一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 $h(x)\le f(x)\le g(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-h(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$（　　）

A. 存在且为 0；　　　　　　　B. 存在但是不一定为 0；

C. 一定不存在；　　　　　　　D. 不一定存在.

2. 关于极限与连续，下列说法错误的是（　　）

A. 设 $f(x)$ 是 $x\to a$ 时的无穷小，则 $|f(x)|$ 也是 $x\to a$ 时的无穷小

B. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续

C. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处是间断点，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处也是间断点

D. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 必连续

3. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是(　　).

A. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；　　　B. $f(x)-f(0)=Ax+o(x)$，其中 A 是常数；

C. $f'_-(0)$ 与 $f'_+(0)$ 都存在；　　　D. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在.

4. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+a, & x\le 1\\ bx^2, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 可导，则有（　　）.

A. $a=1,b=-1$　B. $a=1,b=1$　C. $a=-1,b=1$　D. $a=-1,b=-1$

5. 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$，则下列命题正确的是（　　）

A. 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 必发散　　　B. 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 无界

C. 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 为无穷小　　　D. 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

二、填空（每小题 3 分，共 15 分）

1．当 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ ________.

2．$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=$ ________________.

3．设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2020)$,则 $f'(2020)=$ ________________.

4．设 $f(\ln x)=e+x$, 那么微分 $d[f(x)]=$ ____________.

5．设 $f(u)$ 可导，则函数 $y=\sin(f(2x))$ 的导数是________________.

三、计算题

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$．

2．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$．

3．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\tan x}-1)}$

4．求函数 $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 的导数 y'．

5．求函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+3^x+\sin 1$ 的一阶和二阶导数.

四（10 分）、求由参数方程 $\begin{cases}x=t+\cos t\\ e^y+ty+\sin t=1,\end{cases}$ 所确定的曲线 $y=f(x)$ 在 $t=0$ 处的切线方程.

五（12 分）、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，指出其类型.

六（8 分）、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$ $f(\frac{a+b}{2})f(b)<0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$．