

矩阵 LU 分解

矩阵 LU 分解

LU分解定理

例

LU分解定理

设 A 是 n 阶非奇异矩阵，则存在唯一的单位下矩阵 L 和上三角矩阵 U ，使得

$$A = LU$$

的充分必要条件是 A 的顺序主子式均为非 0

其中矩阵 L 型如

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_1 & 1 & & & \\ l_2 & l_3 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_x & l_y & \dots & l_z & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 U 型如

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_a \\ & u_4 & u_5 & \dots & u_b \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_c \\ & & & & u_z \end{bmatrix}$$

例

对于矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

其各个顺序主子式分别如下

$$D_1 = |2| = 2 \neq 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -14 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

由此可知，矩阵 A 可分解为如下形式的两个矩阵的相乘

$$\begin{aligned} LU &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ l_1 u_1 & l_1 u_2 + u_4 & l_1 u_3 + u_5 \\ l_2 u_1 & l_2 u_2 + l_3 u_4 & l_2 u_3 + l_3 u_5 + u_6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ l_1 u_1 & l_1 u_2 + u_4 & l_1 u_3 + u_5 \\ l_2 u_1 & l_2 u_2 + l_3 u_4 & l_2 u_3 + l_3 u_5 + u_6 \end{bmatrix}$$

由此可知

$$\begin{cases} u_1 & = 2 \\ u_2 & = 3 \\ u_3 & = 4 \\ l_1 u_1 & = 1 \\ l_1 u_2 + u_4 & = 1 \\ l_1 u_3 + u_5 & = 9 \\ l_2 u_1 & = 1 \\ l_2 u_2 + l_3 u_4 & = 2 \\ l_2 u_3 + l_3 u_5 + u_6 & = -6 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} u_1 & = 2 \\ u_2 & = 3 \\ u_3 & = 4 \\ u_4 & = -\frac{1}{2} \\ u_5 & = 7 \\ u_6 & = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} l_1 & = \frac{1}{2} \\ l_2 & = \frac{1}{2} \\ l_3 & = -1 \end{cases}$$

由此可得

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

