2020— 2021 学年第一学期《高等数学 A》期末考试

试题A

一、单选题(每小题 3 分，共 15 分)

1．以下选项不是一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解的是（ ）.

A. $e^{-F(x)}\cdot(\int Q(x)e^{F(x)}dx+C)$，其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数

B. $e^{-F(x)-C}\cdot(\int Q(x)e^{F(x)+C}dx+C)$，其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数

C. $e^{-F(x)+C}\cdot(\int Q(x)e^{F(x)+C}dx+C)$，其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数

D. $e^{-F(x)+C}\cdot(\int Q(x)e^{F(x)-C}dx+C)$，其中 $F(x)$ 为 $P(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数

2. 设 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$，则 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处沿增加最快的方向的方向导数为( ).

A. 2； B. $\sqrt{2}$； C. 0； D. $-\sqrt{2}$.

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)=$（ ）.

A. $f(2)$； B. $2f(2)$； C. $-f(2)$； D. 0.

4. 设曲面 Σ 是抛物面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xoy 面上方的部分，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分，则下列式子中成立的是（ ）.

A. $\iint\limits_{\Sigma} xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$； B. $\iint\limits_{\Sigma} ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1} ydS$；

C. $\iint\limits_{\Sigma} xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$； D. $\iint\limits_{\Sigma} zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1} zdS$.

5. 设 $u_n=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$，则级数 （ ）.

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛 B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散 D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

二、填空(每小题 3 分，共 15 分)

1．微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{e^x}$ 的通解为________．

2．设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，$z=f(x,y)$ 是由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数，则 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=$___________．

3．化二次积分 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ 为极坐标形式的二次积分，则

$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=$_________．

4．第二类曲线积分 $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 化为第一类曲线积分是

________________________________．

5．如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-2019)$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=$_____________．

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1．求微分方程 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$ 的通解.

2. 求函数 $u=f(x^2+y^2+z^2,xyz)$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$，其中 f 具有二阶连续偏导数.

3. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内部的那部分面积.

4. 求曲线积分 $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$，其中 L 沿 $x^2+y^2=a^2(x\ge 0,y\ge 0)$，逆时针方向.

5．将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

四、（10 分） 计算第二类曲面积分 $I=\iint_\Sigma (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ是曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$被平面z=2所截部分的外侧.

五、（10 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的和函数，并给出收敛域.

六、（10 分） 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=4$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最小值和最大值.