

(1) 只准讨论思路，严禁抄袭

(2) 只能阅读 bb 上的材料和教材算法导论。严禁网上搜寻任何材料，答案或者帮助

问题 1 (15 分). (a) 我们在课堂上展示了切比雪夫的素数分布定理：存在 $C_1, C_2 = O(1)$ 使得 $\pi(n) \in [C_1 \frac{n}{\log n}, C_2 \frac{n}{\log n}]$ 。证明该定理能导出以下结论：存在常数 C ，使得对所有足够大的正整数 n ，区间 $[n, Cn]$ 中都至少包含一个质数。

(b) 费马小定理告诉我们，对于任意一个质数 p ，若整数 a 满足 $(a, p) = 1$ ，则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ 。但是它的逆命题却不一定成立。我们称满足费马小定理结论却不是质数的数 n 为伪质数。(1) 证明 $n = 561$ 是一个伪质数；(2) 计算有多少 $a \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 满足 $(a, n) = 1$ 。

问题 2 (25 分). 给定一个二分图 $G = (L \cup R, E)$ ，设计算法找到 G 中的最小顶点覆盖 (vertex cover)。

请给出伪代码（可以直接调用最大流过程），证明算法正确性以及时间复杂度。

提示：考虑顶点覆盖与割的关系。

问题 3 (20 分). 我们可以将一般图 $G = (V, E)$ 上的顶点覆盖 (vertex cover) 问题转换为一个线性规划问题。

- (a) 使用变量 $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ 来指示每个顶点的状态（严格来说，我们希望 $x_i = 1$ 或 0 来指示在覆盖集中与否—但是线性规划需要 x_i 的范围组成凸包）。请设计出线性规划的目标和约束。
- (b) 解出此线性规划后，得到 $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ 的实数解，然后令 $S = \{v_i | x_i \geq 1/2\}$ 。证明 S 是一个顶点覆盖，且同最小的顶点覆盖相比， S 的近似比不大于 2。

问题 4 (15 分). EQ-SUM 问题：给定 n 个正整数 s_1, s_2, \dots, s_n ，找到一个划分将它们分为两部分 P_1, P_2 ，并满足两部分的和相等，即 $\sum_{s_i \in P_1} s_i = \sum_{s_j \in P_2} s_j$ 。证明 EQ-SUM 问题是一个 NPC 问题。

注: 可以从任何已知的 NPC 问题作规约 (包括 3SAT, CLIQUE, Vertex-Cover, Subset-Sum)。

问题 5 (25 分). 染色问题: 给定一个图 $G = (V, E)$, 找到最少的颜色数量 k , 使得 G 是可以被 k -染色的 (图 G 中每个顶点都被染上 k 种颜色之一, 且相邻顶点的颜色都不同)。

(a) 染色问题是 NP 难 (NP-hard) 问题吗? 证明你的结论。

提示: 通过证明此优化问题的判定形式为 NP-complete 来得到 NP 难的结论。

(b) (5 分) 染色问题是 NPC 问题吗?

(c) (5 分) 对于 $k = 2$ 的特殊情况, 设计一个多项式时间算法找到图 G 的一个 2-染色实例。请给出伪代码, 证明算法正确性以及时间复杂度。