



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Escola Universitària  
Politécnica de Barcelona

Departament  
de Física  
Aplicada

A Q.1B  
Física Aplicada

## CORRIENTE ALTERNA

TEORIA Y PROBLEMAS

Pere Castellvi  
Angelina Peñaranda

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
Biblioteca



1400507531

## PROLOGO

El objeto de estas notas es proporcionar a los estudiantes de Física de primer curso de Arquitectura Técnica de la EUPB un material que pueda ayudarles en la preparación del tema de Corriente Alterna.

La exposición se ha dividido en dos partes claramente diferenciadas. En la primera se exponen de manera muy breve los conceptos fundamentales de Electromagnetismo que se utilizarán posteriormente. La segunda parte está dedicada al estudio de las corrientes alternas y a algunas de sus aplicaciones más elementales y constituye el núcleo de estas notas.

Aunque el programa de Física de primer curso de Arquitectura Técnica no recoge ningún tema dedicado al campo eléctrico, los condensadores, la corriente eléctrica o la autoinducción ha parecido conveniente incluir una pequeña introducción a estos conceptos. Los motivos son varios: nivelar los conocimientos de los alumnos, efectuar un breve repaso, unificar notación e introducir las unidades correctamente. *Al final de esta parte se ha incluido una pequeña lista de ejercicios con soluciones que al resolverlos han de proporcionar al alumno la seguridad suficiente para poder pasar al estudio de las corrientes alternas.* Aquellos que consideren que su nivel es el adecuado pueden pasar directamente a la segunda parte y volver atrás si en algún momento les es necesario.

En la segunda parte se ha tenido que decidir entre utilizar Números Complejos o el método de los vectores rotatorios. El hecho de que la asignatura sea de primer curso y el nivel matemático de los alumnos han aconsejado la segunda posibilidad, por otra parte, ampliamente utilizada en ambientes de tipo ingenieril.

Otra cuestión importante es la referente a las unidades. Se ha utilizado única y exclusivamente el Sistema Internacional de unidades y se ha incluido una tabla en la que para cada magnitud se muestra la unidad a utilizar y su relación con las unidades fundamentales.

## INDICE

### PARTE I. FUNDAMENTOS

1. Campo eléctrico . . . . .	-1-
2. Potencial eléctrico . . . . .	-3-
3. Condensadores y capacidad . . . . .	-5-
4. Corriente eléctrica . . . . .	-8-
5. Energía y fuerza electromotriz . . . . .	-10-
6. Circuitos de corriente continua . . . . .	-12-
7. Campo magnético . . . . .	-14-
8. Campo magnético de una corriente estacionaria . .	-16-
9. Inducción electromagnética . . . . .	-17-

### PARTE II. CORRIENTE ALTERNA

1. Generador de corriente alterna . . . . .	-22-
2. Corriente alterna en una resistencia . . . . .	-25-
3. Corriente alterna en una bobina (autoinducción) .	-26-
4. Corriente alterna en un condensador . . . . .	-27-
5. Representación vectorial de Fresnel . . . . .	-29-
6. Circuito RLC serie. Resonancia . . . . .	-35-
7. Circuito RLC paralelo . . . . .	-39-
8. Circuitos generales . . . . .	-41-
9. Potencia en circuitos de corriente alterna . . .	-41-
10. Corrientes trifasicas . . . . .	-45-
11. Montaje en triángulo . . . . .	-49-

APENDICE. TRANSFORMADOR . . . . .	-51-
-----------------------------------	------

PARTE III. PROBLEMAS RESUELTOS. . . . .	-55-
---	------

BIBLIOGRAFIA . . . . .	-80-
------------------------	------

PARTE I  
FUNDAMENTOS

## 1. Campo eléctrico

Según la ley de Coulomb, dos cargas puntuales se ejercen entre sí una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y directamente proporcional al producto de la magnitud de las cargas. Esta fuerza está dirigida según la recta que une ambas cargas y es atractiva cuando estas tienen signos diferentes y repulsiva si son del mismo signo. Podemos escribir esta ley en forma vectorial como sigue:

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{n} \quad (1)$$

Esta expresión da la fuerza que la carga  $q_2$  ejerce sobre la  $q_1$ ;  $K$  es la constante de proporcionalidad,  $\mathbf{n}$  es un vector unitario dirigido de  $q_2$  a  $q_1$  que puede expresarse como  $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) / |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ , donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son los vectores de posición de las cargas y  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  es la distancia que las separa (fig. 1).

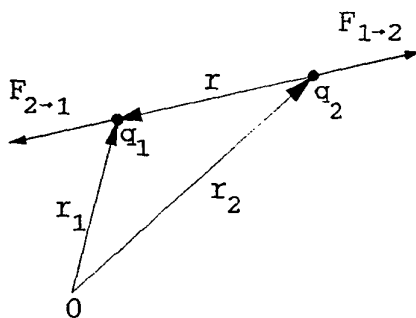


Fig. 1

En todo lo que sigue utilizaremos el SI (Sistema Internacional) de unidades. En este sistema la fuerza se mide en *newtons* (N), la longitud en *metros* (m) y la unidad de carga eléctrica es el *coulomb* (C). En este sistema de unidades, la constante  $K$ , que se determina experimentalmente, vale  $K = 8.987 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$  aunque para la mayoría de los cálculos puede tomarse  $K = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ . En algunos casos, para simplificar las expresiones que aparecerán posteriormente, se toma

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2)$$

siendo  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{C}^2$  la *permitividad del vacío*.

Cuando hay presentes más de dos cargas la fuerza total que actúa sobre una carga es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por todas las demás sobre ella. Este es el llamado *Principio de Superposición*.

La descripción de la interacción entre cargas eléctricas también puede efectuarse mediante el importante concepto de *campo eléctrico*. En lugar de pensar que dos cargas se atraen (o repelen) porque se ejercen fuerzas a distancia, puede suponerse que lo que ocurre es que cada carga

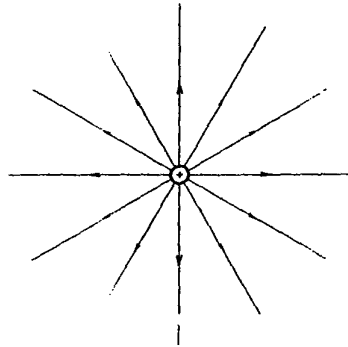


Fig. 2

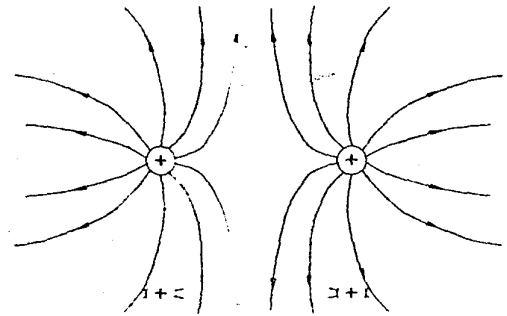


Fig. 3

altera las propiedades del medio que la rodea creando a su alrededor un campo eléctrico. A su vez, cada carga nota el campo eléctrico que producen las demás y, como consecuencia, se ve sometida a una fuerza que es el producto de la intensidad del campo eléctrico por la magnitud de la carga. El valor en un punto del campo eléctrico debido a una serie de cargas es el cociente  $F/q_0$ , siendo  $F$  la fuerza (vectorial) que notaría una carga positiva de prueba  $q_0$  situada en dicho punto. Por ejemplo, una carga  $q$  situada en el origen de coordenadas crea en el punto  $r=(x,y,z)$  un campo eléctrico de intensidad  $E(r)=E(x,y,z)$  dada por

$$E(r) = K \frac{q}{r^3} r \quad (3)$$

y una carga  $q'$  situada en el punto  $r$  está sometida a una fuerza

$$F = E q' \quad (4)$$

La unidad de intensidad de campo eléctrico es  $N \cdot C^{-1}$ . Como ayuda para visualizar el campo eléctrico se utilizan las *líneas de fuerza*. Una línea de fuerza es una línea imaginaria trazada de tal manera que su dirección y sentido en cualquier punto sean los del campo eléctrico en dicho punto y que el número de líneas de fuerza sea proporcional a la intensidad del campo eléctrico. Así, por ejemplo, las líneas de fuerza asociadas al campo eléctrico creado por una carga puntual positiva  $q$  son radiales y dirigidas hacia fuera de  $q$ ; si la carga fuese negativa las líneas seguirían siendo radiales pero ahora dirigidas hacia  $q$ . En las

fig. 2 y 3 pueden observarse las líneas de fuerza correspondientes a dos distribuciones sencillas de carga.

## 2. Potencial eléctrico

Consideremos una carga  $q_0$  en un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ ; la fuerza sobre la carga es  $q_0\mathbf{E}$ . Para mover la carga (con velocidad constante) debe ejercerse una fuerza  $-q_0\mathbf{E}$  sobre ella. Si efectuamos un pequeño desplazamiento  $d\mathbf{l}$  de la carga, el trabajo realizado  $dW = -q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  (producto escalar) es igual al incremento de energía potencial  $dU$  de la carga. Si la carga se desplaza desde un punto inicial  $a$  hasta otro final  $b$  la variación de energía potencial es

$$\Delta U = U_b - U_a = - \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5)$$

donde la integral debe calcularse a lo largo de la trayectoria que se ha seguido para mover la carga desde  $a$  hasta  $b$ . Sin embargo, se demuestra que, por ser el campo electrostático conservativo, el resultado es el mismo si se calcula la integral a lo largo de cualquier trayectoria que una  $a$  y  $b$ . Se define la *diferencia de potencial eléctrico*  $\Delta V$  como el incremento de energía potencial por unidad de carga

$$\Delta V = V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (6)$$

Obsérvese que hemos definido la *variación* de potencial eléctrico ( $\Delta V$ ) antes que el propio potencial eléctrico ( $V$ ). Esto es debido a que la magnitud que realmente tiene interés en Física es la variación y no el valor del potencial en sí mismo. Generalmente se elige  $V$  de manera que sea cero en algún punto adecuado como por ejemplo el infinito.

En el SI el potencial eléctrico se mide en julios/coulombios o  $J \cdot C^{-1}$ , unidad que recibe el nombre de *voltio*, abreviado  $V$ . Esto permite utilizar otra unidad, el  $V/m$  para la intensidad de campo eléctrico. En efecto, tenemos

$$\frac{1 N}{1 C} = \frac{1 J/1 m}{1 C} = \frac{1 J/1 C}{1 m} = \frac{1 V}{1 m} \quad (7)$$

Si liberamos una carga  $q$  (positiva) en un campo eléctrico partiendo del reposo se acelerará debido a una fuerza  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  y seguirá una trayectoria que coincidirá con una línea de fuerza. Puesto que la fuerza electrostática es conservativa, se conservará la energía de la partícula y, como la energía cinética aumenta, la potencial debe disminuir, por

lo que las líneas de fuerza señalan en la dirección en la que disminuye el potencial eléctrico.

Las superficies en las que el valor del potencial es el mismo en todos sus puntos se llaman *superficies equipotenciales*. Por ejemplo, para una carga  $q$  situada en el origen de coordenadas el valor del potencial eléctrico es

$$V(r) = K \frac{q}{r} \quad (8)$$

como puede verse, el potencial eléctrico sólo depende de la distancia al origen, de manera que las superficies equipotenciales serán esferas

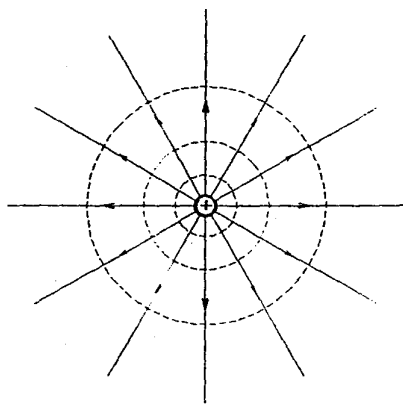


Fig. 4

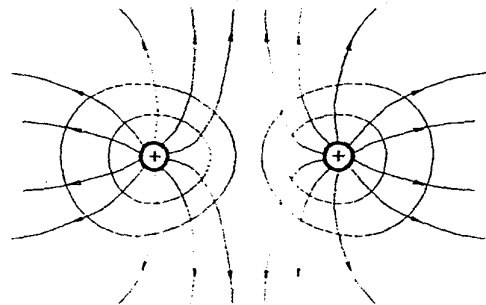


Fig. 5

con centro en  $q$ . Si  $q$  es positiva las líneas de fuerza se alejan de la carga y, como además, según (8), el valor del potencial disminuye al aumentar  $r$ , comprobamos nuevamente que las líneas de fuerza (y con ellas el campo y las cargas en movimiento) se dirigen de puntos de mayor potencial hacia los de menor potencial. En las fig. 4 y 5 pueden verse las superficies equipotenciales correspondientes a los campos eléctricos de las fig. 2 y 3.

Otro caso sencillo y que resultará útil más adelante es el de un campo eléctrico uniforme (fig. 6) que podemos tomar dirigido según el sentido positivo del eje  $x$ :  $E = (E, 0, 0)$ ,  $E = \text{cte}$ . En este caso, las superficies equipotenciales son planos perpendiculares al eje  $x$ . La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera  $a$  y  $b$  pertenecientes a dos planos distintos es

$$V_b - V_a = - \int_a^b E dx = -E(x_b - x_a) \quad (9)$$

Puesto que  $x_b > x_a$ , resulta  $V_b < V_a$ , con las líneas de fuerza dirigidas del



plano que contiene a al que contiene b. Si además designamos por  $\Delta x$  la separación entre los dos planos y por  $\Delta V$  la variación en valor absoluto del potencial obtenemos la importante expresión

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x} \quad (10)$$

que da la variación del potencial con la distancia en un campo eléctrico uniforme.

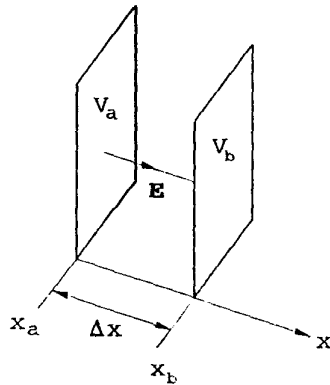


Fig. 6

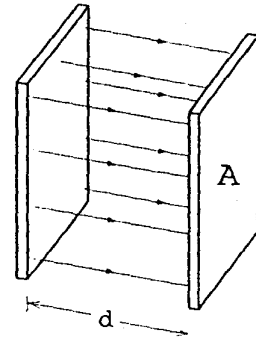


Fig. 7

### 3. Condensadores y capacidad

Un condensador es un dispositivo que sirve para almacenar carga y energía. Está constituido por dos conductores separados entre sí por un material aislante y cargados con cargas iguales y de signo opuesto. Generalmente, los dos conductores son dos placas paralelas, dos cilindros coaxiales o dos esferas concéntricas.

Supongamos que se depositan cargas  $+Q$  y  $-Q$  respectivamente sobre los conductores y que éstos adquieren potenciales  $V_1$  y  $V_2$ . Llamando  $V = V_1 - V_2$  a la diferencia de potencial entre ambas placas se observa experimentalmente que existe la siguiente relación entre  $Q$  y  $V$

$$Q = CV \quad (11)$$

La constante de proporcionalidad  $C$  es la *capacidad* del condensador. La capacidad de un condensador depende de la forma geométrica de las placas, de su tamaño, de la disposición relativa y del medio existente entre las placas. Para un condensador de placas paralelas, cada una de ellas de área  $A$  y separadas una distancia  $d$  (fig. 7), la capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (12)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío. Si el condensador está formado

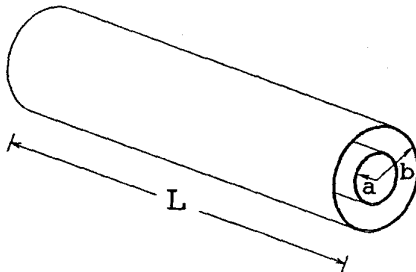


Fig. 8

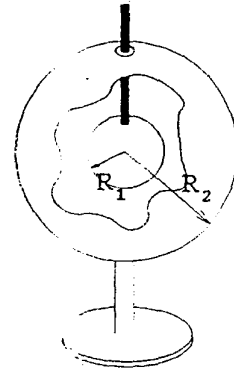


Fig. 9

por dos cilindros coaxiales de longitud  $L$  y radios  $a$  y  $b$  (fig. 8) entonces la capacidad es

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (13)$$

Y para un condensador constituido por dos esferas concéntricas de radios  $R_1$  y  $R_2$  (fig. 9) tenemos

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (14)$$

La unidad SI de capacidad es el *faradio* (F)

$$1F = \frac{1C}{1V} \quad (15)$$

El F es una unidad excesivamente grande. En efecto, para conseguir un condensador de capacidad 1 F utilizando dos placas paralelas separadas 1 mm el área de las placas ha de ser de aproximadamente  $10^8 \text{ m}^2$ , lo cual supone una placa cuadrada de 10 km de lado. Por esta razón suelen utilizarse los submúltiplos del F, el *microfaradio* ( $1 \mu F = 10^{-6} \text{ F}$ ), el *nanofaradio* ( $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$ ) y el *picofaradio* ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ).

Como hemos dicho al principio, los condensadores se utilizan para almacenar carga. Si para almacenar una gran cantidad de carga utilizamos, por ejemplo, una pequeña esfera aislada de radio  $R$ , el potencial ( $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$ ) aumentará a medida que carguemos la esfera

produciendo campos eléctricos tan intensos que podría llegar a escapar carga en forma de chispas. Sin embargo, si utilizamos un condensador con una capacidad  $C$  muy grande el potencial no aumentará demasiado. Para conseguir una capacidad muy grande podemos tomar dos placas de gran superficie separadas una distancia muy pequeña, introducir entre ellas una fina capa de aislante y enrollarlo en forma de cilindro. Para cargar un condensador es necesario transferir carga de una placa a otra de modo que, finalmente, una tenga carga  $+Q$  y otra  $-Q$ . Esto requiere que se realice un trabajo externo, parte del cual queda almacenado en el condensador en forma de energía potencial electrostática. Un cálculo sencillo muestra que la energía acumulada vale

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (16)$$

siendo esta expresión independiente de la forma del condensador.

Cuando un condensador forma parte de un circuito eléctrico se indica con el símbolo  $\parallel$ . En los circuitos suelen combinarse dos o más condensadores conectando uno de los conductores del primer condensador a un conductor del segundo. Existen dos formas de asociar condensadores: en serie (fig. 10) y en paralelo (fig. 11). Estos dos tipos de asociación pueden combinarse entre sí para obtener cualquier circuito.

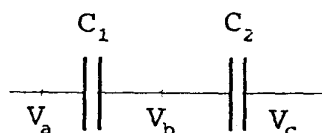


Fig. 10

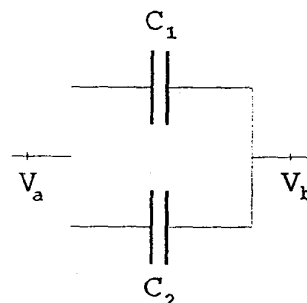


Fig. 11

Una vez hecha una asociación de condensadores interesa conocer la *capacidad efectiva*, es decir, la capacidad de un único condensador que, sometido a la misma ddp que el sistema, adquiriera idéntica carga. En una asociación en serie de dos condensadores, de capacidades  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente, el primero está sometido a una diferencia de potencial  $V_a - V_b$  y adquiere una carga  $Q = C_1(V_a - V_b)$ , es decir,  $+Q$  en la placa izquierda y  $-Q$  en la derecha. Análogamente, en el segundo, la ddp es  $V_b - V_c$  y la carga sobre la placa izquierda  $+Q$  y sobre la derecha  $-Q$ . La diferencia de potencial total es

$$V_a - V_c = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (17)$$

llamando  $V$  a esta diferencia de potencial y  $C$  la capacidad efectiva, tenemos

$$V = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C} \quad (18)$$

luego

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (19)$$

Si la asociación es en paralelo, los dos condensadores están sometidos a la misma diferencia de potencial y tenemos  $Q_1 = C_1 V$  y  $Q_2 = C_2 V$ . La carga total almacenada es

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V \quad (20)$$

y, por tanto, la capacidad efectiva

$$C = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \quad (21)$$

Evidentemente estas expresiones pueden extenderse a tres o más condensadores con sólo añadir los términos necesarios en el miembro de la derecha.

