# 福建师范大学 数学与统计 学院

# 2023—2024 学年第一学期考试 A 卷

知明行笃　立诚致广

专　业：全校性专业　　　　年　级：2023 级

课程名称：高等数学 A　　　任课教师：蔡裕华等

试卷类别：开卷（ ）闭卷（√）　　考试用时：120 分钟

考试时间：2024 年 1 月 17 日 上 午 9 点 00 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

| 考生须知 | 1. 答案一律写在答题纸上，否则无效.<br>2. 答题要写清题号，不必抄原题.<br>3. 考试结束，试卷与答题纸一并提交. |
|---|---|

考生信息栏

学院＿＿＿＿系＿＿＿＿专业＿＿＿＿年级＿＿＿＿姓名＿＿＿＿学号＿＿＿＿

装　订　线

**一、单选题（每题 3 分，共 15 分）**

1. 设$f(x)=|x|e^{x}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　　　）.

A．可导　　　　B．极限不存在

C．连续但不可导　　　　D．不连续

2. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，其中$p>0$，利用定积分可表示为（　　　　）.

A．$\int_0^1 x^{-p}\mathrm{d}x$　　B．$\int_0^1 x^{p}\mathrm{d}x$　　C．$\int_0^1 (1+x)^{-p}\mathrm{d}x$　　D．$\int_0^1 (1+x)^{p}\mathrm{d}x$

3. 设$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是（　　　　）.

A．$f(x)$为奇函数⇒$\varphi(x)$为偶函数　　　　B．$f(x)$为奇函数⇒$\varphi(x)$为奇函数

C．$f(x)$为偶函数⇒$\varphi(x)$为偶函数　　　　D．以上都不对

4. 设$f(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathrm{Q}\\ 0, & x\in \mathrm{Q}^{\mathrm{c}}\end{cases}$，则下列叙述正确的是（　　　　）.

A．$f(x)$有最小正周期　　　　B．$f(x)$是初等函数

C．$f(x)$处处不连续　　　　D．$f\big(f(x)\big)$处处不连续

5. 下列反常积分中收敛的是（　　　　）.

A．$\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　B．$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$　　C．$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$　　D．$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$

**二、填空（每小题 3 分，共 15 分）**

1. 设$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则$x=0$是$f(x)$的__________________间断点.

2. 设$y=f^2(\sin x)$，其中 $f$ 可导，则$\mathrm{d}y=$__________________.

3. 曲线$y=\frac{x^2}{1+2x}$的斜渐近线方程为__________________.

4. 设$f(x)$的导数为$\sec^2 2x$，则$f(x)=$__________________.

5. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{-x}^{1}f(t)\mathrm{d}t\right)=$__________________.

**三、（8 分）**求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$.

**四、（8 分）**判断函数$f(x)=\int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$是否有极大（小）值，若有请求出极值并说明理由.

**五、（8 分）**求不定积分$\int\frac{\tan x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

**六、（8 分）**求定积分$\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$.

**七、（8 分）**设函数$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$y''(0)$.

**八、（10 分）**求函数$y=\ln(1+x^2)$的一阶导数、二阶导数，并列表说明其凹凸区间.

九、（**12 分**）设$f(\cos^2 x)=\cos 2x+\cot^2 x$，$0<x<1$，

（1）求函数$f(x)$；（2）求$\int f(x)\mathrm{d}x$.

**十、（8 分）**设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(b),$$

证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=0$.