分）

五、（8 分） 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\cos x)}{e^{x^2}-1}$，其中$f(1)=0$，$f'(1)=-2$.

解： 原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f\big(1+(\cos x-1)\big)-f(1)}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{e^{x^2}-1}$ （3 分）

$=f'(1)\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{e^{x^2}-1}$ （6 分）

$=\frac{-1}{2}f'(1)=1$ （8 分）

六、（8 分） 求函数$y=\arctan\frac{1}{x}+\ln\left|x-\sqrt{1+x^2}\right|$的一阶导数.

解： 令$y_1=\arctan\frac{1}{x}$，则$y_1{}'=\frac{-1}{1+x^2}$. （分）

再令$y_2=\ln\left|x-\sqrt{1+x^2}\right|$，则$y_2{}'=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$.

故$y'=y_1{}'+y_2{}'=-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. （ 分）

七、(**8 分**)设函数$y = y(x)$由参数方程$\begin{cases} x = 1 - t^3 \\ y = t^4 - t^3 \end{cases}$，$t \neq 0$确定，求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：由于$\frac{dx}{dt} = -3t^2$，$\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 3t^2$，那么 （ 分）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3-3t^2}{-3t^2} = \frac{3-4t}{3},$$ （分）

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4}{3}}{-3t^2} = \frac{4}{9t^2}\ .$$ （ 分）

八、(**10 分**)设$x_1 = 1$，$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2+x_n}$，讨论数列$\{x_n\}$的极限是否存在，若存在，求出此极限.

解：因为$x_1 = 1$，$x_2 = \frac{4}{3} > x_1$，假设$x_k > x_{k-1}$成立，则$x_{k+1} - x_k = \frac{2(x_k-x_{k-1})}{(2+x_k)(2+x_{k-1})} > 0$，

故由数学归纳法可知，$\{x_n\}$为单调递增数列. （ 分）

对任意$n \in N_+$，$x_n < 2$. 故$\{x_n\}$有上界.

根据单调有界准则，$\{x_n\}$ 的极限存在. （ 分）

对$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2+x_n} = 2 - \frac{2}{2+x_n}$两边取极限，

解得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$（舍去$-\sqrt{2}$）. （ 分）

九、(**12 分**)指出函数$f(x) = \frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}$的间断点，判断其类型并说明理由.

解：由于$f(0^+) = -1$，$f(0^-) = 1$故$x = 0$为$f(x)$的跳跃间断点. （ 分）

由于$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \frac{1}{2}$，故$x = -1$为$f(x)$的可去间断点； （ 分）

由于$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$，故$x = 1$为$f(x)$的无穷间断点. （ 分）

十、（8 分） 设$0 < a < b$，函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=0$，且存在$c \in (a,b)$，使得$f(c)f(b) < 0$，证明至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证： 由于函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且存在$c \in (a,b)$，使得$f(c)f(b) < 0$，

故由零点定理可知，存在$\eta \in (c,b)$，使得$f(\eta)=0$.（4 分）

令函数$F(x)=xf(x)$，则$F(x)$在$[a,\eta]$上连续，在(a,η)内可导，

且$F(a)=F(\eta)=0$，故由罗尔定理可知，存在$\xi \in (a,\eta) \subset (a,b)$，

使得$F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.（8 分）