#### 4. Corriente eléctrica

Una *corriente eléctrica* es un conjunto de partículas cargadas en movimiento. A pesar de que las corrientes eléctricas pueden aparecer en

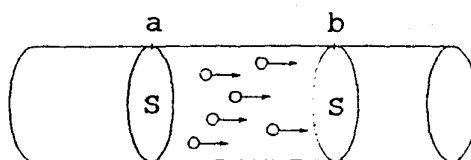


Fig. 12

muchas y muy variadas situaciones, nosotros sólo estudiaremos el caso de corrientes eléctricas en un conductor en forma de hilo. Consideremos,

por tanto, un alambre conductor de sección recta  $S$  (fig. 12). Si durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  atraviesa el área  $S$  una carga  $\Delta Q$ , la intensidad de la corriente eléctrica  $I$  se define como el cociente  $\Delta Q/\Delta t$ , es decir, carga que atraviesa  $S$  por unidad de tiempo. Muchas veces sucede que  $I$  no es constante (p.e. en corrientes alternas) y entonces conviene adoptar una definición que proporcione el valor instantáneo de la intensidad  $I(t)$ ; para ello sólo hay que tomar el límite en la anterior definición cuando  $\Delta t$  tiende a cero y obtenemos

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (22)$$

Esta es la definición general de intensidad de corriente eléctrica. La unidad SI de corriente es el *amperio* (A)

$$1A = \frac{1C}{1s} \quad (23)$$

Se toma como sentido de la corriente el del movimiento de las cargas positivas. En los conductores metálicos, los portadores de carga son electrones y, por tanto, el sentido de la corriente es opuesto al del verdadero movimiento de cargas.

Si por un conductor circula una corriente es porque en su interior existe un campo eléctrico. La dirección de la corriente coincide con la del campo. Consideremos un alambre de longitud  $L$  como el de la fig. 12 por el cual circula una corriente de intensidad  $I$ . Según hemos visto antes, si el campo está dirigido de  $a$  a  $b$  el potencial en  $a$  es mayor que en  $b$  y por (10) sabemos que

$$\Delta V = V_a - V_b = EL \quad (24)$$

donde  $E$  es el campo eléctrico. Es un hecho experimental llamado *ley de Ohm* que la diferencia de potencial entre dos puntos es proporcional a la intensidad que circula por el circuito

$$\Delta = \quad (25)$$

La constante de proporcionalidad  $R$  se denomina resistencia y su unidad en el SI es el *ohmio* ( $\Omega$ )

$$1\Omega = \frac{1V}{1A} \quad (26)$$

La resistencia de un alambre conductor depende de la longitud, de la sección y del material y puede expresarse como

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (27)$$

donde  $\rho$  es una característica del material denominada *resistividad* y cuya unidad en el SI es el ohmio-metro ( $\Omega \cdot m$ ).

## 5. Energía y fuerza electromotriz

En el interior de un conductor por el que circula una corriente eléctrica hay cargas en movimiento debido a la existencia de un campo eléctrico. Este campo eléctrico tiende a acelerar los electrones libres aumentando su energía cinética, pero en los choques entre ellos y con la red de iones, los electrones pierden parte de su energía cinética en forma de calor. De esta forma, se alcanza un equilibrio en el que los electrones adquieren una velocidad media de desplazamiento a través del

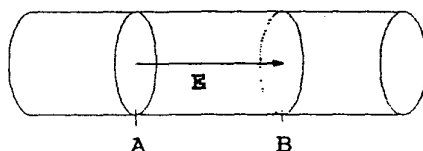


Fig. 13

conductor que es estacionaria. Calculemos la energía disipada en forma de calor cuando una cierta carga  $\Delta Q$  pasa de un punto A con potencial  $V_1$  hasta otro B con potencial  $V_2$  (fig. 13). La energía potencial de la carga en A es  $\Delta Q V_1$  y en B  $\Delta Q V_2$ , luego la pérdida es  $\Delta W = \Delta Q (V_1 - V_2)$ . Si designamos por  $V = V_1 - V_2$  la caída de potencial entre los puntos A y B, y  $\Delta t$  es el tiempo que la carga tarda en desplazarse del punto A hasta el B, la potencia perdida es

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V \quad (28)$$

es decir

$$P = VI \quad (29)$$

Cuando  $I$  se mide en amperios y  $V$  en voltios, la potencia se expresa en vatios (W). Puede utilizarse la ley de Ohm para escribir (29) en otras dos formas equivalentes

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (30)$$

La ec. (29) y sus equivalentes (30) son la expresión matemática de la ley de Joule y la energía cedida por los electrones al conductor se denomina calor disipado por efecto Joule.

Hasta ahora hemos eludido deliberadamente la cuestión del suministro de energía al circuito; pero si, como acabamos de ver, se produce una pérdida de energía por efecto Joule, se precisará algún medio externo capaz de mantener la corriente estacionaria. Un dispositivo que transforma energía de cualquier tipo en energía eléctrica recibe el nombre genérico de *fuerza electromotriz* o simplemente *fuerza de fem*. Los ejemplos más comunes son las baterías o pilas que transforman energía química en energía eléctrica y los generadores que transforman energía mecánica en energía eléctrica. Una fuente de fem realiza trabajo sobre la carga que pasa a su través, elevando la energía potencial de la carga al desplazarla en sentido opuesto del que lo haría el campo eléctrico. Este incremento de energía potencial por unidad de carga recibe el nombre de *fem* de la fuente y se representa por  $\epsilon$ . La unidad de fem es el voltio, la misma que la del potencial.

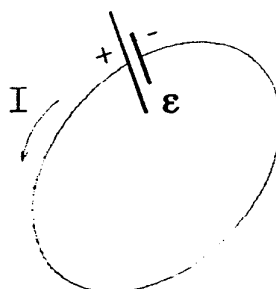


Fig. 14

En primera instancia, una fuente de fem mantiene una ddp constante entre sus bornes o terminales independientemente del valor de la intensidad de corriente en el circuito. Sin embargo, se observa experimentalmente que la ddp entre bornes de una batería decrece de una forma aproximadamente lineal con la intensidad que circula por el circuito. El hecho de que la variación sea lineal permite atribuir la disminución de la ddp a una resistencia interna de la batería que se designa por  $r$ , con lo que la ddp entre bornes queda

$$V_a - V_b = \epsilon - Ir \quad (31)$$

Si la batería forma parte de un circuito como el de la fig. 14 entonces

la ley de Ohm para este circuito es

$$\varepsilon - Ir = IR \quad (32)$$

donde  $R$  indica la resistencia del circuito exterior. En el diagrama se ha usado una flecha para indicar el sentido de la corriente y el símbolo  $\text{---|}|$  para representar la fuente de fem, indicando el segmento más largo el extremo de potencial más elevado.

## 6. Circuitos de corriente continua

En la sección anterior hemos asignado una cierta resistencia a cada conductor y hemos visto que su valor depende de las características del mismo según refleja la ec. (27). Para un estudio práctico de los circuitos conviene idealizar la situación suponiendo la resistencia de un conductor localizada en un lugar concreto del circuito. Esta resistencia se representa mediante el símbolo  $\text{---}\text{||||}\text{---}$  y los tramos del circuito con resistencia despreciable se representan con líneas rectas en los diagramas.

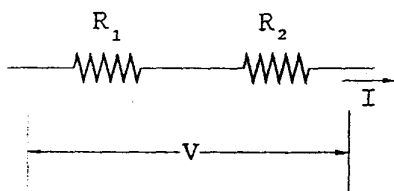


Fig. 15

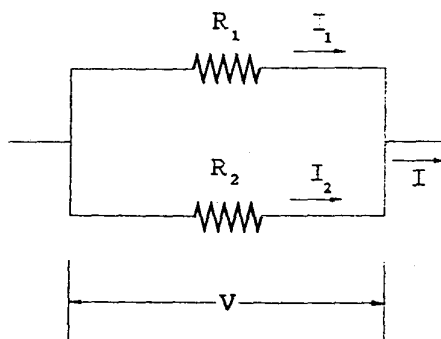


Fig. 16

En lo que sigue estudiaremos circuitos sencillos formados por agrupación de resistencias y baterías. Se denominan circuitos de corriente continua porque la intensidad y sentido de la corriente en cualquier parte del circuito no varía. Las resistencias pueden asociarse entre sí en serie y en paralelo. En la fig. 15 pueden verse dos resistencias en serie; a través de ellas circula la misma intensidad y la caída de potencial entre los extremos de ambas resistencias es



$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \quad (33)$$

luego vemos que es posible sustituir las dos resistencias  $R_1$  y  $R_2$  por una resistencia equivalente  $R$  dada por

$$R = R_1 + R_2 \quad (34)$$

Si las resistencias están asociadas como se ve en la fig. 16 se dice que están en paralelo. Los extremos de las dos resistencias están sometidos a la misma ddp  $V$ , La intensidad total  $I$  debe ser la suma de las intensidades que circulan por  $R_1$  y  $R_2$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \quad (35)$$

Podemos definir la resistencia equivalente como aquella que, circulando por ella la intensidad  $I$ , produzca la misma caída de potencial  $V$ , es decir

$$I = \frac{V}{R} \quad (36)$$

Comparando (35) y (36) obtenemos para la resistencia equivalente  $R$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (37)$$

Las formulas (34) y (37) se generalizan al caso de tres o más resistencias sin más que añadir los términos correspondientes en el segundo miembro de las ecuaciones.

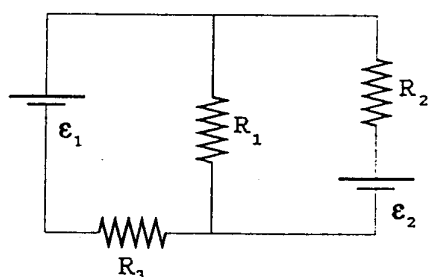


Fig. 17

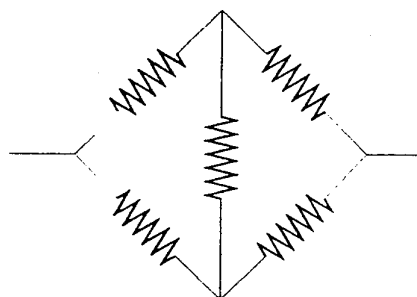


Fig. 18

El método de sustituir combinaciones de resistencias por su resistencia equivalente puede utilizarse provechosamente para resolver algunos circuitos. Aquí la palabra resolver se utiliza en el siguiente sentido: conocida la resistencia y la fem de cada elemento de circuito,

determinar la intensidad de la corriente en cada uno de estos elementos. Sin embargo, existen casos en los cuales este procedimiento no es suficiente. Las fig. 17 y 18 muestran dos ejemplos en los que sucede esto. En estos casos pueden resolverse los circuitos aplicando de una forma sistemática dos reglas conocidas como leyes de Kirchhoff. El objetivo principal de estas notas no es el estudio de los circuitos de cc y, por tanto, no enunciaremos las leyes de Kirchhoff. Sin embargo, diremos que estas leyes también son válidas -con las modificaciones oportunas- en los circuitos de corriente alterna.

## 7. Campo magnético

Los fenómenos de tipo magnético son conocidos desde la antigüedad. Ya en Grecia, hace más de 2000 años, se sabía que ciertas piedras procedentes de Magnesia -región del Asia Menor- atraían trocitos de hierro. Fue hacia el siglo XII cuando los imanes empezaron a utilizarse para la navegación y en 1600 Gilbert descubrió que la Tierra es un imán permanente y que ésta es la razón de que las brújulas se orienten siempre en la misma dirección. La conexión entre electricidad y magnetismo no se descubrió hasta el siglo XIX. En este aspecto fueron decisivas las contribuciones de Ampere, Faraday y Maxwell, quién realizó la definitiva unificación de los fenómenos eléctricos y magnéticos bajo las ecuaciones que llevan su nombre.

Se observa experimentalmente que cuando una carga se mueve con velocidad  $v$  en las proximidades de un imán o una corriente eléctrica actúa sobre ella una nueva fuerza además de la fuerza electrostática estudiada anteriormente. Esta fuerza resulta ser proporcional a la carga y al módulo de la velocidad y siempre es perpendicular a  $v$  y a una cierta dirección del espacio (fig. 19).

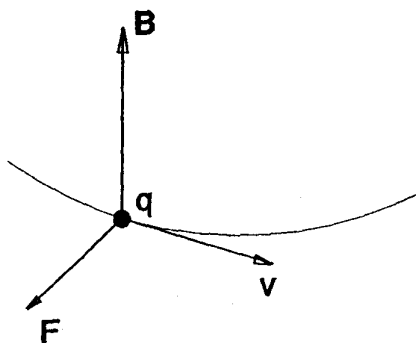


Fig. 19

Todo esto puede representarse en forma de ley matemática si aceptamos que el imán o la corriente han creado a su alrededor un *campo magnético* que supondremos representado por el vector  $B$  que por razones históricas se denomina *vector de inducción magnética*, *intensidad de campo magnético* o también *vector intensidad de campo magnético*. De esta manera, la fuerza que experimenta la carga en movimiento viene dada por

$$F = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (38)$$

La unidad SI de inducción magnética es el *tesla* (T)

$$1T = \frac{1N}{1C \cdot 1m/s} = 1 \frac{kg}{s \cdot C} \quad (39)$$

En ocasiones se utiliza también la unidad del sistema CGS: el *gauss*

$$1 Tesla = 10^4 Gauss \quad (40)$$

la razón de utilizar el gauss se debe a que el tesla es una unidad demasiado grande para medir campos magnéticos en el laboratorio.

Tal como hicimos con el campo eléctrico podemos visualizar el campo magnético utilizando las *líneas de inducción magnética*, líneas imaginarias que en cada punto son tangentes al vector  $B$  y cuyo número es proporcional al módulo de  $B$ .

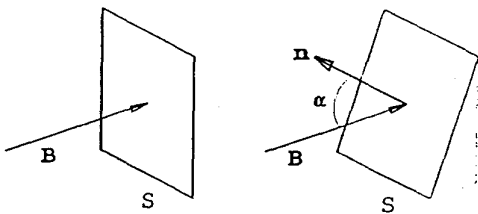


Fig. 20

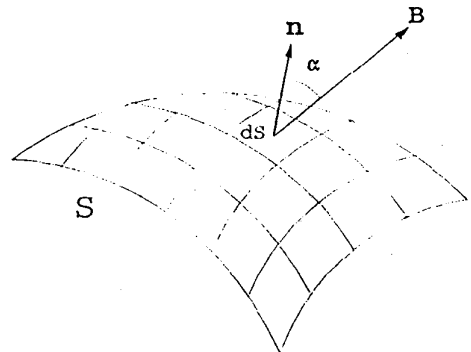


Fig. 21

Un nuevo concepto, que resultará útil más adelante, cuando hablemos de corrientes inducidas es el de *flujo del campo magnético* a través de una superficie. Analicemos en primer lugar el caso de un campo magnético uniforme de módulo  $B$  y una superficie de área  $S$  perpendicular a él (fig. 20). Por definición el flujo es  $\Phi = BS$  y representa la *cantidad* de campo magnético que atraviesa la superficie  $S$ . Si  $B$  sigue siendo uniforme, pero la superficie ya no es perpendicular a él, el flujo es

$\Phi = B S \cos \alpha$ , puesto que  $S \cos \alpha$  es la sección transversal recta que la superficie  $S$  presenta a  $B$ . Podríamos haber obtenido esto mismo tomando un vector unitario  $n$  perpendicular a  $S$  y haciendo el producto escalar  $\Phi = B \cdot (Sn)$ . Consideremos ahora un campo  $B$  no necesariamente uniforme y una superficie  $S$  arbitraria (fig. 21). Para calcular el flujo dividimos  $S$  en un gran número de pequeños elementos. Si éstos son suficientemente pequeños, serán aproximadamente planos y podemos conferirles carácter vectorial multiplicando su área  $dS$  por un vector unitario  $n$  que sea normal al propio elemento. Por otra parte, el valor de  $B$  sobre cada uno de estos elementos de superficie es aproximadamente constante si los elementos son lo bastante pequeños. Entonces podemos calcular el flujo a través de cada elemento  $\Phi = B \cdot (ndS)$  y sumarlos para obtener el flujo total

$$\Phi = \int_S B \cdot n dS \quad (41)$$

La unidad SI de flujo magnético es el weber (Wb)

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \quad (42)$$

En ocasiones se utiliza el  $\text{Wb}/\text{m}^2$  como unidad de inducción magnética.

## 8. Campo magnético de una corriente estacionaria

De la misma manera que las fuentes del campo electrostático son las cargas, las fuentes del campo magnético (concretamente, magnetostático) son las corrientes estacionarias -aquellas cuya intensidad se mantiene invariable- y veremos a continuación cómo una corriente estacionaria crea un campo magnético y cómo una corriente estacionaria situada en una región del espacio donde existe un campo magnético experimenta una fuerza.

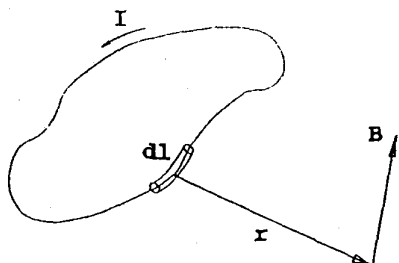


Fig. 22

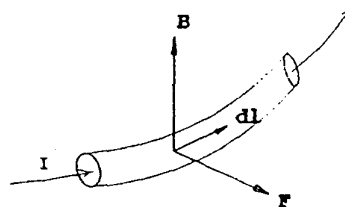


Fig. 23

Según la ley de Biot-Savart si por un conductor filiforme circula una corriente  $I$ , un elemento diferencial de longitud  $d\mathbf{l}$  (dirigido en el sentido en que circula la corriente) crea un campo magnético elemental en el punto P (arbitrario) dado por

$$d\mathbf{B} = k_m I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (43)$$

donde  $\mathbf{r}$  es un vector con origen en el elemento de longitud y extremo en el punto P (fig. 22). Para calcular la contribución de todo el circuito al valor de  $\mathbf{B}$  hay que sumar (en realidad, integrar) para todos los posibles  $d\mathbf{l}$ . El detalle importante de (43) es que el vector de inducción magnética será proporcional a  $I$  aún después de integrar puesto que  $I$  es constante. La constante  $k_m$  depende del sistema de unidades que se utilice; en el SI su valor es  $k_m = 10^{-7} \text{ N/A}^2$  y en ocasiones se escribe

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (44)$$

siendo  $\mu_0$  la permeabilidad del vacío.

El segundo aspecto a estudiar de las corrientes estacionarias es la fuerza que experimentan los circuitos en presencia de campo magnético. La expresión para dicha fuerza se puede deducir fácilmente de (38) puesto que una corriente eléctrica no es otra cosa que cargas en movimiento. Daremos solamente el resultado: si por el circuito circula una intensidad  $I$ ,  $d\mathbf{l}$  es un elemento diferencial de longitud, y  $\mathbf{B}$  es la inducción magnética (fig. 23), entonces la fuerza a la que se encuentra sometido dicho elemento es

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (45)$$

Nótese que la fuerza es perpendicular al elemento de longitud y al campo. Para calcular la fuerza sobre todo el circuito habrá que integrar la expresión (45).

