算法基础 2022 春 Homework 4

任课教师：陈雪 due: Apr 8, 23:59

（1）只准讨论思路，严禁抄袭

（2）只能阅读 bb 上的材料和教材算法导论。严禁网上搜寻任何材料，答案或者帮助

以下所有算法的设计请给出伪代码，证明算法正确性以及时间复杂度。

问题 1 (20 分)**.** 为了将一个文本串 $x[1, \cdots, m]$ 转换为目标串 $y[1, \cdots, n]$，我们可以使用多种变换操作。我们的目标是，给定 x 和 y，求将 x 转换为 y 的一个变换操作序列。我们使用一个数组 z 保存中间结果，假定它足够大，可存下中间结果的所有字符。初始时，z 是空的，结束时，应有 $z[j] = y[j], j = 1, 2, \cdots, n$。我们维护两个下标 i 和 j，分别指向 x 中位置和 z 中位置，变换操作允许改变 z 的内容和这两个下标。初始时，$i = j = 1$。在转换过程中应处理 x 的所有字符，这意味着在变换操作结束时，应有 $i = m + 1$。

我们可以使用如下变换操作：

1. 复制：从 x 复制一个字符到 z，即进行赋值 $z[j++] = x[i++]$
2. 替换：将 x 中的一个字符替换为另一个字符 c，即 $z[j++] = c, i++$
3. 删除：删除 x 中一个字符，即 $i++$
4. 插入：将字符 c 插入中 z，即 $z[j++] = c$

每种变换操作每次执行都有一定的代价 $cost_{operate}$，x 到 y 的编辑距离是将 x 转换为 y 的最小的变换代价之和。设计动态规划算法，输入为文本串 x, 目标串 y 和每种操作的代价 $cost$，求 $x[1, \cdots, m]$ 到 $y[1, \cdots, n]$ 的编辑距离并打印最优操作序列。

给出伪代码，证明算法正确性以及分析算法的时间和空间复杂度。

问题 2 (20 分)**.** 给定一棵有 n 个顶点的树 T，树上顶点集合 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，每个顶点 $v_i \in V$ 被赋予了一个权重 $f_i \in \mathbb{R}$。如果一个顶点子集 $S \subset V$ 满足对于任意的 $v_i, v_j \in S$，v_i 和 v_j 都不相邻，我们称它为 T 的一个顶点独立子集。我们希望找到树上的一个顶点独立子集 S_{max}，使得 $\sum\limits_{v_i \in S_{max}} f_i$ 能够最大化。

树 T 采样算法导论 10.4 节介绍的左孩子右兄弟表示法描述，顶点的权重以每个顶点的属性的形式给出。算法输入为树 T 的根 $root$，输出为最优的顶点独立子集 S_{max}。写出算法伪代码，证明算法正确性以及时间复杂度。

问题 3 (20 分). 在很多网络问题中，我们需要合理地设置若干个通信中心，来调配各个节点间的流量。给定一棵有 n 个节点的树状网络 T，其中节点分别是 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，每对相邻节点 v_i 和 v_j 之间有正整数距离 f_{ij}。不相邻节点 v_p 和 v_q 之间的距离定义为 $dist(v_p, v_q) = \sum\limits_{v_i v_j \in v_p \sim v_q} f_{ij}$，即不相邻节点的距离是两节点间的简单路径上的距离之和。

现在我们想在网络上设置 k 个中心 $\{u_1, \cdots, u_k\} \subset \{v_1, \cdots, v_n\}$。每个节点 v_i（包括中心本身）会被分配到距离它最近的中心 u_j，该节点的通信代价 $cost(v_i) = \min\limits_{1 \le j \le k} dist(v_i, u_j)$。设计算法，输出树上的 k 个中心，使得所有节点通信代价中的最大值 $\max\limits_{1 \le i \le n} cost(v_i)$ 最小化。

树 T 采样算法导论 10.4 节介绍的左孩子右兄弟表示法描述，父节点到子节点的距离以子节点的属性的形式给出。算法输入为树 T 的根 $root$ 和中心个数 k，输出为最优的 k 个中心 $\{u_1, \cdots, u_k\}$。给出算法的伪代码，证明算法正确性以及时间复杂度。

提示：可以先将它转化为一个判定问题，即原问题是否存在不大于某个距离 r 的解。该判定问题可以用贪心算法解决，然后使用二分搜索便能找到最优距离。

问题 4 (25 分). 给定一个序列 $a_1, \cdots, a_n$，设计一个算法来找到最长递增子序列 $s_1, \cdots, s_m$。给出伪代码，证明算法正确性以及时间复杂度。

提示：使用静态二叉搜索树能在 $O(n \log n)$ 时间内得到结果。

问题 5 (15 分). 给定 n 个物品及它们的重量 $w_1, \cdots, w_n$ 和价值 $v_1, \cdots, v_n$（$w_i, v_i \in \mathbb{Z}^+, 1 \le i \le n$）。现在你有一个承重为 W 的背包，如何才能带走总价值尽可能多的物品？设计一个动态规划算法来输出最优的选择。

(a) 给出伪代码，证明它的正确性以及时间复杂度。

(b) 它的时间复杂度是多项式级别的吗？