矩阵 LU 分解

矩阵 LU 分解

- LU分解定理
- 例

LU分解定理

设 A 是 n 阶非奇异矩阵，则存在唯一的单位下矩阵 L 和上三角矩阵 U，使得

$$A = LU$$

的充分必要条件是 A 的顺序主子式均为非 0

其中矩阵 L 型如

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_1 & 1 & & & \\ l_2 & l_3 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_x & l_y & \dots & l_z & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 U 型如

$$U=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_a \\ & u_4 & u_5 & \cdots & u_b \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_c \\ & & & & u_z \end{bmatrix}$$

例

对于矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

其各个顺序主子式分别如下

$$D_1=|2|=2\neq 0$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&1&9\\1&2&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&-14\\1&1&9\\0&1&-15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&9\\0&1&-15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

由此可知，矩阵 A 可分解为如下形式的两个矩阵的相乘

$$\begin{aligned}LU&=\begin{bmatrix}1&0&0\\l_1&1&0\\l_2&l_3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1&u_2&u_3\\0&u_4&u_5\\0&0&u_6\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}u_1&u_2&u_3\\l_1u_1&l_1u_2+u_4&l_1u_3+u_5\\l_2u_1&l_2u_2+l_3u_4&l_2u_3+l_3u_5+u_6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{bmatrix}2&3&4\\1&1&9\\1&2&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1&u_2&u_3\\l_1u_1&l_1u_2+u_4&l_1u_3+u_5\\l_2u_1&l_2u_2+l_3u_4&l_2u_3+l_3u_5+u_6\end{bmatrix}$$

由此可知

$$
\begin{cases}
u_1 & = 2 \\
u_2 & = 3 \\
u_3 & = 4 \\
l_1 u_1 & = 1 \\
l_1 u_2 + u_4 & = 1 \\
l_1 u_3 + u_5 & = 9 \\
l_2 u_1 & = 1 \\
l_2 u_2 + l_3 u_4 & = 2 \\
l_2 u_3 + l_3 u_5 + u_6 & = -6
\end{cases}
$$