## 9. Inducción electromagnética

Los experimentos realizados por Faraday mostraron por primera vez que pueden inducirse corrientes eléctricas en un circuito mediante campos magnéticos variables. Faraday observó que en un circuito aparece una corriente transitoria, a) si se inicia o se detiene una corriente estacionaria en un circuito cercano; b) si existe movimiento relativo entre los dos circuitos; c) si introducimos o sacamos del circuito un

imán. La corriente puede detectarse intercalando un galvanómetro en el circuito. Todos estos experimentos tienen en común la variación del flujo magnético a través del circuito; esta variación induce un campo eléctrico a lo largo del circuito que ocasiona la aparición de una fem. La descripción precisa de estos fenómenos se logra mediante la ley de Faraday: Sea  $C$  el circuito y  $S$  cualquier superficie abierta de contorno  $C$ ; si  $\Phi$  representa el flujo del campo magnético  $B$  a través de la superficie  $S$ , la fem que aparece en el circuito al variar el flujo es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (46)$$

Hasta ahora habíamos considerado la fem localizada en una región específica del circuito, por ejemplo, entre los bornes de una batería. Aquí la situación es diferente, en general, la fem no se encuentra localizada en lugar alguno y debe considerarse distribuida a lo largo del circuito. El significado de (46) es el siguiente: para obtener la fem inducida hay que hallar el flujo magnético en función del tiempo  $\Phi(t)$  y calcular su derivada respecto de  $t$ . El signo negativo en la ley de Faraday indica que el sentido de la fem inducida es tal que tiende a oponerse al cambio que la produce.

El fenómeno de la inducción electromagnética se presenta incluso en el caso de que tengamos un sólo circuito. Puesto que un circuito es atravesado por su propio flujo, una variación en el mismo inducirá una fem. En este caso se habla de *autoinducción*. Si suponemos un circuito estacionario, rígido, la variación de flujo sólo puede ser debida a una corriente variable. Según (41) y (43)  $\Phi$  es proporcional a la intensidad

$$\Phi = LI \quad (47)$$

donde  $L$  se llama el *coeficiente de autoinducción del circuito o inductancia*. La unidad SI de inductancia es el *henry* (H)

$$1H = 1 \frac{T \cdot m^2}{A} = 1 \frac{V \cdot s}{A} \quad (48)$$

De las ecu. (46) y (47) se sigue la expresión de la fem inducida

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad (49)$$

Como veremos a continuación esta expresión es de suma importancia en el estudio de los circuitos de corriente alterna.

## PROBLEMAS

1. Dos cargas de  $+3 \times 10^{-8}$  C y  $-5 \times 10^{-9}$  C están separadas 20 cm. (a) ¿Cuál es la magnitud, dirección y sentido de  $E$  en el punto medio entre las dos cargas? (b) ¿Qué campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) produce cada una en el sitio donde está la otra? (c) ¿Qué fuerza experimenta cada carga?
2. ¿Cuál ha de ser la magnitud de una carga puntual  $q$  aislada para que el potencial eléctrico a una distancia de 30 cm de la carga valga +200 V? ¿Cuanto vale el campo eléctrico que crea esa carga a una distancia de 15 cm?
3. Las placas de un condensador adquieren una carga de  $12 \times 10^{-4}$  C cuando se someten a una diferencia de potencial de 200 V. ¿Cuál es su capacidad? Si el condensador está constituido por dos placas paralelas separadas 1 mm, ¿cuál es el área de las placas?
4. Se aplica una diferencia de potencial de 300 V a un condensador de  $2 \mu\text{F}$  y a un condensador de  $8 \mu\text{F}$  unidos en serie. (a) ¿Cuál es la carga y la diferencia de potencial para cada condensador? (b) Los condensadores cargados se vuelven a conectar uniendo sus placas positivas por una parte y las negativas por otra, no aplicándose un voltaje externo. ¿Cuál es la carga y la diferencia de potencial para cada uno de ellos? (c) Los condensadores con la carga que habían adquirido en el primer apartado se vuelven a conectar uniendo las placas de signo contrario. ¿Cuál es la carga y la diferencia de potencial para cada uno de ellos?
5. Por un alambre de 1 m de largo circula una intensidad de 1.5 A y está inmerso en un campo magnético de intensidad 27 T con el que forma un ángulo de  $45^\circ$ . Calcular la fuerza sobre el alambre.
6. Un anillo circular de alambre de 10 cm de diametro se coloca con su normal formando un ángulo de  $30^\circ$  con la dirección de un campo magnético uniforme de 5000 gauss. El anillo se hace girar alrededor de un eje paralelo al campo magnético de manera que el ángulo entre la normal y el campo permanece constante. Calcular el flujo del campo magnético a través de la superficie del anillo y la fem inducida en el mismo.

7. Utilizar la ley de Biot-Savart para demostrar que el campo magnético creado por un conductor rectilíneo infinito por el que circula una intensidad  $I$  es perpendicular al conductor y de magnitud  $B = \mu_0 I / 2\pi R$ , siendo  $R$  la distancia al conductor.
8. Calcular el incremento de energía de una partícula de carga la del electrón ( $e = 1.6021 \times 10^{-19}$  C) cuando se mueve a través de una diferencia de potencial de 1 V. Esta cantidad se toma como una nueva unidad de energía denominada *electronvolt*.
9. Un alambre conductor de  $6 \Omega$  de resistencia está conectado con una batería de fem 4.5 V y cuya resistencia interior es de  $1 \Omega$ . Durante 2 min, (a) ¿qué cantidad de energía se transforma de química en eléctrica? (b) ¿Qué cantidad de energía aparece en el alambre como calor por efecto Joule? (c) Explicar la diferencia entre (a) y (b).
10. Calcular la resistencia equivalente del circuito de la fig. 18 suponiendo que todas las resistencias valen  $10 \Omega$ .
11. Los electrones en el haz de un tubo de rayos catódicos de televisión tienen una velocidad de  $6.5 \times 10^7$  m/s. El tubo está orientado de manera que los electrones se muevan horizontalmente de sur a norte. La componente vertical del campo magnético de la Tierra apunta hacia abajo y vale  $B = 5.5 \times 10^{-5}$  Wb/m<sup>2</sup>. (a) ¿En qué dirección se desviará el haz? (b) ¿Cuál es la aceleración de un electrón? (c) ¿Cuál será la desviación del haz al moverse 20 cm atravesando el tubo de televisión? (datos: carga del electrón  $e = 1.6021 \times 10^{-19}$  C, masa del electrón  $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$  Kg)



PARTE II

CORRIENTE ALTERNA

## 1. Generador de corriente alterna

Casi toda la electricidad fabricada por el hombre se crea mediante generadores eléctricos capaces de transformar energía mecánica en energía eléctrica. La energía mecánica que mueve el generador puede proceder de saltos de agua (centrales hidroeléctricas) o ser transmitida por el vapor que mueve las turbinas en el caso de centrales térmicas o nucleares.

Todos los generadores se basan en la ley de Faraday, que establece que se puede inducir una fuerza electromotriz (fem) en un circuito, variando el flujo del campo magnético que lo atraviesa. Esto se puede lograr, entre otras, de las siguientes formas

- variando la superficie del circuito, esto es deformándolo,
- variando el campo magnético,
- variando el ángulo que forman el campo magnético y la superficie del circuito.

Este último es el método generalmente utilizado en un generador de corriente alterna para obtener una fuerza electromotriz sinusoidal.

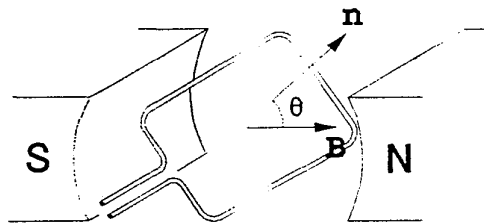


Fig. 1

El generador más sencillo lo podemos imaginar como una espira, o un bobinado con N espiras, que gira en el seno de un campo magnético uniforme B, tal como viene representado en la fig. 1. En su giro, la superficie de la espira enfrentada al campo magnético varía con el tiempo y, por tanto, también el flujo que la atraviesa, induciéndose una fuerza electromotriz de valor

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

El flujo magnético depende de la orientación de la espira. Si n es un vector unitario normal a la superficie de la espira, en un instante dado formará con el campo B un ángulo  $\theta$ , de forma que el flujo magnético vendrá determinado por la ecuación

$$\Phi = NBS \cos \theta \quad (2)$$

Ahora bien, puesto que la orientación cambia con el tiempo, el ángulo será una función temporal  $\theta(t)$  y con ello la fuerza electromotriz inducida será variable con el tiempo. Si el giro se realiza con velocidad angular constante  $\omega$  (pulsación), la normal a la espira variará con el tiempo describiendo un movimiento circular uniforme, de forma que el ángulo  $\theta$  será

$$\theta = \omega t \quad (3)$$

y la fuerza electromotriz generada es una función sinusoidal

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad (4)$$

donde se ha tomado como origen de tiempos el instante en el que el flujo es máximo.  $\varepsilon_0$  representa la amplitud de la señal que vendrá dada en voltios (V), y cuyo valor, determinado a partir de las ecuaciones (1) y (2) es  $\varepsilon_0 = NBS\omega$

La ec. (4) es idéntica a la que describe un movimiento oscilatorio armónico simple, ya que de hecho representa una oscilación eléctrica. Una corriente que cambia periódicamente de dirección y de intensidad produce en los portadores de carga un movimiento oscilatorio debido a las variaciones periódicas del campo eléctrico en el conductor. Un análisis de esta ecuación permitirá determinar el periodo  $T$ , es decir, el tiempo que ha de transcurrir para que la fem esté exactamente en las mismas condiciones que en el instante inicial

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t+T)$$

$$\varepsilon_0 \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \omega(t+T) \quad (6)$$

por lo que  $\omega T = 2\pi$  y el periodo será

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (7)$$

En consecuencia, la velocidad de giro determinará la frecuencia  $\nu$  de la señal, cuya unidad es el *Hertz* ( $1\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ ). La corriente alterna más comúnmente utilizada corresponde a una frecuencia de 50 Hz en Europa y a 60 Hz en EEUU. A veces se habla de *alternancias* de la señal haciendo referencia al número de veces que se hace nula por unidad de tiempo. En el caso de una función sinusoidal el número de alternancias es el doble del valor de la frecuencia.

El generador descrito más arriba puede utilizarse como una fuente de alimentación de un circuito externo y proporciona una tensión alterna con las mismas características que la fem y con un valor  $V_{ab}$  correspondiente al voltaje instantáneo entre los terminales a y b de la espira en circuito abierto (fig. 1)

$$V = V_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (8)$$

donde, si se desprecia la caída de tensión debido a la resistencia interna del generador  $V_0 = \mathcal{E}_0$ .

Esta tensión provocará un movimiento en los portadores de carga del circuito externo originando una corriente eléctrica. Dado que la tensión aplicada varía periódicamente, el movimiento de los electrones constituirá un movimiento oscilatorio forzado con la misma frecuencia y en consecuencia también la intensidad de corriente variará con el tiempo de forma periódica, con la misma frecuencia que la tensión, con un valor máximo  $I_0$  y presentando, en principio, un desfase respecto a ella que dependerá del circuito en cuestión

$$I = I_0 \operatorname{sen} (\omega t + \phi) \quad (9)$$

Si el desfase (o ángulo de fase)  $\phi$  es positivo la corriente precede a la tensión, es decir alcanza los valores máximos antes que la tensión, mientras que irá atrasada con respecto a ella en caso de que el desfase sea negativo (fig. 2)

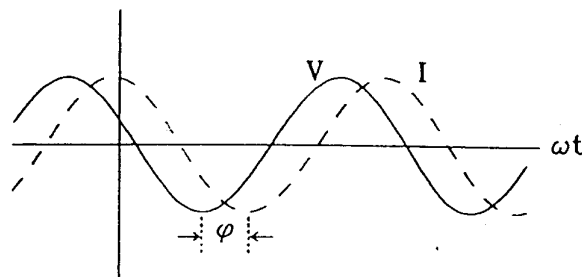
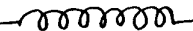


Fig. 2

La relación entre la tensión máxima y la corriente máxima que pasa por un elemento determinado, se denomina *impedancia* ( $Z$ ) del elemento en cuestión, y caracterizará su comportamiento en una corriente alterna. A veces es útil el uso de la *admitancia* ( $Y$ ), magnitud inversa a la anterior.

Generalmente, los circuitos de corriente alterna están constituidos, además de por generadores, que representaremos mediante el símbolo  $\textcircled{\sim}$ ,

por resistencias (R), condensadores (C) y bobinas (o autoinducciones L) representadas por . Cada uno de estos elementos tiene un comportamiento característico cuando se le aplica una tensión alterna, comportamiento que analizaremos a continuación para pasar posteriormente a estudiar circuitos más complejos formados por asociaciones de ellos.

## 2. Corriente alterna en una resistencia

El circuito de corriente alterna más sencillo se compone de un generador y una resistencia R tal como indica la fig. 3, donde se ha utilizado la simbología que corresponde a estos elementos.

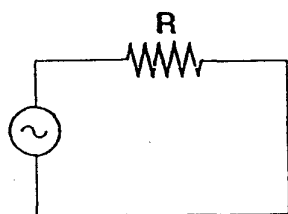


Fig. 3

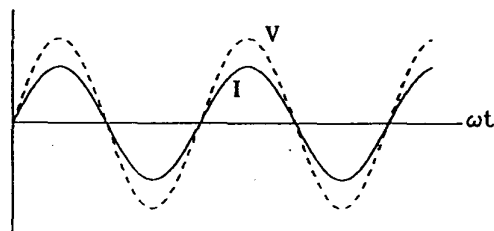


Fig. 4

Si el generador suministra una tensión alterna

$$V = V_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (10)$$

la intensidad de corriente que circulará a través de la resistencia se obtiene de la ley de Ohm

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \operatorname{sen} \omega t = I_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (11)$$

donde se observa que la intensidad de corriente en la resistencia tiene una expresión analítica totalmente similar a la de la tensión aplicada, con un valor de la corriente máxima

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \quad (12)$$

La corriente y la tensión en bornes de la resistencia están en fase, tal como se muestra en la fig. 4, de modo que ambas magnitudes alcanzan los valores máximos y mínimos en el mismo instante.

La relación entre los valores máximos de ambas magnitudes representará la impedancia de este elemento, que en este caso corresponde al valor de su resistencia

$$Z = R \quad , \quad Y = \frac{1}{R} \quad (13)$$

### 3. Corriente alterna en una bobina (autoinducción)

Como se ha visto anteriormente, una variación de la intensidad que circula a través de un circuito produce un fenómeno de autoinducción, originándose en él una fem dada por la ec. (49).

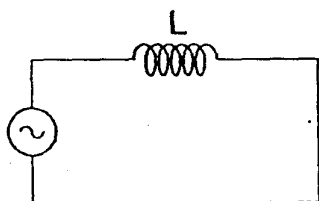


Fig. 5

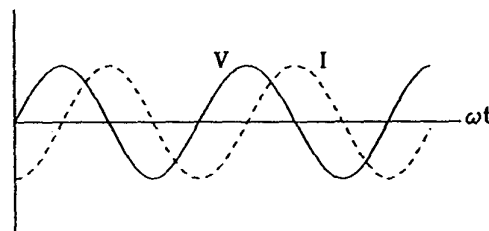


Fig. 6

Si la tensión suministrada por un generador de corriente alterna se aplica a una bobina supuesta ideal, es decir, sin resistencia, tal como indica la fig. 5, la tensión aplicada variable con el tiempo, originará una corriente también variable con el tiempo en la bobina y en consecuencia se producirá en ella una fem autoinducida opuesta a la suministrada por el generador

$$V_0 \text{ sen } \omega t = L \frac{dI}{dt} \quad (14)$$

donde L representa el coeficiente de autoinducción de la bobina.

La corriente que circula a través de este elemento se puede determinar integrando la ecuación anterior

$$I = \int \frac{V_0}{L} \text{ sen } \omega t \, dt = \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t \\
&= I_0 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}$$

expresión en la que se ha despreciado la constante de integración ya que sólo depende de las condiciones iniciales y en la que la intensidad máxima es  $I_0 = V_0 / L\omega$ .

Las ecuaciones (14) y (15), representadas gráficamente en la fig. 6, muestran que el máximo de la tensión se presenta  $90^\circ$  ( $\pi/2$ ) antes que el máximo de la corriente. Se dice que la tensión va desfasada  $\pi/2$  y adelantada respecto a la corriente.

La impedancia de la bobina se denomina *reactancia inductiva* aunque a veces también se le da el nombre de inductancia, que no hay que confundir con su coeficiente de autoinducción  $L$  que a veces lleva el mismo nombre. La reactancia inductiva puede considerarse como la resistencia que presenta la bobina al crecimiento de la corriente y su valor es

$$X_L = \frac{1}{Y_L} = \frac{V_L}{I_L} = L\omega \quad (16)$$

La unidad correspondiente a la inductancia es el ohm ( $1\Omega = 1\text{H} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Esta magnitud varía con la frecuencia de forma que, al aumentar ésta la reactancia inductiva también aumenta mientras que la corriente máxima disminuye. A frecuencias elevadas la impedancia de la bobina puede ser lo suficientemente grande como para que prácticamente no deje pasar corriente, por lo que una bobina con la autoinducción adecuada puede actuar como un filtro para altas frecuencias. En esto se basa el hecho de colocar carretes con inductancia elevada (carretes de bloqueo) para eliminar el ruido perturbador de alta frecuencia en circuitos de corriente continua o de alterna de baja frecuencia.

#### 4. Corriente alterna en un condensador

Un condensador intercalado en un circuito de corriente continua constituye una resistencia infinita e impide el paso de corriente; el condensador se carga inmediatamente originando un voltaje igual y opuesto a la tensión aplicada. Si la tensión es alterna, la carga del condensador varía constantemente, se carga y descarga periódicamente con

la misma frecuencia que la tensión, por lo que la corriente alterna se puede transmitir a través de él.

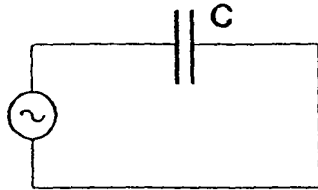


Fig. 7

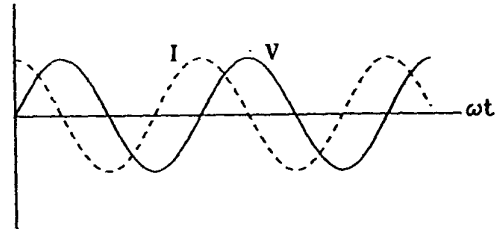


Fig. 8

La fig. 7 representa un circuito constituido por un condensador, supuesto ideal, conectado en bornes (terminales) de un generador de corriente alterna. La carga del condensador dependerá de la capacidad de éste y del voltaje aplicado

$$Q = CV = CV_0 \sin \omega t \quad (17)$$

La variación de carga con el tiempo en las placas del condensador, esto es, la intensidad de corriente

$$I = \frac{dQ}{dt} = CV_0 \omega \cos \omega t = I_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (18)$$

representa una corriente alterna cuya amplitud toma el valor  $I_0 = CV_0 \omega$  y que va adelantada  $90^\circ$  ( $\pi/2$ ) respecto al voltaje tal como se observa en la fig. 8.

