

## 2022—2023 第二学期《高等数学 B》期末

### 试题(B) 答案及评分标准

#### 一、单选题(每小题3分, 共15分)

1. 已知  $y''+y=x$  的一个解为  $y_1=x$ ,  $y''+y=2e^x$  的一个解为  $y_2=e^x$ , 则方程  $y''+y=x+2e^x$  的通解为 ( )
- A.  $y=x+e^x$       B.  $y=C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x + x$   
C.  $y=C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$       D.  $y=C_1 \cos x + C_2 \sin x$
2. 设直线的方程为  $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ , 则该直线一定 ( ).
- A. 不过原点且垂直于  $x$  轴      B. 不过原点且垂直于  $z$  轴  
C. 过原点且垂直于  $x$  轴      D. 过原点且垂直于  $y$  轴
3. 函数  $z=x^3+y^3$  和  $z=(x^2+y^2)^2$  在  $(0,0)$  处有 ( )
- A. 这两个函数都无极值      B. 这两个函数都有极值  
C.  $z=x^3+y^3$  有极小值, 而  $z=(x^2+y^2)^2$  无极值  
D.  $z=x^3+y^3$  无极值, 而  $z=(x^2+y^2)^2$  有极小值
4. 设区域  $D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 4, x\geq 0, y\geq 0\}$ ,  $f(x)$  为  $D$  上的正值连续函数,  $a, b$  为常数, 则  $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}} d\sigma =$  ( )
- A.  $ab\pi$       B.  $\frac{ab}{2}\pi$       C.  $(a+b)\pi$       D.  $\frac{a+b}{2}\pi$
5. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha + \cos n\alpha}{n^2}$  的收敛性 ( ), 其中  $\alpha$  为常数.
- A. 绝对收敛      B. 条件收敛      C. 发散      D. 无法判断

#### 二、填空(每小题3分, 共15分)

1. 曲面  $x^2-y^2-z^2=1$  可由  $xOy$  面上的曲线 \_\_\_\_\_ 绕  $x$  轴旋转一周得到.
2. 已知微分方程  $y''+ay'+by=0$  的通解为  $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$ , 则该微分方程为 \_\_\_\_\_.

3. 函数  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  在点  $(1, 1)$  处沿下降最快的方向的方向导数为 \_\_\_\_.

4.  $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{y^2} dy = _____$ .

5. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = _____$ .

**三、(8分)** 求微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2}$  的通解.

**四、(8分)** 设  $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g(x)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数,  $g$  具有二阶

连续导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**五、(8分)** 计算二重积分  $\iint_D (x^2 + 3x + 4y - 6) dxdy$ , 其中  
 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

**六、(8分)** 求椭球面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 498$  上平行于平面  $x + 3y + 5z = 0$  的切平面方程.

**七、(8分)** 将函数  $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$  展开成  $x$  的幂级数, 并求  $f^{(2023)}(0)$ .

**八、(10分)** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)x^n$  的和函数, 并给出收敛域..

**九、(10分)** 设函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2xy} \sin(x^2 y), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ ,

(1) 该函数在点  $(0, 1)$  是否连续? 为什么?

(2) 求  $f_x(0, 1)$ ,  $f_y(0, 1)$ .

**十、(10分)** 已知空间曲线  $C$  的一般方程为:  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$ , 求该空间曲线  $C$  上距离  $xoy$  平面最远的点和最近的点.