

# 福建师范大学 数学与统计 学院

## 2024—2025 学年第一学期考试 B 卷



知明行笃

信诚致广

栏  
学号 \_\_\_\_\_  
姓名 \_\_\_\_\_

栏

息  
专业 \_\_\_\_\_  
年级 \_\_\_\_\_  
信息

信

生  
系 \_\_\_\_\_  
专业 \_\_\_\_\_  
学生

考

学院 \_\_\_\_\_  
学院

线

订

装

专业: 全校性专业 年 级: 2024 级

课程名称: 高等数学 A 任课教师: 蔡裕华等

试卷类别: 开卷 ( ) 闭卷 (✓) 考试用时: 120 分钟

考试时间: 2025 年 1 月 2 日 上 午 9 点 00 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
考生须知	1. 答案一律写在答题纸上, 否则无效. 2. 答题要写清题号, 不必抄原题. 3. 考试结束, 试卷与答题纸一并提交.							

## 一、单选题（每题3分，共15分）

1. 设 $f(x)$ 有原函数，则 $f(x)$ 的任意两条不同积分曲线在相同横坐标下所对应的点上的切线（ C ）.
- A. 相互垂直      B. 平行 $x$ 轴  
C. 相互平行      D. 平行 $y$ 轴
2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} \right)$ 利用定积分可表示为（ A ）.
- A.  $\int_0^1 e^x dx$       B.  $\int_0^1 xe^x dx$   
C.  $\int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx$       D.  $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} dx$
3. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的偶函数且存在一个原函数 $F(x)$ ，则（ D ）.
- A.  $F(x) = F(-x)$       B.  $F(x) = F(-x) + c$   
C.  $F(x) = -F(-x)$       D.  $F(x) = -F(-x) + c$
4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界， $\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（ B ）.
- A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛      B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛  
C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛      D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛
5. 下列反常积分中收敛的是（ D ）.
- A.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$       B.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$   
C.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$       D.  $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

## 二、填空（每小题3分，共15分）

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2+2x}$ 的无穷间断点个数为 2.
2. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点为  $(2, 2e^{-2})$ .
3. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$ ，则 $f'(x) =$   $2x^{-3}$ .
4. 设函数 $f(x)$ 可导且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} = -1$ ，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极 大 值.
5. 根据定积分的几何意义 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx =$   $\frac{\pi}{4}$ .

三、(8分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1-\cos t) dt}{\int_0^x t(e^t-1) dt}$ .

解: 原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x(e^x-1)}$  (3分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot x} \quad (6 \text{分})$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (8 \text{分})$$

四、(8分) 求  $y = (\arctan \sqrt{1+x})^2$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

解:  $\frac{dy}{dx} = 2 \arctan \sqrt{1+x} (\arctan \sqrt{1+x})'$  (3分)

$$= 2 \arctan \sqrt{1+x} \frac{1}{2+x} (\sqrt{1+x})' \quad (6 \text{分})$$

$$= \frac{\arctan \sqrt{1+x}}{(2+x)\sqrt{1+x}}. \quad (8 \text{分})$$

五、(8分) 求不定积分  $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$ .

解: 原式 =  $\int \frac{x^3+x-x}{1+x^2} dx$   
=  $\int \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx$  (2分)  
=  $\int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2)$   
=  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$  (每个积分3分, 共8分)

六、(8分) 求定积分  $\int_1^e \sin(\ln x) dx$ .

解: 令  $u = \ln x$ , 则  $x = e^u$  且  $dx = e^u du$ .

当  $x = 1$  时,  $u = 0$ . 当  $x = e$  时,  $u = 1$ . (3分)

$$\int_1^e \sin(\ln x) dx = \int_0^1 e^u \sin u du \quad (6 \text{分})$$

$$= \frac{1}{2}e^u(\sin u - \cos u) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}e(\sin 1 - \cos 1). \quad (8 \text{分})$$

七、(10分) 判断曲线  $y = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}$  是否存在斜渐近线, 若有, 请求出斜渐近线方程.

解:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{2x+1}{x} = 2 \neq 0$ , 则曲线存在斜渐近线 (4分)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)e^{\frac{1}{x}} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} = 3, \quad (8分)$$

故曲线的斜渐近线为  $y = 2x + 3$ . (10分)

八、(10分) 设  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x(1+ax) = 1 + bx^2 + o(x^2)$ , 求常数  $a$  和  $b$ .

解: 由  $e^x$  的 3 阶带佩亚诺余项的麦克劳林公式  $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ , 有 (3分)

$$e^x(1+ax) = 1 + (1+a)x + \left(\frac{1}{2} + a\right)x^2 = 1 + bx^2 + o(x^2) \quad (6分)$$

比较同类项系数可得  $\begin{cases} 1+a=0 \\ \frac{1}{2}+a=b \end{cases}$ , (8分)

解得  $\begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ . (10分)

九、(10分) 证明曲线  $y = \ln x$  与直线  $y = \frac{x}{e} - 1$  有且仅有两个交点.

证: 令  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 1$ ,  $x > 0$  则  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ , 因此  $x = e$  为最大值点. (4分)

因为  $f(e) = 1 > 0$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . (8分)

故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有且仅有两个不同实根, 即两曲线有 2 个不同交点. (10分)

十、(8分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且  $f(x) > 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx.$$

证: 构造函数  $F(x) = \int_a^x f(x)dx - \int_x^b f(x)dx$ , (2分)

因为  $F(a)$  与  $F(b)$  异号, 且  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, (4分)

由零点定理可知,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 故  $\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx$ . (8分)