La relación entre la tensión y la intensidad máxima corresponderá a la impedancia del condensador, que en este caso se denomina *reactancia capacitiva* o *capacitancia*  $X_c$ , cuyo valor es

$$\left[ X_c = \frac{1}{Y_c} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{C\omega} \right] \quad (19)$$

La magnitud  $X_c$  es una medida de la resistencia del condensador a la acumulación de carga. Su unidad es el ohm ( $1\Omega = 1F^{-1} \cdot 1s$ ), y su valor varía con la frecuencia de forma que, a medida que ésta aumenta, disminuye la capacitancia y por tanto la corriente que pasa a través del condensador es mayor y viciversa. Así, un condensador con pequeña



capacidad actuará como un filtro para señales alternas de baja frecuencia.

## 5. Representación vectorial de Fresnel

El comportamiento en corriente alterna de los tres tipos de elementos que acabamos de realizar, es sencillo cuando actúan por separado, pero cuando se combinan constituyendo un determinado circuito su estudio analítico se complica. Ello es debido a que el movimiento de los electrones constituye un movimiento oscilatorio forzado y amortiguado en el que la tensión impulsora es la que suministra el generador y en consecuencia la intensidad obedece una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea que suele resolverse utilizando números complejos. En estas notas aplicaremos un método alternativo, no tan potente como los números complejos pero que para circuitos sencillos proporciona los mismos resultados. Este método se basa en la construcción de unos diagramas denominados de Fresnel donde cada magnitud viene representada por un vector rotatorio llamado vector de Fresnel o fasor.

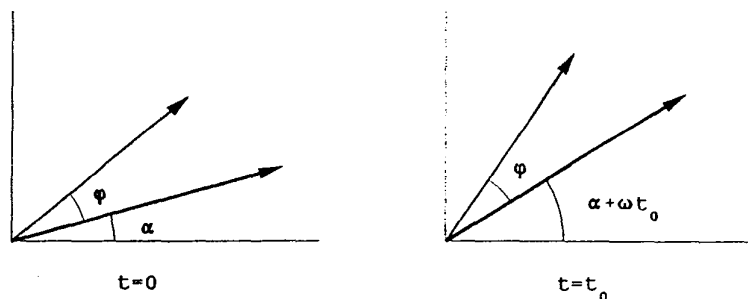


Fig. 9

En términos generales el vector rotatorio es un vector cuyo módulo es el valor máximo de la magnitud que describe y que gira con velocidad angular  $\omega$  igual a la pulsación del sistema. La proyección de este vector sobre los ejes describe la variación temporal de la magnitud física. Si en un mismo diagrama se representan dos magnitudes, por ejemplo intensidad y voltaje, el desfase entre ellas queda reflejado por la diferentes direcciones que adoptan los vectores respectivos. Al ser la pulsación la misma para ambos, los vectores giran solidariamente de forma que se mantiene constante el desfase entre ellos tal como se ve en la fig. 9.

A continuación se describirá el comportamiento de las resistencias, bobinas y condensadores aplicando este método y comparandolo con los resultados analíticos obtenidos anteriormente.

### Resistencia R

El comportamiento de una resistencia en un circuito de corriente alterna se puede analizar asignando al voltaje y la intensidad vectores rotatorios (ver fig 10). De las ec. (10) y (11) se observa que si en el instante inicial el ángulo que forman estas magnitudes con el eje X es nulo, en un instante posterior  $t$  formarán con él un ángulo  $\omega t$ . La proyección de estos vectores sobre el eje Y corresponde a las expresiones analíticas del voltaje y la intensidad dadas por las ecuaciones anteriores. Puesto que ambas magnitudes están en fase y la pulsación es la misma para ambas, los vectores rotatorios correspondientes girarán con el transcurso del tiempo el mismo ángulo y permanecerán, por lo tanto, siempre en fase.

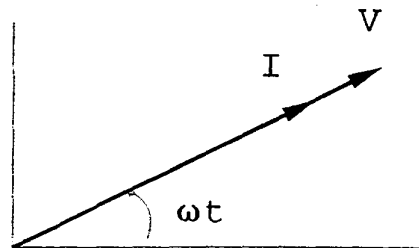


Fig. 10

Si en el diagrama de la figura dividimos el vector  $V_r$  que representa el voltaje en la resistencia por el valor máximo de la intensidad obtendremos un diagrama equivalente que diferirá del anterior en un factor de escala. El vector obtenido tiene de módulo  $V_0/I_0$  que es precisamente el valor de la impedancia de la resistencia. Por tanto, también se puede asignar un carácter vectorial a esta magnitud representándola por un vector de módulo  $R$  y cuya dirección sea la misma que la del vector intensidad.

### Autoinducción L

Si consideramos una bobina ideal, es decir, sin resistencia, como hemos visto en las ec. (14) y (15) la tensión va adelantada  $\pi/2$  respecto a la intensidad en cualquier instante de tiempo. Esto se puede representar de forma gráfica mediante los vectores rotatorios

perpendiculares de la fig. 11, donde el voltaje forma un ángulo  $\omega t$  con el eje X en el instante considerado. La proyección de estos vectores sobre el eje Y corresponde a las expresiones de las ecuaciones anteriores.

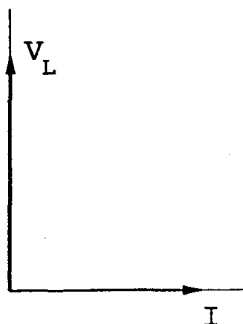


Fig. 11

Transcurrido un tiempo  $t$  ambos vectores habrán girado el mismo ángulo de forma que se mantiene el desfase entre ellos. Como la magnitud relevante es este desfase relativo, orientaremos los vectores de manera que la intensidad coincida con el eje X y en lo sucesivo utilizaremos este criterio.

Si en el diagrama de la figura hacemos un proceso similar al realizado en la resistencia, dividiendo el voltaje por el valor máximo de la intensidad el vector obtenido tiene por módulo  $V_L/I_0$ , que es el valor de la reactancia inductiva. En consecuencia, podremos representar esta magnitud por un vector de módulo  $X_L$  y cuya dirección va adelantada  $\pi/2$  respecto a la dirección de la intensidad.

#### **Bobina real: circuito RL**

Una bobina real está realizada de un material que siempre presenta resistencia eléctrica. Si los efectos de esta resistencia son muy pequeños comparados con los de la autoinducción, se podrán despreciar y considerar la bobina como ideal con las características ya estudiadas. Si sus efectos son lo suficientemente importantes como para no poder despreciarlos, el comportamiento de la bobina deja de ser el de una inductancia pura; poseerá una impedancia que depende tanto de la autoinducción como de la resistencia. En este caso, el desfase existente entre voltaje e intensidad en la bobina real ya no será de  $90^\circ$ , sino de un ángulo entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , tanto más cercano a  $90^\circ$  cuanto menor sea la resistencia.

En la práctica la bobina real se puede estudiar considerándola como una asociación de una autoinducción pura en serie con la resistencia que presenta, es decir un *circuito RL* en serie. Dadas las características de estos elementos, en bornes de la autoinducción existirá una tensión

$V_L$ , adelantada  $90^\circ$  respecto a la intensidad, mientras que en la resistencia la tensión  $V_R$  y la intensidad irán en fase, de forma que la caída total de tensión en la bobina será la suma de ambas tensiones y presentará un cierto adelanto respecto a la intensidad. El voltaje total se puede describir mediante un vector que será la suma (vectorial) de los vectores que representan los voltajes en cada uno de los elementos (fig. 13).

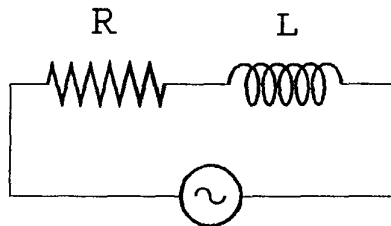


Fig. 12

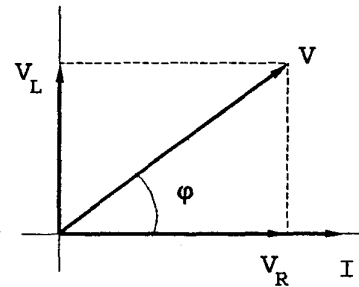


Fig. 13

Nótese que la proyección sobre el eje Y de dicho vector es igual a la suma de las proyecciones de los vectores  $V_R$  y  $V_L$  sobre el mismo eje. De la fig. 13 se observa que el módulo de la tensión total toma el valor

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} = I_0 \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad (20)$$

y presentará un desfase respecto a la intensidad

$$\phi = \arctan \frac{V_L}{V_R} \quad (21)$$

Puesto que la intensidad en ambos elementos es la misma, al dividir por su valor máximo cada uno de los voltajes, obtendremos una representación gráfica correspondiente a las impedancias que será equivalente al de tensiones, de forma que la impedancia total se obtendrá como resultado de sumar los vectores resistencia y reactancia (inductancia). El diagrama de impedancias para este circuito queda patente en la fig. 14 3, de la que un sencillo cálculo matemático da como resultado para la impedancia total del circuito y su desfase

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad (22)$$

$$\phi = \arctan \frac{L\omega}{R}$$

(23)

con lo que el voltaje total, está adelantado respecto a la intensidad que circula por el circuito un ángulo  $\phi$  tal que  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ .

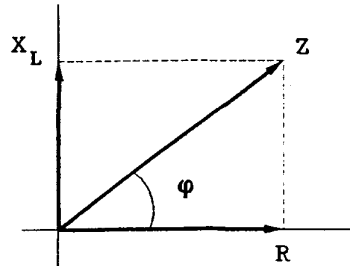


Fig. 14

Comparando las ec. (20) y (21) con las (22) y (23) observamos que es totalmente equivalente realizar el estudio del circuito RL mediante el diagrama de voltajes o el de impedancias.

#### Condensador C

La representación vectorial del comportamiento de un condensador, supuesto ideal, con capacidad  $C$  conectado a los bornes de un generador de corriente alterna, se pone de manifiesto en la fig. 15, donde tal como hemos determinado en el estudio analítico previo, el vector rotatorio que caracteriza la intensidad lleva un adelanto de  $90^\circ$  con respecto a la ddp entre sus placas.

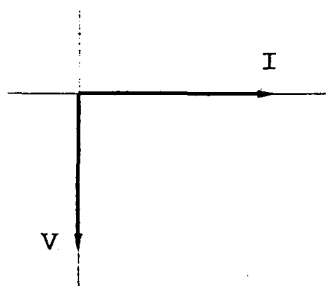


Fig. 15

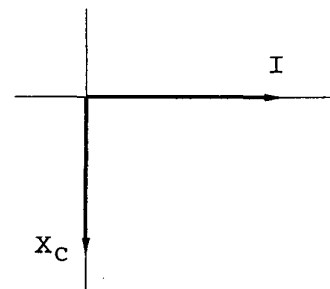


Fig. 16

La proyección de estos vectores sobre el eje Y nos da los valores instantáneos de voltaje e intensidad en este elemento. Así, si la intensidad se ha tomado en la dirección del eje X, el voltaje en el condensador será un vector según el sentido negativo del eje Y.

Dividiendo nuevamente el vector voltaje por el valor máximo de la intensidad obtenemos un nuevo vector de módulo  $V_c/I_0$  que corresponde a la impedancia del condensador (fig. 16). Así pues, la capacitancia del condensador vendrá representada por un vector perpendicular a la intensidad.

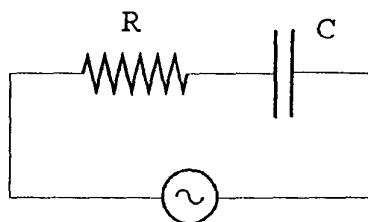


Fig. 17

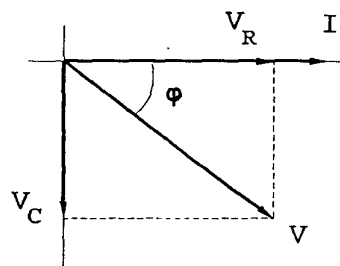


Fig. 18

Si se conecta una resistencia en serie con el condensador, tal como indica la fig. 17, el circuito así constituido se denomina *circuito RC* en serie, a través del cual circula una cierta intensidad  $I$  única. El voltaje total que suministra el generador se repartirá entre ambos elementos de forma que, la ddp en la resistencia irá en fase con la intensidad, mientras que en el condensador la ddp entre sus bornes presentará un retraso de  $90^\circ$  con respecto a ella. Desde el punto de vista de la representación vectorial, el voltaje total será la suma vectorial del que existe en la capacidad  $V_c$  y en la resistencia  $V_R$  tal como se representa en la fig. 18, de la que fácilmente se obtiene el módulo de la tensión total

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (24)$$

así como su desfase con la intensidad

$$\phi = \arctan \frac{V_R}{V_C} \quad (25)$$

La impedancia correspondiente a este circuito se obtiene como resultado de la suma vectorial de la resistencia y la reactancia (capacitancia) correspondientes, como se observa en la fig. 19. De ella se puede concluir

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (26)$$

y puesto que la intensidad es la misma en ambos elementos, el ángulo de fase lo podemos obtener del diagrama de impedancias

$$\varphi = \arctan \frac{X_C}{R} = \arctan \frac{1}{RC\omega} \quad (27)$$

donde  $\varphi$  determina el adelanto de la intensidad respecto a la tensión.

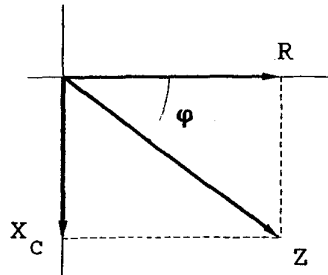


Fig. 19

Al igual que en el caso de la bobina, un análisis de las ecuaciones anteriores muestra la equivalencia entre el estudio mediante el diagrama de voltajes y el de impedancias.

## 6. Circuito RLC serie. Resonancia

Un circuito formado por los tres elementos asociados como se ve en la fig. 20, constituye un circuito RLC serie. La intensidad que circula a través de cada uno de los elementos es la misma y será la que se adecúe al valor de la tensión aplicada y de la impedancia total del circuito.

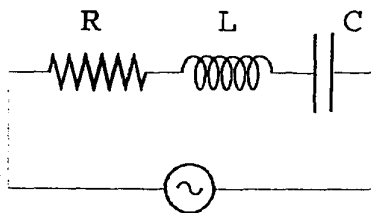


Fig. 20

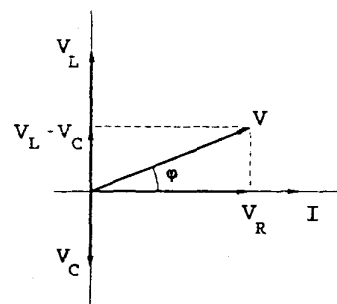


Fig. 21

La tensión entre los extremos de la asociación es la que suministra el generador  $V_e$ , de forma que

$$\boxed{V_G = V_0 \text{ sen } \omega t = V_R + V_L + V_C = ZI} \quad (28)$$

siendo la ddp en cada elemento

$$V_R = RI \quad (29)$$

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = X_L I = \omega L I \quad (30)$$

$$V_C = \frac{Q}{C} = X_C I = \frac{1}{\omega C} I \quad (31)$$

con lo que la tensión total (ec. 28) pasa a tomar la forma

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V_0 \text{ sen } \omega t \quad (32)$$

Derivando ambos miembros de esta ecuación con respecto al tiempo tendremos

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = V_0 \omega \cos \omega t \quad (33)$$

ecuación diferencial que describe un movimiento oscilatorio amortiguado forzado, y cuya resolución corresponde a la intensidad de corriente. La solución de esta ecuación consta de dos términos

$$I = I_t + I_p = I_p = I_0 \text{ sen } (\omega t + \phi) \quad (34)$$

una *componente transitoria*  $I_t$ , que disminuye exponencialmente con el tiempo, de forma que, tras los instantes iniciales desaparece, y una *componente permanente*  $I_p$  que persiste con el tiempo. En el estado estacionario, que es el que nos interesa, la corriente tendrá el valor correspondiente al término permanente, que varía sinusoidalmente con el tiempo con la misma frecuencia que la del voltaje del generador que la origina.

Al ser única la intensidad en el circuito, el voltaje total vendrá determinado por la suma vectorial de los vectores que caracterizan las ddp en los tres elementos del circuito,  $V_R$  en fase con la intensidad y  $V_L$  y  $V_C$  desfasados  $90^\circ$  respecto a ella adelantados y retrasados respectivamente, lo que se pone de manifiesto en la fig. 21, de la que se obtiene

$$V_0 = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (35)$$



En la fig. 22 se representan las impedancias de cada uno de los elementos, cuya suma vectorial determinará la impedancia total del circuito. Mediante un sencillo cálculo, se obtiene de esta figura la expresión analítica de la impedancia, así como el desfase existente entre la intensidad y el voltaje total

$$X = X_L - X_C = L\omega - \frac{1}{C\omega} \quad (36)$$

donde X representa la reactancia total del circuito, con lo que

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \quad (37)$$

El desfase entre el voltaje total y la intensidad vendrá dado por la expresión siguiente

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})}{R} \quad (38)$$

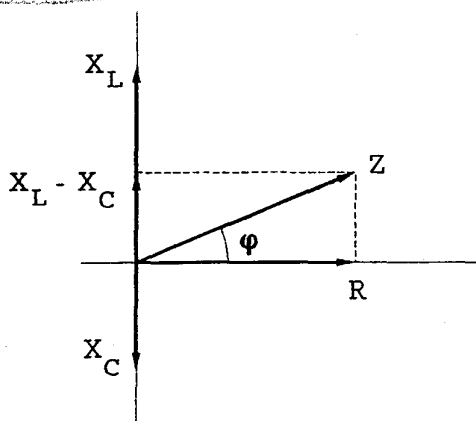


Fig. 22

El valor de la impedancia así como el del desfase depende de la frecuencia. Al crecer la frecuencia aumenta el efecto de la inductancia sobre la impedancia mientras que la influencia de la capacidad decrece. Cuando la frecuencia es muy grande la inductancia es muy elevada presentando un gran obstáculo al paso de corriente, por lo que actúa aproximadamente como un circuito abierto. El condensador, sin embargo, presenta para esta situación una capacitancia muy pequeña y en consecuencia un comportamiento cercano al de un cortocircuito. Si la frecuencia es pequeña se invierten los comportamientos de bobina y condensador.

En cuanto al desfase, la tensión irá adelantada respecto a la intensidad si  $X_L > X_C$  mientras que irá atrasada en caso contrario.

En la ecuación (34) se observa que el valor mínimo de la impedancia y el desfase se logra cuando la reactancia es nula

$$\boxed{X_L = X_C} \text{ es decir } L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad (39)$$

Cuando esto sucede se dice que se produce el fenómeno de resonancia, para el cual la oscilación se realiza con la frecuencia propia del sistema  $\omega_0$  cuyo valor se puede determinar a partir de la ecuación (36)

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (40)$$

Para esta frecuencia de resonancia, la tendencia de la bobina a oponerse al cambio de corriente se ve contrarrestada exactamente por la tendencia del condensador a actuar como almacén de carga, la intensidad que circula a través del circuito es la máxima, y la impedancia y el desfase son

$$Z(\omega_0) = R \quad \text{y} \quad \phi(\omega_0) = 0 \quad (41)$$

Cuando la resistencia del circuito es muy pequeña, si la frecuencia del generador coincide con la de resonancia la intensidad se hace muy grande, en teoría infinita para una resistencia nula. Desde el punto de vista energético esto se explicaría considerando que los efectos de autoinducción y bobina se contrarrestan y por tanto la energía suministrada por el generador puede ser consumida exclusivamente por la resistencia. Si la resistencia es muy pequeña, el consumo es menor que la energía suministrada con lo que la ganancia neta de energía por el circuito se traduce por un aumento de la intensidad.

