福建师范大学 公共课（数统） 学院

2023—2024 学年第二学期 高等数学 A 期中考试

知明行笃 立诚致广

专　　业： 全校性专业　　　　**年　　级：** 2023 级

课程名称： 高等数学 A　　　　**任课教师：** 蔡裕华等

试卷类别： 开卷（ ）闭卷（√）　　　　**考试用时：** 120 **分钟**

考试时间： 2024 **年** 4 **月** 27 **日** 下 **午**______**点**______**分**

题号	一	二	三	四	五	六	总分	评卷人
得分								

考生信息栏

学院______系______专业______年级______姓名______学号______

装订线

一、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\y=x\end{cases}$在$yOz$面上的投影方程为（　　　　）.

A. $\begin{cases}2x^2+z^2=1\\y=0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}2x^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$

C. $\begin{cases}2y^2+z^2=1\\x=0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}z=0\\y=x,\ -1\le x\le 1\end{cases}$

2. 函数组（　　　　）在任何区间上都是线性相关的.

A. $1,\ e^{x+x^{-1}+1},\ e^{x+x^{-1}-1}$

B. $1,\ \sin x,\cos x$

C. $1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^k$

D. $y_1(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x<0\\0, & 0\le x\le 1\end{cases}$, $y_2(x)=\begin{cases}0, & -1\le x<0\\x^2, & 0\le x\le 1\end{cases}$

3.（　　　　）是线性常微分方程.

A. $x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+xy-e^x=0$　　B. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-e^{2y}-\cos x=0$

C. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+e^xy=0$　　D. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy^2=0$

4. 设P是平面R^2上一点，$E\subset R^2$，以下结论正确的是（　　　　）.

A．若P是E的聚点，必有$P\in E$

B．若P是E的内点，则P也是E的聚点

C．若P是E的边界点，必有$P\in E$

D．若P是E的边界点，则它一定不是E的聚点

5. 设函数$z=f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的充分条件是（　　　　）.

A．$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续

B．$f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$在点$(0,0)$的某领域内存在

C．$f_x(0,0)$和$f_y(0,0)$存在

D．$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1．xOy面上直线l：$y=1-x$被圆$x^2+y^2=5$所截下的有限部分的长度为__________.

2．微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$的通解为________________________________.

3．设向量$\vec{a}=(2,1,2)$，$\vec{b}=(2,-1,5)$，$\vec{c}=\vec{a}-\lambda\vec{b}$且$\vec{c}$垂直于$y$轴，则$\lambda=$___________.

4．xOy面上曲线$y=e^{2x}$，直线$y=e$，$x=0$及$x=1$所围图形的面积为___________.

5．函数$z=e^{x+y^{-2}}$在点$(1,1)$处的全微分为______________________________.

三、（8 分）求xOy面上曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$分别绕$x$轴和$y$轴旋转所围几何体的体积$V_x$和$V_y$.

四、（8 分）求过直线l：$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$且垂直于平面$\Pi$：$x-y+2z-1=0$的平面方程.

五、（8 分）求空间曲线$\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=1\end{cases}\quad(0\le\theta\le 2\pi)$上的点到原点的最长距离和最短距离及其相应的$\theta$取值.

六、（8 分）求微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-12y=e^{2x}$的通解.

七、（8 分）设$z=f(u,x,y)$，$u=xe^{2y}$，其中f具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

八、（10 分）求解初值问题$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right)\\ x(0)=1\end{cases}$，其中$r$，$K>0$，并求$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$.

九、（12 分）设函数$f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+y^2\sin\frac{1}{y}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，探讨该函数在$(0,0)$处的连续性、偏导数的存在性、可微性以及偏导数的连续性.

十、（8 分）设$\Phi(u,v)$具有连续偏导数，证明由方程$\Phi(cx-az,cy-bz)=0$所确定的函数$z=f(x,y)$满足$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.