福建师范大学 公共课（数统） 学院

2023—2024 学年第一学期 高等数学 A 期中考试

知明行笃 立诚致广

考生信息栏 学院＿＿＿＿ 系＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿

装 订 线

专　　业： 全校性专业　　　　**年　　级：** 2023 级

课程名称： 高等数学 A　　　　**任课教师：** 蔡裕华等

试卷类别： 开卷（ ）闭卷（√）　　　　**考试用时：** 120 **分钟**

考试时间： 2023 **年** 12 **月** 2 **日** 上 **午** 9 **点** 00 **分**

题号	一	二	三	四	五	六	总分	评卷人
得分								

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 以下四个选项中，极限不存在的是（　　　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$　　　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$　　　　D. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5e^x}{3x+7e^x}=$（　　　　）.

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{5}{7}$　　C. 1　　D. 不存在

3. 当$x\to 0$时，函数$f(x)=\tan x-\sin x$是x的（　　　　）阶无穷小量.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 设$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3}{x+2}-ax-b\right)=2$，则（　　　　）.

A. $a=4$，$b=-10$　　　　B. $a=4$，$b=-2$

C. $a=-4$，$b=2$　　　　D. $a=-4$，$b=10$

5. 设函数$f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\geq 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$，则$f(x)$在$x=0$处（　　　　）.

A. 极限不存在　　　　B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导　　　　D. 可导

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数$f(x)$在区间$(-1,0)$上满足$\frac{x^2+x-2}{x+3}\leq\frac{f(x)}{x^2}\leq\frac{x^2+2x-1}{x+3}$且极限$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$存在，则

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=$ ________________.

2. 设$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=a$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=b$，则$a+b=$ __________.

3. 设函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上可导，且有$f(1)=f'(-1)=-f'(1)=-1$，则$f\big(f(x)\big)$在$x=1$处

的导数为 ________________.

4. 设函数$y=\ln(\sin x)$，则$dy=$ ________________________.

5. 曲线$(1+x)^y=y^{(1+x)}$在点$(0,1)$的切线方程为 ______________.

三、（8 分） 求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

四、（8 分） 求极限$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

五、（8 分） 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{e^{2x}-1}$，其中$f(0)=0$，$f'(0)=3$.

六、（8 分） 求函数$y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+(\arctan x)^2$的一阶导数.

七、（8 分） 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2(1-\sin t)\\y=3(1-\cos t)\end{cases}$，$t\neq\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$，$n\in\mathbf{Z}$确定，求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$.

八、（10 分） 设$x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$，讨论数列$\{x_n\}$的极限是否存在，若存在，求出此极限.

九、（12 分） 指出函数$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$的间断点，并判断其类型.

十、（8 分） 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，$f(a)=0$，且存在$c\in(a,b)$，使得$f(c)f(b)<0$，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=kf(\xi)$.