Lejos de la resonancia, el ángulo de fase es positivo para  $\omega > \omega_0$  y el circuito tiene un carácter inductivo, mientras que es capacitivo si  $\omega < \omega_0$ , con desfase negativo.

A veces es útil la magnitud denominada factor de calidad Q de un circuito que se define como

$$\frac{L}{R} \rightarrow \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (42)$$

de forma que, para una frecuencia dada, cuanto menor sea la resistencia mayor es el factor de calidad y mayor por tanto la intensidad. Un valor de Q grande es importante en muchas aplicaciones técnicas, incluyendo la sintonización de receptores de radio que se logra mediante una capacidad o autoinducción que pueden variar de forma continua para adaptar la frecuencia a la de resonancia.

La variación del desfase y de la intensidad en función de la frecuencia se ha representado en las fig. 23 y 24 para distintos valores del factor de calidad.

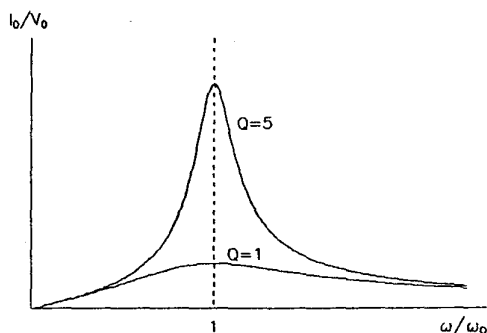


Fig. 23

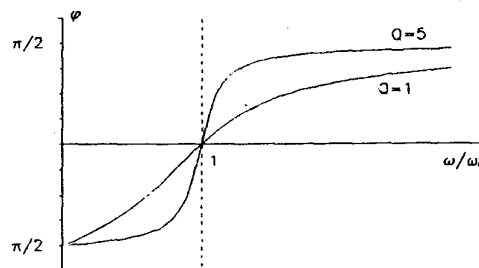


Fig. 24

## 7. Circuito RLC paralelo

Una asociación de resistencia  $R$ , autoinducción  $L$  y condensador  $C$  de forma tal que la ddp para todos los elementos sea la misma, como indica la fig. 25, constituye una asociación en paralelo.

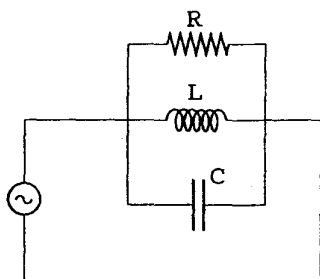


Fig. 25

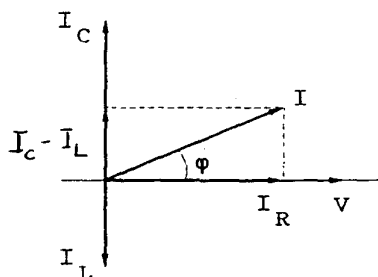


Fig. 26

Dada la impedancia de cada uno de estos elementos, por cada uno de ellos pasará una intensidad distinta, de forma que su suma corresponda a la intensidad total del circuito que llega al nudo A.

$$\boxed{V = I_R R = I_L X_L = I_C X_C = I_0 Z} \quad (43)$$

tal que

$$I = I_R + I_L + I_C = V \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \right) = \frac{V}{Z} = V \cdot Y \quad (44)$$

expresión en que la suma es una suma vectorial y donde Z representa la impedancia equivalente de todo el circuito y cuyo valor será por tanto

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \quad (45)$$

o en términos de admitancias

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C \quad (46)$$

En la ecuación anterior se observa que el comportamiento de intensidades y admitancias es análogo por lo que las gráficas que representan ambas magnitudes serán equivalentes, diferenciándose en un factor de escala tal como se pone de manifiesto en las fig. 26 y 27.

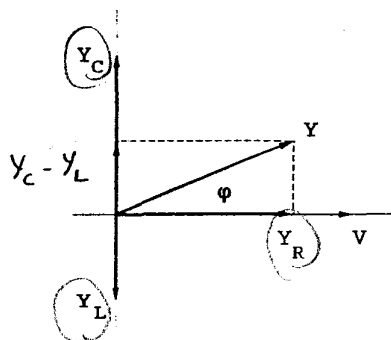


Fig. 27

De ellas se concluye

$$Y = \sqrt{Y_R^2 + (Y_C - Y_L)^2} \quad (47)$$

y expresando el valor de las admitancias

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2} \quad (48)$$

Puesto que en la resistencia el voltaje y la intensidad van en fase y el voltaje es el mismo para todos los elementos, el desfase entre voltaje e intensidad total será el mismo que el existente entre la resistencia y la admitancia total.

$$\phi = \arctan \frac{Y_C - Y_L}{Y_R} = \arctan \left( R \cdot \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right) \quad (49)$$

## 8. Circuitos generales

Una generalización de todo lo anterior permitirá determinar cualquier circuito de corriente alterna donde haya asociación de impedancias

**SERIE** La intensidad a través de todas ellas es la misma, el voltaje total es la suma de las ddp en cada una de ellas y el comportamiento del circuito se puede estudiar por medio de la impedancia equivalente

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots = \sum_k Z_k \quad (50)$$

La impedancia total puede ser menor que cualquiera de las impedancias componentes, debido a los efectos opuestos de las reactancias inductiva y capacitiva.

**PARALELO:** Cada impedancia presenta la misma ddp, pero por cada una de ellas circula una intensidad, la suma de las cuales corresponderá a la intensidad total. El circuito presenta una admitancia equivalente

$$Y = \frac{1}{Z} = \sum_k Y_k \quad (51)$$

La forma de asociación de impedancias es por tanto idéntica a la de resistencias en corriente continua, pero ha de tenerse en cuenta que en corriente alterna todas las magnitudes son vectoriales, y por tanto las sumas también tendrán el mismo carácter.

## 9. Potencia en circuitos de corriente alterna

La potencia instantánea cedida por el generador a un circuito de corriente alterna se define, al igual que en corriente continua (ec. (29) de la parte I), como el producto del voltaje por la intensidad

$$P(t) = V \cdot I = (V_0 \sen \omega t) (I_0 \sen (\omega t + \phi)) \quad (52)$$

donde se observa que la potencia varía con el tiempo pudiendo tomar valores positivos, nulos e incluso negativos debido a la existencia de inductancias y condensadores que introducen el desfase  $\phi$ .

La expresión anterior se puede modificar utilizando las identidades trigonométricas siguientes

$$\begin{aligned} \text{sen } (\omega t + \phi) &= \text{sen } \omega t \cos \phi + \cos \omega t \text{sen } \phi \\ \text{sen } \omega t \cos \omega t &= \frac{1}{2} \text{sen } 2\omega t \end{aligned} \quad (53)$$

con lo que la ecuación (52) toma la forma

$$P(t) = V_0 I_0 (\underbrace{\cos \phi \text{sen}^2 \omega t}_{\text{Potencia activa}} + \underbrace{\frac{1}{2} \text{sen} \phi \cos 2\omega t}_{\text{Potencia reactiva}}). \quad (54)$$

El primer término de esta suma es siempre positivo y puesto que depende del coseno del ángulo de fase, este sumando corresponde a la potencia instantánea consumida por los elementos resistivos del circuito. El segundo sumando depende del seno del ángulo de fase y en consecuencia representa la potencia puesta en juego en la reactancia del circuito que puede ser positivo, negativo o nulo. Así en un momento dado, la potencia de una corriente alterna se puede descomponer en dos partes, correspondientes a ambos sumandos: la potencia activa relativa a la resistencia total  $R$ , y la potencia reactiva correspondiente a la reactancia  $X$ .

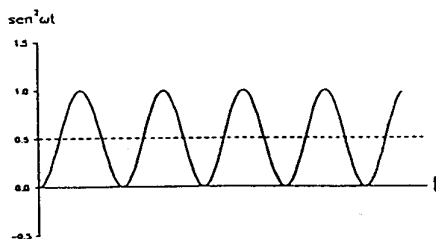


Fig. 28

La potencia instantánea es una función complicada del tiempo. Normalmente estamos interesados en la potencia media en uno o más ciclos. El valor medio en uno o más ciclos del segundo sumando es cero; este término oscila dos veces en cada ciclo y es positivo la mitad del tiempo y negativo la otra mitad. El valor medio de la función  $\text{sen}^2 \omega t$  es  $1/2$ , tal como se desprende de la fig.28, con lo que la potencia media es

$$P = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi \quad \Rightarrow \text{Potencia media } \langle P \rangle \quad (55)$$

La mayoría de aparatos de medida (amperímetros, voltímetros...) no miden valores máximos sino valores eficaces de la intensidad y de la corriente, que se definen como la raíz cuadrada del promedio en un periodo del cuadrado de la magnitud. Así, para el caso de la intensidad el valor instantáneo de  $I^2$  es

$$I^2 = I_0^2 \sin^2 (\omega t + \phi) \quad (56)$$

y su valor medio en un periodo

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 \quad (57)$$

con lo que el valor eficaz de la intensidad será

$$I_e = \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \quad (58)$$

Análogamente para la tensión eficaz tendremos

$$V_e = \sqrt{\langle V^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 \quad (59)$$

con lo que en términos de valores eficaces, la potencia media es

$$P = I_e V_e \cos \phi \quad (60)$$

Lo mismo que sucede en corriente continua, la potencia suministrada depende de la tensión y de la intensidad, sin embargo a diferencia de ella, también depende del ángulo de fase a través del factor  $\cos \phi$  denominado factor de potencia

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} \quad (61)$$

que dependerá del circuito en particular que se esté estudiando así como de la frecuencia de la señal alterna. La potencia será máxima cuando  $\cos \phi$  valga la unidad y por tanto la impedancia total tenga el valor de la resistencia. Esto se consigue cuando la reactancia  $X$  sea nula es decir cuando sólo hay resistencias puras o en el caso más general para la frecuencia de resonancia.

La ec. (60) es formalmente idéntica a la de la potencia en corriente continua si nuevamente tratamos las magnitudes como vectores, y por tanto podemos expresar la potencia media consumida en un elemento determinado como el producto escalar del voltaje e intensidad en dicho elemento. Está claro que en una inductancia o condensador puros el

elemento. Está claro que en una inductancia o condensador puros el desfase es de  $90^\circ$  y, en consecuencia, el factor de potencia es nulo. Así, la potencia reactiva, que en un instante tiene un valor determinado, medida en un periodo da un valor medio nulo. Se dice pues que la autoinducción y el condensador puros no consumen potencia. Si tienen un comportamiento real, los términos resistivos de estos elementos disiparán una potencia que contribuye a la potencia total.

De las ecuaciones anteriores, se obtiene para la potencia media

$$P = \frac{1}{2} V_0 I_0 \frac{R}{Z} = \frac{1}{2} I_0^2 R = I_e^2 R \quad (62)$$

por lo que una corriente alterna de valor máximo  $I_0$  suministra la misma potencia que una corriente continua de intensidad su valor eficaz,  $I_0/\sqrt{2}$ .

Dado que la potencia consumida depende del factor de potencia, si el valor de éste es pequeño lo que indica una reactancia elevada (motores...), las compañías eléctricas, o bien obligan a corregir el factor de potencia (hacer  $\cos\phi$  cercano a la unidad) o bien a medir también la potencia reactiva. Al corregir el factor de potencia, aunque la potencia consumida es la misma, como el voltaje es constante, disminuye la intensidad que circula por la línea y las pérdidas por transporte son menores.

Los aparatos de consumo generalmente contienen elementos resistivos y motores, por lo que puede considerarse como una impedancia  $Z$  de carácter inductivo por la que pasa una corriente  $I_z$  con un desfase  $\phi$  con respecto a la tensión.

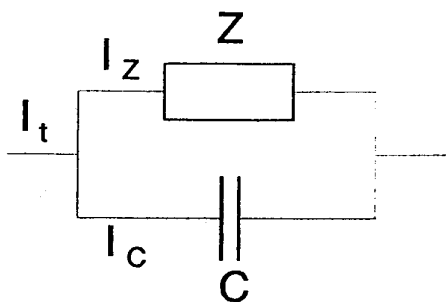


Fig. 29

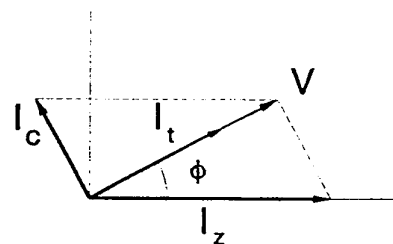


Fig. 30

La corrección del factor de potencia, esto es hacer que intensidad y voltaje total estén en fase se puede conseguir colocando un condensador con la capacidad adecuada en paralelo con todo el circuito tal como indica la fig. 29. Con ello la intensidad total será un vector



de componentes la intensidad que circula por la impedancia  $I_z$ , y la intensidad que pasa a través del condensador  $I_c$ , como se pone de manifiesto en la fig. 30. Si se ha corregido el desfase, el voltaje y la intensidad total irán en la misma dirección y por tanto

$$I_c = I_z \operatorname{sen} \phi \quad (63)$$

donde  $\phi$  es el desfase entre  $I_z$  y  $V$  que es el mismo que el existente antes de colocar el condensador puesto que la impedancia sigue siendo la misma y está sometida a la misma tensión.

Sustituyendo  $I_c$  por su valor obtenemos

$$I_c = \frac{V}{X_c} = V C \omega \quad (64)$$

y la capacidad que ha de tener el condensador capaz de corregir el factor de potencia ha de ser

$$C = \frac{I_z \operatorname{sen} \phi}{V \omega} = \frac{\operatorname{sen} \phi}{Z \omega} \quad (65)$$

## 10. Corrientes trifasicas

El generador determinado por una bobina moviéndose en un campo magnético origina una única tensión alterna, denominándose por ello generador monofásico. Un generador construido con tres bobinas iguales, de forma que las direcciones normales a sus espiras formen entre sí ángulos de  $120^\circ$  ( $2\pi/3$ ), constituye un generador trifásico (fig.31).

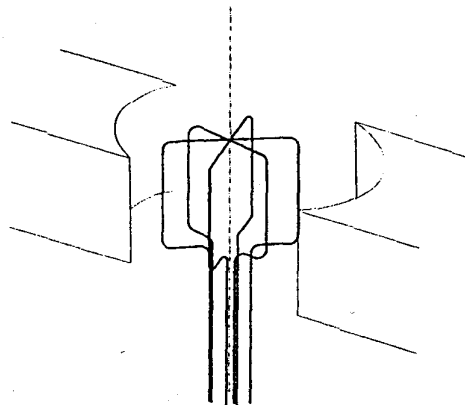


Fig. 31

Los sistemas trifásicos son los que con más frecuencia se utilizan en la generación, transporte y distribución de energía eléctrica, dado que, entre otras, presenta la ventaja de resultar más económico que el

monofásico para el transporte de una determinada energía, a igualdad de potencia e igualdad de pérdidas en la línea.

El generador trifásico permite obtener tres fuerzas electromotrices o tensiones trifásicas, una en cada bobina, de valores

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 \text{ sen } \omega t \\ V_2 &= V_0 \text{ sen } \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ V_3 &= V_0 \text{ sen } \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

con el mismo valor máximo,  $V_0$ , la misma frecuencia,  $\omega$ , pero desfasadas entre sí  $120^\circ$ , como indica la fig. 32.

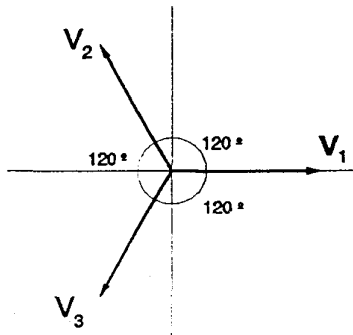


Fig. 32

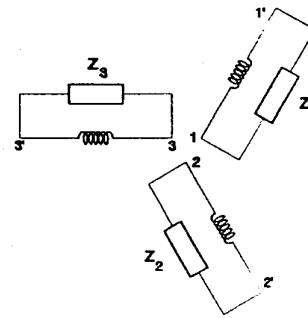


Fig. 33

Los generadores trifásicos son los que se utilizan a nivel industrial. La primera idea para utilizar las tensiones que producen sería hacerlo independientemente, aplicando cada una de ellas a circuitos con impedancias respectivas  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$ , como en la fig. 33. donde los bobinados corresponden a los del generador. Con este montaje se obtendrían tres intensidades, una por cada impedancia de valores

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{01} \text{ sen } (\omega t + \varphi_1) \\ I_2 &= I_{02} \text{ sen } \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_2 \right) \\ I_3 &= I_{03} \text{ sen } \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} + \varphi_3 \right) \end{aligned} \quad (67)$$

donde las intensidades y desfases dependerían de las respectivas impedancias. Ahora bien, si se consigue que las impedancias sean iguales  $Z_1 = Z_2 = Z_3$ , se logra que los tres circuitos sean equivalentes, y por tanto

$$\begin{aligned} I_{01} &= I_{02} = I_{03} \\ \varphi_1 &= \varphi_2 = \varphi_3 \end{aligned} \quad (68)$$

es decir, en cada circuito la intensidad es la misma pero estará desfasada respecto a la tensión que la produce un ángulo  $\varphi$  y las tres

intensidades estarán desfasadas entre sí  $120^\circ$ . Cuando se ha conseguido esto, se dice que el sistema está equilibrado. En lo que sigue supondremos que los sistemas que estudiaremos cumplen esta condición.

Para utilizar estos circuitos de forma independiente, se necesitarían seis hilos, lo que resulta antieconómico. En la práctica se realizan montajes capaz de dar tres tensiones o intensidades con menos cable. Con este fin se utilizan los montajes en estrella y triángulo.

### Montaje en estrella

En el montaje en estrella se unen los tres extremos equivalentes de las bobinas del generador en un punto común (fig. 34). La línea de transmisión consta de cuatro hilos conductores, tres de ellos son fases activas 1, 2 y 3 y parten de los extremos libres de los bobinados del generador. El 4º hilo conductor se denomina neutro y parte del hilo común.

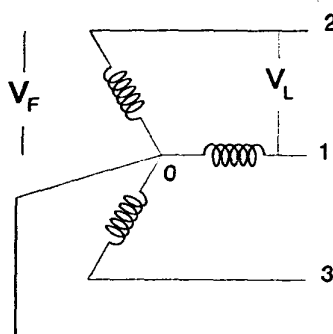


Fig. 34

Si el sistema está equilibrado, la intensidad a través del hilo neutro

$$I = I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (69)$$

por lo que, en este caso, puede prescindirse del hilo neutro y utilizar sólo tres cables. En la práctica nunca está el sistema perfectamente equilibrado y hace falta este cuarto hilo. Sin embargo, al ser la corriente que pasa por él muy pequeña, puede ser de menor sección que los otros tres.

Si las cargas se conectan también en estrella, el conductor de retorno puede ser la tierra, como se hace en la distribución urbana de energía eléctrica.

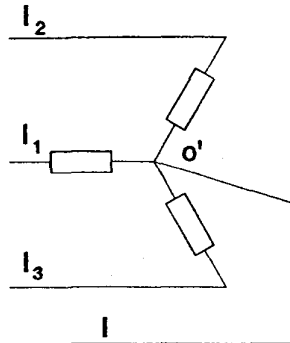


Fig. 35

Las tensiones  $V_{o1}$ ,  $V_{o2}$  y  $V_{o3}$ , corresponden a las ddp entre el neutro y la fase activa y se denominan **tensiones de fase**, mientras que las ddp  $V_{12}$ ,  $V_{13}$  y  $V_{23}$  son las existentes entre fase y fase y se denominan **tensiones de línea**.

