算法基础 2022 春 Homework 2

任课教师：陈雪 due: Mar 10, 15:30

（1）只准讨论思路，严禁抄袭

（2）只能阅读 bb 上的材料和教材算法导论。严禁网上搜寻任何材料，答案或者帮助

问题 1 (30 分). 分析程序，证明下面的问题：

Algorithm 1 Quick Sort algorithm

```
function QSort(l, r)
    if l ≥ r then
        exit
    pick a random element in A[l], ..., A[r] as pivot
    i = l, j = r
    while i ≤ j do
        while A[i] < pivot do i = i + 1
        while A[j] > pivot do j = j − 1
        if i ≤ j then
            Swap(A[i], A[j])
            i = i + 1
            j = j − 1
    QSort(l, j)
    QSort(i, r)
```

(a)（10 分）每次调用 QSort(l, r) 时，if 块内的语句至少执行一次。

(b)（10 分）外层循环结束后，恒有 $A[l], ..., A[i-1] \leq pivot, A[j+1], ..., A[r] \geq pivot$ 成立。

(c)（10 分）外层循环结束时，$i \neq l$ 且 $j \neq r$。故程序可以终止。

问题 2 (40 分). 以下是快速排序的找第 k 大元素的变形，主过程会直接调用 RandomSelect$(A, 1, n, k)$。修改课上使用比较次数期望的分析方法，证明此程序的期望时间复杂度是 $O(n)$。

提示： 程序的功能分析可参考算法导论第 9 章关于中位数的内容。为了得到本题所有的分数，只能使用基于比较次数概率与期望的方法。

Algorithm 2 Random select algorithm

```
function RandomPartition(A, p, r)
    pick a random element in A[p], ..., A[r] as pivot
    x = pivot
    i = p − 1, Exchage pivot and A[r]
    for j = p, ..., r − 1 do
        if A[j] ≤ x then
            i = i + 1, Exchage A[i] and A[j]
    Exchage A[i + 1] and A[r]
    return i + 1
function RandomSelect(A, p, r, i)
    if p == r then
        return A[p]
    q =RandomPartition(A, p, r)
    k = q − p + 1
    if i == k then
        return A[q]
    else
        if i < k then
            return RandomSelect(A, p, q − 1, i)
        else
            return RandomSelect(A, q + 1, r, i − k)
```

问题 3 (10 分). 参考算法导论第 8.1 章，考虑 n 个未知元素所有的 $n!$ 个排列。

(a)（10 分）对任何的基于比较排序的算法 A，证明对至少 99% 的全排列，A 的运行时间为 $\Omega(n \log n)$。也就是

$$\Pr_{\sigma}\left[Time\Big(A(\sigma)\Big) \geq 0.5 n \log n\right] \geq 0.99.$$

(b)（10 分）**附加题:** 考虑任何基于比较排序的随机化算法 A，证明存在某个输入排列 σ，使得 A 的期望时间为 $\Omega(n \log n)$。也就是

$$\mathbb{E}_{r}\left[Time\big(A(\sigma, r)\big)\right] \geq 0.5 n \log n.$$

提示：可以假设算法 A 最多使用 n^2 个随机比特。于是 r 的取值范围为 $\{0,1\}^{n^2}$，同时注意 $A(\cdot, r_0)$ 为确定性的排序算法在固定的随机串 $r_0 \in \{0,1\}^{n^2}$ 后。

(c)（10 分）**附加题:** 加强 (b) 的结果成

$$\Pr_{\sigma}\left[\mathop{\mathbb{E}}_{r}\left[Time\big(A(\sigma, r)\big)\right] \geq 0.5 n \log n\right] \geq 0.99.$$

问题 4 (20 分)**.** 考虑插入排序的过程中，$A[1] \leq A[2] \leq \ldots \leq A[j]$ 已经排好顺序，此时插入 $A[j+1]$。

(a)（10 分）设计一个算法（提供伪代码）在 $O(\log n)$ 的时间按内找出 $A[j+1]$ 的正确位置。

(b)（10 分）证明时间复杂度和算法的正确性。