# 矩阵 LU 分解

### 矩阵 LU 分解

LU分解定理

例

## LU分解定理

设  $A \in \mathbb{R}$  阶非奇异矩阵,则存在唯一的单位下矩阵 L 和上三角矩阵 U,使得

$$A = LU$$

的充分必要条件是 A 的顺序主子式均为非 0

其中矩阵 L 型如

$$L = egin{bmatrix} 1 & & & & & \ l_1 & 1 & & & & \ l_2 & l_3 & 1 & & & \ dots & dots & \ddots & \ddots & \ l_x & l_y & \dots & l_z & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 U 型如

$$U = egin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_a \ & u_4 & u_5 & \dots & u_b \ & \ddots & \ddots & dots \ & & \ddots & \ddots & dots \ & & & \ddots & u_c \ & & & u_z \end{bmatrix}$$

### 例

对于矩阵

$$A = egin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \ 1 & 1 & 9 \ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

其各个顺序主子式分别如下

$$D_1=|2|=2
eq 0$$
  $D_2=egin{bmatrix} 3 & 3 \ 1 & 1 \end{bmatrix}=-1
eq 0$ 

$$D_3 = egin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \ 1 & 1 & 9 \ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 0 & 1 & -14 \ 1 & 1 & 9 \ 0 & 1 & -15 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \ 1 & 1 & 9 \ 0 & 1 & -15 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \ 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 
eq 0$$

由此可知,矩阵A可分解为如下形式的两个矩阵的相乘

$$LU = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ l_1 & 1 & 0 \ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \ 0 & u_4 & u_5 \ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix} \ = egin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \ l_1 u_1 & l_1 u_2 + u_4 & l_1 u_3 + u_5 \ l_2 u_1 & l_2 u_2 + l_3 u_4 & l_2 u_3 + l_3 u_5 + u_6 \end{bmatrix}$$

由此可知

$$egin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \ 1 & 1 & 9 \ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \ l_1u_1 & l_1u_2 + u_4 & l_1u_3 + u_5 \ l_2u_1 & l_2u_2 + l_3u_4 & l_2u_3 + l_3u_5 + u_6 \end{bmatrix}$$

由此可知

$$\left\{ egin{array}{lll} u_1 & = 2 \ u_2 & = 3 \ u_3 & = 4 \ l_1u_1 & = 1 \ l_1u_2 + u_4 & = 1 \ l_1u_3 + u_5 & = 9 \ l_2u_1 & = 1 \ l_2u_2 + l_3u_4 & = 2 \ l_2u_3 + l_3u_5 + u_6 & = -6 \ \end{array} 
ight.$$

### 解得

$$\left\{egin{array}{lll} u_1 &= 2 \ u_2 &= 3 \ u_3 &= 4 \ u_4 &= -rac{1}{2} \ u_5 &= 7 \ u_6 &= -1 \end{array}
ight. , \quad \left\{egin{array}{lll} l_1 &= rac{1}{2} \ l_2 &= rac{1}{2} \ l_3 &= -1 \end{array}
ight.$$

#### 由此可得

$$L = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ rac{1}{2} & 1 & 0 \ rac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = egin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \ 0 & -rac{1}{2} & 7 \ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$