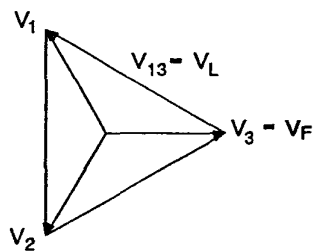


Fig. 36

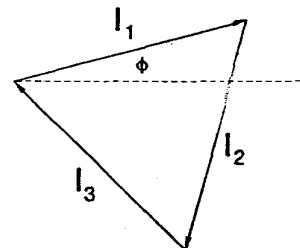


Fig. 37

Gráficamente constituyen un triángulo equilátero tal como se observa en la fig. 36, donde se han representado tanto las tensiones como las intensidades. Así resulta

$$V_{ij} = V_{línea} = \sqrt{3} V_{fase} \quad \text{con } i, j = 1, \dots, 3 \quad (70)$$

es decir, la ddp entre fase y fase es  $\sqrt{3}$  veces la existente entre fase y neutro. Así si la tensión de fase fuera de 127 v, la ddp de línea sería de 220 v. Si la ddp de fase es de 220 v, la de línea correspondería a 380 v. Por eso en algunas instalaciones se dispone de dos tensiones relacionadas entre sí por el factor  $\sqrt{3}$ . De la figura

también se observa que las tensiones de línea y fase presentan un desfase de  $30^\circ$ .

Es inmediato ver que si las tres cargas son iguales, también lo son las intensidades  $I_{línea} = I_{fase}$ .

La potencia instantánea de este montaje será la suma de las potencias instantáneas en cada fase. Un cálculo de esta magnitud revela que la potencia instantánea es independiente del tiempo y por tanto es equivalente a la potencia media. La potencia media consumida en este montaje, la calcularemos de la forma siguiente llamando  $V_l$  a la ddp entre fase y fase (de línea) y  $V_f$  a la existente entre fase y neutro (de fase), en la impedancia  $l$  se consumirá una potencia

$$P_1 = V_f I \cos \phi = \frac{V_l}{\sqrt{3}} I \cos \phi \quad (71)$$

y al ser todas las impedancias iguales, la potencia total será

$$P = 3 P_f = 3 V_f I \cos \phi = \sqrt{3} V_l I \cos \phi \quad (72)$$

### 11. Montaje en triángulo

En el montaje en triángulo, fig. 38, los tres bobinados del generador se conectan formando un triángulo. Las líneas se sacan de los vértices.

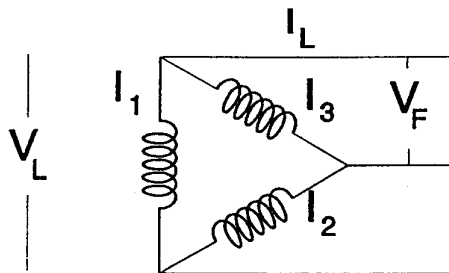


Fig. 38

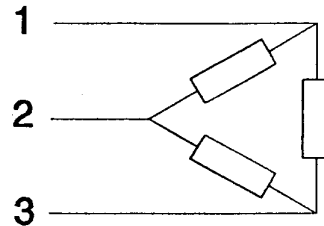


Fig. 39

Entre los terminales de cada línea sólo hay un bobinado, por lo que se tiene

$$V_{línea} = V_{fase} \quad (73)$$

$$I_{ij} = I_i - I_j \quad \text{con } i, j = 1, \dots, 3 \quad (74)$$

En la fig. 38 se representan las intensidades que circulan por cada fase,  $I_1$ , y la de línea  $I_L$ . Se observa que

$$I_{ij} = I_{línea} = \sqrt{3} I_{oi} = \sqrt{3} I_f \quad (75)$$

En este montaje sólo se necesitan tres conductores, pero se obtiene sólo un valor para la tensión. Además, a igualdad de corriente en línea se obtiene menos corriente en cada fase que en el caso anterior. Por todo ello, es más utilizado el montaje en estrella.

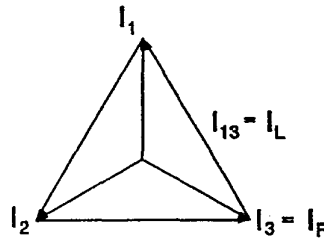


Fig. 40

En cuanto a la potencia consumida en este montaje, y siempre en términos de valores eficaces, se tiene

$$\begin{aligned} P_{fase} &= V_f I_f \cos \varphi = V_1 \frac{I_{subl}}{\sqrt{3}} \cos \varphi \\ P_{total} &= 3 P_{fase} = \sqrt{3} V_1 I_L \cos \varphi \end{aligned} \quad (76)$$

es decir, el mismo valor que en la conexión en estrella.

## APENDICE

### TRANSFORMADOR

Una de las grandes ventajas de la corriente alterna frente a la continua, estriba en la posibilidad de obtener en la primera cualquier tensión deseada, casi sin pérdidas, por medio de los transformadores. Ordinariamente en los lugares de utilización se precisan tensiones bajas que no resulten peligrosas para el organismo humano (125-220 V). El funcionamiento más óptimo de los generadores eléctricos corresponde a una tensión media de varios miles de voltios, mientras que el transporte de energía eléctrica desde el punto de producción al de consumo, conviene que se haga a una tensión lo más alta posible (220000 e incluso 380000 V). Ello es debido a que tal como se ha visto, si las líneas de transmisión tienen una resistencia  $R$ , la pérdida de potencia por efecto Joule es  $RI^2$  por lo que es conveniente realizar el transporte con una intensidad baja. Ahora bien, la potencia instantánea total conectada a la conducción es  $VI$ , por lo que una disminución de la intensidad se conseguirá con un aumento de tensión.

Por tanto en una red de distribución existe siempre la necesidad de transformar la tensión. Esto puede conseguirse utilizando un transformador que es un dispositivo que varía la tensión y la intensidad de la corriente alterna con una pérdida de potencia despreciable.

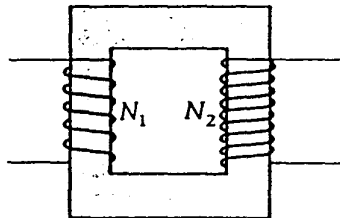


Fig. 41

El transformador consiste en un núcleo de hierro dulce cerrado sobre sí mismo sobre el que hay devanadas dos bobinas, tal como indica la Fig.41. La bobina por la que circula la corriente de entrada se denomina *primario* y la otra *secundario*. Ambas bobinas pueden utilizarse como primario o secundario según la transformación de voltaje que se desee conseguir. La función del núcleo de hierro consiste en aumentar el flujo magnético producido por la corriente alterna y transportar este flujo de forma que practicamente todo el que atraviesa una espira de una

bobina sea el que atraviese todas las demás espiras de ambas bobinas. Las pérdidas de energía en el transformador son debidas en primer lugar por la resistencia de las bobinas, lo que puede reducirse realizándolas con un material de baja resistencia, en segundo lugar por la presencia de corrientes parásitas (corrientes de Foucault) que se reducen construyendo el núcleo de hierro en forma de láminas; por último las pérdidas de energía por fenómenos de histéresis disminuyen utilizando hierro dulce. Con esto es relativamente sencillo diseñar un transformador en el que se transfiera potencia del primario al secundario con un rendimiento muy próximo al 100%. Estudiaremos sólo el caso de un transformador ideal, sin ningún tipo de pérdidas para el que por tanto las bobinas son autoinducciones puras.

Consideremos el primario y secundario como dos bobinas ideales con  $N_1$  y  $N_2$  espiras respectivamente. Si conectamos el primario a un generador de corriente alterna, el circuito de entrada consiste en un generador y una autoinducción, produciéndose en el primario una corriente desfasada  $90^\circ$  respecto a la tensión y con una potencia media nula. Esta corriente alterna producirá un flujo magnético que a través del núcleo de hierro atravesará el secundario originando una tensión en él. A partir de la ley de Faraday se puede demostrar que la tensión en el secundario es igual a la tensión del primario por la relación del número de espiras en ambos  $N_2/N_1$ .

La fem inducida en el primario es:

$$V_1 = -\frac{d\phi}{dt} = -N_1 \frac{d\phi_{\text{espira}}}{dt} \quad (77)$$

donde el flujo total es el que atraviesa cada espira por el número de espiras.

Si se admite que no hay pérdida del flujo por el núcleo de hierro, este flujo será el que atraviese ambas bobinas, que en el secundario podrá expresarse como  $N_2 \phi_{\text{espira}}$ , por lo que la tensión en el secundario es:

$$V_2 = -\frac{d\phi}{dt} = -N_2 \frac{d\phi_{\text{espira}}}{dt} \quad (78)$$

Comparando ambas ecuaciones se observa que



$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1$$

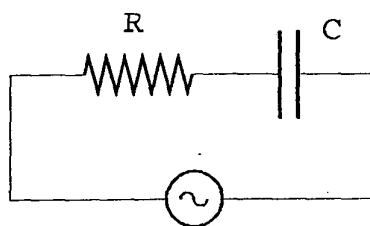
Así pues según sea la relación del número de espiras, el transformador aumentará o disminuirá la tensión de entrada. Está claro que invirtiendo el papel de primario y secundario, también se invierten sus efectos.

PARTE III  
PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Un generador que tiene una amplitud de voltaje constante de 100 v y una pulsación de 500 rad/s, se conecta a los extremos de un circuito serie formado por una resistencia de 400  $\Omega$  y un condensador de 2  $\mu\text{F}$ . Determinar a) la impedancia total del circuito, b) la amplitud de intensidad, c) la diferencia de fase entre el voltaje y la intensidad, d) la potencia consumida en el circuito. e) Realizar el mismo estudio si ambos elementos se conectaran en paralelo.

#### SOLUCION

a) El sistema vendrá representado por el circuito siguiente



para el que

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = 1000 \Omega \quad (1)$$

y la impedancia total

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = 1077 \Omega \quad (2)$$

b) La intensidad será

$$I = \frac{V}{Z} = 92.8 \text{ mA} \quad (3)$$

c) El desfase entre voltaje e intensidad es el que presenta la impedancia total con la resistencia

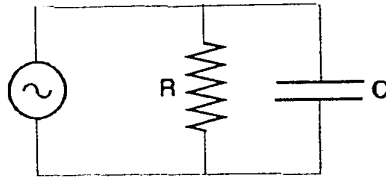
$$\varphi = \arctan \frac{X_C}{R} = -68.20^\circ \quad (4)$$

d) La potencia disipada

$$P = \frac{1}{2} VI \cos \varphi = 1.725 \text{ W} \quad (5)$$

donde se introduce el factor 1/2 al estar trabajando con valores máximos

e) Si la conexión se hubiera hecho en paralelo el circuito correspondiente sería:



pasando por la resistencia una intensidad

$$I_R = \frac{V}{R} = 0.25 A \quad (6)$$

y por el condensador

$$I_C = \frac{V}{X_C} = 0.10 A \quad (7)$$

con lo que la intensidad total presenta una amplitud

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = 0.269 A \quad (8)$$

con un adelanto respecto al voltaje de

$$\phi' = 21.80^\circ$$

La impedancia total en este caso es

$$Z = \frac{V}{I} = 371.75 \Omega \quad (9)$$

y la potencia disipada

$$P = \frac{1}{2} V I \cos \phi' = R I_R^2 = 12.5 W \quad (10)$$

2.- Un motor tiene un factor de potencia de 0.6 y está conectado a una tensión de 2500 v con una frecuencia de 50 Hz, circulando una intensidad de 7.6 A. a) Calcular la potencia que consume el motor. b) Corregir el factor de potencia. c) Una vez corregido el factor de potencia determinar la intensidad por la línea.

#### SOLUCION

Un motor es basicamente un sistema formado por un bobinado, por lo que se puede considerar como una inductancia pura en serie con una resistencia, de forma que el factor de potencia sea el indicado.

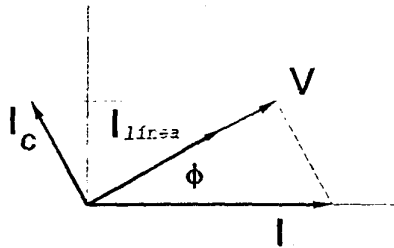
a) La potencia consumida es

$$P = VI \cos \phi = 2500 \text{ v} \cdot 7.6 \text{ A} \cdot 0.6 = 11400 \text{ w} \quad (1)$$

b) Para corregir el factor de potencia se conectará un condensador en paralelo con el motor de forma que

$$I_c = \frac{V}{X_c} = VC\omega \quad (2)$$

con lo que las intensidades ahora se adaptarán a la figura siguiente



de la cual se concluye

$$I_c = I \sin \phi = 7.6 \text{ A} \cdot 0.8 = 6.08 \text{ A} \quad (3)$$

lo que indica que la capacidad del condensador ha de ser

$$C = \frac{6.08 \text{ A}}{2500 \text{ v} \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}} = 7.76 \mu\text{F} \quad (4)$$

c) La intensidad ahora en la línea es

$$I_{\text{línea}} = I \cos \phi = 4.56 \text{ A} \quad (5)$$

3.- Se emplea un condensador variable para sintonizar un receptor en la banda de radiotransmisión. Se conecta en serie con una bobina de  $2.5 \cdot 10^{-4}$  H y resistencia despreciable. La frecuencia más baja que se desea sintonizar es de  $5.5 \cdot 10^5$  Hz y debe ser la frecuencia más baja del circuito LC. ¿Cuál debe ser la capacidad máxima del condensador variable?. Si se desea sintonizar una banda de frecuencias entre este valor mínimo y un máximo de  $1.8 \cdot 10^6$  Hz, ¿entre qué valores ha de variar la capacidad del condensador?

#### SOLUCION

Para lograr sintonizar el receptor en una determinada frecuencia ha de captar la máxima potencia de la emisora, lo que se logra cuando entra en resonancia con ella. Es decir, la señal que pasa a través del receptor debe de tener la frecuencia de la emisora que a su vez debe corresponder a la de resonancia del sistema. En esta situación la reactancia total del circuito es nula, por lo que

$$\begin{aligned} X_L &= X_C \\ L\omega &= \frac{1}{C\omega} \end{aligned} \quad (1)$$

y la capacidad del condensador en la resonancia

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 L} \quad (2)$$

Para una frecuencia de  $5.5 \cdot 10^5$  Hz

$$C = 3.3495 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 334.95 \text{ pF}$$

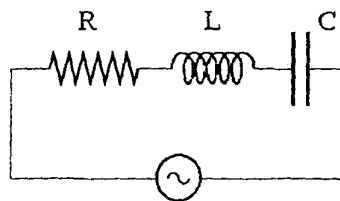
Si se desea sintonizar una banda de frecuencias comprendida entre la  $5.5 \cdot 10^5$  Hz y  $1.8 \cdot 10^6$  Hz, para la frecuencia límite superior, el condensador ha de tener una capacidad comprendida entre el valor anteriormete calculado y el que se obtiene de la ecuación (2) para la frecuencia superior y que resulta ser de 31.27 pF. Así pues

$$31.27 \text{ pF} \leq C \leq 334.95 \text{ pF}$$

4.- Un circuito está constituido por una resistencia óhmica de  $27 \Omega$ , un condensador de  $8 \mu F$  y una bobina real cuya resistencia es de  $12 \Omega$  y su autoinducción de  $0.15 H$ , conectado a un generador de  $220 V$  de tensión eficaz. Calcúlese la impedancia total del circuito y de cada uno de los elementos, la intensidad y el desfase que se produce entre la tensión y la intensidad así como la potencia disipada a) cuando la frecuencia de la tensión conectada es de  $1000 Hz$ , b) cuando es de  $50 Hz$ . c) calcular la frecuencia de resonancia, y la potencia en este caso.

#### SOLUCION

El esquema del circuito corresponde a la figura siguiente



donde se observa que constituye una asociación en serie de las impedancias:

Resistencia,  $R = 27 \Omega$

Bobina:  $r = 12 \Omega$

$$X_L = L\omega$$

presentando una impedancia

$$Z_L = \sqrt{r^2 + X_L^2}$$

con un desfase

$$\alpha = \arctan \frac{X_L}{r}$$

Condensador:  $X_C = 1/C\omega$

La impedancia total del circuito es por tanto

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 - (X_L - X_C)^2}$$

y el desfase entre la intensidad y la tensión aplicada:

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R+r}$$

a) Frecuencia de 1000 Hz

#### IMPEDANCIA

En este caso, los valores de las impedancias obtenidas a partir de las ecuaciones anteriores son:

Resistencia  $27 \Omega$

Bobina:

inductancia  $X_L = 942.48 \Omega$

resistencia  $r = 12 \Omega$

impedancia  $Z_L = 942.56 \Omega$

desfase  $\alpha = 89.27^\circ$

Condensador:

impedancia  $Z_C = X_C = 19.89 \Omega$

desfase  $\beta = -90^\circ$

Con estos valores la impedancia total que presenta el circuito es:

$$Z = 923,41 \Omega \text{ con un desfase } \phi = 87.58^\circ$$

De estos resultados se concluye que la impedancia en este caso tiene carácter inductivo

#### INTENSIDAD

La intensidad que circula por cada elemento es la misma y su valor es

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{220 \text{ V}}{923.41 \Omega} = 0.238 \text{ A}$$

#### POTENCIA

Puesto que los valores de tensión e intensidad corresponden a valores eficaces de estas magnitudes, la potencia puesta en juego para esta frecuencia es

$$P = VI \cos \phi = 220 \text{ V} \cdot 0.238 \text{ A} \cos 87.58^\circ = 2.21 \text{ W}$$

de esta potencia se disipa 0.68 w en la bobina debido a la resistencia que posee y los 1.53 w restantes en la resistencia R del circuito.

b) Frecuencia de 50 Hz

#### IMPEDANCIA

Siguiendo un proceso similar al anterior se obtiene para cada elemento



Resistencia:  $R = 27 \Omega$

Bobina:

inductancia  $X_L = 47.124 \Omega$

resistencia  $r = 12 \Omega$

impedancia  $Z_L = 48.63 \Omega$

desfase  $\alpha = 75.71^\circ$

Condensador:

impedancia  $Z_C = X_C = 397.89 \Omega$

desfase  $\beta = -90^\circ$

Con estos valores la impedancia total que presenta el circuito es:

$$Z = 352.93 \Omega \quad \text{con un desfase } \phi' = -83.66^\circ$$

De estos resultados se observa cómo al disminuir la frecuencia disminuye la impedancia de la bobina mientras que aumenta la del condensador, lo que se refleja en la impedancia total del circuito que ahora posee un carácter capacitivo, y por tanto la tensión irá retrasada respecto a la intensidad lo correspondiente al desfase de  $83.66^\circ$ .

