算法基础 2022 春 Homework 1

任课老师：陈雪 due: Mar 3, 15:30

问题 1 (15 分). 给出辗转相除法的时间复杂度上界 (5 分)，写出详细分析过程 (10 分)。辗转相除法的伪代码如下：

Algorithm 1 Euclid's algorithm

```
function EUCLID(a, b)
    if b = 0 then
        return a
    else
        return EUCLID(b, a mod b)
    end if
end function
```

问题 2 (15 分). 根据增长的阶来从小到大排序下面的函数 (5 分)，给出分析过程 (10 分)：(log 以 2 为底数)

$$2^{\Theta(\frac{\log n}{\log\log n})},\quad \log(n!),\quad (\log n)^{\Theta(\log n)},\quad n^{\Theta((\log\log\log n))},\quad \sqrt{n},\quad n^2。$$

提示: 斯特林公式：$n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n$

问题 3 (40 分). 在课上我们观察到了 Shell Sort 的一个重要性质：

一旦对数组 A 调用了步长为 h 的选择排序，A 数组在 Shell Sort 的未来时刻总是有 (注：此处的未来时刻指调用 InsertionSort(h') 之后，而不包括 InsertionSort(h') 的进行过程中):

$$1 \le i \le n-i, A[i] \le A[i+h] \tag{1}$$

使用上述观察到的性质，我们在此题完成课上结果的证明：

假设 A 的元素各不相同，给定步长 h_1, h_2, h_3，其中 h_3 和 h_2 互质，考虑在数组 A 上首先调用了 InsertionSort(h_3) 和 InsertionSort(h_2), 然后调用 InsertionSort(h_1)。

(a) 证明在调用 InsertionSort(h_1) 之前，数组 A 满足如下性质：对任意的 j 和 ℓ 满足 $j > \ell + 2h_2h_3$ 时，总会有 $A[j] > A[\ell]$。

提示：将 h_2, h_3 代入性质(1)，可得 $A[i] \le A[i+h_2]$，$A[i] \le A[i+h_3]$。

附加题：证明条件加强到 $j > \ell + h_2h_3$ 时，也满足上述关系。(10 分)

(b) 在 (a) 的基础上，证明最后调用 InsertionSort(h_1) 所需时间为 $O(n \cdot \frac{h_3 h_2}{h_1})$。

问题 4 (10 分). 投掷一粒均匀的 k 面骰子，在骰子的面上分别标有数字 1 到 k，如果 X 是投出的点数，X 的期望大小是多少？(5 分) 如果想要反复投掷骰子来得到特定的点数 C，投掷次数的期望是多少 (5 分)？写出分析过程。

问题 5 (20 分). 对下面两个程序，给出时间复杂度的最好估计

(a) 分析下面的程序，给出算法的时间复杂度 (3 分)，并给出分析过程 (7 分):

提示： $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Algorithm 2 5.1

```
function A(n)
    t = 1
    for i = 1 to n do
        for j = i to n do
            for k = 1 to j do
                t = t+1
            end for
        end for
    end for
end function
```

(b) 分析下面的程序，给出算法的时间复杂度 (3 分)，并给出分析过程 (7 分):

Algorithm 3 5.2

```
function B(n)
    if n == 1 then
        return 1
    else
        t = 0
        for i = 1 to n − 1 do
            t = t+B(i)
        end for
        return t
    end if
end function
```