

(1) 只准讨论思路，严禁抄袭

(2) 只能阅读 bb 上的材料和教材算法导论。严禁网上搜寻任何材料，答案或者帮助

**问题 1** (20 分). 对下列每个递归式，给出尽量精确的界，并证明其正确性。假定对足够小的  $n$ ,  $T(n)$  是常数。

(a)  $T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$

(b)  $T(n) = 4T(n/4) + n \log n$

(c)  $T(n) = T(n/2) + 2T(n/4) + n$

(d)  $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$

**问题 2** (20 分). 在很多的應用如图像压缩中，我们会使用二维 FFT:

给定  $x \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，其中  $N$  是 2 的整数次幂。我们的目标是计算  $y \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,

$$y[k_1, k_2] = \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{N-1} \exp\left[\frac{2\pi i \cdot (k_1 j_1 + k_2 j_2)}{N}\right] \cdot x[j_1, j_2]$$

给出一个能在  $O(N^2 \log N)$  的时间内计算  $y$  的算法，并证明它的正确性和时间复杂度。

**问题 3** (30 分). 设计分治算法:

(a) 给定一个长度为  $N$ ，元素各不相同的数组。给出一个计算数组逆序数的算法，且时间复杂度为  $O(N \log N)$ ，证明它的正确性和时间复杂度。逆序数即数组中满足  $i < j, a[i] > a[j]$  的二元组  $(i, j)$  的个数。

(b) 将 (a) 中的逆序数替换为数组中满足  $i < j < k, a[i] < a[j], a[j] > a[k]$  的三元组  $(i, j, k)$  的个数，同样给出一个算法，且时间复杂度为  $O(N \log N)$ ，证明它的正确性和时间复杂度。

**问题 4** (10 分). 如果班上的同学存在两人生日相同的概率超过  $1/2$ ，班上至少要有多少名同学？不考虑闰年的情况，给出精确数值解。

**问题 5** (20 分). 我们在课上学习了最大 2 叉堆，可以将它推广到最小  $d$  叉堆，其中的每个非叶结点有  $d$  个孩子，而不是仅仅 2 个。

- (a) 如何在一个数组中表示一个  $d$  叉堆? (数组索引从 1 开始, 写出推导过程)
- (b) 请给出 **EXTRACT-MIN** 在最小  $d$  叉堆的一个有效实现, 并用  $d$  和  $n$  表示出它的时间复杂度。
- (c) 给出 **DECREASE-KEY**( $A, i, k$ ) 在最小  $d$  叉堆的一个有效实现 (其中  $i$  是要修改的元素现在在堆中的位置,  $k$  是修改后的值), 并用  $d$  和  $n$  表示出它的时间复杂度。