#### INTENSIDAD

La intensidad será para esta frecuencia

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{220 \text{ V}}{352.93 \Omega} = 0.623 \text{ A}$$

#### POTENCIA

$$P = VI \cos \phi' = 220 \text{ V} \cdot 0.623 \text{ A} \cos(-83.66^\circ) = 15.14 \text{ W}$$

de los que  $4.66 \text{ W}$  se disipan en la bobina y  $10.48 \text{ W}$  en la resistencia del circuito

#### c) Frecuencia de resonancia

El fenómeno de resonancia se produce para aquella frecuencia que iguala las reactancias capacitiva e inductiva

$$X_L = X_C$$

lo que para este circuito se consigue cuando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 912.87 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

y por tanto para una frecuencia

$$\nu = f = \frac{\omega}{2\pi} = 145.29 \text{ Hz}$$

En esta situación

$$X_L = X_C = 136.93 \, \Omega$$

Bobina:

$$\text{impedancia } Z_L = 187.45 \, \Omega$$

$$\text{desfase } \alpha = 84.99^\circ$$

y el circuito total

$$Z = R + r = 39 \, \Omega \text{ con un desfase nulo}$$

#### INTENSIDAD

La intensidad en la resonancia tiene el valor máximo

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{220 \text{ v}}{39 \, \Omega} = 5.64 \text{ A}$$

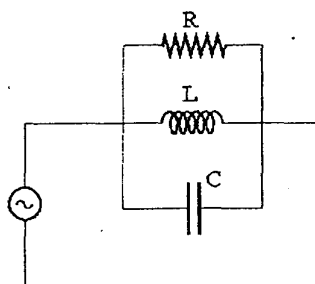
y la potencia tiene también su máximo valor

$$P = VI = 220 \text{ v} \cdot 5.64 \text{ A} = 1240.8 \text{ w}$$

nótese que en este caso la potencia es casi 600 veces mayor que para la frecuencia de 1000 Hz.

5.- Un circuito está formado por una resistencia óhmica de  $100 \Omega$  una reactancia inductiva (inductancia) de  $400 \Omega$  y una reactancia capacitiva (capacitancia) de  $200 \Omega$  conectados en paralelo. Si al conjunto se aplica una tensión de  $220 \text{ v}$  eficaces, calcular a) la intensidad por cada una de las ramas, b) la intensidad total, c) Impedancia y admitancia equivalente, d) el desfase entre la tensión aplicada y la intensidad total, e) la potencia disipada en cada elemento y la total.

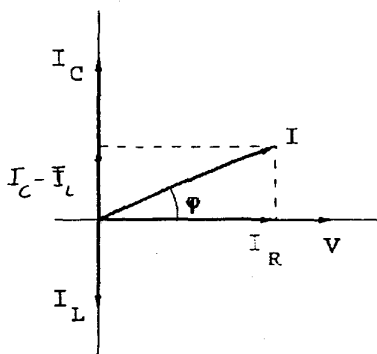
SOLUCION



a) Intensidad por cada rama

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V}{R} = \frac{220 \text{ v}}{100 \Omega} = 2.20 \text{ A} \\ I_L &= \frac{V}{X_L} = \frac{220 \text{ v}}{400 \Omega} = 0.55 \text{ A} \\ I_C &= \frac{V}{X_C} = \frac{220 \text{ v}}{200 \Omega} = 1.10 \text{ A} \end{aligned} \quad (1)$$

b) La intensidad total será la suma vectorial de la que pasa por cada rama. La inductancia y capacitancia se consideran que son puras y por tanto las intensidades correspondientes irán desfasadas  $90^\circ$  retrasada y adelantada respectivamente respecto a la tensión total, tal como se ve en la figura.



Así la intensidad total

$$I = \sqrt{I_R^2 - (I_C - I_L)^2} = 2.27 \text{ A} \quad (2)$$

con un adelanto respecto a la tensión dada por el desfase

$$\varphi = \arctan \frac{(I_L - I_C)}{I_R} = 14.04^\circ \quad (3)$$

lo que indica que la impedancia total tiene carácter capacitivo.

c) Impedancia y admitancia equivalente

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V}{I} = \frac{220 \text{ V}}{2.27 \text{ A}} = 96.92 \Omega \\ Y &= \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = 1.03 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

d) Potencia

Tanto en el condensador como en la bobina, al ser reactancias puras, la potencia (activa) es nula (desfase de  $90^\circ$  y por tanto el coseno es nulo). En consecuencia la potencia total es la que se disipa en la resistencia

$$\begin{aligned} P_{res} &= VI_R = 220 \text{ V} \cdot 2.2 \text{ A} = 484 \text{ W} \\ P_{tot} &= VI \cos \varphi = 220 \text{ V} \cdot 2.27 \text{ A} \cos 14.04^\circ = 484 \text{ W} \end{aligned} \quad (5)$$

6.- El circuito de un tubo fluorescente está constituido por el tubo, elemento que podemos considerar puramente resistivo, y una reactancia, que se comporta como una bobina real, conectados en serie. Se aplica una tensión eficaz de 220 V y frecuencia 50 Hz a los extremos del circuito, midiéndose una diferencia de potencial en bornes del tubo de 120 V, y de 170 V en los extremos de la reactancia. Si la intensidad que pasa por el circuito es de 0.44 A, calcular: a) Impedancia del circuito, así como el desfase existente entre el voltaje total y la intensidad. b) La resistencia que presenta el tubo. c) Impedancia que presenta la reactancia así como el desfase entre el voltaje y la intensidad en este elemento. d) El valor de la resistencia y de la inductancia de la bobina. e) Potencia consumida por el tubo, por la reactancia y por el circuito total. f) Si se quiere corregir el factor de fase del circuito, calcular la capacidad del condensador que hay que conectar en paralelo para conseguirlo. g) Si se dispone de un condensador de  $4 \cdot 10^{-6}$  F, que se conecta en paralelo con el circuito anterior, las intensidades que pasan por el condensador y la total, son de 276 mA y 289 mA respectivamente ¿En cuánto se ha corregido el factor de potencia? ¿Cuál es la potencia consumida ahora por el circuito? suponer el condensador ideal.

#### SOLUCION

El circuito que constituye el tubo fluorescente se puede considerar como una resistencia, la correspondiente al tubo, conectada en serie con una bobina real, la reactancia. El papel de esta última consiste en lograr la sobretensión necesaria para que se produzca la descarga en el tubo que inicie la ionización del gas que contiene (Neon, Argon...). Una vez iniciado, este fenómeno es automantenido por lo que la reactancia actúa como una impedancia en la que, debido a la resistencia que posee, se disipa una pequeña cantidad de potencia.

Esquemáticamente este circuito lo podemos representar pues por la fig. 1

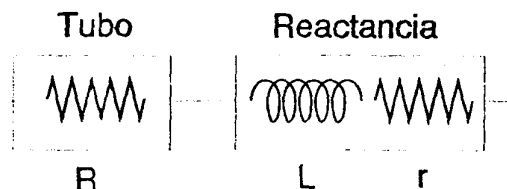


Fig. 1

a) Circuito total

Los voltajes e intensidad del circuito se adaptan a la representación vectorial de la fig. 2.

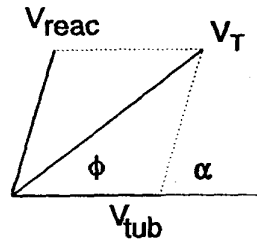


Fig. 2

La impedancia total del circuito

$$Z_T = \frac{V}{I} = \frac{220 \text{ V}}{0.44 \text{ A}} = 500 \Omega \quad (1)$$

El desfase entre voltaje total e intensidad se obtiene aplicando el teorema del coseno al triángulo determinado por los voltajes representados en la fig. 2. Con ello

$$V_{\text{reac}}^2 = V_T^2 + V_{\text{tub}}^2 - 2 V_T V_{\text{tub}} \cos \phi \quad (2)$$

y

$$\phi = 50^\circ$$

b) Resistencia del tubo fluorescente.

$$R = \frac{V_{\text{tub}}}{I} = \frac{120 \text{ V}}{0.44 \text{ A}} = 272.73 \Omega \quad (3)$$

c) Impedancia de la reactancia

$$Z_{\text{reac}} = \frac{V_{\text{reac}}}{I} = \frac{170 \text{ V}}{0.44 \text{ A}} = 386.36 \Omega \quad (4)$$

El desfase entre voltaje e intensidad en la reactancia, se puede calcular a partir del teorema del coseno aplicado al ángulo  $\alpha$  de la figura, obteniéndose

$$\alpha = 82.82^\circ$$

d) De los 170 v que caen en la reactancia

$$\begin{aligned} V_r &= V_{reac} \cos \alpha = 21.25 \text{ V} \\ V_L &= V_{reac} \sin \alpha = 168.67 \text{ V} \end{aligned} \quad (5)$$

con lo que su resistencia y autoinducción serán

$$\begin{aligned} R &= \frac{V_r}{I} = \frac{21.25 \text{ V}}{0.44 \text{ A}} = 48.295 \Omega \\ X_L &= \frac{V_L}{I} = \frac{168.67 \text{ V}}{0.44 \text{ A}} = 383.34 \Omega \\ L &= \frac{X_L}{\omega} = \frac{383.34 \Omega}{2\pi 50 \text{ Hz}} = 1.22 \text{ H} \end{aligned} \quad (6)$$

e) Potencia consumida por el tubo

$$P_{tub} = V_{tub} I = 120 \text{ V} \cdot 0.44 \text{ A} = 52.8 \text{ W} \quad (7)$$

Potencia disipada en la reactancia

$$P_{reac} = V_{reac} I \cos \alpha = V_r I = 9.35 \text{ W} \quad (8)$$

Potencia total en el circuito

$$P_{total} = V_{total} I \cos \phi = 220 \text{ V} \cdot 0.44 \text{ A} \cos 50^\circ = 62.16 \text{ W} \quad (9)$$

f) Para corregir el factor de potencia se conecta un condensador en paralelo con el circuito, de forma que, manteniéndose el voltaje constante, la intensidad total ahora variará, siendo la suma vectorial de la que pasa a través del condensador  $I_c$ , adelantada  $90^\circ$  respecto al voltaje, y la del resto del circuito que, puesto que no ha variado el circuito, seguirá siendo de  $0.44 \text{ A}$  retrasada  $50^\circ$  con el voltaje. Esto queda patente en la fig.3.

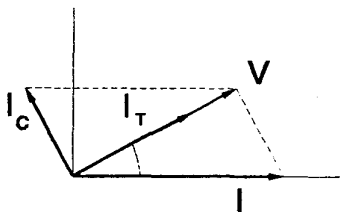


Fig. 3

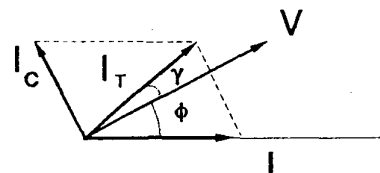


Fig. 4

De la figura se obtiene

$$I_c = I \sin \phi = 0.337 \text{ A} \quad (10)$$

y por tanto la capacidad del condensador capaz de corregir el factor de fase debe ser

$$C = \frac{I_c}{V\omega} = \frac{0.337 \text{ A}}{220 \text{ V} \cdot 2\pi 50 \text{ Hz}} = 4.88 \mu\text{F} \quad (11)$$

g) Si el condensador disponible posee una capacidad nominal de  $4 \mu\text{F}$ , las

intensidades medidas en el condensador y el tubo son tales que su suma corresponden a la intensidad total, como se observa en la fig.4. Aplicando nuevamente el teorema del coseno se determinará el nuevo desfase entre la intensidad total y la I que pasa por el tubo

$$I_c^2 = I_T^2 + I^2 - 2 I_T I \cos(\phi + \gamma) \quad (12)$$

con lo que

$$\phi + \gamma = 37.80^\circ$$

Así pues, el voltaje ahora estará adelantado respecto a la intensidad

$$\gamma = 50^\circ - 37.80^\circ = 12.20^\circ$$

La potencia disipada ahora es

$$P = V \cdot I_{total} \cos \gamma = 62.14 \text{ w} \quad (13)$$

g') Si el condensador disponible posee una capacidad nominal de  $5\mu\text{F}$ , las intensidades medidas ( $I_c = 346 \text{ mA}$  y  $I_{total} = 283 \text{ mA}$ ) se adecúan a un gráfico similar al de la fig. 2, pero donde el voltaje total y la intensidad total no estarán totalmente en fase.

Aplicando nuevamente el teorema del coseno (ecuación (12)) encontramos para el nuevo desfase entre la intensidad total y la I que pasa por el tubo

$$\phi + \gamma = 51.81^\circ$$

y por tanto el desfase entre el voltaje y la intensidad total ahora será

$$\gamma = 50^\circ - 51.81^\circ = -1.81^\circ$$

estando en este caso el voltaje retrasado.

La potencia ahora consumida es

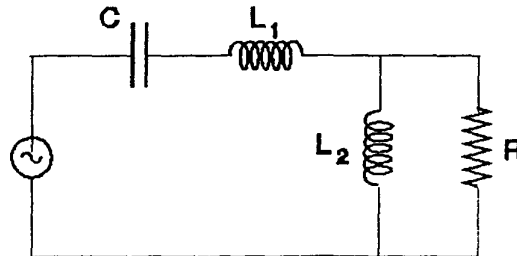
$$P = V \cdot I_{total} \cos \gamma = 62.23 \text{ w} \quad (14)$$

Los valores de las potencias consumidas, tanto con el factor de potencia parcialmente corregido como sin corregir, son iguales. Las pequeñas discrepancias obtenidas son debidas al error producido al elegir el número de decimales.



7.- En el circuito de la figura, la fuente de tensión de corriente alterna tiene una amplitud de 200 V y una frecuencia de 50 Hz. a) Determinar la amplitud de la corriente en la resistencia. b) ¿Es inductiva o capacitiva la impedancia del circuito?.

Nota(  $R=1000 \Omega$ ,  $C=2.5 \mu F$ ,  $L_1=0.25H$  y la bobina en paralelo con R es  $L_2=5H$ )



#### SOLUCION

El esquema del circuito pone de manifiesto que está constituido por una resistencia en paralelo con la bobina  $L_2$ , y el conjunto asociado en serie con la bobina  $L_1$  y el condensador.

a) La intensidad de corriente que circula por la resistencia depende de la ddp entre sus extremos y del valor de la resistencia. Para conocer la ddp hemos de calcular previamente la intensidad total en el circuito así como la impedancia que presenta el conjunto en paralelo.

Un estudio del sistema R,  $L_2$  indica que la admitancia de la asociación será la suma vectorial de las admitancias de cada elemento. Para la bobina

$$Y_L = \frac{1}{L\omega} = \frac{1}{5H \cdot 2\pi \cdot 50Hz} = 6.366 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \quad (1)$$

y la resistencia

$$Y_R = 10^{-3} \Omega^{-1}$$

y, dado que estas magnitudes están desfasadas  $90^\circ$ , se obtiene para la admitancia total del conjunto

$$Y_{cf} = \sqrt{Y_L^2 + Y_R^2} = 1.185 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \quad (2)$$

formando un ángulo con la horizontal

$$\alpha = \arctan \frac{Y_L}{Y_R} = -32.48^\circ \quad (3)$$

Así pues la impedancia que presenta este conjunto al paso de corriente será

$$Z_{CF} = \frac{1}{Y_{CF}} = 843.56 \Omega \quad (4)$$

formando  $+32.48^\circ$  con la horizontal.

Esta impedancia junto con la que presentan la bobina y el condensador

$$\begin{aligned} Z_L &= L_2 \omega = 0.25 H 2\pi 50 \text{ Hz} = 78.54 \Omega \\ Z_C &= \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2.510^{-6} F 2\pi 50 \text{ Hz}} = 1273.24 \Omega \end{aligned} \quad (5)$$

constituyen una asociación en serie, con lo que la impedancia del circuito vendrá representada por el vector

$$Z = (711.6, -741.68) \Omega$$

o expresado en módulo y dirección

$$Z = 1027.84 \Omega \quad \text{con un ángulo } \varphi = -46.19^\circ$$

El valor del desfase indica que la impedancia tiene carácter capacitivo.

La intensidad total que circula por el circuito será

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{200 \text{ V}}{1060.96 \Omega} = 0.21 \text{ A} \quad (6)$$

y la caída de voltaje en la resistencia

$$V_{CF} = I Z_{CF} = 0.21 \text{ A} \cdot 843.56 \Omega = 180.52 \text{ V} \quad (7)$$

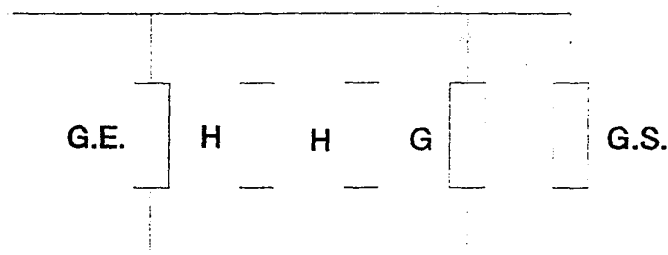
lo que conduce a un valor para la intensidad que atraviesa la resistencia de

$$I_R = \frac{V_{CF}}{R} = 0.18 \text{ A} \quad (8)$$

8.- Una obra alimentada por una red de 220 V y 50 Hz de frecuencia, tiene las siguientes cargas: un grupo electrógeno con una potencia de 4 Kw, un rendimiento  $\eta$  del 87% y un factor de potencia (fdp) de 0.6; dos hormigoneras de 6 CV de potencia con  $\eta = 85\%$  y un fdp=0.7 cada una; una grua con 10 Kw de potencia,  $\eta = 90\%$  y fdp=0.8 y un grupo de soldadura de 5 Kw con  $\eta = 95\%$  y con carácter puramente resistivo (fdp=1). Calcular: a) las corrientes parciales absorbidas por cada carga. b) La corriente total y su desfase con el voltaje. c) Si la línea tiene una resistencia total de  $0.2 \Omega$ , calcular la potencia perdida por efecto Joule en la misma. d) La capacidad del condensador necesario para corregir el factor de potencia y la potencia disipada en este caso en la línea. e) Si se eleva el fdp de la instalación a 0.9, calcular nuevamente la potencia disipada en la línea así como la capacidad del condensador que ha conseguido esta variación.

#### SOLUCION

La distribución de cargas ha de adecuarse al siguiente gráfico



#### a) GRUPO ELECTROGENO

Dada la potencia nominal del grupo y su rendimiento, para un buen funcionamiento ha de absorber de la red una potencia

$$P_1 = \frac{4000 W}{0.87} = 4597.70 W \quad (1)$$

lo que se logra cuando a través de él pasa una corriente

$$I_1 = \frac{P_1}{V \cos \phi_1} = \frac{4597.7 W}{220 V 0.6} = 34.83 A \quad (2)$$

que irá retrasada un ángulo  $\phi_1 = 53.13^\circ$  respecto al voltaje.

#### HORMIGONERAS

Teniendo en cuenta que  $1 CV = 736 W$

$$P_2 = \frac{4416 W}{0.85} = 5195.29 W \quad (3)$$

$$I_2 = \frac{P_2}{V \cos \phi_2} = \frac{5195.29 W}{220 V 0.7} = 33.74 A \quad (4)$$

retrasadas  $\phi_2 = 45.57^\circ$

GRUA

$$P_3 = \frac{10000 W}{0.90} = 11111.11 W \quad (5)$$

$$I_3 = \frac{P_3}{V \cos \phi_3} = \frac{11111.11 W}{220 V 0.8} = 63.13 A \quad (6)$$

retrasada  $\phi_3 = 36.87^\circ$

GRUPO DE SOLDADURA

$$P_4 = \frac{5000 W}{0.95} = 5263.16 W \quad (7)$$

$$I_4 = \frac{P_4}{V \cos \phi_4} = \frac{5263.16 W}{220 V 1} = 23.92 A \quad (8)$$

en fase con el voltaje.

b) Corriente total

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 182.49 A \quad (9)$$

con un retraso de  $\phi = 38.63^\circ$  con respecto al voltaje, y por tanto con un  $\text{fdp} \cos \phi = 0.78$

c) Dado que la línea es un elemento resistivo se disipará por efecto Joule una potencia:

$$P_L = R I^2 = 0.2 \Omega 182.49 A^2 = 6660.52 W \quad (10)$$

La potencia activa de toda la instalación será logicamente la suma de la consumida por cada elemento, o lo que es lo mismo

$$P = V I \cos \phi = 220 V 182.49 A 0.781 = 31355.43 W$$

está claro que de la red se ha de absorber esta potencia más la consumida en la línea es decir unos 38016 W. La potencia disipada en la línea representa por tanto el 17.52% de la potencia total absorbida.

d) Capacidad necesaria para corregir el factor de potencia

$$C = \frac{I \sin \phi}{V \omega} = 1.65 10^{-3} F = 1.65 mF \quad (12)$$

una vez corregido el  $\text{fdp}$ , la intensidad total por el circuito es

$$I = \frac{P}{V} = 142.52 A \quad (13)$$

$$I = \frac{P}{V} = 142.52 A \quad (13)$$

lo que da lugar a una pérdida de potencia en la línea de 4062.66W es decir prácticamente el 61% del caso anterior.

e) Si el fdp se ha corregido hasta un valor de 0.9, la nueva corriente en la línea es

$$I = \frac{P}{V \cos \phi'} = 158.36 A \quad (14)$$

retrasada un ángulo de  $25.84^\circ$  respecto a V.

