2025 — 2026 学年第一学期《高等数学 B》半期考

答案及评分标准

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1.数列$\{x_n\}$有界是$\{x_n\}$收敛的（ B ）条件.

A. 充分非必要 B.必要非充分 C. 充要 D.非充分非必要

2.设$x \to 0$时，$\tan x - \sin x$与x^n是同阶无穷小，则$n =$（ C ）.

A. 1 B.2 C. 3 D.4

3. $x = 0$是$f\left(x\right) = \dfrac{x}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$的（ A ）间断点.

A、可去 B、跳跃 C、无穷 D、振荡

4. 下列微分式正确的是（ A ）.

A. $dx = -d(2 - x)$ B. $xdx = dx^2$

C. $\cos 2xdx = d\sin 2x$ D. $dx^2 = (dx)^2$

5. 设$f'(1) = 2$，则$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(1 - x) - f(1)}{2x} =$ (D).

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

二、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，$f(x^2)$的定义域为_____$[-1,1]$________.

2. $\lim\limits_{x \to \infty}\sqrt{2 - \dfrac{\sin x}{x}} =$_____$\sqrt{2}$_____.

3. 若$x \to 0$时，$(1 - ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$与$x\sin x$是等价无穷小，则$a =$ ___-4_____.

4. $y = e^{1-2x}$，则$y^{(10)}(0) =$________$2^{10}e$____________.

5.曲线$y = \sqrt{x}$在点$(4,2)$处的切线方程是__________$-x + 4y - 4 = 0$.

三、（8 分） 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right).$$

解 $\because \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n)}<\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\dfrac{3}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}<\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$ ----------------4 分

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n)}=\dfrac{1}{2},\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\dfrac{1}{2},$ ----------------6 分

由夹逼定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\dfrac{3}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=\dfrac{1}{2}.$ ----------------8 分

四、（8 分） 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x\cdot\frac{1}{2}x\cdot(1+\sqrt{\cos x})}$ ----------------4 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\frac{1}{2}x\cdot(1+\sqrt{\cos x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(1+\sqrt{\cos x})}$ ----------------6 分

$=\dfrac{1}{2}$ ----------------8 分

五、（8 分） 求

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

解：

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{2^x+3^x-2}{3}\right)^{\frac{3}{2^x+3^x-2}\cdot\frac{2^x+3^x-2}{3x}}$ ----------------2 分

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{3x}}$ ----------------4 分

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{3x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{3x}} = e^{\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 3}{3}}$ ----------------6 分

$= \sqrt[3]{6}$. ----------------8 分

六、(8 分) 已知 $y = \arctan\frac{1}{x} + (1+x)^x + \ln\pi$，求 y'.

解 $y = \arctan\frac{1}{x} + e^{x\ln(1+x)} + \ln\pi$ ----------------2 分

$y' = -\frac{1}{x^2+1} + e^{x\ln(1+x)}(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}) + 0$ ----------------8 分

七、(8 分) 求由参数方程 $\begin{cases} x = 2-t^3, \\ y = t^3 - t^2, \end{cases}$ $(t \neq 0)$ 所确定的曲线 $y = f(x)$ 的一阶和二阶导数.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2-2t}{-3t^2} = -1 + \frac{2}{3t} = y'$； ----------------4 分

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{2}{3}\frac{1}{t^2}}{-3t^2} = \frac{2}{9t^4}$. ----------------8 分

八、(10 分) 设函数 $f(x) = \frac{e^x-1}{x(x-1)}$，求其定义域和间断点，并判断其间断点类型.

解: 函数 $f(x) = \frac{e^x-1}{x(x-1)}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$， ---------------2 分

所以间断点为 $x = 0$，$x = 1$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x-1)}=-1$, 所以 $x=0$ 为可去间断点;---------------6 分

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^x-1}{x(x-1)}=-\infty$ $\left[\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^x-1}{x(x-1)}=+\infty\right]$, 所以 $x=1$ 为无穷间断点. ---------------10 分

九、（12 分） 设函数 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & x<0 \\ e^x-1, & x\ge 0 \end{cases}$,

① 当 a,b 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

②当 a,b 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处有一阶导数；

③当 a,b 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数.

解 ①因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=0$， $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2+bx)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$

所以故当 b, a 为任意实数时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处有连续； ----------------4 分

② $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^2+bx}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b$ ----------------6 分

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有一阶导数，所以 $f'_+(0)=f'_-(0)$，从而 $b=1$，且 $f'(0)=1$，

故当 $b=1$, a 为任意实数时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处有一阶导数；----------------8 分

②又当 $x>0$ 时， $f'(x)=e^x$，当 $x<0$ 时， $f'(x)=2ax+b=2ax+1$，

即由①知 $f'(x)=\begin{cases}2ax+1, & x<0\\ e^x, & x\ge 0\end{cases}$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax}{x}=2a$， ----------------10 分

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数，所以 $f''_+(0)=f''_-(0)$，即 $2a=1$，从而 $a=\frac{1}{2}$，

所以当 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$ 时，为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数. ----------------12 分

十、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上连续，且 $f(0)=f(4)$，

证明：在 $[0,2]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+2)$.

证明 令 $F(x)=f(x)-f(x+2)$，则由题意知，$F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且

$$F(0)=f(0)-f(2),\ F(2)=f(2)-f(4)$$
$$F(0)F(2)=-[f(0)-f(2)]^2\le 0$$
----------------4 分

（1）若 $F(0)\cdot F(2)<0$，则由零点定理存在一点 $\xi\in(0,2)$ 使 $f(\xi)=f(\xi+2)$；

----------------6 分

（2）若 $F(0)\cdot F(2)=0$，则取 $\xi=0\in[0,2]$ 使 $f(\xi)=f(\xi+2)$.

----------------8 分