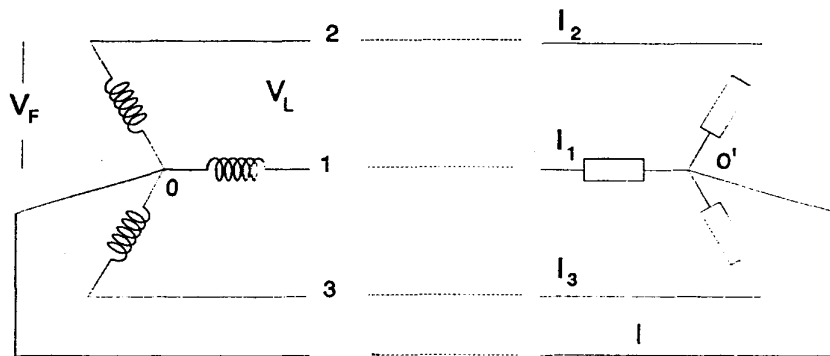
La potencia disipada en la línea en este caso resulta ser de 5015.58 W.

La observación de los distintos resultados obtenidos para los distintos factores de potencia ponen de relieve la ventaja de su corrección.

9.- El generador trifásico en estrella de la figura es tal que produce una tensión de línea de 381 V eficaces a 50 Hz de frecuencia. Calcular la tensión de fase que suministra el generador. Si se dispone de tres impedancias iguales de valor  $50\Omega$  con carácter inductivo y fdp de 0.8, calcular la tensión de línea y de fase en las cargas, la intensidad que pasa por ellas y la tensión de línea así como la potencia disipada si se conectan a) en estrella, b) en triángulo. Despreciar la resistencia de la línea.

#### SOLUCION

a) Conexión de cargas en estrella: dado que las impedancias son iguales, el sistema es el montaje equilibrado estrella-estrella de la figura



De la figura se observa

$$V_L = V_{1,2} = V_{1,0} - V_{2,0}$$

de forma que, si la tensión de línea es de 381 V, la tensión en cada fase (tensión de fase) será  $V_F = 381/\sqrt{3} = 220$  V con la misma frecuencia y desfasadas  $120^\circ$  entre sí.

Puesto que se desprecian los efectos de la línea de transporte, la tensión de fase del generador es la misma que la existente entre fase y neutro de la carga, por lo que la corriente de fase

$$I_{1,c} = \frac{V_{1,o'}}{Z_1} = \frac{220 \text{ V}}{50 \Omega} = 4.4 \text{ A} \quad (1)$$

por tanto

$I_{1,o'} = 4.4$  A atrasada  $36.87^\circ$  respecto a  $V_{1,o'}$

$I_{2,o'} = 4.4$  A atrasada  $36.87^\circ$  respecto a  $V_{2,o'}$ , o lo que es lo mismo retrasada un ángulo de  $276.87^\circ$  respecto a  $V_{1,o'}$

$I_{3,o'} = 4.4$  A atrasada  $36.87^\circ$  respecto a  $V_{3,o'}$ , es decir retrasada  $156.87^\circ$  respecto a  $V_{1,o'}$

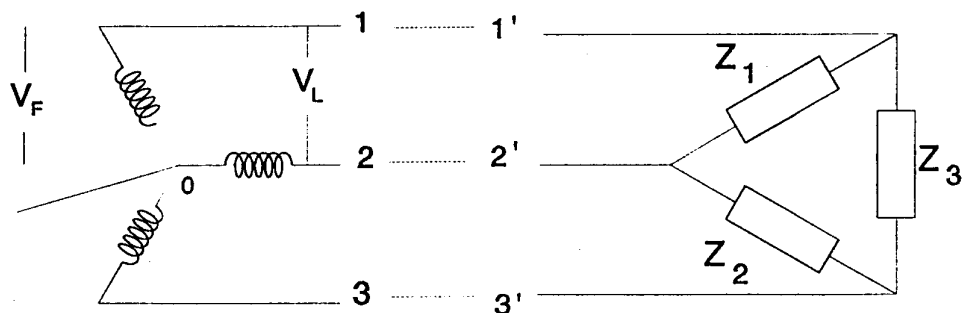
Estos valores corresponderán también a las intensidades de línea dado que en este montaje coinciden.

La potencia disipada en cada fase es

$$P = V_F I_F \cos \phi_F = 220 \text{ V} \cdot 4.4 \text{ A} \cdot 0.8 = 774.4 \text{ W} \quad (2)$$

y la potencia total será en consecuencia el triple, es decir 2323.2 W

b) Conexión de cargas en triángulo: sistema estrella-triángulo equilibrado



El generador se encuentra en las mismas condiciones que en el caso anterior, por lo que la tensión de fase será exactamente la misma. Ahora bien si observamos las cargas, conectadas ahora en triángulo, la tensión entre cada fase del triángulo corresponde a la tensión en línea suministrada por el generador.

$$V_{1'2'} = V_{12} \quad V_{1'3'} = V_{13} \quad V_{2'3'} = V_{23}$$

$$V_{F, \text{triang}} = V_{L, \text{gener}} = 381 \text{ V}$$

Las intensidades por las cargas

$$I'_{ij} = I'_F = \frac{V_F}{Z_{ij}} = \frac{381 \text{ V}}{50 \Omega} = 7.62 \text{ A} \quad (3)$$

retrasada cada una de ellas  $36.87^\circ$  respecto a la tensión de fase correspondiente.

Por las líneas que conectan el generador con las cargas pasa una intensidad de línea

$$I_1 = I'_{1'} - I_3$$

y lo mismo para las otras líneas, con lo que

$$I_1 = \sqrt{3} I'_{1'} = 13.2 \text{ A} \text{ retrasada } 30^\circ \text{ respecto a } I'_{1'}$$

$$I_2 = 13.2 \text{ A} \text{ retrasada } 30^\circ \text{ respecto a } I'_{2'}$$

$$I_3 = 13.2 \text{ A} \text{ retrasada } 30^\circ \text{ respecto a } I'_{3'}$$

Realizando un cálculo similar al caso anterior, se obtiene para cada fase una potencia de 2323.2 W, siendo la potencia total de 6969.6 W. Así cada fase en la conexión en triángulo consume la misma potencia que toda la conexión en estrella y la potencia en la conexión en triángulo es tres veces mayor que en la conexión en estrella de lo que se puede concluir

$$Z_{\text{triángulo}} = 3 Z_{\text{estrella}}$$

Puesto que la intensidad en la línea es mayor, también se pierde mayor potencia en la línea de transporte que aquí hemos despreciado. Si ésta tuviera una resistencia de tan sólo 0.5  $\Omega$  se disiparía en ella:

Conex. estrella:  $P = 0.5 \Omega (4.4 \text{ A})^2 = 9.68 \text{ W}$

Conex. triángulo:  $P = 0.5 \Omega (13.2 \text{ A})^2 = 87.12 \text{ W}$

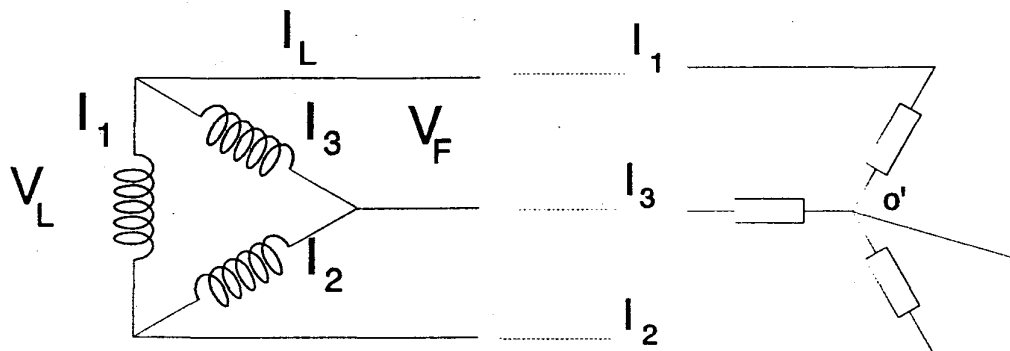
es decir, 9 veces más de pérdida en la conexión en triángulo.



10.- El generador trifásico en triángulo de la figura es tal que produce una tensión de 381 V eficaces a 50 Hz de frecuencia. Calcular la tensión de fase que suministra el generador. Si se dispone de tres impedancias iguales de valor  $50 \Omega$  con carácter inductivo y fdp de 0.8, calcular la tensión de línea y de fase en las cargas, la intensidad que pasa por ellas y la tensión de línea así como la potencia disipada si se conectan a) en estrella, b) en triángulo. Despreciar la resistencia de la línea.

#### SOLUCION

a) Conexión de cargas en estrella: dado que las impedancias son iguales, el sistema es el montaje equilibrado triángulo-estrella de la figura



La tensión producida por el generador es única e igual a la tensión entre fase y fase (tensión de línea) de la carga en estrella.

$$V_{12} = V_{13} = V_{23} = 381 \text{ V}$$

en la carga

$$V_{1'2'} = V_{1'3'} = V_{2'3'} = 381 \text{ V}$$

pero

$$V_{1'2'} = V_{1'o'} - V_{2'o'}$$

con lo que

$$V_{1'o'} = V_{1'2'}/\sqrt{3} = 220 \text{ V}$$

y lo mismo sucederá con el resto de las fases

$$V_F = V_{1'o'} = 220 \text{ V}$$

Esta caída de tensión provoca el paso una corriente por cada carga de valor

$$I_F = I'_{1'} = V_F / Z_1 = 4.4 \text{ A}$$

desfasada  $36.87^\circ$  en retraso respecto a la tensión de fase correspon-

diente. Por otra parte esta intensidad de corriente es la que circula a través de la línea que conecta el generador con la carga y que correspondería a la intensidad de línea.

Por los bobinados de cada fase del generador circulará una intensidad  $I_1$  tal que

$$I'_1 = I_1 - I_2$$

por lo que

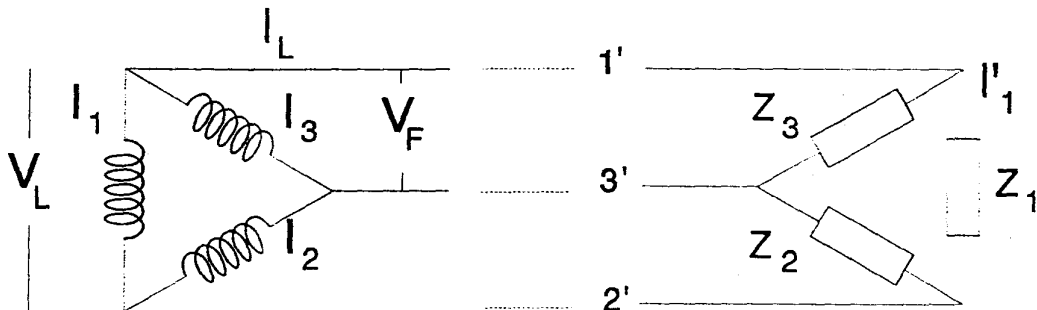
$$I_1 = I_1 / \sqrt{3} = 2.54 \text{ A}$$

desfasado  $30^\circ$  respecto a la intensidad  $I'_1$  correspondiente.

La potencia consumida en este montaje es exactamente similar a la puesta en juego con la conexión en estrella del problema anterior, dado que a través de cada impedancia pasa la misma intensidad con el mismo desfase y la misma tensión de fase. Así pues en cada impedancia se consumen 774.4 W siendo la potencia total de 2323.2 W

La diferencia con el montaje del problema anterior es que ahora existe una única tensión y ausencia de hilo neutro.

b) Conexión de cargas en triángulo. Se tiene ahora el sistema triángulo-triángulo de la figura donde el extremo de cada fase del generador se conecta con el de la impedancia correspondiente.



En este caso la tensión de línea y de fase coinciden

generador:  $V_F = V_L = V_{12} = 381 \text{ V}$

carga:  $V'_F = V'_L = V'_{12} = 381 \text{ V}$

estas ddp producirán unas intensidades en las cargas:

$$I'_{12} = V'_{12} / Z_1 = 7.62 \text{ A}$$

así

$$I'_{12} = I'_{23} = I'_{31} = 7.62 \text{ A}$$

retrasadas  $36.87^\circ$  cada una de ellas con la tensión correspondiente.

De la figura se observa que la intensidad por la línea de transporte que conecta el generador y las cargas guarda la relación siguiente

$$I_L = I'_2 - I'_3$$

por lo que

$$I_L = \sqrt{3} I'_1 = 13.2 \text{ A}$$

De estos datos se obtiene para la potencia en cada fase un valor de 2323.2 W siendo la total consumida por las cargas de 6969.6 W, nuevamente el triple que la consumida por las cargas en estrella.

En la línea de transporte, puesto que en el montaje en triángulo la intensidad de línea es 3 veces mayor que en en caso de asociación de cargas en estrella, se disipará 9 veces más potencia, y puesto que habrá una caída de potencial en la línea, para que el sistema trabaje en las mismas condiciones, el generador deberá suministrar una tensión mayor.

En este ejemplo, como en el anterior también se observa la relación de impedancias entre ambas asociaciones

$$Z_{\text{triangulo}} = 3 Z_{\text{estrella}}$$

es por esto que cuando hay que corregir el factor de potencia en trifásica, los condensadores utilizados se conectan generalmente en triángulo.

## BIBLIOGRAFIA

Los libros de fisica general suelen incluir algún capítulo dedicado a las corrientes alternas. Algunos de estos libros ya se han convertido en clásicos y entre los más modernos podemos citar

*Tipler*  
*Fisica.*  
*Ed. Reverté*

*Roller-Blum*  
*Fisica*  
*Ed. Reverté*

El segundo es de un nivel ligeramente superior al de estos apuntes; utiliza los números complejos cuando lo cree necesario pero incluye una introducción a los mismos de manera que puede resultarle provechoso a quien quiera profundizar en el tema.

Otros dos libros del mismo estilo aunque algo más antiguos son

*Robert Resnick y David Halliday.*  
*Fisica. Parte II.*  
*CECSA, 1970.*

*Marcelo Alonso y Edward J. Finn.*  
*Física. Volumen II: campos y ondas.*  
*Fondo educativo interamericano, S.A., 1976.*

Entre los libros destinados al estudio exclusivo de corrientes alternas y sus aplicaciones técnicas cabe mencionar

*P. Fleur y J.P. Mathieu*  
*Corrientes alternas - Ondas Hertzianas*  
*Ed. Paraninfo 1963.*

*J. Pichoir*  
*Curso de elctrotécnia II*  
*Ed. Marcombo 1969.*

que pese a ser libros antiguos presentan un estudio interesante del tema y sus aplicaciones, con un análisis no sólo de los sistemas monofásicos,

sino de los trifásicos de los que adolecen los libros de Física general.

Para quienes estén interesados en los conceptos fundamentales de electromagnetismo en los que se basan las corrientes alternas existen dos libros cuya principal virtud radica precisamente en ahondar en las ideas básicas

*Richard Feynman.*

*Física. Volumen II: electromagnetismo y materia.*

*Addison-Wesley, 1987.*

*Edward M. Purcell.*

*Electricidad y magnetismo.*

*Berkeley physics course - volumen 2.*

*Ed. Reverté. Barcelona, 1980.*

Cabe mención especial un libro que, junto con un estudio de las leyes generales del campo electromagnético, realiza un análisis exhaustivo de circuitos eléctricos y corrientes alternas, con ejemplos prácticos de aplicación.

*Jesús Fraile Mora*

*Electromagnetismo y circuitos eléctricos*

*Servicio de Publicaciones. Revista de Obras Públicas*

*E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*

*Madrid 1990*

Un libro ampliamente utilizado en la UPC y que puede resultar provechoso es

*Julián Fernandez y Marcos Pujal.*

*Iniciación a la física. Tomo II.*

*Barcelona, 1985*

Existen infinidad de textos dedicados integramente al electromagnetismo y en muchos de ellos se estudian las corrientes alternas. Uno que destaca especialmente por su caracter didáctico aunque el nivel es ligeramente superior al fijado aquí es

*John R. Reitz y Frederick J. Milford.*

*Fundamentos de la teoría electromagnética.*

*UTEHA, 1975.*

Un libro constituido únicamente por cuestiones, la mayoría de tipo cualitativo (practicamente no utiliza las matemáticas) y todas ellas con respuesta es

*J. M. Lévy-Leblond y André Butoli.*

*La física en preguntas. Electricidad y magnetismo.*

*Alianza Editorial. Madrid, 1986.*

## UNIDADES ELECTROMAGNETICAS

Magnitud	Unidad	Relación con las unidades fundamentales
Carga q	coulomb (C)	
Campo eléctrico E	V/m	$\text{m Kg s}^{-2} \text{C}^{-1}$
Trabajo, Energía W	joule (J)	$\text{m}^2 \text{Kg s}^{-2}$
Energía potencial U	J	$\text{m}^2 \text{Kg s}^{-2}$
Potencial eléctrico V	volt (V)	$\text{m}^2 \text{Kg s}^{-2} \text{C}^{-1}$
Capacidad C	farad (F)	$\text{m}^{-2} \text{Kg}^{-1} \text{s}^2 \text{C}^2$
Corriente eléctrica I	ampere (A)	$\text{s}^{-1} \text{C}$
fem $\epsilon$	V	$\text{m}^2 \text{Kg s}^{-2} \text{C}^{-1}$
Potencia P	watt (W)	$\text{m}^2 \text{Kg s}^{-3}$
Resistencia R	ohm ( $\Omega$ )	$\text{m}^2 \text{Kg s}^{-1} \text{C}^{-2}$
Campo magnético B	tesla (T) = Wb/m <sup>2</sup>	$\text{Kg s}^{-1} \text{C}^{-1}$
Flujo magnético $\Phi$	weber (Wb)	$\text{m}^2 \text{Kg s}^{-1} \text{C}^{-1}$
Inductancia L	henry (H)	$\text{m}^2 \text{Kg C}^{-2}$
Pulsación $\omega$	rad s <sup>-1</sup>	rad s <sup>-1</sup>
Frecuencia $\nu$	hertz (Hz)	s <sup>-1</sup>
Impedancia Z	$\Omega$	$\text{m}^2 \text{Kg s}^{-1} \text{C}^{-2}$
Admitancia Y	$\Omega^{-1}$	$\text{m}^{-2} \text{Kg}^{-1} \text{s C}^2$
Reactancia X	$\Omega$	$\text{m}^2 \text{Kg s}^{-1} \text{C}^{-2}$